HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	整数分割法による大規模疎グラフの生成とスモールワールド-ランダムグラフ相転移の解析
Author(s)	広瀬, 泰久
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	修士(情報科学)
Issue Date	2010-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/44077
Type	master thesis
File Information	hirose_2009.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

修士論文

整数分割法による大規模疎グラフの生成と スモールワールド-ランダムグラフ相転移の解析

2010 年 3 月 20 日

複合情報学専攻 混沌系工学研究室
学籍番号　79043029

広瀬 泰久

目次

第 1 章　緒言 3

第 2 章　複雑ネットワーク 4

2.1　複雑ネットワークの性質 4

2.2　代表的なネットワークモデル例 6

第 3 章　整数分割法モデルの解説 8

第 4 章　ネットワーク解析 10

4.1　数値範囲とネットワーク規模 10

4.2　次数平均と分散 11

4.3　次数分布の解析 12

4.4　平均頂点間距離とクラスター係数 16

第 5 章　考察 18

第 6 章　結言 19

参考文献 20

第 1 章　緒言

我々の身の回りには様々なネットワークが存在している．例えば，インターネット通信網や交通網，神経回路網といった物理的に接続されたものから，人間関係や食物連鎖，伝染病の流行といった社会的・認知的な接続されたものなど，多様な関係性からネットワークを形成している．

これらのネットワークは単純に複雑なだけではなく，複雑ながらもいくつかの規則性や機能がその背景あると考えられ，それ故に科学として複雑ネットワークの研究は発展してきた．

現実世界の様々な現象を説明する新たなパラダイムとして，複雑ネットワークの研究は現在急速に進展しており，社会学，数学，生物学など他の研究分野との相互影響も活発化している．今後，複雑ネットワークの科学は，ネットワークの問題が関連する多数の分野において，普遍性と重要性を増していくものと予想される．

本研究では，整数を利用した単純なアルゴリズムにより複雑ネットワークを生成しその特性について詳しく解析を行っていく．数論的な視点から複雑ネットワークの研究を行う先立った例として，共通の約数を利用してネットワークを構築していくもの [1] やゴールドバッハ予想を用いて素数組によるネットワークを構築していくもの [2] といった研究がある．本論文は，後者の研究をより拡張し一般的なものとしたものである．素数組を利用した複雑ネットワーク研究は，素数の特徴を捉えるための一つの可能性を秘めているかもしれない．しかし，それには整数自体の特性がわかってこその特殊性であるといえる．そのため，整数を利用した本モデルが，これらモデルの持つ複雑ネットワークの特性を理解する上で，また，数論との関わりの中での複雑ネットワーク科学の基礎的な知見として重要であると考える．

第 2 章　複雑ネットワーク

ネットワーク，すなわち「ものの繋がり」を研究する数学の一分野であるグラフ理論は，18 世紀頃の「ケーニヒスベルグの問題」に対する Euler の研究から始まったと言われている．グラフとは，ノード（頂点）とそのノード対で定義されるリンク（辺）からなる集合のことをいう．グラフ理論は，こうしたグラフが持つ一般的な性質を解明していくものである．グラフ理論の考え方は，データ構造や最適化アルゴリズムといった工学的な応用にも用いられてきた．

社会科学の分野でも，人間関係をグラフとして表現し人間集団を分析する社会ネットワーク分析が 1970 年ごろから盛んになってきた [3]．社会学では，まずある仮定に基づいて人間関係のフィールドデータを得てネットワーク構造を決め，その後グラフ理論の様々な概念を利用しデータを理解するため実践される．しかし，初期の研究では観測の困難さもあり研究対象となるグラフのノード数は限られており，近年使われているようなネットワークモデルが用いられることはなかった．

しかし，近年の計算機の発展により大量のデータ収集と解析が行われるようになり，今までのネットワーク理論では扱えないほど複雑なネットワークが現れ，そのレベルでの解析が必要となってきた．それらの調査の結果，殆どのシステムのネットワークは正方格子のように規則的でもなければ，ランダムグラフほど無秩序でもないことがわかってきた．さらに多くの場合，こうしたネットワークが複雑ながらもいくつかの共通の特徴を持っていることが発見された．こうしたネットワーク研究は数学，物理学，生物学から社会科学など様々な分野で行われ，複雑ネットワーク科学としてネットワークの特徴とシステムの持つ機能との関係について，現在も研究が盛んに進められている．

この章では複雑ネットワークの主な性質と，ネットワーク科学に代表される幾つかのモデルを解説する．

2.1　複雑ネットワークの性質

2.1.1　スケールフリー性

スケールフリー性とは，一部のノードが他のたくさんのノードとエッジで繋がって大きな次数を持っている一方で，大多数のノードはごくわずかなノードとしか繋がっておらず，次数は小さいという性質である．この時，次数の大きなノードは「ハブ」とも呼ばれる．スケールフリー性を持つネットワークでは，全体としては特徴的スケールが存在せず，その次数分布は著しく非対称となり，正規分布のような形にならない（図 1）．またこのようなネットワークでは，主要なノードが作動しない局所的な損失が起きても，系全体の損失に繋がることがなく高い耐障性を持つ一方で，一部の重要な役割を担うノードの攻撃によりネットワークの崩壊を起こしてしまうという脆弱性をあわせもっている [4].

