HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	精度保証付き数値計算の応用：カオス ： 渾沌を殺さず七竅を鑿つために
Author(s)	荒井, 迅
Citation	数学セミナー, 47(11), 31-35
Issue Date	2008-11-01
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/42701
Type	journal article
File Information	araizin_chaos_intro.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

精度保証付き数値計算の応用：カオス

渾沌を殺さず七竅を鑿つために

荒井 迅

●北海道大学創成科学共同研究機構/JST さきがけ

1　はじめに

精度保証という言葉から皆さんはどのような印象を受けるだろうか．厳格厳密な，ともすると冷たい響きを感じる人もいるだろうが，私はなぜか頑固な江戸っ子職人が頭に浮かぶ．おいら精度に関しては嘘はつけねぇよ，というわけだ．かたやカオスは何が何だかわからない．『荘子』内篇の末尾に有名な「渾沌」の話があるが，ここに擬人化されて登場する渾沌は目も鼻も口も耳もない，のっぺらぼうである．こんな得体の知れない人では，頑固職人とは話が合いそうにない．そもそも目も鼻も口も耳ないから話せないのだ．そして人々が試みに渾沌に目鼻をつける（七竅を鑿つ）と，あっけなく渾沌は死んでしまう．

本稿の登場人物である精度保証とカオスの関係も頑固職人と渾沌に劣らず難しい．単に便利な計算方法を用いてカオスの研究が進んだという話に留まらず，ここにはカオスの本質に関わる微妙な問題が潜んでいる．

2　カオス

カオスと言えばまず出てくるのが図 1 のローレンツ・アトラクタである．

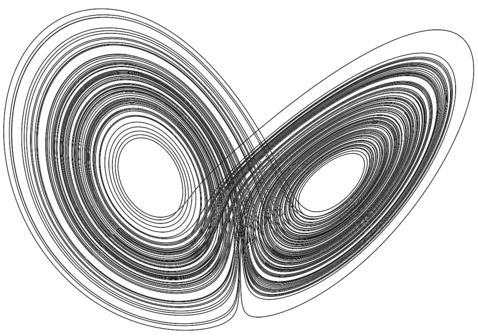

図 1: ローレンツ・アトラクタ

この図は

$$\dot{x} = -10x + 10y$$
$$\dot{y} = -xz + 28x - y$$
$$\dot{z} = xy - \frac{8}{3}z$$

で与えられるローレンツ方程式という常微分方程式の軌道を，適当な初期値に対しコンピュータで描いたものである．軌道は蝶の羽のように見える二枚のシートに沿って，あるときは右側を回り，またあるときは左側を回り，と気ままで複雑な動きを見せる．

この方程式を見いだしたローレンツはもともと気象学者であり，大気の流れをモデル化した別の方程式を研究していた．1950 年代の終わりごろのことである．当時の最先端だった真空管計算機で軌道を計算していたローレンツは，あるとき奇妙な現象に気がついた．計算機が吐き出す計算結果から軌道の途中のある一点の数値を抜き出し，それを初期値として計算を再開すると，しばらくは先の計算と同じ数値が出力されるものの，やがてもとの軌道とまったく違う数値を示すようになったのである．初めはプ

ログラムか計算機に誤りがあると思っていたローレンツだが，原因は意外なところにあった．彼は途中の計算結果としてプリンタに印字された（当時はディスプレイなどない）数値を用いていたのだが，すべての数値を印字すると時間がかかるため，有効数字三桁のみを印字していたのである．計算機の内部ではもっと高い精度で計算していたものの，いかんせん印字が遅いので出力は三桁に制限していた．ところが，この打ち切りによって生じた誤差が時間とともに拡大して，やがてまったく別の軌道になってしまったのである．

ローレンツはこの現象を注意深く研究し，初期値の違いをいくら小さくとっても，やがてその違いが拡大されて，まったく別の軌道にわかれてしまうことを観察した．現在では「初期値に対する鋭敏な依存性」と呼ばれる性質である．どのような性質を持ってカオスと呼ぶかについては，研究者の間でも大きな違いがあるのだが，それでも広くカオスの本質として認識されているのがこの初期値に対する鋭敏な依存性である（カオスのさまざまな定義に関しては [1] が詳しい）．彼はこの現象が天気予報の困難さの本質にあると考え，それを解説するために同様の性質を持つ，より簡単なモデルとして提出したのがローレンツ方程式である．

