



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ゲーム理論に基づくダブルオークション市場の確率モデル
Author(s)	伊吹, 勇郎
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	学士
Issue Date	2010-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/43958
Type	bachelor thesis
File Information	ibuki2009.pdf



ゲーム理論に基づくダブルオークション市場の確率モデル

伊吹勇郎

北海道大学 工学部情報エレクトロニクス学科 情報工学コース 混沌系工学研究室

平成 21 年度 卒業論文

目次

1	はじめに	1
1.1	本研究の背景	1
1.2	本研究の目的	1
1.3	本論文の構成	2
2	Bid-Ask スプレッドに基づく金融データの分類とその統計解析	3
2.1	ダブルオークション・システム	3
2.2	インターネットを経由した金融データの回収とその統計的性質	3
2.2.1	インターネットでのデータ回収法	3
2.2.2	データフォーマット	4
2.2.3	データの統計的性質	5
3	現象論的アプローチ: Madhavan-Richardson-Roomans 模型	6
3.1	Madhavan-Richardson-Roomans モデルの基本的性質と着目する統計量	7
3.1.1	成行注文と指値注文	7
3.1.2	単純マルコフ過程と自己相関関数	8
3.1.3	市場価格の更新式	9
3.1.4	応答関数	10
3.1.5	ボラティリティと応答関数の漸近的振る舞い	11
3.2	計算機実験による統計量の評価	12
3.3	実データとの整合性	13
3.4	実データとの不整合性を考慮したデータ加工からの考察	13
4	構成論的アプローチ: マイノリティ・ゲームに基づく市場構築	16
4.1	マイノリティ・ゲームの定義と基本的性質	16
4.2	マイノリティ・ゲームに基づくダブルオークション・システムの構築	19
4.3	計算機シミュレーションによる統計量の評価	20
4.4	実データとの整合性	20
5	ディスカッションと今後の課題	21
5.1	MRR モデルの改良	22
5.2	マイノリティ・ゲームの改良	24
5.3	相関関数のスケール・フリー性	24
6	おわりに	24

1 はじめに

1.1 本研究の背景

金融商品の値動きを確率過程で近似し、資産運用におけるリスクを評価し、デリバティブなどの派生商品を作ることによってリスクを分散/回避するための方法論の確立は(社会に与えた影響の善し悪しではなく、純粋な学問的貢献として)金融工学における大きな成果の一つである[1, 2, 3]. 金融商品の複雑な価格変動がカオス力学系のような決定論的規則から生まれるものではなく、「確率的」な規則に従うならば、それはどのような確率過程に従うか、という問いに関する研究の歴史は古く、最も初期の段階でそれはブラウン運動 (**Brownian motion**) (所謂、ウィナー過程) で記述できると考えられていた. しかし、その後、実際の価格変動幅(リターン)の分布は正規分布ではなく、より大きな変動幅も無視できない頻度で現れるという事実が金融データの解析によりわかってくるとともに、リターンが従う分布として安定分布の一つであり、厚い裾野をもつレヴィ分布を仮定したレヴィ・フライト (**Lévy flight**) や、価格変動幅の分散であるボラティリティが時間とともに変動する「ボラティリティ変動モデル」として値動きを記述する **ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)** 過程や **GARCH (Generalized ARCH)** 過程などの確率過程が提案されていきている[1, 3]. もちろん、このような社会現象の記述の妥当性チェックには、自然現象のような「精密実験」から得られる結果を用いることはできない. その代わりとして、それまでに蓄積された種々の金融データが唯一、経済理論の妥当性を検証可能にしている.

そのような金融データとしては、近年、インターネットの普及に伴い大衆化した所謂「インターネット・トレーディング」などで提示される金融商品の価格時系列が極めて長期間に渡り回収/利用できるようになってきた. しかし、そのようなインターネット取引システムを提供している証券会社/取引会社の多くが、それら蓄積された大量のデータから何が読み取れ、どのように利用できるかに関し、必ずしも明確な方向性を持っていない状況がある. 例えば、ソニー銀行 (<http://moneykit.net/>)[4] はトレーダ群の意思決定によって決定される市場為替レートに $\varepsilon = \pm 0.1$ 円の「レート窓」をかけ、この窓幅をこえた価格変動があった場合のみ、その時点での為替レートを顧客に提示するシステムを構築し、インターネットを経由して顧客に情報提供している. この確率過程は第一通過過程 (**First-passage process**) と呼ばれるものであり、レート窓でデータが「間引かれる」効果により、価格の変動間隔が引き延ばされることが容易にわかる. この変動間隔の「延び」に着目し、実データから変動間隔の従う分布を特定し[5, 6, 7], 待ち行列理論を用いることで、顧客がインターネットにログイン後、はじめの価格変動が観測されるまでの「待ち時間」を評価することができる. さらに、レート窓の間隔を変化させたとき、この待ち時間がどのように長くなるか(短くなるか)を定量的に議論することができ、その知見はソニーバンクのような金融価格をインターネットを介して提示する方式をとる場合に有益な知見となることが期待できる[8, 9].

1.2 本研究の目的

ソニーバンクレートに代表される金融データは「時刻」と「価格」からなる2次元データであるが、一般の金融データには市場価格の他、各トレーダの提示する「売り注文」の値段の最大値 (**Bid**) と「買い注文」の値段の最小値 (**Ask**) がその時刻とともに与えられるものも存在する. このように、顧客が自らの「売り注文」と「買い注文」を同時に提示するような金融取引をダブルオークション (**Double-auction**) と呼び[10], そこでどのように市場価格が決定し、証券会社など取引仲介会社の利益となる **Bid** と **Ask** の差として定義される **Bid-Ask スプレッド (Bid-Ask spread)** が

どのような統計的性質を持ち、市場にどのような影響を与えるのかに関してはまだ不明な点が多く、実データとしては十分なストックがあるものの、現時点で十分な数理科学的な理解が得られているとは言いがたい。

そこで、本論文ではダブルオークション・システムにおける金融時系列データを確率過程としてとらえ、その確率過程をマクロに特徴付ける統計量を選択し、それを説明するための「マクロ的 (現象論的) 視点」および「ミクロ的 (構成論的) 視点」から構築される確率モデルをそれぞれ導入し、得られる結果を「スプレッド変動型」及び「スプレッド一定型」実データと比較検討し、確率モデルと実データの振る舞いの類似性/相違性からモデル自身の妥当性と問題点を探って行く。このような社会現象/経済現象に関するモデリングを行う際、我々が常に考えなければならないのは、それら確率モデルをどのような視点で構築し、その確率モデルの生成する時系列と実データの何を比較したらよいのか、また、その観点で両者の差が大きい場合には確率モデルの何を修正/改良したらよいのか、またそのような確率モデルの適切な候補に対し、工学的にどのような応用が考えられるかということなどである。ここでは現象論的モデルとして Madhavan-Richardson-Roomans モデル [11] を取り上げ、このモデルの振る舞いを自己相関関数 (**Auto-Correlation Function**) [12, 13], 応答関数 (**Response Function**) (あるいは遅延衝撃関数 (**lagged impact function**)) [12, 13] と呼ばれる時変な統計量を介して実データと比較検討する。Madhavan-Richardson-Roomans モデルはスプレッド一定の仮定のもとに構築される確率モデルのため、スプレッド変動型データを説明することは困難であることが予想される。そこで、本論文ではミクロ的視点、構成論的視点、すなわち、ゲーム理論的視点 [14] からの確率モデルとして繰り返しゲームのひとつであるマイノリティ・ゲーム [15, 16, 17, 18, 19] を改良し、このゲーム理論を用いてダブルオークション・システムを構築し、人工的にスプレッドの揺らぎを生成することで上記 2 種類の統計量の振る舞いを定性的に説明することを試みる。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。第 2 節では本研究で使用する実金融データについて、その回収方法、データフォーマットの他、その統計的性質について詳しく説明する。続く第 3 節では、第 2 節で説明した金融データを説明するための現象論的確率モデルである Madhavan-Richardson-Roomans モデルを導入し、その基本的性質と着目する統計量である自己相関関数、および、応答関数を定義し、Madhavan-Richardson-Roomans モデルにおいてこれら統計量の振る舞いを詳しく述べる。また、得られる結果を「スプレッド変動型」「スプレッド一定型」金融データと比較検討し、問題点を洗い出す。第 4 節ではミクロな構成論的視点からの確率モデルとしてマイノリティ・ゲームと呼ばれる繰り返しゲームを改良し、ダブルオークション・システムを計算機上にシミュレートする。スプレッドが一定では無く揺らぎを伴うようにシステムを構築することで「スプレッド変動型」金融データの自己相関関数、応答関数の振る舞いを定性的に説明することを試みる。続く第 5 節では得られた結果を吟味し、今後の展開について述べる。最後の第 6 節はまとめである。

2 Bid-Ask スプレッドに基づく金融データの分類とその統計解析

インターネットを経由して回収可能な外国為替レートなどの金融データとしてはソニー銀行:

<http://moneykit.net/>

の為替レートのように、市場価格と価格変動時刻をセットとした2次元情報として与えられるものもある。しかし、より詳細に金融商品の価格決定メカニズムとデータフォーマットを探て行くと、「市場価格」自体が情報として提示されるものは少数派であり、金融商品の価格決定には通常、トレーダの行動に基づき買値 (**Ask**) と売値 (**Bid**) の2種類の入札が介在する。そして、市場価格はこれら2種類の価格から、商品ごとに定められたある規則に従い決定される。ここで言う「Ask」は文字通りトレーダが金融商品を買う際に希望する価格(買値)であり、逆に、「Bid」はトレーダがその商品を売る際に希望する価格(売値)である。通常の金融市場では $\text{Ask} > \text{Bid}$ が成立し、その差額 $\text{Ask} - \text{Bid}$ はスプレッド (**Spread**) (あるいは **Bid-Ask** スプレッド) と呼ばれ、この額が証券会社など仲介取引を行う企業の利益となる。このスプレッドは同じ金融商品でも取引会社によってその大きさが異なり、また、同じ取引会社であっても、その商品によってスプレッドが一定に固定されている場合と変動している場合の2種類が存在する。本論文ではこのスプレッドの統計的性質に着目し、実金融データを大きく「スプレッド一定型」と「スプレッド変動型」に分類する。

本研究の目的はこのような2種類のスプレッドの統計的性質を説明するような「現象論的モデル」とミクロなエージェントの行動からスプレッドの性質を説明する「ゲーム理論」に基づく「微視的(構成論的)確率モデル」を提案し、それぞれの振る舞いを実データと比較することで、それらの妥当性と問題点を実証的に明らかにすることである。

2.1 ダブルオークション・システム

金融市場において、トレーダが商品を購入/売却するために希望価格を市場に対して提示する仕組みを「オークション」と呼ぶが、このオークションには、大別すると売り手か買い手のどちらかが価格を提示するシングルオークション (**Single-auction**) と、売り手と買い手の双方が価格を提示するダブルオークション (**Double-auction**) がある。シングルオークションでは、ある一点の商品の取引に有効なので美術品の売買などに用いられ、一方のダブルオークションは同種同質の物を多数取引する場合に適するため、主に証券市場などで用いられる。本論文ではダブルオークション・システムについて考える。

2.2 インターネットを経由した金融データの回収とその統計的性質

既に述べたように、近年ではインターネットを経由した金融商品取引が一般化したことに伴い、その統計的性質を調べるために十分な量の金融データが回収できるようになった。そこで、ここでは本論文で用いる実データをインターネットから回収する方法とその統計的性質の実データ解析について詳しく説明しておく。

2.2.1 インターネットでのデータ回収法

金融商品の実データの回収はメタクォーツ社:

<http://www.metaquotes.net/>

の MetaTrader4 (メタトレーダー) と呼ばれる, 一般顧客でも外貨交換を可能とする無料ソフトを使用した (図 1 参照). このトレードソフトはチャート分析ソフトとしても用いられており, 任意の

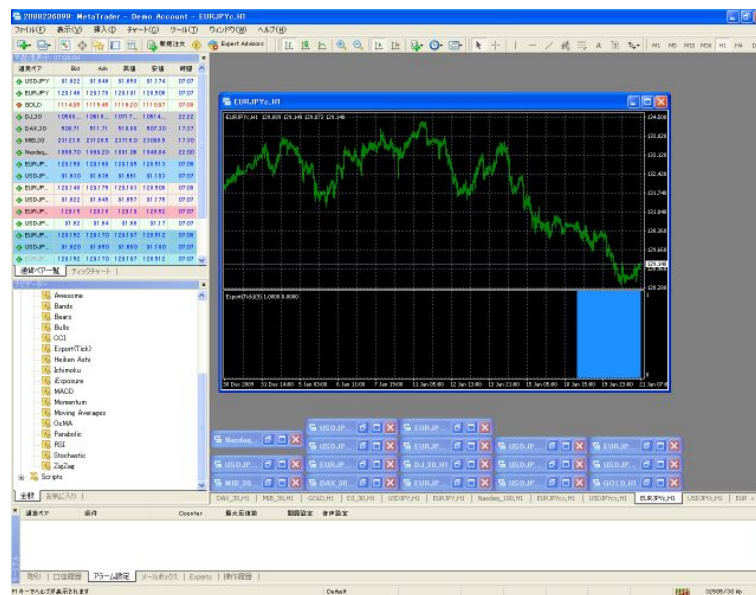


図 1: メタトレーダー画面 (<http://www.metaquotes.net/>).