数学的にはスケールフリー性はノードが次数 k を持つ確率 $p(k)$ の確率分布がベキ乗則に従い次

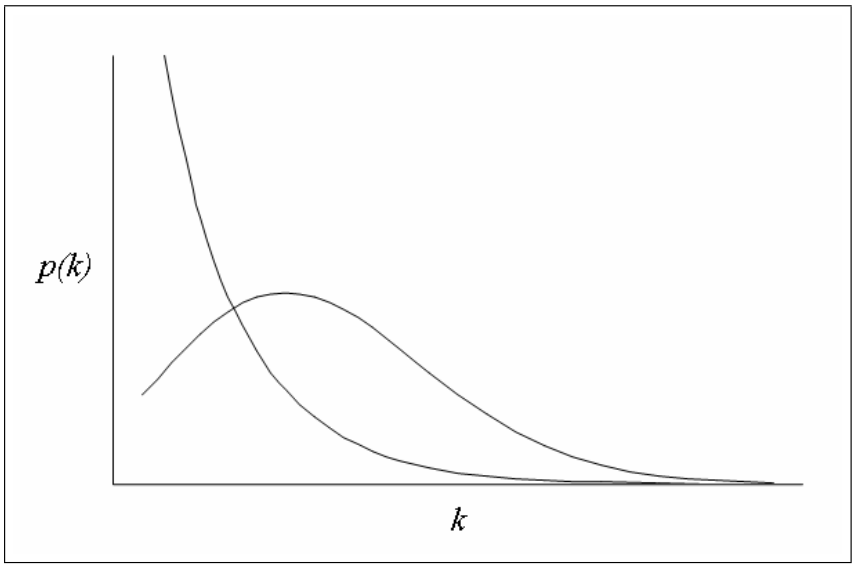


図 1　スケールフリーグラフとランダムグラフの次数分布の比較

図 2　現実ネットワークのベキ指数（文献 [5] より）

ネットワーク	ベキ指数
WWW(ワールド・ワイド・ウェブ)	1.9-2.7
インターネット	2.1-2.5
映画俳優の共演ネットワーク	2.3-3.1
性的関係のネットワーク	3.2-3.4
タンパク質の反応ネットワーク	2.4-2.5

の式に定義される.

$$p(k) \propto k^{\gamma} \tag{1}$$

友人関係やインターネット，WWW など多くの現実のネットワークはスケールフリーの性質を持つ．ベキ分布の裾野には物理的な制限などにより場合によっては限界があるが，ほとんどの場合そのベキ指数が $2 < \gamma < 3$ にあることがわかっている（表 2）. しかし，一方でスケールフリーの性質を持たないネットワークも存在し，全ての複雑ネットワークに当てはまるという訳ではない.

2.1.2　スモールワールド性

グラフ上の 2 つのノード間の距離は最短のパスの長さで定義される. 例えば，2 つのノード同士がリンクでつながっていれば距離は 1 となり，途中に 1 個のノードだけを経てつながっていれば距離は 2 となる. スモールワールド性とは，任意の 2 つのノードが，中間にわずかな数のノードを介するだけで接続されるという性質である．例えば d 次元格子の場合であれば，平均頂点間距離 L

はノード総数 n を増やした場合 $L \propto n^{1/d}$ となりベキ的に増えていく. 一方，スモールワールド性を持つグラフにおいては，ノード総数 n が増大したときに平均頂点間距離 L が高々 $\log n$ に比例する程度で緩やかに増加する. つまり，

$$L \propto \log n \tag{2}$$

となる.

2.1.3 クラスター性

あるノードに対してそのリンク先同士がお互いにリンクで繋がっているものをクラスターと呼ぶ．クラスター性は，こうした 3 つのノードがリンクで結ばれた三角形であるクラスターが，1 つのネットワークに多数存在する性質である．例えば，身の回りの知人関係のネットワークを見た場合，自分と知人 A さんがいるときに，自分も A さんもどちらも知っている共通の知人 B さんがいる割合が高いということである. すなわち，現実世界のネットワークには，自分，A さん，B さんから構成される三角形のネットワークが沢山含まれている．このような状況をクラスター化しているといい，ネットワークのクラスター化度合いを定量化するための値としてクラスタ係数が存在する．まず，ネットワーク中のある次数 k_i を持つノード n_i に対して，そのクラスター数を E_i とする．数学的には，クラスター性はグラフのクラスター係数 C が十分に大きな値をとることで表される．クラスター係数は現実世界の各種ネットワークにおいて計測されており，これらの値は 0.1 から 0.7 程度と報告されている．現実のネットワークのほとんどでクラスター係数 C は大きいが，平均頂点間距離 L は小さい値をとなる.

2.2 代表的なネットワークモデル例

2.2.1 ランダムグラフ

ランダムグラフは Erdös と Rényi によって初めて体系的に導入された [7]. このグラフは現実ネットワークの説明するためのモデルとしては良し悪しはあるが，理論的に解析が容易であり，ある程度の現実のネットワークの様な乱雑さを持っているため，複雑なネットワークの応用例を解析する手段としてよく用いられてきた.

モデルではまずノード数 n と，各頂点間にリンクを張る確率 p を固定する．このとき確率 $1-p$ でその頂点間にはリンクを張らないこととする．リンクを張るかどうかは全ての組合せ ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ 通りのペアそれぞれについて独立に決める. 結果，$p = 1$ での完全グラフから，$p = 0$ での全くリンクのないグラフまで，確率的に複雑なグラフを生成することができる.

次数分布は二項分布となり，n が十分に大きい場合ポアソン分布に従う.

$$p(k) = {}_{n-1}C_k p^k (1-p)^{n-1-k} \cong \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k} \tag{3}$$

ここで λ は平均次数 $\langle k \rangle$ で定義される.

ランダムグラフの平均頂点間距離 L は $L \propto \log n$ となることが知られている. 一方，クラスター係数 C は $C \cong \langle k \rangle / n$ となり，n が十分大きい場合 0 に漸近する.

