HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第5回数学総合若手研究集会 : 他分野との学際的交流を目指して
Author(s)	須田, 智彦; 梅田, 陽子; 葛西, 香太 他
Description	conf: 北海道大学, 2009年3月4日(水)-6日(金)
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 140, 1
Issue Date	2009-02-25
DOI	https://doi.org/10.14943/49028
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/45511
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech140.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 5 回数学総合若手研究集会

～他分野との学際的交流を目指して～

The 5th Mathematics Conference for Young Researchers

－ MCYR5 －

世話人
須田智彦 , 梅田陽子 , 葛西香太
加世堂公希 , 山野井隆晃 , 吉田一樹

札幌，2009
Series #140. February,2009

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#117 A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto, 第 3 回数学総合若手研究集会 –他分野との学際的交流を目指して, 264 pages. 2007.

#118 T. Yamamoto, Y. Sato, N. Kataoka and H. Takagi, Proceedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics, 73 pages. 2007.

#119 T. Yamamoto and T. Nakazi, 第 15 回関数空間セミナー報告集, 82 pages. 2007.

#120 K. Hirata, 第 10 回 COE 研究員連続講演会『正値調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正値解の存在』, 25 pages. 2007.

#121 K. Izuchi, 第 12 回 COE 研究員連続講演会『 I）Segal-Bargmann 空間の巡回ベクトルについて II）2 重単位開円板上の逆シフト不変部分空間上のクロス交換子について』, 18 pages. 2007.

#122 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 32nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 73 pages. 2007.

#123 H. Kubo, T. Ozawa, H. Takamura and K. Tsutaya, Nonlinear Wave Equations, 53 pages. 2007.

#124 N. Ishimura, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー 2007「計算ホモロジーとその応用」, 110 pages. 2007.

#125 S. Hattori, 第 15 回 COE 研究員連続講演会『分岐理論と有限平坦 Galois 表現』, 28 pages. 2008.

#126 T. Miyaguchi, M. Kon, R. Kamijo, S. Kawano, Y. Sato and D. Hirose, 第 4 回数学総合若手研究集会 –他分野との学際的交流を目指して, 298 pages. 2008.

#127 K. Saji, 第 13 回 COE 研究員連続講演会『波面とその特異点』, 15 pages. 2008.

#128 T. Nakazi and S. Miyajima, 第 16 回関数空間セミナー報告集, 105 pages. 2008.

#129 M. Kon, 学位論文 Doctoral thesis “Minimal submanifolds immersed in a complex projective space”, 77 pages. 2008.

#130 S. Minabe, 第 14 回 COE 研究員連続講演会『開ミラー対称性における最近の進展』, 8 pages. 2008

#131 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium, Final “Nonlinear Partial Differential Equations”, 73 pages. 2008.

#132 H. Kang, 第 16 回 COE 研究員連続講演会『CHAOS IN TRAVELING WAVES IN LATTICE SYSTEMS OF UNBOUNDED MEDIA』, 13 pages. 2008.

#133 G.-J. Chung, editor:Y. Kimura, Introduction to Various Models in Image Processing, 61 pages. 2008.

#134 H. Takagi and R. Uno, 研究会報告書『動的システムの情報論 (7)』, 110 pages. 2008.

#135 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, 第 33 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 72 pages. 2008.

#136 T. Sakajo, Y. Nishiura, H. Suito, K. Nishinari, M. Nagayama and T. Amemiya, JST さきがけ研究集会『環境問題における数理の可能性』, 83 pages. 2008.

#137 H. Hida, T. Ito, H. Katsurada, K. Kitagawa (transcribed by T. Suda), Y. Taguchi, A. Murase and A. Yamagami. K. Arai, T. Hiraoka, K. Itakura, T. Kasio, H. Kawamura, I. Kimura, S. Mochizuki, M. Murata and T. Okazaki, 整数論札幌夏の学校, 201 pages. 2008.

#138 J. Inoguchi, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 66 pages. 2008.

#139 M. Hayashi, I. Saito and S. Miyajima, 第 17 回関数空間セミナー, 91 pages. 2009.

第5回数学総合若手研究集会

～他分野との学際的交流を目指して～

The 5th Mathematics Conference for Young Researchers

-MCYR5-

世話人

須田 智彦　梅田 陽子　葛西 香太

加世堂 公希　山野井 隆晃　吉田 一樹

札幌，2009

当研究集会の経費は

北海道大学大学院理学研究院数学部門

から賄われています

はじめに

当研究集会は、様々な分野の若手研究者が発表し交流しあう場を提供することを目的とし、大学院生により運営される研究集会です。昨年まで 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」の活動の一環として開催されてきましたが、その果たしてきた意義を踏まえて今年度も開催致します。数学周辺の各分野間、基盤研究と応用研究間のさまざまなレベルにおいて連携・交流し、それぞれの研究活動に刺激を与えることを目指しておりますので、ぜひこの場を活用して下さい。

この概要集は講演者の方々から事前に集めた原稿を印刷したものです。本研究集会の目的に合わせ、他分野の方にも分かり易いように入門的な事項を含めて書いて頂きました。参加者が講演をより深く理解し、活発な交流を行い、またご自身の研究を進展させる一助となれば幸いです。

講演には、口頭講演（60 分のシングルセッションと 30 分のパラレルセッション）とポスター発表があります。シングルセッションでは入門的な内容を含めて講演して頂くことになっています。また、ポスター発表では、講演前に 1 人 1 分程度の簡単な内容紹介をして頂きます。

なお、当集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の援助を受けて開催されます。開催にあたっては

・北大数学教室の先生方、事務の方々

・講演者、参加者の皆様

・過去の CCYR 世話人

から多大なるご支援を頂きました。特に事務の太田さんには最初から最後までずっとお世話になりました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

2009 年 3 月　世話人代表　須田智彦

第5回 数学総合若手研究集会

The 5th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2009年3月4日 (水)〜6日 (金)
場所： 北海道大学 学術交流会館

(A) 小講堂 (1F シングル・パラレル会場)　(B) 第1会議室 (1F ポスター会場・休憩所)
(C) 第2会議室 (1F パラレル会場)　(D) 第3会議室 (1F パラレル会場)
(E) 第4会議室 (1F パラレル会場)

URL : http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/mcyr/2009/index.html

3月4日 (水)

09:50–10:00 (A) **開会**

10:00–11:00 (A) **仲田 研登** (Kento NAKADA) 京都大学数理解析研究所
A probabilistic algorithm which generates standard tableaux of a generalized Young diagram

11:15–12:15 (A) **鈴木 章斗** (Akito SUZUKI) 九州大学大学院数理学研究院
Quantization of Maxwell field in Lorentz gauge

12:15–13:30 **昼食**

13:30–14:30 (A) **柳井 佳奈** (Kana YANAI) お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科
Existence theorem of relations of non commuting two formal diffeomorphisms by characteristic curve
(特性曲線による非可換な2つの形式的微分同相写像の関係式の存在定理)

14:45–15:15 (A) **田中 亮吉** (Ryokichi TANAKA) 京都大学大学院理学研究科
Large deviation and the tangent cone at infinity of a covering graph with the transformation group of polynomial volume growth

(C) **新國 裕昭** (Hiroaki NIIKUNI) 首都大学東京大学院理工学研究科
Rotation number approach to spectral analysis of the generalized Kronig-Penney Hamiltonians

(D) **河野 真士** (Shinji KAWANO) 北海道大学大学院理学院
On the maximum value of ground states for the scalar field equation with double power nonlinearity

(E) **縫田 光司** (Koji NUIDA)産業技術総合研究所情報セキュリティ研究センター
Viewing quantum information theory from generic probability model
(一般確率モデルから眺める量子情報理論)

15:30–16:00 (A) **恩田 健介** (Kensuke ONDA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Ricci flow on 3-dim Lie group and 4-dim Ricci flat manifolds

(C) **長谷部 高広** (Takahiro HASEBE) 京都大学大学院理学研究科
Properties of Monotone Infinitely Divisible Distributions

(D) **山野 拓也** (Takuya YAMANO) 武蔵工業大学知識工学部
Phase portrait analysis for the envelope solution of cubic-quartic nonlinear Schrödinger equations
(3次-4次非線形シュレーディンガー方程式に対する包絡解の相図解析と変調不安定性)

(E) **田中 立志** (Tatsushi TANAKA) 九州大学大学院数理学研究院
On the quasi-derivation relation for multiple zeta values
(多重ゼータ値の一般導分関係式について)

16:15–16:45 (A) **西澤 由輔** (Yusuke NISHIZAWA) 首都大学東京大学院理工学研究科
Heterodimensional tangencies on cycles leading to strange attractors

(C) **高江洲 俊光** (Toshimitsu TAKAESU) 九州大学大学院数理学府
On the existence of the ground state and the asymptotic fields for the system of the Dirac field interacting with electromagnetic fields
(ディラック場と電磁場が相互作用する系の基底状態の存在および漸近場の存在について)

(D) **山岸 弘幸** (Hiroyuki YAMAGISHI) 大阪大学大学院基礎工学研究科
The best constant of Sobolev inequality corresponding to 2-point boundary value problem for bending of a beam
(弾性基盤上の張力をかけた棒のたわみの2点境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数)

(E) **阿部 拓郎** (Takuro ABE) 京都大学大学院理学研究科
A generalized logarithmic module of hyperplane arrangements with multiplicities

17:00–17:30 (A) **松江 要** (Kaname MATSUE) 京都大学大学院理学研究科
The verification of bifurcation of dynamics via the homology Conley index and rigorous computations

(C) **斎藤 新悟** (Shingo SAITO) 九州大学大学院数理学研究院
Continuity points of typical functions

(D) **中野 直人** (Naoto NAKANO) 慶應義塾大学大学院理工学研究科
Slip condition problem for inhomogeneous incompressible fluid-like bodies

(E) **三枝崎 剛** (Tsuyoshi MIEZAKI) 九州大学大学院数理学府
Toy models for D.H.Lehmer's conjecture (joint work with Eiichi Bannai)

3月5日 (木)

09:30–10:30 (A) **伊藤 昇** (Noboru ITO) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科
Finite-type invariants for curves, categorification of Jones polynomial with $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ coefficients for knot, and word theory

10:45–11:45 (A) **内田 幸寛** (Yukihiro UCHIDA) 京都大学大学院理学研究科
Division polynomials of hyperelliptic Jacobians

11:45–13:15 **昼食**

13:15–14:15 (A) **増田 茂** (Shigeru MASUDA) 首都大学東京大学院理学研究科
Confrontations and concurrences of the original Navier-Stokes equations

14:30–15:00 (A) **櫻井 章雄** (Akio SAKURAI) 首都大学東京大学院理工学研究科
Orbit shifted shadowing property of generalized Lozi maps

(C) **松澤 泰道** (Yasumichi MATSUZAWA) 北海道大学大学院理学院
Some properties of time operators

(D) **前田 昌也** (Masaya MAEDA) 京都大学大学院理学研究科
On the symmetry of the ground states of nonlinear Schrödinger equation with potential

(E) **福永 知則** (Tomonori FUKUNAGA) 北海道大学大学院理学院
Homotopy classification of nanophrases and its application

15:15–15:45 (A) **吉川 満** (Mitsuru KIKKAWA) 関西学院大学大学院経済学研究科
The strategic pricing of options : Black-Sholes equation
(オプションの戦略的な価格付け: Black-Sholes 方程式の周辺)

(C) **近藤 信太郎** (Shintaro KONDO) 慶応大学大学院理工学研究科
The convergence with nondimensional parameter of Hasegawa-Wakatani equations

(D) **森本 光太郎** (Kotaro MORIMOTO) 首都大学東京大学院理工学研究科
Existence of spike patterns for some chemotaxis models with saturation

(E) **加藤 宏尚** (Hironao KATO) 広島大学大学院理学研究科
The existence of flat projective structures on Lie groups

16:00–16:15 (A) **ポスター１分スピーチ**

16:15–17:30 (B) **ポスターセッション**

安藤 浩志 (Hiroshi ANDO) 京都大学数理解析研究所
On a representation of a local gauge group

石田 麻佑美 (Mayumi ISHIDA) 北海道大学大学院理学院
Diffused interface model for premixed flame equation

石丸武志 (Takeshi ISHIMARU) 北海道大学大学院工学研究科
Rotational symmetry applied to boundary element analysis
(回転対称性を考慮した境界要素法)

内海 和樹 (Kazuki UTSUMI) 広島大学大学院理学研究科
On the structure of certain K3 surfaces

大岩剛 (Tsuyoshi OIWA) 北海道大学大学院工学研究科
Plasma diffusion due to uncertainty

奥村基史 (Motofumi OKUMURA) 北海道大学大学院工学研究科
Artificial neural network for reactor stability monitoring
(人工ニューラルネットワークによる原子炉安定性診断)

加世堂 公希 (Masaki KASEDOU) 北海道大学大学院理学院
Spacelike hypersurfaces and spacelike submanifolds in de Sitter space

北原 誠 (Makoto KITAHARA) 北海道大学大学院理学院
Random walks on finite groups

永井隆之 (Takayuki NAGAI) 北海道大学大学院理学院
The Gauss map of a hypersurface in Euclidean n-sphere and the spherical Legendrian duality

東功一郎 (Koichiro HIGASHI) 北海道大学大学院工学研究科
Algebraic method for multibody problem

廣瀬 大輔 (Daisuke HIROSE) 北海道大学大学院理学院
On tight closure with a view point from algebraic geometry

深澤 知 (Satoru FUKASAWA) 早稲田大学理工学術院
Characterization of certain plane curves by Galois point

前田忠昭 (Tadaaki MAEDA) 北海道大学大学院工学研究科
Three-dimensional Cauchy condition surface method to reconstruct the fusion plasma boundary shape
(3 次元コーシー条件面法による核融合プラズマ境界形状の逆推定)

矢野 充志 (Atsushi YANO) 北海道大学大学院理学院
An introduction to exterior differential system

19:00– **懇親会**

3月6日 (金)

09:30–10:30 (A) **斉木 吉隆** (Yoshitaka SAIKI) 京都大学数理解析研究所
Time averaged properties along unstable periodic orbits in some systems of ordinary differential equations

10:45–11:45 (A) **鹿野 豊** (Yutaka SHIKANO) 東京工業大学大学院理工学研究科
Stochastic process in quantum mechanics via two-state vector formalism

11:45–13:15 **昼食**

13:15–14:15 (A) **佐々木 浩宣** (Hironobu SASAKI) 大阪大学大学院理学研究科
Inverse scattering problems for nonlinear dispersive equations

14:15–14:30 (A) **閉会**

世話人：須田智彦 (代表) 梅田陽子 葛西香太
加世堂公希 山野井隆晃 吉田一樹

A probabilistic algorithm which generates standard tableaux of a generalized Young diagram

KENTO NAKADA

1. はじめにのはじめに — GENERALIZED YOUNG DIAGRAM とは何か —

本稿の主たる対象である generalized Young diagram (一般化されたヤング図形) は 1991 年, J. B. Carrell の論文 [1] の中にはじめて現れる.

論文 [1] によれば D. Peterson は, Kac-Moody Lie 代数の Weyl 群の minuscule 元 w の reduced decomposition (最短表示) の総数が:

$$\#\mathrm{Red}(w) = \frac{\ell(w)!}{\prod_{\beta\in\Phi(w)} \mathrm{ht}(\beta)}, \tag{1.1}$$

という形で得られることを証明したとされる. ここで $\mathrm{Red}(w)$ は w の reduced decomposition の集合, $\ell(w)$ は w の length, $\Phi(w)$ は w の inversion set, $\mathrm{ht}(\beta)$ は β の height である. しかし, 式 (1.1) の証明は公開されなかった.

一方, よく知られているように, Young diagram Y の standard tableau (標準盤) の総数は:

$$\#\mathrm{STab}(Y) = \frac{\#Y!}{\prod_{v\in Y} h_v}, \tag{1.2}$$

という形で得られる. ここで $\mathrm{STab}(Y)$ は Y の standard tableau の集合, h_v は v の hook length である.

式 (1.1) と (1.2) の類似性は誰の目にも明白で,

$$\begin{aligned} w, \Phi(w) &\longleftrightarrow Y \\ \mathrm{Red}(w) &\longleftrightarrow \mathrm{STab}(Y) \\ \ell(w) = \#\Phi(w) &\longleftrightarrow \#Y \\ \mathrm{ht}(\beta)\ (\beta\in\Phi(w)) &\longleftrightarrow h_v\ (v\in Y) \end{aligned}$$

という関係が見て取れる. この関係を持って, 我々は minuscule 元 w, もしくはその inversion set $\Phi(w)$ を generalized Young diagram (一般化されたヤング図形) と呼ぶ. (後で, 違う (同値な) 定義をする)

2. はじめに

C.Greene, A.Nijenhuis, H.S.Wilf は 1979 年の論文 [2] で, Young diagram のすべての standard tableau を等確率に生成する random walk (あるいは Markov chain) に基づくアルゴリズム (GNW-algorithm) を考案した. したがって特にこのアルゴリズムから, Young diagram の hook length formula (1.2) の証明が得られる.

この講演の目的は, generalized Young diagram に対して GNW-algorithm が適用できることを解説することである. したがって特にこのアルゴリズムから, generalized Young diagram の hook length formula (1.1) の証明が得られる.

3. Generalized Young diagram の定義

3.1. **準備.** この subsection は root system の基本事項 (例えば [4][3] を参照).

$A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$	: Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g}$ の Cartan matrix.
$\mathfrak{h}$	: Cartan subalgebra over $\mathbb{R}$,
$\mathfrak{h}^*$	: $\mathfrak{h}$ の dual space,
$\langle , \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$	: canonical bilinear form.
$\Pi := \left\{ \alpha_i \,\middle|\, i \in I \right\} \subset \mathfrak{h}^*$	: simple roots の集合,
$\Pi^\vee := \left\{ \alpha_i^\vee \,\middle|\, i \in I \right\} \subset \mathfrak{h}$	: simple coroots の集合, such that $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{i,j}$.

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は次を満たすとき *integral weight* と呼ばれる:

$$\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \quad i \in I.$$

integral weight の全体は P と書かれる.
$\lambda \in P$ は次を満たすとき *dominant integral weight* と呼ばれる:

$$\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0, \quad i \in I.$$

dominant integral weight の全体は $P_{\geq 0}$ と書かれる.
各 $i \in I$ に対して, $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を:

$$s_i : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

で定義する.

$W := \langle s_i \mid i \in I \rangle$	: Weyl group
$\Phi := W\Pi$	: root system
$\Phi^\vee := W\Pi^\vee$	: coroot system
$\vee : \Phi \ni \beta \longmapsto \beta^\vee \in \Phi^\vee$	: the dual of real roots defined by $(w(\beta))^\vee = w(\beta^\vee)$.

Φ_+ と Φ_- で, Φ の positive roots と negative roots を表す.
各 $\beta \in \Phi$ に対して, $s_\beta \in W$ を次で定義する:

$$s_\beta(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

したがって, $\mathfrak{h}$ には次で act する:

$$s_\beta(h) = h - \langle \beta, h \rangle \beta^\vee, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

各 $w \in W$ に対して, *inversion set* $\Phi(w)$ $(\subseteq \Phi_+)$ を次で定義する:

$$\Phi(w) := \left\{ \gamma \in \Phi_+ \,\middle|\, w^{-1}(\gamma) < 0 \right\}.$$

このとき, $w, w' \in W$ について, 次が成り立つ:

$$\Phi(w) = \Phi(w') \Leftrightarrow w = w'.$$

各 $w \in W$ に対して, simple reflection の列 $(s_{i_1}, \cdots, s_{i_l})$ は, $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ and $l = \#\Phi(w)$ を満たすとき, *reduced decomposition of* w と呼ばれる.
reduced decomposition of $w \in W$ 全体のなす集合を $\mathrm{Red}(w)$ と書く.

3.2. **Generalized Young diagram.**

Definition 1. $\lambda \in P$ が *pre-dominant* であるとは, 次を満たすことである:

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1, \quad \beta^\vee \in \Phi_+^\vee.$$

pre-dominant integral weights のなす集合を $P_{\geq -1}$ で表す.

Definition 2. $\lambda \in P_{\geq -1}$ に対して, 次で定義される集合 $\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ を λ の *shape* と呼ぶ:

$$\mathrm{D}(\lambda)^\vee := \left\{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \,\middle|\, \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \right\}.$$

λ が *finite* であるとは, $\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee < \infty$ を満たすことである. finite な pre-dominant integral weight のなす集合を $P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ と書く.

shape は, coroot lattice の ordinary order で partially ordered set (poset) とみなす.

Definition 3. $\lambda \in P_{\geq -1}, \gamma^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. 集合 $\mathrm{H}_\lambda(\gamma^\vee)$ を次で定義する:

$$\mathrm{H}_\lambda\left(\gamma^\vee\right) := \mathrm{D}(\lambda)^\vee \cap \Phi\left(s_\gamma\right)^\vee.$$

集合 $\mathrm{H}_\lambda(\gamma^\vee)$ を *hook at* $\gamma^\vee$ *in* λ と呼ぶ.

3.3. **Young diagram.** Young diagram について簡単に復習する.

Definition 4. 非負整数の有限単調減少列 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0)$ を *partition* と呼ぶ.

Definition 5. partition λ に対して, shape Y_λ を次で定義する:

$$Y_\lambda = \left\{ (i,j) \,\middle|\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \lambda_i \right\}.$$

ここで, Y_λ は, 次の順序を入れることで poset とみなす:

$$(i,j) \leq (i',j') \Leftrightarrow i \geq i' \text{ and } j \geq j'.$$

Definition 6. λ を partition とする. $(i,j) \in Y_\lambda$ とする. 集合 $\mathrm{H}_{Y_\lambda}(i,j)$ を次で定義する:

$$\mathrm{H}_{Y_\lambda}(i,j) := \left\{ (i',j') \in Y_\lambda \,\middle|\, \text{“}i' = i \text{ and } j' \geq j\text{”} \text{ or } \text{“}i' \geq i \text{ and } j' = j\text{”} \right\}.$$

集合 $\mathrm{H}_{Y_\lambda}(i,j)$ を *hook at* (i,j) *in* λ と呼ぶ.

3.4. **Young diagram の実現.** 本論に入る前に, pre-dominant integral weight における, shape とか hook といった用語が適切であることを示したい. そのためには, 古典的な Young diagram がどのように pre-dominant integral weight により実現されるかを見る必要があるであろう.

$\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0)$ を partition とする. このとき, 十分大きい r に対して, A_r 型 Lie algebra 上の $\lambda_o \in P_{\geq -1}$ で, $\mathrm{D}(\lambda_o)^\vee$ と Y_λ が順序同型 となるものが構成できることを見てみる.

$\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0)$ を partition とする. $r_o := n + \lambda_1 - 1$ とおく.
各 $k = 1, \cdots, n$ に対して, $\beta_k := \lambda_{n+1-k} + k - 1$ とおく. 各 $i = 1, \cdots, r_o$ に対して, 整数 b_i を次で定義する:

$$b_i := \begin{cases} -1 & \text{if } i \in \{\beta_1, \cdots, \beta_n\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

各 $k = 1, \cdots, n-1$ に対して, $\gamma_k := \lambda_{n+1-k} + k$ とおく. 各 $i = 1, \cdots, r_o$ に対して, 整数 c_i を次で定義する:

$$c_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i \in \{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

今, A_{r_o} 型 root system を考えよう. ω_i を i-th fundamental weight とする. integral weight λ_o を次で定義する:

$$\lambda_o := \sum_{i=1}^{r_o} (b_i + c_i)\omega_i$$

このとき, 次の Proposition が成り立つ:

Proposition 3.1. *partition* λ と *integral weight* λ_o は上の通りとする.

(1) $\lambda_o \in P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$.
(2) $\mathrm{D}(\lambda_o)^\vee$ は Y_λ と順序同型.
(3) *(2)* の同一視の下で $\mathrm{D}(\lambda_o)^\vee \ni \gamma^\vee = (i,j) \in Y_\lambda$ すれば, $\mathrm{H}_{\lambda_o}(\gamma^\vee) = \mathrm{H}_{Y_\lambda}(i,j)$.

Remark 1. この Proposition の証明は面倒だが難しくない.

Remark 2. この Proposition は Young diagram が hook も込みで正しく A 型 root system の中に実現されていることを意味している.

Remark 3. 上で定義した r_o は A_r 型 root system の中で Young diagram を実現するための最小の r である.

Remark 4. 上と同様な議論で, shifted Young diagram は D_n 型, もしくは B_n 型の root system の中に実現される. shifted Young diagram を D_n 型 root system で実現するとき, subsection 3.2 で定義した hook は, 通常, shifted Young diagram の *hook* (もしくは *bar*) として知られているものと一致する.
そのほかにも, swivel は E_6 型, bat は E_7 型で実現できる (see Figure 5.1). しかし, 一般の generalized Young digram の場合には indefinite type の root system が必要である. 重要な点は, これらの図形にも hook の概念を導入することが出来る, ということである. つまり, これらの図形は Young diagram の仲間である.

3.5. 最後の準備.

Definition 7. $\lambda \in P_{\geq -1}$, $\gamma^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とする. 集合 $\mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee)$ と $\mathrm{M}_\lambda^{(1)}(\gamma^\vee)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee) &:= \left\{ \beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee \,\middle|\, \beta^\vee < \gamma^\vee \right\}, \\ \mathrm{M}_\lambda^{(1)}(\gamma^\vee) &:= \left\{ \beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee \,\middle|\, \beta^\vee < \gamma^\vee, \text{ and } \langle \gamma, \beta^\vee \rangle = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Lemma 3.2 ([5]). $\lambda \in P_{\geq -1}$, $\gamma^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$, $\beta^\vee \in \mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee)$ とする. このとき:

(1) $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle = 0, 1,$ or 2 である.
(2) さらに, *Cartan matrix* が *simply-laced* で, かつ λ が *finite* ならば,
  (a) $\langle \gamma, \beta^\vee \rangle = 0,$ or 1.
  (b) $\{\gamma^\vee\} \cup \mathrm{M}_\lambda^{(1)}(\gamma^\vee) = \mathrm{H}_\lambda(\gamma^\vee)$.

Remark 5. simply-laced でないと, finite であっても一般に (2)-(a),(b) は成り立たない. また, finite でないと, simply-laced であっても一般に (2)-(a),(b) は成り立たない.

Proposition 3.3 ([6]). $\lambda \in P_{\geq -1}$, $\gamma^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ に対して, 次が成り立つ:

$$1 + \sum_{\beta^\vee \in \mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee)} \langle \gamma, \beta^\vee \rangle = \mathrm{ht}(\gamma).$$

Remark 6. hook に対しても $\#\mathrm{H}_\lambda(\gamma^\vee) = \mathrm{ht}(\gamma)$ が成り立つ [5]. この意味でも, $\mathrm{H}_\lambda(\gamma^\vee)$ と $\mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee)$ は, 似たようなもの である. 特に, simply-laced で finite な場合は Proposition 3.2 より, 関係が鮮明である. (一般の場合でも関係はあるが, ここでは省略する)

4. GNW-ALGORITHM の定義

4.1. **Corner Hook Walk Algorithms.** $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ は $\mathrm{D}(\lambda)^\vee \neq \varnothing$ とする. この λ に対して, 次のアルゴリズム (*corner hook walk algorithm* と呼ぶ) を考える:

- Procedure CHW(λ)

10: Chose an element $\gamma^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee$ with a probability $\dfrac{1}{\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee}$

20: **if** $\#\mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee) = 0$ **then goto** 60

30: Chose an element $\beta^\vee \in \mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee)$ with a probability $\dfrac{\langle \gamma, \beta^\vee \rangle}{\mathrm{ht}(\gamma) - 1}$

40: **Put** $\gamma^\vee := \beta^\vee$

50: **goto** 20

60: OUTPUT $\gamma^\vee$

70: **stop**

もし $\#\mathrm{M}_\lambda(\gamma^\vee) = 0$ ならば, Proposition 3.3 より, $\gamma^\vee$ は simple coroot である. したがって, 上のアルゴリズムは, 確率的な出力として simple coroot $\alpha_i^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$ を与える. このアルゴリズムで simple coroot $\alpha_i^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$ を得る確率を $\mathrm{prob}_\lambda\left(\alpha_i^\vee\right)$ で表す.

アルゴリズムの定義から, 直ちに次を得る:

Lemma 4.1. $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とおく. $\alpha_i^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee \cap \Pi^\vee$ とする. このとき次が成り立つ:

$$\mathrm{prob}_\lambda\left(\alpha_i^\vee\right) = \frac{1}{d} \sum_{\substack{\beta_l^\vee > \beta_{l-1}^\vee > \cdots > \beta_1^\vee > \beta_0^\vee = \alpha_i^\vee \\ l \geq 0}} \frac{\langle \beta_l, \beta_{l-1}^\vee \rangle}{\mathrm{ht}(\beta_l) - 1} \frac{\langle \beta_{l-1}, \beta_{l-2}^\vee \rangle}{\mathrm{ht}(\beta_{l-1}) - 1} \cdots \frac{\langle \beta_1, \alpha_i^\vee \rangle}{\mathrm{ht}(\beta_1) - 1}. \tag{4.1}$$

4.2. **GNW-Algorithms.** $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ に対して, 次のアルゴリズム (*GNW-algorithm* と呼ぶ) を考える:

- Procedure GNW(λ)

10: **if** $\#\mathrm{D}(\lambda)^\vee = 0$ **then goto** 50

20: **Call** Procedure CHW(λ)
($\alpha_i^\vee$ を Procedure CHW(λ) から得られる確率的出力とする)

30: **Put** $\lambda := s_i(\lambda)$

40: **goto** 10

50: **stop**

一度 CHW-algorithm を実行するたびに, 一つの simple coroot が出力されるので, GNW-algorithm が終了したときには, 長さ d の simple coroot の列が出力されていることになる ($d = \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$).

Definition 8. $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とおく. simple coroot の列 $(\alpha_{i_1}^\vee, \cdots, \alpha_{i_d}^\vee)$ は, 次を満たすとき *maximal λ-path* と呼ばれる:

$$\alpha_{i_k}^\vee \in \mathrm{D}(s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}(\lambda))^\vee \cap \Pi^\vee, \text{ for each } k = 1, \cdots, d.$$

maximal λ-path 全体のなす集合を $\mathrm{MPath}(\lambda)^\vee$ と書く.

GNW-algorithm の定義から直ちに, 次の proposition が成り立つ:

Proposition 4.2. *GNW-algorithm* が出力する列は *maximal λ-path* である.

このアルゴリズムで maximal λ-path $\mathcal{B} \in \mathrm{MPath}(\lambda)^\vee$ を得る確率を $\mathrm{Prob}_\lambda(\mathcal{B})$ で表す.

4.3. **主定理.**

Theorem 4.3 (N [8]). $\lambda \in P^{\mathrm{fin}}_{\geq -1}$ とする. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)^\vee$ とおく. このとき, $\mathcal{B} \in \mathrm{MPath}(\lambda)^\vee$ とすると, *GNW-algorithm* は $\mathcal{B}$ を確率:

$$\mathrm{Prob}_\lambda(\mathcal{B}) = \frac{\prod_{\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee} \mathrm{ht}\,(\beta)}{d!} \tag{4.2}$$

で生成する.

Corollary 4.4. $\mathrm{Prob}_\lambda()$ は一様分布である.

Proof. (4.2) の右辺は maximal λ-path に依存していないから. □

Corollary 4.5.

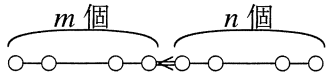
$$\#\mathrm{MPath}(\lambda)^\vee = \frac{d!}{\prod_{\beta^\vee \in \mathrm{D}(\lambda)^\vee} \mathrm{ht}\,(\beta)}.$$

Proof. Corollary 4.4 から従う. □

Remark 7. Theorem 4.3 は, 現状, J. R. Stembridge による分類定理 [13] を用いて証明されている. Stembridge の分類に従えば, 一般の generalized Young diagram は,

- simply-laced な Cartan matrix に基づく generalized Young diagram,
- B_n 型の Cartan matrix に基づく generalized Young diagram,
- $F_{m,n}$ 型の Cartan matrix に基づく generalized Young diagram,

の 3 種類に分解できる. また, この 3 種類すべてで Theorem 4.3 を証明すれば, 一般の generalized Young diagram で Theorem 4.3 が成り立つことは, 簡単に示すことが出来る. つまり [8] における証明は case-by case argument である. しかし, やはり分類による証明は不満足であり, 統一的な証明が望まれる.

ここで, $F_{m,n}$ は Dynkin 図形で書くと 

となるもの.

Remark 8. simply-laced の場合の Theorem 4.3(と本質的に同値な定理) は最初, 岡村修志によって証明された [10](formulation がまったく異なる). [10] における証明は, R. A. Proctor による分類 [11] に基づく case-by-case argument と, 長時間の計算機による計算でなされた. 一方, [9] では証明方法を大幅に改良し, 極めて見通しの良い証明を与えている. 本講演では simply-laced の場合の [9] に基づく証明を紹介する.

Theorem 4.3 の証明				
Dynkin diagram			図形の名称	証明
— 一般 — ? (分類による証明 N [8])	— simply-laced — N-Okamura [9] (分類による証明 Okamura [10])	type A_n	Young diagram	G-N-W [2]
		type D_n	shifted Young diagram	B. E. Sagan [12]
		その他	13 種類の図形	S. Okamura [10]
	type B_n		shifted Young diagram	N [7]
	type $F_{m,n}$	$(m \geq 2)$	名前はない	N [8]

5. Λ-MINUSCULE ELEMENT

Definition 9. $\Lambda \in P_{\geq 0}$ とする. $w \in W$ は, ある $(s_{i_1}, \cdots, s_{i_d}) \in \mathrm{Red}(w)$ に対して,

$$\langle s_{i_{p+1}} \cdots s_{i_d}(\Lambda), \alpha_{i_p}^{\vee} \rangle = 1, \quad 1 \leq p \leq d \tag{5.1}$$

を満たすとき, Λ-*minuscule element* と呼ぶ.

Remark 9. $w \in W$ が Λ-minuscule であれば, すべての $(s_{i_1}, \cdots, s_{i_d}) \in \mathrm{Red}(w)$ に対して, (5.1) が成り立つ [5] [13].

Definition 10. 集合 Minusc を次で定義する:

$$\mathrm{Minusc} := \left\{ (\Lambda, w) \,\middle|\, \Lambda \in P_{\geq 0}, \text{ and } w : \Lambda\text{-minuscule} \right\}$$

論文 [5] の結果を引用すると:

Proposition 5.1 ([5]). $(\Lambda, w) \in \mathrm{Minusc}$ とする. このとき, $\lambda := w(\Lambda)$ とおけば, $\lambda \in P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ である. さらに, 対応 $(\Lambda, w) \mapsto \lambda$ は, Minusc から $P_{\geq -1}^{\mathrm{fin}}$ への全単射を与える.

Proposition 5.2 ([5]). $(\Lambda, w) \in \mathrm{Minusc}$ とする. $\lambda := w(\Lambda)$ とおく. $d := \#\mathrm{D}(\lambda)$ とおく. このとき次が成り立つ:

(1) $\mathrm{D}(\lambda)^{\vee} = \Phi(w)^{\vee}$ が成り立つ.
(2) $(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_d}) \in \mathrm{MPath}(\lambda)$ とすると, $(s_{i_1}, \cdots, s_{i_d}) \in \mathrm{Red}(w)$ が成り立つ. さらに, 対応 $(\alpha_{i_1}^{\vee}, \cdots, \alpha_{i_d}^{\vee}) \mapsto (s_{i_1}, \cdots, s_{i_d})$ は, $\mathrm{MPath}(\lambda)^{\vee}$ から $\mathrm{Red}(w)$ への全単射を与える.

Corollary 4.5, Proposition 5.1, Proposition 5.2, は Peterson's hook formula を証明する:

Theorem 5.3 (Peterson's hook formula [1]). $\Lambda \in P_{\geq 0}$, $w \in W$ を Λ-*minuscule element* とする. このとき次が成り立つ:

$$\#\mathrm{Red}(w) = \frac{\ell(w)!}{\prod_{\beta \in \Phi(w)} \mathrm{ht}(\beta)}.$$

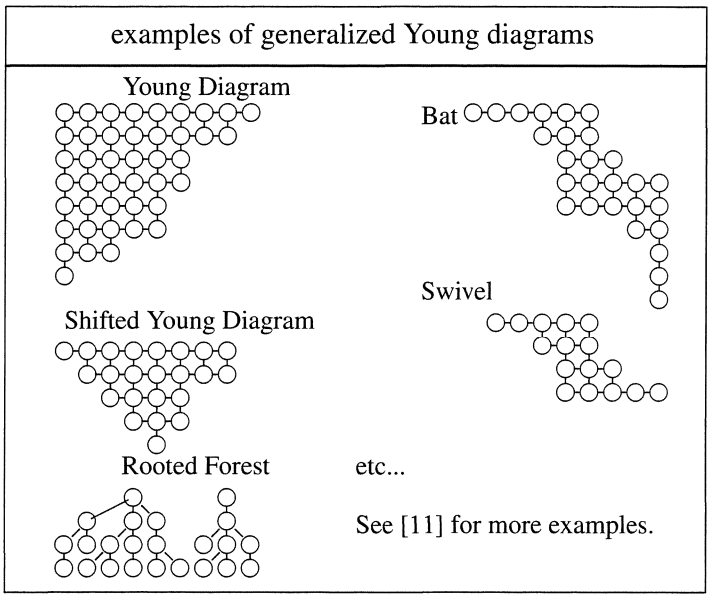


FIGURE 5.1

References

[1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties and Schubert calculus,* Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S.Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[2] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape,* Adv. in Math. **31** (1979), 104-109.

[3] V. G. Kac, "Infinite Dimentional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.

[4] R. V. Moody and A. Pianzola, "Lie Algebras With Triangular Decompositions," Canadian Mathematical Society Series of Monograph and Advanced Text, 1995.

[5] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram,* to appear in Osaka J. of Math **Vol.45 No.4** (2008).

[6] K. Nakada, *q-Hook formula for a generalized Young diagram,* preprint.

[7] K. Nakada, *Another proof of hook formula for a shifted Young diagram,* in preparation.

[8] K. Nakada, *A probabilistic proof of Peterson's hook formula,* in preparation.

[9] K. Nakada, S. Okamura, *Uniform generation of standard tableaux for a generalized Young diagram,* preprint.

[10] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.

[11] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ-minuscule Bruhat lattices and of d-complete posets,* J.Algebraic Combin. **9** (1999), 61-94.

[12] B. E. Sagan, *On selecting a random shifted Young tableau, J.Algorithm* **1**(1980), 213-234.

[13] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups,* J.Algebra **235**(2001), 722-743.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN, Partially supported by GCOE, Kyoto University

E-mail address: nakada@kurims.kyoto-u.ac.jp

Quantization of Maxwell field in Lorentz gauge

Akito Suzuki

Department of Mathematics, Kyushu University

1 序

量子化された電磁場と相対論的荷電粒子の場の相互作用を記述する（相対論的）量子電磁力学の模型で、相対論的要求をすべて満たすものは、未だ数学的に厳密に定義されていない。[1]しかし、荷電粒子が非相対論的に振る舞うとする**非相対論的量子電磁力学**では、4次元ベクトルポテンシャル $(\boldsymbol{A},\phi)=(A^1,A^2,A^3,A^0)$ を Coulomb ゲージ

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\equiv\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A^j}{\partial x^j}=0 \tag{1}$$

にとると、状態空間を Hilbert 空間にとる事ができて、数学的にも well-defined であることが知られている[2]。このようにして定義される模型は、Puli-Fierz 模型と呼ばれ、数学的にもよく研究されている。ところが、Lorentz ゲージ

$$\partial\cdot A\equiv\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=0 \tag{2}$$

では、状態空間が不定計量空間になってしまい、負の確率をもつ状態が現れて、確率解釈が困難になってしまう。このような状態は、非物理的な状態で現れてもらっては困るので、**ghost** と呼ばれている。

Gupta-Bleuler 形式とは、ghost を封じ込めて、現実の世界に現れてこないようにするための処方の一つである。本稿では、Gupta-Bleuler 形式が必要となる背景をやや詳しく述べて、それがどのようにして数学的に厳密に遂行されるかということを、非専門化向けに解説する事を目標としたい。

[1]この模型のある種の近似となりうるような模型は定義可能である。これらについては、[4] とその文献を参照されたい。

[2]厳密にいうと、非相対論的な場合でも紫外切断をいれる必要がある。これについては、後述する。

2 量子化（発見法的考察）

Coulomb ゲージと Lorentz ゲージの違いは、式 (1) と (2) から推測されるように、スカラーポテンシャル A^0 の取り扱い方の違いである。この A^0 の取り扱いが、量子化するときに一番の問題となるのだ。この事を、磁場中を運動する古典的な荷電粒子を例にとって見てみよう。時刻 $t\in\mathbb{R}$ での粒子の位置と運動量を、$\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t)\in\mathbb{R}^3$ として、次の運動方程式を考える：

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{q}(t)=e\Big(\boldsymbol{E}(\mathbf{q}(t),t)+\boldsymbol{v}(t)\times\boldsymbol{B}(\mathbf{q}(t),t)\Big). \tag{3}$$

ここで、$m>0$、$e\in\mathbb{R}$ は、荷電粒子の質量と電荷であり、電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ は、

$$\boldsymbol{E}=-\nabla A^0-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

であり、Maxwell 方程式

$$\Box\phi(\boldsymbol{x},t)-\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)$$
$$\Box\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)+\nabla\Lambda(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$$

を満たす。ただし、

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=e\delta(\boldsymbol{x}-\mathbf{q}(t)),$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=e\delta(\boldsymbol{x}-\mathbf{q}(t))\boldsymbol{v}(t),\quad \boldsymbol{v}(t)=\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t),$$

$$\Lambda=\partial\cdot A=\frac{\partial}{\partial t}\phi+\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

である。本節では、数学的に厳密は構成に入る前に、発見法的に量子化のアイディアを見ていく事にする。

2.1 粒子の量子化

まず量子化のアイディアをつかむために、荷電粒子を量子化してみよう。簡単のため、ベクトルポテンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ は時間によらないとする。このとき、系のハミルトニアン H_{cl} は次で与えられる：

$$H_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\boldsymbol{A}(\mathbf{q}))^2 + e\phi(\mathbf{q}) \quad (4)$$

量子化を遂行するには、$\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ を次の正準交換関係（CCR）をみたすヒルベルト空間上の作用素として表現すればよい：

$$[q_i, p_j] := q_i p_j - p_j q_i = i\delta_{ij}, \quad (5)$$
$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (6)$$

ここに、δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。実際、2 乗可積分関数のなす Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3; dX)$ 上の座標変数による掛け算作用素 $\mathbf{X}$ とその偏微分作用素を用いて、

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}, \quad \mathbf{p} = -i\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}}$$

とおけば、上の (5) と (6) は、適当な空間[3] 上で容易に確かめられるだろう。さて、古典的なハミルトニアン H_{cl} の定義式 (4) に、形式的に上の $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ を代入したものを h と書くことにする：

$$h = \frac{1}{2m}(-i\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}} - e\boldsymbol{A}(\mathbf{X}))^2 + e\phi(\mathbf{X}) \quad (7)$$

このとき、関数 $\mathbf{A}$ と ϕ に適当な条件を与えると、h が自己共役作用素になることはよく知られている。この場合、h を生成子とする時間発展のユニタリ作用素

$$e^{-ith}, \quad t \in \mathbb{R}$$

が存在して、次をみたす：

$$\frac{d}{dt}e^{-ith}\psi = -ihe^{-ith}\psi, \quad \psi \in D(h).$$

ここに、$D(h)$ は h の定義域である。したがって、

$$\psi(t) := e^{-ith}\psi \quad (8)$$

とおくと、磁場中を運動する荷電粒子に対する **Schrödinger 方程式**を得る：

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = \Big\{\frac{1}{2m}(-i\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}} - e\boldsymbol{A}(\mathbf{X}))^2 + e\phi(\mathbf{X})\Big\}\psi(t) \quad (9)$$

また、h の自己共役性によって、この方程式の解は、初期条件 $\psi(0) = \psi$ の下で一意的であることもよく知られている。

次に、運動方程式 (3) がどのように量子化されたかをみよう。このために、

$$\mathbf{q}(t) := e^{ith}\mathbf{q}e^{-ith}, \quad \mathbf{p}(t) := e^{ith}\mathbf{p}e^{-ith} \quad (10)$$

とおくと、**Heisenberg 方程式**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t) = i[h, \mathbf{q}(t)], \quad (11)$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = i[h, \mathbf{p}(t)]$$

を得る。この方程式の解も、h の自己共役性によって、初期条件 $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}$, $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ のもとで一意的である。また、上の式の 2 階微分を計算すると、量子化された荷電粒子の運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{q}(t) = e\Big(\boldsymbol{E}(\mathbf{q}(t)) + \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{B}(\mathbf{q}(t)) - \boldsymbol{B}(\mathbf{q}(t)) \times \boldsymbol{v}(t)\Big)\Big). \quad (12)$$

を得る。ここで、$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{q}(t)$ は、量子化された（作用素になった）ことによって、$\boldsymbol{B}(\mathbf{q}(t))$ と非可換になったことによって、右辺第二項が (3) と異なっている事に注意されたい。

以上まとめると、量子化の手続きは、
(i) CCR(5), (6) を Hilbert 空間上に表現し、それらを形式的に古典的なハミルトニアンに代入して、量子力学のハミルトニアン h を自己共役作用素となるように構成する。
(ii) ハミルトニアン h を用いると、方程式 (9) の解と、Heisenberg 方程式 (11) の解は、一意的に、(8) と (10) によって与えられる。また、後者は、運動方程式 (12) を満たす。

2.2 Maxwell 場の量子化

次に、荷電粒子は量子化されているものと考えて、Maxwell 方程式に従うベクトルポテ

[3] 例えば、コンパクトな台をもつ無限回微分可能な関数の空間 $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

ンシャル $(\boldsymbol{A}, \phi)$ (Maxwell場) の量子化を見ていくことにしよう。この場合も、粒子を量子化したときと同様に、ベクトルポテンシャルとその共役運動量に対して、正準交換関係を要請すればよい。共役運動量を求めるには、ラグランジアンを考えればよい。簡単のため、自由 (Maxwell) 場のラグランジアン $\mathscr{L}_\lambda$ を考える：

$$\mathscr{L}_\lambda = -\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}\Lambda^2$$

ここで、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

である[4]。通常のMaxwell場のラグランジアンは、$\lambda = 0$ の場合であるが、後で $\lambda \neq 0$ の場合を考えるので、ここで導入しておく。このラグランジアンから得られる運動方程式は、

$$\Box A_\mu - (1-\lambda)\partial_\mu \Lambda = 0. \qquad (13)$$

であり、$\lambda = 0$ でMaxwell方程式を満たす。共役運動量は、

$$\pi^\rho := \frac{\partial \mathscr{L}_\lambda}{\partial(\partial_0 A_\rho)} = F^{\rho 0} - \lambda g^{\rho 0}\Lambda. \qquad (14)$$

となる。Maxwell場 $(\boldsymbol{A}, \phi)$ を量子化をするためには、粒子の量子化のときと同様に、時刻 $t = 0$ において、正準交換関係をヒルベルト空間上の作用素として表現すればよい。すなわち、$A_\mu(\boldsymbol{x}) = A_\mu(\boldsymbol{x}, 0)$ と $\pi^\mu(\boldsymbol{x}) = \pi^\mu(\boldsymbol{x}, 0)$ とすると、

$$[A_\rho(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})] = i\delta_\rho^\nu \delta(\boldsymbol{x} - \mathbf{y}) \qquad (15)$$

$$[A_\rho(\boldsymbol{x}), A_\nu(\mathbf{y})] = 0 = [\pi^\rho(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\mathbf{y})] \qquad (16)$$

ここで、δ_ρ^ν はクロネッカーのデルタで、$\delta(\boldsymbol{x}-\mathbf{y})$ は、Diracのデルタ関数である。

[4]相対論的記法を使う。

$$\partial^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu}\partial_\nu, \quad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

ここで、$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ は、対角行列で、

$$g_{jj} = -1,\ j = 1,2,3, \quad g_{00} = 1$$

をみたす

Coulombゲージでの量子化：

$\lambda = 0$ の場合、(14) と $F^{00} = 0$ から直ちにわかるように、$\pi^0 = 0$ となるので、恒等的に

$$[A_0(\boldsymbol{x}), \pi^0(\mathbf{y})] = 0$$

となってしまう。したがって、正準交換関係 (15) を完全に満足するようなベクトルポテンシャルは構成できない。しかし、この事を除けば、うまく量子化を行うことができる事が知られている。実際、Coulombゲージ条件 (1) を課すと、Maxwell方程式 (13) は、

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial_0 A^0 = 0$$

となり、特に、A^0 成分だけを見ると、ポアソン方程式

$$-\Delta A_0 = 0$$

を得るので、結局 $A_0 = 0$ となる。これを、Maxwell方程式に代入すると、

$$\Box A_j = 0, \quad j = 1,2,3, \quad A_0 = 0 \qquad (17)$$

を得る[5]。いまの場合、量子化するのは、実質 $\boldsymbol{A} = (A^1, A^2, A^3)$ だけでよく、交換関係 (15) も $\dot{A}_j = \partial_0 A_j|_{t=0}$ を使って書くと

$$[A_i(\boldsymbol{x}), \dot{A}_j(\mathbf{y})] = i\delta_i^j \delta(\boldsymbol{x} - \mathbf{y}) \qquad (18)$$

$$[A_i(\boldsymbol{x}), A_j(\mathbf{y})] = 0 = [\dot{A}_i(\boldsymbol{x}), \dot{A}_j(\mathbf{y})] \qquad (19)$$

$(i, j = 1,2,3)$ で、それ以外は0となる。以上、Coulombゲージの倍は、波動方程式 (17) を満たすベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を正準交換関係 (18), (19) の表現として構成すればよい。詳細は割愛するが、このような量子化は、よく知られていて、Fock空間というHilbert空間上の作用素（値超関数）として数学的に厳密に定義できる[6]。しかも、Coulombゲージ条件によって、$\boldsymbol{A}$ は実質2成分だけで表すことができる。この事は、電磁場を媒介する光子は、縦波が観測されず、横波しか観測されないという事実と対応している。

[5]相互作用がある場合も同様に考える事ができて、ポアソン方程式は、

$$-\Delta A_0 = \rho$$

となて、古典的に解ける。

[6]Fock空間を用いた量子化の数学的に厳密な詳しい議論は、例えば、[1, 10章] を参照されたい。

$\lambda \neq 0$ の場合の量子化：

$\lambda = 0$ では、正準交換関係が完全に満たされないことを除いては、量子化がうまくいく事をみた。では、正準交換関係を完全に満足するようにできないか。これは $\lambda \neq 0$ とするとよい。この場合、(14) によって、$\pi^0 = -\lambda\Lambda$ となる.

以下、簡単のため、$\lambda = 1$ の場合だけを考えよう。この場合、正準交換関係を $\dot{A}_\mu = \partial_0 A_\mu|_{t=0}$ を使って書くと、

$$[A_\mu(\boldsymbol{x}), \dot{A}_\nu(\mathbf{y})] = -ig_{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}), \qquad (20)$$
$$[A_\mu(\boldsymbol{x}), A_\nu(\mathbf{y})] = 0 = [\dot{A}_\mu(\boldsymbol{x}), \dot{A}_\nu(\mathbf{y})] \qquad (21)$$

となり[7]、Maxwell 方程式 (13) は、波動方程式

$$\Box A_\mu = 0 \qquad (22)$$

となる[8]。こうして、$\pi^0 \neq 0$ となるようにして、新しい交換関係を得ることができたが、Coulomb ゲージのときに得られた (18) との相違点は、

$$[A_j(\boldsymbol{x}), \dot{A}_j(\mathbf{y})] = i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}), \quad j = 1,2,3,$$
$$[A_0(\boldsymbol{x}), \dot{A}_0(\mathbf{y})] = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}),$$

という交換関係の符号である。この交換関係の符号の違いによって、状態空間に不定計量が導入されることになる。この点を次節で見ていこう。

[7]一般の $\lambda \neq 0$ に対しては、正準交換関係

$$[\dot{A}_\rho(x,t), A_\nu(y,t)] = ig_{\rho\nu}\left(1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}g_{\rho 0}\right)\delta^3(x-y)$$
$$[A_\rho(x,t), A_\nu(y,t)] = 0$$
$$[\dot{A}_i(x,t), \dot{A}_j(y,t)] = [\dot{A}_0(x,t), \dot{A}_0(y,t)] = 0$$
$$[\dot{A}_0(x,t), \dot{A}_i(y,t)] = i\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(x-y)$$

を得る。λ が互いに異なる理論は、互いに同値にはなり得ないことに注意されたい。したがって、一般の $\lambda \neq 0$ に対して、どうのようにして数学的に厳密に量子化できるか、またできたとして、$\lambda = 1$ の場合とどう違うかを比較する事は興味である問題のひとつである。

[8] この式は、Maxwell 方程式 (13) において、$\Lambda = 0$ としても得られるので、Lorentz ゲージ条件 (2) を課せばよいよいように思われる。しかし、$\pi^0 = -\Lambda = 0$ となって、結局、正準交換関係 (15) に矛盾する。

3 Gupta-Bleuler 形式

3.1 不定計量空間（Ghost の存在）

本節では、前節で得られた交換関係 (20), (21) を使って、量子化がどのように遂行されるべきかを、発見法的に見ていく。これは、スカラー場の量子化[9]を手本にして進めばよいが、光子の偏極ベクトルを用意しておくのが便利である。ここでは、天下り的に交換関係 (20), (21) の表現を構成していくことにする。まず、A_μ, $\dot{A}_\mu$ を Fourier 表示する:

$$A_0(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\boldsymbol{k}}{\sqrt{2(2\pi)^3|\boldsymbol{k}|}} \times \left(a(\boldsymbol{k},0)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k},0)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2(2\pi)^3|\boldsymbol{k}|}} \times \left(a(\boldsymbol{k},l)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger(\boldsymbol{k},l)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \qquad (24)$$

$$\dot{A}_0(\boldsymbol{x}) = i\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{|\boldsymbol{k}|}{2(2\pi)^3}} \times \left(a^\dagger(\boldsymbol{k},0)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - a(\boldsymbol{k},0)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right)$$
$$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) = i\sum_{l=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k})\sqrt{\frac{|\boldsymbol{k}|}{2(2\pi)^3}} \times \left(a^\dagger(\boldsymbol{k},l)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - a(\boldsymbol{k},l)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right)$$

ここで、$\boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k})$ は、偏極ベクトルで次を満たす：

$$\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},$$
$$\boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}^{(l')}(\boldsymbol{k}) = \delta_{ll'}, \quad l,l' = 1,2,3.$$

このとき、正準交換関係は、$a(\boldsymbol{k},\mu)$, $a^\dagger(\boldsymbol{k},\mu)$ を用いると、

$$[a(\boldsymbol{k},\mu), a^\dagger(\boldsymbol{k}',\nu)] = -g_{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \qquad (25)$$
$$[a(\boldsymbol{k},\mu), a(\boldsymbol{k}',\nu)] = 0 = [a^\dagger(\boldsymbol{k},\mu), a^\dagger(\boldsymbol{k}',\nu)] \qquad (26)$$

[9]スカラー場の量子化は、多くの場の量子論の教科書に載っているが、数学的に厳密なものとしては、例えば [1, 9 章] を参照されたい。

$(\mu,\nu=0,1,2,3)$ となる。結局、この交換関係を満たす作用素を構成すればよいことになり、この作用素 $a(\boldsymbol{k},\mu)$, $a^\dagger(\boldsymbol{k},\mu)$ を、それぞれ、消滅作用素、生成作用素と呼ぶ。

場の量子論では、生成・消滅作用素に次のような仮定をおく：

- $a^\dagger(\boldsymbol{k},\mu)$ は、$a(\boldsymbol{k},\mu)$ の共役作用素である：
$$a(\boldsymbol{k},\mu)^\dagger = a^\dagger(\boldsymbol{k},\mu)$$
- 真空状態 Ω が存在する：
$$a(\boldsymbol{k},\mu)\Omega = 0, \quad \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$$
$$\langle\Omega \mid \Omega\rangle = 1$$
ここで、$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ は、状態空間の内積とした。

しかし、これらの仮定と、(25) によって、状態空間は不定計量になってしまう。実際、$f\in L^2(\mathbb{R}^3;dk)$ として、状態ベクトル $\Psi_f := \int_{\mathbb{R}^3} dk f(k)a^\dagger(k;0)\Omega$ を定義すると、

$$\begin{aligned}\langle\Psi_f\mid\Psi_f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3}dk\int_{\mathbb{R}^3}dq\bar{f}(k)f(q)\\ &\quad\times\langle\Omega\mid[a(k;0),a^\dagger(q;0)]\Omega\rangle\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}|f(k)|^2dk<0,\end{aligned}$$

この状態ベクトルが、1節で述べたghostである。後で述べるように、状態空間が不定計量になっても、上の仮定を満たす生成・消滅作用素が定義する事ができる。これを用いれば、A_μ や、ハミルトニアン H を定義することができる。しかし、不定計量空間では、通常の意味での自己共役作用素でなくなってしまうため、系のエネルギーに対応するハミルトニアンのスペクトルが実数の部分集合とは限らず、それによって、系の時間発展を表す作用素 e^{-itH} の存在が明らかではなくなり、存在しても通常の意味でのユニタリ作用素ではないので、確率の保存が成立しない。

質点の量子化された運動方程式 (12) を導出するとき、Heisenberg 方程式 (10) の解 $\mathbf{q}(t)=e^{ith}\mathbf{q}e^{ith}$ を用いた。今の場合、Maxwell 方程式の解 $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ は、少なくとも形式的には、$e^{itH}A(\boldsymbol{x})e^{-itH}$ として得られるはずだが、e^{-itH} の存在が明らかではないので、Heisenberg 方程式の解

$$\frac{d}{dt}A_\mu(\boldsymbol{x},t)=i[H,A_\mu(\boldsymbol{x},t)]$$

を、別な方法で構成しなくてはならないし、一意性も明らかではない。

3.2 Gupta-Bleuler 形式

Gupta-Bleuler 形式のアイディアは、ゲージ条件 (2) を利用して、非物理的な状態であるghostを排除するところにある。しかし、脚注8で述べたように、(2) は、そのままでは、交換関係と矛盾してしまう。そこで、この条件を弱める事を考える。すなわち、物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ を次のように定義する：簡単のため、自由場で考えよう。このとき、(22) より、場 $\Lambda=\partial\cdot A$ は、

$$\Box\Lambda=\partial^\mu\Box A_\mu=0$$

となって、自由な波動方程式に従う[10]。よって、この解 Λ は、次のように分解できる：

$$\begin{aligned}&\Lambda(\boldsymbol{x},t)\\ &=\int_{\mathbb{R}^3}d\boldsymbol{k}\left(b(\boldsymbol{k})e^{-i|\boldsymbol{k}|t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{i|\boldsymbol{k}|t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right)\\ &=\underbrace{\Lambda(\boldsymbol{x},t)^{(+)}}_{\text{正振動部分}}+\underbrace{\Lambda(\boldsymbol{x},t)^{(-)}}_{\text{負振動部分}}.\end{aligned}$$

このとき

$$\mathcal{V}_{\text{phys}}=\{\Psi\mid b(\boldsymbol{k})\Psi=0\}\qquad(27)$$

と定義すると、次の事実が示せる：任意の $\Psi,\Phi\in\mathcal{V}_{\text{phys}}$ に対して、

$$\langle\Psi\mid\partial\cdot A\Phi\rangle=0$$
$$\langle\Psi\mid\Psi\rangle\geq 0.$$

[10] 相互作用場でも同様である。実際、電荷保存則より、

$$\Box\Lambda(\boldsymbol{x},t)=\frac{d}{dt}\rho(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=0$$

と計算できる。したがって、電荷保存則が成り立てば、相互作用があっても以下の議論は成立する。

これらは、物理的空間上では、Lorentz条件が期待値の意味で成立し、物理的空間にghostは存在しないという事を意味している。

実は、自由場の場合は、

$$b(\boldsymbol{k}) \propto a(\boldsymbol{k};3) - a(\boldsymbol{k};0)$$

となって、直ちに $\Omega \in \mathcal{V}_{\rm phys}$ を得るから、$\mathcal{V}_{\rm phys}$ が非自明であることがすぐわかるのだが、相互作用がある場合には、明らかではない。実際、[3] では、物理的空間が、自明な空間、すなわち、

$$\mathcal{V}_{\rm phys} = \{0\}$$

となり得ることが示されている。上の式の意味するところは、物理的な状態が全く存在しないということで、このような理論は全く無意味なものになってしまう。したがって、まず、不定計量の量子電磁場の理論が与えられたとき、いかなる場合に物理的空間が非自明なるかを証明する事が数学的な問題となる。

4 厳密な構成

この節では、(25), (26) を満たす生成・消滅作用素を、実際に定義して、具体的な模型を構成し、物理的空間の非自明性についての結果を述べる。

4.1 Fock空間

まず、生成・消滅作用素が作用する状態空間 $\mathcal{F}$ を、$\mathfrak{h} = \oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3; dk)$ 上の boson Fock 空間で定義しよう：

$$\mathcal{F} \equiv \Gamma(\mathfrak{h}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}$$

ここに、$\otimes_{\rm s}^n$ は、n 次対称テンソル積で、$\otimes_{\rm s}^0 \mathfrak{h} = \mathbb{C}$ とおく。$\mathcal{F}$ の元を、

$$\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}, \quad \Psi^{(n)} \in \bigotimes_{\rm s}^{n} \oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3)$$

のように表す。このとき

$$\Omega := \{\Omega^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}, \quad \Omega^{(n)} = \delta_{n0}$$

を Fock 真空と呼ぶ。この空間は、内積

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi^{(n)}, \Phi^{(n)} \rangle_{\otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}}$$

の下で Hilbert 空間になる[11]。$\mathfrak{h}$ 上の作用素 η を、

$$\eta : (f_1, f_2, f_3, f_0) \mapsto (f_1, f_2, f_3, -f_0)$$

で定義する。このとき、$\mathcal{F}$ 上の新しい内積

$$\langle \Psi \mid \Phi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi^{(n)}, (\otimes^n \eta) \Phi^{(n)} \rangle_{\otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}}$$

が定義できる。これは、明らかに不定計量となっている。

$\otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}$ の元 $\Psi^{(n)}$ は、4^n の成分からなる $3n$ 変数の 2 乗可積分関数

$$\Psi^{(n)} = \{\Psi^{(n)}_{\mu_1, \cdots, \mu_n}\}_{\mu_l = 0,1,2,3}$$

と同一視できて、任意の置換 π に対して、

$$\Psi^{(n)}_{\mu_1, \cdots, \mu_n}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) = \Psi^{(n)}_{\mu_{\pi(1)}, \cdots, \mu_{\pi(n)}}(\boldsymbol{k}_{\pi(1)}, \cdots, \boldsymbol{k}_{\pi(n)})$$

を満たす。この同一視を用いて、$\Psi \in \mathcal{F}$ に対して、$a(\boldsymbol{k};\mu)\Psi \in \times_{n=0}^{\infty} \otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}$ を次のように定義する：

$$(a(\boldsymbol{k};\mu)\Psi)^{(n)}_{\mu_1, \cdots, \mu_n}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) = \sqrt{n+1}\, \Psi^{(n+1)}_{\mu, \mu_1, \cdots, \mu_n}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n), \quad \text{a.e.}$$

作用素としての定義域を

$$D(a(\boldsymbol{k};\mu)) := \Big\{ \Psi \in \mathcal{F} \;\Big|\; a(\mathbf{p};\mu)\Psi \in \mathcal{F},\ \text{a.e.}\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \Big\}$$

とする。定義によって明らかに、

$$a(\boldsymbol{k};\mu)\Omega = 0.$$

さて、$f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ によって均された消滅作用素を

$$a(f;\mu) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{f}(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k};\mu) d\boldsymbol{k}$$

[11] $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}}$ は、$\otimes_{\rm s}^n \mathfrak{h}$ 上の内積。

とする。このとき、生成作用素を

$$a^\dagger(f,\mu) := \begin{cases} -a(f;0)^*, & \mu = 0 \\ a(f;j)^*, & \mu = j = 1,2,3, \end{cases}$$

と定義する。ここで、* は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する Hilbert 空間の共役を意味する。実は、$a^\dagger(f;\mu)$ は、$a(f;\mu)$ の不定計量 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ に関する共役作用素になっている：任意の $\Psi \in D(a^\dagger(f;\mu))$, $\Phi \in D(a(f;\mu))$ に対して、

$$\langle\Psi \mid a(f;\mu)\Phi\rangle = \langle a^\dagger(f;\mu)\Psi \mid \Phi\rangle.$$

$a^\dagger(f;\mu)$ を形式的に、

$$a^\dagger(f;\mu) = \int f(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k};\mu)d\boldsymbol{k}$$

書くと、$a(\boldsymbol{k};\mu)$ と $a^\dagger(\boldsymbol{k};\mu)$ が (25), (21) を満たす事がわかる[12]。

4.2 紫外切断

以上、生成･消滅作用素定義できたので、(23), (24) に生成・消滅作用素を代入して、形式的に、ベクトルポテンシャル $(\boldsymbol{A},\phi)$ を構成することができる。これを、粒子を量子化したときのように、形式的に (7) に代入して、ハミルトニアンを相互作用系の状態空間 $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3;X)\otimes\mathcal{F}$ 上の作用素として定義したいのだが、実は、このままでは作用素として意味をなさない[13]。そこで、紫外切断を導入して、このハミルトニアンに意味を持たせる。そのためには、

$$\phi_\varphi(\mathbf{X}) = \int d\boldsymbol{x}\varphi(\boldsymbol{x}-\mathbf{X})\phi(\boldsymbol{x})$$

などとすればよい[14]。実際、φ を実として、$\chi(\boldsymbol{k}) := |\boldsymbol{k}|^{-1/2}\hat{\varphi}(\boldsymbol{k}) \in L^2(\mathbb{R}^3;d\boldsymbol{k})$ とすると、

$$\phi_\varphi(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[a(e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{X}}\chi;0) + a^\dagger(e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{X}}\chi;0)\right]$$

は、$\mathcal{H}$ 上の作用素として well-defined である。ここで、この作用素は、$\mathcal{H}$ の中で、通常の内積の意味では、対称作用素にすらならない事に注意しよう。$\boldsymbol{A}_\varphi(X)$ も同様に定義できる。こうして、(7) にこれらを代入して、さらに、場の自由エネルギー H_f を加えて[15]、改めて、ハミルトニアン H を

$$H = \frac{1}{2m}(-i\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{X} - e\boldsymbol{A}_\varphi(\mathbf{X}))^2 + e\phi_\varphi(\mathbf{X}) + H_\mathrm{f} \tag{28}$$

で定義すると、$\phi_\varphi(\mathbf{X})$ のために、通常の内積の意味では、対称作用素にすらならない。以上で、ハミルトニアンが定義できる事をみたが、自己共役性がないために、A_μ の時間発展がうまく定義できない。

4.3 双極近似のハミルトニアン

場 A_μ の時間発展を定義するために、ハミルトニアン (28) に双極近似という近似を入れてみる。これは、形式的に $X = 0$ とおく近似である。このとき、ハミルトニアンはやはり、well-defined であるが、これは、粒子の運動量 $\mathbf{p} = -i\boldsymbol{\nabla}$ と可換であるために、$\mathbf{p}$ のスペクトル $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ で分解できる。これを、$H(\mathbf{P})$ とすると、次のようになる：

$$H(P) = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\boldsymbol{A}_\varphi(0))^2 + e\phi_\varphi(0) + H_\mathrm{f} \tag{29}$$

以下、$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ を固定して考える。$H(\mathbf{P})$ は、$\mathcal{F}$ で働く作用素であるが、やはり、通常の内積の意味では対称にならない。しかし、このハミルトニアンに対する Heisenberg の運動方程式は、φ に対する適当な仮定の下で、解くことができる [2]。こうして得られた解は、近似によって、電荷保存則が成り立たない奇妙な模型になっている[16]。

---

[12] 実際は、

$$[a(f,\mu),a^\dagger(g,\nu)] = -g_{\mu\nu}\int \bar{f}(\boldsymbol{k})g(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}$$
$$[a(f,\mu),a(g,\nu)] = 0 = [a^\dagger(f,\mu),a^\dagger(g,\nu)]$$

を得る。この核表示を考える。

[13] これは、生成作用素の核 $a(\boldsymbol{k};\mu)$ が、作用素として定義できないことに起因している。

[14] これは、質点の密度関数 $\delta(\boldsymbol{x}-\mathbf{X})$ を、性質のよい関数 $\varphi(\boldsymbol{x}-\mathbf{X})$ で置き換えたことに対応する。

[15]

$$H_\mathrm{f} := \int d\boldsymbol{k}|\boldsymbol{k}|\left[\sum_j a^\dagger(\boldsymbol{k};j)a(\boldsymbol{k};j) - a^\dagger(\boldsymbol{k};0)a(\boldsymbol{k};0)\right]$$

[16] 実際、ある作用素（値超関数）$A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ が存在して、

$$\Box A_\mu(\boldsymbol{x},t) = j_\mu^{\mathrm{dip}}(\boldsymbol{x},t)$$

4.4 漸近場

次に、上で得られた解 $A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ の漸近場を考えよう。漸近場の定義は割愛するが[17]、φ に対する適当な仮定の下で、漸近場 $A^\pm_\mu(\boldsymbol{x},t)$ の存在も構成的に証明できる。形式的には、$A_\mu(\boldsymbol{x},t)$ が時刻 $t=\pm\infty$ で漸近する自由解である:

$$\Box A^\pm_\mu(\boldsymbol{x},t)=0.$$

したがって、(27) のように、漸近場に対する物理的空間 $\mathcal{V}^\pm_{\rm phys}$ が定義できる[18]。

5 物理的空間の非自明性

φ に対する適当な仮定の下で、次の定理が成り立つ：

定理 1

- $\mathcal{V}^\pm_{\rm phys}\neq\{0\}$
- $\mathcal{V}^\pm$ は、半正定値内積空間である。
- $\mathcal{V}^+_{\rm phys}\neq\mathcal{V}^-_{\rm phys}$

この定理によって、漸近的に物理的な状態の Hilbert 空間が次のようにして構成できる。すなわち、商空間

$$\mathcal{H}^\pm_{\rm phys}=\mathcal{V}^\pm_{\rm phys}/\mathcal{V}^\pm_0$$

によって定義する。ここに、

$$\mathcal{V}^\pm_0:=\{\Psi\in\mathcal{V}^\pm_{\rm phys}\mid\langle\Psi\mid\Psi\rangle=0\}$$

この場合、$\mathcal{H}^\pm_{\rm phys}$ 上では、ハミルトニアンが通常の意味での自己共役作用素となることが示せる。z を、$H(\mathbf{P})$ のレゾルヴェント集合の元とする。このとき、$\mathcal{H}^\pm_{\rm phys}$ 上で定義される、漸近的なハミルトニアンを、

$$H_\pm:=z+\left[\left(H\mid_{\mathcal{V}^\pm_{\rm phsy}}-z\right)^{-1}\right]^{-1}_\pm$$

と定義する。ここに、$\mathcal{V}^\pm_{\rm phys}$ 上の有界作用素 L に対して、$[L]_\pm$ を同値類 $[\Psi]_\pm$ ($\Psi\in\mathcal{V}^\pm_{\rm phys}$) に対して、

$$[L]_\pm[\Psi]_\pm=[L\Psi]_\pm$$

と定義する[19]。このとき、次の定理が証明できる：

定理 2

- $H_\pm$ は下に有界な自己共役作用素であり、唯一つの基底状態を持つ[20]。
- 基底状態エネルギーは、次で与えられる：

$$\frac{p^2}{2m_{\rm eff}}+E_0+E_1$$

ここに、

$$m_{\rm eff}=m+2E_0,$$

$$E_0=\frac{e^2}{2}\|\hat\varphi^2/\omega^2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;dk)},$$

$$E_1=\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\times\frac{e^2s^2\|\hat\varphi/(s^2+\omega^2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;dk)}}{m+e^2\|\hat\varphi/\sqrt{s^2+\omega^2}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;dk)}}ds$$

である。

References

[1] A. Arai, *Fock spaces and quantum fields*, Nippon-Hyouronsya, Tokyo (2000) (in Japanese).

[2] F. Hiroshima, and A. Suzuki, Physical state for nonrelativistic quantum electrodynamics, (2008) prprint: mp_arc 08-144

[3] A. Suzuki, Physical subspace in a model of the quantized electromagnetic field coupled to an external field with an indefinite metric, *J. Math. Phys.* **49** (2008), 042301.

[4] T. Takaesu, On the spectral analysis of quantum electrodynamics with spatial cutoffs. I, (2008) preprint: math-ph, arXiv:0812.3482

のようになるが、$\partial^\mu\cdot j^{\rm dip}_\mu\neq0$ となってしまう。したがって、Gupta-Bleuler 形式が適用できない。

[17] [2] を参照されたい。

[18] 発見法的議論によると、電荷保存則があれば、相互作用場の物理的空間と、漸近場の物理的空間はすべて等しくなるはずである。ところが、今の模型では、近似的に、電荷保存則が成立していない。このことは、定理 1 に現れている。

[19] この定義が well-defined であるためには、$\left(H\mid_{\mathcal{V}^\pm_{\rm phsy}}-z\right)^{-1}\mathcal{V}^\pm_0\subset\mathcal{V}^\pm_0$ であればよいが、これは、適当な z について証明できる。また、$H_\pm$ の右辺が、そのような z の選び方に依らない事も証明できる。

[20] スペクトルの下限が固有値で、その多重度は 1 である。

「特性曲線による非可換な２つの形式的微分同相写像の関係式の存在定理」

柳井 佳奈 (お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科)

1 導入

正三角形や正四面体などの対称性をもつ図形をそれ自身に重ねる回転全体の集合を数学的に定式化したものに「群」という概念がある．次は群の定義である．

定義 1.1. 空集合でない集合 G に演算 $\cdot$ があり，次の性質をもつとき，$(G,\cdot)$ を群であるという．

1. ある元 e があり，G のすべての元 g に対して，$g\cdot e=e\cdot g=g$ が成り立つ (e を「単位元」という).
2. G のすべての元 g に対して，$g\cdot h=h\cdot g=e$ となる G の元 h がある (h を g の「逆元」といい，g^{-1} と書く).
3. 結合法則 $(g\cdot h)\cdot f=g\cdot(h\cdot f)$ が成り立つ．

群の元の間には，「関係式」が成り立つことがある．それは，群のいくつかの元を適当な順番に演算したもの W が単位元に等しくなる，という式のことである：$W=e$. W は「語」と呼ばれる．$a\cdot a^{-1}=e$ のように明らかに成り立つものは，自明な関係式といわれる．

さて，次のような形の無限ベキ級数を考える．

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,a_1\neq 0. \quad (1)$$

ここで，$a_1,a_2,\ldots$ は複素数，z は複素変数を表す．(1) の形の無限和は，収束するか収束しない．収束するとき，(1) は複素数平面の原点のある近傍で定義される複素正則関数を表し，それを原点を固定する複素微分同相写像の芽と呼ぶ．収束するかしないかを気にせず，ただ単に (1) の形のものを形式的な微分同相写像と呼ぶ．形式的な微分同相写像の全体は，群をなす．それを $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ で表記する．合成 $\circ$: $(f\circ g)(z)=f(g(z))$ がこの群の演算である．原点を固定する複素微分同相写像の芽の全体は $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ の部分群であり，$\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ と書かれる．群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ または $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ の単位元は，$\mathrm{id}:\mathrm{id}(z)=z$ であり，$f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$ の逆元は $f^{-1}(z)=\frac{1}{a_1}z+*z^2+\cdots$ である．群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ (または $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$) を，原点を固定する複素微分同相群 (または形式的な複素微分同相群) と呼ぶ．

群 $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ または $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ のある 2 元 f,g によって生成される部分群の関係式について，お茶の水女子大学の中居功氏と共同研究した成果 [4] の概要を述べたい．

2 ケーリー図形と特性曲線

定義 2.1. 実平面 $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ に次のような 4 種類の単位ベクトルを考える:

1. x 軸に平行な正の方向の単位ベクトル H,
2. y 軸に平行な正の方向の単位ベクトル V,
3. x 軸に平行な負の向きの単位ベクトル H^{-1},
4. y 軸に平行な負の向きの単位ベクトル V^{-1}.

これらをつないでできる連続な折れ線を「ケーリー図形」と呼ぶ．

ケーリー図形は一般に

$$\gamma=H^{m_1}*V^{m_2}*H^{m_3}*V^{m_4}*\cdots*H^{m_{2l-1}}*V^{m_{2l}}, \quad (2)$$

m_i は整数，によって表される．$*$ はベクトルを (終点と始点で) つなげることを表す．このケーリー図形に対して，$\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ のある元 f と g の語

$$g^{m_{2l}}\circ f^{m_{2l-1}}\circ\cdots\circ g^{m_4}\circ f^{m_3}\circ g^{m_2}\circ f^{m_1}, \quad (3)$$

を対応させる (合成の向きに注意せよ)．この語は，γ に対応する語なので $W_\gamma(f,g)$ と書く．以下，ケーリー図形の始点は原点とする．また，終点と始点がともに原点であるケーリー図形を閉じたケーリー図形という．

定義 2.2. (巻き数関数が恒等的に 0 でない) 閉じたケーリー図形 γ に対して次のように「特性曲線」と「k-特性曲線」を定義する.

$$C_\gamma := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \rho_{ij}(\gamma) x^i y^j = 0\},$$

$$C_\gamma^k := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \rho_{ij}(\gamma) x^{ik} y^{jk} = 0\}.$$

ここで $\rho_{ij}(\gamma)$ は単位正方領域 $(i,i+1)\times(j,j+1)$ における「巻き数」を表す. また,

$$P_\gamma(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \rho_{ij}(\gamma) x^i y^j$$

とする.

ケーリー図形 γ が一つ与えられると, それに対して f,g の語 $W_\gamma(f,g)$ がただ一つ対応する. 特性曲線が一つ与えられると, その係数を巻き数にもつような閉じたケーリー図形が巻き方の自由性のため無限個対応する, よって, 無限個の f,g の語が対応する.

定義 2.3. 閉じたケーリー図形 γ に対して, $Area(\gamma), G(\gamma), M(\gamma)$ を次で定義する.

$$Area(\gamma) := \iint_D \rho dx \wedge dy,$$
$$G(\gamma) := (\iint_D \rho x\ dx \wedge dy, \iint_D \rho y\ dx \wedge dy),$$
$$M(\gamma) := \begin{pmatrix} \iint_D \rho x^2 dx \wedge dy & \iint_D \rho xy dx \wedge dy \\ \iint_D \rho xy dx \wedge dy & \iint_D \rho y^2 dx \wedge dy \end{pmatrix}.$$

ここで D は γ の巻き数関数 $\rho = \rho(\gamma)$ のサポートを表す.

γ に付随する上記の量と特性曲線 C_γ とは次のような関係がある.

命題 2.1.

$$Area(\gamma) = 0 \Leftrightarrow C_\gamma \text{が } (1,1) \text{ を通る},$$

$Area(\gamma) = 0$ ならば,

$$G(\gamma) = grad\, P_\gamma(1,1) = (\partial_x P_\gamma(1,1), \partial_y P_\gamma(1,1)),$$

よって, このとき, $G(\gamma)$ が 0 ベクトルでないかあるかに従って, C_γ は $(1,1)$ において滑らかであるか特異点を持つ. また, $Area(\gamma) = 0$ のとき,

$$G(\gamma) \neq 0, A_2 \cdot G(\gamma) = 0$$
$$\Leftrightarrow A_2 \text{は } (1,1) \text{ で } C_\gamma \text{に接する},$$
$$G(\gamma) \neq 0, Moment_2(\gamma) = 0$$
$$\Leftrightarrow A_2 \text{は } (1,1) \text{ で } C_\gamma \text{の接錐に含まれる},$$
$$G(\gamma) = 0, \det M(\gamma) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow C_\gamma \text{は } (1,1) \text{ で通常 2 重特異点を持つ},$$
$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_\gamma(1,1) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P_\gamma(1,1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P_\gamma(1,1) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_\gamma(1,1) \end{pmatrix},$$
$$\bmod Area(\gamma), G(\gamma).$$

ここで $A_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$,

$$A_2 \cdot G(\gamma) = a_2 \iint_D \rho x\ dx \wedge dy + b_2 \iint_D \rho y\ dx \wedge dy.$$

3 主定理

以下, 閉じたケーリー図形 γ に対して関係式

$$W_\gamma(f,g) = \mathrm{id}$$

を f,g の方程式と考え, その解 (f,g) が存在するかどうかについて考察する. γ は閉じているので, もしある f,g に対して $f \circ g = g \circ f$ ならば, f,g はこの関係式の解である. つまり, この関係式は常に可換な f,g を解に持つ.

$\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ の 2 元 f,g のペア (f,g) が「初等的」であるとは, ある $k \geq 1$ とある $\phi \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)$ があって, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ と $\phi^{-1} \circ g \circ \phi$ の両方が $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ の部分群

$$\mathbb{Z}_k \times \mathbb{C} \quad \text{または} \quad \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

(直積は実はどちらも半直積である) に含まれるときにいう. 前者の群の元は,

$$\alpha e^{t\chi},\ \alpha \in \mathbb{Z}_k,\ t \in \mathbb{C},\ \chi = \frac{z^{k+1}}{1+z^k} \frac{\partial}{\partial z}, k \geq 1$$

という形であり, この群を次数 k, 留数 1 の初等的群と呼ぶ. 後者の群の元は

$$\beta e^{t\chi},\ \beta \in \mathbb{C}^*,\ t \in \mathbb{C},\ \chi = z^{k+1} \frac{\partial}{\partial z}, k \geq 0$$

という形であり, この群を次数 k, 留数 0 の初等的群と呼ぶ. ベクトル場 χ に対して $e^{t\chi}$ はその time-t の写像を表す. 前者の群は可換群であり, 後者の群は非可換群である. ペア (f,g) が「可換」とは, $f\circ g = g\circ f$ のときにいう. 実は, (f,g) が初等的でなければ, (f,g) は非可換なペアである.

定理 3.1. γ を閉じたケーリー図形, C_γ^k をその $k-$ 特性曲線とする. α,β を, どちらかがすべての $k = 1,2,\ldots$ に対して 1 の k 乗根でないような, 0 でない複素数とする. このとき $W_\gamma(f,g) = id$ の $(f'(0),g'(0)) = (\alpha,\beta)$ であるような解 (f,g) について次が成り立つ.

1. すべての $k = 1,2,\ldots$ に対して $(\alpha,\beta)\notin C_\gamma^k$ ならば, 解は存在し, すべて $(\alpha z,\beta z)$ に共役である.
2. ある l に対して, $(\alpha,\beta)\in C_\gamma^l$ であり, $k\neq l$ に対して $(\alpha,\beta)\notin C_\gamma^k$ ならば, 次数 l, 留数 0 の初等的な解が存在する.
3. 有限個の異なる k に対して $(\alpha,\beta)\in C_\gamma^k$ ならば, 初等的でない形式解が存在する.

定義 3.1. γ を閉じたケーリー図形とする. $\rho(\gamma)$ を γ の巻き数関数とする. ある線形関数 $K_2 = a_2x + b_2y$ に対して,

$$Moment_p(\gamma) := \iint \rho(\gamma){K_2}^p dx\wedge dy$$

とする. このとき, γ が ((a_2,b_2) に関して) 「モーメント条件」を満たすとは,

$$Moment_0(\gamma) = \cdots = Moment_{p-1}(\gamma) = 0,$$
$$Moment_p(\gamma)\neq 0$$

となるような $p\geq 2$ があるときにいう.

定理 3.2. γ をその特性曲線 C_γ が $(1,1)$ で滑らかであるような閉じたケーリー図形とする. a_2,b_2 をともに 0 でない ($(a_2,b_2)\neq(0,0)$) 複素数とする. このとき $W_\gamma(f,g) = id$ の

$$(f'(0),g'(0)) = (1,1),\ (f''(0),g''(0)) = k(a_2,b_2),$$

k は 0 でない任意定数, であるような解 (f,g) について次が成り立つ.

1. (a_2,b_2) が $(1,1)$ で C_γ に接しないならば, 解は存在し, すべて可換である.
2. (a_2,b_2) が $(1,1)$ で C_γ に接し, γ がモーメント条件を満たさないならば, 解は存在し, すべて可換である.
3. (a_2,b_2) が $(1,1)$ で C_γ に接し, γ がある $p\geq 2$ に対してモーメント条件を満たすならば, 初等的でない形式解 (f,g) が存在する.

定理 3.3. γ をその特性曲線 C_γ が $(1,1)$ で通常 2 重 (特異) 点を持つような閉じたケーリー図形とする. a_2,b_2 をともに 0 でない複素数とする. このとき $W_\gamma(f,g) = id$ の

$$(f'(0),g'(0)) = (1,1),\ (f''(0),g''(0)) = k(a_2,b_2),$$

k は 0 でない任意定数, であるような解 (f,g) について次が成り立つ.

1. (a_2,b_2) が $(1,1)$ で C_γ の接錐に含まれないならば, 解は存在し, すべて可換である.
2. (a_2,b_2) が $(1,1)$ で C_γ の接錐に含まれ, γ がモーメント条件を満たさないならば, 解は存在し, すべて可換である.
3. (a_2,b_2) が $(1,1)$ で C_γ の接錐に含まれ, γ がある $p\geq 3$ に対してモーメント条件を満たすならば, 初等的でない形式解 (f,g) が存在する.

定理 3.2 の *1,2*, 定理 3.3 の *1,2* において, (f,g) は特に $(\exp a_2\chi,\exp b_2\chi)$, $\chi = \frac{z^2}{1+mz}$, $m\in\mathbb{C}$ に形式的に共役である.

また, 次のことも言える.

命題 3.1. γ をその特性曲線 C_γ が $(1,1)$ で通常尖点 ($(2,3)$ 型カスプ) を持つ, つまり, C_γ が $y^2 = x^3$ に微分同相であるような閉じたケーリー図形とする. このとき, $W_\gamma(f,g) = id$ の

$$(f'(0),g'(0)) = (1,1),\ (f''(0),g''(0))\neq(0,0)$$

である解 (f,g) は存在し, すべて可換.

