北 大 水 産 彙 報
60(1), 1-4, 2010.

エスチャリー循環流で駆動される表層時計回り水平渦流に関する Fujiwara et al. (1997) 理論解の改訂

磯田　豊

(2009 年 5 月 29 日受付，2009 年 8 月 11 日受理)

Revision of Fujiwara et al. (1997)'s Theoretical Solution for Surface Anti-cyclonic Gyre Driven by Estuarine Circulation

Yutaka ISODA

Abstract

Under the baroclinic process influenced by the Earth's rotation in enclosed coastal seas, Fujiwara et al. (1997) suggested that anti-cyclonic gyre (negative vorticity) was generated in the upper mixed layer by the horizontal divergence associated with upward entrainment, which was part of the estuarine circulation. They theoretically show that such vorticity (ζ) is close to a spatial uniform value of $\zeta=-f/2$ ($f>0$ is the Coriolis parameter) at the steady state. However, this solution is basically given by infinitely small thickness of water column according to the potential vorticity conservation. We propose the revised solution in the finite upper mixed layer (H), i.e., $\zeta=-fx/\left[x+(u_0/w_0)H\right]$ is the increasing function of offshore distance from a river mouth (x) and depends on the ratio of river inflow velocity (u_0) to upward entrainment velocity (w_0).

Key words: estuarine circulation, upper mixed layer, anti-cyclonic gyre, potential vorticity conservation

緒　　言

河口域で塩水楔を形成する河口循環流と同様に，内湾域においても塩分勾配による密度差が生じるため，空間スケールのより大きな鉛直循環流，すなわち，エスチャリー循環流が発達する。この循環流は水平的な水位差と密度差による二つの圧力差が水深方向に異なるために生じ，上層は湾奥付近に位置する河口からの沖向き流，下層はこの反対向きの湾内向き流となる。そして連続の関係から，湾内向き流は内湾域で上昇しなければならない。Fig. 1 (a) の模式図に示すように，よく混合した上層厚 H が上昇流 w_0 によっても変化しない場合，この上昇流は上層と下層の間に形成される躍層 (内部境界面) を横切る鉛直上向きのエントレイメント (連行加入) となる。ただし，下層から高塩分水が上層へ供給されるため，上層の流下方向に向かって塩分 (もしくは密度) は次第に増加する。

Fujiwara et al. (1997) は，内部変形半径 (数 km オーダ) よりも幅の大きな内湾になると，地球自転効果が重要になることを指摘し，上向きエントレイメントは上層内の水柱を縮ませるセンスにあることから，この水柱が渦位保存則を満たすならば，上層で時計回り水平渦流 (負の相対渦度) が励起されることを示した。幅の狭い内湾から次第に幅広くなる内湾のエスチャリー循環流を想定した場合，この考え方はごく自然な物理機構であり，内湾で観測される水平渦流の原因を探るときの第一候補となる。それゆえ，個々の内湾の渦流を議論する際，Fujiwara et al. (1997) を引用したいところであるが，提示されている渦流の相対渦度は渦位保存則に従った水柱が無限小の厚さになるときに得られる解になっている。本短報では，Fujiwara et al. (1997) で提案された物理機構は尊重し，無限小厚となる水柱ではなく，よく混合した有限厚さの表層混合層 (上層) 内における渦度変化に関する改訂解を提案する。まず，Fujiwara et al. (1997) の理論解の概略説明から始める。

Fujiwara et al. (1997) の理論解

よく混合した上層を想定し，その厚さを h，一定のコリオリパラメータを f，相対渦度 (以下，渦度と略す) を ζ とする。このとき，非粘性条件のもと，水平境界の影響がない場合，上層の渦位保存則は次式で表現される。

北海道大学大学院水産科学研究院海洋生物資源科学部門海洋環境学分野
(e-mail: isoda@fish.hokudai.ac.jp)
(*Laboratory of Marine Environmental Science, Division of Marine Bio-resource and Environmental Science, Graduate School of Fisheries, Hokkaido University*)

