



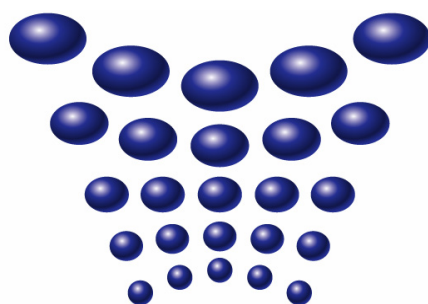
HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	誤り訂正符号にみる量子系のレプリカ解析と平均場アプローチ
Author(s)	井上, 純一
Description	講演会開催日時・場所: 2008年12月14日(日) 9:45-17:00 北海道大学学術交流会館第1会議室
Relation	文部科学省科学研究費補助金特定領域研究「情報統計力学の深化と展開(DEX-SMI)」主催企画 平成20年度チュートリアル「情報統計力学と量子情報」講義ノート
Issue Date	2008-12-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/43025
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	LectureNote_DEX-SMI2008_Inoue_v1.pdf



文部科学省 科学研究費補助金 特定領域研究
「情報統計力学の深化と展開」主催企画

「情報統計力学と量子情報」
講義ノート



DEX-SMI

西森 秀稔, 林 正人, 井上 純一 共著

講演会開催日時・場所

2008年12月14日(日) 9:45—17:00

北海道大学学術交流会館第1会議室

誤り訂正符号にみる量子系のレプリカ解析と平均場アプローチ

井上 純一¹

北海道大学 大学院情報科学研究科

1 はじめに — 背景と問題設定 —

近年、大規模情報処理に対し、統計力学の近似理論をその背景に持つ確率を用いた方法が適用され、次々と成果があがっている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. この確率的情報処理の (おそらくは狭義の意味での) キー・ポイントはベイズ統計に基づく問題への接近法であるが、このアプローチではベイズ公式により導出される事後確率を統計力学におけるボルツマン因子とみなし、現れる仮想的「温度」を適切に制御することで劣化されたデータの復元や信号推定を行う。事後確率を最大化する解を推定値とする場合、考える情報処理の問題が事後確率の対数をコスト関数とする最適化問題として定式化される。従って、今やよく知られたように、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて各温度での平衡分布 (状態) を作り、温度を徐冷することで最小エネルギー状態を高確率で求めることができれば、シミュレーテッド・アニーリング [11] を用いて問題が近似的に「解けた」ことになる。これに対し、原データの劣化の度合いが大きい場合、エネルギー関数を最小化する配列 (ビット列/画素集合) を解とするのではなく、各ビット/各画素ごとに最も高い確率でとりうる記号をその推定値に選ぶ方が (後に説明する「ビット誤り率」を最小化する意味で) 有効になる。話がやや抽象的になったので数式を使って議論を具体化しよう。

通信路出力/劣化情報を $\{J\}$ とする。これは劣化されたデジタル画像を考えても良いし、何らかの形で意図的に加工された情報に雑音が加わったものと考えても良い。このとき、この通信路/劣化過程が適切に確率モデルで表現できたとし、原情報 $\{\xi\} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ の推定値 $\{\sigma\} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ に対して適切な事前分布を導入すると事後確率 $P(\{\sigma\}|\{J\})$ を作ることができ、注目する要素 σ_i に関して事後確率を周辺化して考えれば、原情報の要素 ξ_i の解候補として

$$\bar{\xi}_i = \arg \max_{\sigma_i} P(\sigma_i|\{J\}), \quad P(\sigma_i|\{J\}) \equiv \sum_{\{\sigma\} \neq \sigma_i} P(\{\sigma\}|\{J\}) \quad (1)$$

を選ぶことができる。要素のそれぞれが ± 1 の 2 値をとるのであれば、上記 (1) 式は

$$\bar{\xi}_i = \text{sgn} [P(\sigma_i = +1|\{J\}) - P(\sigma_i = -1|\{J\})] \quad (2)$$

と書き直すこともできる。従って、(2) 式に基づくデータ推定は、同記事後確率を平衡分布に持つ多数のシステムからなるアンサンブル (統計集団) を考え、各ビットごとに多数決をとることで注目するビットの値を決める戦略である、と解釈することができる。このとき、全てのシステムで注目するビットの値が同じであり、「ばらつき」がない場合には多数決に意味はなくなる。よって、「ばらつき」を生む何らかのメカニズムが本質的であり、それがシステムの中に存在しなければならない。多くの場合、通信路の確率モデルも事前分布も指数分布族から選ぶことができるので、それらの積である事後分布は $P(\{J\}|\{\sigma\}) \propto e^{-H(\{\sigma\}|\{J\})/T}$ と書くことができる。これは温度 T のボルツマン因子であり、 $T = 0$ でない限り、各ビット σ_i はアンサンブルの各システムごとに揺らぎ、ばらつくことで意味ある多数決投票が可能となる。特に、原情報の通信過程/劣化

¹E-mail: j_inoue@complex.eng.hokudai.ac.jp

過程での乱れ具合を表す同時分布 $P(\{J\}|\{\xi\})P(\{\xi\})$ が事後確率と一致するような温度 T を選ぶと、解 (2) は所謂「ベイズ最適」となり、ビット誤り率:

$$P_B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \bar{\xi}_i \right) \quad (3)$$

は最小となる。この温度 T と通信路での原情報データの乱れ具合を表す同時分布に現れる (ビット反転率などの) ハイパーパラメータとの間の関係をスピングラス理論では西森ライン [1, 2, 12, 13, 14] と呼んでいる。従って、確率的情報処理の手続きとしては

(A) システムに揺らぎを導入し、それを有限値で制御する (アニーリングのようにゼロにはしない)

があり、この揺らぎの選択が問題を解く上で重要となる。

ところで、(3) 式で定義されるビット誤り率は通信路での雑音/劣化過程や原情報/画像の選び方によって変化しうる。従って、これらの選び方についての平均値でもって性能が評価されるべきである。具体的には

$$P_B = \frac{1}{2} \sum_{\{J\}} \sum_{\{\xi\}} P(\{J\}|\{\xi\})P(\{\xi\}) \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \bar{\xi}_i \right) \quad (4)$$

を評価するべきである。しかし、推定値 $\bar{\xi}_i$ は (2) 式から $\text{sgn}(\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i P(\{\sigma\}|\{J\}))$ と書けることに注意すると

$$P_B = \frac{1}{2} \sum_{\{J\}} \sum_{\{\xi\}} P(\{J\}|\{\xi\})P(\{\xi\}) \left(1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \text{sgn} \left(\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i P(\{\sigma\}|\{J\}) \right) \right) \quad (5)$$