初期値に対する鋭敏な依存性を寓話的に表現する思考実験としてバタフライ効果が良く知られている．「ブラジルでの蝶の羽ばたきが，テキサスでトルネードを引き起こす可能性がある」と表現されるバタフライ効果だが，これはブラジルで蝶がはばたいたら必ず一週間後にテキサスでトルネードが起きる，と

いうような予報を意味するのではない．むしろそのような予報は不可能である，という主張である．「蝶が羽ばたいた世界」と「羽ばたかなかった世界」の二つを観察しつづけると，初めはこの二つの違いはほとんどないように見えるが，やがてどんどん差が大きくなり，いつしか片方では起きていないトルネードがもう一方では起きている，というくらいの大きな違いになってしまう．蝶の羽ばたきでなくとも，あなたの指の一本のわずかな動きであってもよい．そのようなわずかな違いを全世界にわたり観測することは不可能である以上，完璧な天気予報は不可能だ，というのが主張である．

このことをローレンツ方程式で見てみよう．ある点 (x, y, z) を出発する軌道を考え，この軌道がローレンツ・アトラクタの左の羽を回ったら L，右の羽を回ったら R という記号を出力することにする．すると，(x, y, z) に対し

$$LRRLRLRLLRRRLLRRRLLRL\cdots$$

といった記号の無限列が得られる．では，(x, y, z) からほんの少しだけ離れた点 (x', y', z') から軌道を始めたらどうなるか．最初は 2 つ軌道は互いに近いので，同じ羽を回る．すなわち，$LRRLRLR\cdots$ というように同じ記号が出力される．ところが，次第に 2 つの軌道が離れ出し，(x, y, z) から始めた軌道では 8 周目は L だったのに，(x', y', z') から始めると 8 周目が R になる，というように，やがて別の羽を回るようになる．そして一度記号が異なってしまうと，後は関係ない列が続き，軌道はまったく別の様相を呈するのである．

さて，ここで図１をもう一度見てみよう．図の軌道はもちろんコンピュータで描いたものだが，コンピュータの計算には誤差がつきものである．ローレンツ方程式が初期値に対する鋭敏な依存性を持つとすると，たとえ計算で生じる誤差がどんなに小さくても，やがてその誤差が拡大し，計算機が描く軌道は真の軌道から離れていってしまうだろう．すなわち図１に描かれた軌道は，真の軌道とは全然違うものになっている可能性があるということだ．近年では多倍長計算といって，普通の数値計算で用いる精度の数倍，ときには何万倍という精度で計算を行なうことも簡単にできるようになったが，どんなに精度を上げても，やはりいつかは真の軌道から離れてしまう．

では，精度保証付き数値計算を導入すれば真の軌道を見ることができるだろうか．実は単純に精度保証をすると，より悲しいことになる．図２が典型的な状況である．これはローレンツ方程式ではないが，あるやはりカオス的な方程式において y 軸の一点を出発した軌道を精度保証付き数値計算で求めたものである．真の軌道は図の長方形の中を通ることが保証されるが，軌道を長く計算すればするほど，急速に長方形が大きくなっている．精度保証をするということは，誤差がどのくらいの大きさに拡大するかということを含めて厳密に評価をするということである．そのため，方程式が誤差を拡大する性質を持っていると，誤差の評価が大きくなり過ぎて意味のある結果が得られなくなってしまうのである．普通の数値計算は，たとえ正確でなくてもそれらしい絵を描いてくれるのだが，精度保証付き数値計算はは正