時刻において, 特定の金融商品における Ask と Bid を確認できる. チャートとしては通貨以外にもサーバファイルを変更することによりダウや金などのデータ表示もできる. 本論文ではこのフリーソフトを用いてデータを自動回収し, 得られた膨大なデータからその背後にある統計的性質を探っていく.

2.2.2 データフォーマット

金融データは様々なフォーマットで提供される. 多くの場合には商品価格とその価格が更新された時刻の 2 次元情報が書き込まれたファイルとして提供されるが, 注目する変数や計算すべき統計量等に応じて適時書き換え (変換) を行わなければならない.

本研究で用いるデータの回収で利用した MetaTrader4 には作成したスクリプトを導入することができる. 従って, 本研究では

http://sufx.core.t3-ism.net/item_166_catid_8_subcatid_4.html

のスクリプトを使用し, 金融商品のデータを保存した. 具体的には,

```
2009/12/24,17:17:40,131.053,131.092
2009/12/24,17:17:41,131.053,131.088
2009/12/24,17:17:41,131.052,131.088
2009/12/24,17:17:43,131.048,131.071
2009/12/24,17:17:44,131.043,131.076
.....
.....
```

のように、左コラムから

時刻 (年/月/日, 時:分:秒), Bid, Ask

の順で記載されたデータフォーマットを持つ形式でデータを保存/数値解析した。

全ての自然科学研究において重要なこととして「実験結果/解析結果の追試可能性/再現可能性」がある。本研究は実験の代わりに数値データ解析を介し、その結果を用いてモデルや理論の妥当性を検証するが、その際の再現可能性は上に述べた方法でデータを回収し、本論文で述べられるのと同様の解析を行うことで常に保証されていることに注意されたい。

2.2.3 データの統計的性質

MetaTrader4 で保存した金融商品のデータを図に載せる。本論文ではユーロと日本円, US ドルと日本円の為替データと, Nasdaq100 の株価データ, 金価格データの 4 種を使用した。まず, ラウンド l 毎にデータより Ask と Bid の中点 m_l , $m_{l+1} - m_l$ を計算し, それぞれの Bid-Ask スプレッドのヒストグラム $P(S)$ を数値的に評価して, それぞれを図 2 (ユーロ/円為替), 図 3 (US ドル/円為替), 図 4 (Nasdaq100), 図 5 (金価格) にプロットした。なお, ラウンド数はすべてのデータで 100000 である。

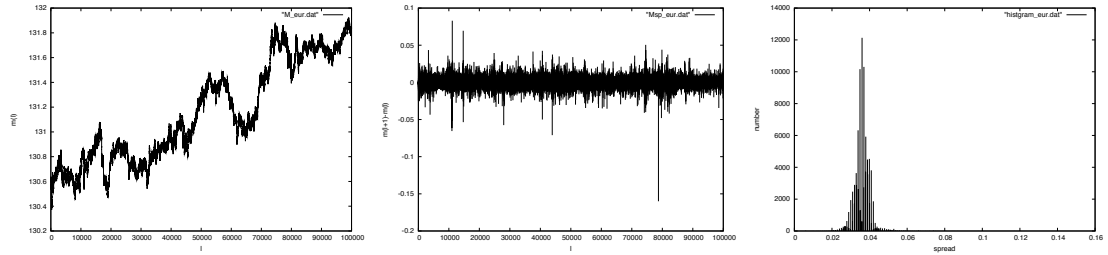


図 2: ユーロ/日本円の為替データの振る舞い。左から Bid-Ask の中点 m_l , 中点のスプレッド $m_{l+1} - m_l$, Bid-Ask スプレッドのヒストグラム。最右図より, この金融データは「スプレッド変動型」であることがわかる。

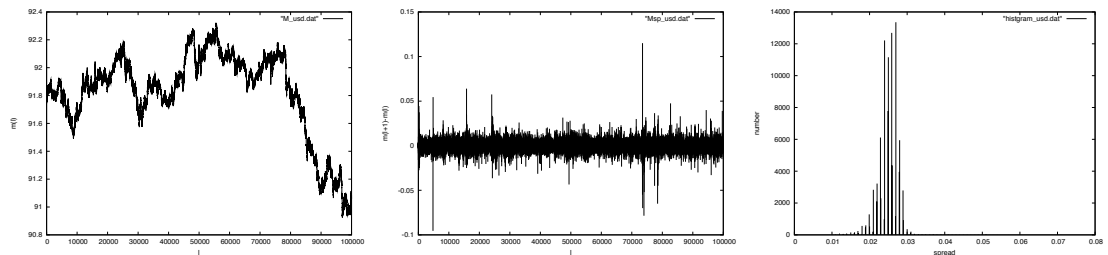


図 3: US ドル/日本円の為替データの振る舞い。左から Bid-Ask の中点 m_l , 中点のスプレッド $m_{l+1} - m_l$, Bid-Ask スプレッドのヒストグラム。最右図より, この金融データは「スプレッド変動型」であることがわかる。

これらのグラフより, ここで取り上げたデータは $P(S)$ がある有限の広がりを持ったスプレッド変動型データ (図 2, 3) と $P(S)$ がデルタ・ピークを持つスプレッド一定型データ (図 4, 5) に大きく分けることができることが見て取れる。

また, このデータでは市場価格自体が提示されていないが, 仮想的に Bid と Ask の中点 m_i を時刻 i での商品価格とすると, $m_{i+1} - m_i$ は価格変動幅 (リターン) とみなすことができる。従って,

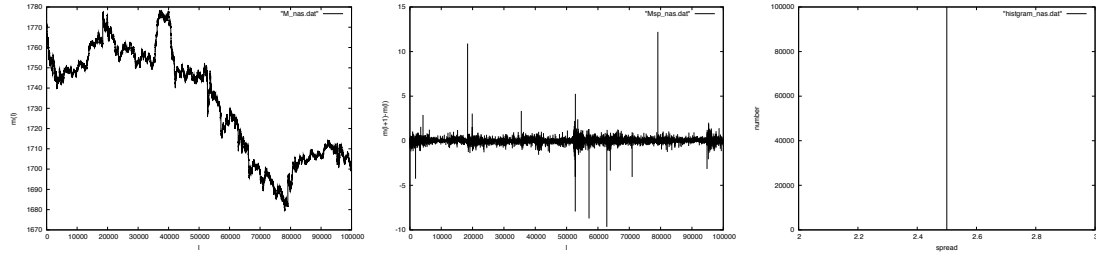


図 4: Nasdaq100 データの振る舞い. 左から Bid-Ask の中点 m_l , 中点のスプレッド $m_{l+1} - m_l$, Bid-Ask スプレッドのヒストグラム. 最右図より, この金融データは「スプレッド一定型」であることがわかる.

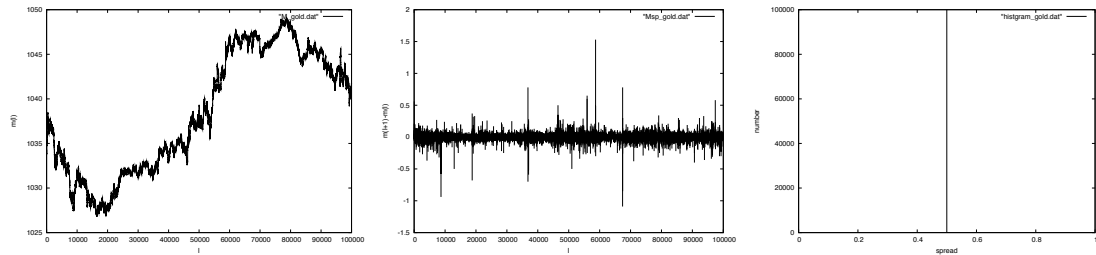


図 5: 金価格データの振る舞い. 左から Bid-Ask の中点 m_l , 中点のスプレッド $m_{l+1} - m_l$, Bid-Ask スプレッドのヒストグラム. 最右図より, この金融データは「スプレッド一定型」であることがわかる.

この「リターン」のヒストグラムを調べ, それを正規分布と比較するため, 片対数スケールでプロットしてみる. その結果を図 6 に載せる. この図では平均ゼロの正規分布も重ね打ちしてプロットしてあるが, 明らかにデータから算出される「リターン」の分布は正規分布から外れており, とりわけ, 分布の裾は正規分布と比べてはるかに「厚い」. このような分布の裾広がり (**Fat-tail**) 性は多くの金融商品で確認され, 指摘されてきた性質であり, ブラック・ショールズ方程式などで用いられる「正規分布の仮定」が実データに対してはもはや妥当ではなく, より実証的見地からその仮定自体を見直さなければならないことを示唆する. 従って, 金融市場の数理モデルを考える際には, 大量データの入手が可能になった昨今では, 数理モデルの振る舞いとデータとの整合性チェックが必須の手続きであり, 本研究でもその立場からモデルの詳細な検討を進めていくことになる.