を計算しなければならないことがわかる。ここで、通信路/データの同時確率分布 $P(\{J\}|\{\xi\})P(\{\xi\})$ に関する平均と事後分布 $P(\{\sigma\}|\{J\})$ に関する平均を同レベルでとることはできないことに注意されたい。ここでは常に $P(\{\sigma\}|\{J\})$ についての平均を実行することで推定値 $\bar{\xi}_i$ を求め、これに対する (3) 式「外側から」 $P(\{J\}|\{\xi\})P(\{\xi\})$ で平均する²。このとき、事後分布 $P(\{\sigma\}|\{J\})$ の任意の物理量のモーメントは $\log \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}|\{J\})$ を母関数とする、その物理量に共役なパラメータに関する微分操作によって得られることに注意すれば、 $[\log \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}|\{J\})]_{\{J\},\{\xi\}}$ を計算すればよいことがわかる。ここに、 $[\dots]_{\{J\},\{\xi\}}$ は $P(\{J\}|\{\xi\})P(\{\xi\})$ での平均操作である。よく知られているように、統計力学ではモーメントの母関数 $\log \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}|\{J\})$ は自由エネルギー、 $\sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}|\{J\})$ は分配関数と呼ばれる。

情報統計力学の方法では、これら 2 重の平均操作を次のレプリカ・トリック [15]:

$$\left[\log \sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}|\{J\}) \right]_{\{J\},\{\xi\}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[\{\sum_{\{\sigma\}} P(\{\sigma\}|\{J\})\}^n]_{\{J\},\{\xi\}} - 1}{n} \quad (6)$$

を用いて実行する。従って、確率的情報処理、情報統計力学の次なる手続きとしては

(B) 揺らぎを用いた情報推定に対する平均的性能評価はレプリカ・トリックを用いて解析計算する

が挙げられ、手続き (A) で選んだ揺らぎを用いた原情報データ推定の統計的性能を評価することでシステム論的な考察を行うことが重要な位置を占める。

さて、手続き (A) を情報処理の課題に適用する場合には観測される受信データ/劣化画像からビットごとの推定値:

$$\bar{\xi}_i = \text{sgn} \left(\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i P(\{\sigma\}|\{J\}) \right) \quad (7)$$

²この順序は素早く動く変数 $\{\sigma\}$ と遅く動く‘凍結した’変数 $\{J\}, \{\xi\}$ の時間スケールの違いに基づく。

を具体的に計算しなければならない。当然、和: $\sum_{\{\sigma\}}(\dots) = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1}(\dots)$ を実行するのは現実的ではなく、また、計算時間の観点から、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いることも好ましくない。このような場合、事後分布の中の注目するビット以外はその後分布に関する平均値で置き換えて得られるセルフ・コンシステントな方程式:

$$m_i^{(t+1)} = \sum_{\sigma_i=\pm 1} \sigma_i P(\sigma_i | \{m_j^{(t)}\}, \{J\}) = P(\sigma_i = 1 | \{m_j^{(t)}\}, \{J\}) - P(\sigma_i = -1 | \{m_j^{(t)}\}, \{J\}) \quad (8)$$

を繰り返し解くことで、その収束点 m_i を用いて

$$\bar{\xi}_i = \text{sgn}(m_i) \quad (9)$$

を採用する平均場アプローチが有効である。つまり、アルゴリズム実装の観点から

(C) 揺らぎを用いた情報推定の実装においては、計算量の観点から平均場アプローチが用いられる

が最後の手続きとなる。多くの確率的情報処理の研究では、取り組むべき課題に対し、手続き (A) を前提として手続き (B) でその問題に関するシステム論的考察を行い、手続き (C) についてアルゴリズムを構築、数値実験結果を提示し、手続き (B) で明らかとなる精度 (ある種の理論的境界) にどこまで迫れるのかを議論する一連の作業を行う。従って、前提となっている手続き (A) での「熱揺らぎ」とその制御変数「温度」は重要なファクタではあるが、熱揺らぎとは別の起源を持つ揺らぎ、例えば、量子力学的な状態遷移に起源を持つ揺らぎを制御することで手続き (A) を再構成することは可能であるか、また、可能であるとすれば手続き (B)(C) はどのようにすべきであり、どのような変更を受けるか、を考えることは学術的に興味深い。実際、最適化問題の観点からは上記の意味での揺らぎを最適解探索に用いる量子アニーリング [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] の有効性が議論されているし、多くの情報処理課題に対し、上述の問題意識のもとにいくつかの研究結果が発表されつつある [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]。そこで、本稿では誤り訂正符号を例にとり、このような背景/問題意識のもとでこれら確率的情報処理/情報統計力学の手続き (A)(B)(C) に対する、いわば「量子力学的揺らぎ版」を詳しくみていくことにする。

2 誤り訂正符号

本稿で議論する誤り訂正符号 (ソース符号)[30] は情報統計力学に関するトピックのなかでは比較的早い時期から取り組まれている課題であり、従って、そのシステム論的考察は深く、正確であるという意味で完成度が高い。そこで、ここではこの問題の「量子力学的揺らぎ版」を考えていくことにする。

原情報ビット列: $\{\xi\} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ を通信路を介して送る際、情報理論で知られているように、冗長性を持たせて余分なビットを送信することで、受信者は受信データ中の誤りを検出し、それを訂正することができる。 $\{\xi\}$ の各ビットが ± 1 をとるとすると、例えば、 $\{\xi\}$ の中から任意に p ビットを選んで、その積を作り、 $J_{i_1 \dots i_p}^0 \equiv \xi_{i_1} \dots \xi_{i_p}$ をパリティ・ビットとして送信するののも一つの手であろう。このような p ビットからなる「相関」の作り方は ${}_N C_p$ だけあるので、この場合の送信速度 R は N が十分大きな場合

$$R = \frac{N}{{}_N C_p} \simeq \frac{p!}{N^{p-1}} \quad (10)$$

となる。従って、ここで通信路を介して送信するのは、 $\{\xi\}$ ではなく、パリティ・ビット列 $\{J\}$ であり、通信路が加法的白色正規雑音 (Additive White Gaussian Noise: AWGN) で特徴づけられるとすれば、受信側は各パリティ・ビット $J_{i_1 \dots i_p}^0$ に対し

$$\begin{aligned} J_{i_1 \dots i_p} &= J_0 \left(\frac{p!}{N^{p-1}} \right) J_{i_1 i_2 \dots i_p}^0 + J \sqrt{\frac{p!}{2N^{p-1}}} \eta_{i_1 \dots i_p} \\ \langle \eta_{i_1 \dots i_p} \eta_{j_1 \dots j_p} \rangle &= \delta_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}, \quad \eta_{i_1 \dots i_p} = \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned} \quad (11)$$

を受け取ることになる。従って、この通信路の容量は N が十分大きな極限で

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\{(J_0 p! / N^{p-1}) J_{i_1 \dots i_p}\}^2}{J^2 p! / 2 N^{p-1}} \right) \simeq \frac{J_0^2 p!}{J^2 N^{p-1} \log 2} \quad (12)$$