直に「おいらには良くわからねぇや」と答えてしまうのである．

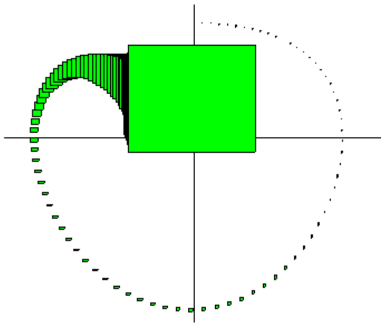

図 2: 悲しい結果

計算機を用いてカオスを捉えることは不可能なのだろうか．さらによく考えると，ローレンツ方程式はカオス的だという主張も怪しくなってくる．本当に「どんなに小さい誤差でも」いつか軌道は離れていくのだろうか．百万桁の精度でローレンツ方程式を計算してカオス的に見えても，それは実は単なる精度不足で，十億桁の精度で計算すればカオスでも何でもないかも知れない．これらの問題を乗り越えるためには，やはりカオスを生み出すからくりに立ち帰って考えるべきである．

3　カオスのからくり

前節で見たように，微分方程式などの力学系に現われるカオスを直接理解しようとしても，軌道の複雑さに阻まれてなかなか本質に辿り着けない．そこで，カオス的な性質を持ちつつも，人間が理解できるモデルを人工的に作ろうという試みが行なわれた．

なかでも最も基本的かつ重要なのが「スメールの馬蹄形」である．高次元ポアンカレ予想を解決した

後，スメールは多様体そのものを対象とした研究から，その上の微分方程式や写像，すなわち力学系の研究に重点を移した．そしてある種の微分方程式が持つ周期軌道の多様さを説明するため，解が相空間のある断面を横切ってから再びその断面に帰って来る様子を写像で模式化したモデルを考えた．

その馬蹄形写像とは，可微分同相写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ であって領域 N を図 3 のように馬蹄のように折り曲げて自分の上に写像するものである（実際には写像の微分に関する「一様双曲性」という条件も必要になるが，ここでは触れないことにする）．領域 N は，鉛直方向には伸ばされる一方，水平方向には縮められ，そして折り畳まれる．この「伸ばして曲げる」という構造が複雑さの本質だとスメールは喝破したのである．

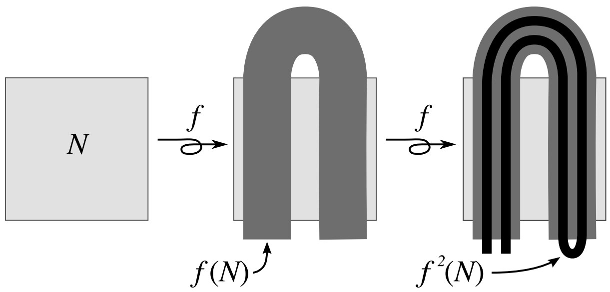

図 3: スメールの馬蹄形写像

馬蹄形写像の素晴しさは，その振舞いが完全に記述できるという点にある．領域 N の中に過去も未来も永遠にとどまるような軌道の集合，すなわち

$$\Lambda := \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(N)$$

を考えると，この集合は記号列で完全に記述できる．

すなわち，$x \in \Lambda$ に対して，$f^n(x)$ が $f(N) \cap N$ の左側の帯にいるときは L，右側にいるときは R という記号を出力することにすると，x に対して

$$\cdots LLRLLRRRL\dot{R}RRLRRLRRLR \cdots$$

というような記号の無限列が対応する（$\dot{}$ は $f^0(x) = x$ に対応する記号の位置を示すため便宜的につけたものである）．集合 Λ はこのような記号の無限列全体 $\Sigma_2^{\mathbb{Z}} := \{L, R\}^{\mathbb{Z}}$ と同一視できる．さらに Λ 上の f の作用も $\Sigma_2^{\mathbb{Z}}$ においてすべての記号を一個左にずらす（$\dot{}$ を右に一個ずらすと言ってもよい）操作と完全に対応することが示せる．この記号表現により，馬蹄形写像が豊かな周期点の構造を持つこと，また（一様双曲性が必要になるが）初期値に関する鋭敏な依存性を持つこともわかる．

一見すると非常に特殊な例のように見えるが，実は馬蹄形写像はカオス的力学系においてある意味で普遍的に存在し，カオスの本質と不可分なものである．またこのように単純化したモデルを考えることにより，カオスが生じるからくりを抽象化して把握できるだけでなく，現実的な力学系のカオスを研究する場合の指針も得られる．個々の軌道をいくら追いかけても力学系が本当にカオス的かどうかはわからなかったのだが，系が馬蹄形写像と同じ構造を持つことが示せれば，その系がカオス的であること，さらにそのカオスが記号列で表現できることがわかるのである．馬蹄形写像を特徴づける構造は位相的には単純かつ大雑把なものであり，その存在を示すのは軌道を長時間追いかけるよりもたやすい．