3 現象論的アプローチ: Madhavan-Richardson-Roomans 模型

前節で説明したスプレッド一定型の金融データの統計的性質を説明する模型として, 金融工学 (数理経済学) の分野では **Madhavan-Richardson-Roomans** モデル (“*Why Do Security Prices Change? A Transaction-Level Analysis of NYSE Stocks*” by A. Madhavan, M. Richardson and M. Roomans, *The Review of Financial Studies* **10**, No. 4, pp. 1035-1064 (1997)) (以下, 通常参照されるように彼らの頭文字をとり簡単に「MRR モデル」, あるいは MRR モデルに依拠した理論を「MRR 理論」と略記する) が提案されている. この MRR モデルは「トレーダ」などのミクロな構成要素から「ボトムアップ」的に構成されたものではなく, 実データや実データを生成する金融市場における現象をマクロに説明するために「トップダウン」的に構築された現象論的モデルである. 従って, ミクロな構成要素であるトレーダの意思決定の結果から金融商品の値動きを説明する目的のためには不十分であるが, そのような「ボトムアップ」的なゲーム理論に基づく「構成

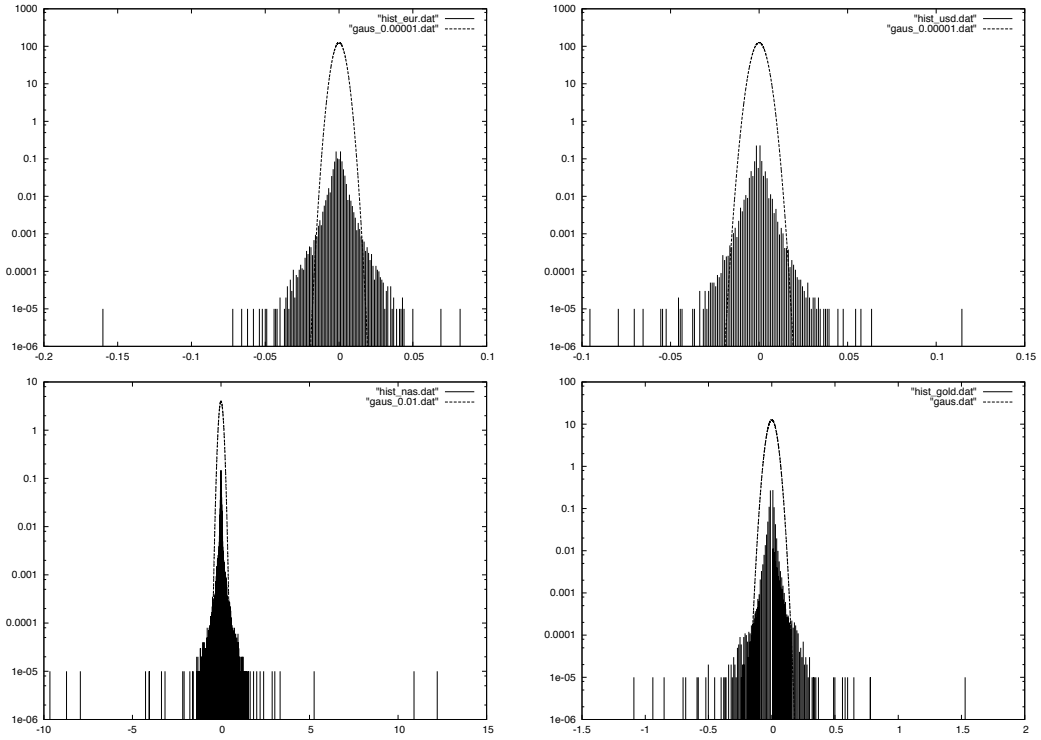


図 6: $m_{i+1} - m_i$ のヒストグラム. 左上から右下へ, ユーロ/円為替データ, US ドル/円為替データ, Nasdaq100 データ, 金価格データ. それぞれ平均ゼロの正規分布と重ね打ちしてプロットしてある.

論的アプローチ」に関しては次節で導入/検証される. 本節ではこの MRR モデルの詳細を説明した後, 前節のスプレッド一定型金融データの MRR モデルでの再現性を確認する. MRR モデルはスプレッド一定の仮定の下で正当化される数理モデルであるため, スプレッド一定型実データをより良く説明することが予想される. 逆に, スプレッド変動型データを説明する際には無視できない「ずれ」が生じる可能性があるわけであるが, その「ずれ」がどの程度で, どのような補正を加えれば「ずれ」が解消されるのか, についても検討/考察することが, この節での主要な目標である.

3.1 Madhavan-Richardson-Roomans モデルの基本的性質と着目する統計量

ここでは, この節で主に扱う MRR モデルについて, その基本的性質に着目するいくつかの統計量に基づいて詳しく述べる.

3.1.1 成行注文と指値注文

まず, 株式の売買注文方式にはいくつか種類があるが, 大別すると成行注文 (**Market order**) と指値注文 (**Book order**) の 2 つがある. 成行注文は売買価格を明示せず, 銘柄と数量のみを指定して注文をする方式である. 売買が成立しやすいが, 想定価格よりも高く買う, 安く売る, ということがある. 一方, 指値注文は売買価格を明示して注文をする方式で, 買いの場合には指値以下で, 売りの場合には指値以上で取引される. 希望した値段で売買することができるが, わずかの価格差で売買が成立しないことがある.

ここでは、成り行き注文を考え、 $v_i = v$ を時刻 i での成り行き注文の量 (Volume) とする。また、この注文量は時間によらずに一定であるとする。このとき、各取引時刻でのトレーダの「売値」「買値」を提示する売り買い判断を ± 1 の 2 値変数として

$$\epsilon_i = \begin{cases} +1 & (\text{買い}) \\ -1 & (\text{売り}) \end{cases} \quad (1)$$

で定義する。

3.1.2 単純マルコフ過程と自己相関関数

ここで、この「売り」「買い」の変数 (ラベル, 符号) ϵ_{i-1} はその条件付き期待値が下記で与えられる単純マルコフ過程に従うものとする。

$$\langle \epsilon_i \rangle |_{\epsilon_{i-1}} = \rho \epsilon_{i-1} \quad (2)$$

すなわち、この条件式は具体的に平均をとる際の条件付き確率を $P(\epsilon_i | \epsilon_{i-1})$ を用いると次のように書き直すことができる。

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_i P(\epsilon_i | \epsilon_{i-1}) = \rho \epsilon_{i-1} \quad (3)$$

つまり、時刻 $i-1$ での売り買い判断が ϵ_{i-1} であった条件のもとで時刻 i での売り買い判断の期待値は時刻 i での売り買い判断に比例し、その比例係数 (相関係数) が ρ で与えられることになる。

従って、この売り買い判断の確率変数の自己相関関数 (**Auto-Correlation Function**) は次のように計算される。

$$\begin{aligned} C(l) &= \langle \epsilon_i \epsilon_{i+l} \rangle = \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \cdots \sum_{\epsilon_{i+l} = \pm 1} P(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{i+l}) \epsilon_i \epsilon_{i+l} \\ &= \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \cdots \sum_{\epsilon_{i+l} = \pm 1} P(\epsilon_{i+l} | \epsilon_{i+l-1}) P(\epsilon_{i+l-1} | \epsilon_{i+l-2}) \cdots P(\epsilon_{i+1} | \epsilon_i) P(\epsilon_i) \epsilon_i \epsilon_{i+l} \\ &= \sum_{\epsilon_{i+l-1} = \pm 1} \cdots \sum_{\epsilon_i = \pm 1} P(\epsilon_{i+l-1} | \epsilon_{i+l-2}) \cdots P(\epsilon_{i+1} | \epsilon_i) P(\epsilon_i) \epsilon_i \left\{ \sum_{\epsilon_{i+l} = \pm 1} \epsilon_{i+l} P(\epsilon_{i+l} | \epsilon_{i+l-1}) \right\} \\ &= \sum_{\epsilon_{i+l-2} = \pm 1} \cdots \sum_{\epsilon_i = \pm 1} P(\epsilon_{i+l-2} | \epsilon_{i+l-3}) \cdots P(\epsilon_{i+1} | \epsilon_i) P(\epsilon_i) \epsilon_i \\ &\quad \times \rho \left\{ \sum_{\epsilon_{i+l-1} = \pm 1} \epsilon_{i+l-1} P(\epsilon_{i+l-1} | \epsilon_{i+l-2}) \right\} \\ &= \cdots = \rho^{l-1} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} P(\epsilon_i) \left\{ \sum_{\epsilon_{i+1} = \pm 1} \epsilon_{i+1} P(\epsilon_{i+1} | \epsilon_i) \right\} = \rho^l \sum_{\epsilon_i = \pm 1} P(\epsilon_i) = \rho^l \end{aligned} \quad (4)$$

よって、この自己相関関数は時間 l の増加とともに

$$C(l) = e^{-l \log(1/\rho)} \quad (5)$$

のように指数関数的に減衰する。もちろん、この単純マルコフ性、および、その結果である自己相関関数の指数関数的減衰は MRR モデルの仮定の一つであり、実データのなかにはこの自己相関関数の振る舞いが

$$C(l) = l^{-\rho'} \quad (6)$$

のようなベキ則に従うデータが存在する可能性も否定できない。しかし、ここではこの仮定を受け入れ、その妥当性に関しては最終節で議論する。

3.1.3 市場価格の更新式

さて、MRR モデルでは上記のように自己相関関数の指数的減衰で特徴付けられる売り買い判断の確率変数 $\{\epsilon_i\}$ に対し、真の市場価格 p_i はトレード・インパクトと外的ショックの双方で決まるものとして市場価格の更新式が導出される。

つまり、 i 番目のトレーディングにおける市場の「トレード・インパクト (驚き)」は

$$\epsilon_i - \rho\epsilon_{i-1} \quad (7)$$

としてモデル化できる。ここで、この「驚き」の程度は $\rho = 1$ で最小値をとる。これは ϵ_i と ϵ_{i-1} の相関が大きいと、1 ラウンド手前の時刻での売り買い判断がわかれば次の時刻での売り買い判断が確率 1 で わかってしまうという意味で驚きの度合いが小さいと理解する。逆に、 $\rho = 0$ のときには最大値をとり、これは自己相関関数がゼロであるから、時刻 i での売り買い判断を推測する際に 1 ラウンド手前の売り買い判断の結果は何の情報も与えないこと、つまり、驚きの度合いが大きいことを意味する。

これをふまえると、市場価格 p_i の時間発展は次式で与えられる。

$$p_{i+1} = p_i + \theta(\epsilon_i - \rho\epsilon_{i-1}) + \xi_i \quad (8)$$

ここに、確率変数 ξ_i は平均ゼロ、分散 $\langle \xi_i^2 \rangle = \Sigma^2$ の正規雑音であり、これが前述の「外的ショック」に相当する。 θ は売り買い判断の変化に対する価格変化の割合を表すパラメータであり、実データとの整合性を考えて決定されるべき変数である。ここで、(8) 式の意味をもう少し詳しくみるために $\theta > 0$, $\epsilon_i = 0$ の場合を考えてみる。このとき、便宜上 $\Delta p \equiv p_{i+1} - p_i$, $\Delta \epsilon \equiv \epsilon_i - \epsilon_{i-1}$ と定義すれば、(8) 式は次のように書き換えることができる。

$$\frac{\Delta p}{\Delta \epsilon} = \theta > 0 \quad (9)$$

つまり、 $i-1$ と i で「売り」「売り」と続く場合、もしくは「買い」「買い」と続く場合には価格変動は無いが、「買い」「売り」の場合には価格は下落し、逆に「売り」「買い」の場合には価格は上昇することになる。しかし、現実の市場ではこれに様々な要因から来るノイズ (外的ショック) が含まれるのでその効果を ξ_i で取り込んだものが (8) 式である。

従って、その定義から $\epsilon_i = 1$ のときの価格 p_{i+1} が買値 a_i , $\epsilon_i = -1$ のときの価格 p_{i+1} が売値 b_i であるから、 a_i, b_i はそれぞれ (8) 式から次のように与えられる。

$$a_i = p_i + \theta(1 - \rho\epsilon_{i-1}) + \phi \quad (10)$$

$$b_i = p_i + \theta(-1 - \rho\epsilon_{i-1}) - \phi \quad (11)$$

これら売値と買値に対し、Bid-Ask スプレッドは

$$S = a_i - b_i = 2(\theta + \phi) = \text{一定値} \quad (12)$$

となり、MRR モデルではこのスプレッドが時刻によらずに一定であることが式の上からも確認できる。一方の売値と買値の「中点」は m_i でそれを定義することにすれば

$$m_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) = p_i - \theta\rho\epsilon_{i-1} \quad (13)$$

で与えられる。ここで、この中点の値は時変 (i に依存する) であることに注意されたい。

3.1.4 応答関数

本論文で着目する統計量としては、これら2つの量 ϵ_i, m_i を用いて計算される応答関数 (**Response Function**)(あるいは遅延衝撃関数 (**Lagged Impact Function**)) を次で定義する.

$$R_l = \langle \epsilon_i \cdot (m_{i+l} - m_i) \rangle \quad (14)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$ は時間平均を意味する. 具体的には売り買い判断の確率変数 $\epsilon_i, i = 0, \dots, \infty$ についての同時分布 $P(\epsilon_0, \dots, \epsilon_l)$ に対して

$$\langle \dots \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{\epsilon_0=\pm 1} \dots \sum_{\epsilon_l=\pm 1} P(\epsilon_0, \dots, \epsilon_l) (\dots) \quad (15)$$

で算出される. 実データからの期待値計算では同時分布は未知であるので、これを長時間平均:

$$\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^T (\dots)_i \quad (16)$$

に置き直し、この量を数値的に評価する. 例えば、応答関数 R_l の場合には

$$R_l = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^T \epsilon_i (m_{i+l} - m_i) \quad (17)$$

を計算することになる.