と評価できる。シャノンの定理から、 $R < C$ であれば、復号誤り率が $e^{-N(C-R)}$ のようにゼロになるので、その条件をシグナルとノイズの比 J_0/J で表すと $R/C = (J_0/J)^2 \log 2 < 1$ であるから

$$\frac{J_0}{J} > \sqrt{\log 2} \equiv \left(\frac{J_0}{J} \right)_c \quad (13)$$

なる不等式が得られる。この符号は $N \rightarrow \infty$ の極限とともに通信路容量と転送速度が共に無限大になってしまうので実用的ではないが、近年ではより実用的な低密度パリティ検査符号などが情報統計力学の立場から精力的に調べられている [31]。

さて、受信者が復号を試みる場合、通信路が加法的白色正規雑音 (AWGN) で特徴づけられることを知りえれば (11) 式に対して

$$\begin{aligned} J_{i_1 \dots i_p} &= a_0 \left(\frac{p!}{N^{p-1}} \right) \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} + a \sqrt{\frac{p!}{2 N^{p-1}}} \eta_{i_1 \dots i_p} \\ \langle \eta_{i_1 \dots i_p} \eta_{j_1 \dots j_p} \rangle &= \delta_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p}, \quad \eta_{i_1 \dots i_p} = \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned} \quad (14)$$

を仮定することができる。ここに $\{\sigma\}$ は原情報ビット列の推定値であり、これを尤度として書き直し、一様な事前分布を用いると、ベイズ公式から事後分布を計算することができて

$$\begin{aligned} P(\{\sigma\}|\{J\}) &\propto P(\{J\}|\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(-\frac{N^{p-1}}{a^2 p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \eta_{i_1 \dots i_p}^2\right)}{(a^2 \pi p! / N^{p-1})^{1/2}} \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{N^{p-1}}{2a^2 p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \left(J_{i_1 \dots i_p} - \frac{a_0 p!}{N^{p-1}} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}\right)^2\right]}{(a^2 \pi p! / N^{p-1})^{1/2}} \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。従って、この場合の最尤推定は得られた通信路の出力信号 $\{J\}$ に対してエネルギー関数

$$H(\{\sigma\}|\{J\}) = \frac{N^{p-1}}{2a^2 p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \left(J_{i_1 \dots i_p} - \frac{a_0 p!}{N^{p-1}} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} \right)^2 \quad (16)$$

を構築し、これを最小化する配列 $\{J\}$ を採用することにあたる。

また、前節の手続き (A) で述べた揺らぎを用いた推定 (ビットごとの最尤推定) は各ビットごとに

$$\bar{\xi}_i = \text{sgn} \left(\frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \exp[-H(\{\sigma\}|\{J\})]/T}{\sum_{\{\sigma\}} \exp[-H(\{\sigma\}|\{J\})]/T} \right) \quad (17)$$

で与えられる。このとき、西森ライン $a_0/a = J_0/J, T = 1$ 上では (3) 式で定義されるビット誤り率が最小化される。よって、温度を一定値 $T = 1$ に制御して実現される熱揺らぎに基づく (ビット誤り率最小の意味での) 最適な復号が構成できる。

このとき、 $T = 0$ の熱揺らぎの存在しない場合でさえも、量子力学の知見を使うことで同種の最適復号を構成することができる。それを示すのが本稿の目的の一つである。例えば、各ビット σ_i の代わりに量子化軸を z 方向にとった場合のパウリ行列である $\hat{\sigma}_i^z$ の固有ベクトル $|+\rangle = {}^t(1, 0), |-\rangle = {}^t(0, 1)$ の重ね合わせ: $|\sigma_i\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$ を選んでみよう。固有ベクトル $|+\rangle, |-\rangle$ に対応する $\hat{\sigma}_i^z$ の固有値 $-1, 1$ が古典ビット σ_i 対応すると考えると、これら固有ベクトル $|+\rangle, |-\rangle$ に $\gamma \hat{\sigma}_i^x$ を作用させることで

$$\gamma \hat{\sigma}_i^x |+\rangle = \gamma |-\rangle, \quad \gamma \hat{\sigma}_i^x |-\rangle = \gamma |+\rangle \quad (18)$$

のような遷移確率 $|\langle + | - \rangle|^2 = |\langle - | + \rangle|^2 = \gamma^2$ の 1 ビット状態遷移を引き起こすことから、この状態遷移を起源とする揺らぎを用いてビットごとの推定値 $\bar{\xi}_i$ が (絶対ゼロ度であっても) 構成できる可能性があることがわ

かる。具体的には各ビットに同じ重みで状態遷移を引き起こすような外場: $\gamma\hat{\sigma}_1^x + \gamma\hat{\sigma}_2^x + \dots + \gamma\hat{\sigma}_N^x = \gamma \sum_i \hat{\sigma}_i^x$ を考え、これを用いてハミルトニアンを次のように書き換える。

$$\hat{H}(\{\sigma\}|\{J\}) = \frac{N^{p-1}}{a^2 p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \left(J_{i_1 \dots i_p} - \frac{a_0 p!}{N^{p-1}} \hat{\sigma}_{i_1}^z \dots \hat{\sigma}_{i_p}^z \right)^2 - \gamma \sum_i \hat{\sigma}_i^x \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_i^{z,x} \equiv \mathbf{I}_{(1)} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\sigma}_{(i)}^{z,x} \otimes \dots \otimes \mathbf{I}_{(N)} \quad (20)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\sigma}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\sigma}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| \quad (21)$$

すると、密度行列 $\hat{\rho} \equiv e^{-\beta \hat{H}(\{\sigma\}|\{J\})} / \text{tr} e^{-\beta \hat{H}(\{\sigma\}|\{J\})}$ が定義できて、ビットごとの最尤推定値 (17) の量子力学的揺らぎ版:

$$\bar{\xi}_i = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{sgn}[\text{tr}(\hat{\sigma}_i^z \hat{\rho}_\beta)] \quad (22)$$

が構成できる。

ここで、 γ をどのようにして制御したらよいか、どの程度のビット誤り率が見込めるのか、に関しては手続き (B) を (19) 式で記述される量子多体系に対して $N \rightarrow \infty$ の極限で実行すればよい。一方、有限の p, N に対して、具体的に推定値 $\bar{\xi}_i$ を計算するためには $2^N \times 2^N$ の大規模行列 $\hat{\sigma}_i^z \hat{\rho}$ についてのトレースを計算しなければならぬ。これは後にみるように手続き (C) の平均場アプローチで回避することができる。

3 量子系のレプリカ解析

前節までで手続き (A) を押さえることができたので、レプリカ・トリックを用いた平均的性能評価の議論である手続き (B) へ移ろう。具体的にレプリカ解析を行う際には分配関数: $Z = \text{tr} e^{-\hat{H}(\{\sigma\}|\{J\})}$ のモーメント Z^n をデータ $\{J\}, \{\xi\}$ について平均しなければならないが、量子系の場合にはハミルトニアンの各項の非可換性を解消するために、レプリカ・トリックを実行する「前処理」として鈴木-トロツタ公式 [32]:

$$\text{tr} \left\{ \exp(\hat{A} + \hat{B}) \right\} = \text{tr} \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{\hat{A}}{M}\right) \exp\left(\frac{\hat{B}}{M}\right) \right\}^M \quad (23)$$