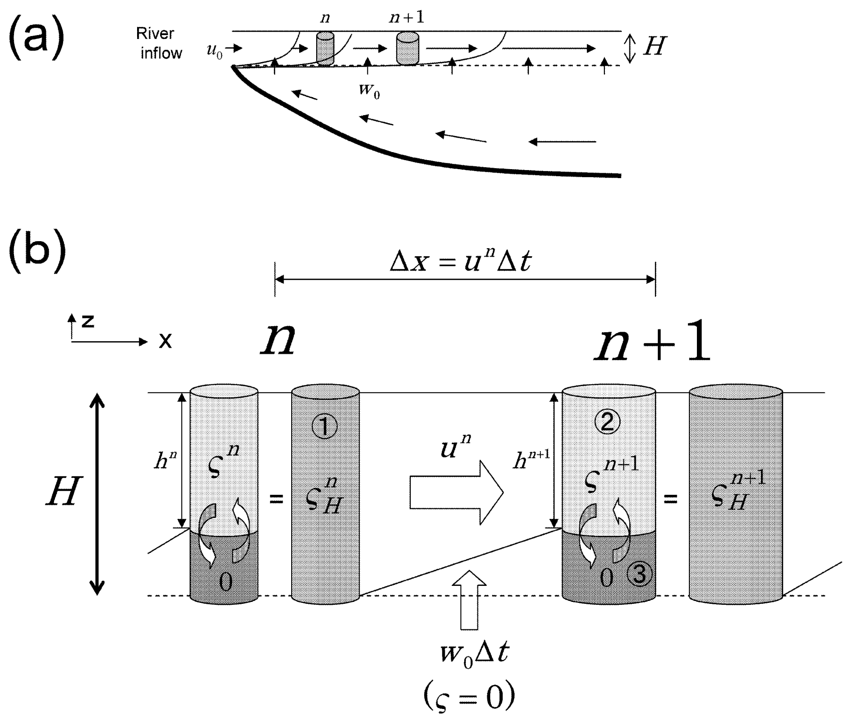

Fig. 1. (a) Schematic illustration of the typical estuarine circulation. u_0 is the river inflow velocity and w_0 is the upward entrainment velocity across the interface. (b) Vertical section of the upper mixed layer (H); showing a behavior vortex tube moving from time $t=n\Delta t$ to $t=(n+1)\Delta t$. A vortex tube ① is slightly shortened by the upward entrainment of $w_0\Delta t$, producing an anti-cyclonic vortex tube ②, which is instantaneously mixed with an entrained water mass ③.

$$\frac{d\varsigma}{dt}-\frac{1}{h}\frac{dh}{dt}(f+\varsigma)=0 \qquad (1)$$

上層と下層の間にある内部境界面を横切る上昇流を w_0 としたとき，$-(dh/dt)/h=w_0/h=\Delta$ を一定値とすると，

$$\frac{d\varsigma}{dt}+(f+\varsigma)\Delta=0 \qquad (2)$$

となる。ここで，Δ は上層厚の変化を上向きエントレイメントに置き換えたものと解釈され，水平的にも一定値と仮定されている。次に，下層からの渦度供給を移流項として表現すると，下層の渦度を ζ_L とした場合，$(\zeta-\zeta_L)w_0/h=(\zeta-\zeta_L)\Delta$ となる。この渦度移流項を (2) 式に加えると，

$$\frac{d\varsigma}{dt}+(f+\varsigma)\Delta+(\varsigma-\varsigma_L)\Delta=0 \qquad (3)$$

となる。$t=0$ で $\zeta=0$ の初期条件のもと，(3) 式の理論解は

$$\varsigma=-\frac{(f-\varsigma_L)}{2}[1-\exp(-2\Delta t)] \qquad (4)$$

となる。解 (4) 式はスピンアップ時間が $(2\Delta)^{-1}=h/2w_0$ となり，f や ζ_L には依存しないこと，定常状態 ($t\to\infty$) の渦度が$-(f-\zeta_L)/2$ となり，w_0 には依存しないことを示す。すなわち，エスチャリー循環流に伴う上向きエントレイメント (上昇流) は上層内に時計回り渦流を形成し，その定常状態は上昇流の大きさに依存しないことが主張される。