4 主定理の証明

4.1 定理 3.1 の証明の概略

すべての閉じたケーリー図形 γ に対して,

$$W_\gamma(f,g)=\prod_{k=1}^{l} W_k^{-1}\circ\{g,f\}^{m_k}\circ W_k,$$

ここで $m_k\in\{1,-1\},\{g,f\}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ g\circ f$ であり W_k は f,g のある語, という形で表される. このとき, $W_\gamma(f,g)$ の z^k の係数 D_k は

$$\begin{aligned}D_1&=1\\ D_k&=\left(\alpha_k\frac{1-{\beta_1}^{k-1}}{\alpha_1}+\beta_k\frac{{\alpha_1}^{k-1}-1}{\beta_1}\right)\\ &\quad\times P_\gamma({\alpha_1}^{k-1},{\beta_1}^{k-1})+t_k\quad(k\geq 2)\end{aligned}$$

である. ここで, α_k,β_k はそれぞれ f,g の z^k の係数である. また, t_k は $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\beta_1,\ldots,\beta_{k-1}$ のある有理式である.

さて, ${\alpha_1}^k\neq 1,k=1,2,\ldots$ とすると, 線形化定理により, f は線形写像 $\alpha_1 z$ に共役である (つまり, ある ϕ によって $(\phi^{-1}\circ f\circ\phi)(z)=\alpha_1 z$ とできる). よって, 最初から ϕ による共役をとって $f(z)=\alpha_1 z$ としてよい.

$\alpha_1=\alpha,\beta_1=\beta$ としよう. 定理の 1,2,3 の仮定の下, g の係数 $\beta_k,k\geq 2$ を $D_k=0$ $(k=2,3,\ldots)$, つまり関係式

$$W_\gamma(f,g)=\mathrm{id}\tag{4}$$

が成り立つように選べる.

例えば, 1 の場合の証明は以下のようである. $(\alpha,\beta)\notin C_\gamma$ より, $\beta_2=0$ であり, 以下, $\beta_2=\cdots=\beta_{k-1}=0,k\geq 3$ と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}D_l&=0,\quad(2\leq l\leq k-1)\\ D_k&=\beta_k\frac{{\alpha_1}^{k-1}-1}{\beta_1}P_\gamma({\alpha_1}^{k-1},{\beta_1}^{k-1})\end{aligned}$$

である (t_k に部分は消える). $(\alpha,\beta)\notin C_\gamma^{k-1}$ という仮定より, $D_k=0$ であるためには, $\beta_k=0$ であることが必要十分である. よって, k についての帰納法により, $\beta_k=0,k\geq 2$ である. したがって, $f(z)=\alpha z$ に対して, 関係式 (4) が成り立つならば, g もまた線形写像 βz である. □

定理 3.1 では, $(\alpha,\beta)\in C_\gamma^k$ が無限個の異なる k について成り立つ場合は述べていない. この場合は, 上の証明法では分からない.

4.2 定理 3.2 と定理 3.3 の証明の概略

4.2.1 Chacon-Fomenko の定理

正方行列 X に対して, その指数行列 e^X が

$$e^X=I+X+\frac{1}{2}X^2+\cdots+\frac{1}{n}X^n+\cdots,$$

I は単位行列, で定義される. 指数行列の積について, リー群論で次のような Campbell-Baker-Hausdorff の公式が知られている.

$$e^Xe^Y=e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}([X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]])+\cdots},\tag{5}$$

ここで, $[X,Y]=XY-YX$ であり, $[*,*]$ は正方行列のブラケットと呼ばれる. (5) で $\cdots$ の部分も, 漸化式によりその表示がある. これを一般化したものが Chacon と Fomenko により得られた, つまり

$$e^{X_1}e^{X_2}\cdots e^{X_N}=e^{b_N(X_1,\ldots,X_N)}$$

と表したとき, b_N は無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}{c_n}^N$ であり, ${c_n}^N$ の表示が漸化式により与えらた [1].

Chacon と Fomenko は上の公式を, 正方行列に値を持つ関数 $X(t),K(t)$ に対する線形常微分方程式

$$\frac{dX}{dt}=K(t)X(t)$$

の解の表示に応用した [1]. つまり, それは

$$X(t)=e^{L\int_0^t K(s)ds}X(0)$$

で与えられ, ここで,

$$L\int_0^t K(s)ds=H_1[t]+H_2[t]+\cdots$$

であり, $H_n=H_n[t]$ は次の漸化式で与えられる.

$$\begin{aligned}H_1[t]&=\int_0^t K(s)ds\\ (n+1)H_{n+1}[t]&=T_n+\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{2}[H_r,T_{n-r}]\right.\\ &\left.+\sum_{\substack{p\geq 1\\ 2p\leq r}}k_{2p}\sum_{\substack{m_i>0\\ m_1+\cdots+m_{2p}=r}}[H_{m_1},[\cdots,[H_{m_{2p}},T_{n-r}]\ldots]\right).\end{aligned}$$

ここで, $(-1)^{p-1}(2p)!k_{2p} = B_p$ はベルヌーイ数であり,

$$\begin{aligned} T_0 = T_0[t] &= \int_0^t K(s)ds \\ T_k = T_k[t] &= \int\cdots\int_{0\le u_{k+1}\le\cdots\le u_2\le u_1\le t} du_1du_2...du_{k+1} \\ &\quad [\ldots[[K(u_1),K(u_2)],\cdots],K(u_{k+1})]. \end{aligned}$$

これを以下, Chacon-Fomenko の定理と呼ぶ.

4.2.2 Chacon-Fomenko の定理の無限次元アナロジー

さて, 実変数 t の複素数値関数 $z = z(t)$ に関する

$$\frac{dz}{dt} = Xz \tag{6}$$

という形の非線形常微分方程式の解について考える. ここで X は時間に依存する形式的ベクトル場

$$X = X(t) = (a_1(t)z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \cdots)\frac{\partial}{\partial z}$$

であり, 微分方程式の右辺は

$$Xz = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \cdots$$

である. 実は (6) の解は

$$z(t) = e^{L\int_t^0 -X(s)ds}z(0)$$

で与えられる [4]. ここで,

$$L\int_t^0 -X(s)ds = H_1[t] - H_2[t] + -\cdots \tag{7}$$

であり, 右辺の $H_k[t]$ は, Chacon と Fomenko の公式で行列 $K(t)$ の代わりに形式的ベクトル場 $X(t)$ を代入したものである. ここで, ベクトル場のブラケット $[*,*]$ は

$$[\alpha(z)\frac{\partial}{\partial z}, \beta(z)\frac{\partial}{\partial z}] = (\alpha(z)\beta'(z) - \beta(z)\alpha'(z))\frac{\partial}{\partial z},$$

$'$ は z による微分, で与えられる. これは, 上記の形式的ベクトル場 X が

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & & 0 & \\ a_2 & 2a_1 & 0 & & & \\ a_3 & 2a_2 & 3a_1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_n & 2a_{n-1} & 3a_{n-2} & \cdots & na_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ここで $a_1 = a_1(t)$ など, という形の無限行列によって表現される (形式的ベクトル場の高次の項を切り捨てることにより, 有限行列によって表現される) ことから (いくらかの計算の後) 示される.

上の形式的ベクトル場 X に対して, もし $a_1(t) = 0$ ならば, e^X は z の係数が 1 であるような (「id に接する」という) 形式的微分同相写像であり, このとき, (7) は z の 4 次の項から始まる形式的ベクトル場である.

4.2.3 形式的微分同相写像の関係式と微分方程式

ケーリー図形

$$\gamma = V^{m_{2n}} * H^{m_{2n-1}} * \cdots * V^{m_2} * H^{m_1} \tag{8}$$

のパラメータ表示を $\gamma = (x(t), y(t)), 0 \le t \le l = m_1 + m_2 + \cdots + m_{2n}$ とする. l は γ の長さを表す. このとき, 次のような微分方程式を考える.

$$\frac{dz}{dt} = \left(A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt}\right)z, \tag{9}$$

ここで, A, B はそれぞれ

$$\begin{aligned} A &= (a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots)\frac{\partial}{\partial z}, \\ B &= (b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots)\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

$a_i, b_i \in \mathbb{C}$, という形の形式的ベクトル場である.

(9) は, $\gamma = V$ ならば, $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 1$ なので, $\frac{dz}{dt} = Bz$ となり, $\gamma = H$ ならば, $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 0$ なので, $\frac{dz}{dt} = Az$ となる. このとき, 解はそれぞ

れ $e^A z(0), e^B z(0)$ で与えられる. 一般に γ が (8) のとき, (9) の解は

$$e^{m_1 A} \circ e^{m_2 B} \circ \cdots \circ e^{m_{2n-1} A} \circ e^{m_{2n} B} z(0)$$

で与えられる. 一方, 4.2.2 より, (9) の解は

$$e^{L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds})} z(0)$$

で与えられる. よって, 微分方程式の解の一意性により,

$$\begin{aligned} &e^{m_1 A} \circ e^{m_2 B} \circ \cdots \circ e^{m_{2n-1} A} \circ e^{m_{2n} B} \\ &\quad = e^{L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds})} \end{aligned} \tag{10}$$

が従う.

もし,

$$L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds}) = 0 \quad (\text{零ベクトル場})$$

ならば, $e^0 = \mathrm{id}$ なので, このとき, $e^A = f, e^B = g$ とすると, (10) より, id に接する形式的な微分同相写像 f, g の間に関係式

$$f^{m_1} \circ g^{m_2} \circ \cdots \circ f^{m_{2n-1}} \circ g^{m_{2n}} = \mathrm{id} \tag{11}$$

が成り立つ. 左辺は $W_\gamma(f, g)$ である.

4.2.4 $L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds})$ のテイラー係数の計算

4.2.3 の形式的ベクトル場 $L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds})$ は, γ, A, B による. そのテイラー展開を

$$L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds}) = L_4 z^4 + L_5 z^5 + \cdots$$

としよう. このとき, $L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}) = 0$, すなわち $L_k = 0, k = 4, 5, \ldots$ となるような γ, A, B の条件を求めるために, テイラー係数 L_k を具体的に計算する.

計算の簡単のため, ケーリー図形 γ は閉じているとする. (7) により

$$L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds})ds = H_1[l] - H_2[l] + - \cdots \tag{12}$$

であるので, 右辺の $H_k[l]$ を Chacon-Fomenko の定理に戻って, 有限行列 $K(t)$ の部分に形式的ベクトル場

$$A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} = \sum_{k=2}^{\infty} (a_k \frac{dx}{dt} + b_k \frac{dx}{dt}) z^k \frac{\partial}{\partial z}$$

を代入して計算する. まず, γ が閉じているので, $H_1[l] = 0$ である. 次に $H_2[l], H_3[l], \ldots$ と次々に計算する (詳しい計算はここでは省略する). ここで, $H_k[l]$ に含まれる $T_k[l], k = 1, 2, \ldots$ は次に等しい.

$$\begin{aligned} &(-1)^k \sum_{\substack{1 \le i_1, i_2, \cdots, i_{k-1} \\ 1 \le i < j}} \int_\gamma dK_{i_{k-1}} \cdots dK_{i_1} [dK_i, dK_j] \\ &(j-i)(j+i-i_1-1) \cdots (i_{k-2} + \cdots + i_1 \\ &+ j + i - i_{k-1} - k + 1) z^{i+j+i_1+\cdots+i_{k-1}-k} \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{13}$$

ここで $[dK_i, dK_j] = dK_i dK_j - dK_j dK_i$ であり,

$$K_i = a_i x + b_i y, \quad dK_i = a_i dx + b_i dy$$

である. (13) に現れる積分は, Chen の反復積分と呼ばれている [2, 3].

上記の Chen の反復積分の計算と Green の定理により, $L \int_l^0 -(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds})ds$ のテイラー係数 L_k は例えば $\mathrm{Area}(\gamma) = 0$ のとき, 次のようである.

$$L_4 = -\iint_D \rho dK_2 \wedge dK_3 = -|A_2 A_3| Area(\gamma) = 0,$$

$$L_5 = \iint_D \rho K_2 \, dK_2 \wedge dK_3 = 2|A_2 A_3| A_2 \cdot G(\gamma),$$

$$L_6 = \iint_D \rho(K_3 + 3{K_2}^2) \, dK_2 \wedge dK_3 \quad \mathrm{mod}\ A_2 \cdot G(\gamma),$$

$$L_7 = 4 \iint_D \rho({K_2}^3 + K_2 K_3) \, dK_2 \wedge dK_3 \quad \mathrm{mod}\ A_2 \cdot G(\gamma), \ \iint_D \rho(K_3 + 3{K_2}^2) dx \wedge dy.$$

一般に $k \ge 8$ に対して

$$\begin{aligned} L_k &= -\frac{1}{6}(k-7)(k^2 - 11k + 36) \\ &\times \iint_D \rho K_{k-3} dK_2 \wedge dK_3, \quad \mathrm{mod}\ A_2 \cdot G(\gamma), \\ &\iint_D \rho(K_3 - 3K_2^2) \, dx \wedge dy, R_k(K_2, K_3, \ldots, K_{k-4}). \end{aligned}$$

関係式 (11) が存在するためには, 上記の $L_4, L_5, \ldots$ が全て 0 であればよい.

(さらに詳細な計算結果により) 定理の仮定の下, $L_k, k \geq 4$ が全て 0 になるように帰納的に A, B の係数を選ぶことができる. また, そのとき f, g が結論のようであることが従う ([4]). □

5 例

主定理の仮定を満たすような閉じたケーリー図形を構成することにより, $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ の非可換な 2 元 f, g の間に成り立つ関係式の例を挙げることができる.

5.1 定理 3.1 の例

特性曲線が

$$C_{\gamma_1} : (x-2)(x-4) = 0$$

である γ_1 を考える. γ_1 の巻き数関数のサポートは図 1. のようである. 正方領域に書かれた数

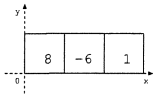


図 1: γ_1 の巻き数

は, γ_1 がその正方形の周囲を回る数, つまりその正方領域における巻き数である. 例えば語

$$\{g, f\}^3 \circ \{f, \{g, f\}\}^4 \circ \{f, \{f, \{g, f\}\}\} \quad (14)$$

は, そのような γ_1 に対応する. 例えば,

$$(1,2) \notin C^k_{\gamma_1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$(-2,1) \in C^2_{\gamma_1}, \quad (-2,1) \notin C^k_{\gamma_1}, \quad k \neq 2$$
$$(2,1) \in C_{\gamma_1} \cup C^2_{\gamma_1}, \quad (2,1) \notin C^k_{\gamma_1}, \quad k \neq 1, 2$$

なので, 定理 3.1 より (14) の語 $=$ id という関係式の $(f'(0), g'(0)) = (1,2)$ であるような解が存在し, すべて $(z, 2z)$ に共役であり, また $(f'(0), g'(0)) = (-2,1)$ であるような解が存在し, すべて初等的であり, さらに $(f'(0), g'(0)) = (2,1)$ である初等的でない形式解が存在する.

5.2 定理 3.2 の例

特性曲線が,

$$C_{\gamma_2} : xy - 1 = 0$$

である γ_2 を考える. この C_{γ_2} のグラフは, $(1,1)$ を通る双曲線であり, $(1,1)$ における接ベクトルは $(1,-1)$ である. このとき,

$$\iint_D \rho(x-y)^n dx \wedge dy = 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

なので, モーメント条件が成り立たない. よって, 定理 3.2 の *1, 2* よりこの γ_2 に対応する語の, $(f'(0), g'(0)) = (1,1), (f''(0), g''(0)) \neq (0,0)$ という解は存在し, すべて可換である.

問: 特性曲線 C_γ が $(1,1)$ を通り,$(1,1)$ で滑らかで, $(1,1)$ における接ベクトル (a_2, b_2) に関してモーメント条件が成り立たないような γ の巻き数関数 (よって C_γ) を決定せよ.

特性曲線が,

$$C_{\gamma_3} : y - 1 - (x-1)^2 = 0$$

である γ_3 を考える. この C_{γ_3} のグラフは, $(1,1)$ を頂点にもつような放物線であり, $(1,1)$ における接ベクトルは $(1,0)$ である. γ_3 の巻き数関数のサポートは図 2 のようである. 例えば語

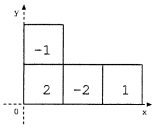


図 2: γ_3 の巻き数

$$\{f, \{f, \{f, g\}\}\}^{-1} \circ \{g, \{g, f\}\} \quad (15)$$

は, そのような γ_3 に対応する.

$$\iint_D \rho x^2 dx \wedge dy = 2 \neq 0$$

なので, モーメント条件を満たす. よって, 定理 3.2 の *1,3* より (15) の語 $=$ id という関係式の

$$(f'(0), g'(0)) = (1,1), \ (f''(0), g''(0)) \neq k(1,0),$$

であるような解 (f, g) は存在し, すべて可換であり, また

$$(f'(0), g'(0)) = (1,1), \ (f''(0), g''(0)) = k(1,0),$$

であるような初等的でない解が存在する.

5.3 定理 3.3 の例

特性曲線が,

$$C_{\gamma_4} : 1 - 2x + 2x^2y - x^2y^2 = 0$$

である γ_4 を考える. C_{γ_4} のグラフと γ_4 の巻き数関数のサポートは図 3 のようである. C_{γ_4} の $(1,1)$ における接錐は $y = x$ と $y = -x+2$ である. 例えば語

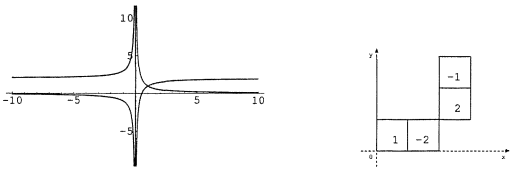


図 3: C_{γ_4} のグラフと γ_4 の巻き数

$$g^{-1} \circ f^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ \{g, f\} \circ \{f^{-1}, g^{-1}\} \circ g^{-1} \circ \{f, g\} \circ f^{-1} \circ g \circ f^2 \circ g \circ f \qquad (16)$$

はそのような γ_4 に対応する.

$$\iint_D \rho(x-y)^n dx \wedge dy = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

なので, $(1,-1)$ に関してモーメント条件を満たさない. また

$$\iint_D \rho(x+y)^3 dx \wedge dy = -6 \neq 0$$

なので, $(1,1)$ に関してモーメント条件を満たす. したがって, 定理 3.3 より, (16) の語 $=$ id という関係式の

$$(f'(0), g'(0)) = (1,1),\ (f''(0), g''(0)) \neq k(1,1),$$

k は任意定数, であるような解 (f, g) は存在し, すべて可換であり,

$$(f'(0), g'(0)) = (1,1),\ (f''(0), g''(0)) = k(1,1),$$

であるような初等的でない解が存在する.

注意 5.1. *[5, 6]* では, $(1,1)$ に通常 2 重点を持つ曲線で, その接錐に含まれるベクトル (a_2, b_2) (接錐に含まれるベクトルは 2 つあるが, そのどちらか) に関して, (その曲線を特性曲線に持つようなケーリー図形 γ が) モーメント条件を満たすようなものが, 特に巻き数関数 $\rho = \rho(\gamma)$ のサポートが 4 つの連結な単位正方形であるときに見つけられ, そういう曲線は巻き数関数の値もこめたサポートの図形の合同と鏡映を法として, 次の 6 つしかないことが数え上げの方法により示された.

i. $1 - 2x + 2x^2y - x^2y^2 = 0$

ii. $2y - 4xy + x^2 + x^2y^2 = 0$

iii. $-2 + 3x + xy^2 - 2x^2y = 0$

iv. $x + y - 3xy + x^2y^2 = 0$

v. $2 - 2x - y + x^2y = 0$

vi. $y - 3x + 3x^2 - x^3y = 0$

参考文献

[1] R. V. Chacon and A. T. Fomenko, *Recursion formulas for the Lie integral,* Adv. Math. **88** (1991), no.2, 200–257.

[2] K. T. Chen, *Iterated path integrals,* Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 831-879.

[3] R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles,* Ann. of Math.(2) **68** (1958), 210-220.

[4] I. Nakai and K. Yanai, *Relations of formal diffeomorphisms and the center problem,* preprint.

[5] K. Yanai, *Classification of connected palette diagrams without area and moment to find relations of formal diffeomorphisms,* Natural Science Report, Vol. 56, No. 2, Ochanomizu University (2005), 1-20.

[6] K. Yanai, *A remark on classification of connected palette diagrams without area and moment,* Natural Science Report, Vol. 57, No. 1, Ochanomizu University (2006), 31-35.

Large deviation and the tangent cone at infinity of a covering graph with the transformation group of polynomial volume growth

田中亮吉*
京都大学大学院理学研究科

ここでは、離散的な距離空間の上の確率過程と、その空間の幾何学的性質との関係を調べる、という試みの一例を紹介する。例えば、正方格子の上のランダム・ウォークを時間無限大まで追っていったとき、その振る舞いは、格子の各辺の長さを一様に縮めていったときに現れる空間の上の確率過程、と捉えることが出来る。ここで、「格子の各辺の長さを一様に縮めていったときに現れる空間」は、正方格子の Gromov-Hausdorff 極限として現れる空間である。本稿では、ある種の無限離散群（べき零群）の作用のある無限グラフの場合に、極限として現れる空間の距離構造と、もともとのグラフの上の確率過程の振る舞いとの関係について、筆者の結果を紹介する。

$X=(V,E)$ を無限グラフとする。ここで V は頂点の集合で、E は全ての向き付けられた辺の集合とする。Γ を有限生成の torsion free のべき零群とし、Γ が X に自由に作用していて、$\Gamma\backslash X = X_0 = (V_0, E_0)$ は有限グラフ、という状況を考える。例としては、X は結晶格子、Heisenberg 群の Cayley グラフ、体積が多項式増大度を持つ離散群の Cayley グラフ、などが考えられる。

X_0 上のある正の推移確率から定まるランダム・ウォーク $(\Omega_{x_0}(X_0), P_{x_0}, \{w_n\}_{n=0}^{\infty})$ を考える。（ランダム・ウォークは対称とは限らない）。ここで、$\Omega_{x_0}(X_0)$ は X_0 のある $x_0 \in X_0$ を始点とする infinite path $c=(e_1, e_2, ..., e_n, ...)$, $(e_i \in E_0)$ の集合、P_{x_0} は $\Omega_{x_0}(X_0)$ 上の確率測度、$\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ は確率変数の列で、各 w_n は $c \in \Omega_{x_0}(X_0)$ に対して、n 番目の辺の終点を対応させる写像である。今、X は X_0 の被覆グラフになっているので、この被覆写像により x_0 に落ちる X の点 x を固定し、$(\Omega_{x_0}(X_0), P_{x_0}, \{w_n\}_{n=0}^{\infty})$ の X への持ち上げを $(\Omega_x(X), P_x, \{w_n\}_{n=0}^{\infty})$ と書くことにする。これから考えたいのは、この X 上の Γ-periodic なランダム・ウォークである。

ここで得られた X 上のランダム・ウォーク $(\Omega_x(X), P_x, \{w_n\}_{n=0}^{\infty})$ をある連続的な空間に埋め込むことを考える。その「連続的な空間」とは Lie 群である。

定理 1 (Malćev). 有限生成 *torsion free* べき零群 Γ に対して、連結かつ単連結なべき零

* *E-mail address*: rtanaka@math.kyoto-u.ac.jp

Lie 群 G で、Γ は G の余コンパクトな部分群として埋め込むことが出来るようなものが、同型を除いてただ一つ存在する。

頂点を埋め込む写像 $\Phi : X \to G$ で $\Phi(x) = 1$、(1 は G の単位元)、かつ Γ 同変なものを任意に取る。$\xi_n := \Phi \circ w_n$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ とおくことで、G-値 ランダム・ウォーク $(\Omega_x(X), P_x, \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty})$ を得る。

$\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ をスケールしたものを考えることにする。すなわち、dilation map と呼ばれる写像 $\delta_{1/n} : G \to G$ を合成した $(\Omega_x(X), P_x, \{\delta_{1/n}\xi_n\}_{n=0}^{\infty})$ を考える。(dilation map は $G \cong \mathbb{R}^d$ のとき、つまり G が可換群のとき、$\delta_{1/n} = 1/n$ に一致している)。

定理 2. G-値 $\{\delta_{1/n}\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **は大偏差原理** (*Large deviation principle*) **を満たす。すなわち、ある下半連続な関数** $I : G \to [0, \infty]$ **が存在して次をみたす** :

$$
\begin{aligned}
-\inf_{z \in intA} I(z) &\leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_x(\delta_{1/n}\xi_n \in A) \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_x(\delta_{1/n}\xi_n \in A) \leq -\inf_{z \in \overline{A}} I(z),
\end{aligned}
$$

A **は** G **の任意の** *Borel* **集合。**

評価に現れる関数 $I : G \to [0, \infty]$ は速度関数 (rate function) と呼ばれる。

G から定まる次数付きべき零 Lie 群を G_∞ とおくと、G_∞ には G への自然な微分同相写像 $h : G \to G_\infty$ が存在する。(これは Lie 群として同型になるとは限らない)。このとき、contraction principle により G_∞-値 $\{\delta_{1/n}h(\xi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ も大偏差原理を満たすことが分かる。この場合の速度関数は $I_\infty(z) = I(h^{-1}(z)), z \in G_\infty$ である。速度関数が有限である領域 $D_{I_\infty} := \{z \in G_\infty : I_\infty(z) < \infty\}$ を構成する点は、今の状況では、ある N が存在して $n \geq N$ となる全ての n で、$\delta_{1/n}h(\xi_n)$ がある正の確率で十分近くに存在するような点である。次の定理が成り立つ。

定理 3. $D_{I_\infty} = \{z \in G_\infty : d_\infty(1, z) \leq 1\}$.

ここで d_∞ **は** G_∞ **上の** *Carnot-Carathéodory* **距離である。**

上記の定理で Carnot-Carathéodory 距離が出てきた背後には、次の幾何的な定理がある。これは Pansu による定理の特別な場合である。

定理 4.

$$\lim_{\epsilon \to 0}(X, \epsilon d, x) = (G_\infty, d_\infty, 1)$$

収束は基点付き *Gromov-Hausdorff* **収束による。**

d は X 上のグラフ距離である。D_∞ の Carnot-Carathéodory 距離による幾何的な特徴付けにより、ランダム・ウォークの時間スケーリング $\delta_{1/n}$ が空間スケーリングとして現れてきている、と捉えることが出来る。

参考文献

[1] Ishiwata, S.: A central limit theorem on a covering graph with a transformation group of polynomial growth. *J. Math. Soc. Japan* **55** No.3, (2003), 837-853.

[2] Kotani, M., Sunada, T.: Large deviation and the tangent cone at infinity of a crystal lattice. *Math.Z.* **254** (2006), 837-870.

[3] 小谷元子: 結晶格子を通してみる離散幾何解析、数学 第 54 巻 第 4 号 2002 年 10 月秋季号、348-364.

[4] Pansu, P.: Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **3** (1983), 415-445.

[5] Tanaka, R.: Large deviation on a covering graph with group of polynomial growth, *preprint.*

Rotation number approach to spectral analysis of the generalized Kronig-Penney Hamiltonians

(一般化されたクローニッヒ・ペニーハミルトニアンの回転数によるスペクトル解析)

首都大学東京 大学院 理工学研究科 数理情報科学専攻 /日本学術振興会 特別研究員 DC2 数物系科学　新國裕昭

当該研究においては，周期的な点相互作用に従う 1 次元 Schrödinger 作用素のスペクトルについて考察を行う. R. Kronig, W. Penney は 1931 年に自由粒子のハミルトニアン $-d^2/dx^2$ に対して, 次のような超関数の摂動を与えた ([7] 参照).

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta(x-2\pi k) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbf{R}), \quad \beta \in \mathbf{R}\setminus\{\mathbf{0}\}.$$

ここで, $\delta(\cdot)$ は原点にサポートを持つ Dirac のデルタ関数である. 作用素 L_1 は, Kronig–Penney Hamiltonian と呼ばれ, 結晶内の電子のハミルトニアンのひとつである ([6] 参照). この作用素は, 格子 $2\pi\mathbf{Z}$ 上の境界条件を用いて次のように定義される.

$$(L_1 y)(x) = -\frac{d^2}{dx^2} y(x), \quad x \in \mathbf{R}\setminus 2\pi\mathbf{Z},$$

$$\mathrm{Dom}(L_1) = \left\{ y \in H^2(\mathbf{R}\setminus 2\pi\mathbf{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} y(x+0) \\ \frac{dy}{dx}(x+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x-0) \\ \frac{dy}{dx}(x-0) \end{pmatrix}, \quad x \in 2\pi\mathbf{Z} \right\}.$$

本研究では, 一般化された Kronig–Penney Hamiltonian について考察する. 自然数 n に対して，$(0, 2\pi)$ の n 分割を $0 = \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_{n+1} = 2\pi$ で与える. $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\Gamma_j = \{\kappa_j\} + 2\pi\mathbf{Z}$ とし，$\Gamma = \cup_{j=1}^n \Gamma_j$ とおく. $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \mathbf{R}$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in SL(2, \mathbf{R})$ に対して，$L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素 $H = H(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を次で定義する.

$$(Hy)(x) = -\frac{d^2}{dx^2} y(x), \quad x \in \mathbf{R}\setminus\Gamma,$$

$$\mathrm{Dom}(H) = \left\{ y \in H^2(\mathbf{R}\setminus\Gamma) \;\middle|\; \begin{array}{c} \begin{pmatrix} y(x+0) \\ \frac{dy}{dx}(x+0) \end{pmatrix} = e^{i\theta_j} A_j \begin{pmatrix} y(x-0) \\ \frac{dy}{dx}(x-0) \end{pmatrix}, \\ x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

作用素 H を一般化された Kronig–Penney Hamiltonian と呼ぶ. 一般化された Kronig-Penney Hamiltonian は R. J. Hughes [4] によって導入された ([1, 2, 12] も参照). H は自己共役作用素である. また, ポテンシャルの周期性と Floquet–Bloch の定理より，H のスペクトルはバンド構造を持つ. すなわち，$\sigma(H)$ は内点を共有しない可算無限個の有界閉区間（バンド）の和集合として表される. 自然数 j に対して，$\sigma(H)$ の下から数えて j 番目のバンドを $B_j = [\lambda_{2j-2}, \lambda_{2j-1}]$ と書く. このとき, B_j と B_{j+1} は開区間または空集合によって隔てられている. その隙間を G_j で表し，j 番目のスペクトラルギャップと呼ぶ. 本研究では，次の目的のため研究を行った.

(I) バンド端を回転数によって特徴付ける.

(II) 与えられた自然数 j に対して，G_j が空か非空かを判定する.

初めに，(I) の概要について述べる. H に対応する回転数は以下で定義される. $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して，方程式

$$-\frac{d^2y}{dx^2}(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \Gamma, \tag{0.1}$$

$$\begin{pmatrix} y(x+0,\lambda) \\ \frac{dy}{dx}(x+0,\lambda) \end{pmatrix} = A_j \begin{pmatrix} y(x-0,\lambda) \\ \frac{dy}{dx}(x-0,\lambda) \end{pmatrix}, \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{0.2}$$

の非自明解を $y(x,\lambda)$ とし，(r,ω) を (y',y) の 極座標とする. このとき, $\omega = \omega(x,\lambda)$ を $y(x,\lambda)$ の Prüfer 変換と呼ぶ. 各 $j = 1,2,\ldots,n$ に対し，行列 A_j の成分を次のように書き表す.

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}.$$

ω は, 方程式

$$\frac{d}{dx}\omega(x,\lambda) = \cos^2\omega(x,\lambda) + \lambda\sin^2\omega(x,\lambda), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \Gamma, \tag{0.3}$$

を満たし, (0.2) から, 任意の $x \in \Gamma_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ に対して,

$$\begin{aligned} &\sin\omega(x+0,\lambda)(c_j\sin\omega(x-0,\lambda) + d_j\cos\omega(x-0,\lambda)) \\ &\quad = \cos\omega(x+0,\lambda)(a_j\sin\omega(x-0,\lambda) + b_j\cos\omega(x-0,\lambda)), \end{aligned} \tag{0.4}$$

$$\operatorname{sgn}(\sin\omega(x+0,\lambda)) = \operatorname{sgn}(a_j\sin\omega(x-0,\lambda) + b_j\cos\omega(x-0,\lambda)), \tag{0.5}$$

$$\operatorname{sgn}(\cos\omega(x+0,\lambda)) = \operatorname{sgn}(c_j\sin\omega(x-0,\lambda) + d_j\cos\omega(x-0,\lambda)) \tag{0.6}$$

を満たすことがわかる. 各 $x \in \Gamma$ に対し, $\omega(x+0,\lambda)$ の値を一意的に定めるために, $\omega(x+0,\lambda)$ の枝を条件

$$\omega(x+0,\lambda) - \omega(x-0,\lambda) \in [-\pi,\pi), \quad x \in \Gamma \tag{0.7}$$

を満たすように選ぶ. 初期条件 $\omega(+0,\lambda) = \omega_0 \in \mathbf{R}$ を満たす (0.3) $\sim$ (0.7) の解を $\omega(x,\lambda,\omega_0)$ と書く. このとき, $k \in \mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ として, 回転数 $\rho(\lambda)$ を次で定義する.

$$\rho(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{\omega(2k\pi+0,\lambda,\omega_0) - \omega_0}{2k\pi}. \tag{0.8}$$

右辺の極限は存在し, $\rho(\lambda)$ は初期値 ω_0 に依らない. また, $\rho(\lambda)$ は $\mathbf{R}$ 上の非減少連続関数である.

$$l = \sharp\{j \in \{1,2,\ldots,n\} \mid \quad (b_j < 0) \quad \text{または} \quad (b_j = 0, \quad d_j < 0)\}$$

とおく. ここで, 有限集合 S に対して, $\sharp S$ は S の元の個数を表す. 論文 [10] では, 次の結果が成り立つことを証明した.

Theorem 0.1. 任意の $j \in \mathbf{N}$ に対し, 次が成り立つ.

$$\lambda_{2j-2} = \max\left\{\lambda \in \mathbf{R} \middle| \quad \rho(\lambda) = \frac{j-1}{2} - \frac{l}{2}\right\},$$

$$\lambda_{2j-1} = \min\left\{\lambda \in \mathbf{R} \middle| \quad \rho(\lambda) = \frac{j}{2} - \frac{l}{2}\right\}.$$

R. Johnson, J. Moser は, 1982年に概周期ポテンシャルに従う 1 次元 Schrödinger 作用素に対して, スペクトルと回転数の間に次のような関係が成り立つことを示した ([5, 8] 参照). 振動数加群 $\mathcal{M}$ を持つ概周期関数 q に対して, $L = -d^2/dx^2 + q$ とおく. また, L の回転数を $\alpha(\lambda)$ とし, I を L のレゾルベント集合に含まれる任意の開区間とする. R. Johnson, J. Moser は, $\lambda \in I$ に対して, $2\alpha(\lambda) \in \mathcal{M}$ であることを証明した. 特に, q が周期 2π の周期関数であるとし, $\sigma(L)$ の j 番目のバンドを $[E_{2j-2}, E_{2j-1}]$ とおくと, 彼らの結論は, $E_{2j-2} = \max\{\lambda \in \mathbf{R}| \quad \rho(\lambda) = (j-1)/2\}$, $E_{2j-1} = \min\{\lambda \in \mathbf{R}| \quad \rho(\lambda) = j/2\}$ であることを意味する. Theorem 0.1 の結論は, これら 2 つの等式とは異なり, 点相互作用の特異性を反映したものになっている.

次に, (II) の概要について述べる. $\Lambda = \{j \in \mathbf{N}| \quad G_j = \emptyset\}$ とおく. $n = 2$, $\kappa_2 \neq \pi$ を仮定する. また, $A_1A_2 = \pm E$ かつ $A_1, A_2 \in SL(2, \mathbf{R}) \setminus \{E, -E\}$ を仮定する. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 0.2. ([11, Theorem 1.2])

(a) $\kappa_2/\pi \notin \mathbf{Q}$ ならば, 次の結論が成り立つ.

$$\Lambda = \begin{cases} \{k+1\} & d_2 = a_2, \quad b_2 \neq 0, \text{かつ, ある } k \in \mathbf{N} \text{ が存在して,} \\ & -c_2/b_2 = k^2/4 \text{ となる場合,} \\ \emptyset & \text{それ以外.} \end{cases}$$

(b) $\kappa_2/2\pi = q/p$, $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $\gcd(p, q) = 1$ ならば, 次の結論が成り立つ.

$$\Lambda = \begin{cases} \{pj| \quad j \in \mathbf{N}\} & b_2 = 0 \text{ のとき,} \\ \{1 + pj| \quad j \in \mathbf{N}\} \cup \{1 + k\} & d_2 = a_2, \quad b_2 \neq 0, \text{かつ, ある } k \in \mathbf{N} \text{ が存在して} \\ & -c_2/b_2 = k^2/4, \quad k \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ が成り立つとき,} \\ \{1 + pj| \quad j \in \mathbf{N}\} & \text{それ以外.} \end{cases}$$

論文 [9] は, $A_1, A_2 \in SO(2) \setminus \{E, -E\}$ の場合に集合 Λ の解析を行ったものであり, 論文 [11] はその結果を拡張したものになっている.

集合 Λ を解析するという問題は, coexistence problem と呼ばれる. この問題は, 対応する Schrödinger 方程式の解空間の基底が周期解のみからなるか否かを決定付ける問題であり, 微分方程式の解の性質を知るための重要な問題である (具体的には, ある自然数 j が存在して, $G_j = \emptyset$ を満たしているということは, $\lambda_{2j-1}(= \lambda_{2j})$ というスペクトルパラメータに対して, 2 つの線形独立な周期解が存在するという事柄と同値な条件である). そのため, スペクトラルギャップが存在するか否かを解析することを問題とする coexistence problem は, 周期ポテンシャルに従う Schrödinger 作用素に対して古くから研究がなされた. 例えば, Mathieu 方程式

$$-\frac{d^2}{dx}y(x) + \alpha(\cos x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0$$

の場合には, すべてのスペクトラルギャップが非空であることが知られている. 周期的な点相互作用に従う 1 次元 Schrödinger 作用素に対する coexistence problem は, F. Gesztesy, W. Holden, W. Kirsch が初めに研究を行い, $\sigma(L_1)$ に対してすべてのスペクトラルギャップが非空であることを証明した ([3] 参照). Thoemrem 0.2 は, これらの結果とは異なり, 点相互作用のサポートである格子が不等間隔である場合には, 可算無限個のスペクトラルギャップが空になる場合があることを示している. また, 格子の間隔は退化したスペクトラルギャップの数に大きく影響を与えている. そのため, coexistence problem は非常に繊細な問題である事がわかる.

参考文献

[1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable models in quantum mechanics*, 2nd ed., With an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea publishing, Rhode Island, 2005.

[2] S. Albeverio and P. Kurasov. *Singular Perturbations of Differential Operators*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 271, Cambridge Univ. Press, 1999.

[3] F. Gesztesy, W. Holden and W. Kirsch. *On energy gaps in a new type of analytically solvable model in quantum mechanics*, J. Math. Anal. Appl. **134** (1988), 9-29.

[4] R. J. Hughes. *Generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, J. Math. Anal. Appl. **222** (1998), no.1, 151-166.

[5] R. Johnson and J. Moser. *The rotation number for almost periodic potentials*, Comm. Math. Phys. **84** (1982), 403–438; Erratum, Comm. Math. Phys. **90** (1983), 317–318.

[6] C. Kittel. *Introduction to solid state physics*, 5th ed., Wiley, New York, 1976.

[7] R. Kronig and W. Penney. *Quantum mechanics in crystal lattices*, Proc. Royal. Soc. London. **130** (1931), 499-513.

[8] J. Moser. *Integrable Hamiltonian systems and spectral theory*, Lezioni Fermiane, Academia Nazionale dei Lincei, Rome, 1983.

[9] H. Niikuni. *Identification of the absent spectral gaps in a class of generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, Tsukuba J. Math. **31** (2007), no.1, 39–65.

[10] H. Niikuni. *The rotation number for the generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, Ann. Henri Poincaré **8** (2007), 1279–1301.

[11] H. Niikuni. *Absent spectral gaps of the generalized Kronig-Penney Hamiltonians*, Kyushu J. Math. **62** (2008), no.1, 89–105.

[12] P. Šeba. *The generalized point interaction in one dimension*, Czech J. Phys. B **36** (1986), 667-673.

On the maximum value of ground states for the scalar field equation with double power nonlinearity

Shinji Kawano

Abstract

We evaluate the maximum value of the unique positive solution to

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

where

$$f(u) = -\omega u + u^p - u^q, \qquad \omega > 0, \quad q > p > 1.$$

It is known that a positive solution to this problem exists if and only if $F(u) := \int_0^u f(s)ds > 0$ for some $u > 0$. Moreover, Ouyang and Shi in 1998 found that the solution is unique. In the present paper we investigate the maximum value of the solution. The key idea is to examine the function defined from the nonlinearity, which arises from the well-known Pohozaev identity.

1 Introduction

We shall consider a boundary value problem

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{n-1}{r} u_r + f(u) = 0 & \text{for } r > 0, \\ u_r(0) = 0, \\ \lim_{r\to\infty} u(r) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $n \in \mathbb{N}$ and

$$f(u) = -\omega u + u^p - u^q, \qquad \omega > 0, \quad q > p > 1.$$

The above problem arises in the study of

$$\begin{cases} \triangle u + f(u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Indeed, the classical work of Gidas, Ni and Nirenberg [5, 6] tells us that any positive solution to the problem (2) is radially symmetric. On the other hand, for a solution $u(r)$ of the problem (1), $v(x) := u(|x|)$ is a solution to the problem (2).

The condition to assure the existence of positive classical solutions to the problem (2) (and so (1)) was given by Berestycki and Lions [1] and Berestycki, Lions and Peletier [2]:

Proposition 1. *A positive solution to the problem* (1) *exists if and only if*

$$F(u) := \int_0^u f(s)ds > 0, \qquad \text{for some} \quad u > 0,$$

which is equivalent to

$$\omega < \omega_{p,q}, \tag{3}$$

where

$$\omega_{p,q} = \frac{2(q-p)}{(p+1)(q-1)} \left[\frac{(p-1)(q+1)}{(p+1)(q-1)}\right]^{\frac{p-1}{q-p}}.$$

For exponent $\omega_{p,q}$, see Ouyang and Shi [11] and Fukuizumi [4]. See also Wei and Winter [15] and Kawano [8].

The uniqueness of the positive solutions to the problem (1) had long remained unknown. Finally in 1998 Ouyang and Shi [11] proved uniqueness.

Proposition 2. *The positive solution to the problem* (1) *is unique under the condition* (3).

Note that for special cases when $q = 2p - 1$ and ω is near the exponent $\omega_{p,2p-1} = \dfrac{p}{(p+1)^2}$, the uniqueness result comes directly from the classical paper Peletier and Serrin [12]. This fact was first remarked by Kawano [7].

Throughout this paper we assume the condition (3)**.**

Once the existence and the uniqueness of the solution is settled, we go on to investigate the more delicate nature of the solution. Here we evaluate the maximum value of the solution that is the L^∞ norm of the solution $\|u\|_\infty$.

First we notice that the condition (3) means that there exist two positive exponents $0 < \beta < \theta$ such that $F < 0$ in $(0, \beta)$, $F > 0$ in (β, θ), and then $F < 0$ in (θ, ∞). For the classification of these "double power functions" like f and F, See Kawano [8].

From the condition (3), we know that the nonlinearity f itself has positive part; for if f remains negative then F remains negative, which contradicts the condition (3). So there exist two positive exponents $0 < b < c$ such that $f < 0$ in $(0, b)$, $f > 0$ in (b, c), and then $f < 0$ in (c, ∞).

We have by simple argument that

$$b < \beta < c < \theta. \tag{4}$$

Note that these exponents depend on ω, p and q, but independent of the dimension n.

Remark 1. When $q = 2p - 1$, we can briefly calculate the accurete value of b, c, β, θ. See, for example, Kawano [7].

- $b = \left[\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4\omega}}{2}\right]^{\frac{1}{p-1}}$.
- $c = \left[\dfrac{1 + \sqrt{1 - 4\omega}}{2}\right]^{\frac{1}{p-1}}$.
- $\beta = \left[\dfrac{p}{p+1}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{(p+1)^2}{p}\omega}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}$.
- $\theta = \left[\dfrac{p}{p+1}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{(p+1)^2}{p}\omega}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}$.

The following basic fact is well-known. See Peletier and Serrin [12].

Proposition 3. *Let $u(r)$ be a solution to the problem (1). Then*
1) u is strictly decreasing function of r and decreases exponentially at infinity. Moreover
2) $f(u(0)) > 0$ and $F(u(0)) > 0$.

From this result and the inequality (4) comes the basic estimates of $\|u\|_\infty$.

Proposition 4.

$$\beta < \|u\|_\infty < c.$$

Following two theorems are the main results of the present paper:

Theorem 1. *Define*

$$\Sigma(u) = 2nF(u) - (n-2)f(u).$$

Then there exist $(0 <)\ B < C\ (\leq \infty)$, which depends not only on ω, p and q but also on the dimension n, such that $\Sigma < 0$ in $(0, B)$, and $\Sigma > 0$ in (B, C).

Theorem 2.

$$B < \|u\|_\infty.$$

Remark 2. When $n \geq 3$, we have $B > \beta$. In this case, our theorem is the best estimate ever known.
When $n = 2$, we have $B = \beta$.
When $n = 1$, we have $B < \beta$.

To prove the inequality $B > \beta$ when $n \geq 3$, for instance, we only need to check that

$$\Sigma(\beta) = -(n-2)\beta f(\beta) < 0 < -(n-2)\theta f(\theta) = \Sigma(\theta).$$

Then the graph of the function Σ tells us the relation. The proof of the other cases is just the same.

Remark 3. When $q = 2p - 1$, we can briefly calculate the accurete value of B and C. See Section 3.

As to such reserch, examining the maxim value of of the solution, We already have the following result for "single power" nonlinearity, that is the problem with

$$f_1(u) = -u + u^p, \quad 1 < p < p^*(n) := \begin{cases} \infty & (n = 1, 2) \\ \frac{n+2}{n-2} & (n \geq 3) \end{cases},$$

we have the recent result by Felmer et al. [3]. There we know that the L^∞ norm of the unique positive solution of the problem (1) with f_1 is greater than

$$\sigma_{n,p} := \Big[\frac{2(p+1)}{2n - (n-2)(p+1)}\Big]^{\frac{1}{p-1}} > 0$$

which is the unique positive zero of the polynomial

$$\Sigma_1(u) := 2nF_1(u) - (n-2)uf_1(u), \quad F_1(u) := \int_0^u f_1(s)ds.$$

It is apparent that $\Sigma_1 > 0$ in $(0, \sigma_{n,p})$, and $\Sigma_1 < 0$ in $(\sigma_{n,p}, \infty)$. This polynomial is related to the well-known Pohozaev identity [13]. We shall review in the following sections what this polynomial is for. This paper relies on the same method, though the analysis of the polynomial is rather bothersome. Furthermore, in that paper [3], the monotonicity of the maximum value with respect to the power p is proved.

In this talk we give proof of these facts and some historical survey.

References

[1] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equation, I., *Arch. Rat. Meth. Anal.* **82** (1983), 313-345.

[2] H. Berestycki, P. L. Lions and L. A. Peletier, An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbb{R}^N$, *Indiana University Math. J.* **30** (1981), 141-157.

[3] P. L. Felmer, A. Quaas, M. Tang and J. Yu, Monotonicity properties for ground states of the scalar field equation, *Ann. Inst. H. Poincarè Anal. Non Linèaire*, **25** (2008), 105-119.

[4] R. Fukuizumi, Stability and instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations, *Tohoku Mathematical Publications*, **No.25**, 2003.

[5] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximal principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209-243.

[6] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$, Mathematical analysis and applications, Part A, *Adv. in Math. Suppl. stud.* **7a**, Academic press, 1981, 369-402.

[7] S. Kawano, A remark on the uniqueness of positive solutions to semilinear elliptic equations with double power nonlinearities, arXiv:0810.5638.

[8] S. Kawano, Uniqueness of positive solutions to semilinear elliptic equations with double power nonlinearities, arXiv:0901.2426.

[9] M. K. Kwong and L. Zhang, Uniqueness of positive solutions of $\triangle u+f(u) = 0$ in an annulus, *Differential Integral Equations* **4** (1991), 583-599.

[10] T. Mizumachi, Uniqueness of positive solutions to a scalar field equation with a double power nonlinearity, preprint.

[11] T. Ouyang and J. Shi, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problems, *J. Differential Equations* **146** (1998), 121-156.

[12] L. A. Peletier and J. Serrin, Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in $\mathbb{R}^n$, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **81** (1983), 181-197.

[13] S. I. Pohozaev, On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **165** (1965) 36-39 (in Russian).

[14] M. Tang, Uniqueness of positive radial solutions for $\Delta u - u + u^p = 0$ on an annulus, *J. Differential Equations* **189** (2003) 148-160.

[15] J. Wei and M. Winter, On a cubic-quintic Ginzburg-Landau equation with global coupling, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 1787-1796.

一般確率モデルから眺める量子情報理論

Viewing quantum information theory from generic probability model*

縫田 光司（NUIDA, Koji）

産業技術総合研究所 情報セキュリティ研究センター, k.nuida@aist.go.jp

1 量子情報理論

古くからの情報理論分野では、研究対象となるアルゴリズム等について、古典物理に属する現象を利用して（少なくとも原理的には）実装可能であるものだけを対象としてきた（というより、それ以上の物理現象の応用が可能であるという発想がそもそも無かったのであろう）。しかしそのような傾向は、1984年にBennettとBrassardによって提案されたBB84量子鍵配送プロトコル[2]や、1997年にShorによって提案された多項式時間素因数分解量子アルゴリズム[7]の登場により一変した。これらは共に、量子力学的現象を情報セキュリティ等情報理論の分野に応用した成果であり、前者は量子力学における「測定による状態の破壊」という現象を利用した「無条件安全性」と呼ばれる極めて高い安全性を持つ暗号技術[1]、後者は量子状態の「重ね合わせ原理」を用いて実装される量子コンピュータ上の超高速アルゴリズム[2]である。これらの結果は従来の（古典物理に基づく）情報理論の常識を覆すものであったため、情報理論の分野における量子力学の応用の可能性に関する新たな研究分野、即ち量子情報理論の分野が興るまでに至った。

量子情報理論においては、上述の「測定による状態の破壊」や「不確定性原理」といった量子力学の原理の存在により、古典情報理論には無い顕著な性質が知られている。例えば、古典物理で実装されたコンピュータにおいては情報の複製がごく簡単に行えるが、量子コンピュータにおいては一般に情報の複製を無条件に行うことができないという「No-Cloning Theorem」[8]が知られている。一方、古典情報理論の範疇では異なるビット列が与えられた際にそれを確率1で識別することができるが、量子情報理論の範囲では状態の識別成功確率は一般に1よりも小さな値までしか上げられないことも示されている。このように、古典情報理論では自明な各種の基本的操作も量子情報理論では非自明なものとなるため、それら基本的操作の性質を量子論に基づいて解析するという研究が量子情報理論の大きな部分を占めている。

2 一般確率モデル

量子力学の数学的モデルとしてはHilbert空間上の密度作用素を用いる記述が一般的であるが、種々の量子力学的現象が余りにも不思議であるため、何故そのような現象が起こるのか、量子力学的現象を引き起こす本質的要因は何なのか、といった点について様々な視点からの考察が行われてきた。それらのアプ

*A part of this work has been supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (20700017)

[1]正確には、BB84プロトコル自体は「暗号」ではなく暗号に用いる暗号化鍵の準備に関するプロトコルであるが、にもかかわらずこのプロトコルやそれに類するプロトコルは非専門家からは「量子暗号」と呼ばれることが多い。

[2]量子計算に対してはしばしば並列計算になぞらえた直感的説明が与えられるが、複数のコンピュータを用いた並列計算とは根本的に原理の異なるものであることを強調しておく。なお、量子コンピュータ自体は今のところ極めて小規模な実証実験しか成功していないので、Shorの結果を用いて直ちに現実に用いられている暗号が破られるということは起こらないであろう。

ローチの一つが、本稿の主題である、操作論的観点から量子力学を抽象化・一般化する数学的枠組みである「一般確率モデル」[3]である。これは以下の要素から成り立つ[4]：

状態空間： $\mathcal{S}$ を "convex structure" と呼ばれる対象 [3] とする。即ち、写像 $\langle\ ;\ ,\ \rangle : [0,1]\times\mathcal{S}\times\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $\langle\lambda;s,t\rangle\in\mathcal{S}$ $(0\leq\lambda\leq 1,\ s,t\in\mathcal{S})$ が集合 $\mathcal{S}$ に対して付随している場合を考える。この $\langle\lambda;s,t\rangle$ は、物理的な直感としては状態 $s,t\in\mathcal{S}$ を確率 λ と $1-\lambda$ で重ね合わせた状態に相当する。（しかし、より一般な枠組みを与えるために、「物理的な状態の重ね合わせ」であれば当然成り立ってほしい性質、例えば $\langle\lambda;s,s\rangle=s$ などを予め公理として与えることはしない。それら自然な性質は、以下の議論によって（ある意味で）「導かれる」ものである。）

effect： 状態空間 $\mathcal{S}$ 上のアフィン汎関数 $e:\mathcal{S}\to[0,1]$（つまり、$e(\langle\lambda;s,t\rangle)=\lambda e(s)+(1-\lambda)e(t)$ が成立）を $\mathcal{S}$ 上の effect と呼ぶ。$\mathcal{S}$ 上の effect 全体の集合を $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ と書く。

物理量： $\mathcal{S}$ 上の effect の（有限）列 $O=(e_i)_{i=1}^N$ であって $\sum_{i=1}^N e_i=1$ を満たすものを $\mathcal{S}$ 上の（N 値）物理量と呼ぶ。ここで $e_i(s)$ は、物理的な直感としては、物理量 O を状態 $s\in\mathcal{S}$ において観測した際に i 番目の観測値が得られる確率に相当する。$\mathcal{S}$ 上の N 値物理量全体の集合を $\mathcal{O}_N$ とおく。

例 1. $\mathcal{S}$ を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 内の標準 n-単体とすると、自然な凸結合に関して $\mathcal{S}$ は convex structure となる（一般に実線型空間の凸部分集合は同様にして convex structure と看做せる）。この $\mathcal{S}$ は、n 点集合 $\Omega_n=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$ 上の確率分布の集合と自然に同一視され（$\mathcal{S}$ の i 番目の頂点は $Pr[\mathcal{P}=\omega_i]=1$ となる確率分布 $\mathcal{P}$ に対応）、古典系に対応する一般確率モデルとなる。また、量子系に対しても、Hilbert 空間上の密度作用素全体の集合を $\mathcal{S}$ とおくことで、一般確率モデルの一例と考えることができる。

例 2. $\mathcal{S}$ を $\mathbb{R}^n$ における n 次元単位超立方体とすると、上で述べた通りこれは自然に convex structure となるが、対応する一般確率モデルは古典系とも量子系とも異なる（けれども、ある方法で古典系を基に構成することができる）ものである。この一般確率モデルは、不確定性関係はないが不確定性原理が成立する物理量が存在する [4] など興味深い性質を持っているが、本稿では深く立ち入らない。

上の例では全て状態空間 $\mathcal{S}$ が実線型空間の凸部分集合として与えられていたが、これは決して偶然の産物ではなく、以下のような基本的な事実が知られている。その前に用語を定義すると、任意の異なる状態 $s\neq t$ に対してある effect e が存在して $e(s)\neq e(t)$ となるとき、convex structure $\mathcal{S}$ は **separable** であるという。一般の convex structure $\mathcal{S}$ に対して、同値関係「$e(s)=e(t)$ for all $e\in\mathcal{E}(\mathcal{S})$」による商集合には separable な convex structure としての構造が自然に誘導される（この新しい convex structure においては、前述の $\langle\lambda;s,s\rangle=s$ など物理的に自然ないくつかの関係が自動的に成立する）。このとき標準的な議論によって以下の事実が導かれる。

命題 1. 任意の *separable* な *convex structure* $\mathcal{S}$ は、ある実線型空間 V の中に凸部分集合として埋め込むことができる。つまり、V への単射 $\varphi:\mathcal{S}\to V$ であって $\varphi(\langle\lambda;s,t\rangle)=\lambda\varphi(s)+(1-\lambda)\varphi(t)$ が任意の $0\leq\lambda\leq 1$、$s,t\in\mathcal{S}$ について成り立つものが存在する。

この空間 V としては最小なもの、つまり $\mathcal{S}$ のアフィン包となっているものを考え、また V の位相としては $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ によって生成される弱位相（$\mathcal{E}(\mathcal{S})$ に属する関数を全て連続とする位相の中で最小の開集合系を持つもの）を導入する。これによって V は局所凸かつ Hausdorff な実位相線型空間となる。この際、一般には部分集合 $\mathcal{S}$ がコンパクトとなるとは限らないが、$\mathcal{S}$ と V を少しずつ膨らませてできるコンパクトな「仮想状態空間」を導入することで、以下の議論をコンパクトな状態空間の場合にほぼ帰着させることができ

[3]この用語は "generic probability model" という名称の直訳であるが、同様の枠組みについては "statistical model" などいくつかの異なる名称が用いられている。

[4]量子力学の一般化という目的に対しては、ここで述べるもの以外の要素（例えば状態の変換や観測による状態の破壊）を追加する必要があるが、本稿で扱う状態識別問題の考察においてはここで述べるもので充分である。

る。しかし本稿では簡単のために、以下 $\mathcal{S} \subset V$ はコンパクトな凸集合であると仮定する。なお、$\mathcal{S}$ が有限次元の場合には V は通常の Euclid 空間と同型になることが知られている。

現在までに、量子情報理論における基礎的問題の一般的取り扱いとして、一般確率モデルにおける No-Cloning Theorem [1] や状態識別問題 [5] などが研究されている。以下、本稿では後者の状態識別問題について紹介する。

3 状態識別問題

本稿では、論文 [5] を参考に一般確率モデルにおける状態識別問題を定式化する。まず、異なる状態 $s_1, \ldots, s_N \in \mathcal{S}$ と、各々の事前確率 $p_1, \ldots, p_N$ ($0 \leq p_i \leq 1$、$\sum_i p_i = 1$) を固定しておく。意味付けとしては、状態の候補 $s_1, \ldots, s_N$ とその事前確率がわかっている状態で、識別者の手元にやってきた状態が N 個のうちのどれであったかをある物理量の観測によってできるだけ高い確率で推定したい、という状況を考えていることになる。対応する問題は、量子情報理論において様々な場所に登場するため量子情報理論の枠組みでは従来よく研究されてきている。ここで、物理量[5] $O = (e_i)_{i=1}^N \in \mathcal{O}_N$ についてその**成功確率** $P_{\mathrm{succ}}(O)$ を $P_{\mathrm{succ}}(O) = \sum_{i=1}^N p_i e_i(s_i)$ で定義する。この値は、識別者の手元に状態 s_i がやってきたときに O を観測して「i 番目の状態です」という観測結果が得られる確率の和となっている。また、**最適成功確率** P_{succ} を $P_{\mathrm{succ}} = \sup_{O \in \mathcal{O}_N} P_{\mathrm{succ}}(O)$、**最適物理量** O を $P_{\mathrm{succ}}(O) = P_{\mathrm{succ}}$ となる $O \in \mathcal{O}_N$、と自然に定義する。この定式化の下で、考える問題は最適成功確率（と対応する最適物理量）もしくはその上界・下界を求める問題と看做せる。なお、最適物理量の存在（つまり、最適成功確率の定義に現れる sup を達成する O が存在する）自体決して自明ではないけれども、この場合には常に最適物理量が存在することを証明できる。

4 Helstrom Family

この状態識別問題は、一般確率モデルはおろか量子系の場合ですら未だ研究途上であり、2 状態識別 ($N = 2$) もしくはある種の対称な配置にある状態の場合ぐらいしか最適成功確率が特定されていない。このような状態識別問題に一般確率モデルの枠組みでアプローチするため、以下に紹介する (weak) Helstrom family という道具が導入されている [5]。

定義 1. 与えられた $s_1, \ldots, s_N$ と $p_1, \ldots, p_N$ に対して、N 個の状態 t_i、$1 \leq i \leq N$ (s_i に対する **conjugate state** と呼ぶ) と、状態 s (**reference state** と呼ぶ)、そしてある実数 $p \geq \max_i p_i$ (**Helstrom ratio** と呼ぶ) が以下の条件を満たすとき、**weak Helstrom family** と呼ぶ：

$$\widetilde{p_i} s_i + (1 - \widetilde{p_i}) t_i = s \ , \ 0 < \widetilde{p_i} = p_i / p \leq 1 \ (1 \leq i \leq N) \ . \tag{1}$$

図 1 は weak Helstrom family の例 ($N = 3$) を示している。ここで事前確率 p_i は全て等確率 ($p_i = 1/3$) であり、conjugate state t_1, t_2, t_3 たちは reference state s を中心に元の状態 s_1, s_2, s_3 と相似な配置となっている。相似比は 1 : 2 であり、$\widetilde{p_i} = 2/3$、Helstrom ratio は $p = p_i / \widetilde{p_i} = 1/2$ となっている。この weak Helstrom family を考える一つの利点は以下の性質にある：

命題 2 ([5]). 任意の *weak Helstrom family* に対して、$P_{\mathrm{succ}} \leq p$ が成り立つ。

この性質により、出来る限り小さな Helstrom ratio を持つ weak Helstrom family を見つけることで、最適成功確率に関するより厳密な上界を与えられることになる。例えば、図 1 に示されている状態 s_1, s_2, s_3 の最適成功確率は、図 1 の weak Helstrom family の Helstrom ratio $p = 1/2$ を超えないことがわかる。ここで図 1 を見ると、相似比がより大きくなる、つまり conjugate state の配置がより広がるにつれて、$\widetilde{p_i}$ が大きくなるので対応する Helstrom ratio がより小さくなるという関係にある。

[5] ここで考える物理量としては N 値の物理量を考えれば充分である。

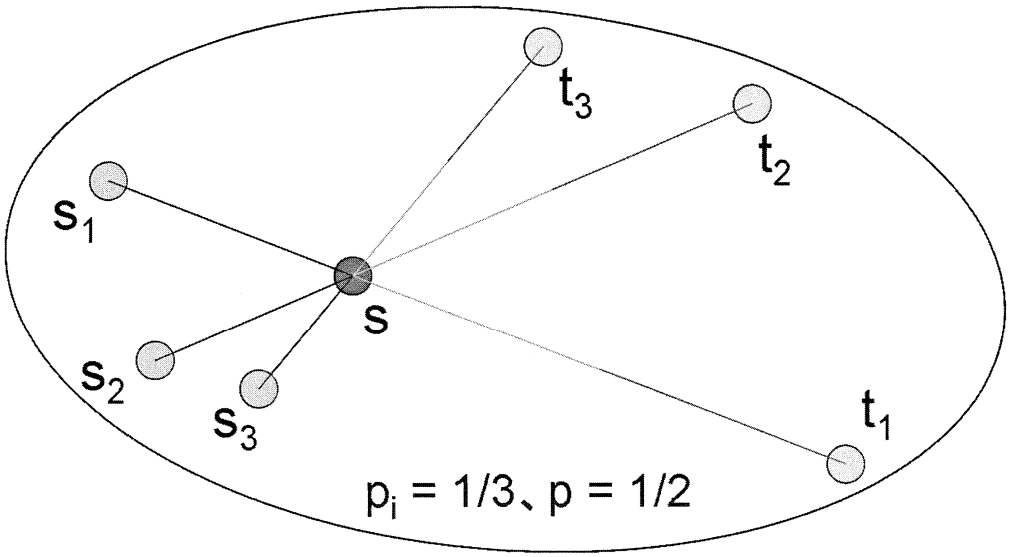


図 1: weak Helstrom family の例

では、このように weak Helstrom family を見つけることで最適成功確率に関してどれだけ厳密な上界を与えることができるのであろうか。この観点から、以下のような定義が与えられている [5]。

定義 2. weak Helstrom family の Helstrom ratio p が $P_{\mathrm{succ}} = p$ を満たすとき、この family を **Helstrom family** と呼ぶ。

つまり、Helstrom family を見つけることができれば、最適成功確率の厳密な値が求まることになるのであるが、一般に Helstrom family は必ずしも存在するとは限らない。[5] では量子系の場合に、"generic" な場合の 2 状態識別と、ある種の対称な配置を持つ状態の識別において Helstrom family の存在を示しているが、それ以外の場合については Helstrom family の（非）存在は不明なままであった。なお、"generic" な場合とは、最適識別成功確率が $P_{\mathrm{succ}} > \max_i p_i$ となる場合として定義される。もし generic でない場合には、最適成功確率はある p_i と一致することになり、最も事前確率の高い s_i を常に推測結果として返すというつまらない戦略が最適な戦略となるので、本質的に考慮すべきは generic な場合のみである。

5 2 状態識別の Helstrom family の存在

話者らの最近の研究 [6] により、$N = 2$ の（無限次元も含めた一般の）場合に以下の結果が示された。

定理 1. $N = 2$、対称性により $p_1 \geq p_2$ と仮定する。もし $p_1 = p_2$ であるか、$p_1 > p_2$ かつ

$$s^* = (p_1 s_1 - p_2 s_2)/(p_1 - p_2) \notin \mathcal{S}$$

であれば[6]、常に *Helstrom family* が存在する。

以下、この定理の証明の概略を説明する。まず、前述の考察により、Helstrom family を与えるには conjugate state t_1, t_2 の配置をなるべく広く取る[7]ことが求められる。つまり、$p_1 = p_2$ の場合であれば、線分 $t_1 t_2$ が $s_2 s_1$ と平行になりかつ距離が最長の t_1 と t_2 が Helstrom family に対応する conjugate state の候補であり、同様の基準で $p_1 \neq p_2$ の場合にも conjugate state の候補が得られる。（ここで候補の存在を示す

[6] この条件は、$N = 2$ において generic な場合であるための必要条件であることが簡単に確かめられる。
[7] $p_1 \neq p_2$ の場合には「なるべく広く」の意味を少々慎重に定義する必要があるが、簡単のために本稿では深入りしない。

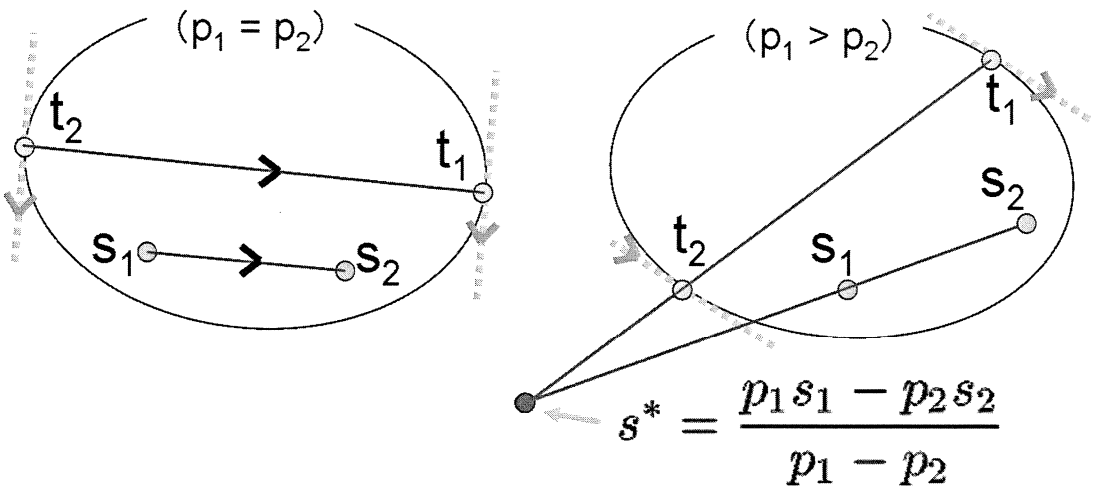


図 2: conjugate state の候補

際に $\mathcal{S}$ のコンパクト性が用いられている。）この候補 t_1 と t_2 に対し、簡単な議論により、$e(t_1) = 1$ かつ $e(t_2) = 0$ となる effect $e \in \mathcal{E}(\mathcal{S})$ が存在すれば対応する weak Helstrom family は Helstrom family となることが確かめられる（図 2）。そのような e の存在を示すために、t_1 と t_2 を通る直線 L 上のアフィン汎関数 e' で $e'(t_1) = 1$、$e'(t_2) = 0$ かつ $e'(L \cap \mathcal{S}) \subset [0, 1]$ となるものを取ってきて（今、t_1 と t_2 はともに $\mathcal{S}$ の境界上に存在するので、このような e' は常に存在する）、Hahn-Banach の定理により全空間上に拡張することで求める e を得ることができる。なお、ここで Hahn-Banach の定理を適用するために定理の前提条件を確かめる必要があり、ややテクニカルな議論を要することを注意しておく。

参考文献

[1] H. Barnum, J. Barrett, M. Leifer, A. Wilce, *Generalized no-broadcasting theorem*, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 240501

[2] C.H. Bennett, G. Brassard, *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*, International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India, 10–12 December 1984, pp. 175–179.

[3] S.P. Gudder, *Stochastic Method in Quantum Mechanics*, Dover (1979)

[4] 木村元、今福健太郎、宮寺隆之、縫田光司、今井秀樹、超立方体の状態空間を持つ一般確率論について、2009 年暗号と情報セキュリティシンポジウム（SCIS2009）予稿集（CD-ROM）、2009

[5] G. Kimura, T. Miyadera, H. Imai, *Optimal state discrimination in generic probability models*, arXiv:0808.3844 (quant-ph), 2008

[6] K. Nuida, G. Kimura, T. Miyadera, *Optimal observables for minimum-error state discrimination in generic probability models*, in preparation

[7] P.W. Shor, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM J. Computing 26, pp. 1484–1509 (1997)

[8] W.K. Wootters, W.H. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature 299 (1982), pp. 802–803

3次元リー群上のリッチ流と4次元リッチ平坦計量

恩田健介（名古屋大学大学院多元数理科学研究科）
kensuke.onda@math.nagoya-u.ac.jp

概要

4次元多様体に3次元リー群が作用する余等質1の計量を考える．ミルナー枠と3次元リッチ流を用いてリッチ平坦計量を構成する．

1 序

与えられた多様体上に，どのような代表的な計量が入るかを調べることは，微分幾何では重要な問題の一つである．この講演では，ハミルトンによって導入されたリッチ流 [H82] とリー群に対する余等質1の計量に対する関係を調べながら，代表的な計量の一つであるアインシュタイン計量，特にリッチ平坦計量を構成していく．

計量 g がリッチ流，または逆向きリッチ流であるとは，計量 g がそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t)_{ij} = -\frac{1}{2}\mathrm{Ric}[g]_{ij}, \frac{\partial}{\partial t}g(t)_{ij} = \frac{1}{2}\mathrm{Ric}[g]_{ij}$$

を満たすときのことをいう．Hamilton[H82] は，リッチ流方程式は閉多様体上の任意の初期計量に対して，短時間にただ一つの解が存在することが証明した．さらに体積が一定になるようにスケーリングしたリッチ流を用いることで，リッチ曲率が正である3次元閉多様体には，正の定曲率計量が入ることを証明した．

注意 1.1. 一般にはリッチ流は

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t)_{ij} = -2\mathrm{Ric}[g]_{ij},$$

と定義される．今回と係数が異なるが，これは問題ではない．実際，正の定数 k を用いて $h := \frac{k}{2}g$ と置くと，リッチテンソルは計量の定数倍に依らないことから

$$\frac{\partial}{\partial t}h(t)_{ij} = (\frac{k}{2})(-2\mathrm{Ric}[g]_{ij}) = -k\mathrm{Ric}[h]_{ij}$$

が言える．

この論文では，$k = \frac{1}{2}$ のとき計量 h をリッチ流であるという．逆向きリッチ流についても同様である．また，t を $-t$ に変えることで，リッチ流方程式は逆向きリッチ流方程式に変換される．のちほど記述されることのように，余等質の計量を考えるときは，これは多様体の向きを考えることに対応する．

例 1.2. リッチ流の例を紹介する. 定曲率 1 を持つ球 (S^n, g_{st}) を考える. $g(t) := \{1 - \frac{1}{2}(n-1)t\}g_{st}$ と置くと, このとき $g(t)$ はリッチ流であり, $g(-t)$ は逆向きリッチ流となる.

リッチ流は計量を変形させ, 良い計量を探す方法である. しかしこの講演では, リッチ流を別の方法として用いる. そのために, 次の定義を導入する.

定義 1.3. (M, g) : 群 G に対する余等質 1
$\Leftrightarrow$ (1)$G \subset Isom(M, g)$ かつ
(2)G の M における主軌道の余次元が 1.

定義 1.4. $\{F_i\}_{i=1}^3$ を G 上の左不変動標枠 (moving frame) とする.
$\{F_i\}_{i=1}^3$ がミルナー枠であるとは, $\{F_i\}_{i=1}^3$ が

$$[F_2, F_3] = 2n_1F_1,$$

$$[F_3, F_1] = 2n_2F_2,$$

$$[F_1, F_2] = 2n_3F_3,$$

ただし, $n_i \in \{\pm 1, 0\}$. という関係式を満たすときをいう.

命題 1.5 ([M76]). $\{F_i\}$ をミルナー枠とする. $\{n_i\}$ の符号に対して, 3 次元ユニモジュラー (体積要素が両側不変), 単連結リー群は, 表 1 のように決定する.

符号	リー群	性質
$(-1,-1,-1)$, $(+1,+1,+1)$	$\mathrm{SU}(2)$	単純
$(-1,-1,+1)$, $(-1,+1,+1)$	$\widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$	単純
$(-1,-1,0)$, $(+1,+1,0)$	$\widetilde{\mathrm{Isom}(\mathbf{E^2})}$	可解
$(-1,0,+1)$	$\widetilde{\mathrm{Isom}(\mathbf{E_1^1})}$	可解
$(-1,0,0)$, $(+1,0,0)$	ハイゼンベルグ	ベキ零
$(0,0,0)$	$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$	可換

表 1: 3-dim unimodular simply-connected Lie groups

$SU(2)$ の左不変計量 g_3 に対し, ミルナー枠 $\{F_i\}_{i=1}^3, [F_i, F_j] = -2F_k$ $(i, j, k$: $(1, 2, 3)$ のサイクル) をとり $\{\omega^i\}$ を $\{F_i\}_{i=1}^3$ の双対枠とすると,

$$g_3 = A(\omega^1)^2 + B(\omega^2)^2 + C(\omega^3)^2$$

と書ける. このときリッチ流方程式は

$$\frac{d}{dt}A = \frac{(B-C)^2 - A^2}{BC}, \frac{d}{dt}B = \frac{(C-A)^2 - B^2}{CA}, \frac{d}{dt}C = \frac{(A-B)^2 - C^2}{AB} \qquad (1.1)$$

となる. t は $(-\infty, T)$ で存在し, $t \to T$ とすると, g_3 は正の定曲率を持つ計量に収束する.

次に, 群 $SU(2)$ に対する M^4 の余等質 1 の計量

$$g = dt^2 + a(t)^2(\omega^1)^2 + b(t)^2(\omega^2)^2 + c(t)^2(\omega^3)^2 \tag{1.2}$$

を考える. これの例の一つに Taub-Nut metric

$$dt = hdr, a = b = 2(r^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}, c = 4m\Big(\frac{r-m}{r+m}\Big)^{\frac{1}{2}}, h = \Big(\frac{r+m}{r-m}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

,

$$g = \Big(\frac{r+m}{r-m}\Big)dr^2 + (r^2 - m^2)\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + 4m\Big(\frac{r-m}{r+m}\Big)(\omega^3)^2$$

がある. この計量はリッチ平坦計量であり,

$$\frac{d}{dt}a = \frac{(b-c)^2 - a^2}{bc}, \frac{d}{dt}b = \frac{(c-a)^2 - b^2}{ca}, \frac{d}{dt}c = \frac{(a-b)^2 - c^2}{ab} \tag{1.3}$$

を満たす. これはリッチ流方程式と同じ形の式になっている. 逆に, a, b, c が式 (1.1) を満たすとき, 計量 (1.2) はリッチ平坦計量になっている. このような性質をもつアインシュタイン計量が他にも存在するかどうかという疑問が今回の考察の始まりである. 表 1 のリー群を用いて, 余等質 1 のアインシュタイン計量を探していく. 今回は紙面の都合上, 可解群を, 特に平坦ローレンツ平面の等長写像群のみを扱う. ベキ零群に対しては, 例えば [GR98] などで考察されている.

2 可解

平坦ローレンツ群の等長写像群 $G = \widetilde{\mathrm{Isom}(\mathbf{E}^1_1)}$ のリッチフローを考える. 左不変計量

$$g = a(\omega^1)^2 + b(\omega^2)^2 + c(\omega^3)^2$$

のリッチ流は次のようになる.

$$\frac{d}{dt}a = \frac{c^2 - a^2}{bc}, \ \frac{d}{dt}b = \frac{(a+c)^2}{ac}, \ \frac{d}{dt}c = \frac{a^2 - c^2}{ab} \tag{2.1}$$

補題 2.1 ([KM01]). $\widetilde{\mathrm{Isom}(\mathbf{E}^1_1)}$ 上のリッチ流は次の性質を持つ.

1. リッチ流方程式 (2.1) の解は, 時間 $(-T, +\infty)$ で存在する. ここで, T は初期計量に依存してきまる正の定数である.

2. $ac, b(c-a)$ は時間 t で一定である.

3. $\rho := a/c$ と置くと, このとき

$$\frac{d}{dt}b = \frac{(1+\rho)^2}{\rho},\ \frac{d}{dt}\rho = 2\frac{1-\rho^2}{b}$$

となる.

4. b, ρ は t に対する単調関数である.

5. $\rho \neq 1$ であれば,

$$b = k_0 \frac{\sqrt{\rho}}{|1-\rho|}$$

が成り立つ. ここで $k_0 = b_0 \frac{|1-\rho_0|}{\sqrt{\rho_0}}$ である.

6. $\rho \to 1, b \to \infty$, *when* $t \to +\infty$.

次に, 平坦ローレンツ平面の等長写像群に対する M^4 の余等質 1 の計量を考える. $\{F_i\}_{i=1}^3$, $\{\omega_i\}$ は上と同様の定義とする. これらを用いると, M^4 の余等質 1 の計量のリッチテンソルは

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c}, \\
R_{11} &= -a\ddot{a} - a\dot{a}\frac{\dot{b}}{b} - a\dot{a}\frac{\dot{c}}{c} + 2\frac{a^4 - c^4}{b^2c^2}, \\
R_{22} &= -b\ddot{b} - b\dot{b}\frac{\dot{c}}{c} - b\dot{b}\frac{\dot{a}}{a} - 2\frac{(a^2+c^2)^2}{a^2c^2}, \\
R_{33} &= -c\ddot{c} - c\dot{c}\frac{\dot{a}}{a} - c\dot{c}\frac{\dot{b}}{b} + 2\frac{(c^4 - a^4}{a^2b^2}.
\end{aligned}$$

と計算できる. a, b, c をリッチ流方程式 (2.1) を満たすように決める. このとき, $R_{00} = R_{11} = R_{33} = 0$ であるが,

$$R_{22} = 2\frac{(c^2-a^2)^2}{a^2c^2} - 2\frac{(c^2+a^2)^2}{a^2c^2} = -8$$

となり, リッチ平坦計量にはならない. リッチ平坦計量を得るために符号数 $(2,2)$ の計量を考える.

$$g = dt^2 + A(t)(\omega^1)^2 - B(t)(\omega^2)^2 - C(t)(\omega^3)^2 \tag{2.3}$$

は符号数 $(2,2)$ の計量である.

正定値でない計量に対してもレビチビタ接続, リッチテンソル等は同様に定義できる. 計量 (2.3) に対する曲率テンソルは,

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c} \\
R_{11} &= -a\ddot{a} - a\dot{a}\frac{\dot{b}}{b} - a\dot{a}\frac{\dot{c}}{c} + 2\frac{a^4 - c^4}{b^2c^2} \\
R_{22} &= b\ddot{b} + b\dot{b}\frac{\dot{c}}{c} + b\dot{b}\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{(a^2 - c^2)^2}{a^2c^2} \\
R_{33} &= c\ddot{c} + c\dot{c}\frac{\dot{a}}{a} + c\dot{c}\frac{\dot{b}}{b} + 2\frac{a^4 - c^4)}{a^2b^2}
\end{aligned}
$$

となる. a, b, c をリッチ流方程式 (2.1) を満たすように決める. すると先ほど零にならなかったリッチテンソルの成分 R_{22} も零になり, リッチ平坦計量となる.

以下ではこのリッチ平坦計量について調べる. 断面曲率を計算すると,

$$
\begin{aligned}
K_{01} = K_{23} &= 2\frac{(c^2 - a^2)(2a^2 + ac + c^2)}{a^2b^2c^2} = 2\frac{(1 - s^2)(2s^2 + s + 1)}{s^2b^2}, \\
K_{02} = K_{13} &= 2\frac{(c^2 - a^2)^2}{a^2b^2c^2} = 2\frac{(1 - s^2)^2}{s^2b^2}, \\
K_{03} = K_{12} &= -2\frac{(c^2 - a^2)(a^2 + ac + 2c^2)}{a^2b^2c^2} = -2\frac{(1 - s^2)(s^2 + s + 2)}{s^2b^2},
\end{aligned}
$$

となる. ここで $s := a/c$ である. $a^2 = c^2$ ならば定曲率 0 の計量となる. $a \neq c$ ならば定曲率でないリッチ平坦計量である. さらに $t \to +\infty$ で, 断面曲率 $K_{ij} \to 0$ であり, $t \to -T$ で, 断面曲率 $K_{ij} \to \pm\infty$ となる.

参考文献

[F85] D. H. Friedan, *Nonlinear models in $2 + \varepsilon$ dimensions,* Ann. Physics 163 (1985), no. 2, 318–419.

[GR98] G.W.Gibbons, P.Rychenkova, *Single-sided domain walls in M-theory,* preprint: hep-th/9811045.

[H82] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature,* J. Differential. Geom. 17 (1982) 255-306.

[KM01] D. Knopf, K. McLeod, *Quasi-convergence of model geometries under the Ricci flow,* Comm. Anal. Geom. 9 (2001), no. 4, 879–919.

[M76] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups,* Advances in Math. 21 (1976), no. 3, 293–329.

Properties of Monotone Infinitely Divisible Distributions

Takahiro Hasebe
Graduate School of Science, Kyoto University

1 Introduction

Using the famous theorem by Gelfand and Naimark in C^* or W^* algebras, one can extend the technique of probability theory to a non-commutative algebra equipped with a state. Such a theory is called non-commutative probability theory. In particular, the fundamental notion of independence in probability theory can be considered also in a non-commutative algebra with a state. An interesting aspect in non-commutative probability theory is that there are several notions of independence, which cannot be realized in commutative algebras, i.e., in the usual probability theory.

Today four notions of independence are known, which are shown in Table 1. There is a central limit theorem for each notion of independence, which we now explain briefly. Let $\mathcal{A}$ be a v.N.algebra and let ϕ be a state. The distribution of

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

converges to some limit distribution as $n \to \infty$, if $\phi(X_k) = 0, \phi(X_k^2) = 1$ and X_k's are independent self-adjoint operators in some sense.

The motivation of the author is to clarify the similarity and dissimilarity among the four notions of independence and to find a way to treat these notions of independence in a more general viewpoint. Properties of monotone independence are, however, not well understood yet. In this research, we aim to clarify properties of infinitely divisible distributions in monotone probability theory.

2 Monotone Independence

Let $\mathcal{A}$ be a v.N.algebra; let ϕ be a state. Self-adjoint operators X and $Y \in \mathcal{A}$ are said to be *monotone independent* w.r.t. ϕ if

- $\phi(X^p Y^q X^r) = \phi(Y^p)\phi(X^{p+r})$ for all $p, q, r \in \mathbb{N}$;
- $\phi(Y^p X^q Y^r) = \phi(Y^p)\phi(X^q)\phi(Y^r)$ for all $p, q, r \in \mathbb{N}$.

Table 1: Several notions of independence and the limit distributions in central limit theorems

independence	probability distribution	orthogonal polynomials
boson	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$ on $\mathbb{R}$	Hermite polynomials
free	$\sqrt{2-x^2}dx$ on $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$	Chebysheff polynomials of the second kind
boolean	$\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{-1})$	$1, x$
monotone	$\frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}dx$ on $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$	Chebysheff polynomials of the first kind

The probability distribution μ of a self-adjoint operator X is determined by

$$\mu(B) = \phi(1_B(X)),$$

where B is a Borel set in $\mathbb{R}$. The distribution ν of Y is defined similarly.

If X and Y are monotone independent, we can define monotone convolution (written as $\triangleright$-convolution) $\mu \triangleright \nu$ by the distribution of $X+Y$, which is a basic object in probability theory. When we consider only monotone convolution, we can forget the original self-adjoint operators X and Y; we can treat only probability distributions.

Basic properties

(1) Monotone convolution is characterized by the reciprocal of Cauchy transform:

$$H_{\mu\triangleright\nu} = H_\mu \circ H_\mu,$$

where

$$H_\mu(z) := \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x)\Big)^{-1}.$$

This relation is seen to be the analogue of the relation between convolution and Fourier transform: $\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu}$.

(2) $\mu \triangleright \nu$ is linear only in the left factor:

$$(a\mu + b\lambda) \triangleright \nu = a(\mu \triangleright \nu) + b(\lambda \triangleright \nu), \quad a+b=1, a, b > 0.$$

(3) Monotone convolution is associative and non-commutative.

Definition 2.1 *A probability distribution μ is called monotone infinitely divisible if for any $n \in \mathbb{N}$ there exists μ_n such that $\mu = \mu_n \triangleright \cdots \triangleright \mu_n$ (n times).*

Theorem 2.2 (Muraki (unpublished), Belinschi06) *There is a one-to-one correspondence among the following four objects:*

(1) *a monotone infinitely divisible distribution* μ;

(2) *a monotone convolution semigroup* $\{\mu_t\}$ *with* $\mu_0 = \delta_0, \mu_1 = \mu$;

(3) *a composition semigroup of reciprocal Cauchy transforms* $\{H_t\}$ $(H_t \circ H_s = H_{t+s})$ *with* $H_0 = id$, $H_1 = H_\mu$;

(4) *a vector field on the upper half plane* $A(z) = \lim_{t \searrow 0} \frac{H_t(z)-z}{t}$, *which has the form* $A(z) = \alpha + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+xz}{x-z} d\tau(x)$.