2.2.2 WS モデル

完全グラフのような規則性が非常に強くリンクが極端に多いグラフを用いずに，現実のネットワークの様な小さな L と大きな C を実現できるネットワークモデルを再現するため，1998 年に Watts と Strogatz により格子状のネットワークとランダムグラフの中間に位置する，スモールワールドモデル（二人の頭文字から WS モデルとも呼ばれる）が考案された [8].

WS モデルではまず，ノード n 個を輪のように配置し，k を偶数として，それぞれの頂点の両隣 $k/2$ 個までの頂点とリンクを繋げる. このときどの頂点も次数は k となる. 次にそれらのリンクを確率 p によりランダムに選んだノードにつなぎ替える. もし p 小さい場合は格子構造が残りクラスター係数が高いままほとんど変わらない. 一方 p が大きい場合は全てのリンクはランダムにつなぎ替えられ，平均次数 k のランダムグラフとなる. p が中間の場合，繋ぎかえられたリンクがショートカットとなり，小さな平均頂点間距離 L が得られると同時に，格子構造がある程度維持されることにより大きな C を得ることが出来る.

一方 WS グラフの次数分布は，$p = 0$ のとき全てのノードが次数 k となり，$p = 1$ のとき，平均次数 k のポアソン分布となる. また p がどのような値でもベキ則となる次数分布を得ることは出来ない.

しかしながら，WS モデルは単純でありながら，現実のネットワークにあるような特性を実現できるため，複雑ネットワークの分野では規範的なケーススタディとなっている.

2.2.3 スケールフリーネットワーク

ネットワークの成長とリンクの優先的選択を考慮することでスケールフリー性を再現できるモデルを，1999 年に Barabási と Albert は WWW のモデルとして次のようなネットワークモデルを提案した [9].

ネットワークの成長とは時間とともに頂点が次々とネットワークに追加されグラフが成長していくということである．これは，インターネットに接続されるコンピュータが徐々に増えていくような場合をイメージしている．また，優先的選択とは新しいノードがすでに多数の次数を持つノードに接続されやすく，次数の高いノードほどより高い次数となりやすいものとなるということである．このような rich-get-richer（富めるものほど富む）なダイナミクスがベキ則導くことは Simon の研究 [10] などによってかなり前から知られていた.

具体的なモデルの生成では，まず初期条件として少数のノードからなる完全グラフを置く. そこに新たなノードを追加し，既存のノードの m 個のノードとリンクを張るがそのとき結合次数に比例した以下の確率で選ぶ.

$$\pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_i k_i} \tag{4}$$

こうした簡単なアルゴリズムにより，次数分布は $P(k) \propto k^{-3}$ となりベキ則を満たしスケールフリー性を持ち，かつ最短頂点間距離も $L \propto \log n$ 程度となりスモールワールド性を満たすネットワークを生成することができる.

第 3 章　整数分割法モデルの解説

3 以上の自然数 n は 2 つの異なる自然数 (a, b) の和に分割することができる．

$$n = a + b \tag{5}$$

例えば 8 であれば $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$ といった形に分ける事ができる．本モデルではこれらの組み合わせの中から一つを選び，(a, b) のそれぞれの要素をノードとしてエッジを繋げていくことでネットワークを構築していく．その (a, b) の組み合わせの数は

$$c = \left[\frac{n-1}{2} \right] \tag{6}$$

とあらわす事ができるが，その中からひとつの組を次に説明する確率モデルに従って選び出す．

自然数組 (a_i, b_i) の距離に応じて，選択確率を変化させるために α を導入する．各組の距離を α 乗したものの総和を s とすると次のように表すことができる．

$$s = \sum_{i=1}^{c} |b_i - a_i|^{\alpha} \tag{7}$$

このとき，各組が選ばれる確率 p_i は，s を用いて表すと，

$$p_i = \frac{|b_i - a_i|^{\alpha}}{s} \tag{8}$$

となる．8 の場合では $p_1 = 6^{\alpha}/s$，$p_2 = 4^{\alpha}/s$，$p_3 = 2^{\alpha}/s$ そして $s = 6^{\alpha} + 4^{\alpha} + 2^{\alpha}$ であり，$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ となり，0 から 1 の乱数から組み合わせを選び出すことができる．

例として図 3 に 5 から 15 の数から生成されたネットワークを示す．このモデルで基本的なネットワークを構築する際に決めるべき値は 2 つしかない．まずどの範囲の数値で正数分割を行うか，そして分割された組から選び出すため必要となる α の値である．数値の範囲を変更することでネットワークの規模を変えることが可能であるが，その規模は α によって変化する．詳しい解析結果は次章で説明する．

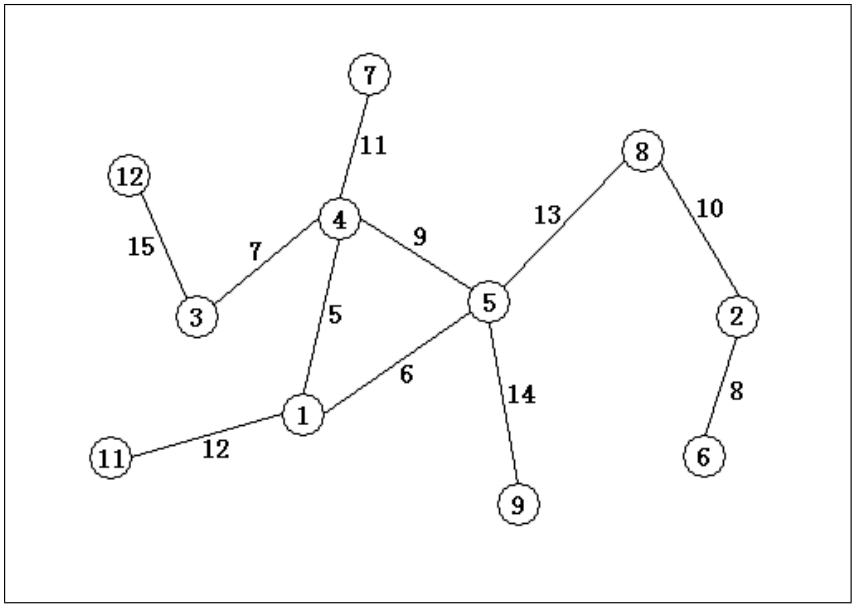


図 3　グラフの例 $\{n|5 \leqq n \leqq 15\}$

第 4 章　ネットワーク解析

4.1　数値範囲とネットワーク規模

前章で解説した本モデルでは基本的なネットワークを構築する際に必要な要素は 2 つであることを示した．ノード間の関係性を決める主な値は α であるが，まず初めにどのような規模のネットワークを構築できるかを見るため数値範囲の影響を見る．