Fujiwara et al. (1997) の問題点

(3) 式の微分方程式から (4) 式の解を得る際，$\Delta=w_0/h=-(dh/dt)/h$ は一定値として扱われている。そこで，常微分方程式 $\Delta=-(dh/dt)/h$ を $t=0$ で $h=H$ (初期の上層厚を H) の初期条件のもとに解くと，$h(t)=H\cdot\exp(-\Delta t)$ が得られる。この $h(t)$ は指数関数的な水柱の縮みを示し，これは同時に，w_0 も指数関数的に減少すること ($w_0(t)=dh/dt=\Delta\cdot \mathrm{H}\cdot\exp(-\Delta t)$) を意味する。それゆえ，解 (4) 式は，混合した上層全体 ($h=H$) の渦度ではなく，その上層内において指数関数的に縮む水柱 $h(t)$ を対象とした渦度変化と解釈すべきである。この意味おいて，定常もしくは時間無限大 ($t\to\infty$) では無限小厚 ($h\to 0$) となるので，(1) 式の渦位保存則から$\zeta=-f$ となる。下層の渦度 (正しくは，縮む水柱 h の底面から供給される渦度) を $\zeta_L=0$ としたとき，(4) 式の定常解 ($t\to\infty$) は$\zeta=-f/2$ となる。なお，$\zeta_L=0$ を考える理由は後述される。この $\zeta=-f/2$ も無限小厚 ($h\to 0$) となる水柱の渦度であることに注意が必要である。$\zeta=-f$ と $\zeta=-f/2$ の 1/2 の違いは，後者の渦度が無限小の水柱縮みによる渦度生成 $\zeta=-f$ (前者の渦度) とその水柱底面から供給される渦度 $\zeta_L=0$ の平均値 ($[-f+0]/2=-f/2$) を計算する問題設定になっているためである。

Fujiwara et al. (1997) の解 (4) 式を上記のように理解すると，現場海域に適用するためにはいくつかの問題点が

ある。先にも述べたように，解 (4) 式はよく混合した上層全体 (H) ではなく，上層内において指数関数的に縮む水柱 $h(t)$ を対象とした解である。その縮む水柱の体積は有限であることから，時間の経過とともに，水柱の表面積は無限大となる。すなわち，有限幅をもつ内湾域において，水柱の水平的な拡がりには必ず制限が生じる。また，この問題設定は時刻 $t=0$ の水柱 ($h=H$) のその後の縮みを扱った初期値問題とみることができる。言い換えると，有限体積をもつ特定の水柱の時間発達を扱った問題となり，ある時刻の初期水柱 ($h=H$) と微小時間後の初期水柱 ($h=H$) を区別して考えることはできない。それゆえ，連続的な上昇流により形成される定常場は，この問題の解 (4) 式の線形重ね合わせ (または，たたみ込み積分) では表現できない。さらに，以下に説明するように，下層からの渦度供給の渦度は常に零 ($\zeta_L=0$) としなければならない。

渦度移流項が $(\zeta-\zeta_L)w_0/h=(\zeta-\zeta_L)\Delta$ となる書き方は，渦度の鉛直移流が水温や塩分などのスカラー量の移流と同等に扱えることを想定し，$w(\partial\zeta/\partial z)$ を考えている (z は鉛直軸，w は鉛直流速)。ところが，ここで扱っている渦度 $\zeta=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$ は鉛直方向 (z 軸) の渦度成分 ζ_z である (x, y 軸方向の水平流速成分はそれぞれ u, v)。x, y, z 方向の各渦度成分 ($\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$) は，一般に下記のように表現される。

$$\begin{aligned}\vec{\zeta}&=\nabla\times\vec{u}\\&=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)\end{aligned} \tag{5}$$

(5) 式の z 成分の渦度方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta_z}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta_z}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta_z}{\partial y}+\zeta_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\-w\left(\frac{\partial\zeta_x}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_y}{\partial y}\right)-\zeta_x\frac{\partial w}{\partial x}-\zeta_y\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned} \tag{6}$$

となる (Gill, 1982 の 227 頁)。鉛直方向の渦度移流項 (第 5 項) は，もともとは $w(\partial\zeta_z/\partial z)$ の形をしているものを渦度の定義に基づいて渦度の x, y 成分で書き換えたものである。ここで，渦度の x, y 成分が無視できる場合 ($\zeta_x=\zeta_y=0$)，鉛直流 w の影響は連続式を介して発散項 (第 4 項) にのみ現れる。これは，上昇流は上層内の水柱の縮みには寄与できるが，下方からの渦度移流には寄与できないことを意味する。すなわち，下方から上層へ侵入した水柱 (水塊) の渦度 ζ_L は常に零にならなければならない。なお，Fujiwara et al. (1997) の問題設定による水柱は鉛直流 (上昇流) によって縮み続けるので，いつまで経っても，その水柱の下部を通して下方の渦度 ($\zeta_L=0$) を供給することはできないはずである。よって，(2) 式に移流項を加えた (3) 式の表現自体も誤りとなる。