を用いてボルツマン因子を分解する。具体的にはハミルトニアンの中の定数項を無視して互いに可換なもの同士でまとめて $\hat{A} = -\beta_J \sum_{i_1 \dots i_p} \hat{\sigma}_1^z \dots \hat{\sigma}_N^z, \hat{B} = -\gamma \sum_i \hat{\sigma}_i^x$ と置き ($\beta_J \equiv a_0/a^2$)

$$Z = \sum_{\{\sigma_i(t)\}} \sum_{\{\sigma'_i(t)\}} \langle \{\sigma_i(1)\} | e^{\frac{\hat{A}(1)}{M}} | \{\sigma'_i(1)\} \rangle \langle \{\sigma'_i(1)\} | e^{\frac{\hat{B}(1)}{M}} | \{\sigma_i(2)\} \rangle \langle \{\sigma_i(2)\} | e^{\frac{\hat{A}(2)}{M}} | \{\sigma'_i(2)\} \rangle$$

$$\dots \langle \{\sigma'_i(2)\} | e^{\frac{\hat{B}(2)}{M}} | \{\sigma_i(3)\} \rangle \dots \langle \{\sigma_i(M)\} | e^{\frac{\hat{A}(M)}{M}} | \{\sigma'_i(M)\} \rangle \langle \{\sigma'_i(M)\} | e^{\frac{\hat{B}(M)}{M}} | \{\sigma_i(1)\} \rangle \quad (24)$$

$$| \{\sigma_i(t)\} \rangle = | \sigma_1(t) \rangle \otimes | \sigma_2(t) \rangle \otimes \dots \otimes | \sigma_N(t) \rangle \quad (25)$$

$$\hat{\sigma}_i^z | \sigma_i(t) \rangle = \sigma_i^z(t) | \sigma_i(t) \rangle, \sigma_i^z(t) = \pm 1 \quad (26)$$

とする。よって、各確率成分: $\langle \{\sigma_i(t)\} | e^{\frac{\hat{A}(t)}{M}} | \{\sigma'_i(t)\} \rangle, \langle \{\sigma'_i(t)\} | e^{\frac{\hat{B}(t)}{M}} | \{\sigma_i(t+1)\} \rangle$ の各々を固有値 $\sigma_i^z(t)$ で書くことができれば、量子系での分配関数を古典スピン (古典ビット) で書き換えることができる。このような古典スピン系への写し換えが実行できた段階でのレプリカ・トリックの手続きは SK 模型 (Sherrington-Kirkpatrick)[15], ランダム・エネルギー模型 [33] を含む多くの無限レンジモデルの解析と同様に実行できる。

さて、確率成分 $\langle \{\sigma_i(t)\} | e^{\frac{\hat{A}(t)}{M}} | \{\sigma'_i(t)\} \rangle$ は (25)(26) 式に対して既に対角化されているので

$$\langle \{\sigma_i(t)\} | e^{\frac{\hat{A}(t)}{M}} | \{\sigma'_i(t)\} \rangle = \exp \left[\frac{\beta_J}{M} \sum_{i_1 \dots i_p} J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1}^z(t) \dots \sigma_{i_p}^z(t) \right] \quad (27)$$

である。一方の $\langle \{\sigma'_i(t)\} | e^{\frac{\hat{B}(t)}{M}} | \{\sigma_i(t+1)\} \rangle$ はやや面倒ではあるが、何とすることはなく

$$\begin{aligned}
\langle \{\sigma'_i(t)\} | e^{\frac{\hat{B}(t)}{M}} | \{\sigma_i(t+1)\} \rangle &= \prod_i \langle \{\sigma'_i(t)\} | \hat{1} + \left(\frac{\gamma}{M}\right) \hat{\sigma}_i^x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\gamma}{M}\right)^2 \{\hat{\sigma}_i^x\}^2 + \cdots | \{\sigma_i(t+1)\} \rangle \\
&= \prod_i \langle \{\sigma'_i(t)\} | \left\{ 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\gamma}{M}\right)^2 + \cdots \right\} (1 \otimes \cdots \otimes 1) \\
&\quad + \left\{ \frac{\gamma}{M} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\gamma}{M}\right)^3 + \cdots \right\} (1 \otimes \cdots \otimes \sigma_{(i)}^x \otimes \cdots \otimes 1) | \{\sigma_i(t+1)\} \rangle \\
&= \prod_i \left\{ \sinh\left(\frac{\gamma}{M}\right) \langle \sigma_i(t) | \sigma_i(t+1) \rangle + \cosh\left(\frac{\gamma}{M}\right) \langle \sigma_i(t) | \hat{\sigma}_i^x | \sigma_i(t+1) \rangle \right\} \\
&= \prod_i \left\{ \frac{1}{2} \sinh\left(\frac{\gamma}{M}\right) \right\}^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} \log \coth\left(\frac{\gamma}{M}\right) \sigma_i^z(t) \sigma_i^z(t+1) \right] \quad (28)
\end{aligned}$$

となる。従って、レプリカ指標 $\alpha = 1, \dots, n$ を導入すると、分配関数の n 次モーメントは

$$Z^n = \text{tr}_{\{\sigma\}} \exp \left[\frac{\beta J}{M} \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{t=1}^M J_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1}^\alpha(t) \cdots \sigma_{i_p}^\alpha(t) + B \sum_i \sum_{t=1}^M \sigma_i^\alpha(t) \sigma_i^\alpha(t+1) \right] \quad (29)$$

与えられる。ここに $B \equiv (1/2) \log \coth(\gamma/M)$ である。よって、トロツタ軸（虚時間軸）方向の新たな相関 $\sigma_i^\alpha(t) \sigma_i^\alpha(t+1)$ は現れるものの、分配関数のモーメントは古典スピン系で書き直せたことになる。従って、あとは通常のレプリカ・トリックの処方箋に従って、データ $\{J\}, \{\xi\}$ についての平均操作を行えばよい。簡単のため、秩序変数に関するレプリカ対称性の仮定と、秩序変数の値が虚時間に依らず一定であるという静的近似を用いると

$$m_\alpha(t) = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\alpha(t) = m, \quad \hat{m}_\alpha(t) = \hat{m} \quad (30)$$

$$Q_{\alpha\beta}(t, t') = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\alpha(t) \sigma_i^\beta(t') = \begin{cases} \chi & (\alpha = \beta) \\ q & (\alpha \neq \beta) \end{cases}, \quad \lambda_{\alpha\beta}(t, t') = \begin{cases} \lambda_1 & (\alpha = \beta) \\ \lambda_2 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (31)$$