3 Main Results

The Lebesgue decomposition (decomposition into an atomic part, a singular continuous part and an absolutely continuous part) of a probability distribution is a basic property. We state the result of the atomic part of a monotone infinitely divisible distribution.

Theorem 3.1 *If a probability measure* ν *contains more than one atom and if one of the atoms is isolated, then* ν *is not* $\triangleright$*-infinitely divisible.*

Thus the number of atoms is restricted strongly in monotone probability theory. This is a property special to monotone probability theory: in probability theory, there are many infinitely divisible distributions which contain more than one atom such as Poisson distribution. In contrast to the above, the following three theorems are the same as in probability theory.

Theorem 3.2 *Let* $\{\mu_t\}_{t \geq 0}$ *be a weakly continuous* $\triangleright$*-convolution semigroup with* $\mu_0 = \delta_0$. *Then the following statements are equivalent:*

(1) *there exists* $t_0 > 0$ *such that* $supp\, \mu_{t_0} \subset [0, \infty)$;

(2) $supp\, \mu_t \subset [0, \infty)$ *for all* $0 \leq t < \infty$;

(3) A *is analytic in* $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ *and* $A < 0$ *on* $(-\infty, 0)$;

(4) $supp\, \tau \subset [0, \infty)$, $\tau(\{0\}) = 0$, $\int_0^\infty \frac{1}{x} d\tau(x) < \infty$ *and* $\alpha + \int_0^\infty \frac{1}{x} d\tau(x) \leq 0$.

Theorem 3.3 *We assume that the support of each* μ_t *is compact (this is a time-independent property). Then the following statements are all equivalent.*

(1) *There exists* $t_0 > 0$ *such that* μ_{t_0} *is symmetric.*

(2) μ_t *is symmetric for all* $t > 0$.

(3) $\alpha = 0$ *and* τ *is symmetric.*

Definition 3.4 *Let* $\{\mu_t\}$ *be a weakly continuous monotone convolution semigroup with* $\mu_0 = \delta_0$. μ_1 *is called strictly* $\rhd$*-stable if for any* $a > 0$ *there exists* $b(a) > 0$ *such that* $\mu_a(dx) = \mu_1(b(a)^{-1}dx)$ *(In terms of a process, this is understood to be the relation* $X_a \equiv b(a)X_1$*.)*

Moreover, it can be proved that there exists an index α: $b(a) = a^{\frac{1}{\alpha}}$.

Theorem 3.5 *Define a semigroup of distributions* $\{\mu_t^{(\alpha,b)}\}_{t\geq 0}$ *by their reciprocal Cauchy transforms:*

$$H_t^{(\alpha,b)}(z) := (z^\alpha + bt)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Any strictly stable distribution coincides with $\mu_1^{(\alpha,b)}$ *for some* α, b*. Here* α *is the index of* $\mu_1^{(\alpha,b)}$*. Parameters* (α, b) *satisfy* $0 < \alpha \leq 2$ *and* $0 \leq \arg b \leq \alpha\pi$ *if* $0 < \alpha \leq 1$; $(\alpha - 1)\pi \leq \arg b \leq \pi$ *if* $1 < \alpha \leq 2$.

References

[Bak] I. N. Baker and Ch. Pommerenke, On the iteration of analytic functions in a halfplane II, J. London Math. Soc. (2), **20**, no.2 (1979), 255-258.

[Bel] S. Belinschi, Complex analysis methods in noncommutative probability. arXiv:math/0602343v1

[Be-Po] E. Berkson and H. Porta, Semigroups of analytic functions and composition operators, Michigan Math. J. **25** (1978), 101-115.

[Cow] C. C. Cowen, Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk, Trans. Amer. Math. Soc. **265**, no.1 (1981), 69-95.

[Mur1] N. Muraki, Non-commutative Brownian motion in monotone Fock space, Commun. Math. Phys. **183** (1997) 557-570.

[Mur2] N. Muraki, Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers, Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics **4** (2001) 39-58.

[Mur3] N. Muraki, Monotonic convolution and monotonic Lévy-Hinčin formula, preprint, 2000.

[Mur4] N. Muraki, Five independences as quasi-universal products, Inf. Dim. Anal. Quantum Probab. Rel. Topics **5**, No. 1, (2002) 113-134.

[Sat] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

3次-4次非線形シュレーディンガー方程式に対する定在波包絡解の相図解析と変調不安定性

Takuya Yamano (山野 拓也)

Department of Information Sciences, Musashi Institute of Technology,

Tamazutsumi, Setagaya, Tokyo 158-8557, Japan

(Dated: January 26, 2009)

The cubic nonlinear Schrödinger equation is known to possess bright and dark soliton solutions for the standing wave form and equations with a quintic term are well studied in the physics literature. In this study, we report the behavior of the standing wave solutions for the one-dimensional cubic-quartic nonlinear Schrödinger equation (CQNLS) $iA_t+pA_{xx}+q|A|^2A+\varepsilon|A|^3A=0$ where $\varepsilon>0$ is a fixed coefficient. We show by using phase portrait analysis that the envelope solutions have a domain in the parameter ε, where both bright and dark solitons can coexist for the two cases ($p<0$, $q<0$) and ($p>0$, $q<0$). The former case is found to be a *gray* soliton having two homoclinic orbits, on the other hand the latter case two homoclinic orbits and two heteroclinic orbits. Furthermore, we derive the condition for the occurence of the modulational instability depending on the sign of the coefficients p, q, and on the value of ε.

PACS numbers:

[Collaboration work with Katsuya Inui, Ben T. Nohara, and Akio Arimoto at Musashi Inst. of Tech.]

I. INTRODUCTION

線形なシュレーディンガー方程式に従う波動関数に対して、冪型非線形項を加えた非線形シュレーディンガー方程式 (NLS) は、量子物理学や非線形光学の分野で中心的な役割をする。物理的な理由から波動関数に対して冪次数が3のみ（通常のNLS (Gross-Pitaevsii 方程式)）、あるいは3と5の二つの冪型非線形項を持つNLSが扱われることが多いが、本稿では、冪次数を $s_1=3$, $s_2=4$ の場合、すなわち3次-4次NLSの定在波解のソリトンについて解軌道がどのようになるかという点に興味を設定し、相図解析により議論する。また数値的にこれらを確認した。更にこの方程式に対して変調不安定性条件を調べた。考える波動関数 $A(t,x)$ が従う方程式は次のものとする。

$$\hat{\mathcal{D}}_pA+f(A)=0 \quad :(CQNLS) \tag{1}$$

ここで、$(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ において演算子は $\hat{\mathcal{D}}_p=i\partial_t+p\partial_{xx}$, 関数は $f(A)=q|A|^2A+\varepsilon|A|^3A$ と定義される。ただし $p,q,\varepsilon\in\mathbb{R}$。NLSは $\varepsilon=0$ の場合に含まれ、より一般の二重冪非線形項型NLS [1] の特殊な場合となっている。

II. FIXED POINTS ANALYSIS

定在波解 $A(x,t)=\varphi(x)e^{-i\Omega t}$ ($\Omega\in\mathbb{R}_+$) を Eq.(1) に代入し、正規系に直した

$$\begin{cases}\varphi'=\eta,\\ \eta'=b^2\varphi(1-a^2|\varphi|^2+c^2|\varphi|^3)\ (=:f(|\varphi|))\end{cases} \tag{2}$$

を $\varphi' - \varphi$ 平面の右半面 $\varphi > 0$ と左半面 $\varphi < 0$ に分割して考える。ここで変換 $-a^2 := q/\Omega$, $b^2 := -\Omega/p$, $c^2 := \varepsilon/\Omega$ $(p < 0, q < 0)$, $-a^2 := q/\Omega$, $b^2 := \Omega/p$, $c^2 := \varepsilon/\Omega$ $(p > 0, q < 0)$ を導入した。本稿では $(p < 0, q > 0)$ と $(p > 0, q > 0)$ の場合については、ソリトン解が存在しないことが分かるので述べない。NLS の場合には、$p < 0, q < 0$ では明ソリトン解 $\varphi(x) = \pm\sqrt{2}\mathrm{sech}(bx)/a$ を持ち、$p > 0, q < 0$ では包絡衝撃波解 (暗ソリトンと呼ぶこともあるが本稿ではこちらを使う) $\varphi(x) = \pm\tanh(bx/\sqrt{2} + const.)/a$ を持つことはよく知られている (例えば文献 [2])。NLS の場合と異なり、CQNLS の場合には適当な境界条件を選んでも $\varphi(x)$ の解析解は得られない。以下に、この NLS ソリトン解が、4 次の非線形項の大きさに応じてどのように変化するかを述べる。

右 (左) 半面における固定点を決める方程式 $f_\pm(x) = 1 - a^2x^2 \pm c^2x^3 = 0$ から、それぞれこの 2 つの解を α、β $(\alpha < \beta)$ とおくと、NLS の場合 $(\varepsilon = 0)$ の固定点– $(0,0)$ (saddle) と $(\pm\alpha = \pm 1/a, 0)$ (center) – の他に更に固定点 $(\pm\beta, 0)$ (saddle) が現れることが分かる。固定点の種類が saddle か center かの判定は正規系から作られるヤコビアン

$$J_{(\varphi,\varphi')} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ K_\pm(\varphi) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

の固有値の計算から簡単に行える。ここで、$K_\pm(\varphi) = b^2(f_\pm(\varphi) + \varphi f'_\pm(\varphi))$ とおいた。もしこれら saddle 点を通る解軌道が互いに繋がれば、$(0,0)$ を始点として $(\pm\alpha, 0)$ (center) を中心に 1 回転して再び $(0,0)$ に至るホモクリニック軌道に加えて、正 (負) の鞍点から φ' 軸を横切って負 (正) の鞍点に至る包絡衝撃波解に類似したヘテロクリニック軌道が同時に存在することになる。相図 $(\varphi' - \varphi$ 面) 上での φ' 軸上におけるその左右平面での解軌道の接続性のためには、

$$\varphi'' = \begin{cases} b^2\varphi f_+(\varphi) \ \ (\varphi > 0), \\ b^2\varphi f_-(\varphi) \ \ (\varphi < 0) \end{cases} \tag{4}$$

においてそれぞれ φ' を乗じて積分した

$$\frac{1}{2}(\varphi')^2 = \frac{b^2}{2}\varphi^2 - \frac{a^2b^2}{4}\varphi^4 \pm \frac{b^2c^2}{5}\varphi^5 + K_\pm \quad (+ : \varphi > 0, - : \varphi < 0) \tag{5}$$

に現れる積分定数 K_+ と K_- の一致性が問題となる。しかし実際 Eq.(4) に境界条件 $\varphi(\pm\infty) = \pm\beta, \varphi'(\pm\infty) = 0$ をそれぞれ代入することにより、Eq.(4) に沿った極限は、

$$\lim_{\varphi\to+0}(\varphi')^2 = \lim_{\varphi\to-0}(\varphi')^2$$

となるので、φ が滑らかとすれば φ' の接続性が言えることになる。従って固定点 $(\pm\beta, 0)$ を結ぶヘテロクリニック軌道の存在が保証される。詳細は省略するが、Eq.(5) 右辺の φ の冪項がポテンシャルに相当し、これと α, β の正値性から ε の大きさにより解軌道の性質が異なる。定在波包絡線のソリトン解の性質を以下の定理にまとめる。

定理：(Solitons for the CQNLS) 定在波解の搬送波振動数と 4 次非線形性は正値であると仮定する $(\Omega > 0, \varepsilon > 0)$。

(1) $p < 0, q < 0$ であるとき、

i) $\varepsilon^2 < \frac{25}{216}\frac{(-q)^3}{\Omega}$ ならば、明ソリトン解と包絡衝撃波解が共存。　ii) $\varepsilon^2 = \frac{25}{216}\frac{(-q)^3}{\Omega}$ ならば、包絡衝撃波解のみ存在。

iii) $\frac{25}{216}\frac{(-q)^3}{\Omega} < \varepsilon^2 < \frac{4}{27}\frac{(-q)^3}{\Omega}$ ならば、グレイソリトン解のみ存在。　iv) $\varepsilon^2 \geq \frac{4}{27}\frac{(-q)^3}{\Omega}$ ならば、ソリトン解は存在しない。

(2) $p > 0, q < 0$ であるとき、

i) $\varepsilon^2 < \frac{4}{27}\frac{(-q)^3}{\Omega}$ ならば、明ソリトン解と包絡衝撃波解が共存。　ii) $\varepsilon^2 \geq \frac{4}{27}\frac{(-q)^3}{\Omega}$ ならば、ソリトン解は存在しない。

III. PHASE PORTRAIT FOR THE CQNLS

前節の解析結果を Mathematica により描いた相図を示すことにより確認する。FIG.1 は、CQNLS に対して $p < 0,\ q < 0$ の場合に、$\varepsilon < \sqrt{25/216}$ を満たす時である。一方 FIG.2 は CQNLS に対して $p < 0, q < 0$ の場合であるが、4 次の非線形性が $\sqrt{25/216} < \varepsilon < \sqrt{4/27}$ の範囲にあり、gray soliton の存在を示す相図である。ただし両方とも $-q/\Omega = 1.0, -\Omega/p = 1.0$ と設定。比較のために同条件で通常の NLS に対してそれぞれ $p < 0, q < 0$ の場合 (FIG.3) と $p > 0,$

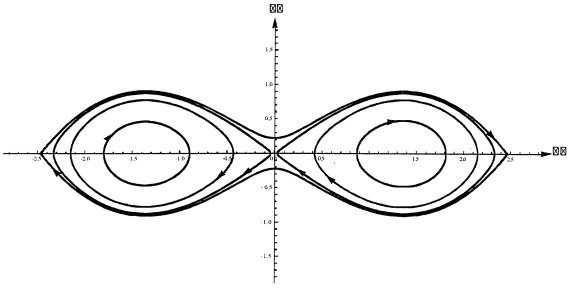


FIG. 1: 相図： CQNLS $p < 0,\ q < 0,\ \varepsilon^2 = 24.8/216$。ヘテロクリニック軌道: $(-2.46585, 0) \rightleftharpoons (2.46585, 0)$, 鞍点 $(0,0)$ に対応する 2 本のホモクリニック軌道 と中心点 $(\pm 1.36327, 0)$ を周る neutral 安定軌道

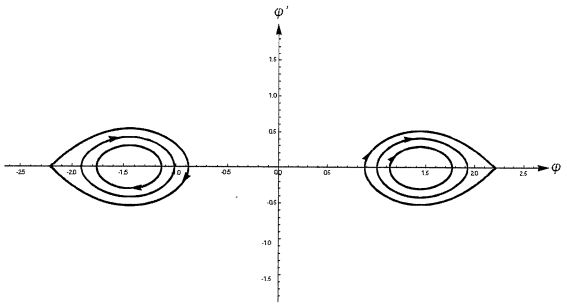


FIG. 2: 相図: CQNLS $p < 0, q < 0, \varepsilon^2 = 0.36$。二つの鞍点 $(\pm 2.20802, 0)$ に対応する 2 本のホモクリニック軌道と中心点 $(\pm 1.44212, 0)$ を周る neutral 安定軌道

$q < 0$ の場合 (FIG.4) の相図を示す。**定理** (1)-(ii) を示す軌道を FIG.5 ($\varepsilon^2 = 25/216$) に示す。FIG.6 は $p > 0, q < 0$ の場合に $\varepsilon^2 = 0.36$ とした相図である。

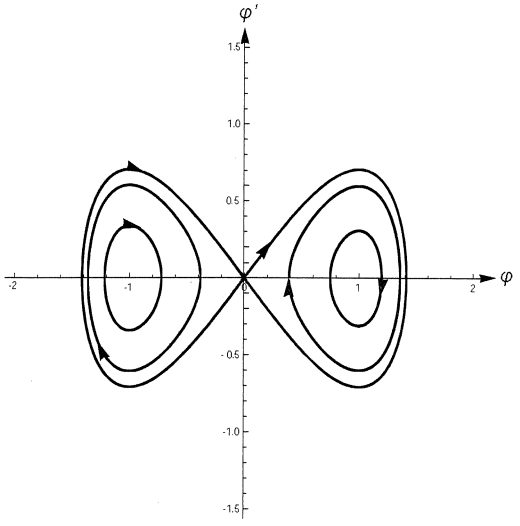


FIG. 3: NLS： $p < 0,\ q < 0$ の場合。sech 型のソリトンは、鞍点 $(0,0)$ に対するホモクリニック軌道。中心点 $(\pm 1, 0)$ を周る neutral 安定軌道。

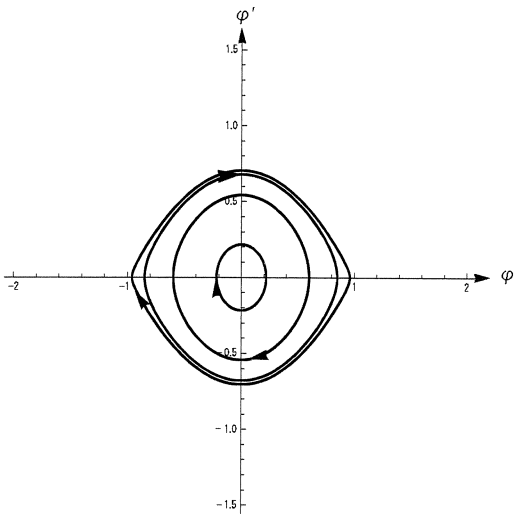


FIG. 4: NLS： $p > 0,\ q < 0$ の場合。鞍点 $(\pm 1, 0)$ を繋ぐ 2 本のヘテロクリニック軌道と中心点 $(0,0)$ を周る neutral 安定軌道

IV. DISCUSSION ON STABILITY

安定・不安定性には様々な定義がある。

- 軌道安定性
  一般に定在波解 $v(x,t) = e^{i\Omega t}\varphi(x),\ (t > 0)$ に対して

$$\|\varphi_0 - v(\cdot, 0)\|_{H^1} < \delta \Longrightarrow \inf_{\theta\in\mathcal{R}, y\in\mathcal{R}^3} \|\varphi(\cdot, t) - e^{i\theta} v(\cdot + y, t)\|_{H^1} < \epsilon \qquad (6)$$

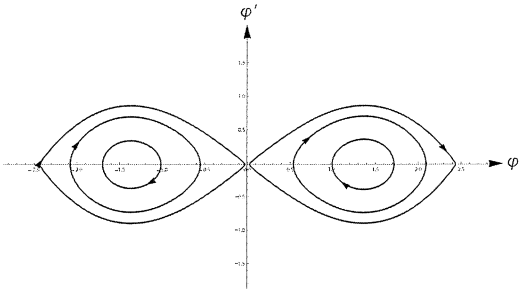


FIG. 5: CQNLS： $p < 0$, $q < 0$, $\varepsilon^2 = 25/216$ の場合。鞍点 $(0,0) \rightleftharpoons (\pm\sqrt{6},0)$ へのヘテロクリニック軌道と中心点 $(\pm(\sqrt{6}+3\sqrt{14})/10,0)$ を周る neutral 安定軌道。FIG.1 との違いに注意。

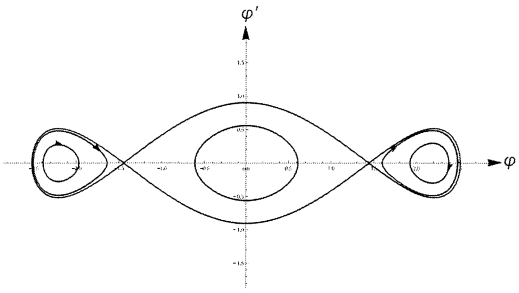


FIG. 6: CQNLS： $p > 0$, $q < 0$, $\varepsilon^2 = 0.36$ の場合。2 本のヘテロクリニック軌道 $(-1.44212,0) \rightleftharpoons (1.44212,0)$ と鞍点 $(\pm 1.44212,0)$ に対応するホモクリニック軌道。

(ただし $\varphi_0 = \varphi(x,0) \in H^1$) が任意の $\epsilon > 0$ とある $\delta > 0$ に対して成り立つとき安定であるとする定義 [1] において、線形シュレーディンガー方程式 (LS) に対して二つの冪型非線形項を持つ場合に、次の事項が既知である [3]。すなわち– LS に加わる非線形項の関数型 $f(\varphi) = |\varphi|^{s_1-1}\varphi - |\varphi|^{s_2-1}\varphi$ の指数が $1 < s_1 < 5 < s_2 < \infty$ を満たし、かつ Ω が十分小さい時に安定である –。この安定性は、定在波解の形状安定性といったものと解釈できる。本研究の CQNLS ($s_1 = 3$, $s_2 = 4$) はこの条件を満たしてはいない。

- 変調不安定性 (ベンジャミン型不安定性)
  NLS は強分散系と呼ばれ、摂動波解の振幅が指数関数的に増大する場合がある [2, 4]。

CQNLS に対して変調不安定性解析を行う。CQNLS の平面波解の振幅と位相に対して同型の振動的摂動が付加された平面波解 $A(x,t) = [A_0 + b_0 e^{i(\delta x - \nu t)}]e^{i(kx - \Omega t + \theta_0 e^{i(\delta x - \nu t)})}$ ($\delta, \nu \in \mathbb{C}$) を Eq.(1) に代入し、摂動を受けない時の平面波解 (振幅 A_0) から得られる分散関係 $\Omega = pk^2 - (q + \varepsilon A_0)A_0^2$ に注意して、実部と虚部の満たす方程式の線形化後に得られる θ_0 と b_0 に対する次の関係式を得る。

$$\begin{cases} iA_0(\nu - 2pk\delta)\theta_0 + [(2q + 3\epsilon A_0)A_0^2 - p\delta^2]b_0 = 0, \\ A_0 p\delta^2\theta_0 + i(\nu - 2pk\delta)b_0 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

上の方程式が非自明な解をもつ条件 (係数行列の行列式がゼロ) より関係式 $(\nu - 2pk\delta)^2 = \delta^2[-p(2q + 3\epsilon A_0)A_0^2 + p^2\delta^2]$ が得られることが分かる。従って、加えられた摂動が指数関数的成長をもたらす条件は次のようにまとめられる。またその成長率は次式で与えられることがわかる。

$$\begin{cases} \forall\varepsilon & (p > 0, q > 0), \\ \varepsilon > -\frac{2q}{3A_0} & (p > 0, q < 0), \\ N/A & (p < 0, q > 0), \\ \varepsilon < -\frac{2q}{3A_0} & (p < 0, q < 0) \end{cases} \qquad \mathrm{Im}(\nu) = pA_0\delta\sqrt{\frac{2q + 3\varepsilon A_0}{p} - \left(\frac{\delta}{A_0}\right)^2}. \tag{8}$$

次図は得られた不安定成長率曲線を 4 次の非線形性 ε の強度に応じてプロットしたものである (曲線の小さい方から $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\varepsilon = 0.55$ に対応)。つまり 4 次の非線形性は、通常の NLS の不安定成長率に対してその最大値 qA_0^2 ($\delta/A_0 = \sqrt{q/p}$ において)、およびゼロ成長率を与える波数 $\delta/A_0 = \sqrt{2q/p}$ を共に大きい方へシフトさせる効果があることが分かる。

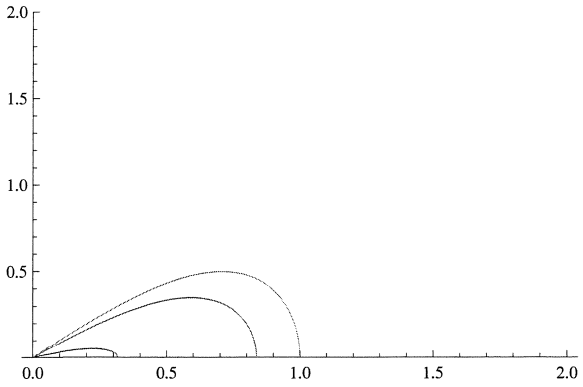


FIG. 7: Im(ν) (縦軸) vs. δ/A_0 (横軸) for $p = -1.0$, $q = -1.0$

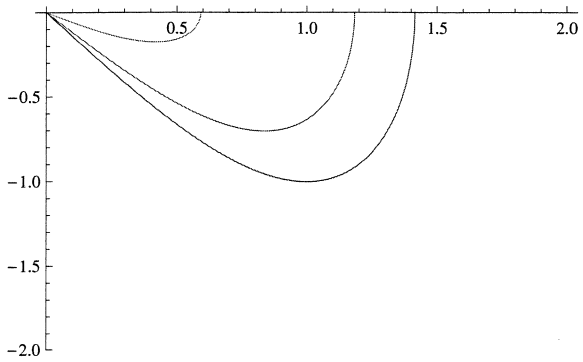


FIG. 8: Im(ν) (縦軸) vs. δ/A_0 (横軸) for $p = 1.0$, $q = -1.0$

V. SUMMARY

以上 CQNLS の相図解析から 4 次の非線形効果が通常の NLS とは質的に異なる解軌道を与えることを見た。ホモクリニック、ヘテロクリニック軌道を数値的に示した。詳細は文献 [5] に与えられる。変調不安定性に関しては、二重冪に限定せずとも多重冪非線形項を持つ NLS の場合にも不安定成長率が計算できる。その場合、高次非線形性の効果は Eq.(8) 第二式の根号の中の第一項の分子にのみ入ってくる。

Acknowledgments

旅費の援助を含め、研究集会事務局の方々に感謝いたします。

[1] Y. Tsutsumi, Lecture notes in Mathematics, Basics series 3, *Partial Differential Equations* , Baifukan (2004), in Japanese.

[2] S. Watanabe, Introduction to Soliton Physics, Baifukan (1985) in Japanese.

[3] M. Ohta, Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, Kodai Math. J. **18** pp. 68-74 (1995).

[4] T. B. Benjamin and J. E. Feir. *The disintegration of wavetrains on deep water, Part 1, Theory*, J. Fluid. Mech. **27**, pp.417-430 (1967).

[5] K.Inui, B.T. Nohara, T. Yamano, A. Arimoto, *On Solitons of the Standing Wave Solutions and Modulational Instability for the Cubic-Quartic Nonlinear Schrödinger equation*, to be submitted.

多重ゼータ値の一般導分関係式について*

九州大学大学院数理学研究院　田中 立志

1　序

(Euler-Zagier 型の) 多重ゼータ値 (multiple zeta value, MZV) とは, $k_1 > 1, k_2, \ldots, k_n \geq 1$ に対して,

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

のことをいう. 条件 $k_1 > 1$ によりこの級数は絶対収束し, ひとつの実数値を与える. われわれは, しばしば $k_1 + \cdots + k_n$, n をそれぞれ MZV $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ の重さ, 深さと呼ぶ. たとえば, 深さが 1 の MZV はリーマンゼータ値である.

$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の族 $\{\mathcal{Z}_k\}_{k=0}^{\infty}$ を,

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}, \mathcal{Z}_1 = 0, \mathcal{Z}_k = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_n = k, \\ n \geq 1, k_1 > 1, k_2, \ldots, k_n \geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta(k_1, \ldots, k_n) \quad (k \geq 2)$$

としよう. すなわち, $\mathcal{Z}_k$ は重さ k の MZV たちで張られる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間である. この $\{\mathcal{Z}_k\}_{k=0}^{\infty}$ について, 次の予想が有名である.

Conjecture 1 (Zagier). 数列 $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ を, $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geq 3)$ で定める. このとき, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ であろう.

この予想に関して, 次の顕著な結果がある.

Theorem 2 (Goncharov, 寺杣). 任意の $k \geq 0$ に対し, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$.

Goncharov や寺杣は, この定理を代数幾何的に証明した. ($\mathcal{Z}_k$ の $\mathbb{Q}$ 上の次元を d_k で下から評価することができれば Zagier の予想が解決するが, この問題は MZV の間の 1 次独立性を示すということに相当し, 一般には極めて難しい問題とされている. 今のところこれが解決される見込みはほとんどない.)

さて, Goncharov や寺杣の定理によると, MZV の間には多くの $\mathbb{Q}$-線形関係式が成り立つ. (重さが k のインデックスの個数が 2^{k-2} 個あるため, 各重さ k 毎に少なくとも $2^{k-2} - d_k$ 個の 1 次独立な $\mathbb{Q}$-線形関係式が存在していることになる.) そこで, 1 つの問題意識として, MZV の間の関係式 (の族) を具体的に記述し証明を与えるということがある.

本稿では, Connes-Moscovici のホップ代数を参考に金子 [4] により予想され筆者 [6] が解決した, MZV の間のひとつの具体的な $\mathbb{Q}$-線形関係式の族 (一般導分関係式と呼んでいる) に関して概説する.

*2009/3/4, 於：MCYR5 (北海道大学大学院)

2 準備

2.1 MZV の代数的定式化

以下では MZV の関係式について代数的に議論する. まずはじめに, Hoffman [2] により導入された, MZV の代数的定式化について述べる.

2 変数の非可換多項式環 $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ の部分環 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ を

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y \supset \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$$

とおく. $z_k = x^{k-1}y$ $(k \geq 1)$ とし, $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$ および

$$Z(z_{k_1} \cdots z_{k_n}) = \zeta(k_1, \ldots, k_n)$$

で定める. このとき, MZV の関係式を見つけるということは $\ker Z$ の元を見つけるということにほかならない.

$\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*\colon \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を, $\mathbb{Q}$-双線形性および次の 2 条件により定める.

(i) 任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $1 * w = w * 1 = w$,

(ii) 任意の $k, l \geq 1$ と任意の語 $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対して,
$z_k w * z_l w' = z_k(w * z_l w') + z_l(z_k w * w') + z_{k+l}(w * w')$.

この積 $*$ は調和積と呼ばれ, $\mathfrak{H}^1$ 上で結合的かつ可換な積である. (よく知られた MZV の級数表示からくる調和積公式は, 写像 Z が $*$-準同型である, と言い換えられる.)

2.2 川島関係式

MZV の一般導分関係式の証明のために [6] で用いられた方法は, 川島 [5] により証明された MZV の間のある関係式に帰着させるというものである. 詳細は [5] や [7] に譲るとして, 本節では定理の主張とその具体例を紹介する.

$w \in \mathfrak{H}$ に対し $\mathbb{Q}$-線形写像 L_w を $L_w(w') = ww'$ と定義する. また, φ を $\mathfrak{H}$ 上の自己同型写像で

$$\varphi(x) = x + y,\ \varphi(y) = -y$$

で定義する. このとき,

Theorem 3 (川島 [5]). $L_x\varphi(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y) \subset \ker Z$.

Example 4. (1) (重さ 3 の場合)
$L_x\varphi(y * y) = L_x\varphi(2y^2 + xy) = L_x(2y^2 - (x+y)y) = L_x(y^2 - xy) = xy^2 - x^2y$.
両辺に Z を施すと, $\zeta(2,1) - \zeta(3) = 0$ を得る.

(2) (重さ 4 の場合)
$L_x\varphi(y * xy) = L_x\varphi(yxy + xy^2 + x^2y) = xy^3 - x^3y$.
両辺に Z を施すと, $\zeta(2,1,1) - \zeta(4) = 0$.
$L_x\varphi(y * y^2) = L_x\varphi(3y^3 + yxy + xy^2) = -xy^3 + xyxy + x^2y^2$.
両辺に Z を施すと, $-\zeta(2,1,1) + \zeta(2,2) + \zeta(3,1) = 0$.

3 一般導分関係式

3.1 導分関係式

ここでは, 井原-金子-Zagier [3] により証明された導分関係式について紹介し, 次節でその一般化について述べるための足がかりとする.

∂ が2変数非可換多項式環 $\mathfrak{H}$ 上の導分であるとは, ∂ が $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像であって, ライプニッツ則

$$\partial(ww') = \partial(w)w' + w\partial(w') \quad (w, w' \in \mathfrak{H})$$

を満たすもののことをいう. $\mathfrak{H}$ 上の導分は, $\mathfrak{H}$ の生成元 x と y の像を与えれば一意的に定まる.

今, $n \geq 1$ に対し, $\mathfrak{H}$ 上の導分 $\partial_n \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y, \partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y$$

とする. このとき, 導分関係式は次で与えられる.

Theorem 5 (井原-金子-Zagier)**.** 任意の $n \geq 1$ に対して, $\partial_n(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

3.2 一般導分関係式

Connes-Moscovici [1] のホップ代数を参考に金子 [4] が定義した導分 ∂_n の一般化と, [6] の中で解決された MZV の一般導分関係式（金子予想）について述べる.

$n \geq 1$, $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\mathbb{Q}$-線形写像 $\partial_n^{(c)} \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\partial_n^{(c)} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}(\theta^{(c)})^{n-1}(\partial_1)$$

で定義する. ただし, $\theta^{(c)} \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ は

$$\theta^{(c)}(x) = x^2 + \frac{1}{2}(xy+yx),\ \theta^{(c)}(y) = y^2 + \frac{1}{2}(xy+yx),$$

および

$$\theta^{(c)}(ww') = \theta^{(c)}(w)w' + w\theta^{(c)}(w') + c\partial_1(w)H(w')$$

で定義される $\mathbb{Q}$-線形写像である. H はいわゆるオイラー・オペレーターで, 語 $w \in \mathfrak{H}$ に対して $H(w) = \deg(w)w$ で定義される $\mathbb{Q}$-線形写像（実は $\mathfrak{H}$ 上の導分）である. ad は, 交換子として定義されるリー括弧積である: $\mathrm{ad}(\theta)(\partial) = [\theta, \partial] = \theta\partial - \partial\theta$.

$c = 0$ のとき, $\partial_n^{(0)} = \partial_n$ であることが確かめられる. $n = 1$ なら, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して $\partial_1^{(c)} = \partial_1$ である. $c \neq 0$ かつ $n \neq 1$ であれば, $\partial_n^{(c)}$ はもはや $\mathfrak{H}$ 上の導分ではないが, 次が示せる. （証明は [6] 参照.）

Proposition 6. (1) （可換性）任意の $n, m \geq 1$, 任意の $c, c' \in \mathbb{Q}$ に対して, $[\partial_n^{(c)}, \partial_m^{(c')}] = 0$.
(2) 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\partial_n^{(c)}(\mathfrak{H}^0) \subset \mathfrak{H}^0$.

さらに, 以下の命題も成り立つ. $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $\mathcal{H}_w$ を

$$\mathcal{H}_w(w') = w * w'$$

なる $\mathbb{Q}$-線形写像とする. τ を $\mathfrak{H}$ 上の反自己同型写像で $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$ とする. この τ は, MZV の双対公式を与える写像である：

$$(1 - \tau)(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z. \tag{1}$$

$\chi_x = \tau L_x \varphi$ とおく. このとき,

Proposition 7. 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, ある $w = w(n, c) \in \mathfrak{H}y$ が存在して, $\mathfrak{H}^1$ 上で

$$\partial_n^{(c)} \chi_x = \chi_x \mathcal{H}_w$$

が成り立つ. 言い換えれば, 次の可換図式が成立する：

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}^1 & \xrightarrow{\mathcal{H}_w} & \mathfrak{H}^1 \\ {\scriptstyle \chi_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_x} \\ \mathfrak{H}^0 & \xrightarrow[\partial_n^{(c)}]{} & \mathfrak{H}^0 \end{array}$$

証明は [6] を参照.

以上より, MZV の一般導分関係式が証明される：

Theorem 8 ([6])**.** 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\partial_n^{(c)}(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

Proof. $\mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ および $\partial_n^{(c)}(\mathbb{Q}) = \{0\}$ であることより, われわれは

$$\partial_n^{(c)}(x\mathfrak{H}y) \subset \ker Z \tag{2}$$

を示せばよい.

τ の定義, および φ は $\mathfrak{H}$ 上の自己同型写像で $\varphi(y) = -y$ であることより,

$$\chi_x(\mathfrak{H}y) = x\mathfrak{H}y$$

である. また, Proposition 7 により, ある $w \in \mathfrak{H}y$ に対して,

$$\partial_n^{(c)} \chi_x = \chi_x \mathcal{H}_w$$

が成り立つ. したがって,

$$\partial_n^{(c)}(x\mathfrak{H}y) = \partial_n^{(c)} \chi_x(\mathfrak{H}y) = \chi_x \mathcal{H}_w(\mathfrak{H}y) \subset \chi_x(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y). \tag{3}$$

$\tau = 1 - (1 - \tau)$ なる変形をすることにより,

$$(\text{RHS of (3)}) \subset L_x \varphi(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y) - (1 - \tau)(\mathfrak{H}^0)$$

を得る. Theorem 8 および MZV の双対公式 (1) により, (2) を得る. □

上の証明において MZV の双対公式 (1) を用いたが, 川島 [5] において

$$(1 - \tau)(\mathfrak{H}^0) \subset L_x \varphi(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y)$$

が示してあるため, 一般導分関係式が Theorem 8 の川島関係式に含まれていることに注意しておく.

References

[1] A. Connes and H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. 198 (1998), no. 1, 199–246.

[2] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra 194 (1997), 477–495.

[3] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 307–338.

[4] M. Kaneko, *On an extension of the derivation relation for multiple zeta values*, The Conference on L-Functions, 89–94, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007).

[5] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, preprint, arXiv: math. NT/0702824.

[6] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, preprint, arXiv: math. NT/07104920.

[7] T.Tanaka, *Algebraic interpretation of Kawashima relation for multiple zeta values and its applications*, in preparation.

HETERODIMENSIONAL TANGENCIES ON CYCLES LEADING TO STRANGE ATTRACTORS

YUSUKE NISHIZAWA

Joint work with
Shin Kiriki (Kyoto University of Education),
Teruhiko Soma (Tokyo Metropolitan University)

ABSTRACT. We study a two-parameter family $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ of 3-dimensional diffeomorphisms which have a bifurcation induced by simultaneous generation of a heterodimensional cycle and a heterodimensional tangency associated to two saddle points. We show that such a codimension-2 bifurcation introduces a quadratic homoclinic tangency associated to one of the saddle continuations which unfolds generically with respect to some one-parameter subfamily of $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$. Moreover, from this result together with some well-known facts, we detect nonhyperbolic phenomena (e.g. the existence of nonhyperbolic strange attractors and the C^2 Newhouse phenomenon of dimension three) arbitrarily close to the codimension-2 bifurcation.

1. INTRODUCTION

When diffeomorphisms act on manifolds of dimension greater than or equal to three, it is well known that nonhyperbolic phenomena are caused by the existence of heteroclinic cycles containing two saddle points with different indexes, called *heterodimensional cycles*, as well as that of homoclinic tangencies [13, 16, 10, 15, 17, 11]. Heterodimensional cycles presented a new mechanism in dynamics, which has been studied Díaz et al. [7, 6, 8, 2, 9, 3, 4]. As is suggested in [14], these two classes of nonhyperbolic diffeomorphisms seem to occupy large parts in the space of diffeomorphisms on closed manifolds as the class of hyperbolic diffeomorphisms does. We study 3-dimensional diffeomorphisms which have heterodimensional cycles and tangencies of certain type simultaneously.

Let φ be a diffeomorphism on a smooth manifold M which has two saddle fixed points p and q satisfying $\mathrm{index}(q) = \mathrm{index}(p)+1$, where $\mathrm{index}(\cdot)$ denotes the dimension of the unstable manifold of the saddle point. A heteroclinic point r of the stable manifold $W^s(p)$ and the unstable manifold $W^u(q)$ is called a *heterodimensional tangency* of $W^s(p)$ and $W^u(q)$ if r satisfies

- $T_rW^s(p) + T_rW^u(q) \neq T_rM$;
- $\dim(T_rW^s(p)) + \dim(T_rW^u(q)) > \dim(M)$,

where $\dim(\cdot)$ denotes the dimension of the space.

2. MAIN THEOREM

Our main theorem is as follows. We will present some definitions and generic conditions used in the statement of Theorem 2.1 in Section 3.

Theorem 2.1. *Let M be a 3-dimensional C^2 manifold, and let $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ be a two-parameter family of C^2 diffeomorphisms $\varphi_{\mu,\nu} : M \to M$ which C^2 depends on (μ,ν) and has continuations of saddle fixed points $p_{\mu,\nu}$ and $q_{\mu,\nu}$ with $\mathrm{index}(p_{\mu,\nu}) = 1$ and $\mathrm{index}(q_{\mu,\nu}) = 2$. Suppose that the following conditions hold.*

- *Each $\varphi_{\mu,\nu}$ is locally C^2 linearizable in a small neighborhood $N(q_{\mu,\nu})$ of $q_{\mu,\nu}$.*
- *$\varphi = \varphi_{0,0}$ has a heterodimensional cycle containing the fixed points $p = p_{0,0}$, $q = q_{0,0}$, a nondegenerate heterodimensional tangency r, a quasi-transverse intersection $s \in W^s(q) \cap W^u(p)$.*

- $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ *satisfies the generic conditions (C1)-(C3) given in Section 3.*

Then, for a sufficiently small $\varepsilon > 0$ *and any* μ *in either* $(0, \varepsilon)$ *or* $(-\varepsilon, 0)$, *there exist infinitely many* ν *such that* $\varphi_{\mu,\nu}$ *has a quadratic homoclinic tangency associated to* $p_{\mu,\nu}$ *which unfolds generically with respect to the* ν*-parameter family* $\{\varphi_{\mu(\text{fixed}),\nu}\}$.

Figure 2.1 illustrates an example of bifurcation satisfying the hypotheses of Theorem 2.1 for $(\mu, \nu) = (0, 0)$.

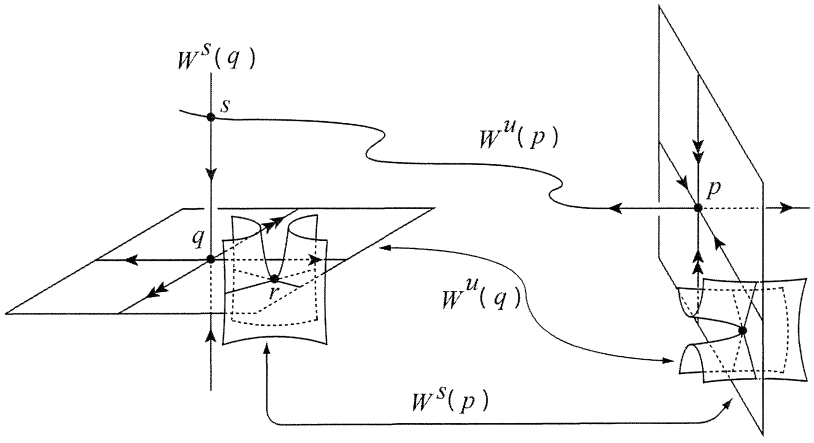


FIGURE 2.1. A heterodimensional cycle containing the saddle points p, q, the heterodimensional tangency r and the quasi-transverse intersection s.

By Theorem 2.1, we have obtained a quadratic homoclinic tangency associated to one of these saddle fixed points which unfolds generically. Viana [18] and Leal [12] showed the existence of strange attractors accompanying quadratic homoclinic bifurcations given by C^∞ diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than or equal to two. Supposing a sufficient smoothness for the diffeomorphisms and their linearizabilities around one of saddle fixed points with dissipative condition and using [18, 12], we get the following corollary. Note that not just the quadratic property for tangencies but also the generic unfolding property guaranteed by Theorem 2.1 plays an essential role in applying results of Viana and Leal to our heterodimensional bifurcation.

Corollary 2.2. *Let* M *be a* 3*-dimensional* C^∞ *manifold, and let* $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ *be a two-parameter family in* $\mathrm{Diff}^\infty(M)$ *satisfying the conditions in Theorem 2.1. Suppose that each* $\varphi_{\mu,\nu}$ *is locally* C^4 *linearizable in a small neighborhood of* $p_{\mu,\nu}$ *and* $\varphi = \varphi_{0,0}$ *is sectionally dissipative at* p, *i.e. the absolute value of the product of any two eigenvalues of* $(d\varphi)_p$ *is less than* 1. *Then*

(1) *there exists a positive Lebesgue measure subset* $\mathcal{A}$ *of the* $\mu\nu$*-plane such that* $\varphi_{\mu,\nu}$ *has a strange attractor for any* $(\mu, \nu) \in \mathcal{A}$;
(2) *there exists an open subset* $\tilde{\mathcal{A}}$ *of the* $\mu\nu$*-plane containing* $(0, 0)$ *in its closure and a dense subset* $\mathcal{D}$ *in* $\tilde{\mathcal{A}}$ *such that, for any* $(\mu, \nu) \in \mathcal{D}$, $\varphi_{\mu,\nu}$ *has infinitely many strange attractors.*

By applying Palis-Viana [15, p. 207, Main Theorem] to diffeomorphisms of class C^2 but not necessarily C^∞, one can get the C^2 Newhouse phenomenon, that is, *there exists an open subset* $\mathcal{B}$ *of* $\mathrm{Diff}^2(M)$ *with* $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}) \ni \varphi$ *and such that generic diffeomorphisms in* $\mathcal{B}$ *have infinitely many sinks.*

The reason why we have not added this result to the statement of Corollary 2.2 is that the corresponding phenomenon around heterodimensional cycles have been already observed even in the case of C^1 diffeomorphisms. In fact, Díaz et al. [5] proved that (under some natural conditions) the unfolding of heterodimensional tangencies leads to non-dominated dynamics and therefore (by results of [2] and [3]) to the C^1 Newhouse coexistence phenomenon, see also [1] for a different approach to the phenomenon. On the other hand, the theory of strange attractors has not been so far developed in the C^l category $(l = 1, 2)$.

3. Definitions and generic conditions

In this section, we present some definitions and generic conditions adopted as hypotheses in Theorem 2.1.

3.1. **Definitions.**

Definition 3.1. Suppose that M is a 3-dimensional C^2 manifold. Let $\{l_\nu\}_{\nu\in J}$, $\{m_\nu\}_{\nu\in J}$ be C^2 families of regular curves in M, and let $\{S_\nu\}_{\nu\in J}$, $\{Y_\nu\}_{\nu\in J}$ be C^2 families of regular surfaces in M, where J is an open interval.

(1) Suppose that l_{ν_0} and m_{ν_0} intersect at a point s for some $\nu_0 \in J$ and some open neighborhood U of s in M has a C^2 change of coordinates with respect to which $m_\nu = \{(0,0,z) \in U\}$ for any $\nu \in J$ near ν_0. We say that s is a *quasi-transverse intersection* of l_{ν_0} and m_{ν_0} if

$$\dim(T_s(l_{\nu_0}) + T_s(m_{\nu_0})) = 2.$$

Moreover, s *unfolds generically* at $\nu = \nu_0$ with respect to $\{l_\nu\}_{\nu\in J}$, $\{m_\nu\}_{\nu\in J}$ if there exists a C^2 continuation $s_\nu \in l_\nu$ with $s_{\nu_0} = s$ and a C^2 function $d : J \to \mathbb{R}^+$ with $d(\nu_0) \neq 0$ such that

$$T_sM = T_s(l_{\nu_0}) \oplus N \oplus T_s(m_{\nu_0}) \quad \text{and} \quad \operatorname{dist}(s_\nu, m_\nu) = |\nu - \nu_0| d(\nu) \tag{3.1}$$

for any ν near ν_0, where N is the one-dimensional space spanned by the non-zero tangent vector $(ds_\nu/d\nu)|_{\nu=\nu_0}$. This property corresponds to the conditions (GU1)–(GU3) in [9, §2.2.1].

(2) Suppose that l_{ν_0} and S_{ν_0} intersect at a point τ for some $\nu_0 \in J$. We say that τ is a *quadratic tangency* (or a *contact of order* 1) of l_{ν_0} and S_{ν_0} if there exists some C^2 change of coordinates on $U(\tau)$ with respect to which $\tau = (0,0,0)$, $S_\nu = \{(x,y,z) \in U(\tau)\,;\, z = 0\}$ and l_ν has a regular parametrization $l(\nu,t) = (x(\nu,t), y(\nu,t), z(\nu,t))$ with $l(\nu_0,0) = (0,0,0)$ and

$$\frac{\partial z}{\partial t}(\nu_0,0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(\nu_0,0) \neq 0,$$

where $U(\tau)$ is an open neighborhood of τ in M. The tangency τ is said to *unfold generically* at $\nu = \nu_0$ with respect to $\{l_\nu\}_{\nu\in J}$ and $\{S_\nu\}_{\nu\in J}$ if

$$\frac{\partial z}{\partial \nu}(\nu_0,0) \neq 0.$$

(3) Suppose that S_{ν_0} and Y_{ν_0} intersect at a point r for some $\nu_0 \in J$. We say that r is a *nondegenerate heterodimensional tangency* of S_{ν_0} and Y_{ν_0} if there exists a C^2 coordinate on an open set U in M containing r with $r = (u_0, v_0, 0)$ for some $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, $S_\nu = \{(x,y,z) \in U\,;\, z = 0\}$ and such that Y_ν has a parametrization $(x, y, f_\nu(x,y))$ the third entry $f_\nu(x,y) = f(\nu,x,y)$ of which is a C^2 function satisfying

$$f_{\nu_0}(u_0,v_0) = 0, \quad \frac{\partial f_{\nu_0}}{\partial x}(u_0,v_0) = \frac{\partial f_{\nu_0}}{\partial y}(u_0,v_0) = 0, \quad \det(Hf_{\nu_0})_{(u_0,v_0)} \neq 0, \tag{3.2}$$

where $(Hf_{\nu_0})_{(u_0,v_0)}$ is the Hessian matrix of f_{ν_0} at $(x,y) = (u_0,v_0)$. The tangency r *unfolds generically* at $\nu = \nu_0$ if

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(\nu_0,u_0,v_0) \neq 0.$$

When $\det(Hf_{\nu_0})_{(u_0,v_0)} > 0$ (resp. < 0) in Definition 3.1 (3), we say that the tangency $r = (u_0,v_0,0)$ is of *elliptic* (resp. *hyperbolic*) type. The Taylor expansion of f_{ν_0} around (u_0,v_0) is

$$\begin{aligned} f_{\nu_0}(x,y) = {} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_{\nu_0}}{\partial x^2}(u_0,v_0)(x-u_0)^2 + \frac{\partial^2 f_{\nu_0}}{\partial x \partial y}(u_0,v_0)(x-u_0)(y-v_0) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_{\nu_0}}{\partial y^2}(u_0,v_0)(y-v_0)^2 + o\big((|x-u_0| + |y-v_0|)^2\big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

From (3.3) together with the classification of quadratic surfaces in $\mathbb{R}^3$, we know that Y_{ν_0} has the form near $r = (u_0,v_0,0)$ as illustrated in Fig. 3.1.

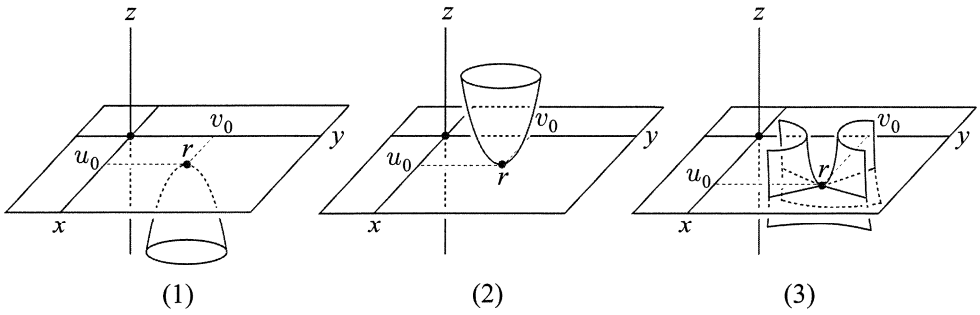


FIGURE 3.1. (1) r is of elliptic type and $\partial^2 f_{\nu_0}(u_0, v_0)/\partial x^2 < 0$. (2) r is of elliptic type and $\partial^2 f_{\nu_0}(u_0, v_0)/\partial x^2 > 0$. (3) r is of hyperbolic type.

3.2. **Generic conditions.** We suppose that $\varphi : M \to M$ is a C^2 diffeomorphism with saddle fixed points p, q with index$(p) = 1$, index$(q) = 2$ and such that $W^s(p)$ and $W^u(q)$ have a nondegenerate heterodimensional tangency r, $W^u(p)$ and $W^s(q)$ have a quasi-transverse intersection s. The φ is *locally C^2 linearizable* in a neighborhood $U(q)$ of q if there exists a C^2 linearizing coordinate (x, y, z) on $U(q)$, that is,

$$q = (0, 0, 0), \quad \varphi(x, y, z) = (\alpha x, \beta y, \gamma z) \tag{3.4}$$

for any $(x, y, z) \in U(q)$ with $\varphi(x, y, z) \in U(q)$, where α, β and γ are the real eigenvalues of $(d\varphi)_q$ with

$$0 < \gamma < 1 < \beta < \alpha.$$

One can take a local unstable manifold $W^u_{\mathrm{loc}}(q)$ so that it is an open disk in the plane $\{z = 0\}$ centered at $(x, y) = (0, 0)$. We may assume that the both points r, s are contained in $U(q)$ if necessary replacing r (resp. s) by $\varphi^{-n}(r)$ (resp. $\varphi^n(s)$) with sufficiently large $n \in \mathbb{N}$. We set

$$r = (u_0, v_0, 0)$$

with respect to the linearizing coordinate on $U(q)$.

We suppose moreover that $\{\varphi_{\mu,\nu}\}$ is a two-parameter family in $\mathrm{Diff}^2(M)$ with $\varphi_{0,0} = \varphi$ and satisfying the conditions of Theorem 2.1. In particular, $\varphi_{\mu,\nu}$ is locally C^2 linearizable in a small neighborhood $U(q_{\mu,\nu})$ of $q_{\mu,\nu}$ in M and hence $\varphi_{\mu,\nu}$ has the form as (3.4) in $U(q_{\mu,\nu})$, where α, β, γ are C^2 functions on μ, ν, i.e. $\alpha = \alpha_{\mu,\nu}, \beta = \beta_{\mu,\nu}, \gamma = \gamma_{\mu,\nu}$.

We will put the following generic conditions (C1)-(C3) as the hypotheses in Theorem 2.1.

(C1) (Generic unfolding property for r) The nondegenerate heterodimensional tangency r of $W^u(q)$ and $W^s(p)$ unfolds generically with respect to the μ-parameter families $\{W^u(q_{\mu,0})\}$ and $\{W^s(p_{\mu,0})\}$.

(C2) (Generic unfolding property for s) The quasi-transverse intersection s of $W^s(q)$ and $W^u(p)$ unfolds generically with respect to the ν-parameter families $\{W^s(q_{0,\nu})\}$ and $\{W^u(p_{0,\nu})\}$.

(C3) (Additional generic conditions) The tangency $r = (u_0, v_0, 0)$ is not on the x-axis $W^{uu}_{\mathrm{loc}}(q)$, that is,

$$v_0 \neq 0. \tag{3.5}$$

There exists a regular parametrization $l(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(t \in I)$ of a small curve in $W^u(p) \cap U(q)$ with respect to the linearizing coordinate (x, y, z) on $U(q)$ with $s = l(0)$ and

$$\frac{dx}{dt}(0) \neq 0, \tag{3.6}$$

where I is an open interval centered at 0.

There exists a C^2 function $f : O \to \mathbb{R}$ defined on an open disk O in the xy-plane centered at r such that $f(u_0, v_0) = 0$, $\{(x, y, f(x, y)) ; (x, y) \in O\} \subset W^s(p) \cap U(q)$ and

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u_0, v_0) \neq 0. \tag{3.7}$$

Note that the condition (3.7) is automatically satisfied when r is of elliptic type.

References

[1] M. Asaoka, A simple construction of C^1-Newhouse domains for higher dimensions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), no. 2, 677–686.

[2] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Connexions hétéroclines et généricité d'une infinité de puits et de sources, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **(4) 32** (1999), no. 1, 135–150.

[3] Ch. Bonatti, L. J. Díaz, and E. R. Pujal, A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: Weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, *Ann. of Math.*, **158** (2003), 355–418.

[4] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Robust heterodimensional cycles and C^1-generic dynamics, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, **7** 3 (2008), 469–525.

[5] L. J. Diaz, A. Nogueira and E. R. Pujals, Heterodimensional tangencies, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2543–2566.

[6] L. J. Díaz, Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **15**(1995), 291–315.

[7] L. J. Díaz and J. Rocha, Non-connected heterodimensional cycles: bifurcation and stability, *Nonlinearity*, **5** (1992), 1315–1341.

[8] L. J. Díaz and J. Rocha, Large measure of hyperbolic dynamics when unfolding heteroclinic cycles, *Nonlinearity*, **10** (1997), 857–884.

[9] L. J. Díaz and J. Rocha, Partially hyperbolic and transitive dynamics generated by heteroclinic cycles, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **21** (2001), 25–76.

[10] S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, and L. P. Shilnikov, On the existence of Newhouse regions near systems with non-rough Poincaré homoclinic curve (multidimensional case) *Russ. Acad. Sci. Dokl. Math.*, **47** (1993), 268–273.

[11] S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov and D. V. Turaev, Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits, *Chaos*, **6** (1996), 15–31.

[12] B. Leal, High dimension diffeomorphisms exhibiting infinitely many strange attractors, *Ann. I. H. Poincaré*, **25** (2008), 587–607.

[13] S. E. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.É.S.*, **50** (1979), 101–151.

[14] J. Palis, A global perspective for non-conservative dynamics, *Ann. I. H. Poincaré*, **22** (2005), 485–507.

[15] J. Palis and M. Viana, High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors, *Ann. of Math. (2)*, **140** (1994), 207–250.

[16] C. Robinson, Bifurcation to infinitely many sinks, *Commun. Math. Phys.*, **90** (1983), 433–459.

[17] N. Romero, Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **15** (1995), no. 4, 735–757.

[18] M. Viana, Strange attractors in higher dimensions, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **24** (1993), 13–62.

Department of Mathematics and Information Sciences, Tokyo Metropolitan University, Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan

E-mail address: nishizawa-yusuke@ed.tmu.ac.jp

ディラック場と電磁場が相互作用する系の基底状態の存在および漸近場の存在について

九大数理　高江洲俊光

概要　Dirac 場と電磁場が相互作用する系である相対論的量子電磁力学について考察する。本稿では、Dirac 場および電磁場の量子化、そして相対論的量子電磁力学の Hamiltonian の導出について主に解説する。当日の発表では、スペクトル解析についてえられた結果についてを主に解説し、本稿と相補うようなものにする予定である。

1　古典場の一般論

4 次元 Minkowski 空間の計量テンソルを

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。またこの空間の座標を、$x^\mu = (t, \mathbf{x})$, $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\mathbf{x})$ とし、その微分を $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$、$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ と表す。n 成分をもつ場 $\phi(x) = (\phi_r(x))_{r=1}^n$ の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ が与えられているとする。このとき、場の dynamics は Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} = 0$$

によって定まる。ϕ の正準共役運動量は

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi_r)}$$

で与えられ、Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H} = \pi_r(\partial_t \phi_r) - \mathcal{L}$$

によって定義される。この系の Hamiltonian は

$$H = \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{H}(x) d\mathbf{x}$$

と定義される。特に H は時間に依存しないことが示される。

2　電磁場

$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ を電磁ポテンシャル、その場の強さを、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

とする。ここで電流密度ポテンシャル $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ がひとつ与えられているとして、$F^{\mu\nu}$ が方程式

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu \tag{1}$$

をみたすとする。このとき**第一種ゲージ変換**

$$A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

とすると $F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu$ も方程式 (1) をみたす。このように j^μ に対して (1) をみたす $F^{\mu\nu}$ は一意的に定まらないことがわかる。方程式 (1) を 4 次元電磁ポテンシャル A^μ であらわすと 、

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(\partial_t \mathbf{A} + \nabla\varphi) &= \rho, \\ \Box\mathbf{A} + \nabla(\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

となる。ここで相互作用のない場合、すなわち $j^\mu = 0$ の場合について考察する。Lagrangian 密度を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{rad}} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\partial_t \mathbf{A} + \nabla\varphi)^2 - (\nabla\times\mathbf{A})^2\right\} \end{aligned}$$

とする。 このとき、 Euler-Lagrange 方程式をたてると、実際に

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}}{\partial A^0} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}}{\partial(\partial_\mu A^0)} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\nabla\cdot(\partial_t\mathbf{A} + \nabla\varphi) = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}}{\partial A^k} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}}{\partial(\partial_\mu A^k)} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Box\mathbf{A} + \nabla(\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0 \end{aligned}$$

となっていることがわかる。A^μ の正準共役運動量 Π^μ は

$$\Pi^\mu = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ \partial_t A^k + \partial_{x^k}\varphi, & \mu = k \end{cases}$$

となる。$A^0 = \varphi$ に対する正準共役運動量 Π^0 が**存在しない**ことに注意する。この系の Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H}_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\left\{(\partial_t\mathbf{A} + \nabla\varphi)^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2\right\} - (\partial_t\mathbf{A} + \nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi$$

となる。上式を空間全体で積分し、部分積分を用いると

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{rad}} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}\left\{(\partial_t\mathbf{A} + \nabla\varphi)^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2\right\} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}\left\{(\partial_t\mathbf{A})^2 + (\nabla\times\mathbf{A})^2\right\} d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}\varphi(x)(-\triangle\varphi(x))d\mathbf{x} \\ &=: H_{\mathrm{rad}}^{trans} + H_{\mathrm{rad}}^{trans} \end{aligned}$$

ともとまる。

相互作用のない電磁場を量子化するために、Coulomb ゲージ

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$$

をとる。Coulomb ゲージによる電磁場の量子化とは A^k, Π^j が同時刻における正準交換関係

$$\begin{aligned} [\Pi^j(t,\mathbf{x}), A^k(t,\mathbf{y})] &= i\left(\delta_{j,k} - \frac{\partial_j\partial_k}{\triangle}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ [A^j(t,\mathbf{x}), A^k(t,\mathbf{y})] &= [\Pi^j(t,\mathbf{x}), \Pi^k(t,\mathbf{y})] = 0 \end{aligned}$$

をみたすものとすることである。ただし、$\frac{1}{\triangle} := -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2}d\mathbf{k} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ としている。

3 Dirac 場

電子の質量を $M>0$ とする。ここで電子が従うべき相対論的な２つの条件を考える。

1. 波動関数 ψ は Klein-Gordon 方程式 $(\Box+M^2)\psi=0$ をみたす。
2. 確率密度 ρ と流れ密度 $\mathbf{j}$ は波動関数 ψ の２次形式であり、それらは連続の方程式 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}=0$ をみたす。

これらの２つの条件より、自由な Dirac 方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\Psi\ =\ 0$$

が得られる。ただし γ^μ は Dirac matrix とよばれる反交換 $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=g^{\mu\nu}$ をみたす 4×4 行列であり、とくに γ^0 はエルミート行列、γ^j は反エルミート行列である。実際に、Dirac 方程式の解 ψ は Klein-Gordon 方程式をみたし、

$$j^\mu\ =\ \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

とするとこれらは連続の方程式をみたす。特にこの j^μ は **電磁 current** とよばれる。自由な Dirac 方程式導く Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{x})=\overline{\psi}(\mathbf{x})(i\gamma^\mu\partial_\mu-M)\psi(\mathbf{x})$$

であり、ψ の正準共役運動量は

$$\pi\ =\ \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}}}{\partial(\partial_t\psi)}\ =i\psi^*$$

となる。これより Hamiltonian 密度は

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Dirac}}\ =\ \pi\partial_t\psi-\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}}=\overline{\psi}(-i\gamma^k\partial_k+M)\psi$$

となり、ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{Dirac}}(\mathbf{x})=\int_{\mathbf{R}^3}\overline{\psi}(\mathbf{x})(-i\gamma^k\partial_k+M)\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

となる。Dirac 場の量子化とは ψ, π が同時刻反正準交換関係

$$\begin{aligned}\{\psi_r(t,\mathbf{x}),\pi_{r'}(t,\mathbf{x}')\}\ &=\ \delta_{r,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\\ \{\psi_r(t,\mathbf{x}),\psi_{r'}(t,\mathbf{x}')\}\ &=\ \{\pi_r(t,\mathbf{x}),\pi_{r'}(t,\mathbf{x}')\}\ =\ 0\end{aligned}$$

をみたすものとすることである。

4 相対論的量子電磁力学

Dirac 場と電磁場の相互作用が **minimal 相互作用**

$$\partial_\mu\ \longmapsto\ D_\mu\ =\ \partial_\mu-eA^\mu$$

で与えられているとする。このとき Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu-M)\psi \tag{2}$$

とする。このとき

$$\mathcal{L}_{int} = -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi A^{\mu}$$

とすると、

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \mathcal{L}_{\mathrm{rad}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{L}_{int} \tag{3}$$

となる。このとき Euler-Lagrange 方程式より、

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial \psi^*} - \partial_{\mu}\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_{\mu}\psi^*)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - M)\psi = e\gamma^{\mu}A^{\mu}\psi, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial A^{\mu}} - \partial_{\nu}\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_{\nu}A^{\mu})} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_{\nu}F^{\nu\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{5}$$

となる。このとき相互作用 Lagrangian $\mathcal{L}_{int}$ に $\partial_t A^{\mu}, \partial_t \Psi$ が含まれてないことに注意して, A^{μ}、 ψ の正準共役運動量をもとめると、

$$\Pi^{\mu} := \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_t A^{\mu})} = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ \partial_t A^k + \partial_{x^k}\varphi, & \mu = k \end{cases}$$

$$\psi := \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{QED}}}{\partial(\partial_t \psi)} = i\psi^*(\mathbf{x})$$

となることがわかる。ただし、正準共役運動量は自由場のときと同じ記号を用いている。Hamiltonian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathrm{QED}} &= \Pi^k \partial_t A^k + \pi\partial_t\psi - \mathcal{L}_{\mathrm{QED}} \\ &= \mathcal{H}_{\mathrm{Dirac}} + \mathcal{H}_{\mathrm{rad}} + e\overline{\psi}\gamma^j\psi A^j \end{aligned}$$

ここで Coulomb ゲージをとっているため、$A^0 = \varphi$ は自由場の場合と異なり、

$$-\triangle\varphi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$$

をみたす。このことに注意してハミルトニアンを求めると

$$H_{\mathrm{QED}} = H_{\mathrm{Dirac}} + H_{\mathrm{rad}}^{trans} + e\int_{\mathbf{R}^3}\overline{\psi}(x)\gamma^j\psi(x)A^j(x)d\mathbf{x} - \frac{e^2}{8\pi}\int_{\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3}\frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} \tag{6}$$

となる。ただし $\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{y} = 0$ を用いた。ここで量子化として、A^{μ},ψ, およびその正準共役運動量が

$$[\Pi^j(t,\mathbf{x}), A^k(t,\mathbf{y})] = i\left(\delta_{j,k} - \frac{\partial_j\partial_k}{\triangle}\right)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

$$[A^j(t,\mathbf{x}), A^k(t,\mathbf{y})] = [\Pi^j(t,\mathbf{x}), \Pi^k(t,\mathbf{y})] = 0$$

$$\{\psi_r(t,\mathbf{x}), \pi_{r'}(t,\mathbf{x}')\} = \delta_{r,r'}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$\{\psi_r(t,\mathbf{x}), \psi_{r'}(t,\mathbf{x}')\} = \{\pi_r(t,\mathbf{x}), \pi_{r'}(t,\mathbf{x}')\} = 0,$$

および

$$[\phi(\mathbf{x}), A^j(\mathbf{y})] = 0,$$

$$[\phi(\mathbf{x}), \psi_r(\mathbf{y})] = -\frac{e}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\psi_r(\mathbf{y})$$

をみたすものとする。

5 スペクトル解析

H_{QED} は数学的には、 Boson-Fermion Fock 空間上の自己共役作用素とみなせ、そのスペクトル解析が問題となる。ヒルベルト空間上の線形作用素のスペクトル解析といえば、離散固有値に対する Kato の regular perturbation theory をはじめとする一般論がすでに構築されている。量子場が相互作用する系のスペクトル解析に関しては 90 年代後半よりその解析が大きく進展し、特に**「量子力学的な粒子と量子場」**の解析に関してこれまでに多くの研究結果が得られている [4]。この研究に続く問題として、相対論的量子電磁力学のような量子場と量子場が相互作用する系のスペクトル解析がある。[3], [1] において、結合定数が十分小さいときの量子電磁力学の基底状態の存在が示されている。彼らの論文においてはディラック場に外場を導入して量子化された Hamiltonian を導入しているのであるが、そのさい、電磁場の赤外切断と基底状態の存在の関係が明らかではなく、また、基底状態の一意性および生成・消滅作用素を相互作用描像で時間発展させた漸近場とよばれるものの存在などは示されていなかった。そこで、H_{QED} の赤外切断と基底状態の存在の関係を明らかにし、その性質をさらに詳しく解析するために、外場を導入せずに量子化した H_{QED} について考察し、次のような結果が得られた [5]。

定理 結合定数 $|e|$ が十分小さく、電磁場に赤外切断関数を導入すると、一意的な基底状態が存在する。このとき、漸近場も存在する。

参考文献

[1] J.Barbaroux, M.Dimassi, and J.Guillt, Quantum electrodynamics of relativistic bound states with cutoffs, J.Hyper. Differ. Equa. **1** (2004), 271-314.

[2] J.D.Bjorken and S.D.Drell, *Relativistic quantum fields*, McGraw-Hill, 1965.

[3] M.Dimassi and J.C.Guillot, The quantum electrodynamics of relativistic bound states with cutoffs.I, Appl. Math. Lett. **16** (2003), 551-555.

[4] 廣島文生、 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題、**数学**、**57**, 70-92, 日本数学会, (2005).

[5] T.Takaesu, The spectral analysis on quantum electrodynamics with spatial cutoff.I, (arxiv).

弾性基盤上の張力をかけた棒のたわみの2点境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数

山岸弘幸 (阪大基礎工)，亀高惟倫，武村一雄 (日大生産工)，
渡辺宏太郎 (防衛大)，永井敦 (日大生産工)

棒のたわみの 2 点境界値問題 [1] に対応する 4 通りのソボレフ不等式の最良定数 [2, 3] を求めた.

1 境界値問題

一様なバネ定数 $q > 0$ をもつ水平な弾性基盤の上に置かれた棒に，張力 $p > 0$ がかかっている．荷重密度 $f(x)$ をかけたときの棒のたわみ $u(x)$ は次の境界値問題をみたす.

$$\mathrm{BVP}(\alpha, \beta)$$
$$\begin{cases} u^{(4)} - p\,u'' + q\,u = f(x) & (-1 < x < 1) \\ u_{\alpha_0}(-1) = u_{\alpha_1}(-1) = u_{\beta_0}(1) = u_{\beta_1}(1) = 0 \end{cases}$$

ただし $u_0 = u$, $u_1 = u'$, $u_2 = u''$, $u_3 = u'''$, $u_{\widetilde{3}} = u''' - pu'$ である．$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ はそれぞれ $(0,1)$（固定端），$(0,2)$（ディリクレ端または単純端），$(1,3)$（ノイマン端またはスリップ端），$(2,\widetilde{3})$（自由端，より正確には擬似自由端）の 4 通りの値をとる．問題は全部で 16 通りあるが，今回は

$$(\alpha, \beta) = (0,1,0,1), \quad (0,2,0,2), \quad (1,3,1,3), \quad (2,\widetilde{3},2,\widetilde{3})$$

の 4 通りだけを扱う．張力が相対的に強いとする．すなわち

仮定 1.1 $\quad (p/2)^2 > q > 0, \quad p > 0$

とする．同じことであるが

仮定 1.2 $\quad p = a^2 + b^2, \quad q = a^2 b^2, \quad a > b > 0$

とする.

定理 1.1　区間 $-1 < x < 1$ 上の任意の有界連続関数 $f(x)$ に対し，境界値問題 BVP(α, β) は唯一つの古典解

$$u(x) = \int_{-1}^{1} G(x,y)\, f(y)\, dy \qquad (-1 < x < 1)$$

をもつ．グリーン関数 $G(x,y) = G(\alpha, \beta; x, y)$ は後に示す.

2　結論

ソボレフ空間

$$H = \left\{ u(x) \;\middle|\; u(x),\ u'(x),\ u''(x) \in L^2(-1,1), \quad u(x) \text{ は } A(\alpha,\beta) \text{ をみたす} \right\}$$

$A(0,1,0,1)$:　$u(-1) = u'(-1) = u(1) = u'(1) = 0$

$A(0,2,0,2)$:　$u(-1) = u(1) = 0$

$A(1,3,1,3)$:　$u'(-1) = u'(1) = 0$

$A(2,\widetilde{3},2,\widetilde{3})$:　なし

ソボレフ内積

$$(u,v)_H = \int_{-1}^{1} \left[u''(x)\,\overline{v}''(x) + p\,u'(x)\,\overline{v}'(x) + q\,u(x)\,\overline{v}(x) \right] dx$$

ソボレフエネルギー

$$\| u \|_H^2 = \int_{-1}^{1} \left[|u''(x)|^2 + p\,|u'(x)|^2 + q\,|u(x)|^2 \right] dx$$

ソボレフ汎関数

$$S(u) = \left(\sup_{|y| \le 1} |u(y)| \right)^2 \Big/ \| u \|_H^2$$

を導入する．結論は次のようになる.

定理 2.1　$\max\limits_{|y| \le 1} G(y,y) = G(y_0,y_0)$ となる y_0 $(|y_0| \le 1)$ がある．$\sup\limits_{u \in H, u \not\equiv 0} S(u) = C_0$ とすると $C_0 = G(y_0,y_0)$ である．任意の複素数 c に対し $S(c\,G(x,y_0)) = C_0$ となる．$C_0 = G(y_0,y_0)$ の具体的な値は後に示す.

この結論は次のようにいいかえてもよい.

定理 2.2　任意の $u(x) \in H$ に対し，$u(x)$ によらない正定数 C があって，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{|y|\le 1} |\, u(y)\,| \right)^2 \le C \,\|\, u \,\|_H^2$$

が成り立つ．C のうち最良のものは上の定理と同じ C_0 である．上の不等式の C を C_0 で置き換えたとき $u(x) = cG(x, y_0)$ に対し等号が成り立つ．c は任意の複素数である．

定理 2.2 の工学的な意味は非常にはっきりしている．棒のたわみの最大幅の 2 乗 $\left(\sup_{|y|\le 1} |u(y)| \right)^2$ は，棒にたまっているポテンシャルエネルギー $\| u \|_H^2$ の定数倍 C で上から評価される．その定数のうち最良のもの C_0 は，インパルス応答 $G(x, y)$ の (x にかんする) ポテンシャルエネルギー $G(y, y) = \| G(\cdot, y) \|_H^2$ すなわちグリーン関数の対角線値の最大値 $\max_{|y|\le 1} G(y, y)$ である．

任意の $u(x) \in H$ に対し，再生等式

$$u(y) \;=\; (u(x), G(x, y))_H \qquad (|y| \le 1)$$

が成り立つ．特に $u(x) = G(x, y)$ とすると

$$G(y, y) \;=\; (G(x, y), G(x, y))_H \;=\; \| G(x, y) \|_H^2$$

となる．上の再生等式にシュワルツ不等式を適用すると，定理 2.2 が示される．

最後にグリーン関数 $G(x, y) = G(\alpha, \beta; x, y)$ とその対角線値の最大値 $G(y_0, y_0)$ の具体形を示す．そのために基本関数

$$\mathrm{ch}(x) \;=\; \cosh(x), \qquad \mathrm{sh}(x) \;=\; \sinh(x), \qquad \mathrm{th}(x) \;=\; \tanh(x)$$

$$K_0(x) \;=\; \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\; a^{-1}\mathrm{sh}(ax) - b^{-1}\mathrm{sh}(bx) \;\right], \qquad K_j(x) \;=\; (d/dx)^j K_0(x)$$

$$K_{j+4}(x) - p\, K_{j+2}(x) + q\, K_j(x) \;=\; 0$$

$$\widetilde{K}_{j+4}(x) \;=\; K_{j+4}(x) - p\, K_{j+2}(x), \qquad \widetilde{\widetilde{K}}_{j+4}(x) \;=\; \widetilde{K}_{j+4}(x) - p\, \widetilde{K}_{j+2}(x)$$

$$K(i, j, k, l\,;\, x) \;=\; K_i(x)\, K_j(x) \;-\; K_k(x)\, K_l(x)$$

$$K_j \;=\; K_j(2), \qquad K(i, j, k, l) \;=\; K(i, j, k, l; 2) \quad (i, j, k, l = -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

を準備する．グリーン関数は

$$G(0, 1, 0, 1; x, y) \;=$$

$$\begin{vmatrix} K_0 & K_1 & K_0(1 - x \vee y) \\ K_1 & K_2 & K_1(1 - x \vee y) \\ \hline K_0(1 + x \wedge y) & K_1(1 + x \wedge y) & 0 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix}$$

$$G(0,2,0,2;x,y) =$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} K_0 & K_2 & K_0(1-x\vee y) \\ K_2 & K_4 & K_2(1-x\vee y) \\ \hline K_0(1+x\wedge y) & K_2(1+x\wedge y) & 0 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_0 & K_2 \\ K_2 & K_4 \end{array}\right|$$

$$G(1,3,1,3;x,y) =$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} K_2 & K_4 & K_1(1-x\vee y) \\ K_4 & K_6 & K_3(1-x\vee y) \\ \hline K_1(1+x\wedge y) & K_3(1+x\wedge y) & 0 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_2 & K_4 \\ K_4 & K_6 \end{array}\right|$$

$$G(2,\widetilde{3},2,\widetilde{3};x,y) =$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} K_4 & \widetilde{K}_5 & K_2(1-x\vee y) \\ \widetilde{K}_5 & \widetilde{\widetilde{K}}_6 & \widetilde{K}_3(1-x\vee y) \\ \hline K_2(1+x\wedge y) & \widetilde{K}_3(1+x\wedge y) & 0 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_4 & \widetilde{K}_5 \\ \widetilde{K}_5 & \widetilde{\widetilde{K}}_6 \end{array}\right|$$

となる．ただし $x\vee y=\max\{x,y\}$, $x\wedge y=\min\{x,y\}$ である．

グリーン関数の対角線値の最大値は

$$\max_{|y|\le 1} G(0,1,0,1;y,y) = G(0,1,0,1;0,0) =$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} K_0 & K_1 & K_0(1) \\ K_1 & K_2 & K_1(1) \\ \hline K_0(1) & K_1(1) & 0 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_0 & K_1 \\ K_1 & K_2 \end{array}\right| = \frac{K(1,1,0,2;1)}{2\,K(2,3,1,4;1)} =$$

$$\frac{1}{ab}\,\frac{\left(\dfrac{\mathrm{sh}((a+b)/2)}{a+b}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{sh}((a-b)/2)}{a-b}\right)^2}{\dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{a+b}+\dfrac{\mathrm{sh}(a-b)}{a-b}} =$$

$$\frac{2}{a^2-b^2}\,\frac{\mathrm{ch}^2(a/2)\,\mathrm{ch}^2(b/2)}{\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b)}\,\frac{(a\,\mathrm{th}(a/2)-b\,\mathrm{th}(b/2))\,(b^{-1}\,\mathrm{th}(b/2)-a^{-1}\,\mathrm{th}(a/2))}{a\,\mathrm{th}(a)-b\,\mathrm{th}(b)}$$

$$\max_{|y|\le 1} G(0,2,0,2;y,y) = G(0,2,0,2;0,0) =$$

$$\left|\begin{array}{cc|c} K_0 & K_2 & K_0(1) \\ K_2 & K_4 & K_2(1) \\ \hline K_0(1) & K_2(1) & 0 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_0 & K_2 \\ K_2 & K_4 \end{array}\right| = \frac{K(1,2,0,3;1)}{2\,K(3,3,1,5;1)} =$$

$$\frac{1}{2ab}\,\frac{\dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{a+b}-\dfrac{\mathrm{sh}(a-b)}{a-b}}{\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{ch}(a-b)} = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\Big[\,b^{-1}\mathrm{th}(b)\,-\,a^{-1}\mathrm{th}(a)\,\Big]$$

$$\max_{|y|\le 1} G(1,3,1,3;y,y) = G(1,3,1,3;1,1) =$$
$$\left|\begin{array}{cc} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_2 & K_4 \\ K_4 & K_6 \end{array}\right| = \frac{K(2,3,1,4)}{K(4,4,2,6)} =$$
$$\frac{1}{ab}\,\frac{\dfrac{\mathrm{sh}(2(a+b))}{a+b}+\dfrac{\mathrm{sh}(2(a-b))}{a-b}}{\mathrm{ch}(2(a+b))-\mathrm{ch}(2(a-b))} = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{b\,\mathrm{th}(2b)}-\frac{1}{a\,\mathrm{th}(2a)}\right]$$

$$\max_{|y|\le 1} G(2,\widetilde{3},2,\widetilde{3};y,y) = G(2,\widetilde{3},2,\widetilde{3};1,1) =$$
$$\left|\begin{array}{cc} K_2 & \widetilde{K}_3 \\ K_4 & \widetilde{K}_5 \end{array}\right| \Big/ \left|\begin{array}{cc} K_4 & \widetilde{K}_5 \\ \widetilde{K}_5 & \widetilde{\widetilde{K}}_6 \end{array}\right| = \frac{K(\widetilde{3},4,2,\widetilde{5})}{K(\widetilde{5},\widetilde{5},4,\widetilde{\widetilde{6}})} =$$
$$\frac{1}{2ab}\,\frac{(a^2+ab+b^2)\dfrac{\mathrm{sh}(2(a+b))}{a+b}+(a^2-ab+b^2)\dfrac{\mathrm{sh}(2(a-b))}{a-b}}{\left((a^2+ab+b^2)\dfrac{\mathrm{sh}(a+b)}{a+b}\right)^2-\left((a^2-ab+b^2)\dfrac{\mathrm{sh}(a-b)}{a-b}\right)^2} =$$
$$\frac{a^2-b^2}{4a^4b^4}\,\frac{\mathrm{ch}(2a)\,\mathrm{ch}(2b)}{\mathrm{ch}^2(a)\,\mathrm{ch}^2(b)}\,\frac{a^3\,\mathrm{th}(2a)-b^3\,\mathrm{th}(2b)}{(a^3\,\mathrm{th}(a)-b^3\,\mathrm{th}(b))\,(b^{-3}\,\mathrm{th}(b)-a^{-3}\,\mathrm{th}(a))}$$

となる．ここで扱われなかった12通りの場合については，別の機会に報告する．

参考文献

[1] Y. Kametaka, K. Takemura, Y. Suzuki and A. Nagai, *Positivity and hierarchical structure of Green's functions of 2-point boundary value problems for bending of a beam*, Japan J. Indust. Appl. Math. **18** (2001) 543-566.

[2] Y. Kametaka, K. Watanabe and A. Nagai, *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space* , Proc. Japan Acad.,**81**, Ser.A, No.3 (2005) 57–60.

[3] Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai and S. Pyatkov, *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space* , Sci. Math. Jpn.,**e-2004** (2004) 295–303.

山岸弘幸（Hiroyuki Yamagishi）
大阪大学大学院基礎工学研究科　招へい研究員
〒560-8531　豊中市待兼山町 1-3　阪大基礎工数理教室
E-mail : yamagisi@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

A GENERALIZED LOGARITHMIC MODULE OF HYPERPLANE ARRANGEMENTS WITH MULTIPLICITIES

TAKURO ABE

0. Introduction

A *hyperplane arrangement* (or simply an *arrangement*) is a finite collection of affine hyperplanes in a fixed vector space V over a field $\mathbb{K}$, and a map from an arrangement to non-negative integers is called a *multiplicity*. A pair of an arrangement and a multiplicity is called a *multiarrangement*. This is a very simple geometric object, but there are a lot of interesting problems on arrangements. Among them, one of the most interesting problems is the freeness property of the associated algebraic object. In this abstract, we introduce some basic definitions, results and concepts of (multi-)arrangement theory, and give a survey of our recent result which generalizes the concept of a multiarrangement and the associated logarithmic derivation and differential modules into a new logarithmic module. For details and complete proofs of the results in this abstract, see [1].

Acknowledgement. The author is grateful to the 5th MCYR organizing committee for giving him an opportunity to talk in this conference.

1. Hyperplane arrangements

In this section we introduce some elementary definitions and results on (multi)arrangements of hyperplanes, for which we refer the reader to [6].

1.1. **Fundamental Definitions.** Let $\mathbb{K}$ be a field and $V = V^\ell$ be an ℓ-dimensional vector space over $\mathbb{K}$. A *hyperplane arrangement* $\mathcal{A}$ is a finite collection of affine hyperplanes in V. An arrangement $\mathcal{A}$ is *central* if each hyperplane $H \in \mathcal{A}$ is a vector subspace of V. In this abstract we assume that every arrangement is central. An (multi)arrangement in V^ℓ is called an *ℓ-(multi)arrangement.*

1.2. **Logarithmic derivation and differential modules.** In this subsection we introduce a module of logarithmic derivation and differential modules associated to a multiarrangement. Let $\{x_1, \dots, x_\ell\}$ be a basis for V^*, S the symmetric algebra of V^* (hence $S \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell]$), $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ the S-module of $\mathbb{K}$-linear derivations of S and Ω^1_S the S-module of regular 1-forms. For a multiarrangement $(\mathcal{A}, m)$ and each

hyperplane $H \in \mathcal{A}$, fix a linear form $\alpha_H \in V^*$ such that $\ker(\alpha_H) = H$. Put $Q = Q(\mathcal{A}, m) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{m(H)}$.

Definition 1.1. *For a multiarrangement $(\mathcal{A}, m)$, the logarithmic derivation module $D(\mathcal{A}, m)$ is defined by*

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H^{m(H)} \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

Also, the logarithmic differential module $\Omega^1(\mathcal{A}, m)$ is defined by

$$\Omega^1(\mathcal{A}, m) := \{\omega \in \Omega^1_S/Q | \omega \wedge d\alpha_H \text{ is regular along } H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

Roughly speaking, $D(\mathcal{A}, m)$ consists of the vector fields tangent to each hyperplane in $\mathcal{A}$ with a given multiplicity. In general, $D(\mathcal{A}, m)$ and $\Omega^1(\mathcal{A}, m)$ are reflexive S-modules but not necessarily free (actually, they are S-dual modules). For example, $(\mathcal{A}, m)$ is always free if and only if $\mathcal{A}$ is a direct sum of one or two-dimensional arrangements (see [3]). On the other hand, $(\mathcal{A}, m)$ is not free for any $m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}_{>0}$ if $\mathcal{A}$ consists of hyperplanes in a general position (see [11]). To decide which $(\mathcal{A}, m)$ is free has been paid much attention to as a very important problem.