以上の問題点を解決するために，Fujiwara et al. (1997) の理論解の改良点は次の 4 点に整理される。1) 有限幅の沿岸域を想定，すなわち，縮む水柱の表面積が無限大となることを避けるために，流下方向 (沖向き) への水柱移動を考慮し，2) 上層下部の内部境界面を横切る上向きエントレイメント (上昇流) w_0 を時空間的な一定値とし (縮む水柱に伴い時間変化する w_0 ではない，という意味)，3) 下層からの渦度供給を正しく表現して，その値は常に零とし，4) よく混合した上層内 (H=一定) の渦度変化に関する定常解を求めることを考える。

Fujiwara et al. (1997) の改訂解

上層厚 H を固定した状態で，この上層内における水柱の伸縮を定式化することは難しい。そこで，上向きエントレイメント (上昇流) によって下層から上層へ侵入した水柱 (水塊) とこの侵入によって縮む上層内の水柱を分離して考え，それらが瞬間完全混合する物理過程 (何らかの理由により，よく混合した上層を想定) を微小時間 Δt の範囲で考える。Fig. 1 (b) は時刻 $t=n\Delta t$ と $t=(n+1)\Delta t$ の微小時間 Δt における上層内で生じる渦度変化を示した模式図である。不変の上層厚を H とし，Δt 時間内で縮む水柱の高さを h^n とする。まず，渦位保存則が適応できるのは，Δt 時間内の上昇流 w_0 で生じる水柱の縮み，図中の水柱 ① から水柱 ② への変化である。これを渦位保存式で表現すると次式となる。

$$\frac{f+\zeta_H^n}{H}=\frac{f+\zeta^{n+1}}{h^{n+1}} \tag{7}$$

左辺は時刻 $t=n\Delta t$ における水柱 ① の渦位であり，水柱の高さは H，渦度は ζ_H^n である。右辺は時刻 $t=(n+1)\Delta t$ における水柱 ② の渦位であり，縮んだ水柱の高さは h^{n+1}，渦度は ζ^{n+1} である。次に，縮んだ水柱 ② の渦度と下層からエントレイメントした水柱 ③ がもつ渦度零との瞬間完全混合を考える。ここでは時刻 $t=n\Delta t$ における瞬間完全混合を考え，水柱高さの違い (h^n と $H-h^n$) を用いた加重平均から

$$\zeta_H^n=\frac{\zeta^n h^n+0\cdot(H-h^n)}{H}=\frac{\zeta^n h^n}{H} \tag{8}$$

となる。 (8) 式を (7) 式に代入すると，

$$\frac{f+(\zeta^n h^n/H)}{H}=\frac{f+\zeta^{n+1}}{h^{n+1}} \tag{7$'$}$$

となる。同じ Δt の時間間隔では $h^n=h^{n+1}$ となること，$h^n=H-w_0\Delta t$ より，小さな Δt において $(h^n)^2\sim H^2$ の近似を行うと，

$$H(\zeta^{n+1}-\zeta^n)=f(h^n-H) \tag{7$''$}$$

となる。(7)″ 式に $h^n=H-w_0\Delta t$ を代入すれば，ζ^n と ζ^{n+1} に関する次の差分式を得る。

$$\zeta^{n+1}-\zeta^n=-\frac{fw_0\Delta t}{H} \tag{9}$$

(9) 式の両辺を Δt で割って，極限をとると

$$\frac{d\varsigma}{dt}=-\frac{fw_0}{H} \qquad (10)$$

の常微分方程式となり，$t=0$ で $\zeta=0$ の初期条件のもと，この式は容易に解けて，

$$\varsigma(\mathrm{t})=-\frac{fw_0}{H}t \qquad (11)$$

となる。(11) 式は非定常解にみえるが，この式は河口付近で $\zeta=0$ の水柱が時間の経過とともに，水平流 $u(t)$ によって沖合へ移流されるに従って獲得される渦度 $\zeta(t)$ とみるべきである。時空間的に一様な鉛直流 w_0 から生じる水平流速 u は，湾幅一定を仮定した連続式より，

$$u=\frac{w_0}{H}x \qquad (12)$$

となる。しかし，この (12) 式では河口 ($x=0$) における流速が零 ($u=0$) となり，水柱は河口から移動できない。そこで，河口 ($x=0$) から供給される適当な河川流入流速 $u_0>0$ (すなわち，沖向きの空間一様水平流) を (12) 式に加え，水平流速 u を改めて