さて、この定義式 (14) から、応答関数は時刻 i での売り買い判断が時刻 i とそこから間隔 l だけ離れた時刻 (時間ラグが l) における中点の差とどのような相関を持つかを示す統計量である. 言い方を変えれば、この応答関数は任意時刻 i の市場において商品が「買われた」 $\epsilon_i = +1$ (あるいは「売られた」 $\epsilon_i = -1$) 事実が l ステップ経過後の Bid-Ask 中点の増加分 (減少分) にどれほど (平均的な) 影響を及ぼすか、という指標である. 前述のように中点を「市場価格」とみなすことができれば、これは時刻 i で商品が「買われた」事実によって市場が応答し、 l ステップ後にどれだけ市場商品価格が (平均的に) 上昇するのかを定量的に示すものであり、この統計量が Bid-Ask スプレッドの統計的性質といかなる関係を持つか、をデータ解析/計算機実験の双方から詳細に調べることが本研究の主要目的である.

ここでは具体的な検証を行う前に相関関数 $C(l)$ と応答関数 R_l の関係を詳しく調べてみる. まずは

$$m_{i+1} - m_i = \xi_i + \theta(1 - \rho)\epsilon_i \quad (18)$$

であるから、これを数項書き出してみると

$$\begin{aligned} m_{i+1} - m_i &= \xi_{i-1} + \theta(1 - \rho)\epsilon_{i-1} \\ m_{i+2} - m_{i+1} &= \xi_i + \theta(1 - \rho)\epsilon_i \\ &\dots \dots \dots \\ m_{i+l} - m_{i+l-1} &= \xi_{i+l-1} + \theta(1 - \rho)\epsilon_{i+l-1} \end{aligned}$$

が得られるが、これを辺々足し上げていくと

$$\begin{aligned} m_{i+l} - m_i &= (\xi_i + \xi_{i+1} + \dots + \xi_{i+l-1}) + \theta(1 - \rho)(\epsilon_i + \epsilon_{i+1} + \dots + \epsilon_{i+l-1}) \\ &= \sum_{j=i}^{i+l-1} \xi_j + \theta(1 - \rho) \sum_{j=i}^{i+l-1} \epsilon_j \end{aligned} \quad (19)$$

となる。従って、この関係式を用いて応答関数 R_l を書き直すと

$$\begin{aligned}
R_l &= \langle \epsilon_i (m_{i+l} - m_i) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=i}^{i+l-1} \xi_j + \theta(1-\rho) \sum_{j=i}^{i+l-1} \epsilon_j \right\rangle \\
&= \left\langle \epsilon_i \sum_{j=i}^{i+l-1} \xi_j \right\rangle + \theta(1-\rho) \left\langle \epsilon_i \sum_{j=i}^{i+l-1} \epsilon_j \right\rangle \\
&= \rho(1-\rho) \{ \langle \epsilon_i \epsilon_i \rangle + \langle \epsilon_i \epsilon_{i+1} \rangle + \cdots + \langle \epsilon_i \epsilon_{i+l-1} \rangle \}
\end{aligned} \tag{20}$$

となる。ここで自己相関関数の性質 (5) を用いると上式は

$$R_l = \theta(1-\rho)(\rho^0 + \rho^1 + \cdots + \rho^{l-1}) = \theta(1-\rho) \frac{1-\rho^l}{1-\rho} = \theta(1-\rho^l) = \theta(1-C(l)) \tag{21}$$

と書き換えることができる。従って、応答関数 R_l と自己相関関数 $C(l)$ は関係式:

$$R_l = \theta(1-C(l)) \tag{22}$$

で結ばれることがわかる。

さて、応答関数は時間 l の経過とともに指数関数的に「単調」に減少し、ゼロへと収束するので、応答関数も単調にその定常値 θ に収束することになる。従って、実データ解析の結果、応答関数の振る舞いに何らかの「非単調性」が確認できれば、そのデータの振る舞いを MRR 理論は説明することができない。また、逆にそのような「非単調性」を示す実データの性質を詳細に調べることで MRR 理論の適用限界を探ることができる。

3.1.5 ボラティリティと応答関数の漸近的振る舞い

金融データの揺らぎの程度を表す指標としてはボラティリティが用いられるが、MRR モデルではこのボラティリティを厳密に計算することができる。まず、(18) 式の両辺の自乗を時間平均したもの

$$\begin{aligned}
\langle (m_{i+l} - m_i)^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{j=i}^{i+l-1} \xi_j \right)^2 \right\rangle + \theta(1-\rho) \left\langle \left(\sum_{j=i}^{i+l-1} \xi_j \right) \right\rangle \left\langle \left(\sum_{j=i}^{i+l-1} \epsilon_j \right) \right\rangle \\
&\quad + \theta^2(1-\rho)^2 \left\langle \left(\sum_{j=i}^{i+l-1} \epsilon_j \right)^2 \right\rangle \\
&= l \langle \xi_i^2 \rangle + \theta^2(1-\rho)^2 \left\{ l \langle \epsilon_i^2 \rangle + 2 \left\langle \sum_{k=1}^l \epsilon_i \epsilon_{i+k-1} \right\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{23}$$

と書けるので、市場の揺らぎを表すボラティリティの時間依存性は陽に

$$\begin{aligned}
\sigma_l^2 &= \frac{1}{l} \langle (m_{i+l} - m_i)^2 \rangle = \langle \xi_i^2 \rangle + \theta^2(1-\rho)^2 \langle \epsilon_i^2 \rangle + 2\theta^2(1-\rho)^2 \sum_{k=1}^{l-1} \langle \epsilon_i \epsilon_{i+l} \rangle \\
&= \Sigma^2 + \theta^2(1-\rho)^2 + 2\theta^2(1-\rho)^2 \sum_{k=1}^{l-1} \rho^k \\
&= \Sigma^2 + \theta^2(1-\rho)^2 \left\{ 1 + \frac{2\rho(1-\rho^l)}{1-\rho} \right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

で与えられる. 従って, $l \rightarrow \infty$ の場合のボラティリティの漸近的な振る舞いは

$$\sigma_\infty^2 = \Sigma^2 + \theta^2(1-\rho)^2 \left(1 + \frac{2\rho}{1-\rho}\right) = \Sigma^2 + \theta^2(1-\rho^2) \quad (25)$$

と計算できる.

一方, $R_l = \theta(1 - C(l))$ より, $R_1 = \theta(1 - C(1)) = \theta(1 - \rho)$, $R_\infty = \theta(1 - \rho^\infty) = \theta$ であることに注意すると, 時刻 i での売り買い判断からくる市場の長期的応答 (R_∞) と短期的応答 (R_1) の比は

$$\lambda_\infty \equiv \frac{R_\infty}{R_1} = \frac{\theta}{\theta(1-\rho)} = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-C(1)} \quad (26)$$

のように自己相関関数の $l = 1$ での値 (相関係数 ρ) で表せることがわかる.

また, ボラティリティの式 (24) より

$$\sigma_1^2 = \Sigma^2 + \theta^2(1-\rho)^2 = \Sigma^2 + R_1^2 \quad (27)$$

$$\sigma_\infty^2 = \Sigma^2 + \theta^2(1-\rho) - 2\frac{1+\rho}{1-\rho} = \Sigma^2 + R_1^2 \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \quad (28)$$

であり, また, $\theta = R_\infty = \lambda_\infty R_1$ より, スプレッド $S = 2\theta + 2\phi$ は応答関数 R_1 と長期/短期応答の比 λ_∞ を用いて

$$S = 2\lambda_\infty R_1 + 2\phi \quad (29)$$

と書くことができる. 特に $\rho = 0$ の場合を考えると, このとき, $\phi = 0$ とすれば $\lambda_\infty = (1-\rho)^{-1} = 1$ であるから, $S = 2R_1$, つまり, $R_1 = S/2$ が成り立つ. また, $R_l = \theta(1-\rho^l) = \theta$ であるから, R は l に依らず, $R_1 = R = S/2$ が成り立つ.

本論文では特にこの応答関数 R_l のステップ依存性に着目する.

3.2 計算機実験による統計量の評価

上記の計算式 (8)(10)(11)(13), および, (14) 式を用いて MRR モデルの計算機シミュレーションを行った. データ数は 100000, l は 100, $\theta = 1.5$, Ask と Bid の初期値は共に 1000 とし, ρ の値は $-0.9, -0.5, 0.1, 0, 0.1, 0.5, 0.9$, および 1 の 8 つとした. 乱数は *Numerical Recipes in C* の関数 (`ran3()`) を使用し, それぞれ 10 回試行して R_l を求め, その平均を導出した. $\rho = 0$ の際は完全にランダムに価格が推移するので試行ごとに結果が違ったが, それ以外の値の際には理論的に予測される値 $\theta = 1.5$ に収束した. 計算上これは (21) 式の値に近くなるはずであり, また l が大きくなると (5) 式から $C(l)$ はほぼゼロとなるので

$$R_l \simeq \theta \quad (30)$$

となるはずである. 収束した値はこの式から予測される初期設定の θ の値とほぼ一致している. 従って, 我々の実行した計算機シミュレーションは正しく動作していることが確認できる. よって, 次のステップは果たして MRR モデルが実データから算出される応答関数と定性的に同じ振る舞いを示すかどうかを両者を比較することで明らかにすることである.

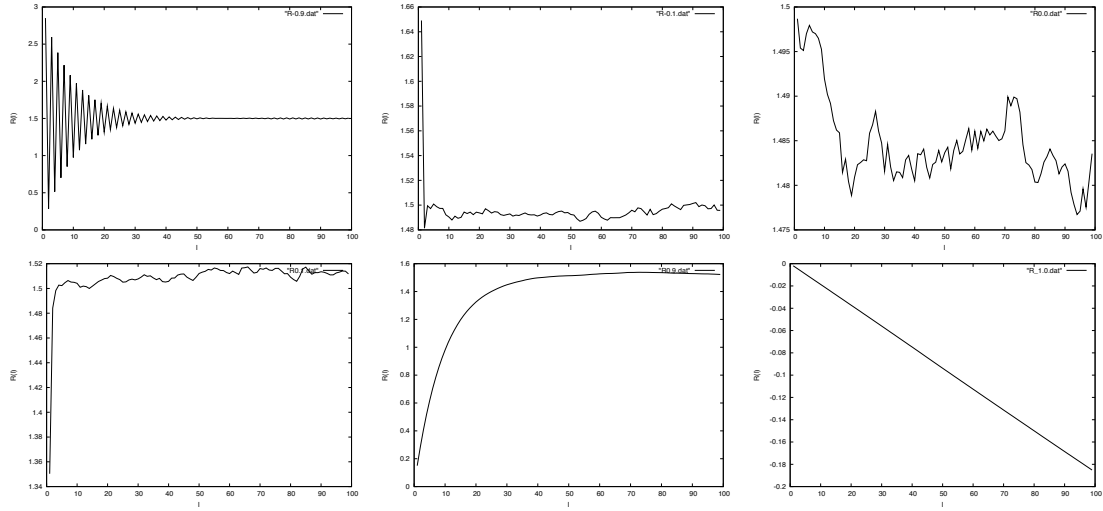


図 7: MRR モデルから計算される遅延衝撃関数 R_l の振る舞い. 左上から右下にかけて $\rho = -0.9, -0.1, 0, 0.1, 0.9, 1$ と選んだ典型的な場合をプロットした.