であり、分配関モーメントのデータ平均は

$$[Z^n]_{\{\xi\}, \{J\}} = \prod_{t, t', \alpha, \beta} \int_{-\infty}^{\infty} dQ_{\alpha\beta}(t, t') \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_{\alpha\beta}(t, t') \int_{-\infty}^{\infty} dm_\alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{m}_\alpha(t) \exp[-N f_{RS}] \quad (32)$$

と書ける。ここに、 $\hat{m}_\alpha(t), \lambda_{\alpha\beta}(t, t')$ はそれぞれ $m_\alpha(t), Q_{\alpha\beta}(t, t')$ に共役な秩序変数であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} dm_\alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{m}_\alpha(t) \exp \left[i \hat{m}_\alpha(t) \left(m_\alpha(t) - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\alpha(t) \right) \right] = 1 \quad (33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dQ_{\alpha\beta}(t, t') \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_{\alpha\beta}(t, t') \exp \left[i \lambda_{\alpha\beta}(t, t') \left(Q_{\alpha\beta}(t, t') - \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i^\alpha(t) \sigma_i^\beta(t') \right) \right] = 1 \quad (34)$$

で定義される。

従って、1 ビット当たりの自由エネルギー f^{RS} はこれらの秩序変数の関数として次式で与えられる。

$$f^{RS}(m, \chi, q) = (p-1)J_0 m^p + \frac{(p-1)}{4} \beta_J J^2 (\chi^p - q^p) - \beta_J^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} D\omega \log \int_{-\infty}^{\infty} Dz 2 \cosh \Xi \quad (35)$$

ここで、 $\hat{m}, \lambda_1, \lambda_2$ に関する鞍点条件から得られる関係式: $\hat{m} = p\beta_J J_0 m^{p-1}$, $\lambda_1 = p(\beta_J J)^2 \chi^{p-1}/2$, $\lambda_2 = p(\beta_J J)^2 q^{p-1}/2$ を用いて f_{RS} の一部を書き換えたことに注意しよう。以上により、システムの状態方程式は鞍点条件より次式で与えられる。

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} D\omega \int_{-\infty}^{\infty} Dz \left(\frac{\Phi \sinh \Xi}{\Xi \Omega} \right), \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} D\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} Dz \left(\frac{\Phi \sinh \Xi}{\Xi \Omega} \right) \right]^2 \quad (36)$$

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D\omega}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} Dz \left[\left(\frac{\Phi}{\Xi} \right)^2 \cosh \Xi + \gamma^2 \left(\frac{\sinh \Xi}{\Xi^3} \right) \right] \quad (37)$$

ここで, $Dz \equiv (dz/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$ であり, $\Phi \equiv \omega\sqrt{p(\beta_J J)^2 q^{p-1}/w + z\sqrt{p(\beta_J J)^2(\chi^{p-1} - q^{p-1})/2} + p\beta_J J_0 m^{p-1}$, $\Xi \equiv \sqrt{\Phi^2 + \gamma^2}$, $\Omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Dz \cosh \Xi$ などと定義してある. これらの状態方程式の解に対してビット誤り率は

$$P_B = \int_{-\infty}^{\infty} Dw H(-z_p) \quad (38)$$

と書ける. ただし, $z_p \equiv -(p\beta_J J_0 m^{p-1} + w\sqrt{p(\beta_J J)^2 q^{p-1}/2})/\sqrt{p(\beta_J J)^2(\chi^{p-1} - q^{p-1})/2}$ であり, 関数 $H(x)$ は $H(x) = \int_x^{\infty} Dz$ で定義される誤差関数である. ここで, P_B は χ , q , および, m を介して γ に依存することに注意しよう.

絶対ゼロ度での振舞いをみるためには, $T_J \equiv \beta_J^{-1} \rightarrow 0$ の極限操作が必要であるが, $\Gamma = \gamma/\beta_J$ を一定に保ったまま, $\beta_J, \gamma \rightarrow \infty$ の極限をとり, $\chi - q \rightarrow 0$ で $\beta_J(\chi - q) = t = \mathcal{O}(1)$ となる解を探すことにする. この極限操作で状態方程式は

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi Dw}{\sqrt{\phi^2 + \Gamma^2}}, \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2 Dw}{\phi^2 + \Gamma^2}, \quad t = \Gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Dw}{(\phi^2 + \Gamma^2)^{3/2}}, \quad (39)$$

$\phi = wJ\sqrt{pq^{p-1}/2} + \phi^2 J^2 p(p-1)q^{p-2}t/2\sqrt{\phi^2 + \Gamma^2} + pJ_0 m^{p-1}$ と書き直され, この解に対してビット誤り率は $P_B = H(pJ_0 m^{p-1}/J\sqrt{pq^{p-1}/2})$ で与えられることになる. これで手順 (B) は問題として「解けた」ことになる.

4 量子相転移と復号性能

前節で求めた状態方程式を数値的に解いてみることで, ビット誤り率の量子力学的遷移振幅 Γ 依存性, 量子相転移 [34, 35] と復号性能の関係が明らかとなる.

4.1 有限の p の場合

送信するビット積の長さが $p = 2$ と 3 の場合についての結果を図 1 に載せる. この左図は磁化 m とスピングラス秩序変数 q の振る舞いを表している. 絶対ゼロ度での量子揺らぎに伴う相転移がみられ, $p = 2$ の場合には 2 次転移, $p \geq 3$ の場合には 1 次転移となる. 右図はビット誤り率の Γ 依存性である. これらの図より, ビット誤り率を介した復号性能と量子相転移の間には密接な関係があることがわかり, さらに, ビット誤り率を最小化する最適な Γ の存在も確認できる. とここで, 有限の p の場合には解析に用いた静的近似の

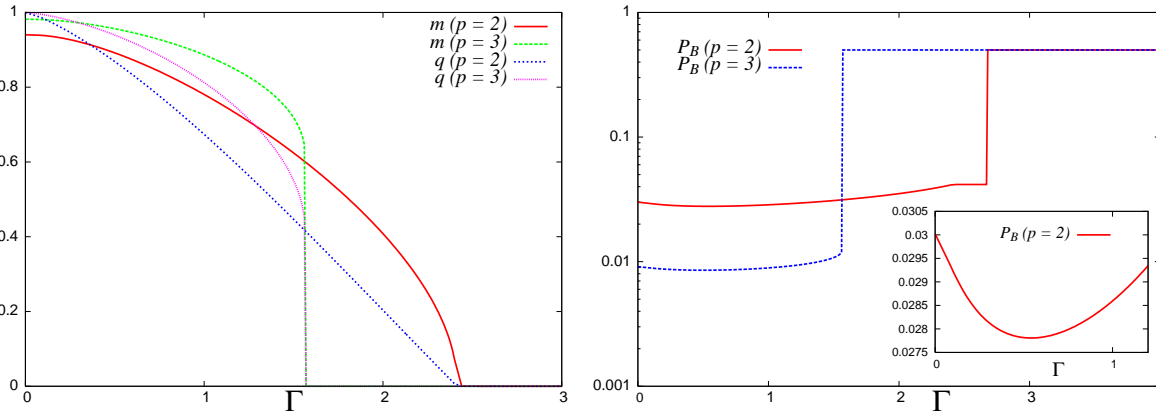


図 1: 秩序変数 m, q (左) とビット誤り率 (右) の Γ 依存性. 挿入図はビット誤り率の最小値近傍の振る舞い. $J_0 = J = 1$.