図 4 では数値範囲を 10000 で固定し開始位置をいくつか変えて，α の変化に対する最大規模となったネットワークのノード数をプロットしたものである．全体として $\alpha < -2.0$ では 5000 で固定されている．これは α が小さい場合，各整数組の中から距離の近いものを選んでリンクしていくため，連続である限り数値範囲の影響を受けないためである．その後の状態を見ると開始位置を 3 からにしたものは，6500 前後まで増加した若干減少しながらも一定に推移している．一方その他 2 つのグラフを見ると，一度増加した後に α が 0 周辺に近づくと大きく減少しているのがわかる．α が 0 周辺では，各整数組は距離に影響せずに選ばれるわけであるが，10000 であれば，ノードとして選ばれる値が 1 から 9999 なのに対して，50000 であれば 1 から 49999 と大きな範囲から選ばれてしまう．そのため開始数値を大きくしたものでは各ノード組が孤立してしまい，大きなネットワークを構築することができなくなったと考えられる．しかし，α の値が大きくなるにつれてネットワークのノード数は増加している．α が大きくなれば，各整数組は距離の大きなものから選ばれる．例えば 10000 であれば 1 近辺と 10000 近辺といった両極に固まることによって，1 近辺でノードが繋がることによって大きなネットワークを構築していくためだと考えられる．

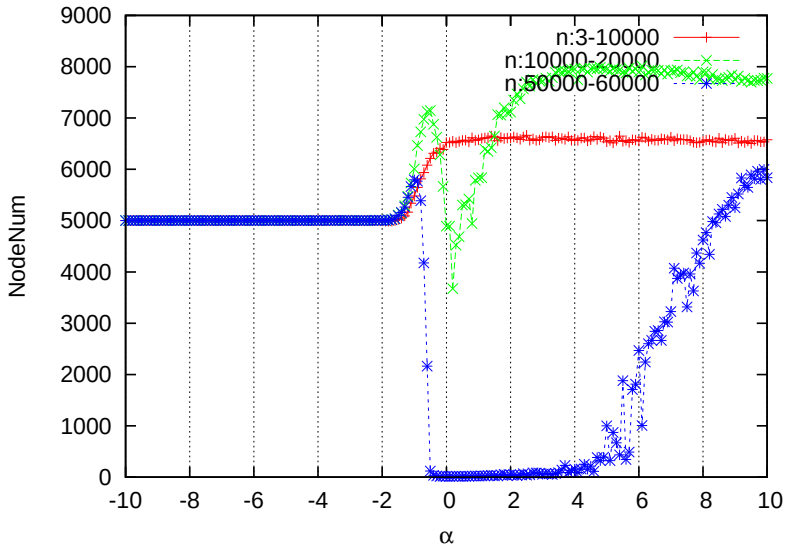


図 4　α に対するネットワーク規模の変化

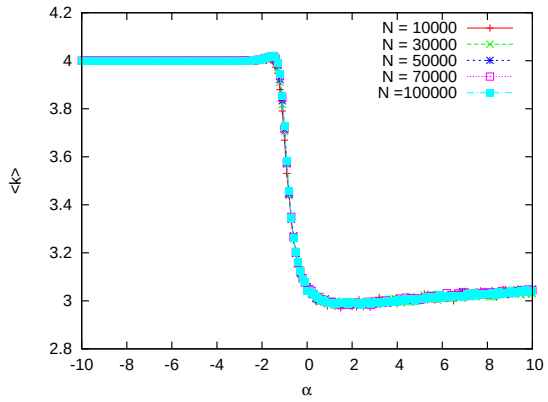


図 5　次数平均 $\langle k \rangle$

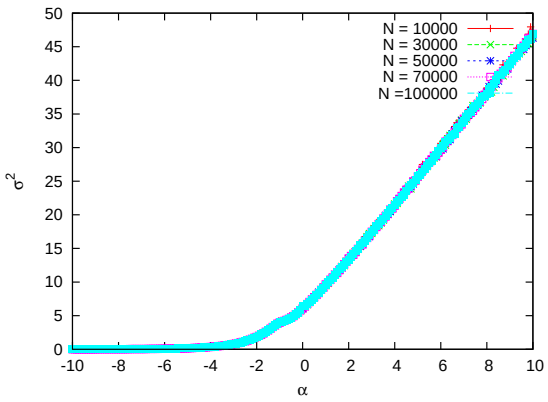


図 6　次数分散 V

本論文では大規模グラフでの複雑ネットワークの特性について焦点を当てるため，数値範囲ではなくノード数を固定して詳細の解析を行う．また，基本的なネットワークを扱うため開始位置も 3 に固定した．

4.2　次数平均と分散

前に述べた複雑ネットワークとしての特性ではないが，本モデルを理解するために，ネットワーク中における各ノードの持つ特徴を知る必要がある．その一歩として，まず α を変化させた時の次数の平均値とその分散の変化をみる．