Definition 1.2. *A multiarrangement $(\mathcal{A}, m)$ is free if $D(\mathcal{A}, m)$ is a free S-module of rank ℓ. If $D(\mathcal{A}, m)$ is free with a homogeneous basis $\{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\}$, then the exponents $\exp(\mathcal{A}, m)$ of $(\mathcal{A}, m)$ are defined by $\exp(\mathcal{A}, m) := (\deg(\theta_1), \ldots, \deg(\theta_\ell))$, where $\deg(\theta_i) := \deg(\theta_i(\alpha_i))$ for some linear form α_i with $\theta_i(\alpha_i) \neq 0$.*

To determine which multiarrangement $(\mathcal{A}, m)$ is free is a very difficult problem. Even when $m \equiv 1$ there are only few results on a classification or characterization of free arrangements. Let us concentrate our interest on the case when $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ and $\mathcal{A}$ is a Coxeter arrangement, i.e., $\mathcal{A}$ is an arrangement consisting of reflecting hyperplanes of a Coxeter group W. In this setup, several results on free multi-Coxeter arrangements are known in [1], [2], [4], [8], [9] and [10] by Nuida, Numata, Solomon, Terao, Yoshinaga and the author. In the next subsection we introduce some of them.

1.3. **Coxeter multiarrangements.**

Theorem 1.3 ([4], Theorem 2). *Let $m : \mathcal{A} \to \{1, 0\}$ be a quasi-constant multiplicity. Then for $k > 0$, there are isomorphisms*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}, m) &\to D(\mathcal{A}, 2k + m)(-kh), \\ \Omega^1(\mathcal{A}, m) &\to D(\mathcal{A}, 2k - m)(-kh), \end{aligned}$$

where h is the Coxeter number of W.

Also, if $\mathcal{A}_\ell$ is the Coxeter arrangement of type A_ℓ, then the following characterization of the freeness is obtained.

Theorem 1.4 ([2], Theorem 0.3). *Let G be an edge-bicolored graph, k a positive integer and $n_1, \ldots, n_{\ell+1}$ non-negative integers. Define a multiarrangement $(\mathcal{A}_\ell, m) = \mathcal{A}_\ell(n_1, n_2, \ldots, n_{\ell+1})[G]$ by $m(H_{ij}) = 2k + n_i + n_j + m_G(H_{ij})$ and put $N = (\ell+1)k + \sum_{i=1}^{\ell+1} n_i$. Then the multiarrangement $\mathcal{A}_\ell(n_1, n_2, \ldots, n_{\ell+1})[G]$ is free with*

$$\exp(\mathcal{A}_\ell, m) = (0, N + \widetilde{\deg}_2, \ldots, N + \widetilde{\deg}_{\ell+1})$$

if and only if G is bicolor-eliminable. In particular, for $m : \mathcal{A}_\ell \to \{+1, 0, -1\}$, $(\mathcal{A}_\ell, 2k + m)$ is free if and only if $(\mathcal{A}_\ell, 2k - m)$ is free.

For details, see [2] and [4]. Now let us consider whether Theorem 1.3 holds true with the multiplicity appearing in Theorem 1.4. For that purpose, we have to consider what the "negative" multiplicity and the associated logarithmic derivation module are. More precisely, if $m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ is a generalized multiplicity which may attain negative integers, then in which manner we could define $D(\mathcal{A}, m)$? In the rest of this abstract we will give a definition of such a module and give a generalization of Theorem 1.3.

2. Generalized logarithmic module

Let $I : V \times V \to \mathbb{R}$ be a non-degenerate bilinear form, i.e., an inner product. Then I induces an identification $I^* : \Omega^1_S \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(S)$ defined by $I^*(\omega)(f) := I^*(\omega, df)$. By using this identification, we can give a generalized definition of a logarithmic module.

Definition 2.1. *For an arbitrary arrangement $\mathcal{A}$ and a multiplicity $m : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$, the (generalized) logarithmic module $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ is defined by*

$$D\Omega(\mathcal{A}, m) := \frac{D(\mathcal{A}_+, m|_{\mathcal{A}_+})}{Q_-} \bigcap I^*(\Omega^1(\mathcal{A}_-, -m|_{\mathcal{A}_-})),$$

where $\mathcal{A}_+ := \{H \in \mathcal{A} | m(H) > 0\}$, $\mathcal{A}_- := \{H \in \mathcal{A} | m(H) < 0\}$, $Q_+ := \prod_{H \in \mathcal{A}_+} \alpha_H^{m(H)}$ and $Q_- := \prod_{H \in \mathcal{A}_-} \alpha_H^{-m(H)}$.

Note that, if F is the quotient field of S, then $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ is an S-submodule of $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(F)$. Apparently, $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ depends on a choice of inner products I, and sometimes denoted by $D\Omega(\mathcal{A}, m, I)$ when we want to make it clear which inner product is used. It is obvious that, if $\mathcal{A}_- = \emptyset$, then $D\Omega(\mathcal{A}, m) \simeq D(\mathcal{A}_+, m|_{\mathcal{A}_+})$ and if $\mathcal{A}_+ = \emptyset$, then $D\Omega(\mathcal{A}, m) \simeq \Omega^1(\mathcal{A}_-, -m|_{\mathcal{A}_-})$. Thus $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ can be regarded as a generalization of both logarithmic derivation and differential modules. We can define the freeness and exponents of $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ by the same manner as those of $D(\mathcal{A}, m)$. Also, $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ has several good properties similar to those of $D(\mathcal{A}, m)$ and $\Omega^1(\mathcal{A}, m)$.

Theorem 2.2 ([1], Theorem 1.4). *For $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D\Omega(\mathcal{A}, m)$, the following two conditions are equivalent:*

(1) $\{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\}$ *forms a basis for* $D\Omega(\mathcal{A}, m)$.

(2) $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_\ell = c \cdot \dfrac{Q_+}{Q_-} \partial_{x_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_\ell}$ *for* $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Theorem 2.3 ([1], Theorem 1.7). *For a multiarrangement* $(\mathcal{A}, m)$, *define the multiplicity* $-m$ *on* $\mathcal{A}$ *by* $(-m)(H) := -m(H)$ *for* $H \in \mathcal{A}$. *Then* $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ *and* $D\Omega(\mathcal{A}, -m)$ *are* S*-dual modules. In particular,* $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ *is a reflexive module of rank* ℓ.

Now we have obtained $D\Omega(\mathcal{A}, m)$ as the starting module of Theorem 1.3 with the multiplicities $m : \mathcal{A} \to \{+1, 0, -1\}$. In fact, we can prove a generalized version of Theorem 1.3 as follows:

Theorem 2.4 ([1], Theorem 0.7). *Let* $\mathcal{A}$ *be a Coxeter arrangement defined by the Coxeter group* W *with the Coxeter number* h, $m : \mathcal{A} \to \{+1, 0, -1\}$ *and* $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. *If we fix a* W*-invariant inner product* I^* *on* V^*, *then there are* S*-module isomorphisms as follows:*

$$\begin{aligned} D\Omega(\mathcal{A}, m, I)(-kh) &\to D(\mathcal{A}, 2k + m), \\ D\Omega(\mathcal{A}, -m, I)(-kh) &\to D(\mathcal{A}, 2k - m). \end{aligned}$$

In particular, $D(\mathcal{A}, 2k + m)(kh)$ *and* $D(\mathcal{A}, 2k - m)(kh)$ *are* S*-dual modules.*

3. Outline of the proof of Theorem 2.4

In this section let us show an outline of the proof of Theorem 2.4. For the complete proof, see [1]. Before the proof, let us recall some results on Coxeter groups and the invariant ring. Let W be an irreducible Coxeter group with the Coxeter number h and $R := S^W$ the invariant subring of S with respect to the action of W onto S. Then the famous Chevalley's theorem in [5] tells us that there exist homogeneous polynomials $P_1, \ldots, P_\ell$ such that $R = \mathbb{R}[P_1, \ldots, P_\ell]$. These polynomials are called *basic invariants* and we can arrange them in such a way that $2 = \deg P_1 < \deg P_2 \leq \cdots \leq \deg P_{\ell-1} < \deg P_\ell = h$. Then $\partial_{P_\ell} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(R)$ is the derivation of the smallest degree, thus unique up to scalars. In [7] Kyoji Saito called this derivation *the primitive derivation*, which is denoted by D, and developed several theories including the *flat structure*, which is also called a *Frobenius manifold structure* nowadays .

Now let us see the outline of the proof. First let us construct the isomorphisms in Theorem 2.4 explicitly. If Φ_k denotes the isomorphism from $D\Omega(\mathcal{A}, m)(-kh)$ to $D(\mathcal{A}, 2k+m)$, then $\Phi_k(\theta) := \nabla_\theta \nabla_D^{-k} \theta_E$, where $\theta \in D\Omega(\mathcal{A}, m)(-kh)$ and $\theta_E = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \partial_{x_i}$ is the Euler derivation. We prove that Φ_k is an isomorphism in three steps.

Step 1. The well-definedness of Φ_k. Since θ may have poles along hyperplanes in $\mathcal{A}_-$, we have to check that $\nabla_\theta \nabla_D^{-k} \theta_E$ is regular. For this

proof, the key role is played by the fact that $\nabla_D^{-k}\theta_E \in D(\mathcal{A}, 2k+1)^W$. By the similar argument we can prove that Φ_k is well-defined.

Step 2. We prove the injectivity of Φ_k. This follows from the fact that $\{\nabla_{\partial_{x_1}}\nabla_D^{-k}\theta_E, \ldots, \nabla_{\partial_{x_\ell}}\nabla_D^{-k}\theta_E\}$ is S-independent (see [9]).

Step 3. We prove the surjectivity of Φ_k. First we show the surjectivity when $(\mathcal{A}, m)$ is free, which is proved by using the argument in [10]. For a general case, we use the modified argument of that in [4].

References

[1] T. Abe, A generalized logarithmic module and duality of Coxeter multiarrangements. arXiv:0807.2552.

[2] T. Abe, K. Nuida and Y. Numata, Bicolor-eliminable graphs and free multiplicities on the braid arrangement. arXiv:0712.4110.

[3] T. Abe, H. Terao and M. Yoshinaga, Totally free arrangements of hyperplanes. *Proc. Amer. Math. Soc.* 137 (2009), 1405-1410.

[4] T. Abe and M. Yoshinaga, Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities. arXiv:0708.3228.

[5] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections. *Amer. J. Math.* **77** (1955), 778–782.

[6] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[7] K. Saito, On the uniformization of complements of discriminant loci. In: *Conference Notes. Amer. Math. Soc. Summer Institute, Williamstown*, 1975.

[8] L. Solomon and H. Terao, The double Coxeter arrangements. *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), 237–258.

[9] H. Terao, Multiderivations of Coxeter arrangements. *Invent. Math.* **148** (2002), 659–674.

[10] M. Yoshinaga, The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. *Proc. Japan Acad. Ser. A* **78** (2002), no. 7, 116–119.

[11] M. Yoshinaga, On the extendability of free multiarrangements. arXiv:0710.5044.

Department of Mathematics, Kyoto University, Kitashirakawa-Oiwake-Cho, Sakyo-Ku, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: abetaku@math.kyoto-u.ac.jp

The verification of bifurcation of dynamics via the homology Conley index and rigorous computations

Kaname Matsue *

Recently the so-called "self-validating numerical methods" for differential equations using the interval arithmetics have been developed in order not only to solve the problem in analysis by numerical methods and but also to guarantee the mathematical rigorousness of numerical results. Moreover, such a rigorous computation can be combined with some topological method to study the dynamics. The Conley index is one of the possible topological tools for such a purpose.

The purpose of this article is to treat the bifurcation of dynamics topologically. We shall introduce coarser notion of bifurcations of steady-state solutions which we call the C-pitchfork bifurcation, which are weaker notion of the pitchfork bifurcations explained above. For a given parametrized flow generated by the differential equation under consideration, we define a topological framework, in term of an isolating neighborhood of the parametrized flow, in which such weaker notion of bifurcations are contained. This framework is called the C-pitchfork type isolating neighborhood, and a self-validating computational method combined with the Conley index theory can be used to rigorously detect such a C-type isolating neighborhood.

Our main results can be summarized as follows:

(I) We give precise definitions of the C-pitchfork type isolating neighborhoods and represent that the invariant set in these isolating neighborhoods changes its structure in a way similar to pitchfork bifurcations for steady-state solutions.

(II) We apply the above topological treatment of bifurcation to the Swift-Hohenberg equation and verify that the C-pitchfork bifurcation does occur from steady-state solutions.

We know the reference of this article in author's talk.

1 A C-type isolating neighborhood

Let X be a locally compact metric space, $\Lambda \subset \mathbb{R}$ be a compact interval and $\Phi : \mathbb{R} \times X \times \Lambda \to X \times \Lambda$ be parameterized flow on X:

$$\Phi(t, u, \lambda) := (\varphi^{\lambda}(t, u), \lambda).$$

Let $N \subset X \times \Lambda$ and let $N^{\lambda} := N \cap (X \times \{\lambda\})$.

We also assume that the group $\mathbb{Z}_2$ acts on X and satisfies

$$\varphi^{\lambda}(t, gu) = g \circ \varphi^{\lambda}(t, u),$$

for all $g \in \mathbb{Z}_2$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in X$ and $\lambda \in \Lambda$. Assume that $g \in \mathbb{Z}_2$ is the non-trivial element unless we say otherwise.

Definition 1.1 (C-pitchfork type isolating neighborhood)**.** Let N be a connected isolating neighborhood for Φ such that N^{λ} is connected in X for each λ. We say N is *of C-pitchfork type on* $[\lambda_-, \lambda_+]$ if the following conditions are satisfied:

(CPF1)

$$CH_*(\mathrm{Inv}(N^{\lambda_-}), \varphi^{\lambda_-}) \neq 0$$

*Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan (k-matsue@math.kyoto-u.ac.jp).

and there is not a Morse decomposition of $\mathrm{Inv}(N^{\lambda-})$ containing $\mathbb{Z}_2$-asymmetric component with nontrivial Conley index.

Moreover, there exist mutually disjoint isolating neighborhoods $N_0^{\lambda+}$, $N_1^{\lambda+}$ and $N_2^{\lambda+}$ such that

(CPF2) A collection of isolated invariant sets $\{\mathrm{Inv}(N_0^{\lambda+}), \mathrm{Inv}(N_1^{\lambda+}), \mathrm{Inv}(N_2^{\lambda+})\}$ forms a Morse decomposition of $\mathrm{Inv}(N^{\lambda+})$ with the following admissible ordering:

$$\mathrm{Inv}(N_0^{\lambda+}) < \mathrm{Inv}(N_2^{\lambda+}),\ \mathrm{Inv}(N_1^{\lambda+}) < \mathrm{Inv}(N_2^{\lambda+}),\ \textit{or}$$
$$\mathrm{Inv}(N_0^{\lambda+}) > \mathrm{Inv}(N_2^{\lambda+}),\ \mathrm{Inv}(N_1^{\lambda+}) > \mathrm{Inv}(N_2^{\lambda+}).$$

(CPF3) $\mathrm{Inv}(N_j^{\lambda+})$, $j = 0, 1, 2$, satisfy the following conditions:

$$\mathrm{Inv}(N_i^{\lambda+}) \cap \mathrm{Fix}(\mathbb{Z}_2) = \emptyset,\ g\ \mathrm{Inv}(N_i^{\lambda+}) = \mathrm{Inv}(N_{1-i}^{\lambda+}), i = 0, 1,\ \textit{and}\ g\ \mathrm{Inv}(N_2) = \mathrm{Inv}(N_2).$$

(CPF4)

$$CH_*(\mathrm{Inv}(N_i^{\lambda+}), \varphi^{\lambda+}) \neq 0,\ i = 0, 1.$$

(CPF5) There exists a $\mathbb{Z}_2$-symmetric isolated invariant set $S \subset \mathrm{Inv}(N_2^{\lambda+})$ with nontrivial Conley index.

We remark that N also satisfies

$$CH_*(\mathrm{Inv}(N^{\lambda+}), \varphi^{\lambda+}) = CH_*(\mathrm{Inv}(N^{\lambda-}), \varphi^{\lambda-}),$$

by the continuation property if N is of C-pitchfork type.

Here we shall capture the behavior of isolated invariant sets in a C-pitchfork type isolating neighborhood. Let Λ_{PF} be the set of λ such that each $M_i^\lambda (i = 0, 1, 2)$ is nonempty invariant subset in N^λ and there exist subsets N_0^λ, N_1^λ and N_2^λ in N^λ satisfying the following conditions.

(PF1) N_i^λ is an isolating neighborhood including M_i^λ (not necessary $M_i^\lambda = \mathrm{Inv}(N_i^\lambda)$) for $i = 0, 1, 2$.

(PF2) $\{\mathrm{Inv}(N_0^\lambda), \mathrm{Inv}(N_1^\lambda), \mathrm{Inv}(N_2^\lambda)\}$ satisfies the condition (CPF2)-(CPF4).

By the robustness of the isolating neighborhoods, Λ_{PF} is an open subset of $[\lambda_0, \lambda_1]$.

Theorem 1.2. *If N is a connected C-pitchfork type isolating neighborhood on $[\lambda_0, \lambda_1]$ and if we define $\lambda_{\mathrm{PF}} := \inf \Lambda_{\mathrm{PF}}$, then the following statements hold.*

(1) $\lambda_{\mathrm{PF}} \in [\lambda_0, \lambda_1)$.

(2) *For $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_{\mathrm{PF}}]$ and for any Morse decomposition $\{M_0^\lambda, M_1^\lambda, M_2^\lambda\}$ of $\mathrm{Inv}(N^\lambda)$ that satisfies (CPF2,3), we have*

$$CH_*(M_0^\lambda) = CH_*(M_1^\lambda) = 0.$$

If $\{M(p)\}_{p \in P}$ is a Morse decomposition of M_0^λ for $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_{\mathrm{PF}}]$, then

$$CH_*(M(p)) = 0, \textit{ for all } p \in P.$$

(3) *Let $M_i^{\lambda_{\mathrm{PF}}}$ be given by:*

$$M_i^{\lambda_{\mathrm{PF}}} := \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\bigcup_{\lambda \in (\lambda_{\mathrm{PF}}, \lambda_{\mathrm{PF}} + \epsilon)} M_i^\lambda},\ i = 0, 1, 2,$$

where $M_i^\lambda = \mathrm{Inv}(N_i^\lambda)$, $i = 0, 1, 2$ are isolated invariant sets which satisfies (CPF2-4) for $\lambda > \lambda_{\mathrm{PF}}$ (we may take such a Morse decomposition anyway if it exists), then one of the following statements holds:

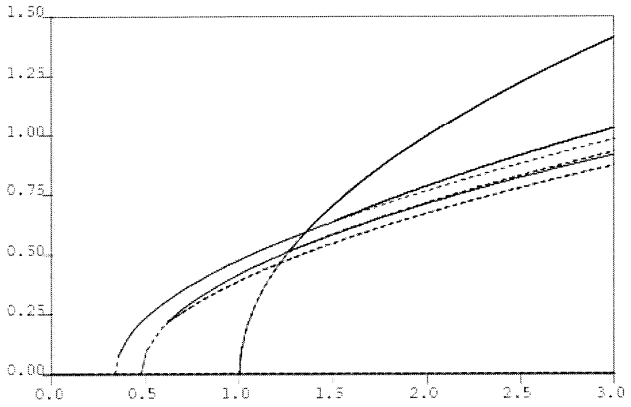


Figure 1: Bifurcation diagram at $L = 0.65$.

The row line is ν-coordinate and the column line is $\|u\|_2$-coordinate. The solid and the dotted lines indicate stable and unstable equilibria, respectively.

- $\bigcap_{i=0,1,2} M_i^{\lambda_{\rm PF}} \neq \emptyset$.
- $M_0^{\lambda_{\rm PF}} \cap M_1^{\lambda_{\rm PF}} \neq \emptyset$ *and* $M_i^{\lambda_{\rm PF}} \cap M_2^{\lambda_{\rm PF}} = \emptyset$, $i = 0, 1$.
- $M_0^{\lambda_{\rm PF}} \cap M_1^{\lambda_{\rm PF}} = \emptyset$ *and* $M_i^{\lambda_{\rm PF}} \cap M_2^{\lambda_{\rm PF}} \neq \emptyset$, $i = 0, 1$.
- $M_i^{\lambda_{\rm PF}}$, $i = 0, 1, 2$, *are mutually disjoint and there exist connected invariant sets* $\tilde{M}$ *and* $g\tilde{M}$ *in* $\mathrm{Inv}(N^{\lambda_{\rm PF}})$ *which either of the following statements holds:*
  - $\tilde{M}$ *and* $g\tilde{M}$ *intersect both* $M_0^{\lambda_{\rm PF}}$ *and* $M_1^{\lambda_{\rm PF}}$.
  - $\tilde{M}$ *intersects both* $M_0^{\lambda_{\rm PF}}$ *and* $M_2^{\lambda_{\rm PF}}$. $g\tilde{M}$ *intersects both* $M_1^{\lambda_{PF}}$ *and* $M_2^{\lambda_{\rm PF}}$.

Definition 1.3. Let Φ be the parameterized flow corresponding to the $\lambda-$continuous family of flows on X, $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, and $N \subset X \times \Lambda$ be a C-ptichfork type isolating neighborhood on [*lambda*$_-, \lambda_+$]. Then we shall call Φ *undergoes a C-pitchfork bifurcation at* $\lambda_{\rm PF} \in [\lambda_-, \lambda_+]$ *in* N.

2 An example of numerical verification

2.1 Swift-Hohenberg equation

We consider the Swift-Hohenberg equation on a finite interval $I = [0, \ell]$, where $\ell = 2\pi/L$ and $L > 0$:

$$u_t = E(\nu, u) = \left\{\nu - (1+\Delta)^2\right\} u - u^3,\ u(\cdot, t) \in L^2(I), \tag{1}$$
$$u(x,t) = u(x+\ell, t),\ u(-x,t) = u(x,t),$$

where $E : (0,\infty) \times L^2(I) \to L^2(I)$ and $\Delta = \partial^2/\partial x^2$.

Using the following Fourier expansion

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) \cos(kLx),$$

with $a_{-k} = a_k$, the dynamics generated by (1) is equivalent to the following countable system of differential equations

$$\dot{a} = f(a),$$

where $a = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ and for $k = 0, 1, \dots,$

$$\dot{a}_k = f_k(a) = \mu_k a_k - \sum_{n_1+n_2+n_3=k, n_i \in \mathbb{Z}} a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3}, \tag{2}$$

$$\mu_k := \nu - (1 - k^2 L^2)^2, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

in a compact subset $J = \prod_{k \geq 0} [a_k^-, a_k^+] \subset L^2(I)$, where $\{a_k\}$ is a coordinate of $L^2(I)$ with an orthonormal basis $\{\cos(kLx)\}$.

The strategy of numerical verification here is as follows.

1 We find rigorous steady-state solutions of (2) at a certain parameter value near a bifurcation point.

2 We construct a set J which satisfies conditions (CPF2)-(CPF5).

3 We check if a set which forms $[\nu_-, \nu_+] \times J$ is a C-pitchfork type isolating neighborhood.

Here we let S_1 be the $\mathbb{Z}_2$-symmetry of an element $\{a_k\}_{k \geq 0} \in L^2(I)$ as follows:

$$S_1 : a_{2k} \mapsto a_{2k}, \ a_{2k+1} \mapsto -a_{2k+1}, \ k = 0, 1, 2, \dots.$$

2.2 The secondary pitchfork bifurcation

In this subsection, we consider the bifurcation from nontrivial solution. The second branch (bifurcated from the trivial solution at $\nu \approx 0.476$) in Figure.1 implies that the SH-equation undergoes the secondary bifurcation at $\nu \approx 0.62167$ (this value is obtained by using AUTO).

Here we construct a C-pitchfork type isolating neighborhood around the "bifurcation point". Now we let $\nu_- := 0.62163$, $\nu_+ := 0.62173$ and $L := 0.65$.

Computer Assisted Result 2.1. *Let a set $J = \prod_{k=0}^{9} [a_k^-, a_k^+] \times \prod_{k \geq 10} [-\frac{1}{k^6}, \frac{1}{k^6}] \subset L^2(I)$ be as Table 1. Then J is a compact trapping region for $\nu \in [\nu_-, \nu_+]$. That is, the vector field on ∂J goes inside J. Moreover, there exist just five equilibria in J at ν_- and just nine equilibria in J at ν_+. The Conley index of each equilibrium is nontrivial.*

Here we would like to remove equilibria which continue over $[\nu_-, \nu_+]$. In Figure 1, they correspond to the trivial equilibrium and those on the first bifurcation branch (bifurcated at $\nu \approx 0.334$). We can remove them from J to make the remaining set be an isolating neighborhood. We let the set N_{PF}. We omit details in this paper.

We check if N_{PF} is a C-pitchfork type isolating neighborhood. First, by our construction, $\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_-})$ consists of exactly two equilibria which have nontrivial Conley indices. We know them by rigorous numerics. These equilibria are $\mathbb{Z}_2$-symmetric with respect to the symmetry S_1. Therefore, N_{PF} satisfies the condition (CPF1).

Next, $\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_+})$ consists of exactly six equilibria which have nontrivial Conley indices,

$$M_j^{\nu_+}, \ j = +, -, ++, +-, -+, --,$$

and connecting orbits between them. Now we would like to know the dynamics of $\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_+})$ for the sake of completeness. We know it by using our above verifications and a topological tool, the connection matrix.

Proposition 2.2. *The Conley index of* N_{PF}^{ν} *is as follows for* $\nu \in [\nu_-, \nu_+]$*:*

$$CH_n(\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu})) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathrm{n}{=}1 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}.$$

Proposition 2.3 (Dynamics of $\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_+})$)**.** *Consider the collection of equilibria*

$$\mathscr{M}(\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_+})) := \{M_i^{\nu_+} \mid i = 1^{\pm}, 1^{\pm\pm}\}.$$

This collection is a Morse decomposition of $\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_+})$*. An admissible ordering on the indexing set* $\{1^{\pm}, 1^{\pm\pm}\}$ *is* $1^{\pm\pm} > 1^{\pm}$*.*

We let $M(0_+) := M_{1^{++}}^{\nu_+} \cup M_{1^{-+}}^{\nu_+}, M(0_-) := M_{1^{+-}}^{\nu_+} \cup M_{1^{--}}^{\nu_+}$ and $M(1) := M_{1^+}^{\nu_+} \cup M_{1^-}^{\nu_+}$. The collection

$$\{M(0_+), M(0_-), M(1)\}$$

is a Morse decomposition of $\mathrm{Inv}(N_{\mathrm{PF}}^{\nu_+})$ with an admissible ordering $0_{\pm} > 1$. Obviously, $M(0_+)$ and $M(0_-)$ map each other by S_1 and $M(1)$ is $\mathbb{Z}_2$-symmetric. All the Conley indices of $M(0_+)$, $M(0_-)$ and $M(1)$ are nontrivial.

Summerizing above discussions, we have proved the final result.

Theorem 2.4. *The set* N_{PF} *is a C-pitchfork type isolating neighborhood on* $[\nu_-, \nu_+] = [0.62163, 0.62173]$*. Therefore the Swift-Hohenberg equation (1) with* $L = 0.65$ *undergoes a C-pitchfork bifurcation at* $\nu_{\mathrm{PF}} \in 0.62168 + [-5.0 \times 10^{-5}, 5.0 \times 10^{-5}]$ *in* N_{PF}*.*

Table 1: The block J defining a trapping region

k	a_k^-	a_k^+
0	$-4.444104086488 \times 10^{-1}$	$+4.444104086488 \times 10^{-1}$
1	$-5.925285263178192 \times 10^{-1}$	$+5.925285263178192 \times 10^{-1}$
2	$-3.305282471202739 \times 10^{-1}$	$+3.305282471202739 \times 10^{-1}$
3	$-1.164291917982495 \times 10^{-1}$	$+1.164291917982495 \times 10^{-1}$
4	$-2.50492354594561 \times 10^{-2}$	$+2.50492354594561 \times 10^{-2}$
5	$-5.7503113944843 \times 10^{-3}$	$+5.7503113944843 \times 10^{-3}$
6	$-2.6741016619401 \times 10^{-3}$	$+2.6741016619401 \times 10^{-3}$
7	$-3.321506862841 \times 10^{-4}$	$+3.321506862841 \times 10^{-4}$
8	$-8.52155647210 \times 10^{-5}$	$+8.52155647210 \times 10^{-5}$
9	$-2.13335819140 \times 10^{-5}$	$+2.13335819140 \times 10^{-5}$

Continuity Points of Typical Functions

Shingo SAITO (Kyushu University)

Abstract

Since Banach and Mazurkiewicz independently proved that typical (in the sense of Baire category) continuous functions are nowhere differentiable, the study of the behaviour of typical continuous functions has been one of the most popular topics in classical real analysis. Despite being less popular, it is also interesting and important to investigate typical members of other families of functions. The talk will look at several families in which typical functions have small continuity points.

1 Continuity points of functions of Baire class 1

By a *function* we shall always mean a function from the real line $\mathbb{R}$ into itself.

All mathematics students are taught in their first year that a pointwise limit of continuous functions is not necessarily continuous, as illustrated by the following example.

Example 1.1.
Define a sequence $\{f_n\}$ of continuous functions by

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > 1/n; \\ 1 - n|x| & \text{if } |x| \leq 1/n. \end{cases}$$

Then $\{f_n\}$ converges pointwise to the characteristic function of $\{0\}$, which is discontinuous at 0.

Definition 1.2.
A function is said to be of **Baire class 1** if it can be expressed as a pointwise limit of continuous functions. The family of all functions of Baire class 1 will be denoted by B_1.

All continuous functions are of Baire class 1; the converse fails as we saw in Example 1.1.

Definition 1.3.
For each function f, we write

$$C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous at } x\},$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ is not continuous at } x\}.$$

The function $f \in B_1$ in Example 1.1 satisfies $D(f) = \{0\}$. We may well ask ourselves whether a function $f \in B_1$ can have much bigger $D(f)$; for example, is there $f \in B_1$ with $D(f) = \mathbb{R}$? It turns out that $D(f)$ is topologically small for every $f \in B_1$. In order to state this proposition precisely, we need a few terms.

Definition 1.4.
Let X be a topological space and A a subset of X.
(1) We say that A is **nowhere dense** if $\operatorname{Int} \bar{A} = \emptyset$.
(2) We say that A is **meagre** if A can be written as a countable union of nowhere dense sets.

Proposition 1.5 (Baire category theorem).
In a complete metric space, every meagre set has empty interior.

This proposition means that we can regard meagreness as the mathematically rigorous concept for topological smallness in complete metric spaces. Note that it is not the case for all topological spaces; for example, the whole space is meagre in $\mathbb{Q}$, where meagreness makes no sense.

Proposition 1.6.
If $f \in B_1$, then $D(f)$ is meagre.

Proof.
Define the **oscillation** $\operatorname{osc}(f, a)$ of f at a point $a \in \mathbb{R}$ by

$$\operatorname{osc}(f, a) = \inf_{\delta > 0} \sup_{x, y \in (a-\delta, a+\delta)} |f(x) - f(y)| \in [0, \infty],$$

and set $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{osc}(f, x) \geq \varepsilon\}$ for each $\varepsilon > 0$. It is easy to see that each A_ε is closed and that $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{osc}(f, x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}$. Therefore it suffices to prove that $\operatorname{Int} A_\varepsilon = \emptyset$ for all $\varepsilon > 0$. Suppose for a contradiction that some A_ε contains a nondegenerate closed interval I.

Take a sequence $\{f_n\}$ of continuous functions converging pointwise to f, and look

at the closed set

$$B_n = \bigcap_{i,j=n}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon/4\}$$

for each $n \in \mathbb{N}$. Since $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap I)$ by the pointwise convergence of $\{f_n\}$, the Baire category theorem implies that $B_n \cap I$ contains a nondegenerate closed interval, say J, for some $n \in \mathbb{N}$. For each $x \in J$, we have $|f_i(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/4$ for all $i \geq n$, and so $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/4$. The uniform continuity of f_n on J allows us to take $\delta > 0$ less than half the length of J so that $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon/4$ whenever $x, y \in J$ and $|x - y| < 2\delta$.

Now let a be the midpoint of J. If $x, y \in (a - \delta, a + \delta) \subset J$, then

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon/4.$$

It follows that $\mathrm{osc}(f, a) \leq 3\varepsilon/4 < \varepsilon$, contradicting the fact that $a \in J \subset I \subset A_\varepsilon$. ∎

2 Continuity points of typical functions of Baire class 1

Having proved in Section 1 that $D(f)$ is topologically small for every $f \in B_1$, we are tempted to know whether $D(f)$ is also measure-theoretically small, i.e. Lebesgue null, for every $f \in B_1$. Contrary to the intuition one may have, Bruckner and Petruska [BP] proved that $C(f)$, rather than $D(f)$, is Lebesgue null for *most* $f \in B_1$.

In order to define what we mean by *most* $f \in B_1$, we need to give B_1 a topology. For ease of presentation, we restrict ourselves to *bounded* functions of Baire class 1 and consider

$$bB_1 = \{f \in B_1 \mid f \text{ is bounded}\},$$

equipped with the supremum norm $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

The following proposition assures us that meagreness makes sense in bB_1:

Proposition 2.1.
The space bB_1 is a Banach space.

Proof.

It suffices to show that if $f_n \in B_1$ and $f_n \to f$ uniformly, then $f \in B_1$.

By taking a subsequence if necessary, we may assume that $\|f_n - f\| < 2^{-n}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Put $g_n = f_{n+1} - f_n \in B_1$ for each $n \in \mathbb{N}$, and $g = f - f_1$. We have $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ uniformly, and it suffices to show that $g \in B_1$.

Take continuous functions $\{g_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ so that $g_{mn} \to g_n$ pointwise as $m \to \infty$ for each $n \in \mathbb{N}$. Since

$$\|g_n\| \leq \|f_{n+1} - f\| + \|f - f_n\| < 2^{-n-1} + 2^{-n} < 2^{-n+1},$$

we may assume that $\|g_{mn}\| \leq 2^{-n+1}$ for all $m, n \in \mathbb{N}$ by replacing g_{mn} with

$$\max\{\min\{g_{mn}, 2^{-n+1}\}, -2^{-n+1}\}$$

if necessary.

Set $h_m = \sum_{n=1}^{m} g_{mn}$ for each $m \in \mathbb{N}$. We shall show that $h_m \to g$ pointwise, which implies that $g \in B_1$ as required. Let $x \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$ be given. Choose $M \in \mathbb{N}$ so large that $\sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n+1} < \varepsilon/3$, and then choose $M' > M$ so large that $|g_{mn}(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon/3M$ for $n = 1, \ldots, M$ whenever $m \geq M'$. For $m \geq M'$, we have

$$\begin{aligned}
|h_m(x) - g(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{m} g_{mn}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{M} |g_{mn}(x) - g_n(x)| + \sum_{n=M+1}^{m} |g_{mn}(x)| + \sum_{n=M+1}^{\infty} |g_n(x)| \\
&\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \sum_{n=M+1}^{m} 2^{-n+1} + \sum_{n=M+1}^{\infty} 2^{-n+1} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

completing the proof. ∎

Definition 2.2.
We say that a **typical** $f \in bB_1$ has a property P, written $\forall^* f \in bB_1\ P$, if

$$\{f \in bB_1 \mid f \text{ does not have property } P\}$$

is meagre in bB_1.

The following is the theorem of Bruckner and Petruska mentioned at the beginning of the present section:

Theorem 2.3 ([BP, Theorem 2.4], weakened for simplicity).
A typical $f \in bB_1$ has the property that $C(f)$ is Lebesgue null.

3 Theorem of Kostyrko and Šalát, and our main theorem

We now turn our attention from bB_1 to general spaces of bounded functions. Let X be a linear space of bounded functions, equipped with the supremum norm.

Definition 3.1.
We say that a **typical** $f \in X$ has a property P, written $\forall^* f \in X\ P$, if

$$\{f \in X \mid f \text{ does not have property } P\}$$

is meagre in X.

Note that even when a typical $f \in X$ has a property P, there does not necessarily exist $f \in X$ with the property P, since we do not assume X to be closed under uniform convergence.

Kostyrko and Šalát [KS] investigated in which families X it is true that a typical $f \in X$ has the property that $C(f)$ is Lebesgue null.

Theorem 3.2 ([KS, Theorem], weakened for simplicity).
If $C(f)$ is Lebesgue null for some $f \in X$, then a typical $f \in X$ has the property that $C(f)$ is Lebesgue null.

Our main theorem shows that the theorem above remains valid when 'Lebesgue null' is replaced by 'meagre.'

Theorem 3.3 (Main Theorem, [Sa, Theorem 1.3], weakened for simplicity).
If $C(f)$ is meagre for some $f \in X$, then a typical $f \in X$ has the property that $C(f)$ is meagre.

References

[BP] A. M. Bruckner and G. Petruska, *Some typical results on bounded Baire 1 functions*, Acta Math. Hung., **43** (1984), no. 3–4, 325–333.

[KS] P. Kostyrko and T. Šalát, *On the structure of some function space*, Real Anal. Exch., **10** (1984–85), no. 1, 188–193.

[Sa] S. Saito, *Continuity points of typical bounded functions*, to appear in Real Anal. Exch.

Shingo SAITO
Faculty of Mathematics (Engineering Building), Kyushu University,
6–10–1, Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka, 812–8581, Japan
`http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/`
`ssaito@math.kyushu-u.ac.jp`

Slip condition problem for inhomogeneous incompressible fluid-like bodies

Naoto Nakano*

Department of Mathematics, Keio University

3-14-1 Hiyoshi, Kōhoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

Introduction

We are interested in dynamics of granular materials. As the nomenclature, granular materials are the collection of a large number of grains (particles), for example, sand and powder. As we can easily see, avalanches and quicksand, which are well-observed granular phenomena, show the fluid-like behaviour. Naturally granular matter has the solid aspect (sand can sustain a pyramid), and furthermore, it also has the fluid aspect. Here, we focus our interest on the motion of fluid-like bodies and analyse it by the use of continuum mechanics.

Even if each grain is a hard particle, the body is invariably compressible due to the interstices of the grains. However, under certain conditions, for example, interlocking of fine granules, the body may behave as though it is incompressible. Here, we shall consider the motion that its compressibility caused by interstices of the particles are insignificant concerning the response of the body. We take into account the material inhomogeneity instead of the compressibility of the body. Granular materials are naturally inhomogeneous since they may consist of various substances. This study concerns the response of fluid-like bodies whose stored energy depends on the inhomogeneous state of the body thorough the density and the gradient of the density. Such models were introduced first by Korteweg (1901)[1]. The model under consideration is not specifically concerned with granular materials, nevertheless some granular behaviour can be captured by this model in certain limits. We try to

*e-mail: nakano-naoto@a6.keio.jp

observe the motion of granular materials from the point of view of inhomogeneous incompressible fluid-like bodies.

Moreover, for the motion of granular materials it is essentially important to consider the slip effect on the surface of the body. For example, in a pipe flow or a flow on an inclined plane, a slip often occurs on the interface to the solid wall. It is mainly caused by the shear stress, and takes a significant role for its motion. This point is quite different from a concept of behaviour of liquid such as water adheres to the boundary due to the viscosity. Thus, we are interested in the slip phenomenon so we shall take it into account in this study.

Set up the problem

The continuum model of the behaviour of inhomogeneous incompressible fluid-like bodies is derived by Málek and Rajagopal [3] as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{D}\varrho}{\mathrm{D}t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \varrho \dfrac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = \nabla \cdot \mathbb{T} + \varrho \mathbf{b} \quad (x \in \Omega,\ t > 0), \\ \mathbb{T} = -p\mathbb{I} + 2\nu(\varrho)\mathbb{D}(\mathbf{v}) - \beta \left(\nabla\varrho \otimes \nabla\varrho - \dfrac{1}{3}|\nabla\varrho|^2 \mathbb{I} \right), \end{cases} \tag{1}$$

and we assign the initial and boundary conditions:

$$\begin{cases} (\varrho, \mathbf{v})|_{t=0} = (\varrho_0, \mathbf{v}_0) \quad (x \in \Omega), \\ \mathbf{v} + K\Pi\mathbb{T}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (x \in \Gamma,\ t > 0). \end{cases} \tag{2}$$

Here, $\Omega (\subset \mathbb{R}^3)$ is a fixed domain where material occupies with the boundary Γ; $\varrho = \varrho(x,t)$ is the density of the body; $\mathbf{v} = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ is the velocity vector field; $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ is the material derivative; $\mathbb{T} = (T_{ij})_{i,j=1,2,3}$ is the Cauchy stress tensor; $p = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbb{T}$ is the pressure; $(\nabla \cdot \mathbb{T})_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$; $\mathbf{b} = (b_1(x,t), b_2(x,t), b_3(x,t))^{\mathrm{T}}$ is the external body forces; $\nu = \nu(\varrho(x,t))$ is the viscosity; $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + [\nabla\mathbf{v}]^{\mathrm{T}})$ is the symmetric part of the velocity gradient; $\beta > 0$ is a constant number; $K = K(x,t)$ is the slip rate on the boundary satisfying $K \geq 0$; $\mathbf{n}$ is the unit outward normal vector to Γ; Π is the projection operator on the tangential plane to Γ, *i.e.*, $\Pi\mathbf{f} = \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. In this problem $\mathbf{u}$, ϱ and p are unknown functions.

The conditions $(2)_2$ is called Navier's boundary condition. This means the particle may happen to slip on the boundary in connection with the shear stress [2, 4]. The slip rate K can be either a constant, or it can be a function of the normal stress

$\mathbb{T}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$. Here, we assume that the slip rate is already known at any point and any time, i.e., $K = K(x,t)$ is given. When $K \equiv 0$, $(2)_2$ becomes the adherence (no-slip) condition. If $K(x,t) > 0$, then the material slips at the point on the boundary. With Navier's slip condition, for example, Tani, Ito and Tanaka studied a significant work concerning an initial-boundary value problem for Navier-Stokes fluids [5].

The problem formulated above in Eulerian coordinates x can be rewritten in Lagrangian coordinate y. Let $\mathbf{u}$ and q be the velocity and the pressure expressed as functions of the Lagrangian coordinates. The relation between Eulerian and Lagrangian coordinates can be written in the form

$$x = y + \int_0^t \mathbf{u}(y,s)ds \equiv X^{\mathbf{u}}(y,t).$$

From $(1)_1$ it is easy to derive

$$\frac{\partial \widehat{\varrho}}{\partial t}(y,t) = 0 \tag{3}$$

for $\widehat{\varrho}(y,t) := \varrho(X^{\mathbf{u}}(y,t),t)$. The function with a hat symbol denotes the function expressed in the Lagrangian coordinates, *i.e.*, $\widehat{F}^{(\mathbf{u})}(y,t) := F(X^{\mathbf{u}}(y,t),t)$. Then we obtain a solution of (3) by $(2)_1$

$$\widehat{\varrho}(y,t) = \widehat{\varrho}(y,0) = \varrho(X^{\mathbf{u}}(y,0),0) = \varrho(y,0) = \varrho_0(y). \tag{4}$$

In the same way as (4) we have $\mathbf{u}(y,0) = \mathbf{v}_0(y)$.

Moreover, the relation with respect to the spatial derivative becomes

$$\nabla_y\{F(X^{\mathbf{u}}(y,t),t)\} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\nabla_x F(x,t),$$

where $\mathbb{A}$ is the Jacobian matrix of the transformation $X^{\mathbf{u}}$, so that

$$\nabla_x F(x,t) = \mathbb{A}^{-\mathrm{T}}\nabla_y \widehat{F}^{(\mathbf{u})}(y,t) \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\widehat{F}^{(\mathbf{u})}(y,t).$$

Hence problem (1)-(2) takes the form

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u} = 0, \quad \varrho_0\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{u}}\cdot\widehat{\mathbb{T}}^{(\mathbf{u})} + \varrho_0\widehat{\mathbf{b}}^{(\mathbf{u})} \quad (y\in\Omega,\ t>0), \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad (y\in\Omega), \\ \mathbf{u} + \widehat{K}^{(\mathbf{u})}\Pi^{(\mathbf{u})}\widehat{\mathbb{T}}^{(\mathbf{u})}\widehat{\mathbf{n}}^{(\mathbf{u})} = 0, \quad \mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{n}}^{(\mathbf{u})} = 0 \quad (y\in\Gamma,\ t>0). \end{cases} \tag{5}$$

Here,

$$\widehat{\mathbb{T}}^{(\mathbf{u})} = -q\mathbb{I} + 2\nu(\varrho_0)\widehat{\mathbb{D}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{u}) - \beta\left(\nabla_{\mathbf{u}}\varrho_0\otimes\nabla_{\mathbf{u}}\varrho_0 - \tfrac{1}{3}|\nabla_{\mathbf{u}}\varrho_0|^2\mathbb{I}\right),$$
$$\widehat{\mathbb{D}}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{w}) = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} + [\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}]^{\mathrm{T}}\right), \quad \Pi^{(\mathbf{u})}\mathbf{f} = \mathbf{f} - (\mathbf{f}\cdot\widehat{\mathbf{n}}^{(\mathbf{u})})\widehat{\mathbf{n}}^{(\mathbf{u})}.$$

Due to $(1)_1$ we reduce (1)-(2) to the quasi-linear problem (5) with unkonwn functions $\mathbf{u}$ and q.

Function spaces

We set function spaces in order to consider the existence theorem for problem (5).

Let $\mathscr{G}$ be a domain in $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ and r a non-negative number. By $W_2^r(\mathscr{G})$ we denote the space of functions, which is called Sobolev-Slobodetskiĭ spaces, equipped with the standard norm

$$\|u\|^2_{W_2^r(\mathscr{G})} = \sum_{|\alpha|<r} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\mathscr{G})} + \|u\|^2_{\dot{W}_2^r(\mathscr{G})}, \tag{6}$$

$$\|u\|^2_{\dot{W}_2^r(\mathscr{G})} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=r} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(\mathscr{G})} \quad (\text{if } r = [r]), \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=[r]} \int_{\mathscr{G}}\int_{\mathscr{G}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\{r\}}} dxdy \quad (\text{if } r \neq [r]) \end{cases}$$

Here $[r]$ and $\{r\}$ are the integral and the fractional parts of r, respectively. $\|f\|_{L_2(\mathscr{G})} = (\int_{\mathscr{G}} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ is the norm in $L_2(\mathscr{G})$, $D^\alpha f = \partial^{|\alpha|} f / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ is the generalized derivative of the function f in the distribution sense of order $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ with $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ being a multi-index. Similarly, the norm in $W_2^{r/2}(0,T)$ is defined by the same way as (6) with $\mathscr{G} = (0,T)$.

The anisotropic Sobolev-Slobodetskiĭ spaces $W_2^{r,r/2}(\mathfrak{G}_T)$ in the cylindrical domain $\mathfrak{G}_T = \mathscr{G} \times (0,T)$ is defined by $L_2(0,T; W_2^r(\mathscr{G})) \cap L_2(\mathscr{G}; W_2^{r/2}(0,T))$, whose norm is introduced by the formula

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{W_2^{r,r/2}(\mathfrak{G}_T)} &= \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^r(\mathscr{G})} dt + \int_{\mathscr{G}} \|u(x,\cdot)\|^2_{W_2^{r/2}(0,T)} dx \\ &\equiv \|u\|^2_{W_2^{r,0}(\mathfrak{G}_T)} + \|u\|^2_{W_2^{0,r/2}(\mathfrak{G}_T)}, \end{aligned}$$

where $W_2^{r,0}(\mathfrak{G}_T) = L_2(0,T; W_2^r(\mathscr{G}))$ and $W_2^{0,r/2}(\mathfrak{G}_T) = L_2(\mathscr{G}; W_2^{r/2}(0,T))$.

If $\mathscr{G}$ is a smooth manifold (in this paper the boundary of a domain in $\mathbb{R}^3$ may play this role), then the norm in $W_2^r(\mathscr{G})$ is defined by means of local charts, each of which is mapped into a domain of Euclidean space where the norms of W_2^r are defined by formula (6). After this the spaces $W_2^{r,r/2}(\mathfrak{G}_T)$ are introduced as indicated above.

Mathematical result

We obtain the theorem on time-local existence of a solution of problem (5) in Sobolev-Slobodetskiĭ space.

Theorem 1 *Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^3$, $\Gamma \in W_2^{7/2+l}$, $l \in (1/2, 1)$, $\varrho_0 \in W_2^{2+l}(\Omega)$, $\varrho_0(y) \geq R_0 > 0$, $\nu \in C^3(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\inf \nu > 0$, T is a finite positive number, $\mathbf{b} \in W_2^{l,l/2}(Q_T)$, $K \in W_2^{1/2+l,1/4+l}(G_T)$, $\inf K > 0$. Assume that $\mathbf{b}(x,t)$ has continuous derivatives with respect to x, and $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_{x_k}$ satisfy the Lipschitz condition in x and the Hölder condition with the exponent $1/2$ in t, and that $K(x,t)$ is three-time and twice continuously differentiable with respect to x and t, respectively, and K and those derivatives satisfy the Lipschitz condition in x and t. And also asuume that $\mathbf{v}_0 \in W_2^{1+l}(\Omega)$ satisfies the compatibility conditions*

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad (y \in \Omega), \quad \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (y \in \Gamma),$$

$$\mathbf{v}_0 + K(y,0)\Pi\left(2\nu(\varrho_0)\mathbb{D}(\mathbf{v}_0) - \beta \nabla \varrho_0 \otimes \nabla \varrho_0\right)\mathbf{n} = 0 \quad (y \in \Gamma).$$

Then problem (5) *has a unique solution $(\mathbf{u}, \nabla q) \in W_2^{2+l,1+l/2}(Q_{T'}) \times W_2^{l,l/2}(Q_{T'})$ on some interval $(0, T')$ $(0 < T' \leq T)$.*

References

[1] D. J. KORTWEG, Sur la forme que prenent les équations du mouvements des fluides si l'on tient compte des forces capilaires causées par des variations de densité considérables mains continues et sur la théorie de la capollarité dans l'hypothése d'une varation continue de la densité. *Arch. Néerl. Sci. Exactes Nat. Ser. II*, **6**, 1-24 (1901).

[2] J. MÁLEK AND K. R. RAJAGOPAL, Mathematical Issues Concerning the Navier-Stokes Equations and Some of Its Generalizations. *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Vol. II*, (C. Dafermos and E. Feireisl, eds.), North-Holland, Amsterdam, 371-459 (2005)

[3] J. MÁLEK AND K. R. RAJAGOPAL, On the modeling of inhomogeneous incompressible fluid-like bodies. *Mechanics of Materials* **38**, 233-242 (2006).

[4] J. SERRIN, *Mathematical principles of classical fluid mechanics.* in Handbuch der Physik, Vol. VIII/1, Springer, 125-263 (2000).

[5] A. TANI, S. ITOH AND N. TANAKA, The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condtition. *Advances in Math. Sci. and Appl.* **4**, 51-69 (1994).

Toy models for D. H. Lehmer's conjecture (joint work with Eiichi Bannai)

Tsuyoshi Miezaki

January 26, 2009

Graduate School of Mathematics Kyushu University
Hakozaki 6-10-1 Higashi-ku, Fukuoka, 812-8581 Japan

The concept of a spherical t-design is due to Delsarte-Goethals-Seidel [3]. For a positive integer t, a finite nonempty set X in the unit sphere

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

is called a spherical t-design in S^{n-1} if the following condition is satisfied:

$$\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(x)d\sigma(x),$$

for all polynomials $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ of degree not exceeding t. Here, the righthand side means the surface integral on the sphere, and $|S^{n-1}|$ denotes the volume of the sphere S^{n-1}. The meaning of spherical t-designs is that the average value of the integral of any polynomial of degree up to t on the sphere is replaced by the average value of a finite set on the sphere.

Here, we denote by $\mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ the set of homogeneous polynomials on $\mathbb{R}^n$. It is well known that X is a spherical t-design if and only if the condition

$$\sum_{x\in X} P(x) = 0, \quad \forall P \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$$

holds for every integer j with $1 \leq j \leq t$. If the set X is antipodal, that is $-X = X$, and j is odd, then the above condition is fulfilled automatically. So we reformulate the condition of spherical t-design on the antipodal set as follows:

Proposition 0.1 *A nonempty finite antipodal subset $X \subset S_m^{n-1}$ is a spherical $2s+1$-design if the condition*

$$\sum_{x\in X} P(x) = 0, \quad \forall P \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$$

holds for every even integer $2j$ with $2 \leq 2j \leq 2s$.

A lattice in $\mathbb{R}^n$ is a subset $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ with the property that there exists a basis $\{e_1, \cdots, e_n\}$ of $\mathbb{R}^n$ such that $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$, i.e., Λ consists of all integral linear combinations of the vectors $e_1, \cdots, e_n$. The dual lattice Λ is the lattice

$$\Lambda^\sharp := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y|x\rangle \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \Lambda\}.$$

In this paper, we assume that the lattice Λ is integral, that is, $\langle x|y\rangle \in \mathbb{Z}$ for all x, $y \in \Lambda$. An integral lattice is called even if $\langle x|x\rangle \in 2\mathbb{Z}$ for all $x \in \Lambda$, and it is odd otherwise. An integral lattice is called unimodular if $\Lambda^\sharp = \Lambda$. For a lattice Λ and a positive real number $m > 0$, the shell of norm m of Λ is defined by

$$\Lambda_m := \{x \in \Lambda \mid \langle x|x\rangle = m\} = \Lambda \cap (S^{n-1})_m.$$

Let $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ be the upper half-plane.

Definition 0.1 *Let Λ be the lattice of $\mathbb{R}^n$. Then for a polynomial P, the function*

$$\Theta_{\Lambda,P}(z) := \sum_{x\in\Lambda} P(x)e^{i\pi z\langle x|x\rangle}$$

is called the theta series of Λ weighted by P.

Remark 0.1 (See Hecke [4], Schoeneberg [9], [10])
(i) *When $P = 1$, we get the classical theta series*

$$\Theta_\Lambda(z) = \Theta_{\Lambda,1}(z) = \sum_{m\geq 0} |\Lambda_m| q^m,\ \textit{where } q = e^{\pi i z}.$$

(ii) *The weighted theta series can be written as*

$$\begin{aligned}\Theta_{\Lambda,P}(z) &= \sum_{x\in\Lambda} P(x)e^{i\pi z\langle x|x\rangle} \\ &= \sum_{m\geq 0} a_m^{(P)} q^m,\ \textit{where } a_m^{(P)} := \sum_{x\in\Lambda_m} P(x).\end{aligned}$$

These weighted theta series have been used efficiently for the study of spherical designs which are the shells of Euclidean lattices. (See [12], [13], [1], [8] and [2].)

Lemma 0.1 (cf. [12], [13], [8], Lemma 5) *Let Λ be an integral lattice in $\mathbb{R}^n$. Then, for $m > 0$, the non-empty shell Λ_m is a spherical t-design if and only if*

$$a_m^{(P)} = 0 \textit{ for every } P \in \mathrm{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq 2j \leq t,$$

where $a_m^{(P)}$ are the Fourier coefficients of the weighted theta series

$$\Theta_{\Lambda,P}(z) = \sum_{m\geq 0} a_m^{(P)} q^m.$$

The theta series of Λ weighted by P is a modular form for some subgroup of $SL_2(\mathbb{R})$. We recall the definition of the modular forms.

Definition 0.2 *Let $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ be a Fuchsian group of the first kind and let χ be a character of Γ. A holomorphic function $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ is called a modular form of weight k for Γ with respect to χ, if the following conditions are satisfied:*

(i) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \left(\frac{cz+d}{\chi(\sigma)}\right)^k f(z)$ *for all* $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$

(ii) $f(z)$ *is holomorphic at every cusp of* Γ.

If $f(z)$ has period N, then $f(z)$ has a Fourier expansion at infinity, [6]:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q_N^m, \ q_N = e^{2\pi iz/N}.$$

We remark that for $m < 0$, $a_m = 0$, by condition (ii). A modular form with constant term $a_0 = 0$, is called cusp form. We denote by $M_k(\Gamma, \chi)$ (resp. $S_k(\Gamma, \chi)$) the space of modular forms (resp. cusp forms) with respect to Γ with the character χ. When f is the normalized eigenform of Hecke operators, p.163, [6], the Fourier coefficients satisfy the following relations:

Lemma 0.2 (cf. [6], Proposition 32, 37, 40, Exercise 2, p.164) *Let $f(z) = \sum_{m\geq 1} a(m)q^m \in S_k(\Gamma, \chi)$. If $f(z)$ is the normalized eigenform of Hecke operators, then the Fourier coefficients of $f(z)$ satisfy the following relations:*

$$a(mn) = a(m)a(n) \qquad (m, n \text{ coprime})$$
$$a(p^{\alpha+1}) = a(p)a(p^\alpha) - \chi(p)p^{k-1}a(p^{\alpha-1}) \qquad (p \text{ a prime}).$$

We set $f(z) = \sum_{m\geq 1} a(m)q^m \in S_k(\Gamma, \chi)$. When $\dim S_k(\Gamma, \chi) = 1$ and $a(1) = 1$, then the $f(z)$ is the normalized eigenform of Hecke operators, [6]. So, the coefficients of $f(z)$ have the relations as mentioned in Lemma 0.2. It is known that

$$|a(p)| < 2p^{(k-1)/2} \tag{1}$$

for all primes p. Note that this is the Ramanujan conjecture and its generalization, called the Ramanujan-Petersson conjecture for cusp forms which are eigenforms for the Hecke operator. These conjectures were proved by Deligne as a consequence of his proof of the Weil conjectures, p.164, [6], [5]. Moreover the following equation holds, [7].

$$a(p^\alpha) = p^{(k-1)\alpha/2} \frac{\sin(\alpha+1)\theta_p}{\sin\theta_p}, \tag{2}$$

where $2\cos\theta_p = a(p)p^{-(k-1)/2}$.

It is well known that the theta series of $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ weighted by harmonic polynomial $P \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ is a modular form of weight $n/2 + j$ for some subgroup $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$. In particular, when the $\deg(P) \geq 1$, the theta series of Λ weighted by P is a cusp form.

For example, we consider the even unimodular lattice Λ. Then the theta series of Λ weighted by harmonic polynomial P, $\Theta_{\Lambda,P}(z)$, is a modular form with respect to $SL_2(\mathbb{Z})$.

Example 0.1 *Let Λ be the E_8-lattice. This is an even unimodular lattice of $\mathbb{R}^8$, generated by the E_8 root system. The theta series is as follows*:

$$\begin{aligned}\Theta_\Lambda(z) = E_4(z) &= 1 + 240\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_3(m)q^{2m} \\ &= 1 + 240q^2 + 2160q^4 + 6720q^6 + 17520q^8 + \cdots,\end{aligned}$$

where $\sigma_3(m)$ is a divisor function $\sigma_3(m) = \sum_{0<d|m} d^3$.

For $j = 2, 4$ and 6, the theta series of Λ weighted by P, $P \in \mathrm{Harm}_j(\mathbb{R}^8)$ is a weight $6, 8$ and 10 cusp form with respect to $SL_2(\mathbb{Z})$. However, it is well known that for $k = 6, 8$ and 10, the $\dim S_k(SL_2(\mathbb{Z})) = 0$, that is, $\Theta_{\Lambda,P}(z) = 0$. Then by Lemma 0.1, all the shells of E_8-lattice are spherical 7-design.

For $j = 8$, the theta series of Λ weighted by P is a weight 12 cusp form with respect to $SL_2(\mathbb{Z})$. Such a cusp form is uniquely determined up to constant, i.e., is Ramanujan's delta function:

$$\Delta_{24}(z) = q^2\prod_{m\geq 1}(1-q^{2m}) = \sum_{m\geq 1}\tau(z)q^{2m}.$$

The following proposition is due to Venkov, de la Harpe and Pache, [1], [2], [8], [12].

Proposition 0.2 (cf. [8]) *Let the notation be the same as above. Then the following are equivalent*:
(i) $\tau(m) = 0$;
(ii) $(\Lambda)_{2m}$ *is an 8-design.*

It is a famous conjecture of Lehmer that $\tau(m) \neq 0$. So, Proposition 0.2 gives a reformulation of Lehmer's conjecture. Lehmer proved in [7] the following theorem.

Theorem 0.1 (cf. [7]) *Let m_0 be the least value of m for which $\tau(m) = 0$. Then m_0 is a prime.*

These are many attempts to study Lehmer's conjecture ([7], [11]), but it is difficult to prove and it is still open.

In this talk, we take the two cases $\mathbb{Z}^2$-lattice and A_2-lattice instead of E_8-lattice. Then, we consider the analogue of Lehmer's conjecture corresponding to the theta series weighted by some harmonic polynomial P and also show that the m-th coefficient of the weighted theta series of $\mathbb{Z}^2$-lattice does not vanish when the shell of norm m of those lattices is not an empty set. Or equivalently, we show the following result.

Theorem 0.2 *The shells in $\mathbb{Z}^2$-lattice are not spherical 5-designs.*

Similarly, in Section 4, we show the following result.

Theorem 0.3 *The shells in A_2-lattice are not spherical 7-designs.*

Finally, we give some open problems related this topic.

References

[1] P. de la Harpe and C. Pache, Cubature formulas, geometrical designs, reproducing kernels, and Markov operators, Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects, Progr. Math., vol. 248, Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 219-267.

[2] P. de la Harpe, C. Pache, B. Venkov, Construction of spherical cubature formulas using lattices. Algebra i Analiz 18 (2006), no. 1, 162–186; translation in St. Petersburg Math. J. 18 (2007), no. 1, 119–139.

[3] P. Delsarte, J.-M. Goethals, and J. J. Seidel, Spherical codes and designs, Geom. Dedicata 6 (1977), 363-388.

[4] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983.

[5] N. Katz, An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 28 (1976), 275–305.

[6] N. Koblitz, "Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1984.

[7] D. H. Lehmer, The vanishing of Ramanujan's $\tau(n)$, Duke Math. J. 14 (1947), 429-433.

[8] C. Pache, Shells of selfdual lattices viewed as spherical designs, International Journal of Algebra and Computation 5 (2005), 1085-1127.

[9] B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. (German) Math. Ann. 116 (1939), no. 1, 511–523.

[10] B. Schoeneberg, "Elliptic modular functions: an introduction," Translated from the German by J. R. Smart and E. A. Schwandt. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 203. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[11] J.-P. Serre, "A course in arithmetic," Translated from the French. Graduate Texts in Mathematics, No. 7. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[12] B. B. Venkov, Even unimodular extremal lattices. (Russian) Algebraic geometry and its applications. Trudy Mat. Inst. Steklov. 165 (1984), 43–48; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 165 (1985) 47-52.

[13] B. B. Venkov, "Boris Réseaux et designs sphériques," (French) [Lattices and spherical designs] Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires, 10–86, Monogr. Enseign. Math., 37, Enseignement Math., Geneva, 2001.

FINITE-TYPE INVARIANTS FOR CURVES, CATEGORIFICATION OF JONES POLYNOMIAL WITH $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ COEFFICIENTS FOR KNOT, AND WORD THEORY

NOBORU ITO

This report is for the fifth Mathematics Conference for Young Reseachers. One of the objective of the meeting is mixing oneself among scientific researchers of different fields. Thus, the author starts with a simple principle in physics, Huygen's principle in the manner as in [13, Section 1].

1. Background.

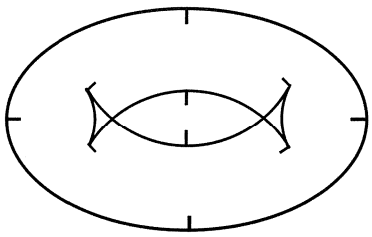


FIGURE 1. Propergation of a wave front.

Consider a closed generic front L propagating on a plane. Huygens principle implies that at each moment of time the propagating front forms an equidistant of L, see Figure 1. A front L can be naturally lifted to a curve (Legendrian curve) in the spherical cotangent bundle $ST^*\mathbb{R}^2$ that is diffeomorphic to $\mathbb{R}^2 \times S^1$ whose coordinate is x y, ψ. By using Huygens principle again, the self-tangency point at which the branches are propagating in the same direction does not occur, i.e. the lifted curve is embedding (Legendrian knot). Fronts corresponding to nonisotopic Legendrian knots cannot be obtained from each other under propergation. In [13, Page 2], V. Tchernov describes that these observation make the study of fronts started by V. Arnold a very attractive subject. Now we study propagating of generic fronts starting with smooth curves.

2. Introduction to words and curves.

2.1. **Curves.** A *curve* is a smooth immersion of an oriented circle into an oriented closed surface. The author now defines some types of curves. First, a curve is said to be *generic* if it has only transversal double points of self-intersection. A curve

The author is a Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science. This work was partly supported by KAKENHI. .

is said to be *singular* if it has only transversal double points, self-tangency points, and triple points of self-intersection. A pointed curve is a generic curve with a base point on the curve distinct from the self-intersections. Two curves are said to be stably homeomorphic if their regular neighbourhoods are homeomorphic in the ambient surfaces that map the first curve onto the second one without changing the orientation of the curves and the surfaces. Similarly, two pointed curves are termed as stably homeomorphic if there is a homeomorphism as above preserving the base point.

2.2. **Words.** In February 2006, at RIMS, Kyoto, the author attend a lecture introducing word theory by Vladimir Turaev [16]. In December 2006, the author give a talk about an application Turaev's theory of words to curve theory. It is generalised to the case of fronts [8].

In this report, we see an entrance of a series of studies [4, 5, 6, 8, 7, 9].

First, we follow the notation and terminology used in [14, Section 2], [15, Subsection 2.1]. An *alphabet* is a set and its elements are called *letters*. A *word of length* $m \geq 1$ in an alphabet $\mathcal{A}$ is a mapping $\hat{m} = \{1, 2, \ldots, m-1, m\} \to \mathcal{A}$. A word $w : \hat{m} \to \mathcal{A}$ is encoded by the sequence of letters $w(1)w(2)\cdots w(m)$. We call the element v the word of length 0 denoted by $\emptyset$. Two words $w : \hat{m} \to \mathcal{A}$ and $w' : \hat{m} \to \mathcal{A}'$ are *isomorphic* if there is a bijection $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ such that $w' = fw$.

A word w is called a *Gauss word* if each element of $\mathcal{A}$ is the image of precisely two elements of $\hat{m}$ or $\hat{m} = 0$. For an alphabet α, an *α-alphabet* $\mathcal{A}$ is an alphabet with a projection $|\ | : \mathcal{A} \to \alpha$. An *nanoword over* α is a pair $(\mathcal{A}, w)$, where $\mathcal{A}$ is an α-alphabet and $w : \hat{m} \to \mathcal{A}$ is is a Gauss word. Whenever possible, $(\mathcal{A}, w)$ is indicated by w. An *isomorphism* of the α-alphabets $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ is a bijection $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ satisfying $|f(A)| = |A|$ for all $A \in \mathcal{A}_1$. Two nanowords $(\mathcal{A}_1, w_1)$ and $(\mathcal{A}_2, w_2)$ over α are *isomorphic* if there is an isomorphism f of the α-alphabets $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$ such that $w_2 = fw_1$. In Section 2.1–4.1, the alphabet α, an involution τ, and a set S are defined as $\alpha = \{-1, 1\}$, $\tau : -1 \mapsto 1$, $S = \{(-1, -1, -1), (1, 1, 1)\}$.

For a given generic curve Γ, which has m double points, used to define w_Γ, first, the double points of Γ are labelled by using distinct letters $A_1, A_2, \ldots, A_{2m}$. Then, beginning with a base point and moving along Γ until returning to the base point, the first instances of all the double points are labelled. Let the i-th double point be labelled A_i. Let t_i^1 (resp. t_i^2) be the tangent vector to Γ at the first (resp. second) passage through this double point. Set $|A_i| = -1$ and replace A with $\overline{A}$ if the pair (t_i^1, t_i^2) is positively oriented and $|A_i| = 1$ and leave A unchanged if otherwise. Since every double point is traversed twice, this yields a word w_Γ, which is represented by m elements in $\mathcal{A}$.

2.3. **An example of a curve invariant by words.** Now we reconstruct Arnold's invariant via words by using Polyak's theorem [12, Page 996, Theorem 1]. A combinatorial construction of Arnold's invariants is provided in [12, Section 4].

First, we define a *subword* in the following manner as in [17, Section 3.1].

Definition 2.1. (subword) Let w be a word $w = v_1x_1v_2x_2\cdots v_kx_kv_{k+1}$ in an alphabet $\mathcal{A}$ where v_1, $v_2, \ldots, v_{k+1}$, x_1, $x_2, \ldots, x_k$ are words in the alphabet $\mathcal{A}$ where v_i

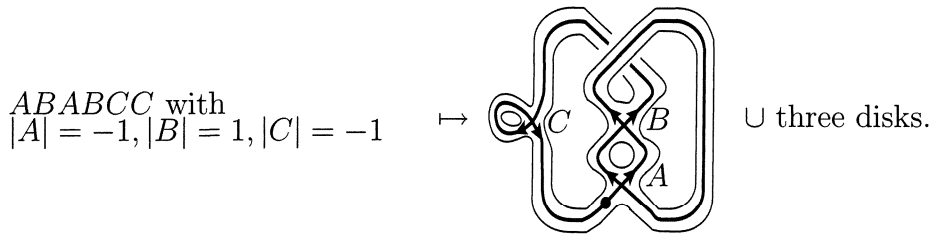


FIGURE 2. A mapping nanoword over α to a pointed curve.

or x_j may be $\emptyset$. Deleting x_1, $x_2, \ldots, x_k$ from w, we define a *subword* of w by $v = v_1 v_2 \cdots v_{k+1}$.

Second, for every Gauss word v and every nanoword w, we determine the number $\langle v, w \rangle$. When a nanoword $(\mathcal{A}_w, w)$ over α is given, we consider a subword v' of w. If the subword v' is a Gauss word, we can naturally consider the nanoword $(\mathcal{A}_{v'}, v')$ over α such that $\mathcal{A}_{v'} \subset \mathcal{A}_w$. Therefore, for every nanoword $(\mathcal{A}_w, w)$ over α and for every Gauss word v, we can define the bilinear mapping by

$$\langle v, w \rangle := \sum_{\text{subword } v' \text{ of } w \text{ isomorphic to } v} \prod_{A \in \mathcal{A}_{v'}} wt(A). \tag{1}$$

where w_Γ indicate a word that is determined by a given pointed curve Γ on the surface. For every closed plane curve Γ, let i be the index and n be the number of double points. Now, set weight $wt(A) = |A|$.

Then, we define a curve invariant of degree 2, CI_2 by

$$CI_2(\Gamma; s, t, u) := sn + \langle tXXYY - tXYYX + uXYXY, w_\Gamma \rangle + \frac{t}{2} - \frac{t}{2} i^2. \tag{2}$$

Theorem 2.1 (Polyak). *CI_2 is a plane isotopy invariant of plane curves, which is as strong as the triple of the three Arnold's basic invariants, (J^+, J^-, St). In other words, for two arbitrary plane curves Γ_1 and Γ_2,*

$$CI_2(\Gamma_1) = CI_2(\Gamma_2) \Longleftrightarrow (J^+(\Gamma_1), J^-(\Gamma_1), St(\Gamma_1)) = (J^+(\Gamma_2), J^-(\Gamma_2), St(\Gamma_2)). \tag{3}$$

Proof. By using Polyak's formulation of Arnold's basic invariants [12, Theorem 1], the triple of the three Arnold's basic invariants, $(J^+(\Gamma), J^-(\Gamma), St(\Gamma))$, is equal to

$$\left(CI_2(\Gamma; -\frac{1}{2}, 1, -3), CI_2(\Gamma; -\frac{3}{2}, 1, -3), CI_2(\Gamma; \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right),$$

and the three vectors $(-\frac{1}{2}, 1, -3)$, $(-\frac{3}{2}, 1, -3)$, and $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ are linearly independent. These two facts imply the claim above. □

This approach is generalised to series of invariants for arbitrarily high degree and generalised to case of long curves and fronts [8].

3. A DEFINITION OF FINITE-TYPE INVARIANTS FOR CURVES.

These series of invariants are arranged by using a concept, i.e. finite-type invariants. In this section, one of the notion is introduced in [12, 9, 7].

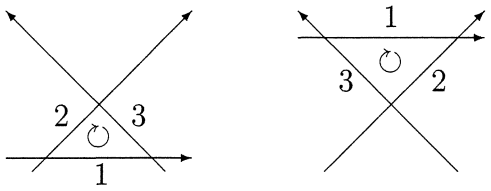


FIGURE 3. The newborn triangle and the sign of the triangle.

Self-tangency points or triple points can be termed as *singular points*. In particular, a self-tangency point is known as a *direct self-tangency* point if the two tangent branches are obtained using the same tangent vector; otherwise, it is called an inverse self-tangency point. The direction of the resolution of the self-tangency point is said to be *positive* if the resolution generates the part with a larger number of double points.

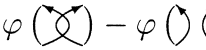
For triple points, the orientation of the resolution is not that simple. We define the orientation of the resolution of a triple point in the following manner as in [1]. An arbitrary triple point gives rise to the *newborn triangle* which exists just after a resolution of a triple point as shown in Fig. 3.

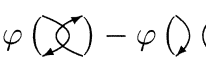
For the newborn triangle, we define the *sign* of a triangle. By the definition, each singular curve is a immersion of an oriented circle into an oriented surface. Every image of a triple point on a surface has three preimages on the circle and their cyclic order is well defined. Then we obtain a well-defined orientation of the newborn triangle given by the order in which the immersed curve visits its sides. Each side of the immersed curve also has its own direction. The direction may coincide with the direction defined by the cyclic order of the sides of the triangle or may be opposite to it. Let q be the number of the sides of the newborn triangle whose directions coincide with that given by the cyclic order. The sign of the triangle is defined as $(-1)^q$ (Fig. 3).

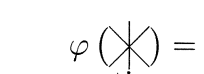
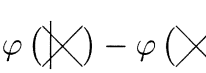
The direction of the resolution of the triple point is said to be *positive* if the sign of the newborn triangle is 1 after the resolution.

The direction of the resolution of the singular point is said to be negative if the direction is non-positive. It is possible to resolve singular points away from a base point.

Every invariant φ of generic curves is extended inductively to that of singular curves by resolving the singular points using (4), (5), and (6):

(4) φ  $= \varphi$ $- \varphi$  ,

(5) φ  $= \varphi$ $- \varphi$  ,

(6) φ  $= \varphi$ $- \varphi$  .

positive negative

Definition 3.1. An invariant of generic curves φ is said to be *a finite-type invariant of order less than or equal to* n if φ vanishes on every singular curve with at least $n+1$ singular points (self-tangency points or triple points), where φ is expanded by (4), (5) and (6).

Definition 3.2. An invariant of generic curves φ is said to be *a finite-type invariant of order* n if φ is a finite-type invariant of order less than or equal to n and there exists a singular curve Γ such that φ does not vanish on Γ with n singular points (self-tangency points or triple points), where φ is expanded by (4), (5) and (6).

Arnold's invariants J^+, J^- and St are first order invariants. Other examples of finite-type invariants are in [8, 9].

4. SCI_n INVARIANTS.

In this section, we study the most simple case of 1; set $wt(A) \equiv 1$, cases of other weights are studied in [8]. The author tried to find the method studying curves by using the most simple invariants SCI_n of the first case [9].

Definition 4.1. Let $\alpha_0 = \{-1, 1\}$ and involution τ: $-1 \mapsto 1$. A *signed word of length* $2n$ is a nanoword $(\mathcal{A}, w)$ over α_0 where the length of w is $2n$. A signed word of length 0 is $(\mathcal{A} = \emptyset, w = \emptyset)$ denoted by $\emptyset$.

We consider a simple expression for signed words. For every letter $A \in \mathcal{A}$ of a signed word $(\mathcal{A}, w)$, replace A with $\overline{A}$ if $|A| = -1$ and leave A unchanged if $|A| = 1$. By using this expression of letters, we denote a signed word by a sequence of letters $\overline{A}$ or A for $A \in \mathcal{A}$. The isomorphism of two signed words w and w' is denoted by $w \simeq w'$. For example, $\overline{A}BB\overline{A} \simeq \overline{B}CC\overline{B}$. However, $\overline{A}BB\overline{A}$ is not isomorphic to $A\overline{B}\,\overline{B}A$. All the subwords of the signed word $A\overline{B}AC\overline{B}C$ are $\emptyset$, AA, $\overline{B}\,\overline{B}$, CC, $A\overline{B}A\overline{B}$, $AACC$, $\overline{B}C\overline{B}C$, and $A\overline{B}AC\overline{B}C$.

For an arbitrary signed word w, we define a *subword* of w as a sub-nanoword of $(\mathcal{A}, w)$ over α_0. For an arbitrary signed word w, $u \prec w$ implies that u is a subword of w.

4.1. **Construction of the invariant.** For two arbitrary signed words u and w, $\langle\ ,\rangle$ can be defined by

$$\langle u, w\rangle = \sum_{v \prec w} (u, v), \tag{7}$$

where (u, v) is 1 if $u \simeq v$ and is 0 otherwise. Let k be a field; $\mathbf{W}$, the k-linear space generated by all the isomorphic classes of the signed words; and $\mathbf{W}^*$, the dual space of $\mathbf{W}$. We expand $\langle\ ,\rangle$ linearly to $\langle\ ,\rangle : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \to k$.

For an arbitrary generic curve Γ, which has m double points, let w_Γ be a signed word: $\hat{m} \to \mathcal{A}$ that is determined by selecting an arbitrary base point in the following manner as in [15].

Definition 4.2. The ν-shift of a nanoword $(\mathcal{A}, w : \hat{n} \to \mathcal{A})$ over α is the nanoword $(\mathcal{A}' = (\mathcal{A} - \{A\}) \cup \{A_\nu\}, w' : \hat{n} \to \mathcal{A}')$ where A_ν is a new letter not belonging to $\mathcal{A}$. The projection $\mathcal{A}' \to \alpha$ extends the given projection $\mathcal{A} - \{A\} \to \alpha$ by $|A_\nu| = \nu(|A|)$.

The word w' in the alphabet $\mathcal{A}$ is defined by $w' = xA_\nu yA_\nu$ for $w = AxAy$. The case ν-shift of nanowords over $\alpha = \alpha_0$ gives rise to *ν-shift move* for signed words. The ν-shift move is defined as $\nu(AxAy) = x\overline{A}y\overline{A}$ or $\nu(\overline{A}x\overline{A}y) = xAyA$ where x and y are words. The *cyclic equivalence* $\sim$ is defined as $w \sim w'$ if and only if there exists $l \in \mathbf{N}$ such that $\nu^l(w) = w'$. Let $\mathbf{W}_n$ be the k-linear space generated by all the isomorphic classes with signed words of length $2n$ and $\mathbf{W}_n^*$ be the dual space of $\mathbf{W}_n$. Let the subspace $\mathbf{W}_n^\nu$ of $\mathbf{W}_n$ be the vector space generated by $\{w \in \mathbf{W}_n |\ \nu(w) = w\}$. Let $(\mathbf{W}_n^\nu)^*$ be the dual space of $\mathbf{W}_n^\nu$. For every cyclic equivalence class containing a signed word v, the sum of all the representative elements of the cyclic equivalence class is denoted by $[v]$. For two arbitrary α and $\beta \in k$ and two arbitrary u and $v \in \mathbf{W}$, let $[\alpha u + \beta v] := \alpha[u] + \beta[v]$.

For example, if the cyclic equivalence of the isomorphic class of the signed words is $\{AA\overline{B}\,\overline{B},\ \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{A},\ \overline{B}\,\overline{B}AA,\ BAAB\}$ and $v = \overline{B}\,\overline{B}AA$, then $[v] = AA\overline{B}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{A} + \overline{B}\,\overline{B}AA + BAAB$.

For a given generic curve Γ with m double points, let w_Γ be a signed word of length $2m$ that is determined by Γ. For two arbitrary natural numbers m and n, we define a *signed curve invariant of order n*, $SCI_{m,n} : \mathbf{W}_m^\nu \to (\mathbf{W}_n^\nu)^*$, as follows:

$$SCI_{m,n}(\Gamma) = \langle [\cdot], w_\Gamma \rangle : \mathbf{W}_n \to k. \tag{8}$$

By the definition of $SCI_{m,n}$, we use the following notation:

$$SCI_{m,n}(\Gamma)(v) = \langle [v], w_\Gamma \rangle \quad (v \in \mathbf{W}_n). \tag{9}$$

By using the definition of [ ] and $\langle\ ,\rangle$, $SCI_{m,n}$ is independent of the choice of the base point on the curve Γ.

Theorem 4.1. *$SCI_{m,n}$ is a finite-type invariant of order less than or equal to n for an arbitrary generic curve on a surface.*

Theorem 4.2. *$\sum_{m\in\mathbf{N}} SCI_{m,n}$ is finite-type invariants of order more than or equal to $[\frac{n+1}{2}]$.*

Remark 4.1. If $\langle$liner combination of Gauss words of length $2n, w_\Gamma\rangle$ is an invariant where $wt(A) = |A|$ for (1) in Section 2.3), $\langle \cdot, w_\Gamma \rangle$ is a finite-type invariant of order less than or equal to $[\frac{n}{2}]$.

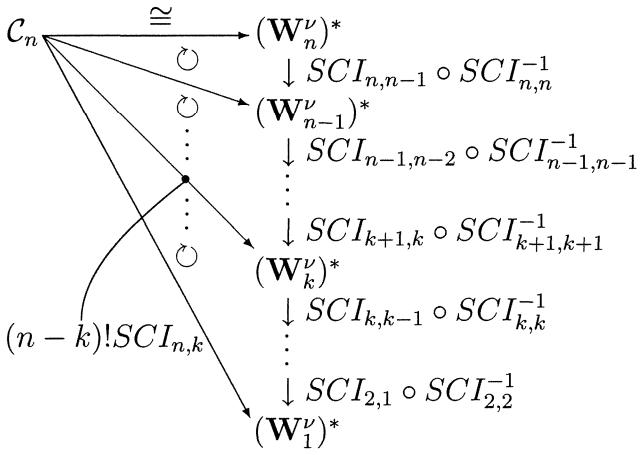
Let m_w be the number of representative elements of the cyclic equivalence class that contains a signed word w. Let $\overline{w} = \frac{1}{m_w}[w] \in \mathbf{W}^\nu$. Then, $SCI_{m,n}(\Gamma) = \langle [\cdot], \overline{w}_\Gamma \rangle$. For two arbitrary signed words v and u, v^* denotes a linear mapping such that $v^*(u) = (v, u)$. $SCI_{m,n}$ restricted on $\mathbf{W}_n^\nu$ gives the isomorphism $SCI_{m,n}$ between $\mathbf{W}_n^\nu$ and $(\mathbf{W}_n^\nu)^*$, sending $\overline{w}_\Gamma$ to $[w_\Gamma]^*$. For example, if Γ is a given curve and w_Γ is $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{A}C\overline{B}$, then $SCI_{3,1}(\Gamma) = [\overline{A}\,\overline{A}]^* + [\overline{B}\,\overline{B}]^* + [CC]^*$, $SCI_{3,2}(\Gamma) = [\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A}\,\overline{B}]^* + [\overline{A}C\overline{A}C]^* + [\overline{B}CC\overline{B}]^*$, $SCI_{3,3}(\Gamma) = [\overline{A}\,\overline{B}C\overline{A}C\overline{B}]^*$, $SCI_{3,n}(\Gamma) = 0$ $(n \geq 4)$. $SCI_{3,1}(\Gamma)(XX) = [\overline{A}\,\overline{A}]^*(XX) + [\overline{B}\,\overline{B}]^*(XX) + [CC]^*(XX) = 3$.

Theorem 4.3. *We establish the following relation:*

$$\frac{(n-k+1)!}{(n-l-1)!(k-l)!} SCI_{n,l} = SCI_{k,l} \circ SCI_{k,k}^{-1} \circ SCI_{n,k} \qquad (1 \leq l \leq k \leq n). \tag{10}$$

For the subspace $(\mathbf{W}_n^\nu)^*$ of $\mathbf{V}_n$, $SCI_{m,l}$ $(1 \leq m, l \leq n)$ have the following relation between the subspaces by using (8) and (10). This diagram shows how $SCI_{m,l}$ $(1 \leq m, l \leq n)$ reduce information from $\mathcal{C}_n \cong (\mathbf{W}_n^\nu)^*$ to $(\mathbf{W}_1^\nu)^*$.

(11)



5. Khovanov homology and words.

The study in this section is joint work with Tomonori Fukunaga.

Mikhail Khovanov constructed cohomology groups whose graded Euler characteristic is Jones polynomial V_L of invariant for links L[11]. Oleg Viro made a construction of the Khovanov homology group (: a cohomology group) of Jones polynomial significantly simpler [18]. Viro constructed Khovanov complex and cohomology consisting of Jordan curves with signs.

Tomonori Fukunaga constructed Khovanov complex by using Turaev's theory. In the summer of 2008, T. Fukunaga and the author proved Khovanov complex by Fukunaga is invariant under Redemeister invariance by using Bar-Natan's proof [2]. After that, a simpler proof of the invariance in only word theory was provided by using the author's consideration [10] of the Redemeister invariance of Khovanov homology. Moreover, T. Fukunaga consider application this cohomology to word theory by using Fukunaga's theorem [3, Theorem 6.1]. The detail is provided by [3].

In this study, we construct cohomology groups $KH^{i,j}(P)$ modulo 2 satisfying a Poincaré series $K(P)(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \mathrm{rk} KH^{i,j}(P)$ by using Turaev's homotopy theory of words [15, 16] where P is a word, so-called a pseudolink, a projection image of nanowords. A nanoword is one to one corresponding a stable equivalence classes of knot diagrams on surfaces. $K(P)(q;\mathbb{Z})$ is a generelized version of Jones polynomial with $\mathbb{Z}$ coefficient for knot diagrams on surfaces defined by Turaev's theory of words. $K(P)(q)$ is defined as $K(P)(q;\mathbb{Z})$ modulo 2.