妥当性が崩れる。最近では p の大きな値からの展開による解析 [36, 37] も試みられているが、この近似の改善は今後の重要な課題であると言えよう。

4.2 $p \rightarrow \infty$ の場合

送信するビット積の長さが無限大の場合: $p \rightarrow \infty$ の場合, システムはランダム・エネルギー模型 [33] と等価になり, 1 段階レプリカ対称性を破る解がレプリカ解析において厳密な取り扱いになる。解析の詳細は文献 [26] に譲るが, 強磁性相, スピングラス相, 常磁性相のそれぞれの相境界を解析的に求めることができる。その結果を図 2 に載せる。この図で $\beta_J^{-1} = T_J = 0$ 上が我々の興味のある絶対ゼロ度の場合であるが,

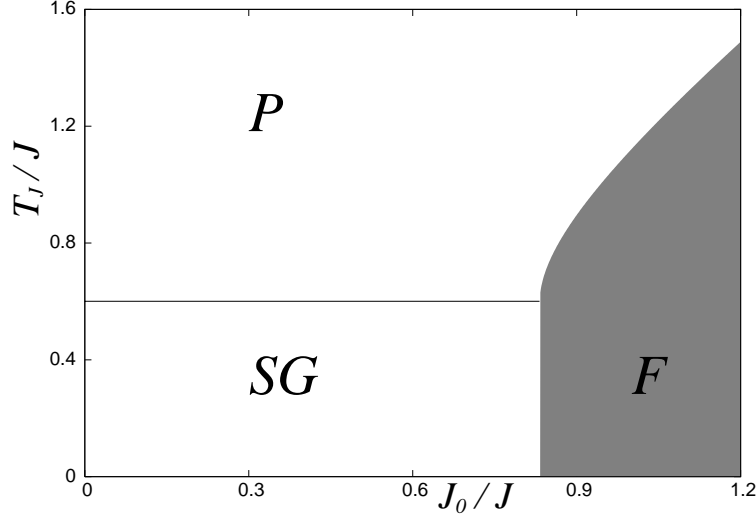


図 2: $p \rightarrow \infty$ の場合の相図。強磁性相内 (F) で復号誤り率がゼロとなる。P, SG はそれぞれ, 常磁性相, スピングラス相である。SG-F 相境界は $(J_0/J)_c = \sqrt{\log 2} = 0.8326$ である。

この線上でシグナルとノイズの比を増加した場合に出くわす強磁性-スピングラス相境界は量子力学的遷移振幅 Γ に依存しない。また, この相境界は $(J_0/J)_c = \sqrt{\log 2} = 0.8326$ であり, この転移点直上では $R = C$, 強磁性相内で $R < C$ を満たす。従って, 相境界とシャノン限界が一致することがわかる。

5 平均場アプローチ

前節で一応, 手順 (B): 解析的性能評価ができたので, p, N がともに有限のシステムに対し, ビットごとの最尤推定値: $\hat{\xi}_i = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{sgn}[\text{tr}(\hat{\sigma}_i^z \hat{\rho}_\beta)]$, $\hat{\rho}_\beta = e^{-\beta \hat{H}} / \text{tr} e^{-\beta \hat{H}}$ を求めるために, 手続き (C): 平均場アルゴリズムの構築 [5, 23, 38, 39, 29] を考えよう。ここでは簡単のため $p = 2$ の場合を考え, 次のハミルトニアンから議論をスタートする。

$$\hat{H} = - \sum_{ij} J_{ij} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - \Gamma \sum_i \hat{\sigma}_i^x, \quad J_{ij} = \left(\frac{2J_0}{N} \right) J_{ij}^0 + \frac{J}{\sqrt{N}} \eta, \quad J_{ij}^0 = \xi_i \xi_j, \quad \eta = \mathcal{N}(0, 1) \quad (40)$$

このとき, ハミルトニアンを次のように書き換える。

$$\hat{H} = - \sum_i (\Gamma \hat{\sigma}_i^x + h_i \hat{\sigma}_i^z) + \sum_{ij} J_{ij} (m_i \hat{I}_i) (m_j \hat{I}_j) - \sum_{ij} J_{ij} (\hat{\sigma}_i^z - m_i \hat{I}_i) (\hat{\sigma}_j^z - m_j \hat{I}_j) \equiv \hat{H}^{(0)} + \hat{V} \quad (41)$$

$$\hat{H}^{(0)} \equiv - \sum_i (\Gamma \hat{\sigma}_i^x + h_i \hat{\sigma}_i^z) + \sum_{ij} J_{ij} (m_i \hat{I}_i) (m_j \hat{I}_j) \quad (42)$$

$$\hat{V} \equiv - \sum_{ij} J_{ij} (\hat{\sigma}_i^z - m_i \hat{I}_i) (\hat{\sigma}_j^z - m_j \hat{I}_j), \quad h_i \equiv 2 \sum_j J_{ij} m_j \quad (43)$$

ここで、サイズ $2^N \times 2^N$ の単位行列 \hat{I}_i を $\hat{I}_i \equiv \mathbf{I}_{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{(i)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}_{(N)}$ で定義し、 m_i は平均場で書き換えられたハミルトニアン $\hat{H}^{(0)}$ に関する局所磁化であり、具体的には次式で与えられる。

$$m_i \equiv m_i^z = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{tr}(\hat{\sigma}_i^z \hat{\rho}_\beta^{(0)}), \quad \hat{\rho}_\beta^{(0)} \equiv \frac{\exp(-\beta \hat{H}^{(0)})}{\text{tr} \exp(-\beta \hat{H}^{(0)})} \quad (44)$$

$2^N \times 2^N$ の行列 \hat{H} を対角化するのは難しいが、平均場で一体問題として書き換えられた行列 $\hat{H}^{(0)}$ の対角化は容易い。実際、絶対ゼロ度での内部エネルギーは

$$E^{(0)} = - \sum_i E_i + \frac{1}{2} \sum_i h_i m_i, \quad E_i \equiv \sqrt{\Gamma^2 + h_i^2} \quad (45)$$

で与えられるので、 $\partial E^{(0)} / \partial m_i = \sum_k (\partial h_k / \partial m_i) \{h_k / \sqrt{\Gamma^2 + h_k^2} - m_k\} = 0$ より、

$$(\forall_i) \quad m_i = \frac{h_i}{\sqrt{\Gamma^2 + h_i^2}}, \quad h_i = 2 \sum_j J_{ij} m_j. \quad (46)$$