各ノードの次数を k としてその平均値 $\langle k \rangle$ は次の式で表される．

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i \tag{9}$$

同様に次数の分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\langle k \rangle - k_i)^2 \tag{10}$$

となる．

それぞれ異なるノード数において，α の変化に従ってどのように変化していくかを見る．図 5 に平均値を，図 6 に分散を示したが，全てのグラフが重なってノード数に依存していないことがわかる．このことはノード数の変化が，ネットワーク全体としての特性として大きな影響を与えていないと考えるのが妥当である．また，α に従って同様の変化をしていることから，ネットワーク特性は α にのみ依存していると考えられる．

また α の影響を見ると，-2 から 0 の範囲で平均値が大きく変化し，分散の増加も起こっていることがわかる．$\alpha > 0$ では平均値は一定，分散は線形的に増えていることがわかる．以後の解析からも $\alpha = -2.0$ では，特質すべき変化を特異点として現れ，また 0 を中心変化の様子が大きく変わっ

ていく．

ここからの解析では，それらの点に注目して，詳細を見ていく．

4.3 次数分布の解析

図 7 に幾つかの α に関する次数分布を書き出し，その変化の様子を見る．$\alpha < 0$ では次数が平均値である 4 に集中し，そのバラつきもほとんどない状態から，$\alpha = 2.0$ あたりから徐々に形が変化していく様子が確認できる．また $\alpha > 0$ では指数分布のような形で，最大次数を増やしながら，裾野を徐々に広げている様子が確認できる．

詳しく見るために，他の確率分布と比較しながら状態を確認してみることにする．

$\alpha < -2.0$ では，その値が次数 4 に集中した状態である．これは α が極端に小さな値では，各整数組は近隣のものとしか繋がらないことからきている．例えば，$n = 10$ では $(4, 6)$,$n = 11$ では $(5, 6)$, $n = 12$ では $(5, 7)$, $n = 13$ では $(6, 7)$,$n = 14$ では $(6, 8)$ と，各ノードは両隣，もしくはさらにその両隣の 5 つのノードで繋がりあうことが関係している．この場合ネットワーク全体としては，ほぼ全体が次数 4 のノードで占められ，一本の鎖のような状態になっていると考えられる．

しかしながら，$\alpha = -2.0$ 辺りから平均値から外れたノードが増え，その様相に変化を起こしている．特に次数の大きなものが徐々に含まれ，裾野が広がっていること，そして，次数のより小さなものが大きく増えていくことが確認できる．ランダムグラフでは，その次数分布がポアソン分布になることが知られている．そこで図 8 に得られた平均値を元にしたポアソン分布と比較したものを示す．平均値のポアソン分布と比較してみても $-2.0 \leq \alpha \leq -1.0$ では，その次数分布が徐々に近づいていることがわかる．また $\alpha = -1.2$ では，ほぼその形状が一致しているのも確認できる．図 9 には，前節で得られた平均次数を参考に，$\lambda = 1/3$ での指数分布のグラフも実線で加えてある．平均値にある指数分布と比較した場合，$\alpha = 0$ では指数分布とほぼ同様の曲線を描いているが，α が大きくなるほど裾野が広がり，より直線的になっていることがわかる．このため $\alpha > 0$ では，指数分布ではなくベキ則に従った次数分布になると言える．

$\alpha > 0$ では各整数において距離が大きい整数組を選ぶ傾向にある．この時，各整数組では 1 に近い小さな数字と，選ばれた整数そのものに近い大きな数が選ばれていく．従って，1 周辺の少数の小さな値のノードがハブとなり，大多数の大きな値を持つノードが小さな次数を持つこととなる．その結果，$\alpha > 0$ の領域ではスケールフリー性をもったネットワークが形成されていくのである．