α_* is the set composed of 4 distinct elements a_+, a_-, b_+, b_- and α_* has an involution $\tau : a_\pm \mapsto b_\mp$. Let $S_* = \{(a_\pm, a_\pm, a_\pm), (a_\pm, a_\pm, a_\mp), (a_\mp, a_\pm, a_\pm), (b_\pm, b_\pm, b_\pm), (b_\pm, b_\pm, b_\mp), (b_\mp, b_\pm, b_\pm)\}$. α_*-alphabet $\mathcal{A}$ is a set where every element A of $\mathcal{A}$ has a projection $|\ | : A \mapsto |A| \in \alpha_*$. For a nanoword $(\mathcal{A}, w = w_1 w_2 \cdots w_k)$ over α_* consisting of subwords w_i $(1 \leq i \leq k)$ of w, a *nanophrase* of length $k \geq 0$ over α_* is defined as $(\mathcal{A}, (w_1|w_2|\cdots|w_k))$. We denote a set of all the nanophrases over α_* by $\mathcal{P}(\alpha_*)$. For a nanophrase $(\mathcal{A}, (w_1|w_2|\cdots|w_k))$ over α_*, we associate w_i to a pointed components of links and the order $(1 \leq i \leq k)$ to a order of components of links. Then, by

introducing an appropriate equivalence to nanophrases using involution $\nu(a_\pm) = b_\pm$, we get $\mathcal{P}(\alpha_*, \nu)$ over α_* corresponding to link diagrams [15, Subsection 6.3]. Considering relations corresponding to Reidemeister moves, Turaev gives a bijection between stable equivalence classes of knot diagrams on surfaces and $\mathcal{P}(\alpha_*, S_*, \nu)$ [15, Subsection 4.2]. Moreover, a projection $\alpha_* \to \alpha_1 := \{1, -1\}$; $a_+, b_+ \mapsto 1$ and $a_-, b_- \mapsto -1$ induces $\mathcal{P}(\alpha_*, S_*, \nu) \to \mathcal{P}(\alpha_1, S_1, \mathrm{id})$, Turaev define Jones polynomial by using only $\mathcal{P}(\alpha_1, S_1, \mathrm{id})$.

In this study, we show that $KH^{i,j}(P)$ is also constructed by using only $\mathcal{P}(\alpha_1, S_1, \mathrm{id})$. $KH^{i,j}(P)$ preserve properties of Khovanov homology group as follows.

Theorem 5.1. *Let P be an arbitrary pseudolinks. $KH^{i,j}(P)$ is a S_1-homotopy invariant of P. $KH^{i,j}(P)$ is stronger than $K(P)(q)$ and independent of $K(P)(q;\mathbb{Z})$. In particular, an link invariant $KH^{i,j}(P)$ is constructed by using only $\mathcal{P}(\alpha_1, S_1, \mathrm{id})$.*

As it is written in the beginning of this section, by applying Fukunaga's theorem to $KH^{i,j}(P)$ deduce the following theorem.

Theorem 5.2. *Set $\Delta_\alpha := \{(a, a, a)\}_\alpha$. Let α be an arbitrary alphabet. $KH^{i,j}(P)$ is Δ_α-homotopy invariants for nanophrases P over α.*

References

[1] V. I. Arnold, *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics* (University Lecture Series **5**, Providence, RI, 1994).

[2] D. Bar-Natan, On Khovanov's categorification of the Jones polynomial, Alg. Gem. Top., **2** (2002), 337–370.

[3] T. Fukunaga and N. Ito, Khovanov homology and words, math.GT/0901.3956.

[4] N. Ito, *Invariants of plane curves and words theory*, Proceedings of "Topology of Knots IX" 78–85, Nihon University.

[5] N. Ito, *Word theory and its applications to knots and plane curves*, Hokkaido University technical report series in Mathematics, ♯**117** (2007) 215–219.

[6] N. Ito, 「語と平面曲線の不変量」(in Japanese), 第四回城崎新人セミナー報告集, http://diana.math.kyoto-u.ac.jp/insei/proceeding/2007/proceeding/itou.pdf.

[7] N. Ito, 「語を用いた曲線の有限型不変量について」(in Japanese), 第五回城崎新人セミナー報告集, to appear.

[8] N. Ito, *Invariants via word for curves and fronts*, math.GT/0705.0412.

[9] N. Ito, *Finite-type invariants for curves on surfaces*, math.GT/0803.2082.

[10] N. Ito, *On Reidemeister invariance of Khovanov homology group of Jones polynomial*, math.GT/0901.3952.

[11] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. 101 (1999), 359–426.

[12] M. Polyak, *Invariants of curves and fronts via Gauss diagrams*, Topology **37** (1998) 989–1009.

[13] V. Tchernov, *Arnold-type invariants of wave fronts on surfaces*, Topology **41** (2002) 1–45.

[14] V. Turaev, *Topology of words*, Proc. London Math. Soc. (3) **95** (2007) 360–412.

[15] V. Turaev, *Knots and words*, Int. Math. Res. Not. **2006** (2006), Article ID 84098, 23pp.

[16] V. Turaev, *Lectures on topology of words*, Jpn. J. Math. **2** (2007) 1–39.

[17] V. Turaev, *Cobordisms of words*, Communications in Contemporary Math. **10**, No. 1 supp. (2008) 927–972.

[18] O. Viro, *Khovanov homology, its definitions and ramifications*, Fund. Math. **184** (2004), 317–342.

Department of Pure and Applied Mathematics Waseda University. Tokyo 169-8555, Japan.
E-mail address: noboru@moegi.waseda.jp

Division polynomials of hyperelliptic Jacobians

内田　幸寛

京都大学大学院理学研究科

楕円曲線の理論において，等分多項式 (division polynomial) はねじれ部分群（位数有限の点全体）の研究に重要な役割を果たす．また，楕円曲線の乗法公式や，有限体上の楕円曲線の点の個数を求める Schoof のアルゴリズムなど，様々な応用を持つ．本稿では，等分多項式を複素数体上定義された超楕円 Jacobi 多様体の場合に拡張し，等分多項式の行列式表示やいくつかの性質について述べる．

1　はじめに

本稿の目的は超楕円 Jacobi 多様体上の等分多項式について述べることであるが，本節では，その特別な場合である楕円曲線の等分多項式について述べる．

E を方程式

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

で定義される複素数体上の楕円曲線とする．ここで，$g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ であり，判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ である．O を E の無限遠点とする．次節以降の記号と合わせるために，$\lambda_1 = -g_2/4$, $\lambda_0 = -g_3/4$ とおく．このとき，楕円曲線 E は

$$y^2 = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_0$$

と同型であることに注意する．

楕円関数論によれば，$\mathbb{C}$ の格子 $\Lambda = \omega'\mathbb{Z} + \omega''\mathbb{Z}$ と解析的同型 $I\colon E \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/\Lambda$ が存在して，$I(O) = 0 \bmod \Lambda$ となる．右辺は加法によって Abel 群であるから，同型 I によって E の群構造を定めることができる．このとき E の単位元は O である．$P \in E$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し，P の n 倍を $[n]P$ で表す．

Weierstrass の σ 関数は無限積

$$\sigma(u) = \prod_{l \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{u}{l}\right) \exp\left(\frac{u}{l} + \frac{u^2}{2l^2}\right)$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の整関数である．このとき，Weierstrass の $\wp$ 関数は

$$\wp(u) = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u)$$

と表される．$\wp$ 関数は Λ を周期に持ち，微分方程式

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

を満たす．したがって，I の逆写像は $u \bmod \Lambda \mapsto \big(\wp(u), \wp'(u)\big)$ で与えられる．

整数 n に対し，**等分多項式 (division polynomial)** は

$$\psi_n(u) = (-1)^{n+1}\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}$$

で定義される．等分多項式は次の性質を満たす．

(i) $\psi_n(u)$ は $\wp(u)$, $\wp'(u)$ の $\mathbb{Z}[\lambda_0, \lambda_1]$ 係数多項式として表せる．
(ii) $P \in E \setminus \{O\}$, $I(P) = u \bmod \Lambda$, $n \geq 1$ とする．このとき，$[n]P = O \iff \psi_n(u) = 0$.
(iii) (Kiepert の公式 (1873), (cf. [7, p. 460]))

$$\psi_n(u) = \frac{1}{(1!2!\cdots(n-1)!)^2}\begin{vmatrix} \wp' & \wp'' & \cdots & \wp^{(n-1)} \\ \wp'' & \wp''' & \cdots & \wp^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp^{(n-1)} & \wp^{(n)} & \cdots & \wp^{(2n-3)} \end{vmatrix}(u).$$

(iv) (漸化式) $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\phi_{k+l}(u)\phi_{k-l}(u)\phi_{m+n}(u)\phi_{m-n}(u) - \phi_{k+m}(u)\phi_{k-m}(u)\phi_{l+n}(u)\phi_{l-n}(u) + \phi_{l+m}(u)\phi_{l-m}(u)\phi_{k+n}(u)\phi_{k-n}(u) = 0.$$

このような性質から，等分多項式は数論などに多くの応用を持つ．等分多項式の拡張は，次の 2 つの場合に考えられている．

(1) 超楕円曲線（を Jacobi 多様体に埋め込んだもの）
(2) 超楕円曲線の Jacobi 多様体

前者は D. G. Cantor, 大西，松谷らによって考察されている (cf. [2], [5]). 後者は種数 2 の場合に金山 [4] によって考察された．本稿では後者について，一般の種数の場合に考察する．

2 超楕円関数

本節では超楕円関数の基礎事項について述べる．詳しくは，[1], [6] やその中で挙げられている文献を参照していただきたい．

C を方程式

$$y^2 = f(x) = x^{2g+1} + \lambda_{2g}x^{2g} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の非特異射影曲線とする．このとき $f(x)$ は重根を持たない．C は種数 g の超楕円曲線であり，無限遠点をただ一つ持つ．この点を ∞ と表す．便宜上 $\lambda_{2g+1} = 1$ とおく．

C 上の正則微分形式（第 1 種微分形式）$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_g$ を

$$\omega_1 = \frac{dx}{2y}, \quad \omega_2 = \frac{xdx}{2y}, \quad \ldots, \quad \omega_g = \frac{x^{g-1}dx}{2y}$$

で定義する．これらは C 上の正則微分形式全体がなすベクトル空間 $H^0(C, \Omega^1_C)$ の基底となる．また，C 上の第 2 種微分形式 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_g$ を

$$\eta_j = \frac{1}{2y}\sum_{k=j}^{2g-j}(k+1-j)\lambda_{k+1+j}x^k dx \quad (1 \leq j \leq g)$$

で定義する．C はコンパクト Riemann 面の構造を持つが，そのホモロジー群 $H_1(C,\mathbb{Z})$ の標準基底 α_1, α_2, $\ldots$, α_g, β_1, β_2, $\ldots$, β_g をとる．このときその交点数は

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = 0, \quad \alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$$

となる．ただし，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．周期行列 ω', ω'', η', $\eta'' \in M_g(\mathbb{C})$ を

$$\omega' = \left(\int_{\alpha_j} \omega_i\right), \quad \omega'' = \left(\int_{\beta_j} \omega_i\right), \quad \eta' = \left(-\int_{\alpha_j} \eta_i\right), \quad \eta'' = \left(-\int_{\beta_j} \eta_i\right)$$

で定義する．

注意 2.1. ここで定義した微分形式や周期行列は文献によって定義が異なる．本稿の定義は種数 2 の場合に [3] と一致するように選んだ．

楕円関数論における Legendre 関係式は次のように一般化される．

命題 2.2 (一般 Legendre 関係式)．

$$M = \begin{pmatrix} \omega' & \omega'' \\ \eta' & \eta'' \end{pmatrix}$$

とおき，1_g を g 次単位行列とすると，

$$M \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix} {}^tM = -2\pi\sqrt{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$\tau = \omega'^{-1}\omega''$ とおくと，一般 Legendre 関係式と Riemann の不等式から，$\tau \in \mathfrak{H}_g$ である．ここで，$\mathfrak{H}_g$ は Siegel 上半空間であり，$\mathfrak{H}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z, \operatorname{Im} Z > 0 \text{ (正定値)}\}$ である．

$\Lambda = \omega'\mathbb{Z}^g + \omega''\mathbb{Z}^g$ とおくと，Λ は $\mathbb{C}^g$ の格子である．$J = \mathbb{C}^g/\Lambda$ とおき，これを C の **Jacobi 多様体**という．射影的な群多様体を Abel 多様体と呼ぶが，J は g 次元 Abel 多様体である．$\kappa\colon \mathbb{C}^g \to J$ を自然な写像とする．

$\mathrm{Pic}^0(C)$ を C の Picard 群とする．すなわち，

$$\mathrm{Pic}^0(C) = \left\{ \sum_{i=1}^n n_i P_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in C, \sum_{i=1}^n n_i = 0 \right\} / (\text{線形同値}).$$

定理 2.3 (Abel-Jacobi の定理)．Abel-Jacobi 写像

$$\begin{aligned} I\colon \mathrm{Pic}^0(C) &\to J \\ \left[\sum_{i=1}^n (P_i - Q_i)\right] &\mapsto \kappa\left(\left({}^t\left(\sum_{i=1}^n \int_{Q_i}^{P_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^n \int_{Q_i}^{P_i} \omega_g\right)\right)\right) \end{aligned}$$

は well-defined であり，群同型である．

整数 $0 \le n \le g$ に対し，Jacobi 多様体 J の部分集合 $\Theta^{[n]}$ を

$$\Theta^{[n]} = I\left(\left[\sum_{i=1}^n (P_i - \infty)\right]\right)$$

で定める．$n=0$ のときは $\Theta^{[0]}=\{0\}$ とする．$\Theta^{[n]}$ は J の閉部分多様体であり，$\dim\Theta^{[n]}=n$ である．また，$\Theta^{[1]}\cong C$, $\Theta^{[g]}=J$ である．$\Theta^{[g-1]}$ は余次元 1 の既約部分多様体である．これをテータ因子と呼び，Θ と表す．

超楕円関数を定義するために，まず指標付きテータ関数を定義する．$x\in\mathbb{C}$ に対し，$\boldsymbol{e}(x)=\exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ とおく．

定義 2.4. $a,b\in\mathbb{R}^g$, $\tau\in\mathfrak{H}_g$ とする．$z\in\mathbb{C}^g$ に対し，

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}{}^t(n+a)\tau(n+a)+{}^t(n+a)(z+b)\right)$$

と定義し，これを**指標付きテータ関数**という．

指標 $\delta'',\delta'\in\mathbb{R}^g$ を

$$\delta''={}^t\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right),\quad \delta'={}^t\left(\frac{g}{2},\frac{g-1}{2},\dots,\frac{1}{2}\right)$$

と定義する．これを Riemann 定数という．以上の準備の下で，超楕円 σ 関数は次のように定義される．

定義 2.5. $\mathbb{C}^g$ 上の**超楕円 $\boldsymbol{\sigma}$ 関数**を

$$\sigma(u)=c\exp\left(\frac{1}{2}{}^tu\eta'\omega'^{-1}u\right)\vartheta\begin{bmatrix}\delta''\\ \delta'\end{bmatrix}(\omega'^{-1}u,\tau)$$

で定義する．ただし，c は命題 2.6 (iii) を満たすような定数である．

超楕円 σ 関数は次のような性質を持つ．

命題 2.6. (i) $\sigma(u)$ は $\kappa^{-1}(\Theta)$ に 1 位の零点を持つ正則関数である．

(ii)（擬周期性）任意の $u\in\mathbb{C}^g$ と任意の $m',m''\in\mathbb{Z}^g$ に対し，

$$\sigma(u+\omega'm'+\omega''m'')$$
$$=(-1)^{2({}^tm'\delta''-{}^tm''\delta')+{}^tm'm''}\exp\left({}^t\left(u+\frac{1}{2}(\omega'm'+\omega''m'')\right)(\eta'm'+\eta''m'')\right)\sigma(u).$$

(iii) $\sigma(u)$ の $u=0$ での Taylor 展開は

$$\sigma(u)=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & \dots & u_l\\ u_2 & u_3 & \dots & u_{l+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_l & u_{l+1} & \dots & u_{2l-1}\end{vmatrix}+(\text{高次の項})$$

となる．ただし，$u={}^t(u_1,u_2,\dots,u_g)$ であり，l は $g=2l$ または $g=2l-1$ を満たす整数である．

楕円関数論において，$\wp$ 関数は σ 関数の対数微分として表すことができた．超楕円 $\wp$ 関数では，これを定義に採用する．

定義 2.7. $i,j,k,\dots\in\{1,2,\dots,g\}$ とする．$\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数 $\wp_{ij}$, $\wp_{ijk}$, $\dots$ を

$$\wp_{ij}(u)=-\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}\log\sigma(u),$$
$$\wp_{ijk}(u)=-\frac{\partial^3}{\partial u_i\partial u_j\partial u_k}\log\sigma(u),\ \dots$$

で定義する．これらの関数を**超楕円 $\wp$ 関数**と呼ぶ．

σ 関数の擬周期性から，$\wp_{ij}$, $\wp_{ijk}$, ... は Λ を周期に持つ．したがって J 上の有理型関数と見なすことができる．σ 関数は $\kappa^{-1}(\Theta)$ に 1 位の零点を持つから，次の命題が成り立つ．

命題 2.8. $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, g\}$ とする．このとき，$\wp_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ は Θ に n 位の極を持つ．

楕円関数論では，周期 Λ を持ち，Λ にのみ極を持つ $\mathbb{C}$ 上の有理型関数は $\wp$ と $\wp'$ の多項式で表すことができた．このことは次のように一般化される．

定理 2.9. f を $\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数とする．f が Λ を周期に持ち，$\kappa^{-1}(\Theta)$ にのみ極を持つならば，f は $\wp_{11}$, $\wp_{12}$, $\ldots$, $\wp_{gg}$, $\wp_{111}$, $\wp_{112}$, $\ldots$, $\wp_{ggg}$ の（$\mathbb{C}$ 係数）多項式として表される．

以下では記述を簡略化するため，R を $\mathbb{C}$ の部分環として，関数 f が $\wp_{11}$, $\wp_{12}$, $\ldots$, $\wp_{gg}$, $\wp_{111}$, $\wp_{112}$, $\ldots$, $\wp_{ggg}$ の R 係数多項式として表されるとき，$f \in R[\wp_{ij}, \wp_{ijk}]$ と書くことにする．例えば，定理 2.9 の結論は $f \in \mathbb{C}[\wp_{ij}, \wp_{ijk}]$ と書ける．

3 等分多項式

本節では，等分多項式を定義し，いくつかの性質を述べる．
等分多項式は超楕円 σ 関数によって次のように定義される．

定義 3.1. n を整数とする．**等分多項式 (division polynomial)** $\phi_n(u)$ を

$$\phi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}$$

で定義する．

注意 3.2. この定義は $g = 2$ の場合に金山 [4] によってなされた定義の拡張である．

注意 3.3. $g = 1$ の場合，§1 のように，符号だけ異なる関数

$$\psi_n(u) = (-1)^{n+1} \frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}$$

を等分多項式と呼ぶことが多い．

超楕円 σ 関数の擬周期性から，ϕ_n は Λ を周期に持つ．よって，定理 2.9 から次の命題が従う．

命題 3.4. 任意の n に対し，$\phi_n \in \mathbb{C}[\wp_{ij}, \wp_{ijk}]$ である．

数論などへの応用では，$\mathbb{C}$ より小さい環 R に対して $\phi_n \in R[\wp_{ij}, \wp_{ijk}]$ であることが必要となるが，そのような R を求めることについては §4 で取り扱う．
等分多項式の性質を述べるために，偏導関数に関する記号を準備する．$1 \leq n \leq g$ に対し，$\natural^n$ を

$$\natural^n = \begin{cases} \{n+1, n+3, \ldots, g\} & (g \equiv n+1 \pmod 2), \\ \{n+1, n+3, \ldots, g-1\} & (g \equiv n \pmod 2) \end{cases}$$

で定義する．$\sharp = \natural^1, \flat = \natural^2$ とおく．$\mathbb{C}^g$ 上の有理型関数 F に対し，

$$F_{\natural^n}(u) = \left(\prod_{i \in \natural^n} \frac{\partial}{\partial u_i} \right) F(u)$$

と定義する．$\natural^g = \emptyset$ なので，$F_{\natural^g}(u) = F(u)$ となることに注意する．$F_\sharp$, $F_\flat$ も同様に定義する．

等分多項式と Jacobi 多様体の等分点との関係は次の定理のようになる．

定理 3.5. n を正の整数とする．$P \in J \setminus \Theta$, $\kappa(u) = P$ とする．このとき，

$$[n]P = O \iff (\phi_n)_{\natural^1}(u) = (\phi_n)_{\natural^2}(u) = \cdots = (\phi_n)_{\natural^g}(u) = 0.$$

注意 3.6. $g = 1$ の場合，これはよく知られた結果である．$g = 2$ の場合，金山 [4] によって

$$[n]P = O \iff \phi_n(u) = \frac{\partial \phi_n}{\partial u_2}(u) = \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial {u_2}^2}(u) = 0$$

が知られていた．定理 3.5 は $g = 2$ の場合，

$$[n]P = O \iff \phi_n(u) = \frac{\partial \phi_n}{\partial u_2}(u) = 0$$

となるから，金山の結果の改良になっている．

4 行列式表示

本節では等分多項式の行列式表示を与える．そのために，まず $\Theta^{[1]}$ 上の関数 $w_i(u)$ を導入する．Abel-Jacobi 写像 I によって同型 $\iota\colon C \xrightarrow{\sim} \Theta^{[1]};\ P \mapsto I\big([P - \infty]\big)$ が誘導されていた．この同型によって，$u \in \kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ に対し，$x(u) = x(\iota^{-1}(\kappa(u)))$, $y(u) = y(\iota^{-1}(\kappa(u)))$ とおく．$w_i(u)$ は次のように定義される．

$$w_0(u) = 1, \quad w_1(u) = x(u), \quad w_2(u) = x(u)^2, \quad \ldots, \quad w_g(u) = x(u)^g$$

と定める．また，$i \geq 1$ に対し，

$$w_{g+i}(u) = \begin{cases} x(u)^{(i-1)/2} y(u) & (i : \text{奇数}) \\ x(u)^{g+i/2} & (i : \text{偶数}) \end{cases}$$

と定める．このとき次の Frobenius-Stickelberger 型の公式が成り立つ．

定理 4.1 (大西 [5, Theorem 8.2])**.** $n \geq g$ を整数とし，$u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)} \in \kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ とする．このとき，

$$(-1)^{(2n-g)(g-1)/2} \frac{\sigma(u^{(1)} + \cdots + u^{(n)}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_\flat(u^{(i)} - u^{(j)})}{\sigma_\sharp(u^{(1)})^n \ldots \sigma_\sharp(u^{(n)})^n} = \det\big(w_{j-1}(u^{(i)})\big)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

注意 4.2. $g = 1$ の場合は，Frobenius-Stickelberger の公式として古くから知られている．例えば，[7, p. 458] を参照せよ．また，$n < g$ に対しても同様の公式がある．[5, Theorem 8.2] を参照せよ．

等分多項式の行列式表示を得るためには，この公式の極限を取ればよい．結果は次のようになる．

定理 4.3. $1 \leq m \leq g$ となる m を固定する．$n \geq 1$ を整数とし，$u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(g)} \in \kappa^{-1}(\Theta^{[1]})$ とする．$u = u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots + u^{(g)}$, $\boldsymbol{u} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(g)})$ とおく．

$$N_{k,n}(\boldsymbol{u}) = \left(\frac{d^{k-1} w_{j-1}}{du_m{}^{k-1}}(u^{(i)}) \right)_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq ng}}, \quad N_n(\boldsymbol{u}) = \det \begin{pmatrix} N_{1,n}(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ N_{n,n}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}, \quad D(\boldsymbol{u}) = \det \left(w_{j-1}(u^{(i)}) \right)_{1 \leq i,j \leq g}$$

とする．ここで，微分 d/du_m は $u_1, u_2, \ldots, u_g$ を u_m の関数と見て微分したものである（偏微分ではない）．このとき，

$$\phi_n(u) = \pm \big(x(u^{(1)}) \cdots x(u^{(g)}) \big)^{(m-1)n(n-1)/2} \frac{N_n(\boldsymbol{u})}{(1!2! \cdots (n-1)!)^g D(\boldsymbol{u})^{n^2}}.$$

ただし，右辺の符号は g と n によって定まる．

注意 4.4. $g = 1$ の場合は §1 で述べた Kiepert の公式として古くから知られている．[7, p. 460] を参照せよ．また，別の形で極限を取ることで，超楕円曲線上に一般化した等分多項式の行列式表示を得る．これについては [5, Theorem 9.3] を参照せよ．

行列式表示の応用として，等分多項式を $\wp$ 関数で表示したときの係数に関する結果が得られる．

定理 4.5. ある $\Delta \in \mathbb{Z}[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}]$ が存在して，任意の整数 $n \geq 1$ に対し，

$$\phi_n \in \mathbb{Z}[1/(n-1)!, 1/\Delta, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}][\wp_{ij}, \wp_{ijk}].$$

5 漸化式

本節では等分多項式が満たす漸化式について述べる．

漸化式は指標付きテータ関数の関係式から導かれるので，まずそれを述べる．

定理 5.1. $a, b \in (1/2)\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathfrak{H}_g$, $n > 2^g$, $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)} \in \mathbb{C}^g$ とする．n 次正方行列 A を

$$A = \left(\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z^{(i)} + z^{(j)})\, \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z^{(i)} - z^{(j)}) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

で定義する．このとき，

$$\det A = 0.$$

超楕円 σ 関数の定義から，次の系を得る．

定理 5.2. $n > 2^g$, $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)} \in \mathbb{C}^g$ とする．n 次正方行列 A を

$$A = \left(\sigma(z^{(i)} + z^{(j)}) \sigma(z^{(i)} - z^{(j)}) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

で定義する．このとき，

$$\det A = 0.$$

特に，$g \equiv 1, 2 \pmod 4$ であり，n が偶数ならば，

$$\operatorname{pf} A = 0.$$

ただし，$\operatorname{pf} A$ は A の Pfaffian であり，$(\operatorname{pf} A)^2 = \det A$ を満たす．

注意 5.3. $g=1$, $n=4$ のとき，$\operatorname{pf} A=0$ を具体的に書くと次のようになる．任意の $x,y,z,w\in\mathbb{C}$ に対し，

$$\sigma(x+y)\sigma(x-y)\sigma(z+w)\sigma(z-w)-\sigma(x+z)\sigma(x-z)\sigma(y+w)\sigma(y-w)\\ +\sigma(x+w)\sigma(x-w)\sigma(y+z)\sigma(y-z)=0.$$

これは古典的に知られている公式である．例えば，[7, p. 451, Example 5] を参照せよ．

等分多項式の定義から，次の漸化式を得る．

定理 5.4. $n>2^g$，$m_1,m_2,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}$, $u\in\mathbb{C}^g$ とする．n 次正方行列 A を

$$A=\left(\phi_{m_i+m_j}(u)\phi_{m_i-m_j}(u)\right)_{1\le i,j\le n}$$

で定義する．このとき，

$$\det A=0.$$

特に，$g\equiv 1,2 \pmod 4$ であり，n が偶数ならば，

$$\operatorname{pf} A=0.$$

注意 5.5. 上の定理で $g=1$, $n=4$ として，$m_1=k$, $m_2=l$, $m_3=m$, $m_4=n$ とすると，$\operatorname{pf} A=0$ から §1 で述べた漸化式を得る．

参考文献

[1] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii and D. V. Leykin, Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, Reviews in Math. and Math. Physics **10** (1997) 1–125.

[2] D. G. Cantor, On the analogue of the division polynomials for hyperelliptic curves, J. Reine Angew. Math. **447** (1994) 91–145.

[3] D. Grant, Formal groups in genus two, J. Reine Angew. Math. **411** (1990) 96–121.

[4] N. Kanayama, Division polynomials and multiplication formulae of Jacobian varieties of dimension 2, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **139** (2005) 399–409.

[5] Y. Ônishi, Determinant expressions for hyperelliptic functions (with an appendix by Shigeki Matsutani), Proc. Edinburgh Math. Soc. **48** (2005) 705–742.

[6] 大西良博, 超楕円函数論, 第 15 回整数論サマースクール報告集, pp. 131–176, `http://web.cc.iwate-u.ac.jp/~onishi//research/pub/ss2007/proceedings.html` からダウンロード可能.

[7] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth edition, 1927.

CONFRONTATIONS AND CONCURRENCES OF THE ORIGINAL NAVIER-STOKES EQUATIONS

増田 茂 (首都大学東京 大学院理学研究科 博士後期課程 数学専攻)

ABSTRACT. There are two sides, on the history of the study of fluid mechanics. One is the study on an exact differential and/or the equation of equilibrium, and the other is on the equation of motion. From both sides, the two-constants theory are deduced, which is one of the characteristics now accepted for the baratropic, homogeneous, isotropic and linear elastic body or fluid. The original Navier-Stokes equations [*NS equations*] or *Navier equations* are introduced from the other side, the equation of motion, in deducing the two-constants theory. From the view of *NS equations*, we would like to report the remarkable facts viewing from the two sides, for example, deduction of tensor or equations by Navier, Poisson, Cauchy, Saint-Venant, Stoke, Helmholtz, etc.

1. Introduction - the mathematical historic view of the partial differential equations on hydro-mechanics

Our motivations to study these theme come from some topics. One is, how/where did the partial differential equation of motion on the hydro-dynamics come from ? Another is, how/where did an exact differential or the equation of equiliblium come from ? Else, we are largely attributable to the facts that the *Euler equations*, the *NS equations*, the *Stokes equation*, *Helmholtz' vorticity equation* and so on, are formulated in the mathematical history of 19C, of which we would like to show some remarkable facts.

1.1. **Remarkable facts on exact differential and equation of equilibrium.** In the fluid mechanics, it is an important principle to analyze it, for example in three variables, for $udx + vdy + wdz$ to be satisfied with an *exact differentiability* or a *complete differentiability*. We show the historical topics after Maupertuis[36] in 1740 in Table 1, in which there are many remarkable facts of equiliblium, applications and discussions about an exact differentiability of $udx+vdy+wdz$ for the fluid mechanics. Poisson[49], e.g., talks about his conjecture in the last two pages of it, in which he remarks that because the exact differential holds in original time of motion, it doesn't follow that it always holds in all other time interval. We would like to tell the mistake of "*Poisson's conjecture*". On the one hand, Helmholtz presents *vorticity equation*[20], in which he applies the exact differential to vortex :

$$\begin{bmatrix} a & (\gamma+\zeta) & (\beta-\eta) \\ (\gamma-\zeta) & -b & (\alpha+\xi) \\ (\beta+\eta) & (\alpha-\xi) & c \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (2_H) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 2\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} = 2\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 2\zeta. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{W} \tag{1}$$

After 10 years since [20], Helmholtz[21], replying to the questions by Bertrand[3], talks for the first time about an exact differential as a criterion on alternative existence between an exact differential and a rotation as follows :

> Si l'expression $(udx + vdy + wdz)$ est une différentielle exacte, il n'y a pas de rotation dans la partie du fluid correspondant. Si cette expression n'est pas une différentielle exacte, il y a rotation. [21, p.136]
> ⇒ If the expression $(udx + vdy + wdz)$ is an exact differential, there is not a rotation in the particle of corresponding fluid. If not, there is a rotation.

1.2. **Remarkable facts on the equation of motion.** On the other hand, we can name the period of 1687-1750 : between Newton[44] and Laplace[32] as "*the first period of molecules*". (This classification is due to C.Truesdell, whose editor's introduction to *Leonhardi Euleri Opera Omnia*).[1] Before Laplace, Newton's physics dominated in also fluid mechanics, whose "*Philosophiae naturalis principia mathematica*"[44] is published in 1687. Such an equation as the *Euler equations*, the *NS equations* or the *Navier equations* and the *Stokes equation* are the productions introduced in the prime of this *period of molecules*.

2. Formulation of the partial differential equations

2.1. **Two constants theory.** Now, we can summarize such as :

- The partial differential equations of the elastic solid or elastic fluid are expressed by using one or the pair of C_1 and C_2 such that :
  - in the elastic solid : $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) = \mathbf{f}$,

Date: 2008/01/30, Our technical papers of the past proceedings of CCYR are [34, 35].

[1] [60], Ser.2 Vol.12, p.81.

TABLE 1. Theories, applications and discussions about an exact differentiability of $udx+vdy+wdz$ for the fluid mechanics

equilibrium	proof	curvature	electro magnatic	topology	vorticity	discussion	application
Maupertuis 1740,68 [36, 37]							
Clairaut 1741-43,1808(2ed.) [9]					Clairaut 1741-43,1808(2ed.) [9]		
d'Alembert 1749-52 [13]							
Euler 1752-55 [26]					Euler[E226] 1755-57 [26]		
d'Alembert 1761 [14]					d'Alembert 1761 [14]		
Lagrange 1781-1869 [28]	Lagrange 1781-1869 [28]				Lagrange 1781-1869 [28]		
Laplace 1806/07-29 [33]							
Cauchy 1815-27 [6]	Cauchy 1815-27 [6]						
Navier 1822-27 [40]							
Gauss 1813 [16], 1830 [18]		Gauss 1828 [17]					
Poisson 1829-31 [49]							
Stokes 1845-49 [57]	Stokes 1845-49 [57]				Stokes 1845-49 [57]		
			Green 1850 [19]				
				Riemann 1857 [52]			
					Helmholtz 1858 [20], 1868 [24]	Helmholtz 1868 [21, 22, 23]	
							Clebsch 1858-1859 [10]
	Thomson 1867-69 [59]				Thomson 1867-69 [59]	Thomson 1867-69 [59]	
						Bertrand 1868 [2, 3, 4, 5]	
						Saint-Venant 1868 [55]	
	Lamb 1879 [30]						

– in the elastic fluid : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}-(C_1T_1+C_2T_2)+\cdots=\mathbf{f}$, where, terms : $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ and ∇p are included in $\cdots$, and T_1, $T_2,\cdots$ are the tensors or terms consisting our equations. For example, in modern notation of the incompressible *NS equations*, the motion of equation and the equation of continuity are conventionally described as follows :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}-\mu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f},\quad \text{div }\mathbf{u}=0. \tag{2}$$

- Moreover, C_1 and C_2 are described as follows :

$$\begin{cases} C_1\equiv\mathcal{L}r_1g_1S_1, \\ C_2\equiv\mathcal{L}r_2g_2S_2, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1=\iint g_3\to C_3, \\ S_2=\iint g_4\to C_4, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1=C_3\mathcal{L}r_1g_1=\frac{2\pi}{15}\mathcal{L}r_1g_1, \\ C_2=C_4\mathcal{L}r_2g_2=\frac{2\pi}{3}\mathcal{L}r_2g_2. \end{cases}$$

- C_1 and C_2 are two coefficients, for example, k and K by Poisson, or ε and E by Navier, or R and G by Cauchy, and which are expressed by the infinite operator $\mathcal{L}$ ($\sum_0^\infty$ or $\int_0^\infty$) by personal principles or methods.

2.2. **Navier's equations.** Navier's equations are today's *NS equation* of motion of (2), namely the same one as in Table 4 which is applied to the fluid from the tensor composing the equation of the elastic solid (6-1)$_{Ne}$.

$$(5\text{-}4)_{Ne}\quad \begin{cases} X'=\varepsilon\Big[\cos\ l\Big(3\frac{dx'}{da'}+\frac{dy'}{db'}+\frac{dz'}{dc'}\Big)+\cos\ m\Big(\frac{dx'}{db'}+\frac{dy'}{da'}\Big)+\cos\ n\Big(\frac{dx'}{dc'}+\frac{dz'}{da'}\Big)\Big], \\ Y'=\varepsilon\Big[\cos\ l\Big(\frac{dx'}{db'}+\frac{dy'}{da'}\Big)+\cos\ m\Big(\frac{dx'}{da'}+3\frac{dy'}{db'}+\frac{dz'}{dc'}\Big)+\cos\ n\Big(\frac{dy'}{dc'}+\frac{dz'}{db'}\Big)\Big], \\ Z'=\varepsilon\Big[\cos\ l\Big(\frac{dx'}{dc'}+\frac{dz'}{da'}\Big)+\cos\ m\Big(\frac{dy'}{dc'}+\frac{dz'}{db'}\Big)+\cos\ n\Big(\frac{dx'}{da'}+\frac{dy'}{db'}+3\frac{dz'}{dc'}\Big)\Big]. \end{cases} \tag{3}$$

$$(6\text{-}1)_{Ne}\quad \begin{cases} \frac{\Pi}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=\varepsilon\Big(3\frac{d^2x}{da^2}+\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2x}{dc^2}+2\frac{d^2y}{dbda}+2\frac{d^2z}{dcda}\Big), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=\varepsilon\Big(\frac{d^2y}{da^2}+3\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2y}{dc^2}+2\frac{d^2x}{dadb}+2\frac{d^2z}{dcdb}\Big), \\ \frac{\Pi}{g}\frac{d^2z}{dt^2}=\varepsilon\Big(\frac{d^2z}{da^2}+\frac{d^2z}{db^2}+3\frac{d^2z}{dc^2}+2\frac{d^2x}{dadc}+2\frac{d^2y}{dbdc}\Big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X-\frac{d^2u}{dt^2}+\varepsilon\Big(3\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+2\frac{d^2v}{dydx}+2\frac{d^2w}{dzdx}\Big)=0, \\ Y-\frac{d^2v}{dt^2}+\varepsilon\Big(\frac{d^2v}{dx^2}+3\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}+2\frac{d^2u}{dxdy}+2\frac{d^2w}{dzdy}\Big)=0, \\ Z-\frac{d^2w}{dt^2}+\varepsilon\Big(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+3\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{d^2u}{dxdz}+2\frac{d^2v}{dydz}\Big)=0 \end{cases}$$

2.3. **Poisson's tensor and equations.** Poisson's tensor in fluid reads in Table 4.

2.4. **Cauchy's tensor.** Cauchy determines the symmetrical tensor, forming one of characteristics of the system of particles, as follow :

$$(60)_C \quad \begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\frac{\partial\xi}{\partial a}+K\nu & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right) & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\right) \\ \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b}+\frac{\partial\eta}{\partial a}\right) & k\frac{\partial\eta}{\partial b}+K\nu & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right) \\ \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}+\frac{\partial\xi}{\partial c}\right) & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c}+\frac{\partial\zeta}{\partial b}\right) & k\frac{\partial\zeta}{\partial c}+K\nu \end{bmatrix}, \text{ where, } \quad \nu=\frac{\partial\xi}{\partial a}+\frac{\partial\eta}{\partial b}+\frac{\partial\zeta}{\partial c}$$

2.5. **Remarkable resemblance of tensor between Saint-Venant and Stokes.** In Table 4, we show Saint-Venant's tensor, which comes from Poisson $(7\text{-}7)_{Pf}$ and Cauchy $(60)_C$ and seems to hint Stokes, by the extract [54]. Saint-Venant says by using his theory, we can deduce the concurrence with Navier, Cauchy and Poisson :

> Si l'on remplace π par $\varpi-\varepsilon(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz})$, et si l'on substitue les équations $(2)_{SV}$ et $(3)_{SV}$ dans les relations connues entre les pressions et les forces accélératrices, on obtient, en supposant ε le même en tous les points du fluide, les équations différentielles données le 18 mars 1822 par M.Navier (*Mémoires de l'Institut*, t.VI), en 1828 par M.Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, p.187), et le 12 octobre 1829 par M.Poisson (même *Mémoire*, p.152). La quantité variable ϖ ou π n'est autre chose, dans les liquides, que la *pression normale moyenne* en chaque point. [54, p.1243]

[2] This paper[54] seems to give Stokes a hint of tensor, because we can see by comparing

$$\text{Saint-Venant's } t_{ij}=\Big(\frac{1}{3}(P_{xx}+P_{yy}+P_{zz})-\frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k}\Big)\delta_{ij}+\varepsilon(v_{i,j}+v_{j,i})=(-p-\frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k})\delta_{ij}+\varepsilon(v_{i,j}+v_{j,i})=\text{Stokes' } t_{ij} \quad (4)$$

where $v_{k,k}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\cdots$Einstein's description From Poisson's $(7\text{-}9)_{Pf}$, Stokes puts $\varpi=p+\alpha(K+k)\Big(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\Big)$, then he gets Stokes' equations : $(12)_S$. We can verify Stokes' concurrence of tensor with Saint-Venant's one : if we put $P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}=-p$ by Stokes principle of the bartropic, isotropic, linear fluid, then (4) is equivalent to Stokes' t_{ij} (cf. I.Imai [27, p.185]). Moreover, Saint-Venant assumes that if we put $\pi\equiv\varpi-\varepsilon\Big(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\Big)=\varpi-\varepsilon v_{k,k}$ then

$$t_{ij}=\big(\varpi-\varepsilon v_{k,k}+2\varepsilon v_{i,j}-\gamma\big)\delta_{ij}+\gamma=(\varpi-\varepsilon v_{k,k})\delta_{ij}+\varepsilon(v_{i,j}+v_{j,i}), \quad \text{where} \quad \gamma=\varepsilon(v_{i,j}+v_{j,i}) \qquad (5)$$

In fact, it turns into Stokes' tensor [57, p.90] in Table 4. Here, he says, "it may also be very easily provided directly that the value of 3δ, the rate of cubical dilation". By the way, Stokes' t_{ij} is compactly described as follows :

$$-t_{ij}=\{p-2\mu(v_{i,j}-\delta)+\gamma\}\delta_{ij}-\gamma=\quad(p+2\mu\gamma)\delta_{ij}-\gamma\ =\ (p+\tfrac{2}{3}\mu v_{k,k})\delta_{ij}-\mu(v_{i,j}+v_{j,i}),\ \text{where}\ \gamma\equiv\mu(v_{i,j}+v_{j,i}) \qquad (6)$$

Moreover, we can check the coincidence Saint-Venant's tensor with Stokes' only $(1,1)$ element or P_1.

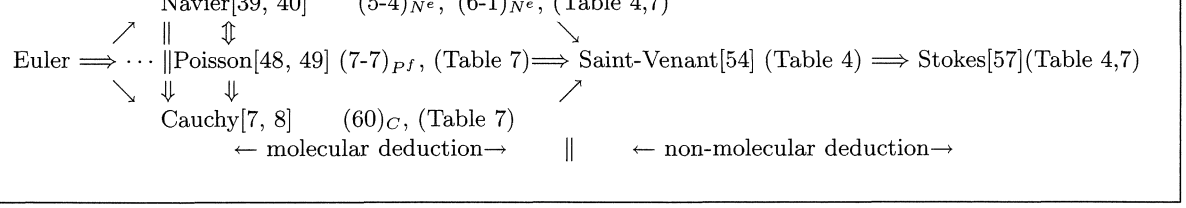
$$P_1 \text{ of Saint-Venant's tensor} \Rightarrow \pi+2\varepsilon\frac{d\xi}{dx}=-p+(2-\frac{2}{3})\varepsilon\frac{d\xi}{dx}-\frac{2\varepsilon}{3}\Big(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\Big)=-p+2\varepsilon\Big(\frac{d\xi}{dx}-\delta\Big)\Rightarrow P_1 \text{ of Stokes' tensor}$$

3. Remarkable facts from disputes on the molecular activity to concurrence of tensor

The heated dispute among Poisson, Navier, Arago and Cournot over the then current topics on actions of molecules are published in several journals, above all, on *Annales de chimie et de physique* (ACP) in 1828-29, which are started by Navier[41] against Poisson[45]. Replying by Poisson[46, 47] and Navier[42] and finish by Arago[1]. A.Cournot[12] also critisizes Navier[42], and moreover, Navier[43] argues against Poisson and Arago in another journal (BSM). By the way, Navier[38, 40] and Poisson[48, 49] are the main papers or monographies on fluid. Cauchy[8] in 1828, Saint-Venant[54] in 1843, and Stokes [57] in 1845, present each tensors and equations respectively.

We show confrontations and concurrences of tensors in the original *NS equations* in (*fig.1*).

(*fig.1*) *Confrontations and concurrences of the prototypical Navier-Stokes equations*



We show the concurrence from the viewpoint of Saint-Venant with others in Table 6 and the correlation of concurrence in Table 7.

[2]Remark: our corresponding bibliographies with Saint-Venant [54] above are : Navier [40], Poisson [49, p.152] $(7\text{-}9)_{Pf}$, Cauchy [7, p.226].

TABLE 2. C_1, C_2, C_3, C_4 : the constant of definitions and computing of total moment of molecular actions by Poisson, Navier, Cauchy, Saint-Venant & Stokes in equilibrium and motion

no	name	elastic solid	moment of elastic fluid	equiliblium of fluid
1	Navier	$C_1 = \varepsilon \equiv \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty d\rho \cdot \rho^4 f\rho$ $C_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \; g_3 \Rightarrow \{\frac{16}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}\}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\frac{16}{15} = \frac{2\pi}{15}$	$C_1 = \varepsilon \equiv \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty d\rho \cdot \rho^4 f(\rho)$ $C_2 = E \equiv \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty d\rho \cdot \rho^2 F(\rho)$ $C_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \; g_3$ $\Rightarrow \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{30}\} \Rightarrow \frac{2\pi}{15}$ $C_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \; g_4 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$	$C_1 = p \equiv \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty d\rho\rho^3 f(\rho)$ $C_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi g_3$ $\Rightarrow \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}\} \Rightarrow \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$
2	Poisson	$C_1 = k \equiv \frac{2\pi}{15}\sum \frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ $C_2 = K \equiv \frac{2\pi}{3}\sum \frac{r^3}{\alpha^5} fr$ $C_3 = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta \sin\beta d\beta \; g_3$ $\Rightarrow \{\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{15}\} \Rightarrow \frac{2\pi}{15}$ $C_4 = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta \sin\beta d\beta \; g_4 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$ Remark: C_3 is choiced as the common factor of $\{\cdot, \cdot\}$	$C_1 = -k \equiv -\frac{1}{30\varepsilon^3}\sum r^3 \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ $= -\frac{2\pi}{15}\sum \frac{r^3}{4\pi\varepsilon^3}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$ $C_2 = -K \equiv -\frac{1}{6\varepsilon^3}\sum rfr$ $= -\frac{2\pi}{3}\sum \frac{r}{4\pi\varepsilon^3} fr$ $C_3 : \begin{cases} G = \frac{1}{10}\sum r^3 \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}, \\ E = F = \frac{1}{30}\sum r^3 \frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr} \end{cases}$ $\Rightarrow \{\frac{1}{10}, \frac{1}{30}\} \Rightarrow \frac{1}{30}$ $C_4 : (3\text{-}2)_{Pf} \quad N = \frac{1}{6\varepsilon^3}\sum rfr \Rightarrow \frac{1}{6}$	$C_1 = -q \equiv \frac{1}{4\varepsilon^3}\sum \frac{r_i^2 z' R}{r}$ $C_2 = p \equiv \frac{1}{6\varepsilon^3}\sum rR$ $N = p + q\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$ where N : the vertical force, λ, λ' : the radii of the principal curvature
3	Cauchy	$C_1 = R = \frac{2\pi\Delta}{15}\int_0^\infty r^3 f(r) dr$ $= \pm\frac{2\pi\Delta}{15}\int_0^\infty [r^4 \mathrm{f}'(r) - r^3 \mathrm{f}(r)] dr$ $C_2 = G = \pm\frac{2\pi\Delta}{3}\int_0^\infty r^3 \mathrm{f}(r) dr$ $C_3 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 q dq \int_0^\pi \cos^2\alpha \cos^2\beta dp$ $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 q dq \int_0^\pi \cos^2 p \sin^2 p \sin p dp$ $= \frac{2\pi}{15}$, $C_4 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \cos^2\alpha \sin p dq dp$ $= \pi\int_0^\pi \cos^2 p \sin\ p dp = \frac{2\pi}{3}$,	same as elastic solid	
4	Saint-Venant		$C_1 = \varepsilon, \quad C_2 = \frac{\varepsilon}{3}$	
5	Stokes	$C_1 = A, \quad C_2 = B$	$C_1 = \mu, \quad C_2 = \frac{\mu}{3}$	

TABLE 3. The expression of the total moment of molecular actions by Poisson, Navier, Cauchy, Saint-Venant & Stokes in equilibrium and motion

no	name	problem	C_1	C_2	C_3	C_4	$\mathcal{L}$	r_1	r_2	g_1	g_2	remark
1	Navier [39]	elastic solid	ε		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho$	ρ^4		$f\rho$		ρ : radius
2	Navier fluid [40]	motion of fluid	ε	E	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\int_0^\infty d\rho$ $\int_0^\infty d\rho$	ρ^4	ρ^2	$f(\rho)$	$F(\rho)$	ρ : radius
3	Poisson [48]	elastic solid	k	K	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\sum \frac{1}{\alpha^5}$ $\sum \frac{1}{\alpha^5}$	r^5	r^3	$\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$	fr	
4	Poisson [49]	motion of fluid	k	K	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\sum \frac{1}{4\pi\varepsilon^3}$ $\sum \frac{1}{4\pi\varepsilon^3}$	r^3	r	$\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}$	fr	$C_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{15} = \frac{1}{30}$ $C_4 = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6}$
5	Cauchy [8]	system of particles	R	G	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\int_0^\infty dr$ $\int_0^\infty dr$	r^3	r^3	$f(r)$	f(r)	$f(r) \equiv \pm[rf'(r) - \mathrm{f}(r)]$ $f(r) \neq \mathrm{f}(r)$
6	Navier fluid [40]	equiliblium of fluid	p		$\frac{4\pi}{3}$		$\int_0^\infty d\rho$	ρ^3		$f(\rho)$		ρ : radius
7	Poisson [49]	equiliblium of fluid	q	p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$ $\sum \frac{1}{\varepsilon^3}$	$\frac{1}{r}$	r	$r_i^2 z' R$	R	$r_i = \sqrt{x'^2 + y'^2}$
8	Saint-Venant [54]	fluid	ε	$\frac{\varepsilon}{3}$								
9	Stokes [57]	fluid	μ	$\frac{\mu}{3}$								
10	Stokes [57]	elastic solid	A	B								$A = 5B$

TABLE 4. The tensors & equations by Navier, Poisson, Saint-Venant & Stokes in fluid

no	name	tensor & equations
1	Navier incomp. fluid [40]1822-27	· Navier's tensor : $t_{ij} = -\varepsilon(\delta_{ij}u_{k,k} + u_{i,j} + u_{j,i})$ · Navier's equations : $\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \varepsilon\left(3\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{d^2v}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dxdz}\right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx}\cdot u - \frac{du}{dy}\cdot v - \frac{du}{dz}\cdot w\ ; \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dydz}\right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx}\cdot u - \frac{dv}{dy}\cdot v - \frac{dv}{dz}\cdot w\ ; \\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + 3\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz} + 2\frac{d^2v}{dydz}\right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx}\cdot u - \frac{dw}{dy}\cdot v - \frac{dw}{dz}\cdot w\ ; \end{cases}$ i.e. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \varepsilon\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{f},\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0$ · Indeterminate equations with ε and E : $0 = \iiint dxdydz \begin{cases} [P - \frac{dp}{dx} - \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right)]\delta u \\ [Q - \frac{dp}{dy} - \rho\left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\right)]\delta v \\ [R - \frac{dp}{dz} - \rho\left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right)]\delta w \end{cases}$ $-\varepsilon\iiint dxdydz \begin{cases} 3\frac{du}{dx}\frac{\delta du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{\delta du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{\delta du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{\delta du}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{\delta du}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{\delta du}{dx} + \frac{dw}{dx}\frac{\delta du}{dz} \\ \frac{du}{dx}\frac{\delta dv}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{\delta dv}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{\delta dv}{dx} + 3\frac{dv}{dy}\frac{\delta dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dz}\frac{\delta dv}{dy} \\ \frac{du}{dx}\frac{\delta dw}{dz} + \frac{du}{dz}\frac{\delta dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{\delta dw}{dz} + \frac{dv}{dz}\frac{\delta dw}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{\delta dw}{dx} + \frac{dw}{dy}\frac{\delta dw}{dy} + 3\frac{dw}{dz}\frac{\delta dw}{dz} \end{cases}$ $+\mathbf{S}ds^2E(u\delta u + v\delta v + w\delta w).$ · Boundary condition with ε and E : $\begin{cases} Eu + \varepsilon[\cos l2\frac{du}{dx} + \cos m\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \cos n\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)] = 0, \\ Ev + \varepsilon[\cos l\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \cos m2\frac{dv}{dy} + \cos n\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)] = 0, \\ Ew + \varepsilon[\cos l\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) + \cos m\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + \cos n2\frac{dw}{dz}] = 0, \end{cases}$
2	Poisson fluid [49]1829-31	· Poisson's tensor : $t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$: $(7\text{-}7)_{Pf}$ $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) & \beta\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt} + 2\beta\frac{du}{dx} \\ \beta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt} + 2\beta\frac{dv}{dy} & \beta\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \\ p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt} + 2\beta\frac{dw}{dz} & \beta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & \beta\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) \end{bmatrix},$ $(k+K)\alpha = \beta,\quad (k-K)\alpha = \beta',\quad p = \psi t = K,\quad \text{then}\quad \beta + \beta' = 2k\alpha.$ $\varpi \equiv -\alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta+\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt}.$ · Poisson's equations in incompressible fluid : If $\psi t(=\text{density}), \chi t(=\text{pressure}) \equiv$ const. and incompressible $\Rightarrow (7\text{-}9)_{Pf}$ $\begin{cases} \rho(X - \frac{d^2x}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dx} + \beta(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}) = 0, \\ \rho(Y - \frac{d^2y}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dy} + \beta(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}) = 0, \\ \rho(Z - \frac{d^2z}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dz} + \beta(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}) = 0. \end{cases}$ i.e. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\beta}{\rho}\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla\varpi = \mathbf{f}$ · Coincidence with Stokes' equations : by $\varpi = p + \frac{\alpha}{3}(K+k)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ $\Rightarrow \nabla\varpi = \nabla p + \frac{\beta}{3}\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{u}), (9)_{Pf} \cong (12)_S$ of Stokes.
3	Saint-Venant fluid [54]1834-43	·Saint-Venant's tensor : $t_{ij} = (\frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) - \frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k})\delta_{ij} + \varepsilon(v_{i,j} + v_{j,i})$ $= (-p - \frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k})\delta_{ij} + \varepsilon(v_{i,j} + v_{j,i})$ i.e. $\begin{bmatrix} P_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & P_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi + 2\varepsilon\frac{d\xi}{dx}, & \varepsilon\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) & \varepsilon\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) \\ \varepsilon\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) & \pi + 2\varepsilon\frac{d\eta}{dy} & \varepsilon\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) \\ \varepsilon\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) & \varepsilon\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) & \pi + 2\varepsilon\frac{d\zeta}{dz} \end{bmatrix},$ where $\pi = \frac{1}{3}\left(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}\right) - \frac{2\varepsilon}{3}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right).$
4	Stokes fluid [57]1845-49	· Stokes' tensor : $-t_{ij} = \{p - 2\mu(v_{i,j} - \delta) + \gamma\}\delta_{ij} - \gamma = (p + \frac{2}{3}\mu v_{k,k})\delta_{ij} - \mu(v_{i,j} + v_{j,i}),$ where $3\delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},\ \gamma = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}),\ v_{k,k} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ c.f.[56, p.58] i.e. $\begin{bmatrix} P_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & P_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - 2\mu\left(\frac{du}{dx} - \delta\right) & -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & -\mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & p - 2\mu\left(\frac{dv}{dy} - \delta\right) & -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ -\mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) & -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & p - 2\mu\left(\frac{dw}{dz} - \delta\right) \end{bmatrix},$ where $3\delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$ · Stokes' equations with μ : $(12)_S$ $\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} - \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} - \mu\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} - \mu\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0. \end{cases}$ i.e. $\rho\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f}\right) + \nabla p - \mu\left(\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right) = 0$ i.e. $\begin{cases} \rho(\frac{Du}{Dt} - X) + \frac{dp}{dx} - \frac{\mu}{3}\left(4\frac{d^2u}{dx^2} + 3\frac{d^2u}{dy^2} + 3\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2v}{dxdy} + \frac{d^2w}{dxdz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dv}{Dt} - Y) + \frac{dp}{dy} - \frac{\mu}{3}\left(3\frac{d^2v}{dx^2} + 4\frac{d^2v}{dy^2} + 3\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2w}{dydz}\right) = 0, \\ \rho(\frac{Dw}{Dt} - Z) + \frac{dp}{dz} - \frac{\mu}{3}\left(3\frac{d^2w}{dx^2} + 3\frac{d^2w}{dy^2} + 4\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d^2u}{dxdz} + \frac{d^2w}{dydz}\right) = 0, \end{cases}$

TABLE 5. The conditions in reducing to others

1	name	Poisson	Navier	Cauchy	Saint-Venant	cf.
1	Poisson		if $K=0, \varepsilon=\frac{a^3}{3}=\frac{k}{\rho}\Rightarrow\varepsilon\cong k$			$(6)_{Pe}$
2	Navier	even if $K=0\Rightarrow\varepsilon\neq k$, [42, p.103, § 8]				
3	Cauchy	if $G=0\Rightarrow R\cong a^2$, [47, p.206, § 1]	if $G=0\Rightarrow R\cong\varepsilon$, [8, p.251]			$(84)_C$
4	Saint-Venant	if we put $\pi=\varpi-\varepsilon\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)$ then Saint-Venant's ε equals to Navier's, Poisson's and Cauchy's one	same as left	same as left		
5	Stokes	if $\alpha(K+k)\equiv\beta\Rightarrow\mu\cong\beta$ i.e. $\varpi=p+\frac{\alpha}{3}(K+k)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$ $\Rightarrow\nabla\varpi=\nabla p+\frac{\beta}{3}\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{u}), (9)_{Pf}\cong(12)_S$.	$\neq$, [57, p.77, footnote]			$(12)_S$

TABLE 6. Concurrence from the viewpoint of Saint-Venant with others

if we put $\pi=\varpi-\varepsilon\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)=\varpi-\varepsilon v_{k,k}$ then Saint-Venant's $t_{ij}^{SV}=\varpi\delta_{ij}-\varepsilon_1 v_{k,k}\delta_{ij}+\varepsilon_2(v_{i,j}+v_{j,i})$	$\Rightarrow\quad\varpi=0$	$\Rightarrow\quad\varpi=-p$
$\varepsilon_1=\varepsilon,\quad\varepsilon_2=-\varepsilon$	Navier's $t_{ij}^{Ne}=-\varepsilon(\delta_{ij}u_{k,k}+u_{i,j}+u_{j,i})$	
$\varepsilon_1=-\lambda,\quad\varepsilon_2=\mu$	Cauchy's $t_{ij}^{Ce}=\lambda v_{k,k}\delta_{ij}+\mu(v_{i,j}+v_{j,i})$	Poisson's $t_{ij}^{Pe}=(-p+\lambda v_{k,k})\delta_{ij}+\mu(v_{i,j}+v_{j,i})$
$\varepsilon_1=\frac{2}{3}\mu,\quad\varepsilon_2=\mu$		Stokes'$t_{ij}^{Sf}=(-p-\frac{2}{3}\mu v_{k,k})\delta_{ij}+\mu(v_{i,j}+v_{j,i})$

4. **Remarkable facts on classical bibliographies of 5** *Géomètres* **and practice of** *NS equations*

There are not so many reports on the modern hydro-dynamics, such as Stokes [58], W.M.Hicks [25]. As the textbook or monography, Lamb [31], L.Prandtl[50] and H.Schlichting [56]. In these papers, they cite always the works of 5 *Géomètres*, namely, Navier, Poisson, Cauchy, Saint-Venant and Stokes.

Lord Rayleigh (William Strutt) [51] cites 2-dimensional *NS equations*. In paticular, in 1931, Prandtl[50] cites 3-dimendional *NS equations* in Gibbs vectoriel expression under the name of "Navier-Stokes equations", in which he proposes his *boundary layer equation*, by which he proved *d'Alembert paradox*[13].

REFERENCES

[1] D.F.J.Arago, *Note du Rédacteur*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 107-110. (This is following with Navier[41], 99-107).

[2] M.J.Bertrand, *Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluides*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **66**(1868) 1227–1230.

[3] M.J.Bertrand, *Note relative à la thèorie des fluides. Reponse à la communication de M.Helmholtz*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 267–269.

[4] M.J.Bertrand, *Observation nouvelles sur un Mèmoire de M.Helmholtz*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 469–472.

[5] M.J.Bertrand, *Réponse à la note de M.Helmholtz*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 773–775.

[6] A.L.Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des Ondes, 1815*, Savants étrangers, **1**(1827), 1 partie §§3,4 et 2 partie §§4,5. (Remark : this is the same as *Mémoire sur la Théorie des Ondes à la surface d'un fluid pesant d'un profondeur indéfinie*, Œuvres de Cauchy, 1882, serie (1), t. 1, 5–318.)

[7] A.L.Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions de l'équilibre ou les lois du mouvment intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique*, Exercises de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy, (Ser. 2) **8**(1890), 195-226.

[8] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercises de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.

[9] A.C.Clairaut, *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743, second ed. 1808.

[10] A.Clebsch, *Über die Integration der hydrodynmischen Gleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **56**(1859) 1–10.

[11] A.Clebsch, *Théorie de l'elasticité des corps solides - de Clebsch traduite par MM. B. de Saint-Venant et Flemant avec des Notes étendues de M. de Saint-Venant*, 1883. (cf. Préface de l'auteur : Carlsruhe, le 30 septembre 1862, first reprint by Johnson Reprint Co. : 1966).

[12] A.Cournot, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides ; par M.Navier. (Mém. de l'Acad. des Science ; Tom. VI, p. 389)*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **10**(1828), 11-14. (The title number : No.10.)

[13] d'Alembert, *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, Paris, 1752. Reprint 1996.

[14] d'Alembert, *Remarques sur les Loix du mouvement des fluides*, Opuscules mathematiques, Tome **1** (1761) 137–168. → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62394p

[15] O.Darrigol, *Worlds of flow : a history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford Univ. Press, 2005.

[16] C.F.Gauss, *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. Methodo nova tractata*, Gottingae, 1813, *Carl Friedrich Gauss Werke V*, Göttingen, 1867. (We can see today in : "*Carl Friedrich Gauss Werke V*", Georg Olms

TABLE 7. Concurrences and variations of tensors

1	name	tensor (3×3)	coefficient matrix (3 × 5) in equations
1-1	Navier elastic	$t_{ij} = -\varepsilon(\delta_{ij}u_{k,k} + u_{i,j} + u_{j,i})$ $(5\text{-}4)_{Ne}$ $-\varepsilon\begin{bmatrix} \left(3\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) & \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dx} + 3\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) & \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) & \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3\frac{dw}{dz}\right) \end{bmatrix}$ $= -\varepsilon\begin{bmatrix} \epsilon + 2\frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} & \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} & \epsilon + 2\frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} & \epsilon + 2\frac{dw}{dz} \end{bmatrix}$, where $\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$	We define the coefficient matrix in elastics : C_T^e as follows : C_T^e : the coefficient of $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \end{bmatrix}$, then $(6\text{-}1)_{Ne} \Rightarrow C_T^e = -\varepsilon\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
1-2	Navier fluid (only linear part of (2)	$t_{ij} = (p - \varepsilon u_{k,k})\delta_{ij} - \varepsilon(u_{i,j} + u_{j,i})$ $\begin{bmatrix} \epsilon' - 2\varepsilon\frac{du}{dx} & -\varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & -\varepsilon\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ -\varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & \epsilon' - 2\varepsilon\frac{dv}{dy} & -\varepsilon\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ -\varepsilon\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) & -\varepsilon\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & \epsilon' - 2\varepsilon\frac{dw}{dz} \end{bmatrix}$, where $\epsilon' = p - \varepsilon\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$	Samely, we define the coefficient matrix in fluid : C_T^f , which contains p in (1,1)-, (2,2)- and (3,3)-element. $C_T^f = \begin{bmatrix} p - 3\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -2\varepsilon & -2\varepsilon \\ -\varepsilon & p - 3\varepsilon & -\varepsilon & -2\varepsilon & -2\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & p - 3\varepsilon & -2\varepsilon & -2\varepsilon \end{bmatrix}$
2-1	Poisson elastic	$t_{ij} = -\frac{a^2}{3}(\delta_{ij}u_{k,k} + u_{i,j} + u_{j,i})$ $(6)_{Pe}$ $-\frac{a^2}{3}\begin{bmatrix} \epsilon + 2\frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} & \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} & \epsilon + 2\frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} & \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} & \epsilon + 2\frac{dw}{dz} \end{bmatrix}$, where $\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$	$(6)_{Pe}$ $\begin{cases} X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0, \\ Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3}\frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right) = 0, \\ Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3}\frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right) = 0, \end{cases}$ $\Rightarrow C_T^e = -\frac{a^2}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
2-2	Poisson fluid	$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$ $(7\text{-}7)_{Pf}$ $\begin{bmatrix} \beta\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) & \beta\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & \pi + 2\beta\frac{du}{dx} \\ \beta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & \pi + 2\beta\frac{dv}{dy} & \beta\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \\ \pi + 2\beta\frac{dw}{dz} & \beta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & \beta\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) \end{bmatrix}$, where $\pi = p - \alpha\frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t}\frac{d\chi t}{dt}$	$(7\text{-}9)_{Pf} \Rightarrow C_T^f = \begin{bmatrix} \varpi + \beta & \beta & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \varpi + \beta & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \varpi + \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$. According to Stokes : if we put $\varpi = p + \frac{\alpha}{3}(K + k)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ $\Rightarrow C_T^f = \begin{bmatrix} p + \frac{4\beta}{3} & \beta & \beta & \frac{\beta}{3} & \frac{\beta}{3} \\ \beta & p + \frac{4\beta}{3} & \beta & \frac{\beta}{3} & \frac{\beta}{3} \\ \beta & \beta & p + \frac{4\beta}{3} & \frac{\beta}{3} & \frac{\beta}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow (12)_S$ Remark : $\alpha(K + k) = \beta$.
3	Cauchy system of particles	$t_{ij} = \lambda v_{k,k}\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$ $(60)_C$ $\begin{bmatrix} k\frac{\partial\xi}{\partial a} + K\nu & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\right) & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right) \\ \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial b} + \frac{\partial\eta}{\partial a}\right) & k\frac{\partial\eta}{\partial b} + K\nu & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\right) \\ \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a} + \frac{\partial\xi}{\partial c}\right) & \frac{k}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial c} + \frac{\partial\zeta}{\partial b}\right) & k\frac{\partial\zeta}{\partial c} + K\nu \end{bmatrix}$, where $\nu = \frac{\partial\xi}{\partial a} + \frac{\partial\eta}{\partial b} + \frac{\partial\zeta}{\partial c}$	$(46)_C \Rightarrow C_T^e = \begin{bmatrix} L & R & Q & 2R & 2Q \\ R & M & P & 2P & 2R \\ Q & P & N & 2Q & 2P \end{bmatrix}$ $\Rightarrow R\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, where $P = Q = R, \quad L = M = N, \quad L = 3R.$
4	Saint-Venant fluid	$t_{ij} = (\frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) - \frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k})\delta_{ij} + \varepsilon(v_{i,j} + v_{j,i})$ $= (-p - \frac{2\varepsilon}{3}v_{k,k})\delta_{ij} + \varepsilon(v_{i,j} + v_{j,i})$ $\begin{bmatrix} \pi + 2\varepsilon\frac{d\xi}{dx}, & \varepsilon\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) & \varepsilon\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) \\ \varepsilon\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) & \pi + 2\varepsilon\frac{d\eta}{dy} & \varepsilon\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) \\ \varepsilon\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) & \varepsilon\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) & \pi + 2\varepsilon\frac{d\zeta}{dz} \end{bmatrix}$, where $\pi = \frac{1}{3}\left(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}\right) - \frac{2\varepsilon}{3}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)$ $\equiv -p - \frac{2\varepsilon}{3}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)$	non description in [54].
5	Stokes fluid	$t_{ij} = (-p - \frac{2}{3}\mu v_{k,k})\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$, tensor $= -1 \times$ $\begin{bmatrix} p - 2\mu\left(\frac{du}{dx} - \delta\right) & -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & -\mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ -\mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) & p - 2\mu\left(\frac{dv}{dy} - \delta\right) & -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \\ -\mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) & -\mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) & p - 2\mu\left(\frac{dw}{dz} - \delta\right) \end{bmatrix}$ where $3\delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$	$(12)_S \Rightarrow C_T^f = \begin{bmatrix} -p + \frac{4\mu}{3} & \mu & \mu & \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{3} \\ \mu & -p + \frac{4\mu}{3} & \mu & \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{3} \\ \mu & \mu & -p + \frac{4\mu}{3} & \frac{\mu}{3} & \frac{\mu}{3} \end{bmatrix}$. Remark : $\frac{4}{3}\mu = 2\mu(1 - \frac{1}{3})$

Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 219-258. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Götingische gelehrt Anzeigen*, 1927, "*Werke VI*", 341–347.) (Latin)

[17] C.F.Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gottingae, 1828, *Carl Friedrich Gauss Werke VI*, Göttingen, 1867. (We can see today in : "*Carl Friedrich Gauss Werke VI*", Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 219-258. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Götingische gelehrt Anzeigen*, 1927, "*Werke IV*", 341–347.) (The title reads in Latin, but the contents is German.)

[18] C.F.Gauss, *Principia generalia theoriae figurae fluidrum in statu aequilibrii*, Gottingae, 1830, *Carl Friedrich Gauss Werke V*, Göttingen, 1867. (We can see today in : "*Carl Friedrich Gauss Werke V*", Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 29-77. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Götingische gelehrt Anzeigen*, 1829, as above in "*Werke V*", 287–293.) (Latin)

[19] G.Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, J. Reine Angew Mat., **39**(1850) 73–89 (Also we can see : Edited by N.M.Ferrers, *Mathematical Papers of the late George Green, Fellow of Gonville and Caius College, Cambridge*, Macmillan, 1871.)

[20] H.von Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, J. Reine Angew. Math., **55**(1858) 25–55.
[21] H.von Helmholtz, *Sur le mouvement le plus général d'un fluide. Résponse à une communication précéndente de M.S.Bertrand*, Académie des Sciences, Comptes-rendus hebdomadaires des séances, **67**(1868), 221-225, also in Herman von Helmholtz, *Wissenschaftliches Abhundlungen*, **1**, 134–139. 1868. (We use bellow CR and WHA.)
[22] H.von Helmholtz, *Sur le mouvement des fluid. Deuxème rèponse à M.S.Bertrand*, CR **67**(1868), 754-57, also in WHA, **1**, 140–144.
[23] H.von Helmholtz, *Réponse à la note de Monsieur Bertrand du 19 octobre*, CR **67**(1868), 1034-1035, also in WHA, **1**, 145.
[24] H.von Helmholtz, *Über discontinuirliche Flússigkeitsbewegungen*, CR **67**(1868), 1034-1035, also in WHA, **1**, 146–157.
[25] W.M.Hicks, *Report on recent progress in hydrodynamics*, British Association for the Advancement of Science, Report(1881), 57-88, (1882), 39-70.
[26] L.Euler, *Sectio secunda de principiia motus fluidorum*, E.396. (1752-1755), Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitensis, **6**(1756-1757), 271–311(1761). Leonhardi Euleri Opera Omnia. Edited by C.Truesdell III : Commentationes Mechanicae. Volumen posterius, **2-13**(1955) 1–72, 73–153. (Latin)
[27] I.Imai, *Fluid dynamics*, Physical text series, Iwanami Pub. (1970), (New edition, 1997). (Japanese)
[28] J.L.Lagrange, *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides*, Œuvres de Lagrange publiées par les soins de M.J.-A. Serret, Vol. 4 1869, 695–748. (Lu : 22/nov/1781.)
[29] J.L.Lagrange, *Méchanique analitique*, Paris, 1788. (Quatrième édition d'après la Troisième édition de 1833 publiée par M. Bertrand, *Joseph Louis de Lagrange, Oeuvres*, publiées par les soins de J.-A. Serret et Gaston Darboux, **11/12**, Georg Olms Verlag, Hildesheim·New York, 1973.) (J.Bertarnd remarks the differences between the editions.)
[30] H.Lamb, *A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids*, Cambridge Univ. Press, 1879.
[31] H.Lamb, *Hydrodynamics*, 1895, Cambridge.
[32] P.S.Laplace, *Traité de méchanique céleste*, Ruprat, Paris, 1798-1805. (*Celestial Mechanics*, translated from French, with a commentary, by N. Bowditch, LL.D. from the press of Isacc R. Butts ; Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Publishers ; Boston, 1824 ; Chelsea Publishing Co., Bronx, New York, 1966 , Vol.I,II,III,IV,V (only V is in French).)
[33] P.S.Laplace, *On capillary attraction, Supplement to the tenth book of the Méchanique céleste*, translated by N. Bowditch, same as above Vol. IV 685-1018.
[34] S.Masuda, *The earlier-on successions of the constructions of the solutions on the Navier-Stokes equations*, The 3rd COE Conference for Young Researchers - CCYR3, Hokkaido Univ., 2007.
[35] S.Masuda, *The modeling in the equations of fluid mechanics at the dawn or Navier-Stokes*, The 4th COE Conference for Young Researchers - CCYR4, Hokkaido Univ., 2008.
[36] T,G.Maupertuis, *Loi du repos*, 1740. ([37, IV. p.43-64], Reprint : G. Olms, 1965-74).
[37] T,G.Maupertuis, *Oeuvres : avec l'Examen philosophique de la preuve de l'existence de Dieu employée dans l'essai de cosmologie*, Vol 1-4. G. Olms. (Reprint) 1965-74.
[38] C.L.M.H.Navier, *Sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, Ann. chimie phys., **19**(1822), 244-260.
[39] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu : 14/mai/1821.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227, 375-393.
[40] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu : 18/mar/1822.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x, 389-440.
[41] C.L.M.H.Navier, *Note relative à l'article intitulè : Mémoire sur les équilibre et le mouvement des Corps élastiques, page 337 du tome précédent*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 304-314.
[42] C.L.M.H.Navier, *Lettre de M.Navier à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 99-107. (This is followed by) *Note du Rédacteur*, 107-110.
[43] C.L.M.H.Navier, *Note relative à la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 249-253. (The title number : No.142.)
[44] I.Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London, 1687. (Latin)
[45] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355.
[46] S.D.Poisson, *Résponse à une Note de M.Navier insérée dans le dernier Cahier de ce Journal*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 435-440.
[47] S.D.Poisson, *Lettre de M.Poisson à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1828), 204-211.
[48] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j
[49] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équiblibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
[50] L.Prandtl, *Fundamentals of hydro-and aeromechanics*, McGrawhill, 1934. (Based on lectures of L.Prandtl (1929) by O.G.Tietjens, translated to English by L.Rosenhead. 1934.)
[51] Lord Rayleigh (William Strutt), *On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on the some allied acustical problems*, Royal Society of London, *Philosophical transactions*, also in Lord Rayleigh, *Scientific papers*, 1883, **2**, no.108, 239-257.
[52] B.Riemann, *Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien*, J. Reine Angew. Math., **55**(1857) 105–110.
[53] A.J.C.B.de Saint-Venant, *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenent simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens. (Extrait par l'auteur.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 942-954, 1020-1031.
[54] A.J.C.B.de Saint-Venant, *Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides. (Extrait.)*, Académie des Sciences, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances*, **17**(1843), 1240-1243. (Lu : 14/apr/1834.)
[55] A.J.C.B. de Saint-Venant, *Note complémentaire sur le problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'un solide ductile ou d'un liquide contenue dans un vase, pendant son écoulement par un orifice inférieur*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 278–282.
[56] H.Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, 6th ed., McGraw-Hill, 1968. (English version translated by J.Kestin) (The original title : *Grenzschicht-Theorie*, 1951 in German).
[57] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, 1849*, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, *Mathematical and physical papers* **1**, 1966, 75-129, Cambridge.
[58] G.G.Stokes, *Report on recent researches on hydrodynamics*, *Mathematical and physical papers* **1**, 1966, 157-187, Cambridge.
[59] W.Thomson, *On vortex motion*, Mathematical and physical papers (From the *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **25**(1869) 217–260, Read 29/apr/1867), Cambridge : at the univ press **6**(1910) 13–66.
[60] C.Truesdell, *Leonhardi Euleri Opera Omnia. The rational fluid mechanics. 1687-1765. Introduction to Leonhard Euleri Opera Omnia. Vol XII seriei secundae*, Auctoritate et impensis societatis scientiarum naturalium helveticae, **12** 1954.

ORBIT SHIFTED SHADOWING PROPERTY OF GENERALIZED LOZI MAPS

AKIO SAKURAI

Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University,
Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji, Tokyo 192-0397

1. Introduction

It is well known that pictures of strange attractors drawn by computer simulations are not necessarily similar to their actual figures. Indeed, rounding errors in computing are inevitable as long as we use existing computer machines with finite precision. So, we would like to know sufficient conditions which ensure that pseudo-orbits of a homeomorphism f can be traceable by actual orbits even if such errors are not inevitable. This property is called the *shadowing property* of f. According to Anosov [1] and Bowen [2], uniformly hyperbolic diffeomorphisms have the shadowing property. However, if we relax the uniform hyperbolicity condition on diffeomorphisms slightly, then many problems concerning the shadowing property are not solved yet.

In this paper, we study some shadowing property of certain piecewise hyperbolic maps introduced by Young [8], which are generalized from two-parameter families of planar maps presented by Lozi [6]:

$$L_{a,b}(x, y) = (1 - a|x| + y, bx).$$

Note that $L_{a,b}$ is not differentiable on the y-axis. In general, such a nonempty subset where a given map is not differentiable is called a *singularity set*.

Coven, Kan and Yorke [3] introduced the notion of the *parameter-shifted shadowing property* (for short *PSSP*). In fact, they proved that the tent maps $T_a(x) = 1 - a|x|$ have the parameter-fixed shadowing property for almost every sloop a in the open interval $I = (\sqrt{2}, 2)$, but do not have it for any a in a certain dense subset of I. Moreover, they proved that, for any $a \in I$, the tent map T_a has PSSP. Kiriki and Soma proved that certain Lozi maps and geometric Lorenz flows have PSSP in [4] and [5] respectively.

In this paper, we study a certain of shadowing property in which we shift some entries of pseudo-orbits by rule instead of shifting parameters of maps, called the *orbit-shifted shadowing property* (for short *OSSP*). See Definition 2.3. We will show that certain piecewise Lozi-like maps (called *generalized Lozi maps*) introduced by Young [8] have the OSSP. In [8], it is proved that such maps have attractors with SRB-measure.

2. Preliminaries

First we present the definition of generalized Lozi maps according to [8]. Let $R = [0,1] \times [0,1]$ and let $f : R \to R$ be a continuous injective map. Suppose that f (or some iterate of f) takes R into its interior.

Definition 2.1. A continuous injective map $f : R \to R$ of $R = [0,1] \times [0,1]$ is a *generalized Lozi map* if it satisfies the following conditions.

(L.1) There exist $0 < a_1 < \cdots < a_n < 1$ such that f is a C^1-diffeomorphism on $R \setminus \bigcup_{i=1}^n Y_i$, where $Y_i = \{a_i\} \times [0,1]$. From now on, we set $S = \bigcup_{i=1}^n Y_i$.

(L.2) The norm of the derivative Df of f is uniformly bounded on $R \setminus S$, i.e.

$$M_f = \sup \{ \|Df_{\mathbf{x}}\| \, ; \, \mathbf{x} \in R \setminus S \} < \infty,$$

where $\|Df_{\mathbf{x}}\| = \sup \{ \|Df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})\| \, ; \, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}(R), \|\mathbf{v}\| = 1 \}$.

(L.3) There exist constants $|\lambda^s| < 1 < |\lambda^u|$ and continuous cone-fields $C^s = \{C^s_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in R}$, $C^u = \{C^u_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in R}$ on R such that, for any $\mathbf{x} \in R \setminus S$ and any vectors $\mathbf{v} \in C^u_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{w} \in C^s_{f(\mathbf{x})}$,

- $Df_{\mathbf{x}}(C^u_{\mathbf{x}}) \subset C^u_{f(\mathbf{x})}$ and $\|Df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})\| \geq |\lambda^u| \|\mathbf{v}\|$.
- $Df^{-1}_{f(\mathbf{x})}(C^s_{f(\mathbf{x})}) \subset C^s_{\mathbf{x}}$ and $\|Df^{-1}_{f(\mathbf{x})}(\mathbf{w})\| \geq |(\lambda^s)^{-1}| \|\mathbf{w}\|$.

We say that C^s, C^u are *stable* and *unstable cone-fields* of f respectively.

Figure 2.1 illustrates the image $f(R)$ of R by a generalized Lozi map f.

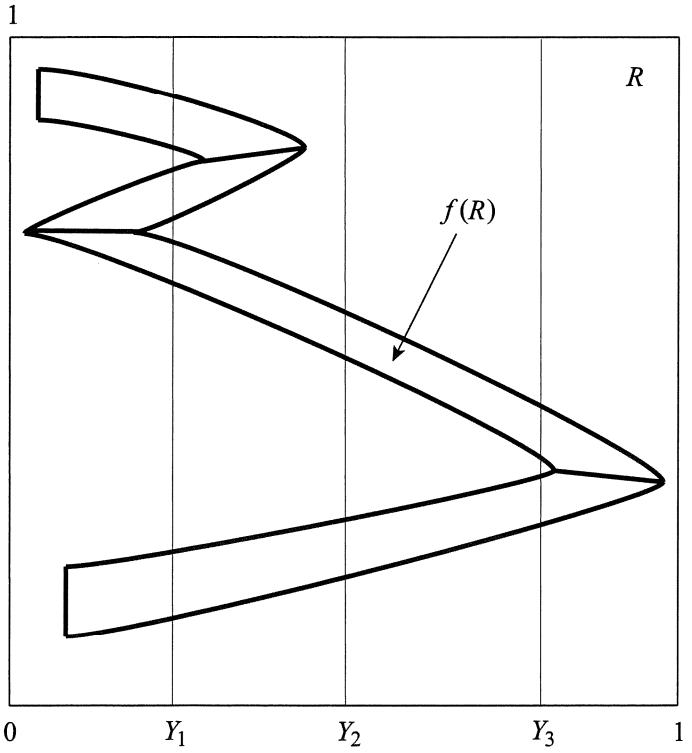


Figure 2.1

We consider generalized Lozi maps f satisfying the following extra conditions (2.1)–(2.4).

$$0 < \lambda^s \leq \frac{1}{8} \quad \text{and} \quad \lambda^u \geq \sqrt{3}. \tag{2.1}$$

$$(2.2) \qquad C^s_{\mathbf{x}} = \{(u,v) \in T_{\mathbf{x}}R; |v| \geq \alpha_1 |u|\},\ C^u_{\mathbf{x}} = \Big\{(u,v) \in T_{\mathbf{x}}R; |v| \leq \alpha_2 |u|\Big\},$$

where α_1, α_2 are constants with

$$(2.3) \qquad \alpha_1 \geq \sqrt{3}, \quad 0 < \alpha_2 \leq \frac{1}{144}.$$

$$(2.4) \qquad S \cap \big(f(S) \cup f^2(S)\big) = \emptyset.$$

An *unstable curve* l in R is a piecewise C^1-curve meeting S transversely at most one point and satisfying $T_{\mathbf{x}}l \subset C^u_{\mathbf{x}}$ for any smooth point $\mathbf{x}$ of l. For any component Y_i of S, consider an unstable curve l in R meeting Y_i at an interior point $a(l)$ of l and satisfying $f(l) \cap S = \emptyset$. Let $\varphi : l \to \mathbb{R}$ be the map defined by $\varphi(\mathbf{x}) = \pi \circ f^2(\mathbf{x})$ for any $\mathbf{x} \in l$, where $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is the orthogonal projection onto the x-axis, i.e. $\pi(x,y) = x$. Then we have the following three cases, see Figure 2.2.

(i) $a(l)$ is a unique maximal point of φ.
(ii) $a(l)$ is a unique minimal point of φ.
(iii) $\varphi(a(l))$ is an interior point of the interval $\varphi(l)$.

From the continuity of $Df_{\mathbf{x}}$ on $R \setminus S$, this property depends only on Y_i and is independent of the choice of an unstable curve l as above. The component Y_i of S is said to be of *type* 1 (resp. 2, 3) if φ satisfies the condition (i) (resp. (ii), (iii)). The union of components of S of type k is denoted by S_k for $k = 1, 2, 3$. We say

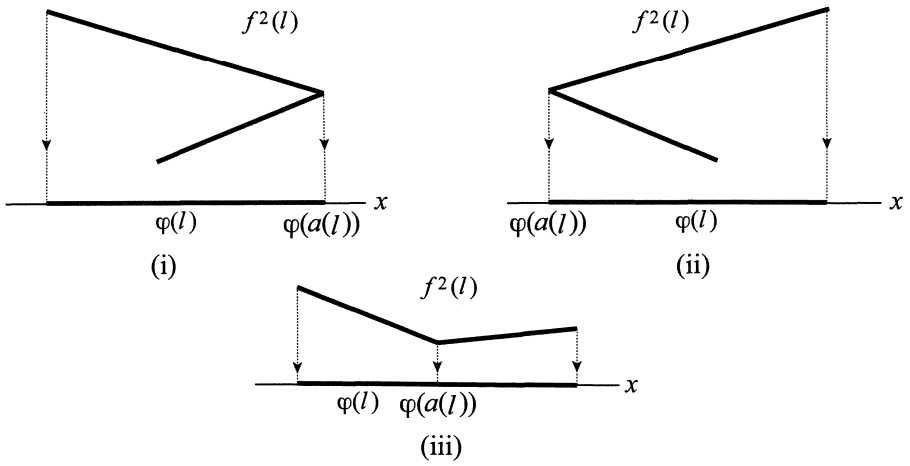


FIGURE 2.2

that the union $S_1 \cup S_2$ is the *essential singularity set* of f.

Definition 2.2. For $0 < \delta_0 << 1, \delta_1 > 0$ and $\delta > 0$, a sequence $\{\mathbf{x}_n\}_{n \geq 0}$ in R is an (δ_0, δ_1)-*shifted* δ-*pseudo-orbit* of f if, for any $n \geq 1$, $\mathbf{x}_n$ and $\mathbf{x}_{n+1}$ satisfy the following conditions.

(i) $\|f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_{n+1}\| \leq \delta$ if $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_{n-1}) \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$.
(ii) $\|f(\mathbf{x}_n) - (\delta_1, 0) - \mathbf{x}_{n+1}\| \leq \delta$ if $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_{n-1}) \cap S_1 \neq \emptyset$.
(iii) $\|f(\mathbf{x}_n) + (\delta_1, 0) - \mathbf{x}_{n+1}\| \leq \delta$ if $B_{\delta_0}(\mathbf{x}_{n-1}) \cap S_2 \neq \emptyset$.

Figure 2.3 illustrates an example of a (δ_0, δ_1)-shifted δ-pseudo-orbit of f in the case (ii).