4　カオスと精度保証

せっかく解説した馬蹄形写像であるが，実はローレンツ方程式は馬蹄形写像だけでは理解できない．アトラクタの下に隠れている不動点が問題で，その近傍を通ると領域が激しく潰されたり千切られてしまい，馬蹄形の描像が破綻する．そこで不動点の振舞いまでこめてモデル化したのが「幾何学的ローレンツ・アトラクタ」である．本当にローレンツ方程式がカオス的であるかという問題は，最終的にこのモデルと同じ構造をローレンツ方程式が持つことが証明され，肯定的に決着した．

このことを証明したのはタッカー [2] であるが，計算は困難を極めた．幾何学的ローレンツ・アトラクタの存在を示すためには，軌道が羽の回りを一周する様子を精度保証付きで計算すれば良いのだが，あまりに誤差が急速に拡大してしまうため，普通に精度保証すると羽を一周することもできない．タッカーは軌道を一気に計算するのではなく，一周の間に 13 か所の中継地点を設け，少しずつ慎重に計算を進めることでこの困難を解決した．さらに原点の近傍を通る軌道に対しては精度保証付き数値計算だけではどうしても計算が上手くゆかず，原点の回りに限って Normal Form 理論という解析的な手法を用いた．古典的な解析と，精度保証付き数値計算を組み合わせることにより初めて全貌が明らかとなったのである．

タッカーの結果は長年の疑問に解決を与える画期的なものであったが，手法がローレンツ方程式に特化しているため，より広い力学系に適用できる方法がその後も研究されている．

中でも，精度保証付き数値計算と近年発展した計算ホモロジー理論を組合せた手法がその適用範囲の広さと手法の新しさで近年注目されているので，以下ではこれを簡単に解説する．

この方法の根底にあるのは，写像 $f: M \to M$ そのものではなく，ホモロジーを取った $f_*: H_*(M) \to H_*(M)$ を調べることにより力学系の情報を得ようというアイディアである．たとえ f が難しい扱いにくい写像であっても，f_* は単なる加群の準同型となるので，その性質を調べやすいのである．

たとえば，写像 $f : M \to M$ の複雑さを量る位相的エントロピー $h_{\mathsf{top}}(f)$ という不変量がある．この量が正であれば f はカオス的であると言えるのだが，一般的に $h_{\mathsf{top}}(f)$ を計算するのはたいへん難しい．そこでホモロジーで考える．線型写像 $f_* : H_*(M, \mathbb{R}) \to H_*(M, \mathbb{R})$ の固有値の絶対値のうち最大のものを $\sigma(f_*)$ とすると（f が C^∞ 級であれば）

$$\log \sigma(f_*) \leq h_{\mathsf{top}}(f)$$

という定理がなりたつ．すなわち，f_* が絶対値が 1 より大きい固有値を持てば，f はカオス的であると言えるのである．

この定理は力学系の複雑さを研究する上で非常に重要なものであるが，相空間が位相的に自明な空間，たとえば $M = \mathbb{R}^n$ だったりするとホモロジー群が消えてしまうために何の情報も得られない．そこで，M 全体で考えるのではなく，注目したい領域の近傍 N に力学系を局所化して議論する．たとえば，$M = \mathbb{R}^2$ 内の領域 N に我々は着目したいとする（図 4）．f を N の上だけで考えたいのだが，一般に f は N か

ら N への写像にはならず，$f(N)$ は N の外にはみ出してしまう．外に出てゆく軌道の情報は我々はには不要なので，そのような点は一点に潰してしまおう．すなわち，$\{x \in N \mid f(x) \notin N\}$ の近傍 L をとり，これを一点に潰して空間 N/L を得る．もとの N は一点と同相だったが，N/L は円周と同相となり，位相的に非自明な空間が得られたことに注意する．商空間上に f から誘導される写像 $\tilde{f} : N/L \to N/L$ は，L を上手く選べば連続となり，そのホモロジー $\tilde{f}_* : H_*(N/L) \to H_*(N/L)$ を調べることで N 内での元の力学系の情報を抜き出すことができる．たとえば f の位相的エントロピーについても，

$$\sigma(\tilde{f}_*) \leq h_{\mathsf{top}}(\tilde{f}) \leq h_{\mathsf{top}}(f)$$