図 7　各 α での次数分布

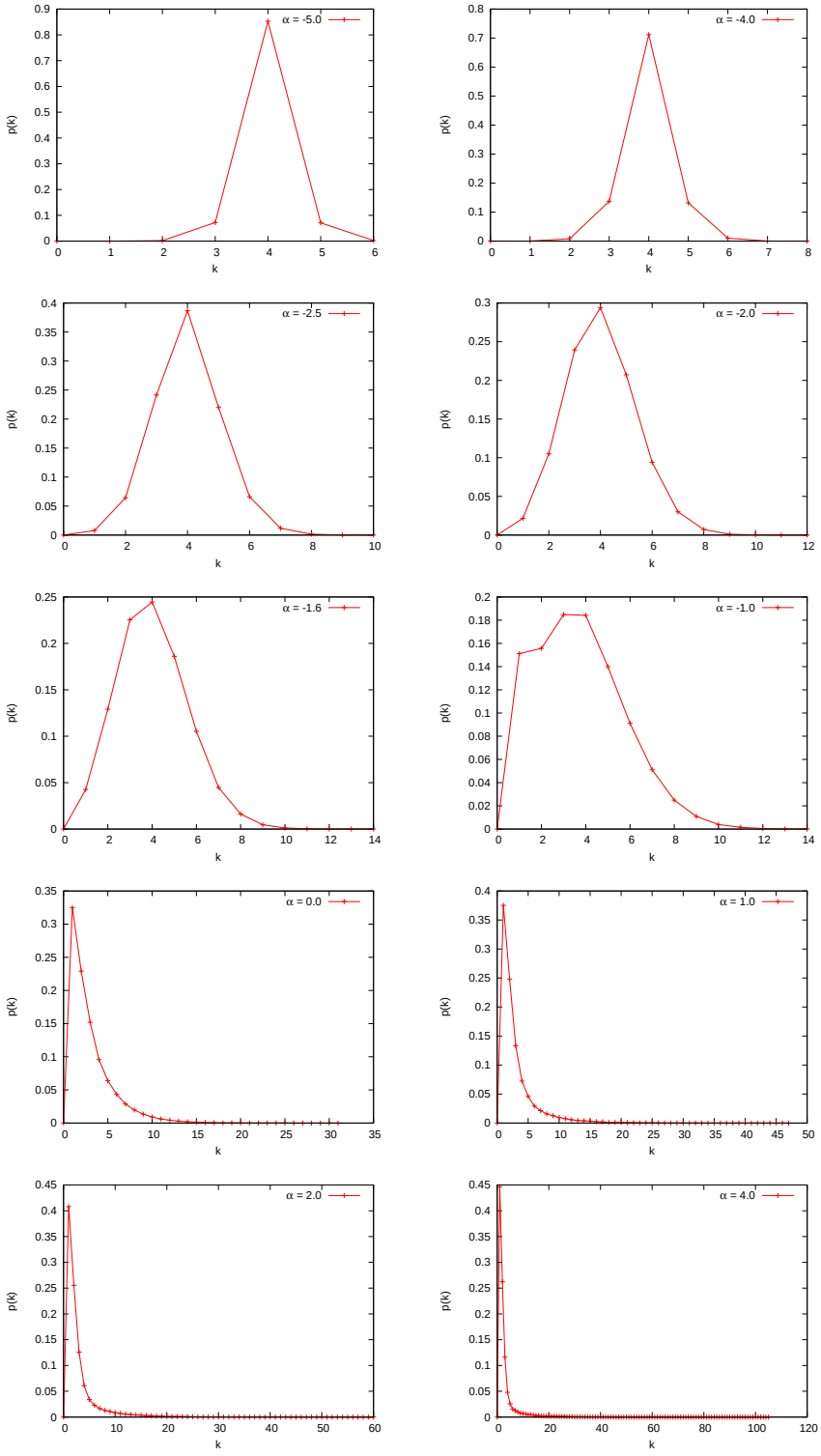
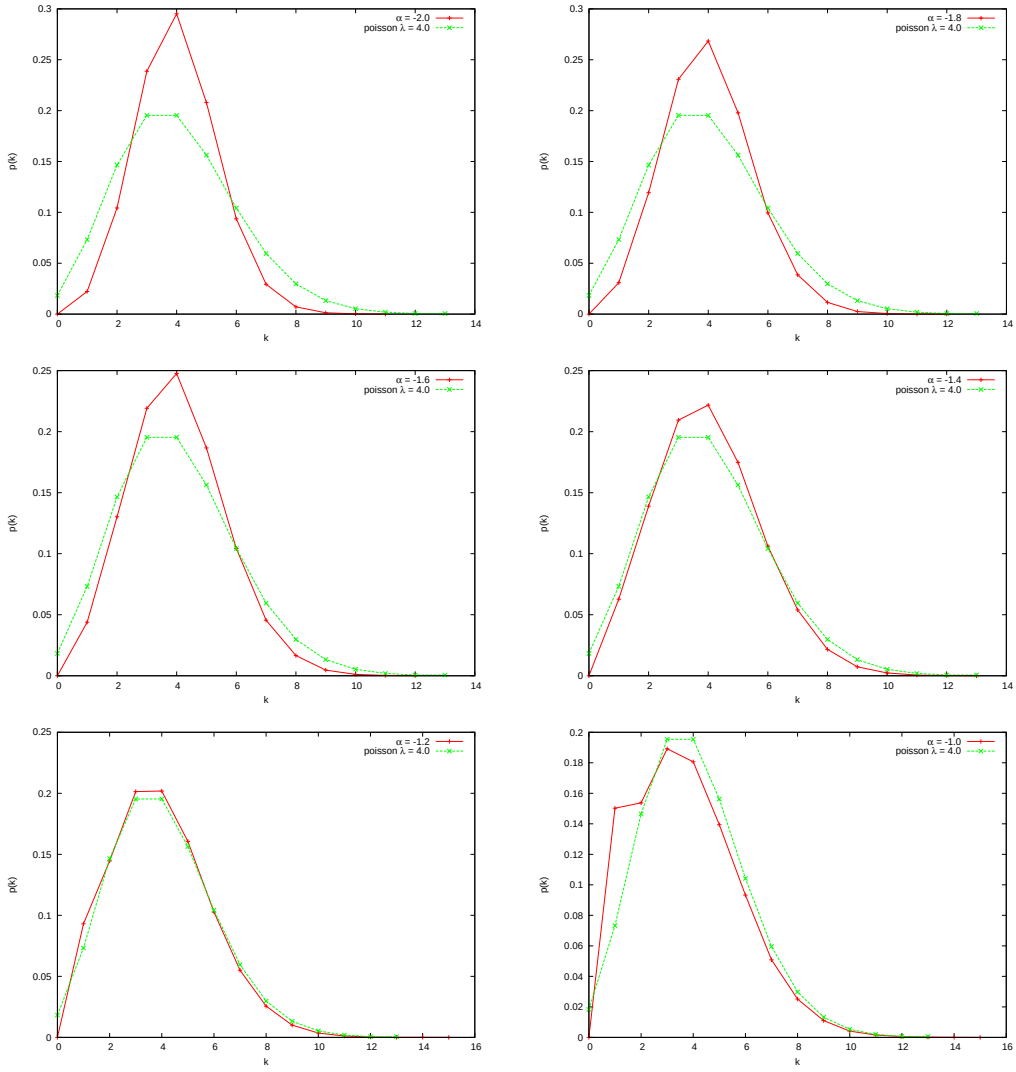