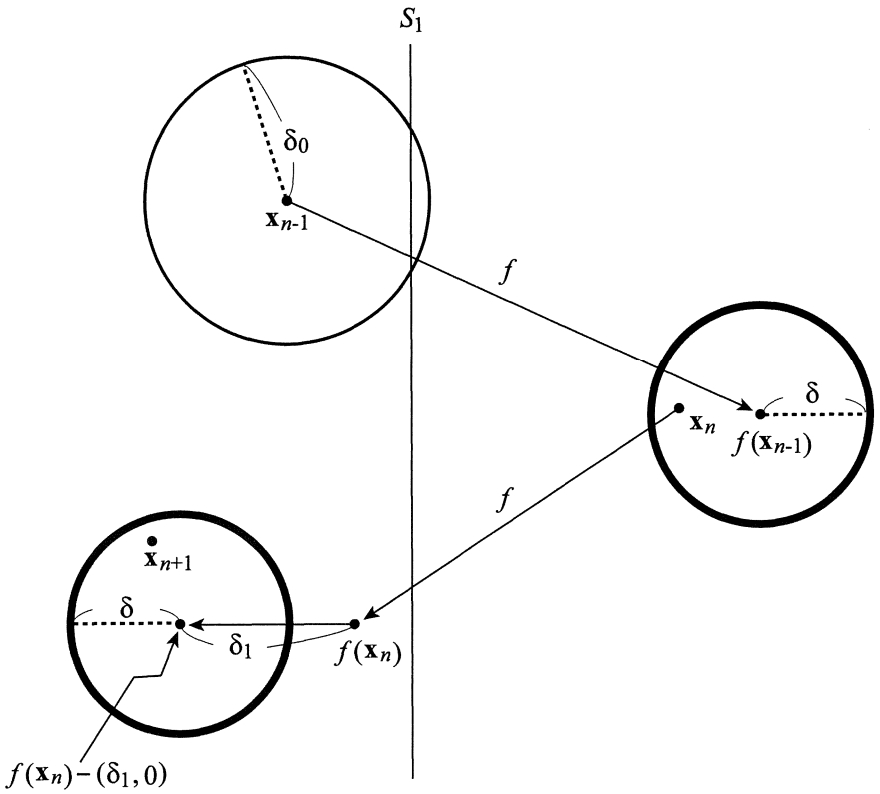


FIGURE 2.3

Definition 2.3. We say that f has the *orbit-shifted shadowing property* (for short *OSSP*) if, for any $0 < \varepsilon << 1$, there exist $\delta_0, \delta_1, \delta > 0$ such that any (δ_0, δ_1)-shifted δ-pseudo-orbit $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 0}$ in R of f can be ε-shadowed by an actual orbit of f, that is, there exists $\mathbf{z} \in R$ such that $\|f^n(\mathbf{z}) - \mathbf{x}_n\| \leq \varepsilon$ for any $n \geq 0$.

Recall that we fix an original map once and for all and use a certain of pseudo-orbit satisfying the condition in Definition 2.2 instead of shifting parameters of maps in PSSP.

Main Theorem (Sakurai [7]). *Any generalized Lozi map f satisfying the conditions* (2.1)–(2.4) *has the orbit-shifted shadowing property. More precisely, for any $0 < \varepsilon << 1$, there exists $\delta > 0$ such that any $(\varepsilon, \varepsilon/2)$-shifted δ-pseudo-orbit of f in R is ε-shadowed by an actual orbit.*

3. Outline of the proof

Let $\{\mathbf{x}_n\}_{n\geq 0}$ be an $(\varepsilon, \varepsilon/2)$-shifted δ-pseudo-orbit of f. The pair $(\mathbf{x}_n, l_n)$ of $\mathbf{x}_n$ and an unstable curve l_n in R is called *standard* if $|l_n| = \varepsilon$ and $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_n\| \leq a$, where $a = \varepsilon/36$ and $\mathbf{v}_n$ is the middle point of l_n, see Figure 3.1.

We need to consider the following two cases.

Case 1. A standard pair is away from the essential singularity set.

Lemma 3.1. *If $(\mathbf{x}_n, l_n)$ is a standard pair with $B_\varepsilon(\mathbf{x}_n) \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$, then there exists an unstable curve $l_{n+1} \subset f(l_n)$ such that $(\mathbf{x}_{n+1}, l_{n+1})$ is standard.*

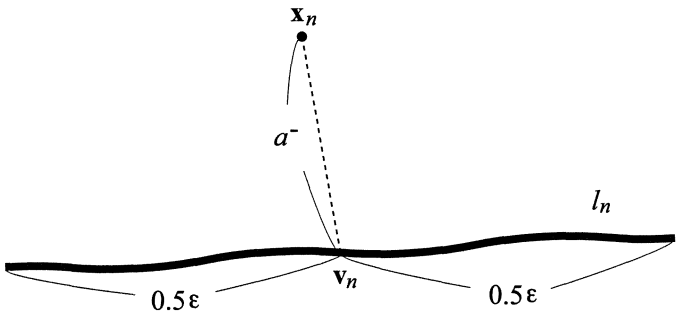


FIGURE 3.1. The notation 'a^-' means $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_n\| \leq a$.

Case 2. A standard pair is near the essential singularity set.

Then, differently from the situation in Case 1, we have no guarantee to obtain an unstable curve $l_{n+1} \subset f(l_n)$ such that $(\mathbf{x}_{n+1}, l_{n+1})$ is standard. However, the following lemma shows that one can get a standard pair before the $(\varepsilon, \varepsilon/2)$-shifted δ-pseudo-orbit revisits the ε-neighborhood of $S_1 \cup S_2$ again.

Lemma 3.2. *If $(\mathbf{x}_n, l_n)$ is a standard pair with $B_\varepsilon(\mathbf{x}_n) \cap (S_1 \cup S_2) \neq \emptyset$, then*

(i) *there exists an unstable curve l_{n+3} in $f^3(l_n)$ such that $(\mathbf{x}_{n+3}, l_{n+3})$ is standard, and*

(ii) $\|\mathbf{x}_{n+2} - \mathbf{z}\| < \varepsilon$ *for any* $\mathbf{z} \in l_{n+2}$.

Let $(\mathbf{x}_n, l_n)$ be a sequence of pairs obtained by Lemmas 3.1 and 3.2. Set the intersection $Z = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(l_n)$. Then, for any $\mathbf{z} \in Z$, $\{\mathbf{x}_n\}$ is ε-shadowed by the actual orbit $\{f^n(\mathbf{z})\}$.

REFERENCES

[1] D.V. Anosov, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature, *Proc. Steklov Math. Inst.* **90** (1967).

[2] R. Bowen, ω-limit sets for Axiom A diffeomorphisms, *J. Diff. Eq.* **18** (1975) 333-339.

[3] E.M. Coven, I. Kan and J.A. Yorke, Pseudo-orbit shadowing in the family of tent maps, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988) 227-241.

[4] S. Kiriki and T. Soma, Parameter-shifted shadowing property of Lozi maps, *Dyn. Syst.* **22** (2007), no. 3, 351–363.

[5] S. Kiriki and T. Soma, Parameter-shifted shadowing property for geometric Lorenz attractors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005) 1325–1339.

[6] R. Lozi, Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, *J. Physics (Paris)*, **39** (1978), 69–77.

[7] A. Sakurai, Orbit shifted shadowing property of generalized Lozi maps, *Taiwanese J. Math.* (to appear).

[8] L.-S. Young, A Bowen-Ruelle measure for certain piecewise hyperbolic maps, *Trans. Amer. Math. Soc.* **287** (1985) 41-48.

Some Properties of Time Operators

松澤　泰道
北海道大学大学院理学院

平成21年3月5日

1　初めに

時間作用素とは、Hilbert空間$\mathcal{H}$上の自己共役作用素Hと次の正準交換関係と呼ばれる関係式を満たす閉対称作用素Tのことである：

$$(TH - HT)x = ix, \qquad x \in \mathcal{D}$$

ただし、$\mathcal{D}$は零でない適当な部分空間である。量子力学的には、$\mathcal{H}$は系の状態空間であり、Hは系のエネルギーを表すハミルトニアンである。この時間作用素が無矛盾に定義できるかどうかは、物理学者の間で長年疑問視されてきた。それは、時間作用素が数学的に扱わなければならない対象だからである。本講演では、この時間作用素の構成法とその性質について紹介する。

2　弱Weyl関係式

$\mathcal{H}$を複素Hilbert空間、Hを$\mathcal{H}$上の自己共役作用素、Tを$\mathcal{H}$上の閉対称作用素とする。時間作用素として最も良く研究された類は、次の弱Weyl関係式を満たすものである[3]。

定義
*(T,H)*が弱Weyl関係式を満たすとは、作用素等式

$$e^{itH}Te^{-itH} = T + t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つときをいう。

(T, H)が弱Weyl関係式を満たせば、$\mathrm{dom}(TH) \cap \mathrm{dom}(HT)$上で正準交換関係を満たすことは直ちに判る。また、弱Weyl関係式を満たせば、Hは純粋に絶対連続であることも注意しておく。即ち、Hが固有値を持つ場合は弱Weyl関係式を通してでは時間作用素が構成できない。そのような場合は次節で扱う。弱Weyl関係式から導かれる性質は数多くあるが、ここでは触れず、次の時間作用素の構成法を示す定理を述べるに留める[2]。

定理

(Q,P) を $\mathcal{H}$ 上の弱 Weyl 関係式を満たす組、K を $\mathbb{R}$ の閉かつ測度零なる集合とする。このとき、$\mathbb{R}\backslash K$ 上の二回連続微分可能な実数値函数 f で、集合 $\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash K : f'(\lambda) = 0\}$ が測度零となるものに対し、

$$T := \frac{1}{2}\overline{f'(P)^{-1}Q + Qf'(P)^{-1}|_{\mathcal{D}}}$$
$$H := f(P)$$

と定めれば、*(T,H)* は弱 Weyl 関係式を満たす。ただし、

$$\mathcal{D} := \text{l.i.h.}\{g(P)x : g \in C_c^1(\mathbb{R}\backslash K), x \in \text{dom}(Q)\}$$

である。

3 Galapon 時間作用素

この節では、ハミルトニアンが固有値を持つような場合について、時間作用素を構成し、その性質を述べる [1]。改めて $\mathcal{H}$ を無限次元複素 Hilbert 空間、H を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で、次の条件 (H.1) 及び (H.2) を満たすものとする：

(H.1)　H は純粋に離散的なスペクトル $\sigma(H) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ を持ち、各固有値 E_n は単純で、$0 < E_n < E_{n+1}$ を満たす。

(H.2)　$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{E_n}^2} < \infty$$

条件 (H.1) から、$\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ で、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、$He_n = E_n e_n$ を満たすものが存在する。以下ではこのような完全正規直交系を任意に一つ固定する。このとき、各 $n \in \mathbb{N}$ と各 $x \in \mathcal{H}$ に対し、

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \left| \frac{\langle e_m, x\rangle}{E_n - E_m} \right| < \infty$$

が成り立つことが判る。従って、次の作用素 $T_{\max}$ が定義できる：

$$\text{dom}(T_{\max}) := \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\langle e_m, x\rangle}{E_n - E_m} \right|^2 < \infty \right\}$$

$$T_{\max}x := i\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\langle e_m, x\rangle}{E_n - E_m} e_n, \qquad x \in \text{dom}(\text{T}_{\max})$$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}(T_{\max})$ により、$T_{\max}$ は稠密に定義されているので、その共役作用素が存在する。そこで、作用素 T を $T := T_{\max}{}^*$ で定義し、これを Galapon 時間作用素と呼ぶ。T は閉対称作用素となる。Galapon 時間作用素 T が H と正準交換関係を満たすことを述べる前に、部分空間

$$\mathcal{D}_{\mathrm{c}} := \mathrm{l.i.h.}\{e_n - e_m : n, m \in \mathbb{N}\}$$

が $\mathcal{H}$ で稠密であることを注意しておく。

定理

包含関係

$$\mathcal{D}_{\mathrm{c}} \subset \mathrm{dom}(TH) \cap \mathrm{dom}(HT)$$

と正準交換関係

$$(TH - HT)x = ix, \qquad x \in \mathcal{D}_{\mathrm{c}}$$

が成り立つ。

T のスペクトルに関しては次の命題が成り立つ。

命題

T が自己共役であれば、T のスペクトルは原点に関して対称な $\mathbb{R}$ の閉部分集合である。T が自己共役でなければ、T のスペクトルは $\mathbb{C}$ 全体である。

T の有界性に関しては次の定理が成り立つ。

定理

ある定数 $\alpha > 1$、$C > 0$、$a > 0$ が存在し、

$$E_n - E_m \geq C(n^{\alpha} - m^{\alpha}), \qquad n > m > a$$

を満たすとする。このとき、T は有界である。

上の定理における $\alpha = 1$ に相当するものとして、次の定理がある。

定理

ある定数 $\lambda > 0$、$\mu \in \mathbb{R}$、$a > 0$ が存在し、

$$E_n = \lambda n + \mu, \qquad n > a$$

を満たすとする。このとき、T は有界である。

完全連続性に関しては次の通りである。

命題

ある定数 $\alpha > \frac{3}{2}$、$C > 0$、$a > 0$ が存在し、

$$E_n - E_m \geq C(n^{\alpha} - m^{\alpha}), \qquad n > m > a$$

を満たすとする。このとき、T は Hilbert-Schmidt 類である。

即ち、T も H も離散的なスペクトルを持つような正準共役な組が存在する。

参考文献

[1] A. Arai and Y. Matsuzawa, Time Operators of a Hamiltonian with Purely Discrete Spectrum, *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), 951-978

[2] F. Hiroshima, S. Kuribayashi and Y. Matsuzawa, Strong Time Operators Associated with Generalized Hamiltonians, *Lett. Math. Phys.* (to appear)

[3] M. Miyamoto, A generalized Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability, *J. Math. Phys.* **42** (2001), 1038–1052.

On the symmetry of the ground states of nonlinear Schrödinger equation with potential

Masaya Maeda
Graduate school of science, Kyoto university
maeda@math.kyoto-u.ac.jp

Here we consider the following nonlinear Schödinger equation (NLS) with potential and inhomogeneous nonlinearity:

$$iu_t = -\Delta u + Vu - b|u|^p u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+N},$$

where $V, b \in C^2(\mathbb{R}^N)$ and $p \in (1, 1+4/N)$.

(NLS) formally (and really with appropriate assumptions for V, b) conserves the following quantities:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^{p+1} \\ Q(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2\,dx \end{aligned}$$

(NLS) appears in Bose Einstein condensation and nonlinear optics. In the context of Bose Einstein condensation, the ground states are considered to describe the physical properties of Bose gas at low temperature.

One typical solution of (NLS) is a standing wave, which is a solution with the form $u(t,x) = e^{i\omega t}\phi_\omega$. Here ϕ_ω satisfies the following stationary problem (SP):

$$-\Delta\phi_\omega + (V+\omega)\phi_\omega - b|\phi_\omega|^{p-1}\phi_\omega = 0.$$

By the Lagrange multiplier method, the minimizer of $\mathcal{E}$, under the constraint of Q to be constant, satisfies the above equation. We call this standing wave, the ground state.

Definition 1. *Set*

$$\mathcal{G}_\alpha := \left\{ u \in H^1_V \;\middle|\; \|u\|_{L^2} = \alpha,\ \mathcal{E}(u) = E_\alpha \right\},$$

where

$$E_\alpha := \inf\{\mathcal{E}(u) \mid u \in H^1_V, \|u\|_{L^2} = \alpha\}.$$

We call the elements of $\mathcal{G}_\alpha$, the ground states, which are the minimizers of $\mathcal{E}$ under the constraint $\|u\|_{L^2} = \alpha$.

We mainly consider here the relation of symmetry between V, f and the ground states. For example, if V and f are radially symmetric, then are the ground states radially symmetric? In the case $f(x, |u|) = |u|^{p-1}$ and $V(x) \equiv 0$, all the positive solutions of (SP) are radially symmetric ([2]). Since the ground states are positive (if multiplied by some $e^{i\theta}$), in this case we have an affirmative answer to our question.

However we show that in general, for large $\alpha > 0$, the ground state do not inherit the symmetry of V and f.

We assume for V, b the following:

(V1) $0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < \lim_{|x|\to\infty} V(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) \le \infty$.

(V2) For a constant C, $|\nabla V| \le C(1 + V)$.

(V3) For all multi-index $|\alpha| \le 2$, $|\partial^\alpha V|$ has at most polynomial growth.

(b1) $0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} b(x) = \lim_{|x|\to\infty} b(x) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^N} b(x) = 1$.

(b2) For all multi-index $|\alpha| \le 2$, $|\partial^\alpha b|$ has at most polynomial growth.

Under this assumption, we can show that ground states exists.

Proposition 1. *Assume* (V1), (b1). *Then for all $\alpha > 0$, $\mathcal{G}_\alpha \neq \emptyset$.*

We consider the case $\alpha > 0$ is very large. For the Hartree type nonlinearity case Aschbacher et al. [1] investigate that the ground state concentrates its L^2-norm at the minimum point of V. We show stronger concentration for our case and use this result to show the symmetry breaking.

Theorem 1. (i) *For sufficiently large $\alpha > 0$, every ground state $u \in \mathcal{G}_\alpha$ has only one local maximum $y_{\alpha,u}$ (which is a global maximum). Further, we have*

$$|u(x)| \le C_1 \alpha^{\frac{4}{4-N(p-1)}} \exp\left(-C_2 \alpha^{\frac{2(p-1)}{4-N(p-1)}} |x - y_{\alpha,u}|\right),$$

where C_1 and C_2 are positive constants independent of α. In particular, we have the concentration in higher Sobolev norms. That is, for any $\varepsilon > 0$ there exists an $\alpha_0 > 0$ such that for all $\alpha \ge \alpha_0$ and all $u \in \mathcal{G}_\alpha$,

$$\int_{|x-y_\alpha|>\varepsilon} \left(|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2\right) dx < \varepsilon.$$

(ii) *Then, as* $\alpha \to \infty$ *the unique local maximum* $y_{\alpha,u}$ *converges to* Θ_b *(or* Θ_V*, when* $b \equiv 1$*), where*

$$\Theta_b := \left\{ x \in b^{-1}(\{1\}) \;\middle|\; \Delta b(x) = \max_{y \in b^{-1}(\{1\})} \Delta b(y) \right\},$$

$$\Theta_V := \left\{ x \in V^{-1}(\{0\}) \;\middle|\; \Delta V(x) = \min_{y \in V^{-1}(\{0\})} \Delta V(y) \right\}.$$

We immediately have the symmetry breaking result.

Corollary 1. *Let* V*,* b *be radially symmetric. Then if* $0 \notin \Theta_b$ *or if* $b \equiv 1$ *and* $0 \notin \Theta_V$*, the ground states are not radially symmetric for sufficiently large* $\alpha > 0$*.*

So, we have the symmetry breaking result. However it remains the question that if the ground states concentrates at the origine, then is it symmetric? Modifying the result of Grossi [3], we can show the symmetry for this case.

Theorem 2. *Let* b, V *radially symmetic. Further assume that* 0 *is a nondegenerate maximum point of* b*, or* $b \equiv 1$ *and* 0 *is a nondegenerate minimum point of* V*. Suppose that for sufficiently large* α*, there exists an* $u_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$ *such that* $y_{\alpha,u_\alpha} \to 0$ *as* $\alpha \to \infty$*, where* $y_{\alpha,u}$ *is the unique local maximum point of* u *given in Theorem 1. Then,* u_α *is radially symmetric for sufficiently large* α*.*

References

[1] W. H. Aschbacher, J. Fröhlich, G. M. Graf, K. Schnee, and M. Troyer, *Symmetry breaking regime in the nonlinear Hartree equation*, J. Math. Phys. **43** (2002), no. 8, 3879–3891. MR MR1915631 (2004c:81070)

[2] B. Gidas, Wei Ming Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbf{R}^n$, Mathematical analysis and applications, Part A, Adv. in Math. Suppl. Stud., vol. 7, Academic Press, New York, 1981, pp. 369–402. MR MR634248 (84a:35083)

[3] Massimo Grossi, *On the number of single-peak solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **19** (2002), no. 3, 261–280. MR MR1956951 (2003k:35228)

Homotopy classification of nanophrases and its application

福永 知則
北海道大学大学院理学院数学専攻 D1

1 序文

この講演では, nanophrase の homotopy による分類に関して話をする. V.Turaev は 論文 [8] において nanophrase と呼ばれる, Gauss phrase を一般化したものを考え, nanophrase 上に homotopy と呼ばれる同値関係を定義した. これは結び目理論の Reidemeister move に相当するような同値関係である. ここでは, 講演者が定義したいくつかの nanophrase の homotopy 不変量などを用いて文字数が 4 以下の nanophrase の homotopy による分類結果を紹介する. また, その結果の系として, 最小交点数が 2 以下の曲面上の順序, 向き, 基点付きの多成分曲線の stable equivalence による分類が得られるので, その結果についても述べたいと思う. なお, 本講演の内容についてのより詳細なことについては, プレプリント [1], [2] 及び [3] を参照してほしい. 但し, 北大プレプリントシリーズのものはバージョンが古いので, 出版前のものに関しては, 興味のある方は講演者に直接メールなどで請求することを薦める. また, この研究集会における伊藤昇氏による講演も, 本講演の内容と関連が強いので, ぜひ伊藤昇氏の講演及びアブストラクトも参照してほしい [6].

2 nanoword, nanophrase とその homotopy

この section では, 論文 [7], [8] において, Turaev によって導入された nanoword 及び nanophrase について述べる. 詳しいことは, [7], [8] 及び [9] を参照してほしい.

本講演では, *alphabet* とは有限集合のこととし, その元を letter と呼ぶことにする. alphabet $\mathcal{A}$ 上の長さが k の *word* とは, 写像 $w : \{1, 2, \cdots, k\} \to \mathcal{A}$ の事とする（これを $w(1)w(2)\cdots w(k)$ と記す）.

以下では α を involution $\tau : \alpha \to \alpha$ 付きの alphabet とする. alphabet α に対して α - *alphabet* とは, alphabet $\mathcal{A}$ と map $|\cdot| : \mathcal{A} \to \alpha$ の組 $(\mathcal{A}, |\cdot|)$ のことである.

定義 2.1. α 上の長さ n の *nanoword* とは α-alphabet $\mathcal{A}$ と, $\mathcal{A}$ 上の word $w : \{1, 2, \cdots, n\} \to \mathcal{A}$ で $\mathcal{A}$ の letter がもれなく 2 回現れるものの組 $(\mathcal{A}, w)$ のことである. また α 上の長さ k の nanophrase とは, α-alphabet $\mathcal{A}$ と k 個の word $(w_1|w_2|\ldots|w_k)$ の組で, $(\mathcal{A}, w_1w_2\cdots w_k)$ が nanoword となるもののことである.

Turaev は, 論文 [7], [8] において, 結び目理論における Reidemeister move のアナロジーで, nanoword 及び nanophrase に対して, homotopy と呼ばれる同値関係を導入した. homotopy を定義する為に, まずは isomorhic と, homotopy move を定義する.

定義 2.2. 2 つの α 上の nanophrase $(\mathcal{A}_1, (w_1|w_2|\cdots|w_k))$ と $(\mathcal{A}_2, (v_1|v_2|\cdots|v_k))$ が *isomorphic* であるとは, 全単射 $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ で, $|A| = |f(A)|$ for all $A \in \mathcal{A}_1$ かつ $f \circ w_j = v_j$ for all $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ をみたすものが存在することである. また, この全単射 f を, isomorphism と呼ぶ.

定義 2.3. α 上の nanophrase の homotopy move (1) - (3) とは, 次のような nanophrase の変形のことである: (1) $(\mathcal{A}, (xAAy))$ を $(\mathcal{A} \setminus \{A\}, (xy))$ に置き換える.
(2) $|A| = \tau(|B|)$ をみたすとき $(\mathcal{A}, (xAByBAz))$ を $(\mathcal{A} \setminus \{A, B\}, (xyz))$ に置き換える.
(3) $|A| = |B| = |C|$ をみたすとき $(\mathcal{A}, (xAByACzBCt))$ を $(\mathcal{A}, (xBAyCAzCBt))$ に置き換える.
ここで, x, y, z, t はそれぞれ $\mathcal{A}$ 上の word で, 記号 | が含まれていてもよいものとする.

以上の準備のもと, homotopic という同値関係の定義をする.

定義 2.4. 2 つの α 上の nanophrase $(\mathcal{A}_1, (w_1|w_2|\cdots|w_k))$ と $(\mathcal{A}_2, (v_1|v_2|\cdots|v_k))$ が *homotopic* であるとは, 有限回の isomorphism と homotopy move 及びその逆 move によって, 互いに移りあえるときのことをいう.

Turaev は 論文 [7] において, letter の数が 6 以下の nanoword の分類を行った. ここでは, 本講演と関係する letter の数が 4 以下の nanoword の分類のみ紹介する.

定理 2.5 (Turaev [7]). w を α 上の *letter* の数が *4* 以下の *nanoword* とする. このとき w は $\emptyset$ と *homotopic* であるか, または $w_{a,b} := (\mathcal{A} = \{A, B\}, ABAB)$ で $|A| = a, |B| = b \in \alpha$ かつ $a \neq \tau(b)$ の形の *nanoword* と *isomrphic* である. さらに $a \neq \tau(b)$, のとき *nanoword* $w_{a,b}$ は $\emptyset$ と *homotopic* でなく, かつ *nanoword* $w_{a,b}$ と $w_{a',b'}$ が *homotopic* であるための必要十分条件は, $a = a'$ かつ $b = b'$ が成り立つことである.

本講演では, この結果及び著者の定義した nanophrase の不変量を用いて, letter の数が 4 以下の nanophrase の homotopy による分類を, 任意の長さの nanophrase に対して行う.

3 nanophrase の homotopy 不変量

nanophrase の homotopy 不変量について書いてある文献は, [1], [2], [3], [4], [5] 及び [8] などがあるが, ここではそのなかの一部を紹介したいと思う.

定義 3.1 ([5], [2]). nanophrase $(\mathcal{A}, (w_1|w_2|\cdots|w_k))$ に対して $w(l)$ ($l \in \{1, \cdots, k\}$) を $w(l) = (\text{length of } w_l) \bmod 2$ で定義する. さらに, $(w(1), w(2), \cdots, w(k)) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ を考え, これを *component length vector* と呼ぶ.

命題 3.2 ([5], [2]). *component length vector* は *nanophrase* の *homotopy* 不変量.

次に, Turaev が論文 [7] で定義した nanoword の homotopy 不変量 γ の, nanophrase への拡張について述べる.

群 $\Pi(\alpha, \tau)$ を $\Pi(\alpha, \tau) := (\{z_a\}_{a \in \alpha} | z_a z_{\tau(a)} = 1 \ for\ all\ a \in \alpha)$ とおく. 混乱の恐れのない場合は, $\Pi(\alpha, \tau)$ を単に Π と書くことにする.

定義 3.3 ([1]). α 上の nanophrase $P = (w_1|w_2|\cdots|w_k)$ を考える. n_i を w_i の長さとし, $n = \sum_{1 \leq i \leq k} n_i$ とおく. このとき, n 個の Π の元 γ_1^i, γ_2^i, $\cdots$, $\gamma_{n_i}^i$ ($i \in \{1, \cdots, k\}$) を次のように定義する. もし $w_j(i) \neq w_l(m)$ for all $l < j$ and for all $m < i$ when $l = j$ ならば, $\gamma_i^j := z_{|w_j(i)|}$. それ以外のときは $\gamma_i^j := z_{\tau(|w_j(i)|)}$. そして $\gamma(P) \in \Pi^k$ を次で定義する.

$$\gamma(P) := (\gamma_1^1 \gamma_2^1 \cdots \gamma_{n_1}^1, \gamma_1^2 \gamma_2^2 \cdots \gamma_{n_2}^2, \cdots, \gamma_1^k \gamma_2^k \cdots \gamma_{n_k}^k).$$

.

命題 3.4 ([1]). γ は *nanophrase* の *homotopy* 不変量.

次に nanophrase の homotopy 不変量 T を定義する.

まずいくつかの記号を用意する. α の τ による軌道分解を考える.

$\alpha/\tau = \{\widetilde{a_{i_1}}, \widetilde{a_{i_2}}, \cdots, \widetilde{a_{i_l}}, \widetilde{a_{i_{l+1}}}, \cdots, \widetilde{a_{i_{l+m}}}\}$ とおく, ここで $\widetilde{a_{i_j}} := \{a_{i_j}, \tau(a_{i_j})\}$ であり $Card(\widetilde{a_{i_j}}) = 2$ for all $j \in \{1, \cdots, l\}$ かつ $Card(\widetilde{a_{i_j}}) = 1$ for all $j \in \{l+1, \cdots, l+m\}$ とする (このような条件をみたす完全代表系 $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_l}, a_{i_{l+1}}, \cdots, a_{i_{l+m}}\}$ をひとつ固定する). $\mathcal{A}$ を α-alphabet とする. $A \in \mathcal{A}$ に対して $\varepsilon(A) \in \{\pm 1\}$ を次で定義する.

$$\varepsilon(A) := \begin{cases} 1 \ (\ if\ |A| = a_{i_j}\ for\ some\ j \in \{1, \cdots l+m\}\ ), \\ -1 \ (\ if\ |A| = \tau(a_{i_j})\ for\ some\ j \in \{1, \cdots l\}\ ). \end{cases}$$

次に $P = (\mathcal{A}, (w_1|\cdots|w_k))$ を α 上の nanophrase とし A, $B \in \mathcal{A}$ とする. このとき $\sigma_P(A, B) \in \mathbb{Z}^l \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ を次で定義する: A と B が P のなかで $\cdots A \cdots B \cdots A \cdots B \cdots$ という配置でありかつ $|B| = a_{i_j}$ for some $j \in \{1, \cdots l+m\}$, または $\cdots B \cdots A \cdots B \cdots A \cdots$ という配置でありかつ $|B| = \tau(a_{i_j})$ for some $j \in \{1, \cdots l+m\}$ のとき $\sigma_P(A, B) := (0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0)$. P のなかで $\cdots A \cdots B \cdots A \cdots B \cdots$ という配置でありかつ $|B| = \tau(a_{i_j})$, または $\cdots B \cdots A \cdots B \cdots A \cdots$ という配置でありかつ $|B| = a_{i_j}$ のとき $\sigma_P(A, B) := (0, \cdots, 0, \overset{j}{-1}, 0, \cdots, 0)$. 他の場合は $\sigma_P(A, B) := (0, \cdots, 0)$. 以上の準備のもと, T を次のように定義する.

定義 3.5 ([2]). $P = (\mathcal{A}, (w_1|w_2|\cdots|w_k))$ を α 上の nanophrase とする. $A \in \mathcal{A}$ で, $Card(w_i^{-1}(A)) = 2$ となる $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ が存在するものに対して , $T_P(A) \in \mathbb{Z}^l \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ を

$$T_P(A) := \varepsilon(A) \sum_{B \in \mathcal{A}} \sigma_P(A, B)$$

で定義する. さらに $T_P(w_i) \in \mathbb{Z}^l \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ を

$$T_P(w_i) := \sum_{A \in \mathcal{A},\ Card(w_i^{-1}(A)) = 2} T_P(A)$$

で定義する. そして $T(P) \in (\mathbb{Z}^l \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m)^k$ を

$$T(P) := (T_P(w_1), T_P(w_2), \cdots, T_P(w_k))$$

で定義する

命題 3.6 ([2] see also [1]). T は *nanophrase* の *homotopy* 不変量

これらの不変量及び [2] で定義されてる不変量と, nanophrase に関するいくつかの考察により, letter の数 が 4 以下の nanophrase の分類ができる.

4 letter の数が 4 以下の nanophrase の分類

最初に, letter の数が 2 以下の nanophrase の分類結果を述べる. $P_a^{1,1;l_1,l_2} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\overset{l_1}{A}|\emptyset|\cdots|\emptyset|\overset{l_2}{A}|\emptyset|\cdots|\emptyset)$ with $|A| = a$ for $1 \leq l_1 < l_2 \leq k$ とおく.

定理 4.1 ([2]). P を長さ k で *letter* の数が 2 以下の *nanophrase* とする．このとき P は $(\emptyset|\cdots|\emptyset)$ に *homotopic* かまたは $P_a^{1,1;l_1,l_2}$ *for some* $l_1, l_2 \in \{1, \cdots k\}$, $a \in \alpha$ に *isomorphic* のいずれかである．さらに, $P_a^{1,1;l_1,l_2}$ と $P_{a'}^{1,1;l_1',l_2'}$ が *homotopic* であるための必要十分条件は $l_1 = l_1'$, $l_2 = l_2'$ かつ $a = a'$ が成り立つことである．

次に letter の数が 4 以下の nanophrase 分類定理を述べるために、いくつかの記号を準備する．

$P_{a,b}^{4;l} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ A\overset{l}{\check{B}}AB\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{3,1;l_1,l_2} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ A\overset{l_1}{\check{B}}A\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{2,2I;l_1,l_2} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}B\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{A}}B\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{2,2II;l_1,l_2} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}B\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ B\overset{l_2}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,3;l_1,l_2} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ B\overset{l_2}{\check{A}}B\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{2,1,1I;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ A\overset{l_1}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{2,1,1II;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ B\overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,2,1I;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{A}}B\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,2,1II;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ B\overset{l_2}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,1,2I;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ A\overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,1,2II;l_1,l_2,l_3} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ B\overset{l_3}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,1,1,1I;l_1,l_2,l_3,l_4} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_4}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,1,1,1II;l_1,l_2,l_3,l_4} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_4}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

$P_{a,b}^{1,1,1,1III;l_1,l_2,l_3,l_4} := (\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_1}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_2}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_3}{\check{B}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset|\ \overset{l_4}{\check{A}}\ |\emptyset|\cdots|\emptyset),$

with $|A| = a$, $|B| = b$. ただし, もし $a = \tau(b)$ ならば, $P_{a,b}^{4;l}$, $P_{a,b}^{2,2I;l_1,l_2}$ 及び $P_{a,b}^{2,2II;l_1,l_2}$ は $(\emptyset|\cdots|\emptyset)$ と homotopic になることが容易にわかる．そこで, $P_{a,b}^{4;l}$, $P_{a,b}^{2,2I;l_1,l_2}$, $P_{a,b}^{2,2II;l_1,l_2}$ と書いたときは, 常に $a \neq \tau(b)$ を仮定することにする．

以上の準備のもと, 今回の主定理である, letter の数が 4 以下の nanophrase の分類結果について述べる．

定理 4.2 ([2]). P を長さ k で *letter* の数が 4 以下の *nanophrase* とする．このとき P は *letter* の数が 2 以下の *nanophrase* に *homotopic* かまたは $P_{a,b}^{X;Y}$ *for some* $X \in \{4, (3,1), \cdots, (1,1,1,1III)\}$, $Y \in \{1, \cdots, k, (1,2), \cdots, (k-3, k-2, k-1, k)\}$ に *isomorphic* のいずれかである．さらに $P_{a,b}^{X;Y}$ と $P_{a',b'}^{X';Y'}$ が *homotopic* であるための必要十分条件は $X = X'$, $Y = Y'$, $a = a'$ かつ $b = b'$ が成り立つことである．

5 曲面上の曲線のトポロジーへの応用

この section では, これまでの結果を曲面上の曲線論へ応用した結果の一例を述べる．曲線の stable equivalence に関する用語などは [2], [8] などを参照してほしい．

V. Turaev は論文 [8] において, $\alpha_0 = \{a, b\}$ と involution $\tau : a \mapsto b$ 上の長さ k の nanophrase の homotopy 類は, 曲面上の k 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の stable equivalence 類と 1 対 1 に対応することを示した. したがって, 上記の nanophrase の分類結果を α_0 に適用すると, 次の結果を得ることができる.

系 5.1 ([1]). 最小交点数が 2 以下の曲面上の *2* 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の *stable equvalence* 類は 19 個ある.

系 5.2 ([3]). 最小交点数が 2 以下の曲面上の *3* 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の *stable equvalence* 類は 73 個ある.

系 5.3 ([3]). 最小交点数が 2 以下の曲面上の *4* 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の *stable equvalence* 類は 201 個ある.

より一般に、次の系を示すことができる.

系 5.4 ([3]). k を正の整数とする. このとき最小交点数が 2 以下の曲面上の k 成分の基点, 順序, 向き付き曲線の *stable equvalence* 類は $1 + \frac{1}{2}k^2 + k^3 + \frac{1}{2}k^4$ 個

他の応用結果については, 例えば [2] を参照してほしい.

参考文献

[1] T. Fukunaga, *Homotopy classification of nanophrases in Turaev's theory of words*, to appear in Journal of Knot Theory and Its Ramifications.

[2] T. Fukunaga, *Homotopy classification of nanophrases with less than of equal to four letters* , preprint.

[3] T. Fukunaga, *Topology of curves via theory of words and phrases*, preprint.

[4] T. Fukunaga and N. Ito, *Khovanov homology and words*, arXiv:0901.3956.

[5] A. Gibson, *Homotopy invariants of Gauss phrases*, arXiv:0810.4389.

[6] N. Ito, *Finite-type invariants for curves, categorification of Jonse polynomial with $Z/2Z$ coefficients for knot, and word theory*, in this volume.

[7] V. Turaev, *Topology of words*, Proceedings of the London Mathematical Society **95** (2007), no.2 360-417.

[8] V. Turaev, *Knots and words*, International Mathematics Research Notices (2006), Art. ID 84098, 23 pp.

[9] V. Turaev, *Lectures on topology of words*, Japanese Journal of Mathematics **2** (2007), 1-39.

オプションの戦略的な価格付け: Black-Sholes 方程式の周辺
(The Strategic Pricing of Options)

吉川　満[1)]

概要

This paper is about mathematical finance, option pricing. This study gives an example as an extension (extended Black-Sholes equation) : pays attention to a correlation among the stocks. On the other hand, this study constructs a game-theoretic model that the stock price based on the player's strategic action. This study considers the relations between extended Black-Sholes equation and this model.

1　はじめに

株価の変動が幾何ブラウン運動していると仮定すると, 伊藤の補題を用いることによって, 2 階の偏微分方程式が導出される. この偏微分方程式にポートフォリオを用いて考え, 式変形を行うと, 熱方程式 (heat equation) が導出される. ある境界条件の下で, この偏微分方程式を解くと, Black-Sholes の公式と呼ばれるコール・オプションの公式が導出される.[2)]

では単なる熱方程式ではなく, 熱源のある熱方程式の場合どのようなことがいえるのであろうか. このときは非線形偏微分方程式の問題を解くことになり, 相互作用を持つ拡散方程式, 反応拡散方程式と解釈することができ, この反応拡散系の研究の方向で Black-Sholes モデルを拡張する.

上述の事項は連続時間のモデルであった. 離散時間のモデルである 2 項モデル (Cox, Ross and Rubinstein [2]) においては, 時間ステップを極限的に小さく取ることによって, Black-Sholes の公式が導出されることが知られている. そこでこの 2 項モデルをゲーム理論の文脈で変形し, その極限と非線形偏微分方程式から導出される結論を比較する. また一致する場合どのような場合かを考察する. この研究を通して, Black-Sholes モデルにおけるミクロ的基礎付けを与える.

本稿ではまず Black-Sholes の公式の最も基本的な事項をまとめ, 次に Black-Sholes モデルに主体の行動, ミクロ的基礎付けを与えることにより, 既存の研究の展開とは少し異なる, 新たな研究の展開を行うための最も基本的なモデルを構築する.

本稿は次のように構成されている. § 2 では Black-Sholes 方程式とその周辺をまとめる. § 3 では, Black-Sholes モデルを反応拡散系のモデルとして, 取り扱う. § 4 では, Black-Sholes モデルやそれを拡張したモデルを説明するゲーム理論のモデルを構築する. § 5 では, まとめと将来の研究について言及する.

2　Black-Sholes 方程式

ここでは無裁定理論を用いた Black-Sholes の公式の導出法を紹介する.

2.1　連続時間モデル

連続時間モデルでは Black and Sholes [1] に従い, コール・オプションの公式を導出する.

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられているとする. Ω は根元事象の集まりで, $\mathcal{F}$ は σ-加法族, P は確率測度である. 以下確率変数や確率過程はすべて Ω 上で定義されている $\mathcal{F}$-可測関数のことである. X を確率変数とするとき $X(\omega)$ と変数 $\omega \in \Omega$ と書くべきであるが, 慣習に従い省略する.

ここで 1 つの危険資産と 1 つの安全資産からなる市場を考える. 特に危険資産の株価 S が幾何ブラウン運動に従っているとする.

(2.1)　$$dS(t) = \mu S(t) \cdot dt + \sigma S(t) \cdot dZ(t),$$

ただし μ:期待収益率, σ:株価ボラティリティ, $Z(t) := Z(t, \omega)$, $(\omega \in \Omega)$, ブラウン運動とする.

[1)] 関西学院大学大学院経済学研究科 大学院研究員
Email:　mitsurukikkawa@hotmail.co.jp,　URL: http://kikkawa.cyber-ninja.jp/index.htm

[2)] **オプション**(option) はある条件の下で特定の期間内に資産を買う, あるいは売る権利を与える有価証券である. 特に**アメリカンオプション**はオプション行使期日前ならいつでも行使できるオプションである. **ヨーロピアンオプション**は指定された将来の定められた日にしか行使できないオプションである. また**アジアンオプション**は原資産価格過程の算術平均に基づくオプションである. またこれら以外にも多数のオプションが開発されている.

補題 1.(伊藤) x を伊藤過程で $dx(t)=a(x,t)dt+b(x,t)dZ(t)$ とし, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を 2 回連続可微分な関数であるとする. このとき, $Y(t)=f(x(t),t)$ によって定義される過程 Y もまた伊藤過程となり,

$$dY(t)=\Big(\frac{\partial F}{\partial x}a+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\Big)dt+\frac{\partial F}{\partial x}bdZ(t). \quad \text{———}$$

よってこの補題から株価 S による派生証券の価格 $f(S,t)$ の微分 df は次に従うことが分かる.

$$df=\Big\{\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\mu S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2S^2\Big\}dt+\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\sigma S\cdot dZ. \tag{2.2}$$

定義 2. ポートフォリオとは いくつかの株式, 債権, 通貨などの資産 $W_1,W_2,\cdots W_p$ の組み合わせのことをいう.

時点 t における資産の価格, 保有する資産の単位数をそれぞれ $W_i(t),n_i(t),i=1,\cdots,p$ とする. このときポートフォリオの価値 $W(t)$ は次を得る.

$$W(t)=n_1(t)W_1(t)+n_2(t)W_2(t)+\cdots+n_p(t)W_p(t). \quad \text{———} \tag{2.3}$$

ここで株価 S の株式を $\dfrac{\partial f}{\partial S}$ 単位買い, 価格 $f(S,t)$ の派生証券を 1 単位売るとする. このときのポートフォリオの価値は次を得る.

$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S-f(S,t). \tag{2.4}$$

(2.1), (2.4) を (2.2) に代入し, 整理すると, 次を得る.

$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\Delta S-\Delta f=\Big\{-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2S^2\Big\}\cdot\Delta t. \tag{2.5}$$

仮定 3. 裁定機会 (arbitrage possibility) は存在しない. ———

ここで仮定から無裁定条件が満たされているので, 安全資産の利子率を r とすると, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\Delta S-\Delta f=r\cdot\Big(\frac{\partial f}{\partial S}-f(S,t)\Big)\Delta t. \tag{2.6}$$

(2.5), (2.6) から, 次が得られる.

$$r\cdot f(S,t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2S^2+r\cdot\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S,\quad \text{境界条件}\quad f(S_T,T)=\begin{cases}S_T-X, & S_T\geq X,\\ 0, & S_T<X.\end{cases} \tag{2.7}$$

この偏微分方程式は **Black-Sholes の偏微分方程式**と呼ばれている.

これを式変形すると, 次の式を得る.

$$y_{uu}(u,x)=\frac{2}{\sigma^2}\cdot y_x(u,x),\quad \text{境界条件}\quad y(u,0)=\begin{cases}X\cdot(e^u-1), & u\geq 0,\\ 0, & u<0,\end{cases} \tag{2.8}$$

ただし, $f(S,t)=e^{-r(T-t)}\cdot y(u,x)$, $u=\log\dfrac{S}{X}+\Big(r-\dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)\Big)$, $x=T-t$ とする. この偏微分方程式は熱方程式 (heat equation) であると分かる. この (2.8) を解くと次を得る.

$$f(S,t)=S\cdot N\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}+\sigma\sqrt{x}\Big)-X\cdot e^{-rx}\cdot N\Big(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\Big). \tag{2.9}$$

これが **Black-Sholes(コール・オプション) の公式**と呼ばれるものである. また別の導出法として Feynman-Kac の定理[3] がよく知られている. 実際この公式を用いて, コール・オプションの価格を出そうとするとき問題となるのがボラティリティの値である. この値を出す方法として, 統計的手法と実際に市場で取引されているオプションの価格データから Black-Sholes 方程式を用いて, 逆にボラティリティの値を求める方法があり, インプライド・ボラティリティ(implied volatility) と呼ばれている.

またこのコール・オプションの公式は 5 つのパラメータ S,K,r,τ,σ に依存しているので, これらのパラメー

---

[3] **定理** (Feynman-Kac) 関数 $\mu(t,x),\sigma(t,x)$ に対して, 次の偏微分方程式を考える.

$$(*)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x)+\mu(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,x)+\dfrac{1}{2}\sigma^2(t,x)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)-ru(t,x)=0,\\ u(T,x)=\Phi(x).\end{cases}$$

このとき

$$\begin{cases}dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t,\\ X_t=x,\end{cases}$$

の解を X_t とする. $\sigma(t,X_t)\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,x)\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ のとき, $(*)$ の解は

$$u(t,x)=\exp[-r(T-t)]E_{t,x}[\Phi(X_T)]$$

で与えられる. ここで $E_{x,t}[\cdot]$ は $X_t=x$ となる確率過程 $\{X_t\}$ に関しての期待値とする. ———

タについて比較静学を行うと次のことが分かる.

資産価格 S に関する微分: $\Delta = \dfrac{\partial W}{\partial S} > 0$, 原資産価格に対する弾力性: $e_C = \dfrac{\partial C}{\partial S} \cdot \dfrac{S}{C} > 1$, 行使価格に対する微分: $\dfrac{\partial C}{\partial K} < 0$, 利子率に対する微分: $\rho = \dfrac{\partial W}{\partial r} > 0$, 時間に対する微分: $\Theta = \dfrac{\partial W}{\partial t} = -\dfrac{\partial C}{\partial \tau} < 0$, ボラティリティに対する微分 Vega= $\dfrac{\partial W}{\partial t} > 0$, 資産価格に関する 2 階微分 $\Gamma = \dfrac{\partial^2 W}{\partial S^2} > 0$.

以上のようにファイナンスの分野における基本な方程式である Black-Sholes の公式を導出した. この研究の一連の流れとして, 当初仮定してきたものを緩める変更する方向で研究が進んで発展してきている. 例えばボラティリティ, 金利を定数であったものを変更していく. 紙面の都合上詳しくは説明できないため, 関根 [4] 等を参照されたい.

2.2 離散時間

離散時間では, 2 項モデル, リスク中立法と呼ばれる方法を用いて, Black-Sholes の公式を導く. [2]

ここでも前項と同様に危険資産と安全資産があり, 現在時点における安全資産の価格は 1 であり, 危険資産の株価は当初 S_0 とする. 将来時点における状態は 2 つあり, 株式のペイオフは, 状態 1 で uS_0, 状態 2 で dS_0 であるとする $(u > d)$. 安全資産のペイオフはいずれの状態においても R であるとする.

仮定 4. 無裁定条件が満たされるとする. そのため次を満たす.

(2.10) $\qquad 0 < d < R < u.$ ———

株価が n 時点において $S_0 u^k d^{n-k}$ となる確率は ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ であり, 2 項分布に従う. ただし株価が上昇する確率は p であり, その回数は k とする. このときのコール・オプションの価格を C とすると, 次の命題を得る.

命題 5. このモデルにおけるコール・オプション価格は極限的に, (2.9) と一致する.

(2.11) $\qquad C = SB_a(n,p') - \dfrac{K}{r^n} B_a(n,p),$

ただし $B_a(n,p') = \displaystyle\sum_{k=a}^{n} {}_nC_k p'^{n-k} (1-p')^k$, $p = \dfrac{r-d}{u-d}$, $p' = \dfrac{up}{r}$, $a = \left[\dfrac{\log \frac{K}{d^n S}}{\log \frac{u}{d}}\right] + 1.$ ———

証明 (2.11) と (2.9) を比較すると, 時間ステップを細かくする, つまり $n \to \infty$ のとき, 次の 3 つが成り立てば, 両者は一致することになる.

$$(1)\ B_a(n,p') = N(x), \qquad (2)\ B_a(n,p) = N(x - \sigma\sqrt{t}), \qquad (3)\ r^{-n} = e^{-rt},$$

ただし $x = \dfrac{\log \dfrac{S}{K} + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$, $N(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$

以上のようにここでは $n \to \infty$ のとき株価が上がるか, 下がるかの 2 項分布が正規分布へ収束する性質を利用した.

3 拡張した Black-Sholes 方程式

前節までが Black-Sholes 方程式の周辺の研究ですでに知られていることであった. ここでは熱源がある場合のモデルを考察する. ここでは熱源を相互作用に関連した項と解釈することができる.

ここでは株価は幾何ブラウン運動に従うが, ポートフォリオを組む段階で, 相互作用の影響がある場合を考察する. そのため想定している状況はある投資家が複数の財を保有しており, 考察している株式以外の状況によって投資家の行動が変化する場合である.[4] この場合はポートフォリオの価値は次のように変形することになる.

(2.5') $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - \Delta f = \left\{ -\dfrac{\partial f}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right\} \cdot \Delta t + g(S) \cdot \Delta t.$

[4] リアル・オプション (Real Option) と呼ばれている分野では, このような関数を入れ, キャッシュ・フローと解釈して分析している.

この場合も前節と同様に式変形していくと, 次のように変形することができる. ただし変数は (2.8) と同じであり, $z=\dfrac{u}{\sigma}$ とした.

(2.8') $\qquad w_{uu}(u,x)=2w_x(u,x)+g(u,x).$

これは非斉次の偏微分方程式であり, 解の一意性など成り立つことが知られている. また一般的には次のように解くことができる. 特にここでは基本解 (Gauss kernel) $U(u,v,x)$ を用いた解である.

(3.1) $\qquad w(u,x)=\displaystyle\int_\Omega U(u,v,x)w_0(v)dv+\int_0^x\int_\Omega U(u,v,x-s)g(v,s)dvds.$

ただし $U(u,v,x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\Big(-\dfrac{(u-v)^2}{2x}\Big)$ である.

またこの時のコール・オプションの公式は次のようになる.

(3.2) $\qquad f(S,t)=S\cdot N\Big(\dfrac{u}{\sigma\sqrt{x}}+\sigma\sqrt{x}\Big)-X\cdot e^{-rx}\cdot N\Big(\dfrac{u}{\sigma\sqrt{x}}\Big)+G(S,t),$ $G(S,t)$ は非斉次の項に関する項.

一般形で議論を進めているので, 解析的にはこれ以上進めることはできないが, 具体的な関数を特定すれば, いろいろ分かるであろう. 例えば次の場合が調べられている.

例 6. (i) $g(u,x)=(u-a)(1-u^2)$, $-1<a<1$ のとき, **Allen-Cahn 方程式**と呼ばれている.
(ii) $g(u,x)=|u|^{p-1}u$, $p>1$ としたときの解の爆発の問題について調べられている. ———

またこの非斉次の偏微分方程式に対しても, 割引付きの Feynman-Kac の定理を使うことによっても, 解の期待値を求めることができる.

4 ゲーム理論モデル

ここでは上述のモデルにおけるゲーム理論からのアプローチを行う. 株価は先ほどの 2 項モデルと同様に変動しているとする. 特にここでは主体のタイプはオプションの発行者と購入者の 2 タイプいるとする. それぞれの主体の戦略は行使価格を戦略とし, {bear, bull} などの 2 つの { 戦略 1, 戦略 2} があるとし, 毎期独立に戦略を選択するとする. よってこの時の各主体の利得はオプション発行者が $K-S_T$, 購入者は S_T-K とする.[5] よってこのゲームは次の利得表のように, ゼロ＝サム型のゲーム構造をしている.

I ＼ II	戦略 1	戦略 2
戦略 1	$a,-a$	$0,0$
戦略 2	$0,0$	$b,-b$

利得表 1

主体 1 が戦略 1 を採用する確率を p'' とし, それを採用する回数を k とすると, n ステップ後の戦略 1 を取る確率は ${}_nC_kp''^k(1-p'')^{n-k}$ となる. よってこの時の主体 1 の期待効用は $(a^k+b^{n-k})_nC_kp''^k(1-p'')^{n-k}$ である.[6] この場合 2.2 節と同様にして求めることができる. 次の命題を得る.

命題 7. このゲームにおけるコール・オプション価格は次のようになる. またこのときの各主体の最適期待利得と最頻値が一致する.

(4.1) $\qquad C=SB_a(n,p')-\dfrac{\bar K}{r^n}B_a(n,p),$

ただし $B_a(n,\tilde p)=\displaystyle\sum_{k=a}^{n}{}_nC_k\tilde p^{n-k}(1-\tilde p)^k$, $\tilde p=\{p,p'\}$, $p=\dfrac{r-d}{u-d}$, $p'=\dfrac{up}{r}$, $a=\Big[\dfrac{\log\frac{K}{d^nS}}{\log\frac{u}{d}}\Big]+1$, ここで [ ] はガウス記号. また $\bar K=$ 戦略 1 における行使価格 $\cdot p''^*+$ 戦略 2 における行使価格 $\cdot(1-p''^*)$, p''^* は最適な期待利得を取る値である. ———

証明 平均行使価格 $\bar K$ の導出の問題となる. 前提から主体 1 の期待利得は 2 項分布に従っており, 極限的には正規分布となる. そのため期待利得を最大にするような確率 p'' が決定されるので, 平均行使価格 $\bar K$ が定まり,

[5] 利得 a,b の値は株価の変動によって, ランダムに変動している. またここでは簡単化のために利得をコール・オプション価格とする. プットオプションの場合は符号を逆転させればよい.

[6] 多くの確率的進化ゲーム理論では定常分布における期待利得を用いている. よって本稿では毎期ごとに仮想的に利得が得られる場合を考察していることになる.

(4.1) が成り立つことが分かる.

この命題から今までは行使価格が外生的に与えられていた (命題 5) のに対し, ここでは内生的に行使価格が決定するモデルに拡張した. 各主体の期待利得を最大にするように確率 p'' を決定すると, 平均行使価格 $\bar{K}$ が導出される. またここでの主体の期待利得は極限的には正規分布に従う.

さらにこれを拡張させ, 前節と同様に, 株価間に相関がある場合を考察する. このことは次のような状況を想定している. 例えばこの場合主体は複数所有する株 (株 1, 株 2) を所有しており, ある株 2 の変動によって, 株 1 についての行使価格に影響を与え, 早めに手放すために価格を下げることなどの場合である. そのためここでは戦略 1,2 を採用する確率をそれぞれ $p_1 = p'' - \varepsilon$, $p_2 = 1 - p'' + \varepsilon$ $(\varepsilon \neq 0)$ とする. この場合のコール・オプション価格は次の命題に従う.

命題 8. コール・オプション価格は (4.1) に一致するが, このときの各主体の最適期待利得と最頻値は一致しない. ———

証明 $\varepsilon \neq 0$ であるため, 主体の期待利得はステップを無限としても正規分布に収束せず, 各主体の最適期待利得と最頻値が一致しない.

この命題から主体の最適な期待利得の分布は 2 項分布ではあるが, 極限的に正規分布には従わず, 正規分布とのズレが相互作用に影響であるということが分かる. コール・オプション価格が正規分布に収束しないために, これを可視化すると, ファットテイルが出てくる. このモデルから実際の市場で観測されているファットテイルが出てくる要因を説明すると, 株価間の相関の影響であることが分かる. またこの影響は第 3 節で考察した非斉次の項であり, この項のミクロ的基礎付けを与えた.

以上のようにこの節では通常の Black-Sholes モデルにおいて, 行使価格を変更していくという新たな研究の流れを提案した. また吉川 [3] ではこのモデルをより一般的にしたゲームにおいて, 調べている.

5 終わりに

以上のようにファイナンスの分野で最も基本的なモデルの 1 つである Black-Sholes 方程式の周辺を取り上げた. さらに他の株価との影響がある場合に拡張し, これを説明するゲーム理論のモデルを構築し, 通常の Black-Sholes モデルにおいて, 行使価格を変更していくという新たな研究の流れを提案した. 今後の課題として, 多次元の問題などが挙げられる. この場合非線形偏微分方程式の解の軌道は興味深い構造を持つことが数多く報告されている. この場合のミクロ的な構造 (第 4 節) を探ることが次のステップとなるであろう. このように非線形偏微分方程式の研究とゲーム理論の研究の両方を行うことによって, より詳細な現象を記述するモデルの構築を行うことができるようになる.

以上のように一見すると, 容易に解ける問題を実験, 現実社会と比較し, 理論を修正していく. その過程で多くの数学的に興味深い未知の問題を発掘することができると考えている. つまり当該分野では応用数学を純粋数学にすることが重要であると信じている.

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *The Journal of Political Economy*, Vol.**81**, pp.637-654.

[2] Cox, John C., Ross, Stephen A. and Rubinstein, Mark (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol.**3**, pp.145-166.

[3] 吉川 満 (2009): 「進化ゲーム理論における共進化と多様性 : 確率的環境の場合」『進化経済学論集』, 第 **13** 号, 印刷中.

[4] 関根 順 (2007): 「数理ファイナンス」, 培風館.

The convergence with nondimensional parameter of Hasegawa–Wakatani equations

Shintaro KONDO, Atusi TANI
Department of Mathematics, Keio Univ.

Abstract

Tokamak is a magnetic confinement device in which an axisymmetric plasma is confined by a strong magnetic field. It is well known that the resistive drift wave turbulence in it is described by the system of nonlinear partial differential equations called Hasegawa–Wakatani equations. It is known that when we pass to the limit of nondimensional parameter of Hasegawa–Wakatani equations, we get Hasegawa–Mima like equations. In this presentation, we consider passing to the limit of nondimensional parameter of Hasegawa–Wakatani equations and we finally prove that there exists a strong solution for the initial boundary value problem for Hasegawa–Mima like equations.

1 Hasegawa–Wakatani equations, Hasegawa–Mima equation

Tokamak is a most advanced magnetic confinement device, in which an axisymmetric plasma is confined by a strong magnetic field (toroidal magnetic field) (see, for example, [3]). In Tokamak plasma is heated at very high temperature until thermonuclear fusion of the nuclei occurs. The energy loss observed in Tokamak is much greater than that predicted by neoclassical transport theory. It has been well known that the spatial gradients in plasma lead to the drift waves. Thereby, it is considered that drift-wave turbulence is a natural cause of anomalous transport and that the dramatic reduction in confinement results from this anomalous transport.

In order to describe the drift wave turbulence in Tokamak, Hasegawa and Mima proposed in 1977 the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi\times\mathbf{e})\cdot\nabla\right)(\Delta\phi - \phi - \log\overline{n}) = 0$$

(Hasegawa–Mima equation) from one fluid model in a homogeneous strong magnetic field $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}$ and an inhomogeneous plasma equilibrium density $\overline{n} = \overline{n}(|x'|)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3))$. Here ϕ is the electrostatic potential, B_0 is the strength of a magnetic field assumed to be a constant and $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$. One can find the same equation in geophysics: Charney–Obukhov equation with respect to the quasi-geostrophic potential vorticity for Rossby wave.

In 1983 Hasegawa and Wakatani proposed the equations (Hasegawa–Wakatani equations) from two fluids model, which describe the resistive drift wave turbulence in Tokamak ([2]). They consist of two nonlinear partial differential equations for the perturbations of plasma density n and electrostatic potential ϕ in the homogeneous strong magnetic field $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}$ and the inhomogeneous plasma equilibrium density $\overline{n} = \overline{n}(|x'|)$:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi\times\mathbf{e})\cdot\nabla\right)\Delta\phi = -\dfrac{c_1}{\overline{n}}\dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}(\phi - n) + c_2\Delta^2\phi, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi\times\mathbf{e})\cdot\nabla\right)(n + \log\overline{n}) = -\dfrac{c_1}{\overline{n}}\dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}(\phi - n). \end{cases} \tag{1.1}$$

Here $c_1 = T_e/(e^2\eta\omega_{ci})$, $c_2 = \mu/({\rho_s}^2\omega_{ci})$, T_e is the electron temperature, e is the elementary charge, μ is the kinematic ion-viscosity coefficient, η is the resistivity, m_i is the ion mass, $\omega_{ci} = eB_0/m_i$ is the cyclotoron frequency and $\rho_s = \sqrt{T_e}/(\omega_{ci}\sqrt{m_i})$ is the ion Larmor radius. We assume that c_1 and c_2 are positive constants.

2 Problem and Main theorem

In this paper, we consider the initial boundary value problem for these equations.

Let us formulate the problem: For an initial electrostatic potential ϕ_0, an initial plasma density n_0 and the background density $\overline{n} = \overline{n}(|x'|)$, find

$\phi = \phi(x,t)$ and $n = n(x,t)$ satisfying (1.1) for $x \in \Omega$, $t > 0$ and the initial and the boundary conditions

$$\begin{cases} \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad n(x,0) = n_0(x) & \text{for } x \in \Omega, \\ \phi(x,t) = \Delta\phi(x,t) = n(x,t) = 0 & \text{for } x \in \Gamma,\ t > 0, \\ \phi, n \text{ periodic in the } x_3 \text{ direction.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Here $\Omega = \omega \times (-L, L)$ is a 3-dimensional torus, $\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 |\ |x'| < R\}$, $\partial\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 |\ |x'| = R\}$, $\Gamma = \partial\omega \times [-L, L]$, R and L are positive numbers.

In place of $n(x,t) + \log \overline{n}(|x'|) - \log \overline{n}(R)$ and $n_0(x) + \log \overline{n}(|x'|) - \log \overline{n}(R)$, we use the same letters $n(x,t)$ and $n_0(x)$, respectively. Then the problem (1.1), (2.1) becomes

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \mathbf{e}) \cdot \nabla\right)\Delta\phi = -\dfrac{c_1}{\overline{n}} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}(\phi - n) + c_2\Delta^2\phi, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \mathbf{e}) \cdot \nabla\right) n = -\dfrac{c_1}{\overline{n}} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}(\phi - n) \quad \text{for } x \in \Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

and (2.1).

The aim of this paper is to solve the problem (2.2), (2.1) in Sobolev–Slobodetskiĭ spaces defined as follows.

Let $T > 0$ and Ω be a domain in $\mathbf{R}^m (m \in \mathbf{N})$. By $W_2^l(\Omega)$ $(l \geq 0)$ we denote the space of functions $u(x)$, $x \in \Omega$, equipped with the finite norm

$$\|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} = \sum_{|k|<l} \|D_x^k u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{\dot{W}_2^l(\Omega)},$$

where

$$\|u\|^2_{\dot{W}_2^l(\Omega)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|=l} \|D_x^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)} \text{ if } l \in \mathbf{Z}, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|=[l]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D_x^\alpha u(x) - D_x^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{3+2(l-[l])}} dxdy \text{ if } l \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Here, $[l]$ is the integral part of l, and $D_x^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_m}^{\alpha_m}$ is the generalized derivative of order $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, and $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ is a multi-index. For $1 \leq p < \infty$, we denote by $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ the norm of the Lebesgue space $L_p(\Omega)$.

Similarly, by $W_2^l(0,T)$ we denote the space of functions $u(t)$, $t \in (0,T)$, equipped with the finite norm

$$\|u\|^2_{W_2^l(0,T)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \|D_t^j u\|^2_{L_2(0,T)} \quad \text{if } l \in \mathbf{Z}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{[l]} \|D_t^j u\|^2_{L_2(0,T)} + \int_0^T \int_0^T \frac{|D_t^{[l]} u(t) - D_t^{[l]} u(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+2(l-[l])}} \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \quad \text{if } l \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

The anisotropic Sobolev–Slobodetskiĭ space $W_2^{l,\frac{l}{2}}(Q_T)$ $(Q_T \equiv \Omega \times (0,T))$ is defined as $L_2(0,T;W_2^l(\Omega)) \cap L_2(\Omega; W_2^{\frac{l}{2}}(0,T))$, equipped with the finite norm

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{W_2^{l,\frac{l}{2}}(Q_T)} &= \|u\|^2_{W_2^{l,0}(Q_T)} + \|u\|^2_{W_2^{0,\frac{l}{2}}(Q_T)} \\ &\equiv \int_0^T \|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} \mathrm{d}t + \int_\Omega \|u\|^2_{W_2^{\frac{l}{2}}(0,T)} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Taking the difference of $(2.2)^1$ and $(2.2)^2$ and denoting that $\varepsilon = \dfrac{1}{c_1}$ yield

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \mathbf{e}) \cdot \nabla\right)(\Delta\phi - n) = c_2 \Delta^2 \phi & \text{in } Q_T, \\ \varepsilon\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \mathbf{e}) \cdot \nabla\right) n = -\dfrac{1}{\overline{n}} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}(\phi - n) & \text{in } Q_T, \end{cases} \tag{2.3}$$

and (2.1).

First we derive the uniform estimates of the solution to the problem (2.3), (2.1). Then following the arguments due to Kato by passing to the limit $\varepsilon \to 0$, we shall prove

Theorem 1 *Let $\bar{n}(|n'|) \in W_2^2(\omega)$, $\bar{n}(|x'|) \geq n_* = constant\ (> 0)$. Assume that $(\phi_0, n_0) \in W_2^4(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ satisfies the compatibility conditions. Then there exists a solution (ϕ, n) to problem*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - (\nabla\phi \times \mathbf{e}) \cdot \nabla\right)(\Delta\phi - n) = c_2 \Delta^2 \phi & \text{in } Q_T, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}(\phi - n) = 0 & \text{in } Q_T, \end{cases}$$

and (2.1) *on some interval* $[0,T]$ *such that* $(\phi, n) \in L^2(0,T;W_2^4(\Omega))\times W_2^{2,1}(Q_T)$, $\partial\phi/\partial t \in L^2(0,T;W_2^2(\Omega))$.

References

[1] S. J. Camargo, D. Biskamp, and B. D. Scott: Resistive drift-wave turbulence, *Phys. Plasmas*, **2** (1), 1070-664x/95/2(1)/48/15.

[2] A. Hasegawa and M. Wakatani: Plasma Edge Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983), 682.

[3] K. Miyamoto: *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, Iwanami (1997) (in Japanese).

[4] V. A. Solonnikov: On general initial-boundary value problems for linear parabolic systems, *Proc. Steklov Math. Inst.*, **83** (1985), 3-162.

[5] A. Tani, S. Itoh, N. Tanaka: The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition, *Adv.Math. Sci. Appl.*, **4** (1994), 51-69.

Existence of spike patterns for some chemotaxis models with saturation

森本　光太郎（首都大学東京大学院　理工学研究科）

1　序章

本講演では，粘菌細胞などの走化性運動を記述する，次の走化性（chemotaxis）モデルの起源，及び定常的スパイクパターンの存在について述べる．

$$\begin{cases} P_t = \nabla \cdot (P\nabla(\log \frac{P}{W^p})) \ in\ \Omega \times (0,\infty), \\ W_t = \varepsilon^2 \Delta W - W + \frac{P}{1+kP},\ in\ \Omega \times (0,\infty), \\ \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0\ on\ \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1}$$

ここで，Ω は N 次元有界領域，$\varepsilon > 0$，$k > 0$ は定数である．指数 p は $1 < p < \infty$ を満たすものとする．$P = P(x,t), W = W(x,t)$ はそれぞれ，場所 x，時刻 t での粘菌細胞密度，走化性物質の濃度を表す．$\frac{\partial}{\partial \nu}$ は境界 $\partial\Omega$ における外向き法線方向微分を表し，Δ は通常の N 次元ラプラシアンであり，∇ はグラディエントである．つまり，$\Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N})$ である．また，P や W は全て正値のもの，つまり $P, W > 0$ なるものを考える．

今回，本研究集会の主旨，及びページ数の都合上，専門的な立場からではなく，ある意味で応用的な立場からこのモデル方程式 (1) がどのような現象を表しているのか，どのような解が期待でき，実際にどのような解が得られるのかということに主眼を置き，この方程式について述べる．

2　chemotaxis model の導出

2.1　走化性（chemotaxis）

走化性とは，生物が化学物質に反応して特定の方向に移動する性質のことである．また，そのような走化性を促す化学物質を，走化性物質と呼ぶ．

例えば，細胞性粘菌は餌のバクテリアが豊富な時期には，単細胞生物としてランダムに動き増殖するが，餌がなくなるとそれまで個々に振舞っていた細胞が集まり，多細胞生物的な集合体を形成する．このような粘菌細胞が集まる現象は，それぞれの粘菌細胞が走化性物質を分泌し，かつそれぞれの細胞が走化性物質の濃度勾配を認識し，濃度の高い方向に動くことで集合体が形成されるという事が知られている．

2.2　走化性モデル

上に述べたような，走化性による集合体形成の現象を数学モデルで記述しようとする研究が 1970 年代前半から始まり，ケラー（Keller）とシーゲル（Segel）が偏微分方程式を用いたモデルを提唱したことを皮切りに，走化性による運動を記述する数学モデルに関する研究は始まった．

走化性による粘菌細胞の運動を記述する偏微分方程式の導出の方法を簡単に述べよう．Ω を $\mathbb{R}^N$ における有界領域とし，その境界は滑らかであるとする．現実的には，$N = 2$ または 3 の場合を考え，Ω の中で粘菌細胞が生活していると考える．その粘菌細胞の場所 $x \in \Omega$，時刻 $t \in (0,\infty)$ での細胞密度を $P = P(x,t)$ とおき，そこでの走化性物質の濃度を $W = W(x,t)$ とおく．粘菌細胞や走化性物質は Ω の内外への流入や流出がないと仮定し，数学的には斉次 Neumann 境界条件 $\frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0$ on $\partial\Omega$ を仮定する．ここで，$\frac{\partial}{\partial \nu}$ は境界

$\partial\Omega$ での外向き法線方向微分を表す．次に，P と W の場所 x での各時刻における変化率は，時間微分 P_t，W_t で表現できる．まず，粘菌細胞の走化性及び粘菌細胞の走化性物質の分泌を無視すれば，粘菌細胞及び走化性物質は，密度や濃度の濃い所から低い所へと拡散していくと考えられ，次のように表現できる．

$$P_t(x,t) = d_1\Delta P(x,t),\quad W_t(x,t) = d_2\Delta W(x,t). \tag{2}$$

これらは通常の熱方程式であり，$d_1, d_2 > 0$ はそれぞれ粘菌細胞と走化性物質の拡散の速さを表す拡散定数である．次に，粘菌細胞が走化性物質の濃度の高い方向へ移動することを記述するために，感覚関数と呼ばれる $\chi'(W) > 0 (W > 0)$ を満たす関数 $\chi(W)$ を導入する．$\chi(W)$ として，色々な取り方があるが，例えば $\chi(W) = aW, a\log W\ (a > 0)$ などである．この勾配を考えると，

$$\nabla\chi(W(x,t)) = \chi'(W(x,t))\nabla W(x,t)$$

であるから，$\nabla\chi(W)$ は W の濃度の高い方へと向かう速度ベクトル場を成し，粘菌細胞密度 P をかけて，$P\nabla\chi(W)$ は粘菌細胞が走化性物質の濃度の高い方向へ移動していくという運動を記述するベクトル場を成す．そしてその発散（沸き出し）を取り，$\nabla\cdot(P(x,t)\nabla\chi(W(x,t)))$ は，粘菌細胞が各場所 x において他の場所へと移り流れていく量の時刻 t での割合を表しており，移流項などと呼ばれる．この量が正の場所では，粘菌細胞がどんどん他の場所へと移ってしまっていることになるため，その場所の粘菌細胞の密度は減少していくことに注意すれば，(2) にこの効果を加え，次の粘菌細胞の密度に関する方程式を得る．

$$P_t(x,t) = d_1\Delta P(x,t) - \nabla\cdot(P(x,t)\nabla\chi(W(x,t))).$$

次に，粘菌細胞が走化性物質を分泌するという現象をどのように表現するかを考えよう．粘菌細胞の走化性物質分泌による W の時間変化率 W_t は，粘菌細胞の密度に比例して大きくなるので，適当な正数 b_1 を用いて b_1P として表現される．また，走化性物質は一定の割合で減少していくと仮定すると，適当な正数 b_2 を用いて b_2W の割合で減少していくと考えられ，(2) と合わせれば，次の走化性物質の時間変化を表現する方程式を得る．

$$W_t(x,t) = d_2\Delta W(x,t) - b_2W(x,t) + b_1P(x,t).$$

以上のことをまとめ，次の粘菌細胞の走化性を記述するモデル方程式が得られる．

$$\begin{cases} P_t = d_1\Delta P - \nabla\cdot(P\nabla\chi(W)),\ x\in\Omega, t\in(0,\infty), \\ W_t = d_2\Delta W - b_2W + b_1P,\ x\in\Omega, t\in(0,\infty), \\ \frac{\partial P}{\partial\nu} = \frac{\partial W}{\partial\nu} = 0,\ x\in\partial\Omega, t\in(0,\infty). \end{cases} \tag{3}$$

この方程式において $d_1 = b_1 = b_2 = 1$，$d_2 = \varepsilon^2$，$\chi(W) = p\log W$ として，第一式を少し変形すれば，次を得る．

$$\begin{cases} P_t = \nabla\cdot(P\nabla(\log\frac{P}{W^p})),\ x\in\Omega, t\in(0,\infty), \\ W_t = \varepsilon^2\Delta W - W + P,\ x\in\Omega, t\in(0,\infty), \\ \frac{\partial P}{\partial\nu} = \frac{\partial W}{\partial\nu} = 0,\ x\in\partial\Omega, t\in(0,\infty). \end{cases} \tag{4}$$

このように，粘菌細胞の走化性運動を偏微分方程式を用いて記述する事ができる．

感覚関数 $\chi(W)$ についての補足　感覚関数が $\chi(W) = aW\ (a > 0)$ の場合，$\nabla\chi(W) = a\nabla W$ より，粘菌細胞が走化性物質の濃度勾配のみを感知し，動くモデルになるのに対し，$\chi(W) = a\log W$ の場合は，$\nabla\chi(W) = \frac{a}{W}\nabla W$ より，粘菌細胞は走化性物質の濃度が低いところほど濃度勾配を感知しやすく，逆に濃度が高いところでは濃度勾配を感知しにくいようなモデルになっている．そういった意味で，$\chi(W)$ は粘菌細胞が走化性物質を感知する度合いを表す関数として，感覚関数と呼ばれている．

2.3 サチュレーション効果

式 (1) と (4) を見比べると，第二式（W に関する方程式）に違いがある．(1) の第二式は $W_t = \varepsilon^2 \Delta W - W + \frac{P}{1+kP}$ であり，(4) の第二式は $W_t = \varepsilon^2 \Delta W - W + P$ であるが，この二つの違いは反応項の部分で (4) の P を $\frac{P}{1+kP}$ に置き換えたものが (1) である．この置き換えは “粘菌細胞による走化性物質の分泌の割合には頭打ちがある” ということを意味する．実際，$\frac{P}{1+kP} < \frac{1}{k}$ $(P > 0)$ に注意すればよい．つまり，粘菌細胞密度が非常に高い状況下では，走化性物質の分泌に限界があるという現象を表している．この意味で，(1) はある種の飽和（サチュレーション）状態を想定したモデルとなっており，サチュレーション効果のあるモデルと呼ばれる．

3 スパイクパターンの存在

前述のモデル (1) に従って粘菌細胞が Ω 内を動く時，どのような状態に落ち着くであろうか．現象的に考えれば，粘菌細胞がある場所に集まり，集合体を形成し，それ以上は変化が起こらないような状態に落ち着くことを期待したい．つまり，$P(x,t)$ が Ω 上の非常に狭い場所にのみ集中するような状態である．それ以上時間が経っても何も変化が起こらない状態を “定常状態” と呼び，方程式の解で言うと，そのように時間によらずに一定な解 $P(x,t) = P(x)$ を定常解と呼ぶ．また，粘菌細胞が非常に狭い場所に集中しているようなパターンをスパイクパターンと呼び，方程式の解の言葉で言うと，そのような解をスパイク解，またはピーク解と呼ぶ．特に Ω 上の複数の箇所に集中しているような解を多重スパイク解と呼ぶ．

走化性モデルの解に関する研究は非常に盛んに行われているが，今回，倉田和浩先生と共同で行った (1) の多重スパイク定常解の構成に関する研究の結果を紹介する．詳しい定理は後に述べるとして，結論から言うと，「Ω が x_N 軸対称な領域で，ε が十分小さく，それに対して k も十分小さければ，境界 $\partial\Omega$ と x_N 軸との任意の交点にピークを持つような定常解 $(P(x), W(x))$ が存在する」という結果である．その解の構成の概略を，以下で見ていこう．

3.1 非局所的問題への帰着

(1) は，発展問題の観点から量 $\int_\Omega P(x,t)dx$ は保存されることに注意する．実際，(1) の第一式を Ω 上積分し，ガウスの発散定理を適用すれば確かめる事ができる．簡単のため $\int_\Omega P(x,t) = \int_\Omega P(x,0)dx = 1$ としよう．すると，(1) の定常問題は次のようになる．

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(P \nabla (\log \frac{P}{W^p})\right) = 0 \ in \ \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta W + F(P,W) = 0 \ in \ \Omega, \\ \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0 \ on \ \partial\Omega, \\ \int_\Omega P(x)dx = 1. \end{cases} \tag{5}$$

(5) の第一式と条件 $\int_\Omega P = 1$ から，

$$P(x) = \frac{1}{\int_\Omega W^p} W^p(x) \tag{6}$$

が成り立たなければならないことに注意する．ここで，補助的な関数 $u = u(x)$ を導入し，次のようにおく．

$$W(x) = \frac{1}{\int_\Omega u^p(x)dx} u(x). \tag{7}$$

これを (6) へ代入した後，その P を (5) の第二式に代入すると，次が得られる．

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta u - u + \dfrac{u^p}{1+k\left(\int_\Omega u^p(x)dx\right)^{-1}u^p} = 0 \ in\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

ここで，この式の中に u の Ω 上の積分があるため，この問題は非局所的な情報を含んだ問題であることに注意する．

3.2 解の構成法

これまでの考察から，もし方程式 (8) の正値解 u が得られれば，(7) と (6) により P と W も決まり，(5) の解，つまり (1) の定常解が得られることになる．大まかな流れのみになるが，[2] で用いた方法を紹介する．

非局所項において，$\delta = k\left(\int_\Omega u^p(x)dx\right)^{-1}$ とおくと，(8) は次のような連立の方程式に帰着できる．

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta u - u + f_\delta(u) = 0 \ in\ \Omega, \\ \delta = \dfrac{k}{\int_\Omega u^p(x)dx}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ on\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

ここで，$f_\delta(u) := \frac{u^p}{1+\delta u^p}$ とおいた．この方程式に対し，次の方針で解の構成を行う．

Step.1　この方程式 (9) の第一式を各 $\delta > 0$ に対し解き，その解を $u_\delta(x;\varepsilon)$ とおく．

Step.2　第二式を満たすような δ，つまり，

$$\delta_\varepsilon = \frac{k}{\int_\Omega u^p_{\delta_\varepsilon}(x;\varepsilon)dx} \tag{10}$$

を満たす $\delta = \delta_\varepsilon$ を探す．

これらが出来れば，$u_\varepsilon(x) = u_{\delta_\varepsilon}(x;\varepsilon)$ とおき，(8) の解 $u_\varepsilon(x)$ が得られることになる．

注意　Step.1 で各 δ に対し解 $u_\delta(x;\varepsilon)$ が得られたとしても，その解が δ に関して連続でるかどうかは一般には明らかではない．もしその連続性が保証されなければ，Step.2 で δ を動かして，ちょうど (10) を満たすような $\delta = \delta_\varepsilon$ を見付けることは困難である．

ここで，次の仮定をする．

(A.1) Ω は滑らかな境界をもち，x_N 軸に関して対称な領域とする．

(A.2) $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-N}k = k_0$ がある $k_0 \in (0,\infty)$ に対して成り立つとする．

この仮定 (A.2) は，ε が小さいとき，それに伴って k も小さくなるという仮定であり，このような条件を弱サチュレーション条件と呼ぶことがある．$\partial\Omega$ と x_N 軸との交点を，x_N 成分が小さい順に $Q_1,\cdots,Q_n$ とする．これらの点の中から任意に指定した点にピークを持つ解を構成しよう．

次の方程式の解を w_δ とおこう．

$$\begin{cases} \Delta w - w + f_\delta(w) = 0,\ w > 0 \ in\ \mathbb{R}^N, \\ w(0) = \max_{\mathbb{R}^N} w,\ w(z) \to 0 \ as\ |z| \to \infty. \end{cases} \tag{11}$$

この方程式は，ある $\delta_* > 0$ が存在し，任意の $\delta \in (0,\delta_*)$ に対して一意解を持ち，さらに非退化であることが [2] で示されている．その一意性から，w_δ の δ に関する連続性も導く事ができる．この w_δ を基にして，適当な近似関数を作り，w_δ の非退化性から，その近くに (9) の第一式の解 $u_\delta(x;\varepsilon)$ を構成することができる．その際，パラメータ付きの縮小写像の原理を用いるのだが，その写像の δ に関する連続性から，$u_\delta(x;\varepsilon)$ の δ に関

する連続性も保証される仕組みになっている．さらに，仮定 (A.2) を使うと，(10) を満たす $\delta=\delta_\varepsilon\in(0,\delta_*)$ を，中間値の定理により見付けることができる．以上の流れで，(8) の解 $u_\varepsilon(x)=u_{\delta_\varepsilon}(x;\varepsilon)$ を構成する事ができ，さらに $\varepsilon\to 0$ とした時の $u_\varepsilon(x)$ の漸近挙動を調べることで，次の定理が得られる．

定理　(A.1),(A.2) を仮定する．$Q_{j_1},\cdots,Q_{j_m}$ を，$Q_1,\cdots,Q_n$ から任意に選んだ m 個の点とする．この時，十分小さな ε に対し，(5) の軸対称な解 $(P_\varepsilon,W_\varepsilon)$ で，次を満たすものが存在する．

$$(P_\varepsilon(x),W_\varepsilon(x))=\Big(\frac{1}{\int_\Omega u_\varepsilon^p}u_\varepsilon^p(x),\frac{1}{\int_\Omega u_\varepsilon^p dx}u_\varepsilon(x)\Big),\tag{12}$$

ここで，u_ε は (8) の解で，次を満たすものである．必要なら $\varepsilon_i\to 0$ $(i\to\infty)$ なる部分列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ を取ることで，$i\to\infty$ のとき，

(a) $u_{\varepsilon_i}(x)=w_{\delta_{**}}\big(\frac{1}{\varepsilon_i}\Psi(x;Q_{j_k})\big)+o(1)$, $x\in\Phi(B_\kappa;Q_{j_k})\cap\Omega, k=1,\cdots,m$,

(b) $\int_\Omega u_{\varepsilon_i}^p(x)dx=\varepsilon_i^N\frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N}w_{\delta_{**}}^p+o(\varepsilon_i^N)$,

が成り立ち，さらに

(c) $u_\varepsilon(x)\le Ce^{-c\cdot dist(x,Q)/\varepsilon}$, $x\in\Omega$,

が成り立つ．ここで，$Q:=\{Q_{j_1},\cdots,Q_{j_m}\}$，$B_\kappa=\{z\in\mathbb{R}^N:|z|<\kappa\}$ であり，$C,c,\kappa>0$ は ε や x によらない定数である．$w_{\delta_{**}}$ は (11) の一意解であり，$\delta_{**}\in(0,\delta_*)$ は次を満たす k_0 から決まる数である．

$$\delta_{**}\int_{\mathbb{R}^N}w_{\delta_{**}}^p(x)dx=k_0.\tag{13}$$

さらに，$k_0>0$ が十分小さければ，上の (a),(b) は部分列を取らずに成り立つ．

この定理の中の $\Psi(x;Q_k)$ は，各点 Q_k の近傍で定義された，点 Q_k を原点に写し，Q_k の近傍の境界 $\partial\Omega$ を超平面 $\{z_N=0\}$ へと写し，また，$\partial\Omega$ における法線ベクトルを超平面 $\{z_N=0\}$ 上の法線ベクトルへと写すような，ある微分同相写像であり，$\Phi(\cdot;Q_k)$ はその逆写像 $\Phi(z;Q_k)=\Psi^{-1}(z;Q_k)$ である．今回はページの都合上その定義は省略させていただいた．詳しくは [1] または [2] を参照されたい．

補足　仮定 (A.2) では $k_0>0$ としたが，実は $k_0=0$ の場合は次元 N や指数 p にある条件が必要になるので注意が必要である．また，[2] では (5) の第二式を $\varepsilon^2\Delta W-W+\frac{PW^q}{\alpha+\gamma W^q}=0$，$\alpha>0,\gamma>0,q>0$ としたものも扱っているが，今回は話が複雑になることを避けるために扱わなかった．詳しくは [2] を参照されたい．昨年の本研究集会にて，Gierer-Meinhardt 系と呼ばれる，活性因子と抑制因子に関する反応拡散方程式についての発表を行ったが，今回は，そこでの解の構成法を応用した形になっている．その Gierer-Meinhardt 系の解の構成に関しては，[1] を参照されたい．また，走化性モデルに関する他の研究などは，永井敏隆先生による「走化性モデルにおける集中現象」（[3] の p.99-143 に掲載）が詳しい．

参考文献

[1] K. Kurata and K. Morimoto, Construction and asymptotic behavior of multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation, Commun. Pure Appl. Anal., 7(2008) 1443-1482.

[2] K. Kurata and K. Morimoto, Existence of spike patterns in a chemotaxis model with saturation, preprint.