となることから $\tilde{f}_*$ の固有値を用いて評価することができる．

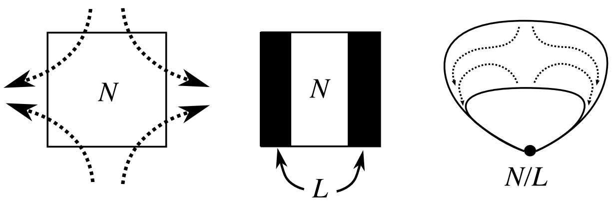

図 4: N/L の構成

上記ような議論を系統的に行なうための枠組みがコンレイ指数理論 [3] と呼ばれるものであり，強力な定理が数多く整備されているのだが，具体的な力学系に対して理論を適用しようとすると，「どのようにして近傍 N を見つけたらよいのかわからない」「複雑な近傍 N に対して手計算ではホモロジーの計算が出来ない」という点が問題になる．このような問題を計算機を援用しながら突破するために，精度保証

付き数値計算や計算ホモロジー理論が用いられるようになったのである．

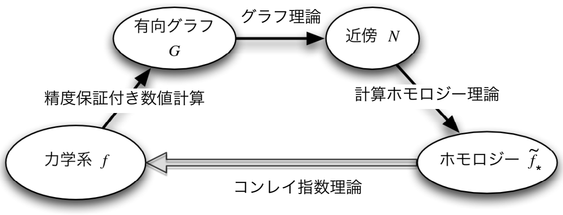

図 5: 計算機を援用したコンレイ指数理論の流れ

詳しくは [4] や，その参考文献に譲るが，おおまかな議論の流れは以下のようなものである（図 5）．まず M を小さな長方形たちの和に分割する．各長方形 ω に対し，f による像 $f(\omega)$ が交わる可能性のある長方形のリスト $\mathcal{F}(\omega)$ を，精度保証付き数値計算により計算して列挙する．次に有向グラフ G を，M の分割の要素である長方形たちを頂点とし，頂点 ω から $\mathcal{F}(\omega)$ の各要素へ向けて辺を置いたものとして構成する．G は力学系 f の軌道の様子をグラフを用いて離散化表現したものであるといえる．そして f に対して近傍 N を見つけだすという操作は，G 上でグラフ理論のアルゴリズムを用いて再帰的な部分グラフを見つけだす手続きと対応する．こうして得られた近傍 N は長方形の和で表わされているので，多様体上の写像のホモロジーを単体近似で求めるのと同様な議論により，ホモロジー計算が行なえる．ただし，一般にこのようにして構成した鎖複体は巨大なものとなってしまうため，そのホモロジーの計算は計算ホモロジー理論を用いて計算機で実行する必要があるのである．

5　おわりに

カオスという現象を始めて数学的に認識したのは，ポアンカレではなかったかと思う．三体問題の研究において，彼は無限に折り畳まれた不安定多様体と安定多様体の構造を見いだし，それが三体問題の複雑さの源であることを見抜いた．それから 100 余年，人類は計算機の助けを得てカオスを理解できるようになったのだろうか．

ローレンツ方程式のカオスがどうのような仕組みにより起きているかは記述できた．だが，これでローレンツの本来の問題であった大気の流れにおける複雑さが解明されたわけではない．極端な単純化により得られた一つの方程式を人類が少し理解できたというだけである．まだまだ挑戦は続く．

参考文献

[1] 國府 寛司,『力学系の基礎』，朝倉書店（2000）.

[2] W. Tucker, A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem, *Found. Comput. Math.* **2** (2002), 53–117.

[3] K. Mischaikow and M. Mrozek, Conley index, *Handbook of dynamical systems, Vol. 2,* North-Holland (2002), 393–460.

[4] 荒井 迅,「計算ホモロジー理論の力学系への応用」,『応用数理』**18** (2008), 34–40.

[あらい じん]