3.3 実データとの整合性

ここでは、いよいよ MRR モデルの妥当性を検討するために、金融商品の実データを用いた分析を行う。MetaTrader4 では ϵ_i を求めることができない。そこで、Bid と Ask の中点 m_i を用いて ϵ_i を推測することを考える。具体的には、 $m_{i+1} > m_i$ の時は価格が上がっている、つまり、買いが多くなったと考えて $\epsilon_i = +1$ とし、逆に、 $m_i > m_{i+1}$ の時は価格が下がっている、つまり、売りが多くなったと考え $\epsilon_i = -1$ と推察する。もちろん、この推測の正当性は実データとの整合性を検証することで判断されるべきである。

本論文では 2.2.3 節で挙げた 4 つのデータを使用し、MRR モデルと同様に応答関数 R_l を算出した。2.2.3 節で述べたように、為替データは「スプレッド変動型」であり、Nasdaq100 と金価格データは「スプレッド一定型」である。

まず、図 8 にはスプレッド一定型データから算出された応答関数 R_l の振る舞いを対応する MRR モデルのそれと比較して載せた。また、図 9 にはスプレッド変動型データから算出された応答関数 R_l の振る舞いをプロットした。予想通り、スプレッド一定型のデータは MRR モデルの応答関数 R_l と同様の振る舞いが得られたが、スプレッド変動型であるデータは MRR モデルの結果と異なり、従って、MRR モデルでスプレッド変動型データの統計的性質を説明することは無理であることがわかる。

3.4 実データとの不整合性を考慮したデータ加工からの考察

(10),(11) 式、および、(13) 式からわかるように、MRR モデルの場合、Ask, Bid、および、それらの中点の時間依存性が

$$a_i = p_i + \theta(1 - \rho\epsilon_{i-1}) + \phi \quad (31)$$

$$b_i = p_i + \theta(-1 - \rho\epsilon_{i-1}) - \phi \quad (32)$$

$$m_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) = p_i - \theta\rho\epsilon_{i-1} \quad (33)$$

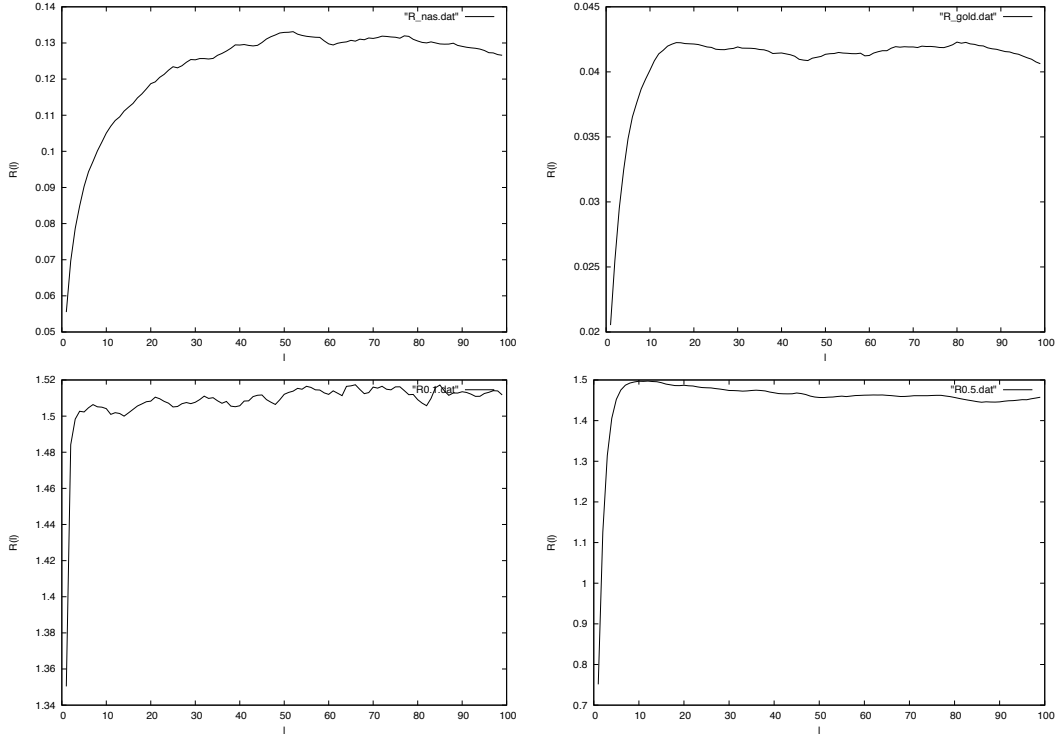


図 8: 上段はスプレッド一定で特徴付けられる Nasdaq100 データ, および, 金データから算出される応答関数 R_l の振る舞い. 下段は MRR モデルから算出された R_l の振る舞い.

と書けるが, スプレッド変動型の場合は a_i と b_i が上記のような形では与えられないので, これらから算出される m_i も必然的に上記に従わない. そこが MRR モデルと実データとから算出される応答関数の大きな違いである. このことから, MRR モデルにおいて, 価格 p_i から $\theta p \epsilon_{i-1}$ を引くことが R_l の振る舞いに重要な影響を及ぼすと予想できる. この仮説の正当性を確かめるため, 式 (13) に合致するようにスプレッド変動型の実データの m_i を加工してみるという方針のもと, 価格 p'_i , 中点 m'_i を次式で新たに定義し, データを作り替える.

$$p'_i = m_i \quad (34)$$

$$m'_i = m_i - \alpha \epsilon_{i-1} = p'_i - \alpha \epsilon_{i-1} \quad (35)$$

これら式 (34),(35) を用いて加工された実データに対し, 改めて応答関数 R'_l を計算してみる. その際, ここに現れるパラメータ α は価格 p'_i から適切な数値を代入する. つまり, 様々に α の値を変えて, 応答関数 R'_l の振る舞いを調べ, その振る舞いが最も実データから算出される応答関数と近くなるように α を決定した. 図 10 にその結果を載せる. この図は 2.2.3 節でのユーロと日本円 (左), US ドルと日本円 (円) の為替データを (34),(35) 式の意味で修正し, 新たに導出した R'_l をプロットしたものである. なお, α は共に 0.005 とした. 変動型の m_i を修正したデータから求めた応答関数 R'_l は MRR モデルのそれと定性的にみて同じ振る舞いを示すようになった. 従って

$$m_i = p_i - \alpha \epsilon_{i-1} \quad (36)$$

が当てはまる実データでないと, MRR モデルはその統計的性質をうまく説明することはできない.

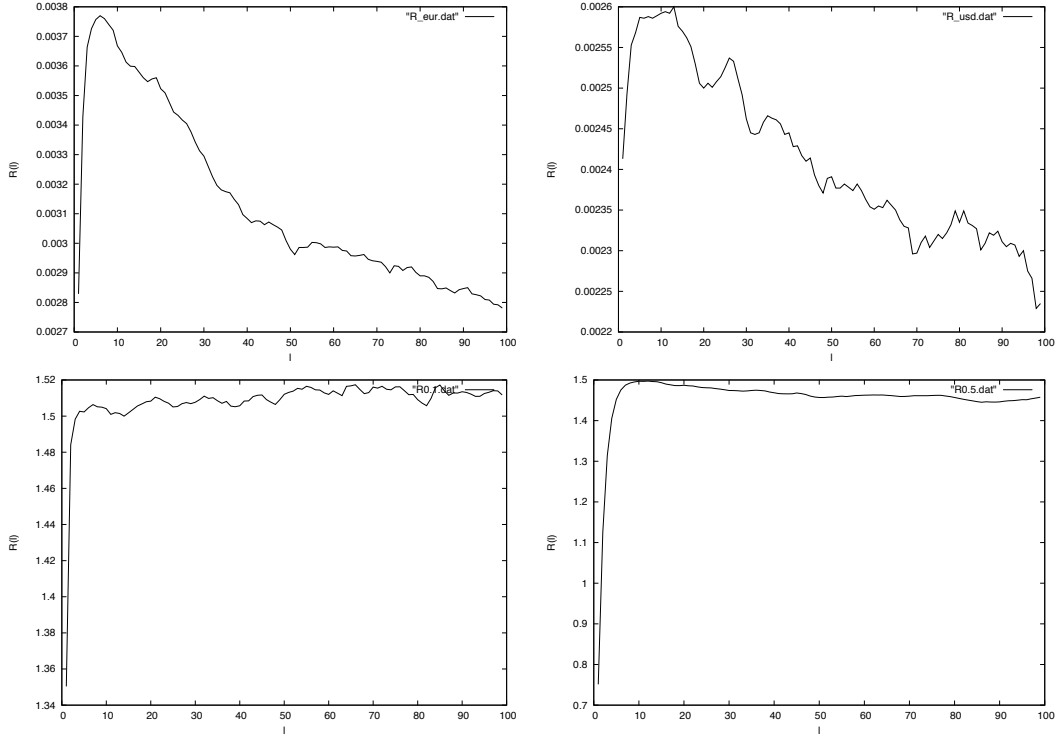


図 9: 上段はスプレッド 変動型で特徴付けられるユーロ/円, US ドル/円データ から算出される応答関数 R_l の振る舞い. 下段は MRR モデルから算出された R_l の振る舞い.

このとき, 前節で式 (21)(22) を計算した際に用いた手続きと同様の方法を用いると

$$R'_l = \theta + \rho(\theta\rho - \alpha) - \alpha C(l-1) \quad (37)$$

となる. 従って

$$\lim_{l \rightarrow \infty} C(l-1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \rho^{-l-1} = 0 \quad (38)$$

であるから, 十分に時間が経過した定常状態では

$$R'_\infty = \lim_{l \rightarrow \infty} R'_l = \theta - \rho(\theta\rho - \alpha) \quad (39)$$

となり, MRR モデルと同じようにある一点に収束する. また, パラメータ α にはある臨界値 α_c :

$$\alpha_c \equiv \frac{\theta(1 - \rho^2)}{\rho} \quad (40)$$

が存在し, $\alpha > \alpha_c$ で $R'_\infty > 0$, $\alpha < \alpha_c$ で $R'_\infty < 0$ となり, 特に $\alpha = \alpha_c$ では $R'_\infty = 0$ となることが直ちにわかる.

以上の考察から, スプレッド一定型の金融商品では式 (36) を満たすことが容易に推察できる.

また, この節での議論の流れ:

データの加工 → MRR モデルの振る舞い

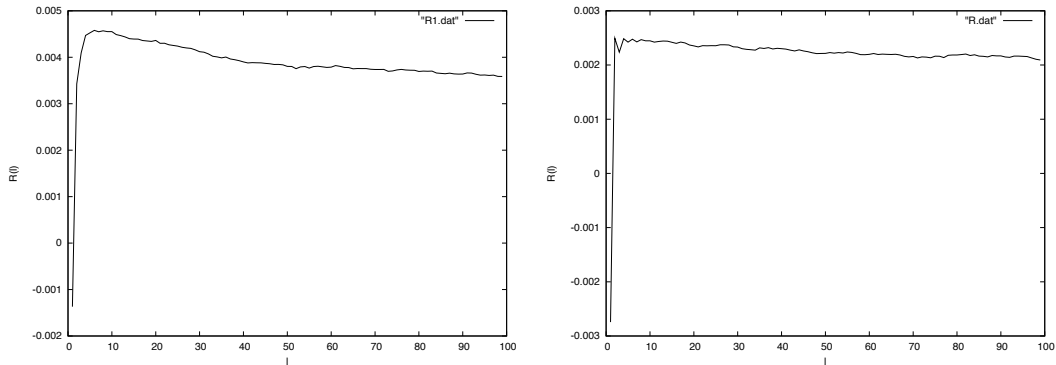


図 10: ユーロと日本円の為替データの R_t^1 (左) と US ドルと日本円の為替データの R_t^1 (右).