[3] 柳田英二 [編]　『爆発と凝集』　(東京大学出版会，2006)

The existence of flat projective structures on Lie groups

加藤　宏尚　(広島大学大学院理学研究科数学 D1)

0.1　射影構造・affine 構造

多様体上には平坦な Riemann 計量，Einstein 計量，symplectic 形式など様々な幾何構造が考えられる．そのような幾何構造の存在・非存在を決定するのは基本的な問題である．例えば平坦な affine 構造，射影構造に関しては次のことが知られている．２次元閉多様体上に平坦な affine 構造が存在するための必要十分条件は，そのオイラー標数が 0 になることである．一方平坦な射影構造は全ての２次元閉多様体上に存在する．このように平坦な affine 構造や射影構造が存在するか否かという問題は大域的な位相と関連した問題である．本研究では特に Lie 群上での左不変平坦な射影構造及び affine 構造について，その存在・非存在を問題とする．本節ではまずこれら２つの幾何構造について簡単に説明する．

定義 0.1 $\mathfrak{X}(M)$ により多様体 M 上のベクトル場全体を表す．多様体 M 上に捩れのない *affine* 接続 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が与えられているとする。この ∇ を M 上の *affine* 構造という。

定義 0.2 ∇ と ∇' を多様体 M 上の *affine* 構造とする．∇ と ∇' が射影同値であるとは次をみたすときをいう．ある M 上の一次微分形式 ϕ が存在して，

$$\nabla_X Y - \nabla'_Y X = \phi(X)Y + \phi(Y)X \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

が成り立つ．

射影同値は同値関係であり，$\nabla \sim \nabla'$ と書く．affine 構造 ∇ の射影同値類 $[\nabla]$ を射影構造という．この射影構造がどんなものであるか，測地線の観点から affine 構造との比較において説明する．まず affine 構造について，次が成り立つ．

命題 0.3 ∇ と ∇' を *affine* 構造とする．このとき

$$\nabla = \nabla' \iff \nabla \text{ と } \nabla' \text{ は同じ測地線を持つ.}$$

即ち，アフィン構造 ∇ を定めることは，その測地線を定めることと同値である．
射影構造については次のことが成り立つ．

定義 0.4 多様体（M，∇）上の曲線 x_t が準測地線であるとは，ある M 上の関数 $\psi(t)$ が存在して

$$\nabla_{\dot{x}_t} \dot{x}_t = \psi(t)\dot{x}_t$$

が成り立 つときを言う．

次はよく知られた事実である．

命題 0.5 $\nabla \sim \nabla' \iff \nabla$，$\nabla'$ が同じ準測地線をもつ．

多様体（M，∇）が準測地線 x_t を持つとする．このとき新しいパラメーター $s(t)$ を $\frac{ds}{dt} = exp(\int \psi(t)dt)$ をみたすようにとる．すると $\nabla_{\dot{x}_s}\dot{x}_s = 0$ となり，測地線となる．このことから次がわかる：∇ と ∇' が同じ準測地線をもつことは，∇ と ∇' 同じ形の測地線をもつことと同値である．ここで形が同じとは次のことを言う．曲線 $x_1(t)$, $x_2(t)$ がそれぞれ開区間 (a,b)，(c,d) で定義されているとき，微分同相写像 $f:(a,b)\to(c,d)$ で $x_2\circ f = x_1$ をみたすものが存在することである．

我々は特に平坦な射影構造，affine 構造について考えたかった．christoffel シンボル $\lambda^k_{ij} = 0$ となる接続を標準的な接続という．このとき射影構造，affine 構造が平坦であることを次のように定義する．

定義 0.6 n 次元多様体 M 上の射影構造 $[\nabla]$ (*resp. affine* 構造 ∇) が平坦であるとは，局所的に $[\nabla]$ (*resp.* ∇) が $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な *affine* 接続 ∇_0 と射影同値になる (*resp.* 等しい) ときをいう．

言い換えれば，$[\nabla]$ (resp. ∇) が平坦であるとは，局所的にその準測地線 (resp. 測地線) が $\boldsymbol{R}^n$ の直線 (resp. 速度一定な直線) に限るということである．

我々は特に Lie 群上で幾何構造を考える．このとき自然に左不変という条件が伴う．

定義 0.7 *Lie* 群 L 上の *affine* 構造 ∇ が左不変とは，左移動 $L_a : L\to L$ $(a\in L)$ が *affine* 構造を保つ，即ち $L_a^*\nabla = \nabla$ をみたすときをいう．

L 上の射影構造 $[\nabla]$ が左不変とは，$L_a^*\nabla \sim \nabla$ が成り立つときをいう．

言いかれば，affine 構造が左不変とは，左移動 L_a が測地線を測定線に移すことをいう．また射影構造が左不変とは，左移動 L_a が準測地線を準測地線に移すことをいう．

左不変平坦な射影構造を IFPS（invariant flat projective structure）といい，左不変平坦な affine 構造を IFAS（invariant flat affine structure）ということにする．上の定義から IFAS(∇) は IFPS($[\nabla]$) を誘導することに注意する．

0.2 IFPS と (N)-homomorpshim との対応

本節では Lie 群 L 上の IFPS と，(N)-homomorphism という L のリー環 $\mathfrak{l}$ 上のリー環準同形写像 との一対一対応について説明する．詳しくは ([1]) を参照のこと．

定義 0.8 写像 f をリー環 $\mathfrak{l}$ 上の準同形写像 $f:\mathfrak{l}\to\mathfrak{sl}(\mathfrak{l}\oplus\boldsymbol{R})$ とする．f は条件

$$f(X)Z = X \quad (X\in\mathfrak{l},\ \langle Z\rangle = \boldsymbol{R})$$

をみたすとき，(N)-*homomorphism* という．

Agaoka([1]) は次の一対一対応を証明している．

定理 0.9 次の写像 Φ が定義され，また全単射となる．

$$\Phi : \{L \text{ 上の } \textit{IFPS}\} \longrightarrow \{\mathfrak{l} \text{ 上の (N)-}\textit{homomorphism}\ \}$$

また ([1]) ではカルタン接続の理論から次も証明されている．この定理は Kobayashi-Nomizu ([6]) にも見つけられるものである．

定理 0.10 次の写像 Φ' が定義され，また全単射となる．

$\Phi' : \{L$ 上の *IFAS*$\} \longrightarrow \{f : \mathfrak{l} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{l}) \mid f$ は *Lie* 環準同形写像で，$f(X)Y - f(Y)X = [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{l})$ をみたす．$\}$

この２つの定理から，IFPS 及び IFAS の存在・非存在問題を，対応するリー環準同形写像の存在・非存在問題に帰着することができる．

0.3 IFPS and IFAS on low dimensional Lie groups

本節では Lie 群上での IFPS 及び IFAS の存在・非存在問題についてわかったことを紹介する．この問題を考えるにあたっては，§2 の結果から対応するリー環準同形写像の存在・非存在を決定すればよい．いくつか一般的な命題を述べた後，その応用例として低次元実 Lie 群上での IFPS，IFAS の存在・非存在問題についての結果を紹介する．具体的には５次元以下の実 Lie 環に対する分類結果 (Mubarakzyanov [7], [8]) を使って，全ての５次元以下の Lie 環について調べるという方法をとる．ここでは $Z(\mathfrak{l})$ は Lie 環 $\mathfrak{l}$ の中心を表し，$\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{k}$ は Lie 環 $\mathfrak{k}$ の $\mathfrak{h}$ による半直積を表すことにする．$[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ に注意する．

命題 0.11 $\mathfrak{k}$ を冪零 *Lie* 環で，その分解 $\mathfrak{k} = \oplus_{i \geq 1} \mathfrak{k}_i$ が条件 $[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_j] \subset \mathfrak{k}_{i+j} + Z(\mathfrak{k})$ をみたすとする．このとき $\mathfrak{k}$ は *IFAS* をもつ．

証明の概略．次のようにして線形写像 $g : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$ を定義する；

$$g(x)y = \frac{j}{i+j}[x, y] \quad (x \in \mathfrak{k}_i, y \in \mathfrak{k}_j).$$

このとき g は定理 0.10 における IFAS に対応する Lie 環準同形写像であることがわかる．従って上の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は IFAS をもつ． □

命題 0.11 の Lie 環 $\mathfrak{k}$ は，さらに次のような IFAS をもつ Lie 環 $\mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{k}$ に拡張することができる．

命題 0.12 $\mathfrak{h}$ を *IFAS* もつ *Lie* 環とし，$\mathfrak{k}$ を命題 *0.11* の条件をみたす *Lie* 環とする．半直積 $\mathfrak{l} = \mathfrak{h} \ltimes \mathfrak{k}$ は $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}_i] \subset \mathfrak{k}_i + Z(\mathfrak{k})$ をみたすとき *IFAS* をもつ．

この命題を５次元以下の実 Lie 環の分類結果 (Mubarakzyanov [7], [8]) に適用すると，$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \neq \mathfrak{l}$ をみたす多くの Lie 環が IFAS をもつことがわかる．このことを分類結果 ([7], [8]) にある Lie 環 $A_{5,39}$ を例として取り上げ説明する．Lie 環 $A_{5,39}$ は次のようにして定義される Lie 環である;

$$A_{5,39} \quad [X_1, X_2] = X_3, \qquad [X_1, X_4] = X_5, \quad [X_1, X_5] = -X_4,$$
$$[X_2, X_4] = X_4 \quad [X_2, X_5] = X_5.$$

まず $\mathfrak{h} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ は Heisenberg Lie 環であり，命題 0.11 の条件をみたすことから IFAS をもつ．そして $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 = \langle X_4, X_5 \rangle$ は可換なイデアルであり，条件 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}_1] \subset \mathfrak{k}_1$ をみたす．従って命題 0.12 から $A_{5,39}$ は IFAS をもつ．

一方 $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}$ をみたす Lie 環は IFAS を持たないことが Helmstetter([3]) により証明されている．しかしながら 5 次元以下については，$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}$ をみたす Lie 環は全て IFPS をもつことがわかる（ [1], [4]）．このようにして 5 次元以下の直和分解できない全ての Lie 環について，IFPS 及び IFAS の存在・非存在を決定できる．

次に 5 次元以下の直和 Lie 環について考える．まずいくつか一般的な命題を述べたあと，応用例として 5 次元以下の直和リー環をとりあげる．次の事実は以前から知られていたと考えられる．

事実 0.13 $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ を *IFAS* をもつ *Lie* 環とする．このとき $\mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ は *IFAS* をもつ．

IFPS については次のことがわかる．

命題 0.14 $\mathfrak{l}_1$，$\mathfrak{l}_2$ は *IFPS* をもつ *Lie* 環とする．このとき $\mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2 \oplus \boldsymbol{R}$ は *IFPS* をもつ．

注意．命題 0.14 において，一般には $\mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ は IFPS をもたない．反例としては $\mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3)$ がある．この Lie 環が IFPS をもたないことは次の結果 (Kobayashi-Nagano [5]) からわかる；単連結コンパクトな多様体 M が射影平坦な接続をもてば，M は S^n に微分同相である．

次の命題から特に 5 次元以下の直和リー環は全て IFAS をもつことがわかる．詳しくは [4] を参照のこと．

命題 0.15 *Lie* 環 $\mathfrak{l}_1$ が *IFPS* をもち，*Lie* 環 $\mathfrak{l}_2$ が *1-reducible* な *IFAS* をもつとする．このとき，$\mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ は *IFAS* をもつ．

以上により IFAS∇ が IFPS$[\nabla]$ を誘導することに注意すると，5 次元以下の実 Lie 環について次のことがわかる．

定理 0.16 *5* 次元以下の実 *Lie* 環 $\mathfrak{l}$ に対して次が成り立つ．
(1) $\mathfrak{l}$ は *IFPS* をもつ．
(2) $\mathfrak{l}$ は *IFAS* をもつ $\Longleftrightarrow$ $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \neq \mathfrak{l}$.

注意．定理 0.16 から，5 次元以下の全ての可解 Lie 環は IFAS をもつことがわかるが，例えば 10 から 12 次元には IFAS を持たない冪零 Lie 環が存在することが知られている（[2]）．

0.4 今後の課題

§3 で述べたように，5次元以下の実 Lie 環に対しては Lie 環の分類結果 ([7], [8]) を使用して，IFPS 及び IFAS の存在・非存在を決定した．6次元についても Lie 環の分類結果があり，そのほとんどについては IFPS 及び IFAS の存在・非存在を決定することができた．6次元では $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]=\mathfrak{l}$ となる Lie 環のうち多くは IFPS も持たないようである．今回問題となる Lie 環は $\mathfrak{o}(3)\ltimes\boldsymbol{R}^3$ や，Heisenberg Lie 環の $\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R})$ による半直積等であり，IFPS を持たないと予想している．今のところ，これらについては全ての表現 $f:\mathfrak{l}\to\mathfrak{l}\oplus\boldsymbol{R}$ にてついて (N)-homomorphism となるか否かを調べるという方法をとっている．今後の課題は IFPS が存在するためのいい必要条件を探っていくことと言える．また分類表に依らずに，IFPS 及び IFAS が存在する（又は存在しない）Lie 環の大きな族を見つけることも大きな課題である．

参考文献

[1] Y. Agaoka : Invariant flat projective structures on homogeneous spaces, Hokkaido Math. J. **11** (1982), 125–172.

[2] D. Burde : Affine structures on nilmanifolds, Internat. J. Math. **7** (1996), 599–616.

[3] J. Helmstetter : Radical d'une algèbre symétrique à gauche, Ann. Inst. Fourier **29** No.4 (1979), 17–35.

[4] H.Kato : Low dimensional Lie groups admitting left invariant flat projective or affine structures, preprint.

[5] S. Kobayashi and T. Nagano : On projective connections, J. Math. Mech. **13** (1964), 215–235.

[6] S. Kobayashi and K. Nomizu : Foundations of differential geometry. Vol. I. Reprint of the 1963 original.

[7] G. M. Mubarakzyanov : On solvable Lie algebras (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **32** (1963), 114–123.

[8] G. M. Mubarakzyanov : Classification of real structures of Lie algebras of fifth order (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **34** (1963), 99–106.

Email adress : katoh-in-math@hiroshima-u.ac.jp

On a representation of a local gauge group

安藤 浩志

京都大学理学研究科 数理解析研究所

Abstract.

本発表では無限次元 Lie 群の 1 種であるゲージ群 $C_c^\infty(M,G)$ の Boson Fock 空間上へのユニタリ表現を扱います. ゲージ変換を与える関数 ψ の台が含まれる領域 $\mathcal{O}$ を考えることで,von Neumann 環のネット $\mathcal{O}\mapsto\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ が得られますが, このネットと代数的場の量子論で考えられる局所観測量の代数の与えるネットの構造の違いを明らかにします. とりわけこの研究では (S) 型と呼ばれる作用素に着目します. これは Fock 空間の有界作用素全体の中で強稠密な部分*環をなしますが,(S) 型作用素の交換関係を利用して, この表現には交換子が 'ほとんどない' ことを示します. また, この (S) 型作用素の交換関係は自由場の代数構造を与える Weyl のユニタリ作用素の交換関係を連想させますが,Weyl ユニタリの生成する局所 von Neumann 環ネットとの違いを明らかにしたいと思います. はじめに §1 で簡単に Boson Fock 空間上の (S) 型作用素の性質および群のユニタリ表現のコホモロジーについて述べます. §2 でゲージ群の表現を定義し,§3 で得られた結果を述べます. (本文は常体で書きます)

1 準備

1.1 Boson Fock 空間と (S) 型表現

Hilbert 空間 H から作られる Boson Fock 空間 $\Gamma(H)=\bigoplus_{n\geq 0}H^{\hat{\otimes}n}$ を考える. $\Gamma(H)$ において、指数ベクトル $\left\{\mathrm{Exp}\,(h)=\left(1,h,\frac{h^{\hat{\otimes}2}}{\sqrt{2!}},\cdots,\frac{h^{\hat{\otimes}n}}{\sqrt{n!}},\cdots\right)\in\Gamma(H);h\in H\right\}$ 達は 1 次独立であり、かつ $\Gamma(H)$ の total set (1 次結合全体が稠密部分空間をなす) となる。この指数ベクトル達の集合 $\{\lambda\mathrm{Exp}\,(h);\ \lambda\in\mathbb{C},\ h\in H\}$ を保つようなユニタリ作用素を (S) 型の作用素という。このような作用素達は 3 つのパラメータで完全に特徴付けられる。すなわち、$(A,b,c)\in\mathcal{U}(H)\times H\times S^1$ に対して、($\mathcal{U}(H)$ は H のユニタリ作用素全体)

$$U_{A,b,c}\mathrm{Exp}\,x:=c\cdot e^{-\frac{1}{2}||b||^2-\langle Ax,b\rangle}\mathrm{Exp}\,(Ax+b),$$

によってユニタリ作用素 $U_{A,b,c}$ を定義すると、これは明らかに (S) 型であるが、実は次が成り立つ。

Theorem 1 (cf. [11]) 任意の (S) 型作用素 Ξ は $\Xi=U_{A,b,c}$ と唯一通りに書ける。さらに交換関係

$$U_{A,b,c}U_{A',b',c'}=\exp\left(i\mathrm{Im}\langle b,Ab'\rangle\right)U_{AA',b+Ab',cc'},$$

考慮すると、(S) 型作用素全体は強位相によって位相群とみなすとき、$\mathcal{U}(H)\times H\times\mathbb{T}$ に積

$$(A,b,c)(A',b',c'):=(AA',b+Ab',cc'\exp\left(i\mathrm{Im}\langle b,Ab'\rangle\right)).$$

を入れたものに位相群として同型である。ただし $\mathcal{U}(H)$ には強位相を入れる。 □

(S) 型作用素の 1 次結合全体は $\mathbb{B}(\Gamma(H))$ で弱 (強) 稠密である [2]。したがって (S) 型作用素は豊富に存在する。

1.2 群のコホモロジー

位相群 $\mathcal{G}$ の Hilbert 空間 H 上へのユニタリ表現 V が与えられたとき、$\beta:\Gamma\to H$ が $\mathcal{G}$ の V に関する 1-コサイクルであるとは、

$$\beta(g_1g_2)=\beta(g_1)+V(g_1)\beta(g_2)\ \ (g_1,g_2\in\mathcal{G}).$$

満たすことと定義する。これらはベクトル空間をなす。$c:\mathcal{G}\to\mathbb{T}$ を $c(g_1g_2)=c(g_1)c(g_2)\exp\left(i\mathrm{Im}\langle\beta(g_1),V(g_1)\beta(g_2)\rangle\right)$ を満たす写像とする。V,β,c が与えられると、荒木の方法によって $\Gamma(H)$ 上に (S) 型のユニタリ表現 $\mathrm{Exp}_{\beta,c}$ が次のように構成される: $\mathrm{Exp}_{\beta,c}V(g):=U_{V(g),\beta(g),c(g)}$、すなわち

$$\mathrm{Exp}_{\beta,c}V(g)\mathrm{Exp}\,x=c(g)\exp\left(-\frac{1}{2}||\beta(g)||^2-\langle V(g)x,\beta(g)\rangle\right)\mathrm{Exp}\,(V(g)x+\beta(g)).$$

特に V が $\mathcal{G}$ の実 Hilbert 空間 H_0 の直交表現として与えられているとき、これを複素化 $H=H_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 上にユニタリに拡張することができ、この場合には $c(g)\equiv1$ ととって表現 Exp_{β} を構成することができる。以下実際に考えるのは $\mathcal{G}=C_c^\infty(M,G)=\{\psi:M\overset{C^\infty}{\to}G;\mathrm{supp}(\psi)\text{ is compact }\}$ の場合である。一方 $v\in H$ に対して、1-コバウンダリ $\partial v:\mathcal{G}\to H$ を $\partial v(g):=V(g)v-v.$ と定義する。$\partial v\in Z^1(\mathcal{G},V)$ である。1-コバウンダリ全体 $B^1(\mathcal{G},V)$ は $Z^1(\mathcal{G},V)$ の部分空間なので、その商空間が考えられる。$H^1(\mathcal{G},V)=Z^1(\mathcal{G},V)/B^1(\mathcal{G},V)$ を 1-コホモロジー群という。2 つの 1-コサイクル U_{V,β_i} $(i=1,2)$ から荒木構成によって得られた表現の同値類は、そのコホモロジー類のみによる。つまり、β_1 と β_2 が $\beta_2(g)=\beta_1(g)+V(g)v-v$ という関係を満たせば、

$$U_{I,-v,1}U_{V(g),\beta_1(g),1}=U_{V(g),\beta_2(g),1}U_{I,-v,1},$$

となり得られる表現はユニタリ同値である。ただし、コホモロジー類が異なっても表現が同値となる可能性はある。特にコバウンダリから得られる表現は可約である: $\beta=\partial v$ から作る表現 $\mathrm{Exp}_{V,\beta}$ は Exp_0V に同値で、これは例えば不変部分空間 $\mathbb{C}\mathrm{Exp}\,(0)$ を持つ。

2 ゲージ群 $C_c^\infty(M,G)$ の表現

以下、$\mathcal{G}=C_c^\infty(M,G)$ ととる。ただし M は Riemann 多様体でその体積測度を dv とし、G は連結コンパクト半単純 Lie 群、その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする。$C_c^\infty(M,G)$ の群演算は、各点ごとの積とする。この群は (自明な) ファイバー束 $P\times_{\mathrm{Ad}}G,\ P=M\times G.$ の切断全体と同一視されるものである。この群に適当な位相を入れて核型 Lie 群 (単位元の近傍で、核型空間の 0 の近傍に同相となるようなものが存在) と考えることができる。$C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ はその Lie 環となる。$\mathfrak{g}$ には Killing 形式の反対符号で内積 $-B(\cdot,\cdot)$ を与え、空間 $C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ に内積を導入する:

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle:=\int_M\mathrm{tr}\,(\omega_1^*(x)\omega_2(x))\,dv(x)$$

ただし、$\omega(x)^*$ を $\omega(x):T_x(M)\to\mathfrak{g}$ の随伴と考える。tr は $T_x(M)$ のトレースとする。この内積は $V(\psi)\omega(x):=(\mathrm{Ad}_{\psi(x)})_*(\omega(x)),\quad(x\in M,\omega\in\Omega_c^1(M,\mathfrak{g}),\psi\in C_c^\infty(M,G)).$ で与えられる直交表現 V に関して不変である。この内積による $C_c^\infty(M,\mathfrak{g})$ の完備化を H_0、その複素化を H とする。V は H のユニタリ表現に拡張される。次に表現 V に関する 1-コサイクルとして、Maurer-Cartan コサイクル

$$\beta(\psi)(x):=d\psi(x)\cdot\psi(x)^{-1}\left(=(R_{\psi(x)^{-1}})_{*\ \psi(x)}(d\psi_x(\cdot))\right):T_x(M)\to\mathfrak{g}$$

を定義する。これによって表現 $\Gamma(H)$ 上にユニタリ表現 $U(\psi)=U_{V(\psi),\beta(\psi)}$ が定義される。V のコサイクルの局所的性質として、次が成り立つ。

Proposition 2 (H. A) $\gamma\in Z^1(C_c^\infty(M,G),V)$ とし、P_ψ^V を部分空間 $\{\omega\in H;\ V(\psi)\omega=\omega\}$ への直交射影とする。$\psi,\psi_1,\psi_2,\psi_3\ \in C_c^\infty(M,G)$ とすると、次が成り立つ。
(1) $\mathrm{supp}(\gamma(\psi))\subset\mathrm{supp}(\psi)$.
(2) 1-コサイクルの値は局所的に決まる：ψ_1とψ_2 が開集合 $U\subset M$ 上一致すれば、$\gamma(\psi_1)$ と$\gamma(\psi_2)$ も U 上一致する。

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\gamma(\psi_1\psi_2^n\psi_3)=V(\psi_1)P^V_{\psi_2}\gamma(\psi_2)$. つまり左辺の極限は存在し、かつ ψ_3 によらない。

(4) ある ψ に対して、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\gamma(\psi^n)\neq 0$ であれば[*1]、γ はコバウンダリではない。とくに Maurer-Cartan コサイクル β は非自明なコサイクルである：$\beta\notin B^1(H,V)$. □

証明は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の中心が半単純性によって $\{0\}$ であること、及び von Neumann の平均エルゴード定理に基づく。非自明な中心が存在する場合 (1)(2) は成り立たない。

2.1 Boson Fock 空間と $L^2(E',\mu)$ の同型

上述のように表現は Boson Fock 空間上に定義されるが、この表現はもう一つの同値な構成法が存在する。E を実核型 LF 空間とする。(LF: Fréchet 空間の帰納極限) E 上に正定値内積 Q が与えられると、Bochner-Minlos の定理 [5] によって、双対空間 E' 上に Gauss 測度 μ が、次を満たすように存在する。

$$\int_{E'} e^{i\langle\chi,F\rangle}d\mu(\chi)=\exp\left(-\frac{1}{2}Q(F,F)\right).$$

H_0 を E の Q に関する完備化、$H:=H_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ をその複素化とする。このとき標準的な同型 $\theta:\ \Gamma(H)\to L^2(E',\mu;\mathbb{C})$ が存在する：

$$\theta\mathrm{Exp}\ x=e^{\frac{1}{2}||x||^2+i\langle\cdot,x\rangle}.$$

V が位相群 $\mathcal{G}$ の E 上への Q に関する強連続直交表現であるとき、それは H 上のユニタリ表現に拡張できる。さらに E' 上に双対作用を定義することができる：

$$\langle V(\gamma)\chi,F\rangle:=\langle\chi,V(\gamma)^{-1}F\rangle,F\in E,\chi\in E'.$$

このようにして $\Gamma(H)$ 上の表現 $\mathrm{Exp}_{\ \beta}$ を同型 θ と双対作用を通して $L^2(E',\mu)$ 上の表現にうつすことができる。具体的には

$$[\mathrm{Exp}_{\ \beta}V(\gamma)\Phi](\chi)=e^{i\langle\chi,b(\gamma)\rangle}\Phi(V(\gamma)^{-1}\chi).$$

となる。ゲージ群の表現 U に関しては約 40 年の研究の歴史があり、70 年代に Gelfand-Graev-Veršic [6] ($\mathcal{G}=SL(2,R),R=$ 関数環) と、Ismagilov [1] ($G=SU(2)$ の場合) によって初めて考察された。上に提示した形の Fock 空間上の定義は Gelfand-Graev-Veršic [3] に初めて現れ、その後この表現の既約性をめぐって多くの研究がなされた。現在までに得られている結果によると既約性は高次元 $\dim(M)\geq 3$ では常に成り立ち ([3, 4, 8, 10, 16])、$\dim(M)=2$ ではルート系のサイズが十分大きい時に既約 [4, 8, 10]、$\dim(M)=1$ では可約 [7] となっている。2 次元の場合は完全には解決されていない。

3 Local net $\mathcal{O}\mapsto\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ の構造

(S) 型の交換子は交換関係

$$U_{A,b,c}U_{A',b',c'}=\exp\left(i\ \mathrm{Im}\langle b,Ab'\rangle\right)U_{AA',b+Ab',cc'},$$

を満たす。これは自由場の代数を生成する Weyl のユニタリ

$$W(h)W(k)=\exp\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\ \langle h,k\rangle\right)W(h+k).$$

と類似の交換関係であり、両者の代数構造の間にも類似点があると考えられる。しかし、この表現の生成する局所 von Neumann 環のネット $\mathcal{M}(\mathcal{O})'':=\mathrm{Lin}\{U(\psi);\mathrm{supp}(\psi)\subset\mathcal{O}\}''$ は標準的な代数的場の理論で成り立つとされるいくつかの性質を満たさない。まず代数的場の理論の枠組を概観する。時空の各点における量子場 $\phi(x)$ という概念は様々な困難を抱えている。Wightman 理論においては ϕ を作用素値超関数 $f\mapsto\phi(f)(f$ は

[*1] この極限は存在する: (3) で $\psi_1=\psi_3=1,\ \psi_2=\psi$. ととればよい。

試験関数) で置き換え、これらが Hilbert 空間 H の共通の稠密部分空間 D 上で定義され、局所性やスペクトル条件、真空の一意性などの相対論的場の量子論で成り立つと考えられる一定の条件を満たす理論を模索した。これに対し Haag-Kastler らは非有界作用素と超関数の扱いに伴う困難を避け、かつ量子場自身でなく、量子場がもたらす観測量に重きを置き、時空領域 $\mathcal{O}$ ごとにそこにおける観測量が生成する von Neumann 環 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ を考え、これらが所定の条件を満たすとしたときにどのような事が帰結されるか、という方向であるべき場の量子論の探求を開始した。(詳細は [13]) H 上の von Neumann 環 $\mathcal{M}$ とは、$\mathbb{B}(H)$ の*-部分環であって、弱位相で閉じたものである。これは von Neumann の再交換子定理によって、$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ という条件と同値。(ただし、$\mathcal{M}'$は $\mathcal{M}$ の全ての元と交換する $\mathbb{B}(H)$ の元全体のことで、交換子と呼ばれる。) Wightman 理論との接点は、$\mathcal{A}(\mathcal{O})$ として $\phi(f)(\mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{O})$ 自身ではなくこれらのスペクトル射影が生成する von Neumann 代数を $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ を考えたことに相当する。[*2]Reeh-Schlieder の定理によると、local net$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$(真空ベクトル Ω) がスペクトル条件と弱加法性と呼ばれる条件を満たすとき、任意の時空の開領域 $\mathcal{O}$ について $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ は Ω に対して巡回・分離的である。ここに Ω が $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ に対して巡回的とは $\mathcal{A}(\mathcal{O})\Omega$ が H で稠密である事、分離的とは $Q \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ に対して $Q\Omega = 0 \Leftrightarrow Q = 0$ が成り立つ事を言う。[*3]特に自由場がこのような性質を満たすことは [14] によって証明され、後に [15] で、自由場の持つモジュラー構造とシンプレクティック構造の密接な関係が富田竹崎理論を通じて明らかにされた。この節の初めに述べたように自由場の代数は Weyl のユニタリと呼ばれる作用素 $W(h)$ たちで生成され、これらは交換関係 $W(h)W(k) = e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Im}\langle h,k\rangle}W(h+k)$ を満たし、(S) 型作用素の交換関係を類推させる。従って、(S) 型表現であるゲージ群のエネルギー表現についてもその local net $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})'' = \{U(\psi);\ \mathrm{supp}(\psi) \subset \mathcal{O}\}''$ の構造を調べて見ることは興味深いことと思われる。そのような動機のもと、以下の定理が成り立つことを証明した。$U_{A,b} := U_{A,b,1}$、$\mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{U_{A,b}; (A,b) \in \mathcal{U}(H) \times H\}$. とする。$\mathcal{O} \subset M$ を開集合とし、von Neumann 環のネット $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})''$ を考える。また同時に (S) 型作用素の生成する*-環

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) := \mathrm{Lin}\{U_{A,b}; A|_{H(\mathcal{O}')} = \mathrm{Id}_{H(\mathcal{O}')},\ A_i H(\mathcal{O}) \subset H(\mathcal{O}),\ \mathrm{Int}(\mathrm{supp}(b) \cap \mathcal{O}') = \phi\}.$$

も考える。このとき、次が成り立つ。

Theorem 3 [H. A]
(1) $\mathcal{M}(\mathcal{O})' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{O}')$. 特に $\mathcal{M}' \cap \mathcal{A} = \mathbb{C}1$. $\mathcal{M} := \mathcal{M}(M)$.
(2) 局所環のネット $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{M}(\mathcal{O})''$ は次の性質を満たす:

$$\begin{cases} \text{単調性}: \ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{O}_1)'' \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_2)''. \\ \text{局所性}: \ \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{O}_1)'' \subset \mathcal{M}(\mathcal{O}_2)'. \\ \text{加法性}: \ M = \bigcup_i \mathcal{O}_i \Rightarrow \mathcal{M}'' = \left(\bigcup_i \mathcal{M}(\mathcal{O}_i)\right)''. \end{cases}$$

しかし Fock 真空 $\Omega := \mathrm{Exp}\ (0)$ は、任意の局所環 $\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ $(\mathcal{O} \neq \phi, M)$ に対して巡回的でない。さらに表現が既約ならば Ω は $\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ に対して分離的でもない。またこのとき任意の局所環 $\mathcal{M}(\mathcal{O})''$ は I 型因子環となる。□

(2) は容易で、(1) は議論が必要になる。

4 平坦束での基本群 $\pi_1(M)$ の作用

ゲージ変換群は任意の主 G 束 P に対して定義可能で、非自明な主束での表現の既約性の判定は現在でもほとんど進展がない。その主な原因は先行する研究がホワイトノイズ解析における Fock 展開を利用した [16] の方法を除き、ほぼ全てが自明束のゲージ群が豊富に可換部分群を持つことを利用し、可換群の表現のスペクトル測度達の特異性を調べるという方法に拠っていたからである [7]。一般の主束においては底空間と構造群の間の位相構造のからみあいを考慮する必要があり、このように可換部分群の手法は適用し辛い。本研究においても決定的な結論は得られていないが、今後の課題を示唆するものとして、平坦束 [?] でかつ基本群が有限の場合に次のようにゲージ群 $\Gamma(P \times_{\mathrm{Ad}} G)$ を普遍被覆空間 $\tilde{M}$ 上のゲージ群 $C_c^\infty(\tilde{M}, G)$ に埋め込み、かつ様々な関数空間に基本群が作用する様子を記述することとした。

[*2] この Wightman 理論との往復にも微妙な問題が存在する
[*3] このような巡回分離ベクトルが存在するとき、その von Neumann 環に対して富田-竹崎のモジュラー理論が $\mathfrak{A} = \mathcal{A}(\mathcal{O})\Omega$ を左 Hilbert 代数として展開できる。

Theorem 4
(1) $\pi : P \overset{G}{\to} M$ を基本群 $\pi_1(M)$ が有限群である平坦主 G 束とする。このとき、M 普遍被覆空間 $\tilde{M}$ と平坦主束 P に対応するホロノミー準同型 $\rho : \pi_1(M) \to G$ に対して、空間 $\Gamma_c(P \times_{\mathrm{Ad}} G)$ は $C_c^\infty(\tilde{M}, G)$ の部分群

$$\mathcal{G}_\rho := \{\psi \in C_c^\infty(\tilde{M}, G);\ \psi(\gamma \cdot y) = \rho(\gamma)\psi(y)\rho(\gamma)^{-1},\ \forall \gamma \in \pi_1(M)\}$$

と同型である。従ってゲージ群は $\tilde{M}$ 上の自明束のゲージ群に埋め込むことができる。
$\varphi \in C_c^\infty(\tilde{M}, \mathfrak{g})$, $\gamma \in \pi_1(M)$, $\psi \in C_c^\infty(\tilde{M}, G)$ とする。このとき、次が成り立つ。
(2) $\gamma \cdot d\varphi = d(\gamma \cdot \varphi)$.
(3) $\beta(\gamma \cdot \psi) = \gamma \cdot \beta(\psi)$.
(4) $V(\gamma\psi) = \gamma V(\psi)\gamma^{-1}$.
(5) $U(\gamma\psi) = \gamma U(\psi)\gamma^{-1}$.
ただし、$\gamma\mathrm{Exp}\ (\omega) := \mathrm{Exp}\ (\gamma \cdot \omega)$. □

References

[1] R.S.Ismagilov : On unitary representations of the group $C_0^\infty(X, G), G = SU_2$., Math. USSR Sb. 29 105-117On (1976)
[2] R.S.Ismagilov : Representations of Infinite-Dimensional Groups (Translations of Mathematical Monographs), American Mathematical Society (1996)
[3] I.M.Gelfand, M.I.Graev, A.M.Veršic: Representations of the group of smooth mappings of a manifold X into a compact Lie group. Compositio Mathematica,tome **35**, n^{o}3(1977), p.299-334.
[4] I.M.Gelfand, M.I.Graev, A.M.Veršic: Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group. Compositio Mathematica,tome **42**, n^{o}2(1980), p.217-243.
[5] I.M.Gelfand,N.Ya.Vilenkin: Generalized Functions Vol 4: Applications of Harmonic Analysis., Academic Press (1964)
[6] A.M.Veršik, I.M.Gelfand, and M.I.Graev : Representations of the group SL(2, R), where R is a ring of functions. (Russian) Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 5(173), 83-128.
[7] S.Albeverio et al: Noncommutative Distributions-Unitary Representation of Gauge Groups and Algebras,Monographs and textbooks in pure and applied mathematics.,vol 175, Marcel-Dekker(1993)
[8] S.Albeverio, R.Høgh-Krohn, D.Testard: Irreducibility and Reducibility for the Energy Representations of the Group of Mappings of a Riemannian Manifold into a Compact Semisimple Lie Group. J.Funct.Anal. **41**. 378-396 (1981)
[9] S.Albeverio, R.Hoegh-Krohn, D.Testard and A. Veršic : Factorial representations of path groups. J.Funct.Anal. **51** (1983), no.1, 115-131.
[10] Nolan R. Wallach: On the irreducibility and inequivalence of unitary representations of gauge groups. Compositio Mathematica,tome **64** n^o.1 (1987),p.3-29.
[11] A.Guichardet: Symmetric Hilbert spaces and Related Topics,Lecture Notes in Math.,vol **261**, Springer, Berlin (1972)
[12] S.Morita: Geometry of Characteristic Classes,(English translation) American Mathematical Society (2001)
[13] R.Haag : Local Quantum Physics-Fields, Particles and Algebras., Springer(1992)
[14] H.Araki : A Lattice of Von Neumann Algebras Associated with the Quantum Theory of a Free Bose Field., J.Math.Phys.**4**, 1343 (1963)
[15] JP Eckmann, K Osterwalder : An application of Tomita' s theory of modular Hilbert algebras: Duality for free Bose fields., J.Funct.Anal (1973)
[16] Y.Shimada : On irreducibility of the energy representation of the gauge group and the white noise distribution theory., Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics vol **8**, issue **2**, pp153-177 (2005)
[17] F.Figliolini, D.Guido : On the Type of Second Quantization Factors, Journal of Operator Theory, **31** (1994), 229-252.

Diffused interface model for premixed flame equation

石田　麻佑美 (北海道大学大学院理学院数学専攻 M2)
利根川　吉廣 (北海道大学大学院理学研究院数学部門)

1　導入

本稿では $\varepsilon > 0$ に対して，ある初期値を与えて以下のような放物型方程式の特異極限問題を考える;

$$G_t^\varepsilon - \Delta G^\varepsilon - \frac{(G^\varepsilon + \varepsilon\alpha(x,t))|\nabla G^\varepsilon|}{\varepsilon} = 0 \qquad \text{in } R^n \times (0, T^*]. \tag{1}$$

但し, $\alpha(x,t)$ は t について有界で, 更に x についてリプシッツ連続であるとする.
つまり,

$$|\alpha(x,t)| \le K, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T^*],$$
$$|\alpha(x,t) - \alpha(y,t)| \le L|x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T^*]$$

である. これは，大島ら [10] により紹介された予混合火炎の伝播を表す方程式を単純化したものである.

1.1　予混合火炎について

予混合火炎とは, 樺山ら [7] によると, 燃料と酸化剤が予め混合してできる予混合気が燃焼するときに形成される火炎である. そして予混合火炎には, 低温の未燃領域と高温の既燃領域が非常に薄く自由に変形する火炎面により分けられるという特徴がある. 大島 [11] によると, 予混合火炎の研究には, flamelet アプローチというものが用いられる. 火炎は気流速度で移流しつつ, 一定速度で未燃領域に向かって伝播する微小な平面火炎片が連なったものとして近似される. そしてその火炎片を追跡する方法が, flamelet アプローチである. 更に, その解析モデルとして, 一般化された火炎伝播の方程式

$$G_t + u_j G_{x_j} = S|\nabla G|$$

がしばしば用いられる. ここで, G は指標関数で, u_j は気流速度, S は火炎伝播速度を表す. しかし, この方程式は数値計算を行う上で, いくつかの問題があった. そこで, 大島 [10] によって, 以下のような修正式が提案された;

$$G_t + u_j G_{x_j} = \{S + S_1(G - G_0)\}|\nabla G| + \Gamma G_{x_j x_j}.$$

この方程式は, 反応進行度を指標変数として火炎内分布を実験値に基づき, Hyperbolic Tangent 関数で近似することで, 稲毛 [6] により独自に導出されている.

1.2 本研究の目的

本稿では, 予混合火炎の伝播を表す方程式 (1) に対する解の $\varepsilon \to +0$ 極限での特徴を考察する. 火炎面からの距離 $d(x,t)$ に Hyperbolic Tangent 関数を合成した $G^\varepsilon(x,t) := \tanh(\frac{d(x,t)}{2\varepsilon})$ を (1) に代入して, 形式的に計算をすると,

$$d_t(x,t) = \Delta d(x,t) + \alpha(x,t)$$

となるので, 予混合火炎の火炎面の動きは曲面の発展方程式

$$V = K_M + \alpha \tag{2}$$

に沿ったものになることが予想される. ここで, V は火炎面の成長速度, K_M は平均曲率, α は (1) の α である.

本稿の目的は, 任意の時刻 $t \in (0, T^*]$ において, $\varepsilon \to +0$ としたときに, 火炎面の挙動が, 曲面の発展方程式の等高面方程式

$$u_t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{u_{x_i}u_{x_j}}{|\nabla u|^2}\right)u_{x_ix_j} + \alpha(x,t)|\nabla u| \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T^*] \tag{3}$$

により記述される界面の動きに沿って発展していることを数学的に示すことである. $\alpha \equiv 0$, つまり (2) が平均曲率流方程式の場合は, Evans-Soner-Souganidis [2] によって, Allen-Cahn 方程式に対して, 同様の結果が示されている. そして, この証明には粘性解の議論が用いられている. 今回はその方法を応用することにより, 主結果を得た.

1.3 曲面の発展方程式

曲面の発展方程式は, 界面の運動を記述する方程式である. 界面が動く際に, 有限時間内で特異点を生じて, かつ界面はまだその時刻で消滅しない場合がある. その場合にグラフや媒介変数を用いて, 特異点が生じた後でも追跡することは難しい. そこで考えられたのが, 等高面の方法である. 等高面の方法は, 太田-Jasnow-川崎 [8] の論文で初めて現れた. その後, Osher-Sethian[9] により, 等高面を利用する数値計算の重要性が指摘された. しかし, この方法を数学的に実現するためには, いくつかの問題があった. 等高面方程式の初期値問題の大域一意可解性と運動の一意性である. それらの問題を解決したのが, 陳-儀我-後藤 [1] と Evans-Spruck[3] の研究である. 彼らは, 微分方程式の最適制御問題をきっかけにして発展した粘性解の理論を等高面の方法に応用したのである. そして, その後もたくさんの研究がなされている. 詳しい事は, 儀我-陳 [4] や儀我 [5] を参考にされたい.

2 主結果

2.1 予混合火炎の伝播を表す方程式の粘性優解

儀我 [5] によると, 曲面の発展方程式の等高面方程式 (3) の連続な粘性解が存在する. その粘性解を u とするとき,

$$\begin{aligned} I_t &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, u(x,t) > 0\}, \\ \Gamma_t &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, u(x,t) = 0\}, \qquad 0 \le t \le T^* \\ O_t &:= \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, u(x,t) < 0\}, \end{aligned}$$

とする. 更に, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \le T \le T^*$ に対して,

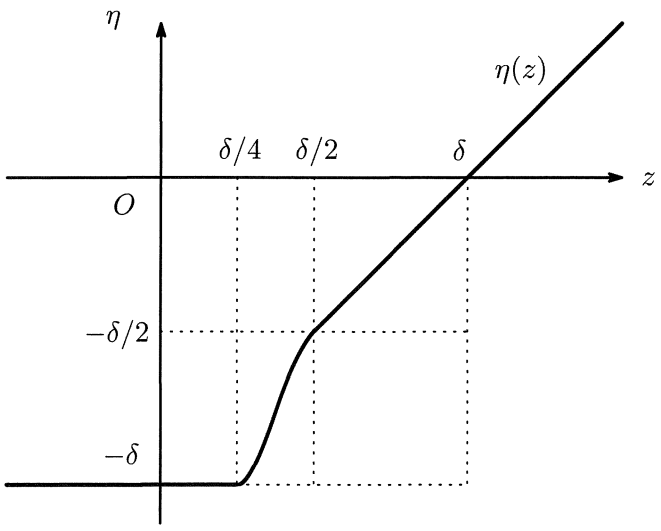
$$d(x,t) := \begin{cases} \mathrm{dist}(x, \Gamma_t) & \text{if } x \in I_t, \\ 0 & \text{if } x \in \Gamma_t, \\ -\mathrm{dist}(x, \Gamma_t) & \text{if } x \in O_t, \end{cases}$$

とする. この d のことを符号付き距離関数と呼ぶことにする.

補助関数 η を用いて, 予混合火炎の伝播を表す方程式の粘性優解を次のように構成した;

$$w^\varepsilon(x,t) := \tanh\left(\frac{\eta(d(x,t)) + (T^*+1)\varepsilon^2 t}{2\varepsilon}\right) + \varepsilon^3(t+1).$$

但し, η は次のような関数である;



以上より, 得られたのが主結果の証明のカギとなる次の補題である;

補題

$0 < T \leq T^*$ とする. d を符号付き距離関数とする. このとき, ある十分小さい ε_0 が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ と $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T])$ に対して, ある (x_0, t_0) が存在して

$$\min\{(w^\varepsilon - \varphi)(x,t) \,|\, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T]\} = (w^\varepsilon - \varphi)(x_0, t_0)$$

となれば,

$$\varphi_t - \Delta\varphi - \frac{(\varphi + \varepsilon\alpha(x,t))|\nabla\varphi|}{\varepsilon} > 0 \quad \text{at } (x_0, t_0)$$

となる.

2.2 予混合火炎の伝播を表す方程式における漸近挙動

以下で特別な初期条件を与えて, 予混合火炎の方程式

$$\begin{cases} G_t^\varepsilon - \Delta G^\varepsilon - \dfrac{(G^\varepsilon + \varepsilon\alpha(x,t))|\nabla G^\varepsilon|}{\varepsilon} = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0, T^*], \\ G^\varepsilon(x,0) = h^\varepsilon(x) & \text{on} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} G^\varepsilon(x,t) = -1, & 0 \leq t \leq T^* \end{cases}$$

に対して, 古典解が存在するとして, その解の挙動について調べる.
U を $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな境界 Γ_0 を持つ有界で連結な開集合とする. また, d_0 は Γ_0 の符号付き距離関数であるとして,

$$h^\varepsilon(x) = \tanh\left(\frac{d_0(x)}{2\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

であるとする. このとき, 以下のような主結果が得られた.

主結果

曲面の発展方程式の粘性解を u として,

$$I := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T^*] \,|\, u(x,t) > 0\},$$
$$O := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T^*] \,|\, u(x,t) < 0\}$$

とする. このとき, 予混合火炎の伝播を表す方程式の古典解 G^ε について, 以下の 2 つが成り立つ;

(i) $\varepsilon \to 0$ のとき, I に含まれる任意のコンパクト集合上で一様に $G^\varepsilon \to 1$.

(ii) $\varepsilon \to 0$ のとき, O に含まれる任意のコンパクト集合上で一様に $G^\varepsilon \to -1$.

つまりこの主結果から, $\varepsilon \to 0$ としたとき, 曲面の発展方程式の等高面方程式によって記述される動く界面の内側・外側はそれぞれ, 予混合火炎の火炎面の未燃領域・既燃領域になることがわかる.

参考文献

[1] Y. G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, J. Diff. Geom. 33 (1991), 749–786.

[2] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Phase transition and generalized motion by mean curvature, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 1097–1123.

[3] L. C. Evans and J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature I, J. Diff. Geom. 33 (1991), 635–681.

[4] 儀我美一, 陳蘊剛, 動く曲面を追いかけて, 日本評論社 (1996).

[5] Y. Giga, Surface Evolution Equation: A Level Set Approach, Birkhauser (2006).

[6] 稲毛真一, 新たな乱流拡散燃焼モデルの提案とその評価, 日本流体力学会 2007 年会講演論文.

[7] 樺山紘一, 河野通方, 下村通子, 徳本恒徳, 平野敏右, 火の百科事典：火・熱・光 - プロメテウスからロケットまで, 丸善 (1999).

[8] T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki, Universal scaling in the motion of random interfaces, Physics Review Letters 49 (1982), 1223–1226.

[9] S. Osher and J. A. Sethian, Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations, J. Comp. Phys. 79 (1988), 12–49

[10] N. Oshima, New approaches for premixed flame modeling in view of fluid dynamics, Combustion Theory and Modeling, to appear.

[11] 大島伸行, 界面の数学的理解に基づく火炎モデルの再構築, 第 5 回数学連携サロンアブストラクト.

回転対称性を考慮した境界要素法

Rotational symmetry applied to boundary element analysis

北海道大学大学院工学研究科量子理工学専攻
石丸武志 (Takeshi Ishimaru)

Abstract:

This work is to develop an efficient boundary element technique for solving a potential problem with a geometry having rotational symmetry. When assuming an n-fold rotational symmetry, the system matrix becomes a cyclic one with the result that the matrix size is reduced to $1/n^2$. Results of test calculations demonstrate the validity of the present formulation. The author's research group has a plan to apply this simplified method to analyze fusion plasma that has a helical geometry.

1. 背景

核融合装置では運転制御上，核融合炉内部のプラズマ境界形状を知ることが極めて重要となるが，炉内のプラズマ温度は 1 億度を超えるため，直接的な測定は困難である．そのため，プラズマ外部に配置した磁気センサーの信号から，間接的にプラズマ境界形状を逆解析するという手法が採られる．

トカマク型のように回転軸対称形状をしたプラズマは，2 次元問題に近似できる．この場合は，磁気センサー信号からプラズマの位置と形状を同定する逆解析のために Cauchy 条件面法[1,2]と呼ばれる手法が確立されている．ここで Cauchy 条件とは，Dirichlet 条件（磁束）と Neumann 条件（磁場）が共に未知な閉曲面をいう．一方，ヘリカル型などの非軸対称なプラズマは 3 次元問題となる．3 次元問題に対して Cauchy 条件面法が定式化された例はない．2 次元 Cauchy 条件面法に比べて未知数の数が増大する一方で，配置できる磁気センサーの数には限りがある．このようなことから，3 次元 Cauchy 条件面法において逆解析の精度の良い解が求まるか否かは未解明である．

ところで，ヘリカル型核融合装置のプラズマは回転軸対称ではないものの，$1/n$ の回転対称性を有している．ヘリカル形状の主軸を回転中心としてプラズマ全体を円周方向に n 分割し，分割後の $1/n$ 形状のみの計算領域に全磁気センサー信号を集約させれば，磁気センサーの数に比する未知数の数を低減できる．こうすれば，計算コストの削減だけではなく，逆解析の解の精度向上が期待できる可能性がある．

本研究では，回転対称性を考慮した実用的な3次元 Cauchy 条件面法の開発に先駆けて，簡単な 2 次元ラプラス方程式を解く境界要素法コードに対して回転対称性を考慮した場合の定式化を試み，テスト計算によりその妥当性を検証した．

2． 境界要素法

境界要素法（BEM: Boundary Element Method）[3] では，対応する境界積分方程式を離散化し，境界表面上の節点値に関する連立1次方程式を解く問題に帰着する．2次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

を例に，以下にそのあらましを記す．式(1)に対応させて

$$\nabla^2 u_i^* + \delta_i = 0 \tag{2}$$

を考える．式(2)を満たすu_i^*は基本解とよばれるもので，いまの場合，その具体形は，

$$u_i^* = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3}$$

で与えられる．ここに，rは点iから別の任意の点までの直線距離を表す．このようにしたとき，式(1)に対応する境界積分方程式は境界Γに対して，

$$c_i u_i = \int_\Gamma \left(u_i^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{4}$$

のように与えられる[3]．点iが領域内部にあるときは $c_i = 1$，点iが滑らかな境界上にある場合は$c_i = 1/2$となる．境界要素を用いて式(4)を離散化すれば

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \tag{5}$$

のような行列方程式が得られる．ここに，$\mathbf{u}$, $\mathbf{q}$ はそれぞれ境界Γ上のディリクレ条件u，ノイマン条件$q = \partial u / \partial n$のベクトルである．

3． 回転対称性の考慮

境界Γをn個のセグメント（$\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$）に分割した場合，式(5)は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{H}_{1,2} & \cdots & \mathbf{H}_{1,n} \\ \mathbf{H}_{1,n} & \mathbf{H}_{1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{H}_{1,2} & \mathbf{H}_{1,3} & \cdots & \mathbf{H}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{1,2} & \cdots & \mathbf{G}_{1,n} \\ \mathbf{G}_{1,n} & \mathbf{G}_{1,1} & \cdots & \mathbf{G}_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{G}_{1,2} & \mathbf{G}_{1,3} & \cdots & \mathbf{G}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{q}_1 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

とかくことができる．いま，境界Γの境界条件と幾何形状に$1/n$の回転対称性があるとすれば，式(6)の両辺のベクトルは$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \cdots = \mathbf{u}_n$および$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \cdots = \mathbf{q}_n$となる．同時に，両辺の行列内には同一の副行列が周期的に現れる．したがって，$1/n$の回転対称性を考慮した行列方程式は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{H}_{1,2} & \cdots & \mathbf{H}_{1,n} \\ \mathbf{H}_{1,n} & \mathbf{H}_{1,1} & \cdots & \mathbf{H}_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{H}_{1,2} & \mathbf{H}_{1,3} & \cdots & \mathbf{H}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{u}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1} & \mathbf{G}_{1,2} & \cdots & \mathbf{G}_{1,n} \\ \mathbf{G}_{1,n} & \mathbf{G}_{1,1} & \cdots & \mathbf{G}_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{G}_{1,2} & \mathbf{G}_{1,3} & \cdots & \mathbf{G}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{q}_1 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

とかき表すことができ，さらに

$$\left[\mathbf{H}_{1,1} + \mathbf{H}_{1,2} + \cdots + \mathbf{H}_{1,n}\right]\{\mathbf{u}_1\} = \left[\mathbf{G}_{1,1} + \mathbf{G}_{1,2} + \cdots + \mathbf{G}_{1,n}\right]\{\mathbf{q}_1\} \tag{8}$$

と極めて簡素化されることがわかる．この場合，ベクトルの成分は$1/n$，行列の成分は実に$1/n^2$まで削減されている．この定式化によるもうひとつのメリットは対称面に境界要素を張る必要がないことであり，周期境界条件が自然に満たされている．

4．　回転移動の1次変換の式

式(8)に対して，境界Γ_1に沿ってJ個のメッシュ点座標データ

$$(x_j^{(1)}, y_j^{(1)}),\ (j = 1, 2, \cdots, J)$$

が入力として与えられる．これを用いれば，境界Γ_1に対応する副行列$\mathbf{H}_{1,1}$, $\mathbf{G}_{1,1}$が境界積分によって計算できる．しかし，$\mathbf{H}_{1,2}, \mathbf{H}_{1,3}, \cdots, \mathbf{H}_{1,n}$および$\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \cdots, \mathbf{G}_n$を求めるためには残る$n-1$個の境界$\Gamma_2, \Gamma_3, \cdots, \Gamma_n$のそれぞれに沿ったメッシュ点座標データ

$$(x_j^{(k)}, y_j^{(k)}),\ (k = 2, 3, \cdots, n;\ \ j = 1, 2, \cdots, J)$$

が必要である．これらは次のようにして求める．

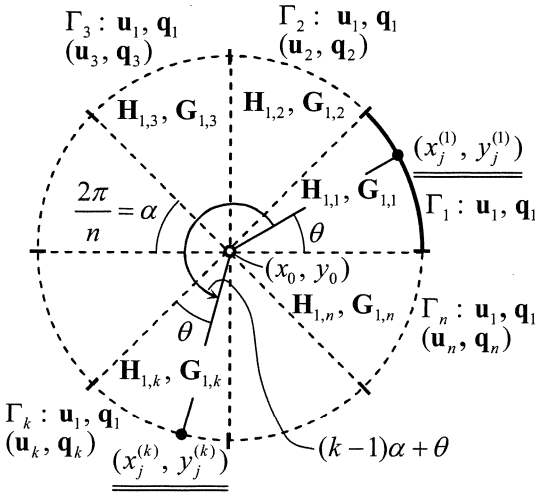


図1　$1/n$回転対称を有する境界の分割

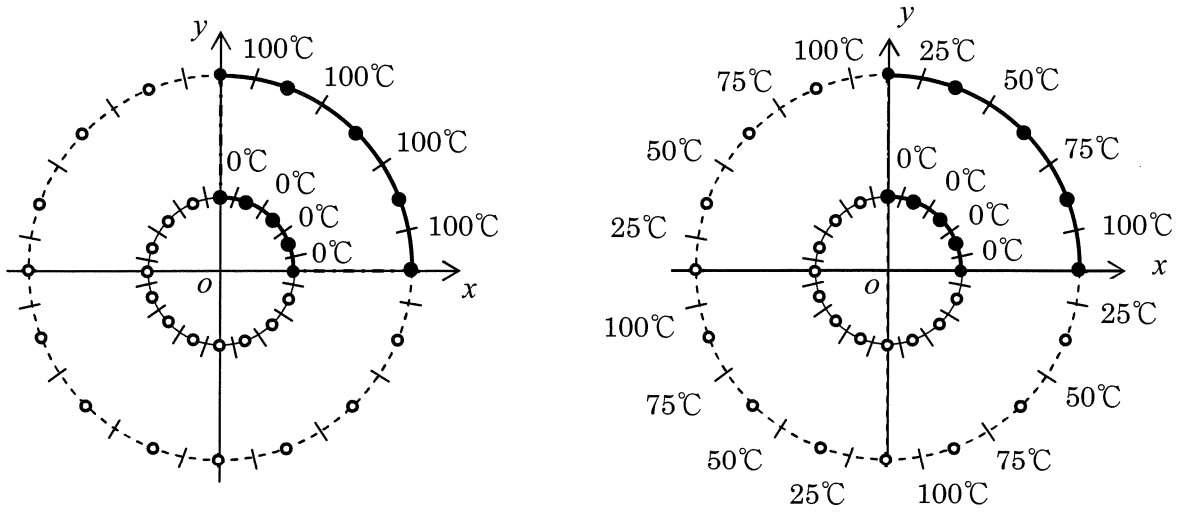
図1において回転軸の座標を(x_0, y_0)とする．n分割された境界$\Gamma_2, \Gamma_3, \cdots, \Gamma_n$のいずれも角度幅$\alpha = 2\pi/n$を持つ．$\Gamma_1$上の任意の点$(x_j^{(1)}, y_j^{(1)})$が図1のように偏角$\theta$を持つとき，これと回転対称にある点は，よく知られた回転移動の1次変換の式

$$\begin{Bmatrix} x_j^{(k)} - x_0 \\ y_j^{(k)} - y_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k-1)\alpha & -\sin(k-1)\alpha \\ \sin(k-1)\alpha & \cos(k-1)\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j^{(1)} - x_0 \\ y_j^{(1)} - y_0 \end{Bmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9)$$

で表すことができる.

5. 数値計算例

まず, 図2(a)に示す内半径1m, 外半径（大半径）2mのドーナツ領域の外側および内側の温度をそれぞれ一様に100℃, 0℃とする定常熱伝導問題を解いた.



(a) 回転軸対称　　(b) 回転対称

図2　ドーナツ領域と境界条件

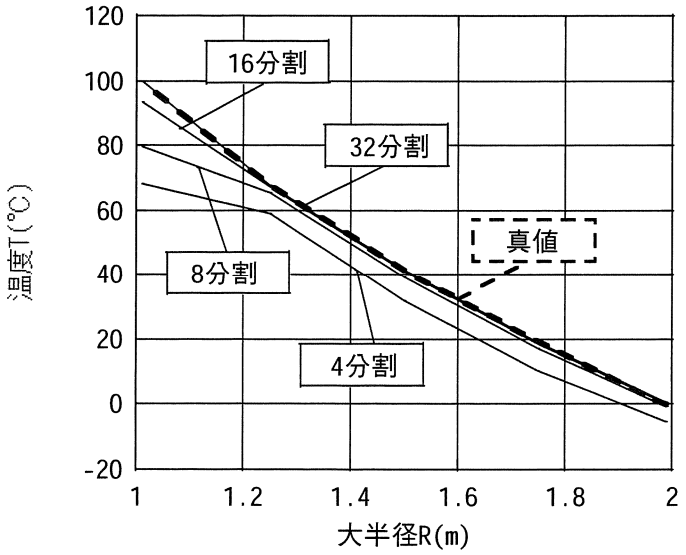


図3　回転軸対称問題の解析結果の比較

この問題は回転対称であると同時に回転軸対称となっている．ドーナツ円周の分割数を変化させ，境界要素解析結果を真値（解析解）と比較した．図３より，分割数を大きくするにつれ，真値に値が近づくことが確認できる．

次に，軸対称ではなく，図２(b)のように1/4回転対称となるように境界条件を与え，回転対称性を考慮した結果を，360度全てを対象とした基準解析結果と比較した．図４は，x軸に沿った温度分布をプロットしたものである．実線で示した1/4回転対称解は，破線で描いた基準解と区別がつかないほど一致している．これにより，非軸対称形状においても，回転対称を考慮に入れた本解析方法が，360度全てを対象とした解析と同様の結果が得られることが確認できた．

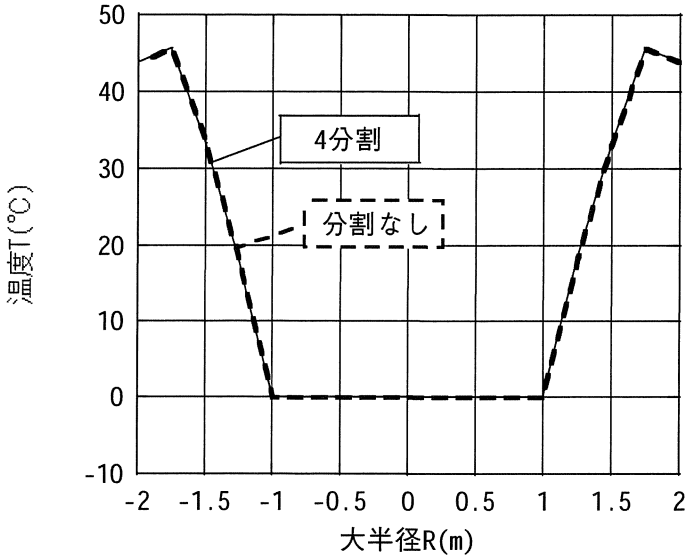


図４　非軸対称形状の解析結果の比較

６．　結論

回転対称性を持つ形状において，効率的な境界要素法計算を行う方法が確立された．結果を解析解と比較し，コードの妥当性の検証を行った．$1/n$回転対称を考慮した場合，未知数の数が$1/n$，行列のサイズが$1/n^2$と削減できる．本手法を第１章に述べた核融合プラズマの境界形状同定逆問題に応用した場合，$1/n$計算領域に全磁気センサー信号を集約させることにより，相対的な未知数の数を低減できるので逆解の精度向上が期待できる．本解析手法を，ヘリカル形状を持つプラズマの解析に応用すべく研究を進めている．

参考文献

[1] Kurihara, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.

[2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.

[3] Brebbia, C.A., "*The Boundary Element Method for Engineers*", Pentech Press, London (1978)

On the structure of certain $K3$ surfaces

内海　和樹　（広島大学大学院理学研究科）

I_4^* 型特異ファイバーを 2 つ持つ楕円 $K3$ 曲面を考える．以下，代数多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義されているものとする．

定義 1. ($K3$ **曲面**) 非特異射影代数多様体 X の標準因子が 0 と線形同値で，$q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たすとき X を $K3$ **曲面**という．

代数的でない $K3$ 曲面というものも存在するが，ここでは扱わないので上のような定義を採用する．

次の Kummer 曲面は最も代表的で重要な $K3$ 曲面である．

定義 2. (**Kummer 曲面**) A を Abel 曲面とし，ι を A 上の位数 2 の自己同型写像 $\iota; z \mapsto -z$ とする．$G = \{\mathrm{id}_A, \iota\} \subset \mathrm{Aut(A)}$ とし，A/G の最小特異点解消として得られる曲面 X を **Kummer 曲面**といい，$X = \mathrm{Km}(A)$ と書く．Abel 曲面 A が 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 のにより $A = E_1 \times E_2$ と分解されるとき，$X = \mathrm{Km}(E_1 \times E_2)$ を**直積型 Kummer 曲面**という．

定義 3. C を非特異射影代数曲線とする．C **上の楕円曲面**とは非特異射影代数曲面 X であって以下を満たす射 $\Phi : X \to C$ を持つものである．

(i) 有限個の点 $t \in C$ を除いて ファイバー $\Phi^{-1}(t)$ は楕円曲線である．
(ii) Φ に関する切断 $\sigma : C \to X$，すなわち代数多様体の射 $\sigma : C \to X$ であって $\Phi \circ \sigma : C \to C$ が C 上の恒等写像となるものが存在する．
(iii) 任意のファイバーは第 1 種例外曲線を含まない．

このとき，Φ を X の C 上の**楕円ファイブレーション** という．

$\Phi : X \to C$ を楕円曲面とする．楕円曲線でない Φ のファイバーを **特異ファイバー**という．楕円曲面の特異ファイバーは因子として 2 つの無限系列 $\mathrm{I}_n\ (n \geq 1)$, $\mathrm{I}_n^*\ (n \geq 0)$ と II, III, IV, II*, III*, IV* と呼ばれる 6 つの型に分類される．楕円曲面はどの型の特異ファイバーを持っているかによって特徴付けられる．

楕円曲面の定義 (ii), (iii) により X は C の関数体 $\mathbb{C}(C)$ 上の楕円曲線と見なせる．従って X を $\mathbb{C}(C)$ 係数の Weierstrass 方程式で表現できる．この Weierstarss 方程式か

ら楕円曲面 $\Phi : X \to C$ の持つ特異ファイバーの型を知ることができる (c.f [3]). 逆にどの型の特異ファイバーを持つかによってその楕円曲面の Weierstrass 方程式 を特徴付けることができる.

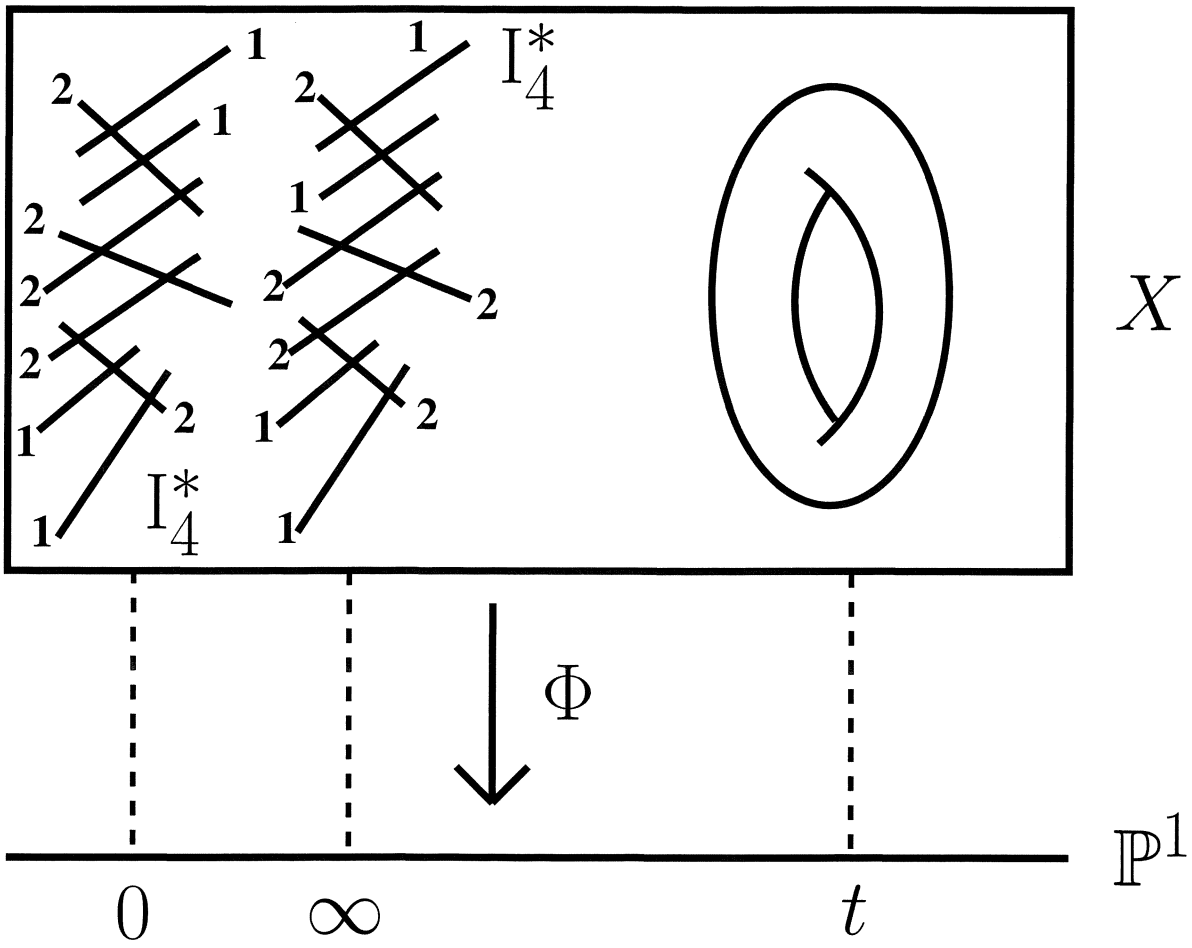
X が $K3$ 曲面であるとき, C は 1 次元射影直線 $\mathbb{P}^1$ と同型である. このとき X を**楕円 $K3$ 曲面**という. またこのとき $\mathbb{C}(C) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(t)$ でありその Weierstrass 方程式は

$$y^2 = x^3 + A(t)x + B(t), \quad A(t), B(t) \in \mathbb{C}(t) \tag{1}$$

と書ける. 冒頭に述べたように I_4^* 型特異ファイバーを 2 つ持つ楕円 $K3$ 曲面を考える. そのような $K3$ 曲面がタイトルにある 'certain $K3$ surfaces' であり, それらに関する構造定理を与えるのが本講演の主旨である.

定義 4. $t = 0, \infty \in \mathbb{P}^1_t$ でのファイバーが共に I_4^* 型特異ファイバーであるような楕円 $K3$ 曲面 $\Phi : X \to \mathbb{P}^1$ 全体の集合を (I_4^{*2}) で表す.

$X \in (\mathrm{I}_4^{*2})$ を模式的に表したものが以下である. $t = 0, \infty \in \mathbb{P}^1$ でのファイバーが I_4^* 型特異ファイバーである. 各線分は (-2)-曲線と呼ばれる $\mathbb{P}^1$ と同型な曲線であり, 各数値はそれらの重複度を表している. また一般の点 $t \in \mathbb{P}^1$ でのファイバーは楕円曲線である.



定理 5. $X \in (\mathrm{I}_4^{*2})$ の Weierstrass 方程式は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} y^2 = x^3 &- 3t^2\left(t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + 1\right)x \\ &+ 2t^3\left(t^6 + b_5t^5 + b_4t^4 + b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + 1\right), \end{aligned} \tag{2}$$

ただし, 各係数 $a_i, b_j \in \mathbb{C}\,(1 \leq i \leq 3,\, 1 \leq j \leq 5)$ は以下を満たす.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3}{2}a_1 \\ b_2 &= \frac{3}{8}a_1^2 + \frac{3}{2}a_2 \\ b_3 &= -\frac{1}{16}a_1^3 + \frac{3}{4}a_1a_2 + \frac{3}{2}a_3 = -\frac{1}{16}a_3^3 + \frac{3}{4}a_2a_3 + \frac{3}{2}a_1 \\ b_4 &= \frac{3}{8}a_3^2 + \frac{3}{2}a_2 \\ b_5 &= \frac{3}{2}a_3 \\ a_1^4 &- 8a_1^2a_2 + 32a_1a_3 + 16a_2^2 - 64a_2 - 16a_3^2 + 64 \neq 0 \\ a_3^4 &- 8a_2a_3^2 + 32a_1a_3 + 16a_2^2 - 64a_2 - 16a_1^2 + 64 \neq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(3) は a_1 と a_3 に関して対称になっている. そこで (I_4^{*2}) を (3) において $a_1 = a_3$ を満たすものとそうでないものとに分ける.

定義 6.

$$(\mathrm{I}_4^{*2})_2 := \{X \in (\mathrm{I}_4^{*2}) \,|\, (3) \text{ において } a_1 = a_3\}$$

$$(\mathrm{I}_4^{*2})_* := \{X \in (\mathrm{I}_4^{*2}) \,|\, (3) \text{ において } a_1 \neq a_3\}$$

$X \in (\mathrm{I}_4^{*2})_2$ は (3) において $a_1 = a_3 = \alpha$, $a_2 = 2\beta$ とおいて (2) に適当な変換を施して以下のようにできる.

定理 7. $X \in (\mathrm{I}_4^{*2})_2$ の Weierstrass 方程式 (2) は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} y^2 = x^3 &- 3\left((t+\frac{1}{t})^2 + 4\alpha(t+\frac{1}{t}) + 2\beta - 2\right)x \\ &+ 2\Big((t+\frac{1}{t})^3 + 6\alpha(t+\frac{1}{t})^2 \\ &\qquad + (6\alpha^2 + 3\beta - 3)(t+\frac{1}{t}) - 4\alpha^3 + 6\alpha\beta - 6\alpha\Big). \end{aligned} \tag{4}$$

ただし, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は $2\alpha^2 - \beta + 1 \neq 0$ を満たす.

式 (4) で $T = t + \frac{1}{t}$ とおいて得られる Weierstrass 方程式は I_4^* 型特異ファイバーを 1 つ持つ有理楕円曲面を定める. 従って $(\mathrm{I}_4^{*2})_2$ の元はある I_4^* 型特異ファイバーを 1 つ持つ

有理楕円曲面の 2 重被覆として得られる．逆に I_4^* 型特異ファイバーを 1 つ持つ任意の有理楕円曲面はうまく 2 重被覆を取れば $(\mathrm{I}_4^{*2})_2$ の元になる．

これら $(\mathrm{I}_4^{*2})_2$ と $(\mathrm{I}_4^{*2})_*$ について得た定理を述べる．

主定理 1. 任意の $X \in (\mathrm{I}_4^{*2})_2$ に対して，2 つの楕円曲線 E_1, E_2 の直積から定まる Kummer 曲面 $S = \mathrm{Km}(E_1 \times E_2)$ と S 上の対合的自己同型写像 σ, τ で

(i) $S/\langle\sigma\rangle$ は X と双有理同値，

(ii) $S/\langle\sigma, \tau\rangle$ は S と双有理同値

となるものが存在する．

特に，S と X の間に次数 2 の支配的有理写像 $S \dashrightarrow X$, $X \dashrightarrow S$ が存在する．

これは Kummer のサンドウィッチ定理 [2] と呼ばれるものの I_4^* 型版である．

主定理 1 の対号的自己同型 $\tau \in \mathrm{Aut}(S)$ は X 上の対号的自己同型 $\bar{\tau} : X \to X$ を誘導する．これは X 上のシンプレクティック対号的自己同型である．すなわち，任意の $\omega \in H^{2,0}(X)$ に対して $\bar{\tau}^*\omega = \omega$ を満たす．これは X 上に塩田・猪瀬構造を定める．

定義 8. $K3$ 曲面 X 上にシンプレクティック対号的自己同型 $\iota \in \mathrm{Aut}(X)$ とその有理商写像 $\pi : X \dashrightarrow Y$ (Y は X/ι の最小特異点解消により得られる曲面) で Y が Kummer 曲面となるものが存在し，$\pi_* : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(Y, \mathbb{Z})$ が Hodge 同型 $T_X(2) \simeq T_Y$ を誘導するとき，X は**塩田・猪瀬構造**を持つという．ただし，T_X は X の超越格子を表す．

X が塩田・猪瀬構造を持つとき，対応する Kummer 曲面 Y を定める Abel 曲面 A (すなわち $Y = \mathrm{Km}(A)$) に対し Hodge 同型 $T_X \simeq T_A$ が定まる．塩田・猪瀬構造はこのように Kummer 曲面を通して $K3$ 曲面と Abel 曲面との間に代数的な対応を与えるものである．

Picard 数が 19 または 20 の $K3$ 曲面は常に塩田・猪瀬構造を持つことが知られている (c.f. [1])．(I_4^{*2}) の元は定義からその Picard 数が 18 以上である．Picard 数が 18 であるものを一般の元と呼ぶ．(I_4^{*2}) の塩田・猪瀬構造に関して以下の定理を得た．

主定理 2. 任意の $(\mathrm{I}_4^{*2})_2$ の元は塩田・猪瀬構造を持ち，$(\mathrm{I}_4^{*2})_*$ の一般の元は塩田・猪瀬構造を持たない．

$(\mathrm{I}_4^{*2})_*$ に関してはその一般の元は塩田・猪瀬構造を持たず Abel 曲面との間に上記のうような関係は得られない．しかしながら実はそれ自身が直積型 Kummer 曲面であることが分かった．

主定理 3. $(\mathrm{I}_4^{*2})_*$ の一般の元は直積型 Kummer 曲面である．

参考文献

[1] D. Morrison, On $K3$ surfaces with large Picard number, Invent. Math. **75** (1984), 105–121.

[2] T. Shioda, Kummer sandwich theorem of certain elliptic $K3$ surfaces, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82** (2006), no. 8, 137–140.

[3] J. Tate, Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, Lecture Note in Math. **476**, Springer, Berlin (1975), 33–52.

Plasma Diffusion due to Uncertainty

Tsuyoshi OIWA, Shun-ichi OIKAWA, and Takahiro SHIMAZAKI
Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060-8628, Japan

Abstract

Quantum mechanical plasma diffusion is studied using a semi-classical model with two different characteristic lengths; one is the average interparticle separation, and the other is the magnetic length. The diffusion coefficients D derived in this study are qualitatively similar dependence to experiments on several plasma parameters, such as the temperature T, the mass m, the density n, and the magnetic field B. The numerical values of the diffusion coefficient D in this study are as large as that of the neo-classical diffusion. We have pointed out in this study that (i) for distant encounters in typical fusion plasmas of $T = 10$ keV and $n = 10^{20}$ m^{-3}, the average potential energy $\langle U \rangle \sim 30$ meV is as small as the uncertainty in energy $\Delta E \sim 40$ meV, and (ii) for a magnetic field $B = 3$ T, the spatial size of the wavefunction in the plane perpendicular to the magnetic field is as large as $\ell_B \sim 1.4 \times 10^{-8}$ m which is much larger than the typical electron wavelength $\lambda_e \sim 10^{-11}$ m.

1 Introduction

In considering the diffusion of plasmas correctly, it was pointed out more than a half century ago [1, 2] that one must consider the wave character of charged particles when the temperature T is high, i.e. the relative speeds of interacting particles are fast. The criterion on the classical theory to be valid in terms of relative speed g in a hydrogen plasma is given in Ref. [2], as

$$g \ll \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} = 4.4 \times 10^6 \text{ m/s}, \tag{1}$$

where $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C and $\hbar \equiv h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s stand for the elementary electric charge and the Planck constant. In contemporary fusion plasmas with $T \sim 10$ keV or higher, ions as well as electrons should be treated quantum mechanically. In the current plasma physics, however, the quantum mechanical effects enters as a minor correction to the Coulomb logarithm, $\ln \Lambda$, in the case of close encounters [3]. None the less, the neoclassical theory is capable of predicting a lot of phenomena such as those related to the current conduction. Such phenomena linearly depend on the change in velocity $\Delta \boldsymbol{v}$ or in position $\Delta \boldsymbol{r}$. The quantum mechanical changes, e.g. in the velocity ${}^{\mathrm{QM}}\Delta \boldsymbol{v}$, are stochastic. The average or expectation value of $\Delta \boldsymbol{v}$ conforms to the classical prediction ${}^{\mathrm{CL}}\Delta \boldsymbol{v}$ due to the Ehrenfest's theorem: for $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}$

$$\langle \Delta \boldsymbol{\xi} \rangle = \left\langle {}^{\mathrm{CL}}\Delta \boldsymbol{\xi} + {}^{\mathrm{QM}}\Delta \boldsymbol{\xi} \right\rangle = {}^{\mathrm{CL}}\Delta \boldsymbol{\xi}. \tag{2}$$

However, diffusion is quadratic in $\Delta \boldsymbol{g}$ or $\Delta \boldsymbol{r}$:

$$\left\langle (\Delta \boldsymbol{\xi})^2 \right\rangle = \left({}^{\mathrm{CL}}\Delta \boldsymbol{\xi} \right)^2 + \left\langle \left({}^{\mathrm{QM}}\Delta \boldsymbol{\xi} \right)^2 \right\rangle > \left({}^{\mathrm{CL}}\Delta \boldsymbol{\xi} \right)^2. \tag{3}$$

This might be the reason why we cannot understand the so-called anomalous diffusion using classical theories that only give correct $\langle \Delta \boldsymbol{\xi} \rangle$.

2 Uncertainties in Plasmas

A classical particle obeys the deterministic equation of motion which gives the particle trajectory in the phase space $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ at a time t. The actual *trajectory* of a particle with a mass m, however, is stochastic in the phase space with uncertainties in position $\Delta \boldsymbol{r}$, in velocity $\Delta \boldsymbol{v}$, and in energy ΔE in a time interval Δt because of the uncertainty relation:

$$\Delta r \Delta v > \frac{\hbar}{m}, \ \Delta E > \frac{\hbar}{\Delta t}, \tag{4}$$

Equation (4) tells us that (i) lighter particle has larger uncertainty in phase space, and (ii) the uncertainty in energy ΔE is larger for shorter time intervals. Since, for a given time interval Δt, there are three unknowns Δr, Δv, and ΔE in Eq. (4), we need to find/impose another relation among these uncertainties. For this purpose, let L be a length that the particle travels during some characteristic time interval, i.e. $L \equiv v_0 \Delta t$, where v_0 is the initial particle speed.

In the presence of a uniform magnetic field $\boldsymbol{B}$, the classical particle's energy $E = mv^2/2$ is a constant of the motion:

$$\Delta E = m\Delta \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{2} \right) = 0. \tag{5}$$

The same relation, $\Delta E = 0$, as Eq. (5) holds for the relative velocity $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$ and its change $\Delta \boldsymbol{g}$ in binary Coulomb interactions in the absence of a magnetic field. In the case of a quantum mechanical particle, ΔE is not necessarily zero due to the uncertainty relation, as

$$\Delta E \sim m\boldsymbol{v}_0 \cdot \Delta \boldsymbol{v} > \frac{\hbar}{\Delta t}. \tag{6}$$

Comparing Eq. (6) with the uncertainty relation in Eq. (4), we have

$$\Delta r \sim L, \quad \Delta v > \frac{\hbar}{mL}. \tag{7}$$

Thus, the square of the uncertainty in the cyclotron center $\boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}/\omega^2$, where $\omega = qB/m$ is the cyclotron angular frequency, is given by

$$(\Delta \boldsymbol{r}_G)^2 = (\Delta \boldsymbol{r})^2 + \left(\frac{m\Delta \boldsymbol{v}}{qB} \right)^2 \sim L^2 + \left(\frac{\ell_B^2}{L} \right)^2, \tag{8}$$

where $\ell_B = \sqrt{\hbar/qB}$ is called the magnetic length in quantum mechanics.

2.1 Uncertainties in the presence of B field.

It should be noted that the magnetic length $\ell_B = \sqrt{\hbar/qB}$ is the spatial size of wave packet in the plane perpendicular to the magnetic field [4], i.e.

$$|\psi(\boldsymbol{r}_\perp, t)|^2 = \frac{1}{\pi \ell_B^2} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}_\perp - \langle \boldsymbol{r}_\perp(t) \rangle)^2}{\ell_B^2} \right], \tag{9}$$

where $\psi(\boldsymbol{r}_\perp, t)$ stands for the wavefunction, $\langle \boldsymbol{r}_\perp(t) \rangle$ the classical position of the particle in the plane perpendicular to $\boldsymbol{B}$. The square of cyclotron radius ρ^2 and the energy E are quantized with the energy levels, i.e. the Landau levels [4], of $N = 0, 1, 2, \ldots$, as follows

$$\rho_N^2 = (2N+1)\ell_B^2, \tag{10}$$

$$E_N = (N + 1/2)\hbar\omega. \tag{11}$$

Thus the magnetic length ℓ_B is the cyclotron radius in the ground state, $N = 0$. For example, for a magnetic field $B = 3$ T, the spatial size of the wavefunction in the plane perpendicular to the magnetic field is as large as $\ell_B \sim 1.4 \times 10^{-8}$ m. This length is comparable to the average interparticle separation $\Delta\ell \sim 2 \times 10^{-7}$ m, and is much larger than the typical wavelength of electrons $\lambda_e \sim 10^{-11}$ m, in a fusion plasma with a temperature $T \sim 10$ keV and a number density $n = 10^{20}$ m^{-3}. Thus a charged particle behaves quantum mechanically for a time interval of $\Delta t = \ell_B/v_0$, i.e. $L = \ell_B$ in the presence of a magnetic field.

2.2 Uncertainties in the absence of B field.

In the absence of a magnetic field, $\boldsymbol{B} = 0$, choosing $L = \Delta\ell \equiv n^{-1/3}$, where $\Delta\ell$ stands for the average interparticle separation and n the number density of the plasma, an uncertainty in energy becomes as

$$\Delta E > \frac{hg_{\rm th}}{\Delta\ell} \sim 40 \text{ meV}, \tag{12}$$

for protons in a hydrogen plasma of $T = 10$ keV and $n = 10^{20}$ m^{-3}. On the other hand, the average potential energy U of a particle in the plasma is approximately given by

$$\langle U \rangle \sim U(\Delta\ell/4) \sim 30 \text{ meV}, \tag{13}$$

where $U(r) = e^2/4\pi\epsilon_0 r$, r stands for the interparticle separation, and we have used $\langle 1/r \rangle \sim 4/\Delta\ell$. Thus the potential energy of a particle on the average is as small as the uncertainty in energy in typical fusion plasma. This means that the binary interaction, especially the diffusion, in plasmas might not be governed by the Coulomb potential but by the quantum mechanical uncertainty; $\langle U \rangle \sim \Delta E$. For this reason we will choose the characteristic lengths $L = \Delta\ell$ and $L = \ell_B$ in the following section.

3 Semi-Classical Model for Motion

Let us assume that a charged particle with a positive charge $q > 0$ is moving in the presence of a uniform magnetic field $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ in the z-direction. First, we integrate the equation of motion for the classical particle for the time interval of Δt to get the classical position

in the phase space $(\boldsymbol{r}(\Delta t), \boldsymbol{v}(\Delta t))$.

$$\boldsymbol{r}(\Delta t) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^{\Delta t} \boldsymbol{v}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{v}(\Delta t) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^{\Delta t} \boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{\omega}\, \mathrm{d}t, \tag{15}$$

where $\boldsymbol{\omega} = q\boldsymbol{B}/m$ is the cyclotron frequency vector.