を得る。この方程式は横磁場 SK 模型に対する所謂「ナイーブ平均場方程式」である。ここで、 $\Gamma \rightarrow 0$ の極限で方程式 (46) から $(\forall_i) \quad m_i = h_i / |h_i| = \text{sgn}(h_i) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta h_i)$ のように、対応する古典系の絶対ゼロ度における平均場方程式が復元されることに注意しておこう。

さて、このナイーブ平均場方程式を改良するために、文献 [40, 41] にならってオンサガー項 R_i を各ビット i に加え、局所磁場 h_i を $2 \sum_j J_{ij} m_j - R_i$ のように書き換えよう。このとき、ナイーブ平均場方程式 (46) は次のように書き直せる。

$$(\forall_i) \quad m_i = \frac{2 \sum_j J_{ij} m_j - R_i}{\sqrt{\Gamma^2 + (2 \sum_j J_{ij} m_j - R_i)^2}} \simeq \frac{h_i}{(\Gamma^2 + h_i^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + h_i^2} \left(\frac{R_i}{h_i} \right) \right] \quad (47)$$

さて、次に平均場で書き換えられたハミルトニアン: $\hat{H}^{(0)} = - \sum_i (\Gamma \hat{\sigma}_i^x + h_i \hat{\sigma}_i^z) + \sum_{ij} J_{ij} (m_i \hat{I}_i) (m_j \hat{I}_j)$ の固有状態でハミルトニアン \hat{H} の期待値を計算すると

$$E_g = E^{(0)} - \Gamma^4 \sum_{ij} \left(\frac{J_{ij}^2}{2E_i^2 E_j^2 (E_i + E_j)} \right) \quad (48)$$

が得られるが、 $(\partial E_g / \partial m_i) = 0$ が局所磁化 m_i の方程式を与えるべきだから

$$m_i = \frac{h_i}{(\Gamma^2 + h_i^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + h_i^2} \left(\frac{1}{h_i} \right) \sum_j \frac{J_{ij}^2 m_i [2(1 - m_i^2)(1 - m_j^2)^{\frac{3}{2}} + 3(1 - m_i^2)^{\frac{1}{2}}(1 - m_j^2)^2]}{2\Gamma[(1 - m_i^2)^{\frac{1}{2}} + (1 - m_j^2)^{\frac{1}{2}}]^2} \right] \quad (49)$$

が導出される。(47)(49) 式は同じ物理量を与えるべきなので、両者を比較することで、先に導入したオンサガー項 R_i がセルフ・コンシステントに確定し、

$$R_i = \sum_j \frac{J_{ij}^2 m_i [2(1 - m_i^2)(1 - m_j^2)^{\frac{3}{2}} + 3(1 - m_i^2)^{\frac{1}{2}}(1 - m_j^2)^2]}{2\Gamma[(1 - m_i^2)^{\frac{1}{2}} + (1 - m_j^2)^{\frac{1}{2}}]^2} \quad (50)$$

となる。従って、オンサガー項の導入によって修正された平均場方程式を反復アルゴリズムとして見直すことで、ビットごとの復号過程は次のダイナミクスにより記述される。

$$m_i(t+1) = \frac{2 \sum_j J_{ij} m_j(t) - R_i(t)}{\sqrt{\Gamma^2 + \{2 \sum_j J_{ij} m_j(t) - R_i(t)\}^2}} \quad (51)$$

$$R_i(t) = \sum_j \frac{J_{ij}^2 m_i(t) [2(1 - m_i(t)^2)(1 - m_j(t)^2)^{\frac{3}{2}} + 3(1 - m_i(t)^2)^{\frac{1}{2}}(1 - m_j(t)^2)^2]}{2\Gamma[(1 - m_i(t)^2)^{\frac{1}{2}} + (1 - m_j(t)^2)^{\frac{1}{2}}]^2} \quad (52)$$

このとき、ビットごとの最尤推定値は反復回数 t の関数として $\bar{\xi}_i(t) = \text{sgn}[m_i(t)]$ で与えられ、ビット誤り率もまた反復回数 t の関数として

$$P_B(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \bar{\xi}_i(t) \right) \quad (53)$$

で与えられる。結果の一部を図 3 に載せよう。左図ではいくつかのシグナルとノイズの比に対し、修正され

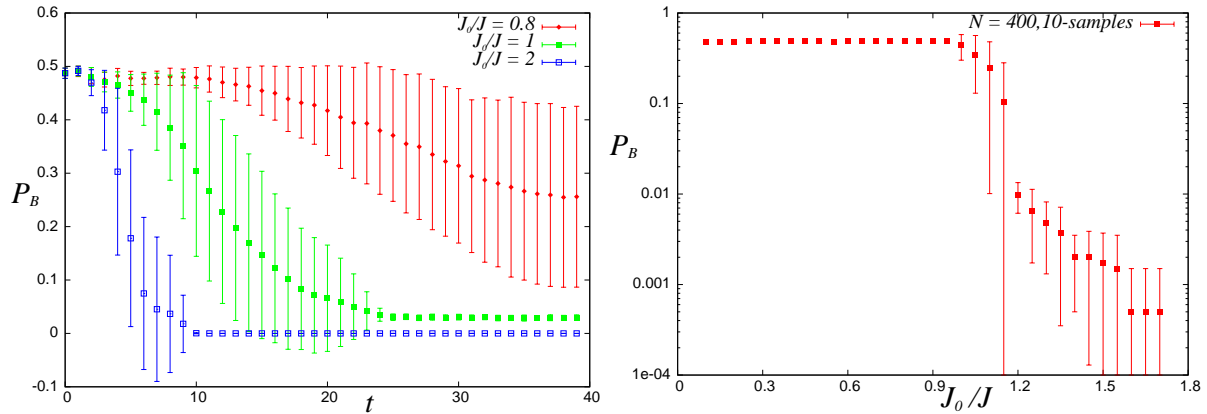


図 3: 修正された平均場方程式での復号過程をビット誤り率の時間変化としてみた様子 (左図: $N = 1000$, 誤差棒は 10 回の独立試行に基づく). $p = 2, \Gamma_0 = 0.5, J/J_0 = 0.8, 2, 1$ とそれぞれ選んである. 右図は定常状態でのビット誤り率のシグナル/ノイズ比依存性. $p = 2, \Gamma_0 = 0.5$ と選んである.