$$u=\frac{w_0}{H}x+u_0 \qquad (13)$$

とする。この u は沖向きに線形増加する水平流を示す。場所 x と時刻 t との関係は $x=ut$ となるので，(13) 式を用いて t を x の関数として表現すると

$$t=\frac{H}{w_0}\frac{x}{x+(u_0/w_0)H} \qquad (14)$$

となる。(14) 式を (11) 式に代入すると，下記の定常解を得る。

$$\varsigma(x)=\frac{-fx}{x+(u_0/w_0)H} \qquad (15)$$

Fujiwara et al. (1997) の定常解は，$\zeta_L=0$ としても，上昇流 w_0 に依存しない $\zeta(x)=-f/2$ の空間一様解であった (無限小厚の水柱の解)。しかし，(15) 式が示す定常解 $\zeta(x)$ は河川流入流速 u_0 と上昇流 w_0 の比に依存した沖向きの増加関数となり，十分沖合 ($x\rightarrow\infty$) において $\zeta=-f$ に漸近する解となる (厚さ H の水柱の解)。沖向き渦度増加の指標として，$\zeta=-f/2$ となる河口からの距離 x' を (15) 式から求めると，$x'=(u_0/w_0)H$ となる。これに，エスチャリー循環流の代表的な値 $u_0\sim10\ \mathrm{cms^{-1}}$，$w_0\sim10^{-3}\ \mathrm{cms^{-1}}$，$H\sim10$ m を代入すると，$x'\sim100$ km オーダとなる。日本の多くの内湾の場合，湾軸長は 100 km 以内なので，このメカニズムによる湾内表層渦流の渦度は $-f/2$ よりも一般に小さいであろう。Fujiwara et al. (1997) は伊勢湾で観測された表層渦流の渦度が $-f/2$ の 0.5〜0.8 倍 (湾奥) もしくは 0.24 倍 (湾中央) であったことを報告している。彼らは表層渦流の渦度が $-f/2$ よりも小さくなる原因として，粘性による渦度の逸散効果 (渦流によるスピンダウン) と下層からの正の渦度の供給を挙げているが，上述のように，内湾域において $-f/2$ もの大きな渦度生成は非粘性条件においてもあまり期待できない。

お わ り に

エスチャリー循環流に伴う表層時計回り渦流の形成機構のエッセンスは，下層からの上昇流 (エントレイメント) である。しかし，この形成機構を現場の観測結果に適用するためには，さらに解決すべき検討課題がある。まず，時計回り渦流が形成される過程において，内部変形半径スケールの地衡流調節が行なわれるため，現場の内部境界面は変位する。これは上層厚を一定とした上記理論の仮定に反する (第一の検討課題)。時計回り渦流の場合，変位する内部境界面は下凸のレンズ形状となり，循環流の中央付近で下降流，縁付近で上昇流となる。この下降流と上昇流はエントレイメントに伴う鉛直流ではない。このような状態においても，エントレイメントによる上昇流が空間的に一様と仮定できるのだろうか (第二の検討課題)。上述の内部境界面変位の有無にかかわらず，ある水深における内部境界面 (躍層を想定) の維持は，鉛直拡散項と鉛直移流項のバランスで決まる。河口付近や沖合域の上下層間の密度差には空間的な違いがあり，鉛直拡散係数が一定であっても，鉛直拡散項は空間的に異なる。すなわち，鉛直移流 (上昇流) が空間的に一定であることが保障されても，空間的な鉛直拡散項の違いによって，定常状態の内部境界面の深さには違いが生じる。言い換えれば，内部境界面を横切る上向きのエントレイメント (上昇流) が存在し得るのは，鉛直拡散が存在することが前提であり，この鉛直拡散を考慮したエスチャリー循環流を考えなければならない (第三の検討課題)。近い将来，これらの検討課題に解答を与え，現場海域に使える表層時計回り渦流の形成要因を整理しなければならないと考える。

謝　　辞

Fujiwara et al. (1997) の考え方を理解する際，この論文の主著者である京都大学大学院農学研究科の藤原建紀教授から有益なコメントを頂き，心から感謝致します。また，本論に対して適切なコメントを頂いた査読者の方々に深く感謝致します。

参 考 文 献

Fujiwara, T., L.P. Sanford, K. Nakatsuji, Y. Sugiyama (1997) Anti-cyclonic circulation driven by the enstuarine circulation in a gulf type ROFI. *Journal of Marine System*, **12**, 83-99.

Gill, A.E. (1982) Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press. New York, 662 pp.