を逆にたどり

MRR モデルの修正/加工 → 実データの振る舞い

を考えることで、スプレッド変動型データをも説明しうる、より一般的な形式に MRR モデルを改良できる可能性が示唆されるが、我々は現段階でこのような試みの明確な指針を得ていない。これは今後の課題となっている。

4 構成論的アプローチ: マイノリティ・ゲームに基づく市場構築

我々が前 3.3 節で得た結果と議論より、現象論的モデルである MMR モデルでは「スプレッド変動型」の金融データの統計的性質 — 応答関数の非単調な振る舞い — を説明することができなかった。これは MRR モデルが「Bid-Ask スプレッド」が一定であるという仮定のもとで構築された理論であり、この仮定を超えるスプレッド変動型のデータセットに対して MRR モデル適用すると、応答関数などの時変な統計量の振る舞いを定性的にすら正しく説明することができない。MRR モデルを改良し、スプレッド変動型データをも説明しうる、より一般的な確率モデルを構築することは重要であるが、そもそも MRR モデルは市場の構成員であるトレーダの意思決定を「粗視化」することでマクロな価格の値動きを定式化した現象論的なモデルであるため、市場における「ミクロ」と「マクロ」の関係性をみるためには不十分である。

そこで、ここからは少し見方を変え、マイノリティ・ゲーム (Minority game) と呼ばれる繰り返しゲームに基づくエージェントベース・シミュレーションを用いることでダブルオークション市場を計算機上に構築し、よりミクロな視点に立って、すなわち、構成論的な立場から「スプレッド変動型」金融データのマクロな性質を再現することを試みる。

4.1 マイノリティ・ゲームの定義と基本的性質

まずはマイノリティ・ゲームの定義とその基本的性質について説明する。マイノリティ・ゲームとは N (奇数) 人が「売り」「買い」どちらかの判断を行い、少数派グループに属したものが勝つ非常にシンプルな繰り返しゲームである。つまり、ここでは金融取引において、各トレーダは第一の行動原理として「売る」「買う」のうち少数派に入ることが自分の資産を効率よく運用するため

の最善策であると考えたものと仮定する. 各トレーダ $i : (i = 1, \dots, N)$ は各ラウンド l で売買の意思 (入札) $b_i(l)$ を決定する. $b_i(l)$ は ± 1 で表され, $b_i(l) = 1$ ならばトレーダ i は商品を「買う」意思があり, 逆に $b_i(l) = -1$ ならばトレーダ i は商品を「売る」意思があるとみなす.

このとき, トレーダ全員が参照できるマクロな量として, ラウンド l の入札 $b_i(l)$ の総和を

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N b_i(l) \quad (41)$$

で定義する. この $A(l)$ が正の値をとるときは市場は「買い超過」にあり, 負の値をとるときは「売り超過」にあることを意味する. N は奇数に設定するので市場は必ず「買い超過」か「売り超過」になることに注意されたい. 各トレーダはラウンド l での意思決定に際し, 過去の M ラウンドまで定義される市場履歴の情報ベクトル λ を用いる.

$$\lambda_{l,A,Z} = \begin{pmatrix} \text{sgn}[(1-\zeta)A(l-1) + \zeta Z(l,1)] \\ \text{sgn}[(1-\zeta)A(l-2) + \zeta Z(l,2)] \\ \dots \\ \text{sgn}[(1-\zeta)A(l-M) + \zeta Z(l,M)] \end{pmatrix} \quad (42)$$

ここに $\text{sgn}(\dots)$ は符号関数, $Z(l, \lambda) : \lambda = 1, 2, \dots, M$ は白色雑音であり

$$\langle Z(l, \lambda) Z(l', \lambda') \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (43)$$

が成り立つ. 括弧 $\langle \dots \rangle$ は確率変数 Z の従う分布での平均を意味する.

$\zeta = 1$ の場合には市場の履歴はノイズからの寄与だけしかなくなり, $A(l)$ の履歴はトレーダ達には見えなくなっている. この場合を偽市場履歴と呼ぶことにする. 一方, $\zeta = 0$ の場合には, ノイズがゼロであるから, 情報ベクトルはトレーダ達のとった行動が $A(l)$ の履歴を介して反映される. この場合を真市場履歴とし, 以降この場合について考える.

情報ベクトル λ の各成分はそのラウンドで「買い超過」か「売り超過」なのかを ± 1 で表している. 履歴ベクトル λ の個数は, 各成分が ± 1 のどちらかをとるので 2^M 個である. 例えば λ が以下のようであったとする.

$$\lambda_{l,A,Z} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \dots \\ \dots \\ +1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

これは過去 M ラウンドで市場が常に「買い超過」であったことを意味する. このとき, あるトレーダは「次も『買い超過』のはずだろうから自分は次は売ろう」と考えるかもしれないし, 「次は『売り超過』に転じる」と考え, 売りを選択するかもしれない. このように提示された情報ベクトルに対する各トレーダのとり行動はトレーダの戦略に依存する.

今の場合, 提示された情報ベクトル λ に対し, 各トレーダの戦略は「売る」か「買う」の2通りある. 本論文では簡単のため, 戦略ベクトルを戦略数が2として

$$R_{\lambda_{l,A,Z}}^i = (R_{\lambda_{l,A,Z}}^{i1}, R_{\lambda_{l,A,Z}}^{i2}) \quad (45)$$

で与えるものとする。このベクトルの成分値は ± 1 をとり、それぞれトレーダが「買う」か「売る」かに対応する。この値はゲーム開始時に確率 $1/2$ で ± 1 を割り当て、ゲームの繰り返しの間、その値を保持するものとする。従って、ある情報ベクトルに対し、あるトレーダの戦略がともに $+1$ 、つまり「買い」になる可能性もあることに注意されたい。

各トレーダはゲームの各ラウンド l で次の決定方程式に従って戦略 $a(= 1, 2)$ を選択した場合の利得 $p_{ia}(l)$ を更新する。

$$p_{ia}(l+1) = p_{ia}(l) - \frac{b_i(l)A(l)}{\sqrt{N}} \quad (46)$$

$$b_i(l) = \sum_{\lambda=1}^{2^M} \delta_{\lambda, \lambda_{l,A,Z}} R_{\lambda}^{i\tilde{a}_i(l)} \quad (47)$$

ここで、 $\delta(x, y)$ はクロネッカのデルタであり、 $\tilde{a}_i(l)$ は次式の意味で利得を最大化する最適戦略である。

$$\tilde{a}_i(l) = \arg \max_a [p_{ia}(l)] \quad (48)$$

この更新式は各ラウンドで自分の戦略と市場の状況が逆符号になるとき利得が増えるという意味を持っている。これはマイノリティゲームの定義にあてはまっていると言える。今、具体的に $a = 1, 2$ という2つの戦略が存在する。

$$p_{i1}(l+1) = p_{i1}(l) - \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\lambda=1}^{2^M} \delta_{\lambda, \lambda_{l,A,Z}} R_{\lambda}^{i1} \right) A(l) \quad (49)$$

$$p_{i2}(l+1) = p_{i2}(l) - \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\lambda=1}^{2^M} \delta_{\lambda, \lambda_{l,A,Z}} R_{\lambda}^{i2} \right) A(l) \quad (50)$$

そこで2つの戦略間の利得の差を

$$q_i(l) = \frac{1}{2}(p_{i1}(l) - p_{i2}(l)) \quad (51)$$

と定義し、また

$$\xi_{\lambda}^i = \frac{1}{2}(R_{\lambda}^{i1} - R_{\lambda}^{i2}) \quad (52)$$

$$\omega_{\lambda}^i = \frac{1}{2}(R_{\lambda}^{i1} + R_{\lambda}^{i2}) \quad (53)$$

とすると

$$q_i(l+1) = q_i(l) - \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{\lambda=1}^{2^M} \delta_{\lambda, \lambda_{l,A,Z}} \xi_{\lambda}^{i1} \right) A(l) \quad (54)$$

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \sum_{\lambda=1}^{2^M} \delta_{\lambda, \lambda_{l,A,Z}} (\omega_{\lambda}^i + \text{sgn}[q_i(l)] \xi_{\lambda}^i) \quad (55)$$

が得られる。この (54)(55) 式が以下の解析で中心となる基礎方程式である。これらの式からわかるように、 $p_i(l)$ は各トレーダに割り当てられた「ミクロ」な変数であり、この変数の決定式の中には

トレーダ全員が参照できる「マクロ」な変数 $A(l)$ が現れる。逆に、 $A(l)$ の更新式はその定義から各トレーダのミクロ変数の総和で与えられることになる。このように、マイノリティ・ゲームに基づく構成論的アプローチでは構成要素の意思決定レベルから階層的に対象のモデリングを行うため、現象論的アプローチである MRR 理論では無視してしまった市場の微視的性質までをも取り込むことができる。事実、MRR モデルでは $A(l)$ に相当するマクロな市場価格 (p_i) を決定する方程式を金融市場の観察から構築しているが、そこには各トレーダに割り当てられたミクロ変数は入ってこない。このことから、本研究で扱う 2 つのアプローチ — 現象論および構成論的アプローチ — は全く異なる接近法であり、その意味でこれら 2 つの方法の結果を実データと照らし合わせて比較/検討することには重要な意味がある。

4.2 マイノリティ・ゲームに基づくダブルオークション・システムの構築

マイノリティ・ゲームにおいて、各トレーダの意思決定 $b_i(l) = \pm 1$ がミクロ変数だとすれば、マクロ変数は $A(l)$ である。市場の商品価格はトレーダ全員が共有することのできる情報である「マクロ変数」のはずであるから、その価格 $p(l)$ 自体は $A(l)$ の関数として書き下すことができるはずである。既にみたように、 $A(l)$ は各トレーダの売り買いの総和であり、「買い超過」であれば正に傾き、逆に「売り超過」であれば負に傾くことから、価格変動幅 (リターン) はこの $A(l)$ に比例するとおくことは自然な設定である。以上の考察から、ここでは式 (54) と式 (55) から商品の価格 $p(l)$ を決定する。具体的には $A(l)$ を商品の価格の変動幅と考えて、時刻 l での商品価格を

$$p(l) = p(l-1) + \beta A(l-1) \quad (56)$$

で決定する。ただし、 β は価格 $p(l)$ から変動幅が適切な値になるように設定した定数である。

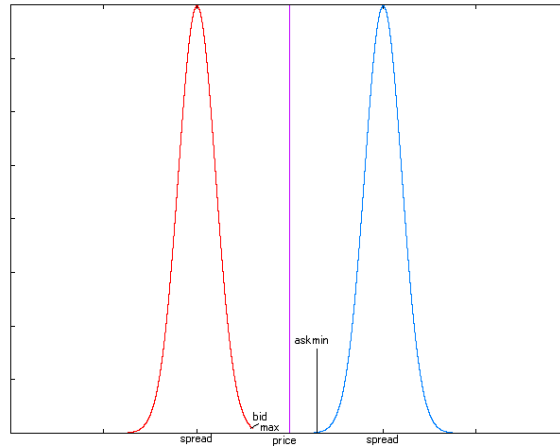


図 11: マイノリティ・ゲームによるダブルオークション・システムの構築。

マイノリティ・ゲームでは、各トレーダ i はラウンド l において利得が高くなるように自分の行動 (「売り」「買い」) を選ぶことになるが、マイノリティ・ゲームに基づいてダブルオークション・システムを構築するならば、上記で決定される市場価格とは別に、Bid と Ask を決定しなければならない。そこで、ここでは、自らの「マイノリティ戦略」に基づき選んだ戦略が「買う」のトレーダ群はそれぞれの Ask を、「売る」のトレーダ群はそれぞれの Bid を提示するものとする。Ask と

Bid の提示価格としては, (56) 式で決定される価格に対し

$$Ask_i = p(l) + \gamma Gaussian + spread \quad (57)$$

$$Bid_i = p(l) + \gamma Gaussian - spread \quad (58)$$

で与えられるものとする (図 11 参照). ここに, *Gaussian* は平均ゼロ, 分散 1 のガウス分布であり, γ は $p(l)$ の値によって大きさが決められ, *spread* はトレーダの提示価格によらず, $Ask_i - Bid_i > 0$ となるよう設定したものである. 最低価格の Ask_i と最高価格の Bid_i がそのラウンドの Ask 価格 $\bar{a}_l$ と Bid 価格 $\bar{b}_l$ として採用される. この動作をすべてのラウンドにおいて行う.