図 8　$\alpha < 0$ での次数分布とポアソン分布の比較



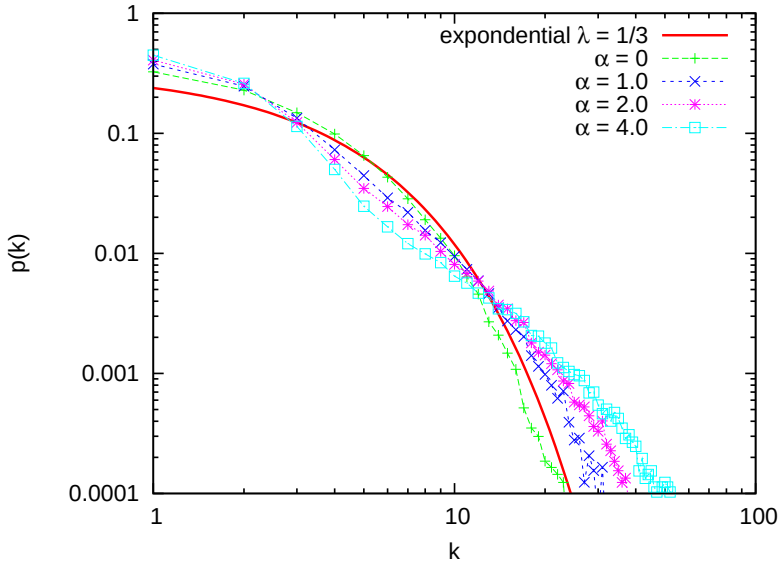


図 9　$\alpha > 0$ での次数分布の対数プロット

図 10　平均頂点間距離とクラスター係数

α	平均頂点間距離	クラスター係数
-3.0	935.7	0.47
-2.0	36.5	0.32
-1.0	7.5	0.0042
0.0	7.3	0.000032
1.0	6.8	0.000090
2.0	6.4	0.000065

4.4　平均頂点間距離とクラスター係数

平均頂点間距離の変化の様子は図 11 に示す．$\alpha < 0$ の領域では，初めは非常に大きな値をしているが，$\alpha = -2.0$ に向けて，非常に小さな値に収束している．スモールワールド性の指標として $L \propto \log n$ を考えた場合，このモデルでは $\alpha = -2.0$ でその特性が得られていると言える．

一方，図 12 に示したクラスター係数の遷移を見てみる．クラスター係数は平均頂点間距離より遅く，$\alpha = -2.0$ 近辺では大きな値を維持している．そして $\alpha = -1.0$ ではほぼ 0 に収束していることが確認できる．

グラフのみでは確認しづらいため，幾つかの α に対して，値を抜き出したものを表にして見てみる（図 10）．実際の数値を確認してみても，$\alpha = -2.0$ という値では複雑ネットワークに見られる，大きな C と小さな L というものが確認できるが，その前後で，大きな C だが L も大きすぎてスモールワールド性を持たない状態と，小さな L は持っていても C がほぼ 0 になりクラスター性を失った状態になっていることがわかる．