た平均場方程式を解いた場合のダイナミックスの様子をビット誤り率を介して表した。この復号過程では Γ を目標値 Γ_0 に向かってスケジュール:

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \left(1 + \frac{c}{t+1} \right) \quad (54)$$

のもとで変化させていることに注意されたい。図 3 では目標値を $\Gamma_0 = 0.5$ に設定した。この図より、ビット誤り率は反復回数 t の増加とともに単調に減少する。一方の右図からは $t \gg 1$ の定常状態においてはビット誤り率が $J_0/J \simeq 1$ 近傍で急激に減少する様子が見てとれる。最後に、ここでは示さなかった $p \geq 3$ の場合の反復式の導出もやや煩雑ではあるが可能であることを付言しておこう。

6 おわりに

早足ではあるが、情報統計力学に基づく情報処理課題への取り組みの標準的手続き (A)(B)(C) に対し、そのそれぞれを量子力学的揺らぎを用いた場合に対して拡張/再構築した。はじめに述べたように、このような拡張は学術的には興味深いとは言え、実際に古典的熱揺らぎと比べてどのような部分で利点があるのか、という問いに関し、現段階では明確に答えることはできず、本稿では量子系への拡張可能性の一つを示したに過ぎない。事実、計算時間の観点で考えると、マルコフ連鎖モンテカルロ法一つをとってみても、量子系への拡張によって、一般的に計算時間は増加する。また、平均場アプローチで決定論的な反復処理をした場合、収束までの繰り返し回数は古典系の場合から大きく変わりそうにはない。従って、量子計算機の実現をみてはじめて意味を持つ類の情報処理技法なのかもしれないが、量子相転移と情報処理性能の関係、古典系で指摘されている平均場アルゴリズムの収束性とレプリカ対称性の破れの関係 [42] など重要かつ興味を引く部分も少なくはない。今後も地道な研究を続けていくことが重要であると思われる。

謝辞

共同研究を通じて多くの助言を頂いた和歌山工業高等専門学校の雑賀洋平先生, 東京大学の岡田真人先生に感謝します。本講義ノートで紹介した研究は文部科学省科学研究費補助金・特定領域研究「情報統計力学の深化と展開」(課題番号: 18079001)の援助を受けました。

参考文献

- [1] 西森秀稔 (1999): スピングラス理論と情報統計力学, 新物理学選書, 岩波書店
- [2] Nishimori H 2001 *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction* (Oxford: Oxford University Press)
- [3] 堀口剛, 佐野雅己 (2000): 大学院情報理工学 2 情報数理物理, 講談社
- [4] 伊庭幸人 (2003): ベイズ統計と統計物理, 岩波講座, 物理と情報, 岩波書店
- [5] 樺島祥介, 上田修功 (2003): 平均場近似・EM法・変分ベイズ法, 統計科学のフロンティア 11, 計算統計 I 確率計算の新しい手法, 第 III 部, 岩波書店
- [6] 田中和之 (編著) (2006): 確率的情報処理と統計力学, 臨時別冊・数理科学, SGC ライブラリ 50, サイエンス社
- [7] 田中和之 (2006): 確率モデルによる画像処理技術入門, 森北出版
- [8] Mézard M, Parisi G and Virasoro M A 1987 *Spin Glass Theory and Beyond* (Singapore: World Scientific)
- [9] Hartmann A K and Weight M 2005: *Phase Transitions in Combinatorial Optimization Problems*, WILEY-VCH
- [10] Bishop C M 2006: *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, Singapore
- [11] Kirkpatrick S, Gelatt, Jr C D and Vecchii M P 1983 *Science* **220** 671
- [12] Ruján P 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2968
- [13] Nishimori H 1993 *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** 2973
- [14] Nishimori H and Wong K Y M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 132
- [15] Sherrington D and Kirkpatrick S 1975 *Phys. Rev. Lett.* **35** 1792
- [16] Kadowaki T and Nishimori H 1998 *Phys. Rev. E* **58** 5355
- [17] Finnila A B, Gomez M A, Sebenik C, Stenson C and Doll J D 1994 *Chem. Phys. Lett.* **219** 343
- [18] Das A and Chakrabarti B K 2005 *Quantum Annealing and Analog Quantum Computation Lecture Notes in Physics* **679**, ed Das A and Chakrabarti B K (Berlin: Springer)
- [19] Suzuki S and Okada M 2005 *J. Phys. Soc. Jpn.* **74** 1649
- [20] Santoro G E and Tosatti E 2006 *J. Phys. A* **39** R393
- [21] Das A and Chakrabarti B K 2008 Quantum Annealing and Analog Quantum Computation (arXiv:0801.2193 [quant-ph]), to appear in *Rev. Mod. Phys.*

- [22] Morita S and Nishimori H 2008 Mathematical Foundation of Quantum Annealing (*Preprint* arXiv:0806.1859 [quant-ph]), to appear in *J. Math. Phys.*
- [23] Tanaka K and Horiguchi T 1997 *IEICE J80-A-12* 2217 (in Japanese)
- [24] Tanaka K 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** R81
- [25] Inoue J 2001 *Phys. Rev. E* **63** 046114
- [26] Inoue J 2005 *Quantum Spin Glasses, Quantum Annealing, and Probabilistic Information Processing*, in *Quantum Annealing and Related Optimization Methods Lecture Notes in Physics* **679**, ed Das A and Chakrabarti B K (Berlin Heidelberg: Springer) p 259
- [27] Tanaka K and K Tsuda 2008 *Journal of Physics: Conference Series* **95**, International Workshop on Statistica-Mechanical Informatics 2007, ed Hukushima K, Kabashima Y, Nishimori H and Tanaka T (IOP: Publishing) p 012023
- [28] Laumann C, Scardicchio A and Sondhi S L 2009 *Journal of Physics: Conference Series*, International Workshop on Statistica-Mechanical Informatics 2008, ed Hayashi M, Inoue J, Kabashima Y and Tanaka K (IOP: Publishing), to appear
- [29] Inoue J, Saika Y and Okada M 2009 *Journal of Physics: Conference Series*, International Workshop on Statistica-Mechanical Informatics 2008, ed Hayashi M, Inoue J, Kabashima Y and Tanaka K (IOP: Publishing), to appear
- [30] Sourlas N 1989 *Nature* **339** 693
- [31] Kabashima Y and Saad D 1999 *Europhys. Lett.* **45** 98
- [32] Suzuki M 1977 *Prog. Theor. Phys.* **58** 1151
- [33] Derrida B 1981 *Physical Review B* **24** 2613
- [34] Chakrabarti B K, Dutta A and Sen P 1995 *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models*, (Berlin Heidelberg: Springer)
- [35] Sachdev S 1999 *Quantum Phase Transitions* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [36] Obuchi T, Nishimori H and Sherrington D 2007 *J. Phys. Soc. Jpn* **76** 054002
- [37] Takahashi K 2007 *Phys. Rev. B* **76** 184422
- [38] Opper M and Saad D 2001 *Advanced Mean Field Methods: Theory and Practice* (Massachusetts: The MIT Press)
- [39] Jordan M I 1998 *Learning in Graphical Models* (Massachusetts: The MIT Press)
- [40] Ishii H and Yamamoto T 1985 *J. Phys. C* **18** 6225
- [41] Yamamoto T 1988 *J. Phys. C* **21** 4377
- [42] Kabashima Y 2003 *J. Phys. Soc. Jpn.* **72** 1645