4.3 計算機シミュレーションによる統計量の評価

上記の計算式 (54)(55)(56)(57), および, (58) を用いてマイノリティ・ゲームのシミュレーションを行った. 価格の初期値やその他の定数パラメータはユーロと日本円の為替データから導出し, ゲームの参加人数 N は 1025, 履歴 M は 9, ゲームの試行回数は $100020 - M - 1$ と設定した. つまりこの場合の試行回数は 100010 である. この条件下で 10 回の独立試行を行い, それぞれ 3.1.4 節にある応答関数を求め, その平均を計算した.

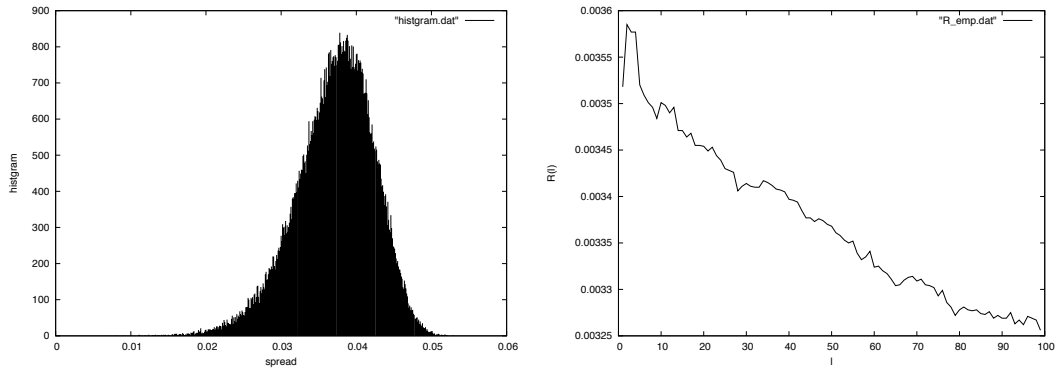


図 12: マイノリティ・ゲームに基づき生成した Bid-Ask スプレッドのヒストグラム (左) と Bid-Ask の中点に対して計算された応答関数 R_l (右).

4.4 実データとの整合性

3.3 節でのデータと比較すると, スプレッド変動型とほぼ同様の結果が得られた. よって, マイノリティ・ゲームを用いてスプレッド変動型の金融商品の振る舞いを「定性的に」ではあるが再現できたと考えられる. しかし, ユーロと円の為替データと比べて $l = 1, 2$ での応答関数 R_1, R_2 に差異が見られ, これらは US ドルと日本円のデータの方に近い. そこで, 実データとマイノリティ・ゲームから生成されたデータから算出される, それぞれの自己相関関数 $C(l)$ を比較し, その違いを検証した. 実データの方は「スプレッド変動型」「一定型」両方のデータから算出し, マイノリティ・ゲームでは 10 回の独立試行からそれぞれの相関関数 $C(l)$ を求め, その平均を算出した. その結果を図 14 に載せる. なお, この図には参考として MRR モデルにおいて $\rho = 0.1$ と選んだ場合の相関関数 $C(l)$ の振る舞いも載せてある. この図 14 からわかるように, 通常の金融市場では「売り」「買い」の決定に関して, その前のラウンドのそれが影響するものである. 一方, マイノリティ・ゲーム

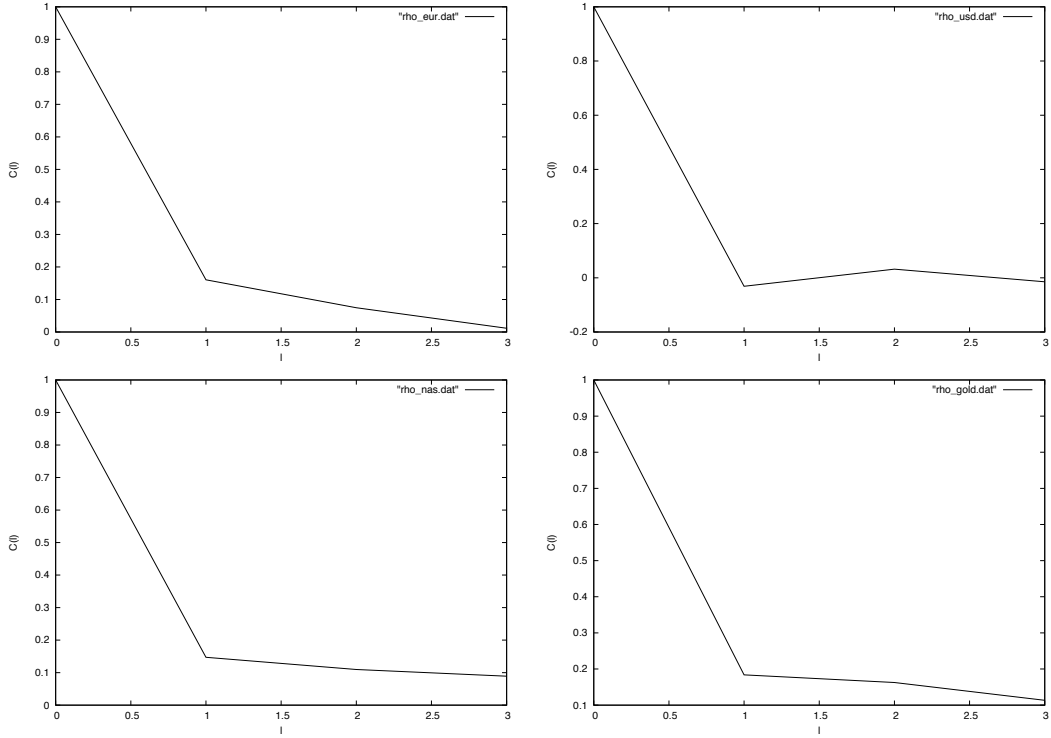


図 13: 自己相関関数 $C(l)$ の振る舞い. 左上から右下へ, ユーロ/円為替データ ($\rho = 0.243371$), US ドル/円為替データ ($\rho = 0.283552$), Nasdaq100 データ ($\rho = 0.470052$), 金価格データ ($\rho = 0.514186$).

は $C(l)$ ($l \geq 1$) の値がほぼゼロになった. この結果から, マイノリティ・ゲームでは商品の「売り」「買い」判断の時間的相関性がほぼ無いことがわかる. これは前節に示したゲームの基本的性質と一致する. そこで, マイノリティ・ゲームにおいて「売り」「買い」判断の時間相関を作り出すため

$$p(l) = \begin{cases} p(l-1) + \beta(A(l-1) + \psi) & (A(l-2) > 0) \\ p(l-1) + \beta(A(l-1) - \psi) & (A(l-2) < 0) \end{cases} \quad (59)$$

を考えて $C(l)$ に相関を持たせるよう, 新たな変数 ψ を導入した. ψ の値によって $C(l)$ の大きさ/振る舞いを変化させることができる. ここで, 前節と同様の設定で ψ を 0.05, 0.1 の 2 種類に選んで再度, 相関関数を計算した. その結果を図 15 に載せる. この図より, 新たな変数 ψ の導入により, 「売り」「買い」判断の時間相関が生まれ, 相関関数は有限値を持つことがわかる. 同様に応答関数をプロットしたものが図 16 である. この図より, ψ によって「売り」「買い」判断の時間相関を作り出すことにより, スプレッド変動型金融商品の中で相関性を持つものの振る舞いをより良く再現することができた. 3.3 節でのデータと比較すると, 本節でのマイノリティ・ゲームに基づく構成論的アプローチにより「スプレッド変動型」のデータを定性的に説明することができたと結論つけることができる.

5 ディスカッションと今後の課題

本論文ではダブルオークション・システムにおいて生成される Bid-Ask スプレッドとその統計的性質を考慮した現象論的, および, 構成論的モデルを提案し, それぞれの妥当性と問題点を明ら

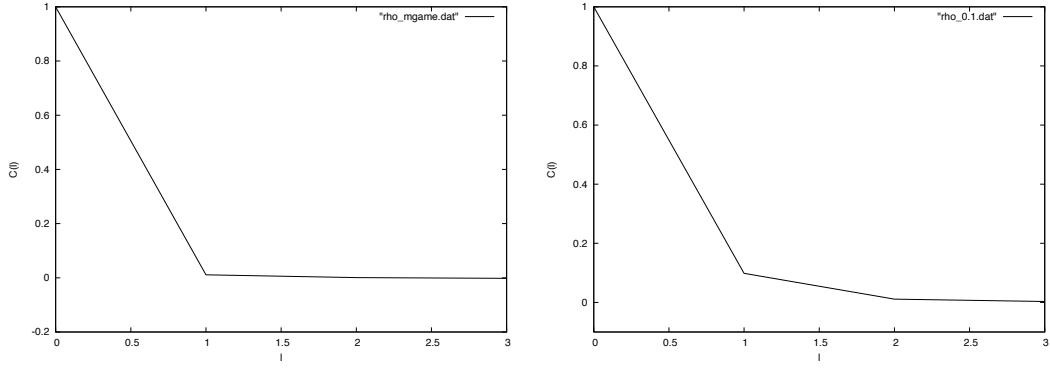


図 14: マイノリティ・ゲームの自己相関関数 $C(l)$ (左) と MRR モデル ($\rho = 0.1$) の自己相関関数 (右).

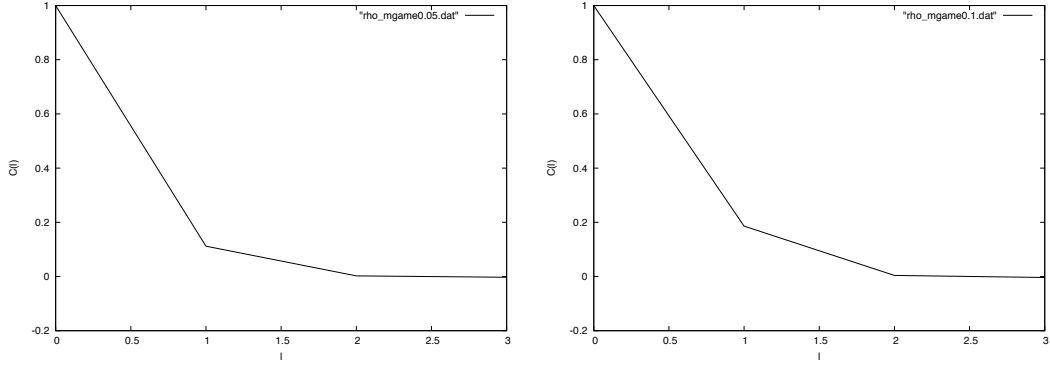


図 15: マイノリティ・ゲームの相関関数 R_l . $\psi = 0.05$ の場合 (左) と $\psi = 0.1$ の場合 (右).