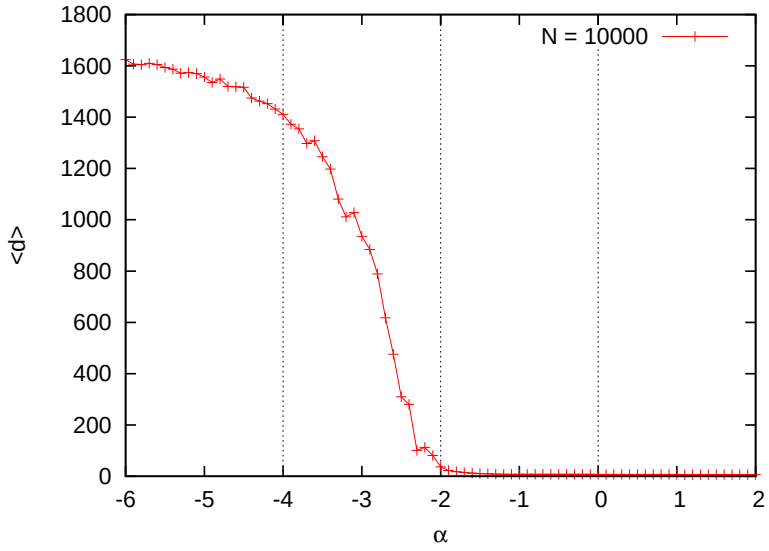


図 11　平均頂点間距離

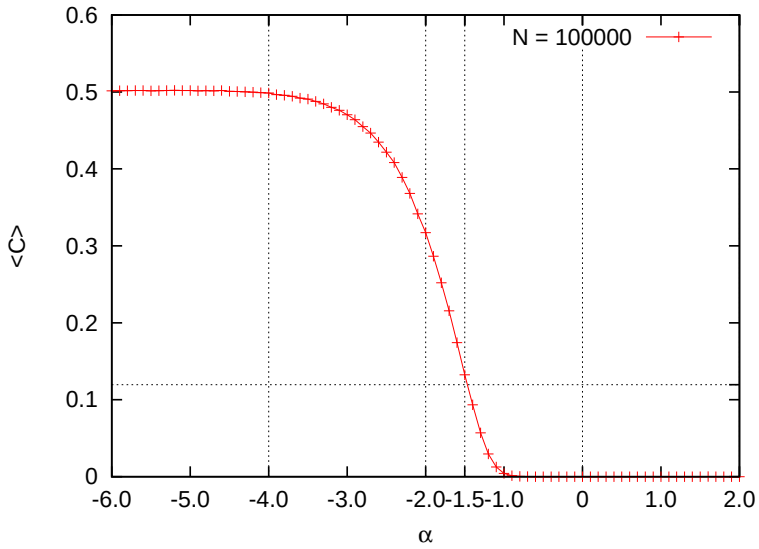


図 12　クラスター係数

第 5 章　考察

以上の解析結果を踏まえた上で，本モデルの特徴についてまとめる．まず $\alpha < 0$ では，距離の小さなノードと繋がりあうことで，次数 4 に集中した巨大な鎖状のネットワークとなる．そして，$\alpha = -2.0$ を前後に，大きなクラスター係数と小さな平均頂点間距離を持った，ランダムグラフのようなネットワークへと転移していく．この様子は WS モデルの遷移と似たような経過を辿っていると考えられる．初期状態は共に次数 4 の格子グラフであり，WS モデルでは頂点が両端がつながり円状になっているのに対し，本モデルでは両端の切れた一本の直線状に頂点が配置される．ランダムグラフへ変化していく過程では，ともに接続の一部を変化させショートカットを形成し，小さな平均頂点間距離と，大きなクラスター係数を持った状態を経過する．さらに最終的にランダムグラフとなり次数分布がポアソン分布となるところまで一致する．

また，$\alpha = 0$ では次数分布は指数分布となるが，その後 α が増加するに従って，指数分布からベキ分布へと遷移し，クラスター性を持たないがベキ則に従った，スケールフリーネットワークへと変化していく．これは小さな数値のノードがより多くのノードと接続されることにより，巨大なハブへと成長していくために起こると考えられる．スケールフリーネットワークでは，ネットワークの成長と優先的選択がキーワードとなっていた．本モデルでも，時間の経過と共にノードが追加されネットワークの成長していく．さらに $\alpha > 0$ においては小さな値を持つノードほど，優先的に選択される状態となるため，スケールフリーネットワークと同様にベキ則を持ったネットワークが生成されたと考えられる．

複雑ネットワークに一般に言われる，「スケールフリー性」「スモールワールド性」「クラスター性」を同時に満たした状態は存在しないが，本モデルでは非常にシンプルなアルゴリズムによって，WS グラフと同様の構造相転移と，さらにそこからスケールフリーモデルと同様のベキ則に従ったネットワークへの相転移を実現することが出来る．

また α の変化がネットワーク特性を決める重要な要素であり，$\alpha = -2.0$ という値がこのモデルの重要な鍵であり，複雑ネットワークとしての価値をこのモデルに与えていると考えられる．この結果は，ゴールドバッハ予想を用いた整数分割を行った文献 [2] の結果と同様であり，そこでもまた $\alpha = -2.0$ が重要な値であることが示されている．

第 6 章　結言

本研究では正数分割法により新しい複雑ネットワークモデルの提案と，計算機シミュレーションによりその解析を行った．そして，その解析結果から α という単一の値の変化によって，複数の複雑ネットワーク特性の変化を確認することができ，WS モデルと同様の相転移と，そこからさらにスケールフリーネットワークへ相転移していく様子を示した．また，$\alpha = -2.0$ という値が特別な意味を持ち，このモデルが複雑ネットワークとしての特性を，その前後から獲得していくことを確認した．

今回はシミュレーションにより得られたデータからの基本的な解析を行った．しかしながら，それは本当に基本的なものに過ぎず，ネットワークの中心性など，その他の分析を行う必要がある [11]．現在では様々な尺度から複雑ネットワークの分析を行う手法が考えられている [12]．

さらに，本論分では数学的な分析をほとんど行っていない．しかしながら，その簡単なアルゴリズムと整数を用いたと言うことから，正確に数学的な分析を行える可能性がある．複雑ネットワークとしての特性を持ちながら数論としての議論の余地が大きく残っていることは，なすべき課題であると同時に，その将来的な可能性も内包している．今後はより数学的にその意味を分析していく必要があるだろう．

最後に，複雑ネットワーク科学において，その興味は実ネットワークの解析であり，その理解こそが重要であると考えられる．しかしながら，本モデルのように簡易なモデルによって得られたネットワークを理解し，共通性や相違点を導くことは，実際のネットワークの特性を理解する上での重要なものだと言える．また，このモデルは簡易アルゴリズムで導かれることから，応用的に異なる特徴を持った複雑ネットワークを構築することが可能であるかもしれない．そうすれば，実データから得られた結果を仮想的な異なるネットワークにおいて重ね合わせることで，より一般的な理解を得るためのツールとしての役割を担うものとしても期待される．

参考文献

[1] G. Corso, ”Families and clustering in a natural numbers network”, Physical Review E 69, 036106 (2004)

[2] A. K. Chandra,S. Dasgupta, ”A small world network of prime numbers”, Physica A 357, 436-446 (2005)

[3] 安田雪, ”ネットワーク分析－何が行為を決定するか”, 新曜社, (1997)

[4] R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barabási, ”Error and attack tolerance of complex networks” Nature 406, 378-382 (2000)

[5] 増田直樹, 今野紀雄, ”複雑ネットワークの科学”, 産業図書, (2005)

[6] R. Albert, A.-L. Barabási, ”Statistical mechanics of complex networks”, Review of Modern Physics vol.74, 47-97 (2002)

[7] P. Erdös, A. Rényi, ”On random graphs. Publicationes Mathematicae, 6, 290-297 (1959)

[8] D. J. Watts, S. H. Strogatz, ”Collective dynamics of ’small-world’ networks”, Nature 393, 440-442 (1998)

[9] A. -L. Barabási, R. Albert, ”Emergence of scaling in random networks”, Science 286, 509-512 (1999)

[10] H. A. Simon, ”On a class of skew distribution functions”, Biometrika 42, 425 (1955)

[11] 篠田孝祐，松尾豊，中島秀之，”複数の中心性尺度によるネットワーク生成モデル” 知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌） Vol.20,No3, 410-422 (2008)

[12] 土屋裕一，鈴木麗璽，有田隆也，”最適化に基づく複雑ネットワークの指標理解” The 23rd Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence (2009)