にした。しかし、それらモデリングの際に課した仮定/仮説の妥当性、および、実データからの乖離の起源を考慮したモデル自体の改良/改善などは今後の課題として残される。主なものを下記に述べたい。

5.1 MRR モデルの改良

3.3 節と前節の結果から、スプレッド変動型の実データを加工して MRR モデルの応答関数 R_l の振る舞いを再現すること、および、マイノリティ・ゲームを用いてスプレッド変動型の実データと定性的に同じ振る舞いを示す応答関数 R_l を得ることができた。そこで、ここでは MRR モデルを改良することにより、スプレッド変動型実データの応答関数 R_l を再現することができないかを考える。

そこで、MRR モデルの応答関数において、Bid-Ask の中点 m_i の代わりに市場価格 p_i を選んで、新たな応答関数:

$$Q_l = \langle \epsilon_i \cdot (p_{i+l} - p_i) \rangle \quad (60)$$

を定義し、式 (36) を用いて具体的にこの応答関数を計算することで、この Q_l がスプレッド変動型金融商品の実データの R_l と同様な振る舞いをするか否かをチェックする。実際、我々は Q_l を計算するための MRR モデルのシミュレーションを行った。設定は 3.3 節と同じにし、それぞれ 10 回

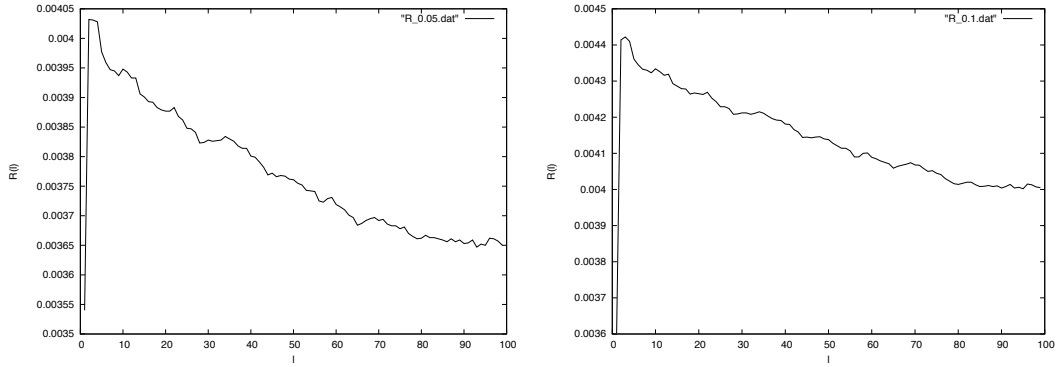


図 16: マイノリティ・ゲームの応答関数 R_l . $\psi = 0.05$ の場合 (左) と $\psi = 0.1$ の場合 (右).

の独立試行それぞれに対して Q_l を求め、その平均を算出した。その結果を 17 に載せる。 ρ の値は $-0.9, -0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.5, 0.9$, および 1 の 8 つとした。ここで、応答関数 R_l と自己相関関数の関

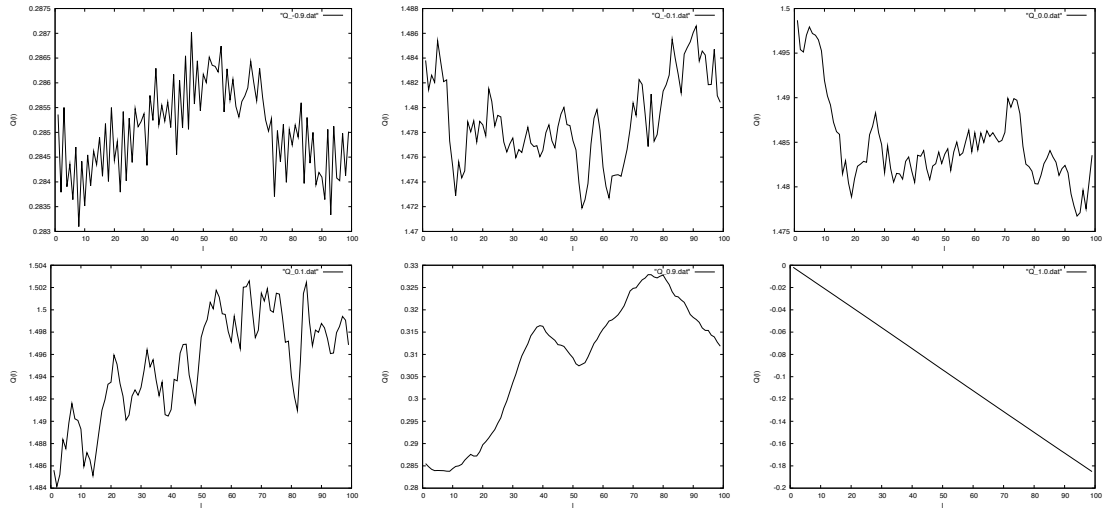


図 17: Q_l の振る舞い。左上から右下へ $\rho = -0.9, -0.1, 0, 0.1, 0.9$, そして、 $\rho = 1$ の場合。

係: $R_l = \theta(1 - C(l))$ を導いた際に用いた手順をここでもう一度 Q_l に対して再現すると

$$Q_l = \theta(1 - \rho^2) \quad (61)$$

が得られ、 p_i を MRR モデルの更新式に従うと Q_l は時刻 l によらない「定数」になってしまう。グラフを確認すると揺らいでるように見えるが変動幅は小さい。よって p_i の変動に関して、新たな更新式を用いなければ、スプレッド変動型実データの R_l を再現することはできないことがわかる。これは今後の課題である。

5.2 マイノリティ・ゲームの改良

前節で示したように、マイノリティ・ゲームにおいて各トレーダの「売り」「買い」の入札判断の総和: $A(l)$ に相関はあるが、「売り」「買い」判断自体の時間相関は無い。つまり、自己相関関数 $C(l)$ に相関はない。また、新たな変数 ψ を導入することによって $C(1)$ に相関をもたせることには成功したが、半強制的に相関をもたせたものであり、通常の金融商品では $l = 2$ ステップ以降の相関関数も有限値をとり、 $C(l) > 0 (l \geq 2)$ であるものも多い。今後はマイノリティ・ゲームをデータに照らし合わせてより精密な意味で改善し、自然な時間相関を生成し、現実の金融商品にさらに近づけることが重要であると考える。

5.3 相関関数のスケール・フリー性

既にみたように、MRR 理論においては相関関数の振る舞いは指数関数的であり、そこには緩和時間 ρ^{-1} という「特徴的時間スケール」の存在を仮定している。しかし、ここで扱ったデータ以外の金融データの中には、そうした特徴的時間スケールを持たない「スケール・フリー」な相関関数:

$$C(l) = l^{-\rho'} \quad (62)$$

に従うデータも存在するかもしれない。MRR 理論における関係式 $R_l = \theta(1 - C(l))$ は相関関数の具体的な形に依らずに成立するので、このような相関関数に対し、MRR モデルの応答関数の示す「単調性」は明らかに影響を受けないが、マイノリティ・ゲームでの応答関数の振る舞いには影響を及ぼす可能性がある。従って、そのようなスケール・フリーな相関関数を与える金融市場に対し、マイノリティ・ゲームを適用可能なものへと拡張しておくことは今後の展開を考える上で重要であると考える。

6 おわりに

本論文ではダブルオークション・システムにおける金融時系列データを確率過程としてとらえ、その確率過程をマクロに特徴付ける統計量を選択し、それを説明するための「マクロ的 (現象論的) 視点」および「ミクロ的 (構成論的) 視点」から構築される確率モデルをそれぞれ導入し、得られる結果を「スプレッド変動型」及び「スプレッド一定型」実データと比較検討し、確率モデルと実データの振る舞いの類似性/相違性からモデル自身の妥当性と問題点を探った。現象論的モデルとしては Madhavan-Richardson-Roomans モデルを取り上げ、このモデルの振る舞いを自己相関関数と応答関数を介して実データとの比較検討を行った。Madhavan-Richardson-Roomans モデルはスプレッド一定の仮定のもとに構築される確率モデルのため、スプレッド変動型データを説明することは困難であることが予想されたが、実際、MRR 理論ではスプレッド変動型データの示す応答関数の「非単調性」を再現することができなかった。そこで、我々はミクロ的 (構成論的) 視点からの確率モデルとして繰り返しゲームのひとつであるマイノリティ・ゲームを改良し、このゲーム理論を用いてダブルオークション・システムを構築し、人工的にスプレッドの揺らぎを生成することで MRR モデルでは不可能であったスプレッド変動型の応答関数の振る舞いを「定性的」にはあるが説明することができた。結果として、マイノリティ・ゲームに基づく構成論的アプローチにより、Bis-Ask スプレッドが変動する金融商品の統計的性質を部分的にはあるが再現することができた。今後はここで得た知見を用いて、金融市場における「ミクロ」と「マクロ」の関係性のより深い考察を進めて行きたい。

謝辞

指導教員である井上純一准教授に感謝します。また、小野哲雄教授をはじめとする、研究室の皆さんの協力にこの場を借りて感謝します。

参考文献

- [1] Bouchaud, J.-P. and Potters, M. (2000): *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] 今野浩 (2000): 金融工学の挑戦, 中公新書
- [3] Elliott, R. J. and Ekkehard, K. (2004): *Mathematics of Financial Markets*, (New York: Springer)
- [4] <http://moneykit.net/>
- [5] Sazuka, N. (2007): *Physica A* **376**, pp. 500-506
- [6] Sazuka, N. and Inoue, J. (2007): *Physica A* **383**, pp. 49-53
- [7] Inoue, J. and Sazuka, N. (2007): *Physical Review E* **76**, pp. 021111 (9 pages)
- [8] Sazuka, N., Inoue, J. and Scalas, E. (2009): *Physica A* **388**, pp. 2839-2853
- [9] Inoue, J. and Sazuka, N. (2010): *Quantitative Finance* **10**, No. 2, pp. 121-130
- [10] O'hara, M. (1995): *Market Microstructure Theory*, (Blackwell Publishing)
- [11] Madhavan, A., Richardson, M. and Roomans, M. (1997): *The Review of Financial Studies* **10**, No. 4, pp. 1035-1064
- [12] Wyart, M., Bouchaud, J.-P., Kockelkoren, J., Potters, M. and Vettorazzo, M. (2008): *Quantitative Finance* **8**, pp.41-57
- [13] Bouchaud, J.-P., Kockelkoren, J. and Potters, M. (2006): *Quantitative Finance* **6**, pp.115-123
- [14] von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press
- [15] Arthur, W.B. (1994): Inductive Reasoning and Bounded Rationality (The El Farol Problem), *Am. Econ. Rev.*, **84**, pp. 488-500
- [16] Challet, D. and Zhang, Y.-C.(1997): *Physica A* **246**, pp.407-418
- [17] Challet, D., Marsili, M. and Zhang, Yi.-C. (2005): *Minority Games*, (Oxford: Oxford University Press)
- [18] Coolen, A.C.C.(2005): *The Mathematical Theory Of Minority Games: Statistical Mechanics Of Interacting Agents*, (Oxford: Oxford University Press)

- [19] 井上純一 (2008): 「相互作用するミクロなトレーダ群のマクロな振る舞い: マイノリティ・ゲームに基づく金融市場の確率モデルとその動力学」日本神経回路学会誌, Vol. 15, No. 4, pp. 272-288