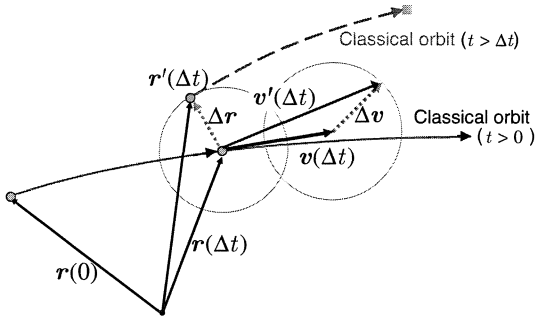


Figure 1: Semi classical model for quantum motion. The particle initially at $r(0)$ *classically* moves to $\boldsymbol{r}(\Delta t)$ with a velocity $\boldsymbol{v}(\Delta t)$ at $t = \Delta t - 0$. At this time, it suffers the quantum mechanical deviations in position, $\Delta \boldsymbol{r}$, and in velocity $\Delta \boldsymbol{v}$. The particle is at $\boldsymbol{r}'(\Delta t)$ with a velocity $\boldsymbol{v}'(\Delta t)$ at the time $t = \Delta t + 0$.

As shown in Fig. 1, next we add the randomly-oriented uncertainties $\Delta \boldsymbol{r}$, and $\Delta \boldsymbol{v}$ to $\boldsymbol{r}(\Delta t)$, and $\boldsymbol{v}(\Delta t)$, the magnitude of which is given by Eq. (7), as

$$\boldsymbol{r}'(\Delta t) = \boldsymbol{r}(\Delta t) + \Delta \boldsymbol{r}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{v}'(\Delta t) = \boldsymbol{v}(\Delta t) + \Delta \boldsymbol{v} \tag{17}$$

This procedure is repeated until the time t reaches $\tau_c \equiv 2\pi/\omega$, i.e. the cyclotron period.

Figure 2 shows the particle trajectory during one cyclotron period, in which a deviation $\delta \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(\tau_c) - r(0)$ from the classical motion is seen.

From many Monte Carlo calculations (typically $N_{MC} \sim 10^4$ turns out to be enough in this study for convergence) of such the diffusion coefficient

$$D = \frac{\left\langle (\delta \boldsymbol{r})^2 \right\rangle}{\tau_c} \tag{18}$$

will be obtained for a particular choice of the characteristic length L, where $\langle \cdot \rangle$ stands for the ensemble average. Figure 3 shows the histogram of $\delta \boldsymbol{r}$ for

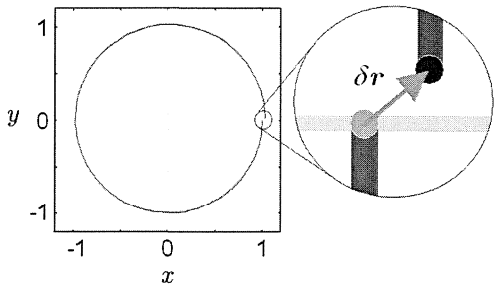


Figure 2: Deviation of cyclotron motion, $\delta \boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(\tau_c) - r(0)$, due to uncertainty in one gyration for a given characteristic length $L = v_0 \Delta t$. Lengths are normalized by the cyclotron radius $\rho = mv_0/qB$.

$N_{MC} = 5 \times 10^7$ Monte Carlo trials, which resembles the probability density function of a wavefunction in quantum mechanics.

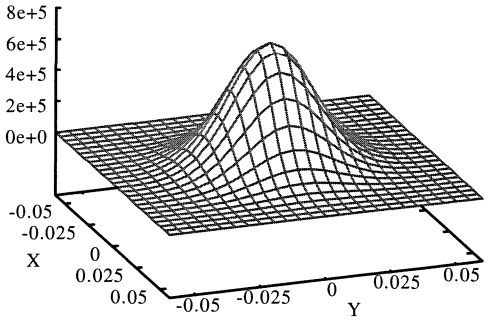


Figure 3: Histogram for the deviation from the classical position, $\delta \boldsymbol{r} = (\delta x, \delta y)$ normalized by the cyclotron radius ρ, for $N_{MC} = 5 \times 10^7$ Monte Carlo trials.

In the following subsections we will choose the average interparticle separation, $\Delta \ell \equiv n^{-1/3}$, and the magnetic length, $\ell_B \equiv \sqrt{\hbar/qB}$, as the characteristic length L.

3.1 Case A: L = interparticle separation, $\Delta \ell$

If we choose the characteristic length $L \equiv \Delta \ell$, where $\Delta \ell \equiv n^{-1/3}$ stands for the average interparticle separation, then the uncertainty in energy is given as $\Delta E \sim$

$mv_0\Delta v$. Thus, from Eq. (7), we have

$$\Delta r \sim \Delta\ell, \text{ and } \Delta v \sim \frac{\hbar}{m\Delta\ell}. \quad (19)$$

The particle is assumed to be in typical fusion plasmas of $T = 1 - 100$ keV, and $n = 10^{19} - 10^{21}$ m^{-3}, and $B = 1 - 10$ Tesla. The initial particle speed v_0 is selected as the thermal speed $v_{\rm th} = \sqrt{2T/m}$. The above calculation for a fixed T, n, and B is repeated $N_{\rm MC} = 10^4$ times.

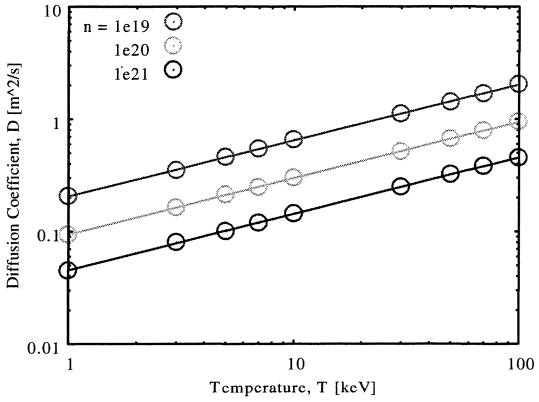


Figure 4: Case A: Temperature T and density n dependence of diffusion coefficient D [m^2/s] with fitting lines in the case of $L = \Delta\ell$, the interparticle separation.

Figure 4 shows the temperature and density dependence of the diffusion coefficient $D = D(T, n)$, which leads to the scaling of

$$D_{\rm Case\ A} \sim 0.094\left(\frac{T_{\rm keV}}{A}\right)^{0.50}\left(\frac{10^{20}}{n}\right)^{0.33} \text{m}^2/\text{s} \quad (20)$$
$$\propto \sqrt{\frac{T}{m}}n^{-1/3},$$

where $A = m/m_p$ is the mass number with m_p being proton mass. It is interesting to note that the diffusion coefficient D does not depend on the magnetic field B, but on the particle mass $m^{-1/2}$. The latter is known as the isotope effect [5,6] .

3.2 Case B: L = magnetic length, $\ell_{\rm B}$.

The uncertainties for $L = \ell_{\rm B}$, say the Case B, are

$$\Delta r \sim \ell_{\rm B}, \text{ and } \Delta v \sim \frac{\hbar}{m\ell_{\rm B}}. \quad (21)$$

The particle is assumed to be in typical fusion plasmas of $T = 1 - 100$ keV, and $B = 1 - 10$ Tesla. Note that the density n does not enter into this case. Monte Carlo calculations similar to the Case A are made.

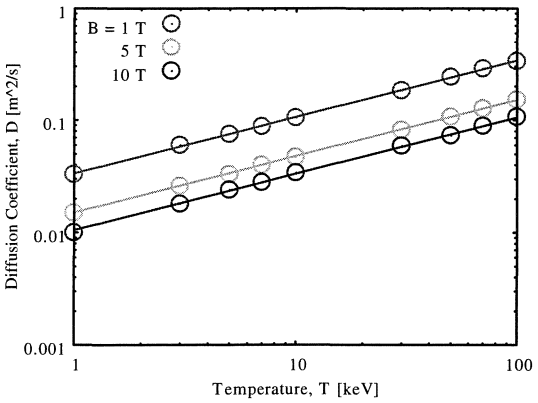


Figure 5: Case B: Temperature T and the magnetic field B dependence of diffusion coefficient D [m^2/s] with fitting lines in the case of $L = \ell_{\rm B}$, the magnetic length.

Figure 5 shows the temperature T and the magnetic field B dependencies of the diffusion coefficient D, which leads to the scaling of

$$D_{\rm Case\ B} \sim 0.033\left(\frac{T_{\rm keV}}{AB}\right)^{0.50} \text{m}^2/\text{s} \propto \sqrt{\frac{T}{mB}}, \quad (22)$$

in which $\sqrt{T/m}$ scaling is the same as Eq. (21) for the Case A.

4 Discussion

The Case A, $L = \Delta\ell$, considers the interactions among plasma particles, and the Case B, $L = \ell_{\rm B}$, the interaction of the individual plasma particle with the magnetic field, i.e. the electrons moving in the external coils. Since there should be both interactions in magnetically confined fusion plasmas, we have the combined diffusion coefficient $D = D_{\rm CaseA} + D_{\rm CaseB}$ as

$$D \sim \left\{\frac{0.094}{(n/10^{20})^{0.33}} + \frac{0.033}{\sqrt{B}}\right\}\sqrt{\frac{T_{\rm keV}}{A}} \text{m}^2/\text{s}, \quad (23)$$

Table 1 summarizes the dependence of D on plasma parameters, such as T, n and B. The parameters' ranges are $1 \le T \le 100$ keV, $1 \le B \le 10$ Tesla, and if applicable $10^{19} \le n \le 10^{21}$ m^{-3}. The ITER-89 dependence

of D in the table assumes $D \propto \rho^2/\tau_E$, where τ_E is the energy confinement time in the ITER-89 L-mode scaling law [7]. Note that in the ITER-89 L-mode scaling the temperature T dependence is absent, instead it contains the heating power P, which should raise the temperature of the plasma; T should be an increasing function of P. The diffusion coefficients D by these models

Table 1: Parameter dependence of D, The parameters' ranges are $1 \leq T \leq 100$ keV, $10^{19} \leq n \leq 10^{21}$ m^{-3}, $1 \leq B \leq 10$ Tesla. The ITER-89 dependence of D in the table assumes $D \sim \rho^2/\tau_E$.

Model	$D \propto T^\alpha m^\beta n^\gamma B^\delta \cdots$	Values
ITER-89 L-mode	$\sqrt{P/m}\, n^{-0.1} B^{-0.2}$	~ 1 m^2/s
Case A: $\Delta\ell = n^{-1/3}$	$\sqrt{T/m}\, n^{-1/3} B^0$	0.1-2
Case B: $\ell_B = \sqrt{\hbar/qB}$	$\sqrt{T/m}\, n^0\, B^{-0.5}$	0.01-0.3
Neo-classical theory	$\sqrt{m/T}\, n\, B^{-2}$	~ 0.01

give similar dependence to experiments on many parameters, such as the temperature T, the mass m, the density n, and the magnetic field B, as well as its values of the order of the anomalous diffusion. In the case of the typical fusion plasma (e.g. $T = 10$ keV, $n = 10^{20}$ m^{-3} and $B = 3$ T), however, the value of the diffusion coefficients by our model are $D_{\mathrm{CaseA}} \sim 0.30$ m^2/s and $D_{\mathrm{CaseB}} \sim 0.08$ m^2/s, both of which are one order smaller than the anomalous diffusion.

5 Summary

In current plasma physics based mainly on the classical mechanics, the quantum mechanical effects enters in the case of close encounters as a minor correction to the Coulomb logarithm $\ln\Lambda$. We have pointed out in this study that (i) for distant encounters in typical fusion plasmas of $T = 10$ keV and $n = 10^{20}$ m^{-3}, the average potential energy $\langle U \rangle \sim 30$ meV is as small as the uncertainty in energy $\Delta E \sim 40$ meV, and (ii) for a magnetic field $B = 3$ T, the spatial size of the wavefunction in the plane perpendicular to the magnetic field is as large as $\ell_B \sim 1.4 \times 10^{-8}$ m which is much larger than the typical electron wavelength $\lambda_e \sim 10^{-11}$ m.

The diffusion coefficients by our semi-classical model give *qualitatively* similar dependence to experiments on several plasma parameters, such as the temperature T or the heating power input P, the mass m or the isotope effect, the density n, and the magnetic field B, as well as its values larger than the neo-classical diffusion.

In magnetically confined fusion plasmas, diffusion is governed by the banana particle motion due to toroidicity of the magnetic field and the plasma current I_p, with which we have not dealt in this study. The diffusion model presented here is semi-classical one, so that we will need to solve the Schrödinger equation for exact analysis, which will be reported in the near future.

References

[1] R. E. Marshak, Ann. N. Y. Acad. Sci. **410**, 49(1941).

[2] R. S. Cohen, L. Spitzer, Jr., and P. McR. Routly, Phys. Rev. **80**, 230(1950).

[3] S. I. Braginskii, Reviews of Plasma Physics, M. A. Leontovich (ed.), (Consultants Bureau, New York, 1965) .

[4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, 3rd ed., translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell (Pergamon Press, Oxford, 1977)

[5] R. J. Hawryluk, Rev. Mod. Phys. **70**, 537(1998).

[6] V. Sokolov and A. K. Sen, Phys. Rev. Lett. **92**, 165002 (2004)

[7] P. Yushmanov et al., *Nucl. Fusion* **30** 1999(1990).

人工ニューラルネットワークによる原子炉安定性診断

奥村 基史、辻 雅司、島津 洋一郎
北海道大学大学院工学研究科
Tel: +81-11-706-6676, Fax: +81-11-706-6676, Email:83231@eng.hokudai.ac.jp

I. 緒言

原子炉安定性診断は、早期に異常事象を検知し安全に原子炉を運転する上で非常に重要であり、BWR(boiling water reactor; 沸騰水型原子炉)ではこれまで、安定性の指標として減幅比が用いられてきた。

本研究室では、沸騰水型原子炉の LPRM(local power range monitors; 局所出力中性子検出器)信号の時系列データを、PCA(principal component analysis; 主成分分析法)で分解し減幅比を求める手法を開発してきた。この手法では、測定された信号は PCA によっていくつかの独立成分に分解され、そこから ACF(auto-correlation function; 自己相関関数)が求められる。我々のこれまでの研究から、このうち減衰振動型の ACF を持つ信号成分が安定性に関係するものであると解っているので、安定性に関係する信号成分を分解した信号成分から選出する事ができれば、安定性の指標である減幅比をその信号成分の ACF から求める事ができる。

また、オンライン安定性モニタリングを実現するためには、安定性に関係する信号成分を正確かつ効率的に選出する必要がある。そのため、本研究室の以前の研究では、リンガルス 1 号機(BWR, スウェーデン)安定性実験で測定された LPRM 信号を分解し、3 層パーセプトロンの形状を持つ ANN(artificial neural network; 人工ニューラルネットワーク)によって選出する方法が研究された。この研究において、誤差逆伝播法によって学習されたパーセプトロン ANN は、非常に精度良く分解された信号成分から安定性に関係する信号成分を選出できる事が判った。しかしながら、この選出精度は、事前学習をいかに効率的に行うかに依存している。

そこで本研究では、ANN の一種であり、教師データ無し学習を行うため事前学習を必要とせずオンラインに学習させることが可能な、SOM(self-organizing map; 自己組織化マップ)をこの信号選出に適用し検討を行った。また、一貫した ANN を用いるオンライン安定性モニタリングを実現するために、PCA を行う異なる形式の ANN を SOM に接続し、その有効性を調べた。

II. 人工ニューラルネットワーク

II-1. 概要

ANN は生体の脳神経回路(生体ニューラルネットワーク)を模擬したネットワークであり、神経細胞(ニューロン)を模倣した素子を相互接続させて構成されている。こうした ANN は従来のコンピューティング手法とは異なるいくつかの特徴を有する。

第一に、ANN は非線形システムである。ANN は非線形関数に対し近似能力を有し、非線形近似手法として広く用いられている。

第二に、並列システムであるという点も特徴の一つである。生体の脳は、トランジスタ等に比べて極めて低速な処理速度でしかない神経細胞で構成されているにも関わらず、非常に多数のそれらを並列接続させ、高度な知性を実現している。これを模擬した ANN は、並列処理システムとして高速な処理能力を有している。

そして最後に、求められた機能を自動的に学習を通し獲得する、学習能力も非常に重要な特徴である。ANN はこの特徴によって、入力からただ単に統計的な値を得るのみならず、意味のある特徴や規則を発見し、知性として抽出する事ができるのである。本研究では、特にこの学習能力に着目し ANN を利用した。

II-2. 自己組織化マップ

SOM は ANN の一種であり、信号が入力側から出力側へただ一方向へ流れるフィードフォワード型の形式を持つネットワークである。この自己組織化マップは、多次元入力データの次元数を削減し、その特徴を抽出した上で可視化マップ上に分類を行う事ができる。即ち、自己組織化マップは、何百という次元数を持つ入力データを、重要な特徴を失うことなく低次元上に圧縮する事ができ、これによって多次元情報からいくつかの重要な特徴を抽出する事ができるのである。

このような SOM の構成を図 1 に示す。構成は図に示す通り、入力層と出力層のみからなっており、入力層には入力データの次元数に対応する数の入力ユニットが配置され、出力層には全く任意の数の出力ユニットが、可視化のために二次元もしくは三次元のマップ上に(通常は二次元)に配列される。

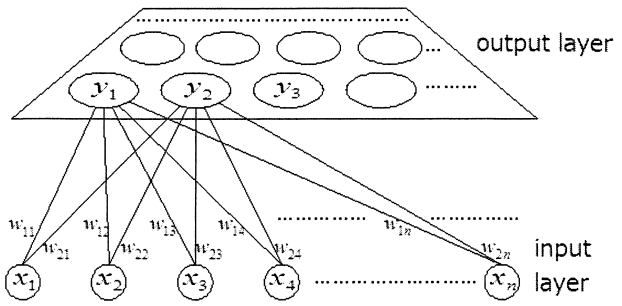


図 1.SOM ネットワークの構成

これらそれぞれの出力ユニットは、すべての入力ユニットとそれぞれの加重値でもって接続され、以下の式に基づいた内部値を持つようになる。

$$y_m = \sum_{i=1}^{n} x_i w_{mi}$$

SOM の分類のための学習では、入力に対し最も大きい内部値を持つ出力ユニット、即ち、ベクトル空間上で入力ベクトルから最も近い位置にある出力ユニット、及びそのマップ上で近傍の出力ユニットに対してのみ学習が行われる。学習は、それら出力ユニットの加重値について、入力に対しさらに内部値が大きくなるように、即ちベクトル空間上の距離がさらに近づくように行われる。こうした近傍出力ユニットを含む学習によって、出力層の平滑化が行われ、入力は出力層上で分類される。

II-3. PCA ニューラルネットワーク

PCA もまた、SOM と同様に情報圧縮の手法の一つであり、多次元情報を重大な情報欠損なしに、低次元上に圧縮することができる。

そのような PCA を実現するニューラルネットワークの構成は図 2 に示す通りである。

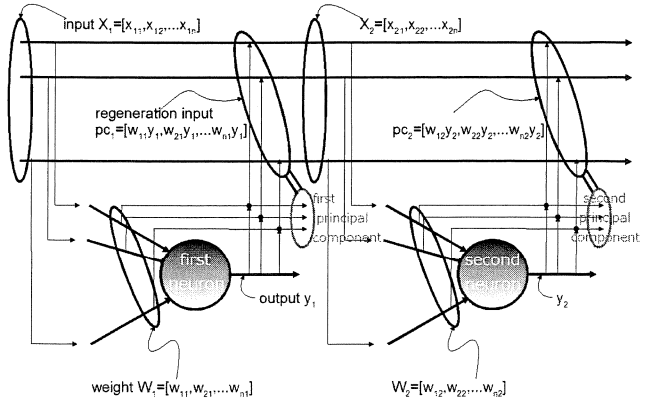


図 2.PCA ニューラルネットワークの構成

このネットワークでは、ニューロンは図に示すように入力側から連続的に配列されており、それぞれは加重値でもって全ての入力と接続され SOM での計算式と同様に内部値を持つ。元々の多次元情報は、第一のニューロンにそのまま入力され、そのニューロンの加重値と得られた内部値を掛け合わせた値が第一主成分として出力される。また、この主成分の値は多次元入力の流れに戻され、オリジナルの入力値からこれを減じた値が第二のニューロンに入力され、第二主成分が求められる。こうした処理が繰り返される。

それぞれのニューロンは以下の式のようなヘブ則で学習される。

$$w_{ij} = w_{ij} + k y_j x_{ij}$$

こうした学習を通して、各ニューロンの加重値は、ベクトル空間上で入力ベクトルの最も大きな方向に引き込まれ、主成分を表現するようになる。本研究では、6 個のニューロンを接続し、第一から第六までの主成分を求められるようにネットワークを構成した。

III. リンガルス 1 号機安定性実験解析

リンガルス 1 号機における安定性実験は、燃料サイクルの 14 サイクルから 17 サイクルにおいて行われた。14 サイクルにおける安定性実験は、炉出力と炉流量について以下の図 3 に示すような 9 つの状態下で行われた。

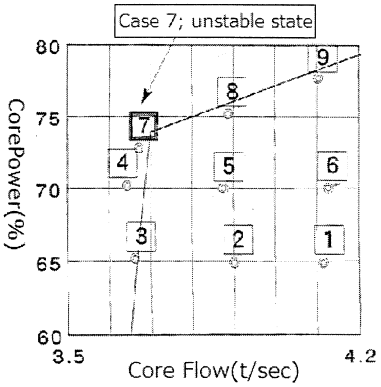


図 3. 安定性実験の運転状態

この時、合計 72 の LPRM は径方向に 36 カ所、縦方向に 2 カ所(炉心上部から 138.7cm(Level2) 及び 229.3cm(Level4))設置され、用いられた。これらのサンプリング間隔は 0.08 秒であり、測定時間は 660 秒間であった。LPRM 信号を PCA によって分解し、それぞれの分解信号成分について ACF を計算した。図 4 では、図 3 において「3」と示されている運転状態下での LPRM 信号を PCA で分解した独立信号成分について、それぞれの ACF を示している。本研究で行われた実験解析から、特異値の大きな ACF の形状には共通の特徴があることが判った。その特徴は(1)緩慢な減衰、(2)急速な減衰、(3)減衰振動、(4)無視できる特異値の寄生成分、といった種類に分けることができ、複素共役支配極に関係する信号成分は、図 4 の中で太線で示されるような(3)減衰振動の ACF を持つ。

こうした減衰振動の形状の ACF を持つ信号成分が分解された成分から選出され、その減幅比が計算される。この解析から、同一の運転状態下の様々な位置で測定された LPRM 信号から求めた ACF は、非常に似通った減幅比と振動周期を持つことが判った。

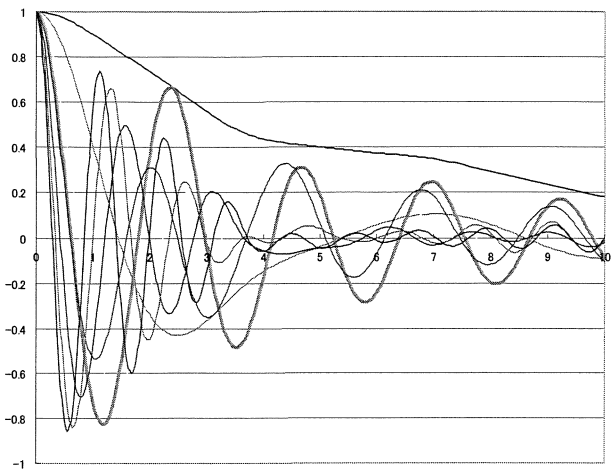


図 4. 独立信号成分の ACF

IV. SOM による信号分類

IV-1. 学習データに対する分類精度

リンガルス 1 号機安定性試験解析では、上記の通り、安定性に関係する ACF は減衰振動の形状を持つことが判った。また、その振動周期は 2 秒から 3 秒であった。この知見から、SOM の学習データとして、以下の式に基づき様々な減衰比と振動周期を持つデータが用意された。

$$f(t) = e^{-\lambda t}\cos\omega t$$

本研究で用いた SOM は、50x50 の 2 次元配列された出力層と 126 個の一次元の入力層からなる。0.08 秒間隔の 126 の時点での ACF の値が、ACF の形状データとして 126 個の入力ユニットにそれぞれ入力される。SOM 学習則については、C 言語で作成し、それを用いた。

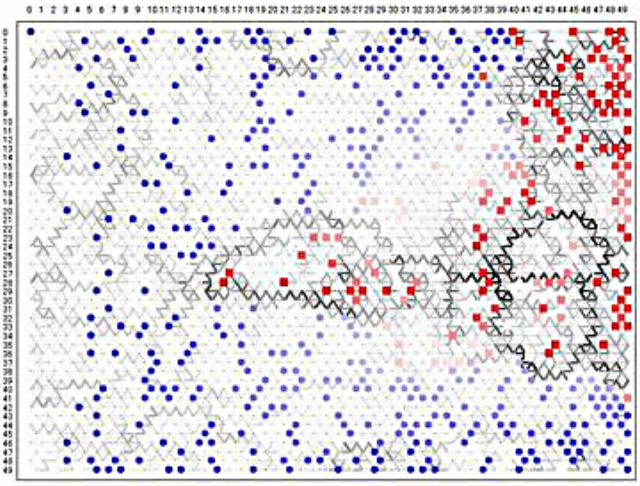


図 5.SOM(学習データに対する分類)

図 5 は SOM を 15000 回、上記の通り用意した学習データで学習させた結果である。隣同士の出力ユニットのベクトル空間上距離は、それらのつなぐ線のグレースケールで表される(色が薄い方が距離が短い)。このグレースケールによる表現だけではどのように入力が分類されたか判断することは難しいので、用いた学習データについても出力マップ上に出力し、色つきのマーカーで表現する。ここで、青(赤)のユニットが、安定性に関係する(関係しない)信号が入力されたことを表している。ここでは上記に示したように、安定性に関係する信号とは、振動周期が 2 秒から 3 秒の信号である。この結果から、安定性に関係する信号とそうでない信号を、それぞれ異なる領域に分けて表現できていることが判る。この領域間に分割線を引く事で、信号分類を行うことができる。

さらに、分類精度を調査するために、学習時には用いていないデータを SOM に入力した。この時、安定性に関係するものを関係ないと誤判別した例は皆無であった。また、安定性に関係しないものを関係すると誤判別した例は全入力中 14%程度であった。しかし、この誤判別の内、58%が減幅比が 0.1 以下の信号であり、28%が 0.2 以下であった。よって誤判別は ACF の振動の特徴が急速に消失することが原因と考えられる。このような小さな減幅比の信号は、安定性解析にとって重要ではない。もしこのような信号を事前に除去できるなら、誤判別の割合は約 2%程度となる。この時、計算時間は汎用のパソコン(CPU: Core 2 Duo E8400; 3.0GHz)で約 15 秒程度であった。これらのことは、SOM が十分に高い分類精度と、速い処理速度を持つことを示している。

IV-2. 実データに対する学習精度

リンガルス 1 号機安定性試験解析で測定されたデータは定常炉雑音時系列データである。これまでの知見から 9 つの運転状態下の内、一つで不安定であることが判っている。それぞれのデータは PCA によって異なる特異値を持つ独立信号成分に分解され、これらのうち大きい方から 8 つの特異値を持つ信号成分を安定性解析に用いる。併せて 4480 (=8x8x70)個の ACF が、これらの選ばれたデータから計算され、SOM の入力に用いられた。これらのデータは学習後の SOM に入力し、それに対する分類制度を検討した。図 6 に、入力データに対する SOM の分類結果を示す。

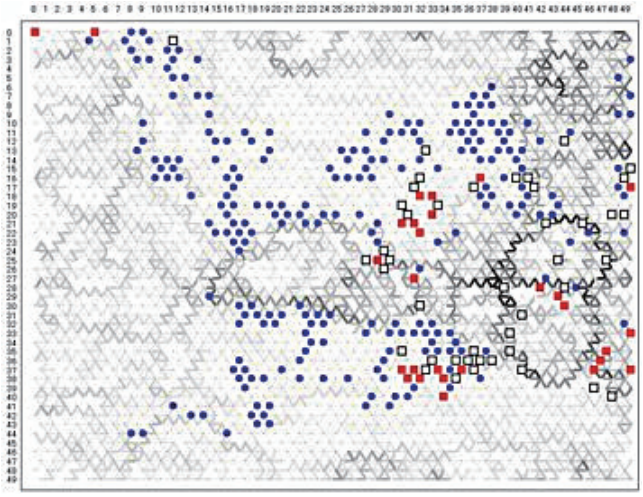


図 6. SOM(実データに対する分類)

青(赤)の点は安定的(不安定的)な運転状態下で測定された信号が入力されたことを表している。白四角の点は両方の信号が同じユニットに入力されたことを表している。図 6 から、まず安定性に関係ない信号を、図 5 での領域分けを参考に除外する。また、同一の運転状態下には複数の LPRM 信号で測定された信号成分が存在するので、これらの内もっとも大きな減幅比を持つ(即ち、もっとも不安定性の)信号だけを残し、その他を除外する。そのような処理を行った結果を図 7 に示す。その結果は、SOM による分類が、人の判断による分類結果と完全に一致することを示している。また、出力マップの左側がより減幅比が大きいという傾向があり、実際に不安定性の運転状態下での信号は左上の一点(赤い点)に集まっている。

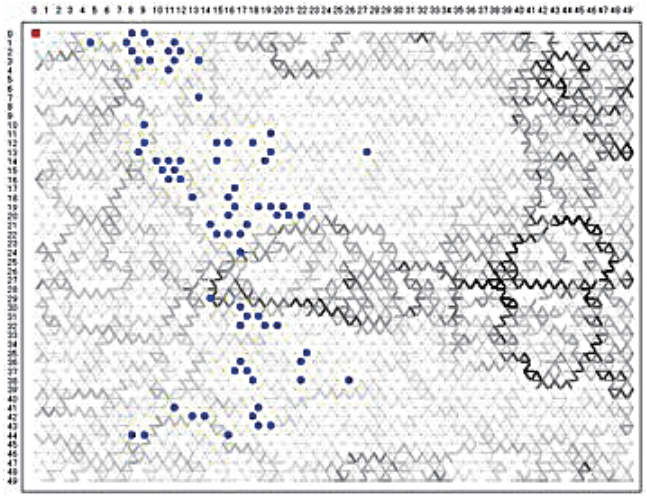


図 7. SOM(実データ; 出力整理後)

それゆえ、安定の度合いを、大まかにまた視覚的に出力マップから知ることができる事が判った。また、正確な減幅比を求めたい時は、最小二乗法を分類された信号成分の ACF に適応させることで、求めることができる。

V. ANN による PCA

PCA ニューラルネットワークは、第一から第六までの主成分を求めるために、6 個のニューロンを接続させて構成されており、測定された時系列データを入力をするため、それぞれのニューロンは 126 の入力を受け持つ。ANN の学習には、リンガルス 1 号機安定性試験解析から得られた ACF を入力として用いた。この学習プログラムは C 言語で作成し用いた。

図 8 は、安定性運転状態下で測定された信号成分の、第一から第六までの主成分を示している。図 9 は、同様に、不安定性運転状態下で測定された信号成分の、第一から第六までの主成分を示している。

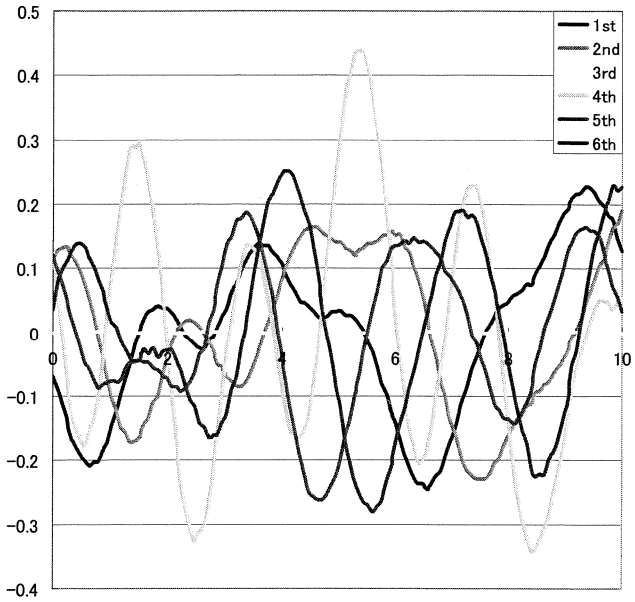


図 8. 安定状態下における PCA

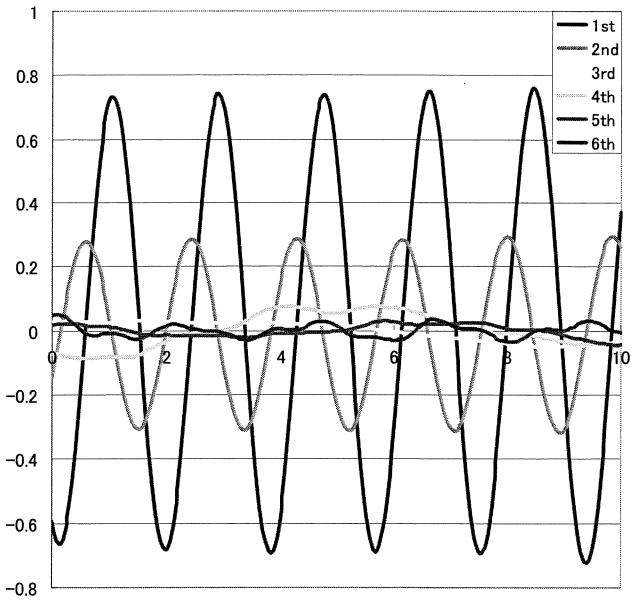


図 9. 不安定状態下における PCA

また、こうした結果から求められた安定性運転状態下また不安定性下の ACF を、それぞれ図 10 及び図 11 に示す。不安定性運転状態の図 11 では、減衰振動の形状を持ち振動が収束していく ACF は存在しないことが判る。これらの結果から、ANN を用いた PCA は、従来の PCA 手法による主成分分解を同様の能力を有すると考えられる。

この時学習回数は 1,000,000 回であり、学習時間は 10 秒程度であった。この学習時間はデータの測定時間が 10 秒であることを考慮すれば、十分に高速であると言える。従来の PCA 手法と比較すると、ANN を用いた本手法は、自立的かつ On-the-Job に自己組織化を行うため、統計的な特徴が徐々に変化するような入力に対し柔軟に対応できるという利点がある。この特徴は、原子炉安定性診断に

とって、重要なメリットになると考えられる。

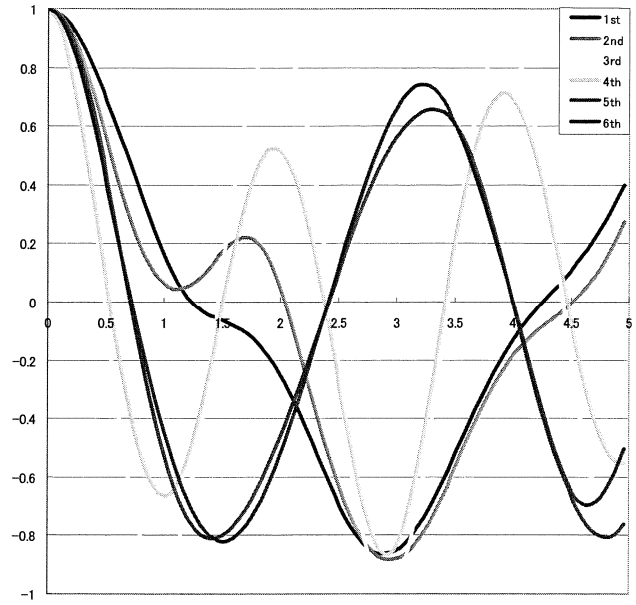


図 10. 安定状態下における ACF

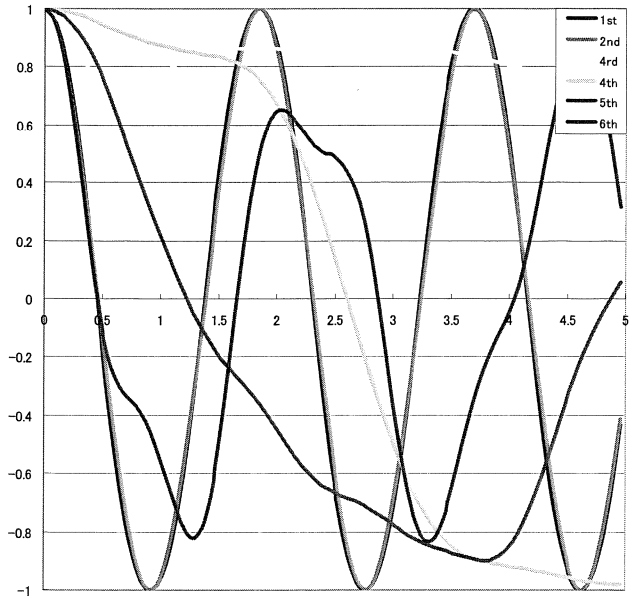


図 11. 不安定状態下における ACF

VI. 結論

LPRM 信号に PCA を適用する手法の BWR 安定性診断は、減幅比を正確に求めることができるために、非常に見込みがあると考えられる。オンライン安定性モニタリングにとっては、PCA によって分解された信号成分から安定性に関係する信号成分を高速に、かつ正確に選出することが非常に重要になる。

本研究では、ANN を用いたオンライン安定性モニタリングの実現可能性を検討した。この安定性診断では、二つの異なるタイプの ANN、即ち SOM と PCA ニューラルネットワークを用いた。研究を通し、適切な学習データを用いて学習させた SOM を用いることで、高精度に安定性に関係する信号成分を選出できることが判った。また、PCA ニューラルネットワークでは、従来の PCA 手法と同様に、時系列データからいくつかの主要な主成分を抽出できることを確認し、本研究では、ニューラルネットワークを用いた BWR オンライン安定性診断の可能性を示した。

References

1. M.Tsuji, Y.Shimazu, “Evaluation of decay ratio of BWRs using singular value decomposition method”, J.Nucl.Sci.Technol., 42[2], 1 (2005).
2. M.Tsuji, H.Michishita, Y.Shimazu, “Stability monitoring for BWR based on singular value decomposition method using artificial neural network”, J.Nucl.Sci.Technol., 42[12], 1054 (2005).
3. T. Kohonen, Self-Organizing Map, Springer-Verlag Tokyo (2005).
4. A. Hirose, Complex-valued neural network, Saiensu-sha Co., Ltd. (2005).

Spacelike hypersurfaces and spacelike submanifolds in de Sitter space
(de Sitter 空間内の空間的超曲面と空間的部分多様体)

加世堂 公希 (Masaki KASEDOU)
北海道大学大学院理学院

1 序

本稿では、ルジャンドル特異点論の応用による de Sitter 空間上の空間的超曲面および余次元 2 の部分多様体の幾何学的性質研究を紹介する。写像 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が点 $p \in \mathbb{R}^m$ で特異点をもつとは、f の p での微分写像が $\mathrm{rank}\, T_p f < \min(m, n)$ を満たすときを言う。n 次元 de Sitter 空間は擬内積 $\langle x, y\rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$ を持つ $(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^{n+1} = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ 上の擬球 $S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 1\}$ として定義される。de Sitter 空間 S_1^n 上の空間的超曲面と余次元 2 の空間的部分多様体部分多様体には光錐方向 $v \in LC_{\pm}^{*} = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = 0, x_0 > 0\, (x_0 < 0)\}$ によって定められるガウス-クロネッカー曲率と主曲率が定義され、このガウス-クロネッカー曲率が光錐ガウス像と光的超曲面の特異点に深く関わっている [7, 8]。さらにルジャンドル特異点論から空間次元 n が低い場合に、ジェネリックな光錐ガウス像と光的超曲面の特異点がそれぞれ光錐高さ関数とローレンツ距離二乗関数の特異点に対応することが知られている [1, 4, 10]。関数芽の特異点についてのアーノルドの分類を利用することで、光錐ガウス像と光的超曲面の特異点のジェネリックな分類 (Fig.1.2) とその特異点に対応する空間的超曲面と余次元 2 の部分多様体のガウス-クロネッカー曲率、主曲率の局所的な様子を知ることができる。さらに Montaldi[9] による接触の理論を用いることで、de Siter 空間上のホロ球面や光錐との接触の様子を低次元の場合にパラメータの空間への引き戻し芽を用いて図示することが可能である (Fig.3)。

本稿の話題はミンコフスキー空間内の双曲空間上で定義される空間的超曲面の光錐ガウス像 [4] と、ミンコフスキー空間上の余次元 2 の部分多様体の光的超曲面 [5] の研究を de Sitter 空間上の話に考察したものである。4 次元 de Sitter 空間上の空間的曲線によって定義される光的曲面の特異点の研究については [2] で行なわれている。

2 de Sitter 空間上の空間的超曲面と部分多様体

2.1 空間的超曲面

$U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ を開部分集合としその座標系を $u = (u_1, \cdots, u_{n-1})$ と表す。埋め込み写像 $\mathbf{X} : U \longrightarrow S_1^n$ が空間的であるとは偏微分 $\partial\mathbf{X}(u)/\partial u_1 \cdots \partial\mathbf{X}(u)/\partial u_{n-1}$ の一次結合で表される 0 でない全てのベクトル v が空間的である (すなわち $\langle v, v\rangle > 0$) ときをいう。この空間的な埋め込み写像 $\mathbf{X}$ およびその像 $M = \mathbf{X}(U)$ を de Sitter 空間内の空間的超曲面と呼ぶ。空間的超曲面上の各点 $p = \mathbf{X}(u)$ に対してその接空間に擬直交する双曲空間 $H_+^n(-1) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = -1\}$ 上の

点 $e(u)$ がとれる。したがって $\mathbb{L}^{\pm}(u) = \mathbf{X}(u) \pm e(u)$ により光錐方向の元を対応させる光錐ガウス像 $\mathbb{L}^{\pm} : U \longrightarrow LC^*_{\pm}$ が定義される。接空間 T_pM と T_uU を同一視することにより T_pM 上の線形変換 $d\mathbb{L}^{\pm}(u)$ の固有値の積をガウス-クロネッカー曲率 $K^{\pm}_p$ と表す。光錐ガウス像の特異点はその微分写像 $d\mathbb{L}^{\pm}$ が退化することと同値なので、曲率の定義から空間的超曲面の放物点 ($K^{\pm}_p = 0$ の点) に対応することが分かる。

光錐高さ関数 $H : U \times LC^*_{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $H(u,v) = \langle X(u), v\rangle - 1$ で定める。また $u_0 \in U, v_0 = \mathbb{L}^{\pm}(u_0)$ を固定した関数 $h_{v_0} = H\,|_{U\times\{v_0\}} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を光錐方向を固定した光錐高さ関数という。このとき、以下の命題が成立する：

Proposition 2.1. $H(u,v) = 0$ かつ $H_{u_i}(u,v) = 0$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ となる必要十分条件は $v \in \mathbb{L}^{\pm}(U)$ である。また $v_0 \in \mathbb{L}^{\pm}(U)$ の仮定の下で、超曲面上の点 p が放物点になる必要十分条件はヘッセ行列 $\mathrm{Hess}\,(h_{v_0})(u)$ が退化するときである。

したがって光錐ガウス像は光錐高さ関数による条件式から計算され、その特異点はパラメータを固定した光錐高さ関数のテイラー展開による 2 次の項が退化している点に対応している。

2.2 空間的部分多様体

$U \subset \mathbb{R}^{n-2}$ を開部分集合としその座標系を $u = (u_1, \cdots, u_{n-2})$ と表す。de Sitter 空間内の余次元 2 の空間的部分多様体は $M = \mathbf{X}(U)$ は前節と同様に定義される。部分多様体 M 上の各点 $p = \mathbf{X}(u)$ にはそれぞれ時間的、空間的な擬直交方向 $\mathbf{n}^T(u), \mathbf{n}^S(u)$ がとれる。光的ベクトル $\mathbf{n}^T(u) \pm \mathbf{n}^S(u)$ の x_0 成分を 1 に正規化した写像 $\widetilde{\mathbb{L}}^{\pm}(u)$ を空間的超曲面 X の光錐ガウス写像と呼ぶ。また $\widetilde{\mathbb{L}}^{\pm}$ の微分写像によって定義される接空間 T_pM の線形変換の固有値を用いてガウス-クロネッカー曲率 $\widetilde{K}^{\pm}_p$ や主曲率 $\widetilde{\kappa}^{\pm}_{i,p}$ が定義され、部分多様体上の放物点を $\widetilde{K}^{\pm}_p = 0$、臍点を全ての主曲率 $\widetilde{\kappa}^{\pm}_{i,p}$ が一致する点と定める。特に臍点かつ放物点である点を平坦点と呼ぶ。空間的超曲面の場合と同様に光錐ガウス写像の特異点は余次元 2 の空間的部分多様体の放物点に対応している。

本稿では光錐ガウス写像とは別の幾何学的意味を持つ光的超曲面の特異点について触れたい。実数 t をパラメータにとる写像 $LH^{\pm}_M(u,t) = \mathbf{X}(u) + t\widetilde{\mathbb{L}}^{\pm}(u)$ を光的超曲面、関数 $G : U \times S^n_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $G(u,\lambda) = \langle \mathbf{X}(u) - \lambda, \mathbf{X}(u) - \lambda\rangle$ で定め、これをローレンツ距離二乗関数と呼ぶ。また $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ を固定したローレンツ距離二乗関数を $g_{\lambda_0}(u) = G(\lambda_0, u)$ と表すと前節と同様の命題が得られる。

Proposition 2.2. $p_0 = \mathbf{X}(u_0) \in M, p_0 \neq \lambda_0$ とするとき、$G(\lambda,u) = G_{u_i}(\lambda,u) = 0$ $(i = 1, \cdots, n-2)$ を満たす必要十分条件はある $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ があって、$p = LH^{\pm}_M(u,\lambda)$ と表されるときである。またこのとき特に $\mathrm{Hess}\,(g)(u)$ が退化する必要十分条件は $\lambda = -1/\widetilde{\kappa}^{\pm}_{i,p}$ と表される場合である。ここで $\widetilde{\kappa}^{\pm}_{i,p}$ は p における余次元 2 の空間的部分多様体の主曲率での一つある。

以上の命題から余次元 2 の空間的部分多様体上の光的超曲面 $LH^{\pm}_M$ が特異点は曲面上の点から光的なベクトルの方向に $1/\widetilde{\kappa}^{\pm}_{i,p}$ だけ延長したところに現れていることが分かる。特に光的超曲面がより退化した特異点を持つ場合は 2 つ以上の主曲率が一致し、部分多様体上の臍点に対応するところでは光的超曲面上で $n-2$ 個の特異点が 1 点に重複する。

2.3 ジェネリックな場合の特異点の分類

まず関数芽と写像芽に関する同値関係の定義を行なう。$\mathcal{K}$-普遍開折の定義と写像空間の集合上でのジェネリシティ、ルジャンドル特異点論については [10] に詳細に述べられているので参照

して頂きたい。2つの写像芽 $f_i:(\mathbb{R}^n,a_i)\longrightarrow(\mathbb{R}^m,b_i)\,(i=1,2)$ が $\mathcal{A}-$ 同値であるとは、ある微分同相写像芽 $\Phi:(\mathbb{R}^n,a_1)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,a_2)$, $\Psi:(\mathbb{R}^m,b_1)\longrightarrow(\mathbb{R}^m,b_2)$ があって、$\Psi\circ f_1=f_2\circ\Phi$ と表されるときをいう。また2つの関数芽 $g_1,g_2:(\mathbb{R}^n,a_i)\longrightarrow(\mathbb{R},0)\,(i=1,2)$ が $\mathcal{K}$-同値であるとは、ある微分同相写像芽 $\Phi:(\mathbb{R}^n,a_1)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,a_2)$, と関数芽 $\lambda:(\mathbb{R}^n,a_1)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\lambda(a_1)\neq 0$ があって、$f_1=\lambda\cdot(g_2\circ\Phi)$ と表されるときをいう。空間次元 n が小さいとき光錐高さ関数芽 H が $\mathcal{K}$-普遍開折である条件は空間的超曲面についてのジェネリックな性質である。

Proposition 2.3. 上述のジェネリックな条件を満たす2つの空間的超曲面について光錐ガウス像 $\mathbb{L}^{\pm}$ が $\mathcal{A}$-同値でうつり合う必要十分条件はパラメータを固定した光錐高さ関数 h_{v_0} が $\mathcal{K}$-同値でうつりあうことである。

$n=3$ の場合のジェネリックな条件を満たす空間的曲面の光錐ガウス像とパラメータを固定した光錐高さ関数 h_{v_0} は $\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_3$-型に分類される。すなわち光錐高さ関数 h_{v_0} は $(u_1^2\pm u_2^{k+1}):(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ と $\mathcal{K}$-同値である。(特異点型については [1],[10],[3] を参照)

余次元2の空間的部分多様体についてもジェネリックな光的超曲面が $\mathcal{A}$-同値でうつり合うことと、パラメータを固定したローレンツ二乗距離関数が $\mathcal{K}$-同値でうつりあうことは同値になる。$n=4$ の場合に余次元2の空間的部分多様体に対応する光的超曲面とローレンツ二乗距離関数は $\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{D}_4^+,\mathcal{D}_4^-$-型に分類される。ただし $\mathcal{D}_4^{\pm}$ の特異点型を持つ光錐高さ関数 h_{v_0} は $(u_1^3\pm 3u_1u_2^2):(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ と $\mathcal{K}$-同値である。

2.4 Montaldi の接触の理論

C^∞ 多様体 $M_i,N_i\in\mathbb{R}_1^{n+1}\,(i=1,2)$ について $\dim X_1=\dim X_2$, $\dim Y_1=\dim Y_2$, $a_i\in X_i\cap Y_i\,(i=1,2)$ を満たすとする。X_i と Y_i の接触型が同値であるとは、ある微分同相写像芽 $\Phi:(\mathbb{R}_1^{n+1},a_1)\longrightarrow(\mathbb{R}_1^{n+1},a_2)$ があって、$\Phi((X_1,a_1))=(X_2,a_2)$, $\Phi((Y_1,a_1))=(Y_2,a_2)$ を満たすときである。Montaldi[9] は多様体の間の接触型の関係を写像の間の $\mathcal{K}$-同値関係を用いて表した。

Montaldi の接触の理論を用いると前節で分類された特異点型の特徴付けが行なえる。実際に空間的超曲面の場合では光錐ガウス像が特異点を持った場合に次のことがいえる。

Proposition 2.4. 2つの空間的超曲面 $M_i=\mathbf{X}_i(U_i)$ とその上の点 p_i $(i=1,2)$ について、対応する光錐ガウス像が同じ特異点型を持つ場合、点 p_i における各々の空間的超曲面と de Sitter ホロ超球面 $HS(\mathbf{X}_i,v_i)=\{x\in\mathbb{R}_1^{n+1}\mid\langle x,v_i\rangle=1\}\cap S_1^n$ $(v_i\in LC_{\pm}^*)$ との接触型は同じである。とくに空間的超曲面と de Sitter ホロ超球面の共通部分のパラメータ空間への接触引き戻し芽 $(\mathbf{X}_i^{-1}(M_i\cap HS(\mathbf{X}_i,v_i)),u_i)$ は微分同相に移り合う。

de Sitter ホロ超球面はすべての主曲率が0である全平坦的な空間的超曲面である。すなわち接触引き戻し芽を観察することは空間的超曲面 M がどれだけ平坦性を持つかを知る指標になっている。一般に接触引き戻し芽が微分同相に移り合っても、対応する光錐ガウス像は同じ特異点型を持つとは限らない。

余次元2の空間的部分多様体の場合には接触する部分多様体は曲面上の点 $p\in M$ を中心とする de Sitter 空間上の光錐 $LC_p\cap S_1^n=\{x\in S_1^n\mid\langle x-p,x-p\rangle=0\}$ が対応する。de Sitter 空間上の光錐は主曲率が0ではない全臍的な余次元2の空間的部分多様体であり、この場合の接触引き戻し芽 $(\mathbf{X}^{-1}(M_i\cap LC_p),u_i)$ を観察することは空間的部分多様体の主曲率どうしの近さを知る指標になる。

3 結果

3.1 3次元 de Sitter 空間上の空間的曲面

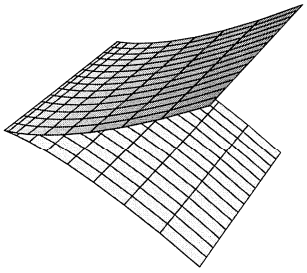


Figure 1: カスピダルエッジ特異点 ($\mathcal{A}_2$-型)

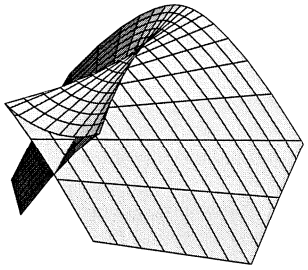


Figure 2: スワローテイル特異点 ($\mathcal{A}_3$-型)

空間次元 $n=3$ の場合の de Sitter 空間上の空間的曲面について、特異点を持つ場合の光錐ガウス像はジェネリックには以下のカスピダルエッジ特異点 ($\mathcal{A}_2$-型) と、スワローテイル特異点 ($\mathcal{A}_3$-型) に分類される。ここで写像芽 $f:(\mathbb{R}^2,a)\longrightarrow(\mathbb{R}^3,b)$ がカスピダルエッジ特異点を持つとは、f が写像芽 $(u_1,u_2^2,u_2^3):(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\longrightarrow(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})$ と $\mathcal{A}$-同値である場合で、f がスワローテイル特異点を持つとは、f が写像芽 $(3u_1^4+u_1^2u_2,4u_1^3+2u_1u_2,u_2)$ と $\mathcal{A}$-同値である場合をいう。光錐ガウス像と光錐高さ関数をより詳しく調べることにより次の性質が分かる。

Theorem 3.1. ジェネリックな空間的曲面上の放物点の集合は正則曲線になり、曲線上の各点において光錐ガウス像はカスピダルエッジ特異点かスワローテイル特異点を持つ。さらに各々の場合において次が従う。

(1) 光錐ガウス像が $\mathcal{A}_2$-型特異点を持つ場合、接触引き戻し芽は原点におけるカスプ曲線芽 $\{(u_1,u_2)\mid u_1^2-u_2^3=0\}$ と微分同相である。

(2) 光錐ガウス像が $\mathcal{A}_3$-型特異点を持つ場合、接触引き戻し芽は原点におけるタクノード曲線芽 $\{(u_1,u_2)\mid u_1^2-u_2^4=0\}$ と微分同相か一点集合である。また曲面上の点 p の任意の近傍 U' について、ある放物点でない2点 $u_1,u_2\in U'$ がとれて、u_1,u_2 における接触するホロ球面が一致する。

3.2 4次元 de Sitter 空間上の余次元2の空間的曲面

4次元 de Sitter 空間上の余次元2のジェネリックな空間的曲面のローレンツ距離二乗関数は以下の特異点の標準形のいずれかと $\mathcal{A}$-同値になる。

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}_2\text{-型}) \quad f(u_1,u_2,u_3)=(3u_1^2,2u_1^3,u_1,u_2)\\
&(\mathcal{A}_3\text{-型}) \quad f(u_1,u_2,u_3)=(4u_1^3+2u_1u_2,3u_1^4+u_2u_1^2,u_2,u_3)\\
&(\mathcal{A}_4\text{-型}) \quad f(u_1,u_2,u_3)=(5u_1^4+3u_2u_1^2+2u_1u_3,4u_1^5+2u_2u_1^3,u_2,u_3)\\
&(\mathcal{D}_4^+\text{-型}) \quad f(u_1,u_2,u_3)=(2(u_1^2+u_2^2)+u_1u_2u_3,3u_1^2+u_2u_3,3u_2^2+u_1u_3,u_3)\\
&(\mathcal{D}_4^-\text{-型}) \quad f(u_1,u_2,u_3)=(2(u_1^3-u_1u_2^2)+(u_1^2+u_2^2)u_3,u_2^2-3u_1^2-2u_1u_3,u_1u_2-u_2u_3,u_3)
\end{aligned}
$$

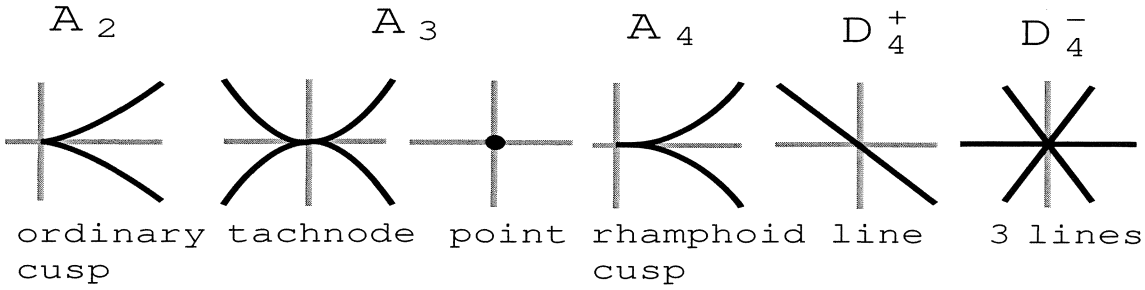


Figure 3: 接触引き戻し芽の標準形 (太線部分)

曲面と接触する de Sitter 空間上の光錐の接触引き戻し芽の標準形は Fig.3 に示した。ローレンツ距離二乗関数が $\mathcal{A}_k$-型特異点を持つ場合に対応する光的超曲面は 2 つの異なる主曲率のうちの片方を表し、より退化した $\mathcal{D}_k$-型特異点を持つ場合は 2 つの主曲率が一致することを示している。

References

[1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, Singularities of Differential Maps, Volume I, Birkhäuser, Basel, 1986.

[2] T. Fusho, S. Izumiya, Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space, J. Geom. 88 (2008), 19–29.

[3] C.G. Gibson, Singular points of smooth mappings, Research Notes in Mathematics 25, Pitman (1979)

[4] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, Singularities of hyperbolic Gauss maps, Proc. London Math Soc. 86 (2003) 485–512.

[5] S. Izumiya, M. Kossowski, D. Pei and M.C. Romero Fuster, Singularities of Lightlike Hypersurfaces in Minkowskifour-space, Tohoku Math J. 58 (2006), 71–88.

[6] S. Izumiya, M.C. Romero Fuster, The lightlike flat geometry on spacelike submanifolds of codimension two in Minkowski space, Sel. math. NS. 13 (2007) 23–55.

[7] M. Kasedou, Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space, preprint.

[8] M. Kasedou, Spacelike submanifolds of codimension two in de Sitter space, preprint.

[9] J.A. Montaldi, On contact between submanifolds, Michigan Math. J. 33 (1986) 195–199.

[10] 泉屋周一、石川剛郎、応用特異点論、共立出版、1998

Random walks on finite groups

KITAHARA, Makoto
Department of Mathematics, Hokkaido University,
Sapporo 060-0810, JAPAN

Abstract

We consider a simple random walk over the vertices of an m-gon. It is well-known that such a random walk converges to a uniform distribution if m is odd. How many steps does it near to the uniform distribution with? An answer of this question and some similar results for even integers m are presented.

1 Preliminaries and Notations

Let G be a finite group, $L(G)$ be a set of all functions from G to $\mathbb{C}$. We remark that all probability measure on G are element in $L(G)$. For a $\varphi \in L(G)$, we define

$$\widehat{\varphi} := \sum_{x \in G} \varphi(x)x \in \mathbb{C}[G]$$

where $\mathbb{C}[G]$ is the group algebra. A probability peasure p induces a random walk on G with transition matrix given by $K(x,y) := p(x^{-1}y)$ which represents the probability to pass from x to y.

For two probability mesures p and q,

$$(q * p)(y) := \sum_{x \in G} q(x)p(x^{-1}y) = \sum_{x \in G} q(x)K(x,y)$$

is called the convolution of q and p.

Example 1.1. *We consider the cyclic group $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ equipped with a probability measure p as follows*:

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & (x = \pm 1) \\ 0 & (\textit{otherwise}). \end{cases}$$

This probability measure gives a simple random walk on vertices of a pentagon. Then the corresponding transition matrix P has the following form:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We denote by p^{*n} for a probability measure p, the nth convolution powers of p. The iterated kernel $K_n(x,y)$ is defined inductively by

$$K_1(x,y) := K(x,y) \quad K_n(x,y) := \sum_{z \in G} K_{n-1}(x,z)K(z,y).$$

Then, the following properties are obvious:

$$p^{*n}(x) = \sum_{x_1,\cdots,x_{n-1} \in G} p(x_1)K(x_1,x_2)K(x_2,x_3)\cdots K(x_{n-1},x) \tag{1}$$

$$\widehat{p}^{\,n} = \sum_{x \in G} p^{*n}(x)x \in \mathbb{C}[G] \tag{2}$$

2 Representation Theory of Finite Groups

Definition 2.1. *Let G be a finite group, V a finite dimensional vecter space over $\mathbb{C}$, and ρ a group homomorphism from G to $GL(V)$. We call (ρ, V) a* **representation** *of G and V its* **representation space**.

Definition 2.2. *Let (ρ, V) be a representation of G, W be a subspace of V. We call W a G-***subspace** *if W is the G-invariant. That is,*

$$\rho(x)(W) \subseteq W \quad for \quad \forall x \in G.$$

Then, (ρ, W) is also a representation of G.

Definition 2.3. *A representation (ρ, V) of G is an* **irreducible representation** *if G-subspace of V is only 0 and V.*

Let $(\rho_i, W_i)(i = 1, \cdots, n)$ be representations of G. We define $W := W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$, $\rho := \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$, then (ρ, W) is also a representation of G where $\rho(x)(w_1 + \cdots + w_n) := \rho_1(x)(w_1) + \cdots + \rho_n(x)(w_n)$ $(x \in G, w_i \in W_i)$.

Theorem 2.1 (Maschke). *For any representation (ρ, V) of G, there exist irreducible representations (ρ_i, W_i) $(i = 1, \cdots, n)$ such that $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.*

Definition 2.4. *We define the* **character** χ_ρ *of a representation ρ of G as follows*:

$$\chi_\rho(x) := \mathrm{Tr}(\rho(x)) \quad (x \in G).$$

Especially, we call χ_ρ the **irreducible character** *when ρ is an irredcible representation.*

We denote by $\mathrm{Irr}(G)$ the set of all irreducible character of G. We define an inner product on $L(G)$ by

$$(\varphi \mid \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \varphi(x)\overline{\psi(x)}$$

for $\varphi, \psi \in L(G)$. Let $\mathrm{Cl}(G)$ be the set of all class functions of element in $L(G)$ where a class function φ means $\varphi(yxy^{-1}) = \varphi(x)$ for any $x, y \in G$. All characters are class functions.

Theorem 2.2. *The* $\mathrm{Irr}(G)$ *has following propaties.*

(1) *The* $\mathrm{Irr}(G)$ *is the orthonormal basis of vecter space* $\mathrm{Cl}(G)$.

(2) $|\mathrm{Irr}(G)| = \sharp\{$*conjugacy class of* $G\}$.

Theorem 2.3. *Following conditions are equivarent.*

$$G \text{ is an abelian group} \Longleftrightarrow \chi(1) = 1 \text{ for all } \chi \in \mathrm{Irr}(G).$$

3 An Application to Probability

Definition 3.1. *Let* p, q *be probability measures on* G. *The* $\|p-q\|_{TV}$ *defined by*

$$\|p-q\|_{TV} := \max\{|p(A) - q(A)| \mid A \subseteq G\},$$

is called the **total variational distance**.

Proposition 3.1. *The total variational distance has the following relation.*

$$\|p-q\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{x\in G}|p(x)-q(x)|.$$

We extend a representation ρ of G to an algebra homomorphism from $\mathbb{C}[G]$ to $\mathrm{End}(V)$ where V is the representation space of ρ:

$$\rho(\widehat{\varphi}) = \rho\left(\sum_{x\in G}\varphi(x)x\right) = \sum_{x\in G}\varphi(x)\rho(x) \in \mathrm{End}(V) \quad (\varphi \in L(G)),$$

which is called the Fourier transform of φ in ρ.

Proposition 3.2. *Let* p, q *be probability measures on* G, ρ *be a representation of* G. *Then,*

$$\rho(\widehat{p * q}) = \rho(\widehat{p})\rho(\widehat{q}).$$

Theorem 3.1 (Plancherel Formula, Fourier Inversion Theorem)**.** *Let* $\varphi, \psi \in L(G)$, ρ_χ *be an irreducible representation of* G *with character* χ. *Then we have*

$$\sum_{x\in G}\varphi(x^{-1})\psi(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)\mathrm{Tr}(\rho_\chi(\widehat{\varphi})\rho_\chi(\widehat{\psi})) \tag{3}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(1)\mathrm{Tr}(\rho_\chi(x^{-1})\rho_\chi(\widehat{\varphi})). \tag{4}$$

The following statment is a key lemma.

Lemma 3.1. *Let* p *be a probability measure of* G *such that* $p(x^{-1}) = p(x)$ *for all* $x \in G$, u *the uniform probability measure of* G. *That is,* $u(x) \equiv 1/|G|$ *for all* $x \in G$. *Then we have*

$$\|p-u\|_{TV}^2 \le \frac{1}{4}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)\setminus\{1_G\}}\chi(1)\mathrm{Tr}(\rho_\chi(\widehat{p})^2)$$

where 1_G *is the trivial character.*

Theorem 3.2. *Let G be a cyclic group of an odd order m. Probability measures p and q on G are defined by*

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & (x = \pm 1) \\ 0 & (otherwise), \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 1/3 & (x = \pm 1, 0) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

(1) *If $n \geq m^2$, then $\|p^{*n} - u\|_{TV} \leq e^{-\pi^2 n/2m^2}$*

(2) *For every $n \in \mathbb{N}$, $\|q^{*n} - u\|_{TV} \leq \dfrac{\sqrt{m-1}}{2 \cdot 3^n}$.*

Theorem 3.3. *For a natural number m, we define the probability measure on $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ as follows*:

$$q(x) := \begin{cases} 1/2 & (x = 0) \\ 1/4 & (x = \pm 1) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

If $n \geq m^2/2$, then we have the following inequality,

$$\|q^{*n} - u\|_{TV} \leq e^{-\pi^2 n/m^2}.$$

Theorem 3.4. *For a natural number m, we define the probability measure on $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$ as follows*:

$$p(x) = \begin{cases} 1/2 & (x = \pm 1) \\ 0 & (otherwise), \end{cases} \quad u_0(x) = \begin{cases} 1/m & (x : even) \\ 0 & (x : odd). \end{cases}$$

We assume that the initial point of this randam walk is vartex 0. If $n \geq m^2$ and n is an even, then we have the following inequality,

$$\|p^{*n} - u_0\|_{TV} \leq e^{-\pi^2 n/2m^2}.$$

References

[1] P.Diaconis, Group Representations in Probability and Statistics, Inst. Math. Stat., 1988.

[2] 吉田知行, 分割表の一致率検定への有限群論と組合せ論の応用,2007, http://www2.kobe-u.ac.jp/ mhsaito/agsymkobe07/proceedings/yoshida.pdf.

[3] 坂田年男, 対称群の表現の統計および確率への応用, 群論とその周辺シンポジウム報告集, 1993.

The Gauss map of a hypersurface in Euclidean n-sphere and the spherical Legendrian duality

Takayuki NAGAI*

2009

1 Introduction

The Gauss map of a hypersurface is a map which lets the unit normal vector at the point correspond to the point of the hypersurface. We can study the differential geometry of hypersurfaces in by using the unit normal of a hypersurface. we investigate the Gauss map of a hypersurface in Euclidean n-sphere as an application of Legendrian singularity theory.

Let $S^n = \{\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = 1\}$ be an n-dimensional Euclidean sphere, where $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}$ is inner product. Given a vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ and a real number c, the hyperplane with normal $\boldsymbol{v}$ is given by

$$HP(\boldsymbol{v}, c) = \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = c\}.$$

The hypersphere in S^n is given by

$$\begin{aligned} S^{n-1}(\boldsymbol{v}, c) &= S^n \cap HP(\boldsymbol{v}, c) \\ &= \{\boldsymbol{w} \in S^n \mid \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = c\}. \end{aligned}$$

We say that $S^{n-1}(\boldsymbol{v}, c)$ is a *great hypersphere* if $c = 0$, a *small hypersphere* if $c \neq 0$. These play a similar role to the role played by the ordinary Gauss map of a hypersurface in Euclidean space.

For any $\boldsymbol{a}_{(i)} = \left(a^0_{(i)}, \ldots, a^n_{(i)}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, the wedge product $\boldsymbol{a}_{(1)} \wedge \boldsymbol{a}_{(2)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{(n)}$ is defined by

$$\boldsymbol{a}_{(1)} \wedge \boldsymbol{a}_{(2)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{(n)} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{(0)} & \boldsymbol{e}_{(1)} & \cdots & \boldsymbol{e}_{(n)} \\ a^0_{(1)} & a^1_{(1)} & \cdots & a^n_{(1)} \\ a^0_{(2)} & a^1_{(2)} & \cdots & a^n_{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^0_{(n)} & a^1_{(n)} & \cdots & a^n_{(n)} \end{pmatrix},$$

where $\{\boldsymbol{e}_{(0)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{(n+1)}\}$is the canonical basis of $\mathbb{R}^{n+1}$. By calculation, we can easily show that $\boldsymbol{b} \cdot \left(\boldsymbol{a}_{(1)} \wedge \boldsymbol{a}_{(2)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{(n)}\right) = \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{(n)})$, so that $\boldsymbol{a}_{(1)} \wedge \boldsymbol{a}_{(2)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_{(n)}$ is orthogonal to any $\boldsymbol{a}_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

*Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 0600810, japan

Let $\boldsymbol{x} : U \to S^n$ be a regular hypersurface (i.e. an embedding), where $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ is an open subset. We denote that $M := \boldsymbol{x}(U)$ and identify M and the embedding $\boldsymbol{x}$. Since $\boldsymbol{x}(u) \cdot \boldsymbol{x}(u) = 1$ for any $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \in U$, we have $\boldsymbol{x}_{u_i}(u) \cdot \boldsymbol{x}(u) = 0$ where $\boldsymbol{x}_i(u) := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}(u)$.

For any point $u \in U$, we define the unit normal vector $\boldsymbol{e}(u)$ to M at $\boldsymbol{x}(u)$ by

$$\boldsymbol{e}(u) = \frac{\boldsymbol{x}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_2}(u) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{u_n}(u)}{\|\boldsymbol{x}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_2}(u) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{u_n}(u)\|}.$$

By definition , we have

$$\boldsymbol{e}(u) \cdot \boldsymbol{e}(u) = 1, \qquad \boldsymbol{x}(u) \cdot \boldsymbol{e}(u) = \boldsymbol{x}_{u_i}(u) \cdot \boldsymbol{e}(u) = 0 \quad (\forall u \in U),$$

and since $\boldsymbol{x}$ is a embedding , $\{\boldsymbol{x}_{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{(n-1)}\}$ are linearly independent for any $u \in U$. So we obtain a basis

$$\boldsymbol{x}(u) \ , \ \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \ , \cdots , \ \boldsymbol{x}_{u_{n-1}}(u) \ , \ \boldsymbol{e}(u)$$

of $T_p\mathbb{R}^{n+1}$, where $p = \boldsymbol{x}(u)$. Then we define a map $\boldsymbol{e} : U \in u \mapsto \boldsymbol{e}(u) \in S^n$ which is called the **Gauss map** on the hypersurface $\boldsymbol{x}$.

2 Gauss map as wave front

We now consider the following double fibrations of S^n;

$$\begin{aligned}
&\Delta = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in S^n \times S^n | \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0\} \\
&\pi_1 : \Delta \ni (\boldsymbol{v} \ , \ \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{v} \in S^n \qquad \pi_2 : \Delta \ni (\boldsymbol{v} \ , \ \boldsymbol{w}) \longmapsto \boldsymbol{w} \in S^n \\
&\theta_1 = d\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}|_\Delta \quad \theta_2 = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{w}|_\Delta
\end{aligned}$$

Here, $d\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^n w_i dv_i$ and $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{w} = \sum_{i=0}^n v_i dw_i$. Because $d(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) = d\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{w}$ and on $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ on Δ, we remark that $\theta_1^{-1}(0)$ and $\theta_2^{-1}(0)$ define the same tangent hyperplane field over Δ which is denoted by K.

Proposition 2.1. *Under the above notation, (Δ, K) is a contact manifold and both of π_i are Legendrian fibrations.*

This proposition follows from the fact that a map Φ from Δ to the projective cotangent bundle on S^n defined by

$$\Phi : \Delta \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto (\boldsymbol{w}, [v_0 w_1 - v_1 w_0 \ : \ \cdots \ : \ v_0 w_n - v_n w_0]) \in PT^*S^n$$

is locally Legendrian diffeomorphism germ at any point $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \Delta$.

We interpret the Gauss map of a hypersurface in S^n as a wave front set in the framework of above contact manifold. For any regular hypersurface $\boldsymbol{x} : U \to S^n$, we have $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e} = 0$. Therefore we can define an embedding $\mathcal{L} : U \to \Delta$ by $\mathcal{L}(u) = (\boldsymbol{x}(u), \boldsymbol{e}(u))$.

Proposition 2.2. *The map $\mathcal{L}$ is a Legendrian embedding to the contact manifold Δ .*

By definition, $\pi_2 \circ \mathcal{L}(U) = \boldsymbol{e}(U)$. Then we have the following corollary.

Corollary 2.3. *For any hypersurface* $\boldsymbol{x} : U \to S_n$, $\boldsymbol{e}(U)$ *is a wave front set of* $\mathcal{L}$ *through the Legendrian fibration* π_2.

We now introduce a family of functions on a hypersurface in Euclidean sphere which are useful for the study of singularities of wave front set of Legendrian embeddings. Let $\boldsymbol{x} : U \to S^n$ be a hypersurface. We define a family of functions

$$H : U \times S^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

by $H(u, V) = \boldsymbol{x}(u) \cdot V$. We call H is the *height function* on $\boldsymbol{x} : U \to S^n$.

Proposition 2.4. *Let* $H : U \times S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *be a height function on* $\boldsymbol{x} : U \to S^n$. *Then* $H(u, V) = \partial H/\partial u_i(u, V) = 0$ $(for \quad i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *if and only if* $V = \pm \boldsymbol{e}(u)$.

This means that the image of Gauss map of hypersurface $\boldsymbol{x} : U \to S^n$ is denoted by the discriminant set $D(H)$ of a height function on $\boldsymbol{x}$.

For given $V_0 \in S^n$, we define the *height function of the* V_0 *direction* by $h_{V_0}(u) = H(u, V_0)$ and we denote the *Hessian matrix* of the height function at u_0 by $\mathrm{Hess}(h_{V_0}(u))$.

We can interpret the height function $H : U \times S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ is the generating family of $\mathcal{L}$ at least locally.

Proposition 2.5. *The height function* $H : U \times S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *is a Morse family of hypersurfaces at any point* (u, V).

Here, for a function germ $F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, we say that F is a *Morse family of hypersurfaces* if the mapping

$$\Delta^* F = \left(F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, 0)$$

is non-singular , where $(x, q) = (q_1, \ldots, q_k \ , \ x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0)$.

By the theory of contact geometry, It is well-known result that if the germ F is a Morse family, then the map germ $\Phi_F : (\Sigma_*(F), 0) \to PT^*\mathbb{R}^n$ defined by

$$L_F(q, x) = (x, \ [F_{x_1}(q, x) : \ldots : F_{x_n}(q, x)])$$

is a Legendrian immersion germ. In this case, we call F a *generating family* of $L_F(\Sigma_*(F))$.

Therefore we have the Legendrian immersion germ L_H whose generating family is the height function H.

Here we remember the map Φ . By definition of this map and L_H, we have $\Phi \circ \mathcal{L}(u) = L(u, \boldsymbol{e}(u))$. This means that H is a generating family of $\mathcal{L}(U) \in \Delta$ through Φ .

3 Main result

In this section we consider the geometric meaning of singularities of it using this framework. Montaldi [2] consider the relationship between the contact of

submanifolds and singularity type of germs. Here we quickly review the theory and apply to our case.

Let X_i and Y_i (for $i = 1, 2$) be submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with $\dim X_1 = \dim X_2$, $\dim Y_1 = \dim Y_2$. We say that the *contact* of X_1 and Y_1 at y_1 is the same type as the *contact* of X_2 and Y_2 at y_2 if there is a diffeomorphic germ $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \to (\mathbb{R}^n, y_2)$ such that $\Phi(X_1, y_1) = (X_2, y_2)$ and $\Phi(Y_1, y_1) = (Y_2, y_2)$. In this case we write $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$.

Theorem 3.1.(Montaldi) *Let X_i and Y_i (for $i = 1, 2$) be submanifolds of $\mathbb{R}^n$ with $dim X_1 = dim X_2$, $dim Y_1 = dim Y_2$. Let $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ be submersion germs with $(f_i^{-1}(0), y_i) = (Y_i, y_i)$ and $g_i : (X_i, x_i) \to (\mathbb{R}^n, y_i)$ immersion germs . Then $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$ if and only if $f_1 \circ g_1$ and $f_2 \circ g_2$ are $\mathcal{K}$ - equivalent.*

In our case, we consider that g_i are hypersurface germs and f_i are corresponding height function germs. By using Legendrian singularity theory, we have following characterization theorem of singularities of the Gauss map.

Main Theorem.[11] *Let $\boldsymbol{x}_i : (U, u_i) \to (S^n, \boldsymbol{x}_i(u_i))$ (for $i = 1, 2$) be hypersurface germs such that the corresponding Legendrian immersion germs $\mathcal{L}_i = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{e}_i) : (U, u_i) \to (\Delta, (\boldsymbol{x}_i(u_i), \boldsymbol{e}_i(u_i))$ are Legendrian stable. Let H_i be height function germs correspond to $\boldsymbol{x}_i$ and h_i be germs of height function of the $\boldsymbol{e}(u_i)$ direction. Then the following conditions are equivalent:*

1. *$W(\mathcal{L}_1)$ and $W(\mathcal{L}_2)$ are diffeomorphic as set germs;*
2. *$\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ are Legendrian equivalent;*
3. *H_1 and H_2 are $P - \mathcal{K}$-equivalent;*
4. *h_1 and h_2 are $\mathcal{K}$-equivalent;*
5. *$K(x_1(U), S^{n-1}(\boldsymbol{e}(u_1), 0); x_1(u_1)) = K(x_2(U), S^{n-1}(\boldsymbol{e}(u_2), 0); x_2(u_2))$.*

Remark 3.2. By using the transversality theorem by Wassermann [1], we have that the assumption of the theorem (condition of Legendrian stable) is generic in the case when $n \leq 6$.

References

[1] G. Wassermann, ' Stability of caustics' , *Math. Ann.* 210 (1975) 43-50

[2] J. A. Montaldi, ' On contact between submanifolds' , *Michigan Math. J.* 33 (1986) 195-199

[3] L. Chen, S. Izumiya 'A mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in semi-Euclidean space' preprint

[4] N. Miyawaki, *Surfaces in Euclidean 3-sphere (in Japanese)* Master Thesis, Hokkaido Univ., (2004)

[5] S. Izumiya, D. Pei, T. Sano, 'Singularities of hyperbolic Gauss maps' , *Proc. London Math. Soc.* (3) 86 (2003) 485-512

[6] S. Izumiya, M. Takahashi, *Spacelike parallels and evolutes in Minkowski pseudo-spheres*, Journal of Geometry and Phisics, 57 (2007), 1569-1600

[7] S. Izumiya, 'Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the light-cone' , preprint

[8] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko , *Singularities of differentiable maps,* Vol . I (Birkhäuser, Basel, 1986)

[9] V. M. Zakalyukin, 'Lagrangian and Legendrian singularities' , *Funct. Anal. Appl. 10 (1976) 23-31*

[10] V. M. Zakalyukin, 'Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings' , *J. Soviet Math.* 27 (1984) 2713-2735

[11] T. Nagai, 'The Gauss map of a hypersurface in Euclidean n-sphere and the spherical Legendrian duality' , preprint , *to contribute to* Proceedings of the 10th International Workshop on Real and Complex Singularities

Algebraic method for multibody problem

Koichiro HIGASHI, Shun-ichi OIKAWA, Hideo FUNASAKA, and Yu KITAGAWA

Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Sapporo 060-8628, Japan

The algebraic model (ALG) proposed by the authors has sufficiently high accuracy in calculating the motion of a test particle with all the field particles at rest. When all the field particles are moving, however, the ALG has poor prediction ability on the motion of the test particle initially at rest. None the less, the ALG approximation gives a good results for the statistical quantities, such as variance of velocity changes or the scattering cross section, for a sufficiently large number of Monte Carlo trials.

Keywords: multibody problems, algebraic model

1 Introduction

Since it is difficult to rigorously deal with multibody Coulomb and gravitational collisions, the current classical theory considers them as a series of temporally-isolated binary Coulomb collisions whthin the Debye sphere. The efficient and fast algorithms to calculate inter-particle forces include the tree method [1,2], the fast multipole expansion method (FMM) and the particle- particle mesh Ewalt (PPPM) method [3]. Efforts have been made to use parallel computers, and/or to develop special purpose hardware to calculate interparticle forces, e.g. the GRAPE (GRAvity PipE) project [4].

Some of the authors have developed an algebraic model for multibody problems, and have shown that the momentum transfer cross-section with our model is in good agreement with the exact one [4]. As shown in Fig.1

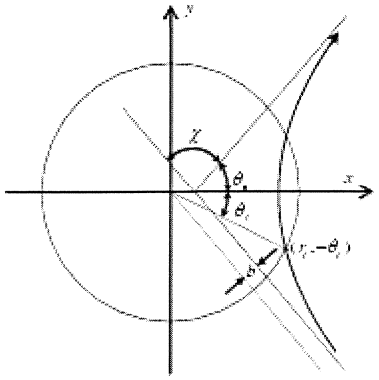


Fig.1 Unperturbed relative trajectory r = r(θ) in an orbital plane. The scatteriong center is at the origin. An impact parameter is b =b_0 tanθ_0. Interaction region is inside the circle with a radius $r_\ell = \Delta\ell/2$.

its scattering angle, $\chi \equiv \pi - 2\theta_0$, is given by $b = b_0 \tan\theta_0$, where b is the impact parameter, $b_0 \equiv e^2/4\pi\varepsilon_0\mu g_0^2$ corresponds to $\chi = \pi/2$ scattering, and g_0 the initial relative speed at $r = \infty$ and $\theta = -\theta_0$.

The angular component of the equation motion gives the well-known invariant of

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \text{const} = bg_0, \tag{1}$$

and the radial component is given by

$$\frac{\mathrm{d}g_r}{\mathrm{d}t} = \frac{g_0^2 b_0}{r^2}\left(1 + \frac{b_0}{r}\tan^2\theta_0\right), \tag{2}$$

where $g_r \equiv \dot{r}$ denotes the radial velocity. The first term in the parentheses on the right hand side of Eq. (2) stands for the Coulomb force $F_c \propto r^{-2}$. This force is much smaller for small angle scatterings, i.e. $\chi << 1$, than the second term F_a which scales as $\propto r^{-3}$ and results from the conservation of angular momentum Eq. (1), since, at the closest point $r_{\min} = r(\theta = 0)$ shown in Fig.1, we have

$$\frac{b_0 \tan^2\theta_0}{r_{\min}} \cong \frac{2}{\chi} >> 1 \tag{3}$$

Thus the main force on the particle is not the Coulomb force F_c, but F_a due to the conservation of angular momentum.

2 Algebraic Approximation for Multibody Interaction

Since the r-dependence on $F_a \propto r^{-3}$ is steeper than that on $F_c \propto r^{-2}$, the momentum change in $\mu \boldsymbol{g}$ is almost due solely to F_a near $r = r_{\min}$. As a consequence, the exact hyperbolic trajectory for the particle can be approximated as a broken line with an impulse force of

$$\mu \Delta \boldsymbol{g} = 2\mu g_0 \cos\theta_0 e_x \tag{4}$$

near the closest point as shown in Fig.2.

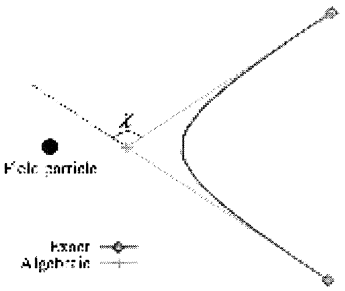


Fig.2 Algebraic trajectory (broken line) and exact trajectory (curved line) which is a part of a hyperbola. A field particle (black circle) is on the left.

With this in mind, we have approximated a multibody problem to a series of binary deflections near their closest point as shown in Fig.2, in which a test particle starts at the lower-right point, and its final point is at the upper-right point due to the interaction with a field particle at rest.

2.1 Coordinate transformation

In order to apply the above algebraic interaction approximation shown in Fig. 2 to multibody cases, first we seek for the field particle that gives a test particle an impulse force at the earliest time. For this purpose, it is convenient to transform the coordinate system from (X,Y,Z) to (ξ,η), in such a way that the initial position of the test particle is at the origin $(\xi,\eta) = (0,0)$ and the relative velocity $\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$ is $(g_\xi, g_\eta) = (0, g)$. Then the relative posision $\boldsymbol{r}_{ij}$ has an η-coordinate of

$$\eta_{ij} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\cdot \boldsymbol{g}/g. \tag{5}$$

The particle moves along the η-axis with a constant velocity of g, and is to interact at $(0,\eta_{ij})$ with this field particle in a time interval of $\Delta t_{ij} \equiv \eta_{ij}/g$ sec. Accordingly, the field particle that the test particle is given an impulse force at the earliest time has the smallest positive η_{ij}, i.e.

$$\eta_{\min} = \min\left(\max(0,\eta_{ij})\right), \text{for } 1 \le i, j \le N, \tag{6}$$

We have ignored the effect of field particles with $\eta_{ij} < 0$, since the interaction is completed at $\eta = 0$ in our approximation. In other words, such field particles have already interacted with the test particle in the past.

When the test particle moves to the position of $(0,\eta_{\min})$, it changes the relative velocity by $\Delta \boldsymbol{g}_{ij}$ as

$$\Delta \boldsymbol{g}_{ij} = -2g \sin\frac{\chi_{ij}}{2} e_\xi, \tag{7}$$

$$\chi_{ij} \cong 2\arctan\frac{b_0}{\xi_{ij}}, \tag{8}$$

where the pair i and j satisfies Eq. (6), and we have approximated that the impact parameter is given by $b = \xi_{ij}$ in Eq. (4) as shown in Fig. 3. Thus, in the (ξ,η) coordinate

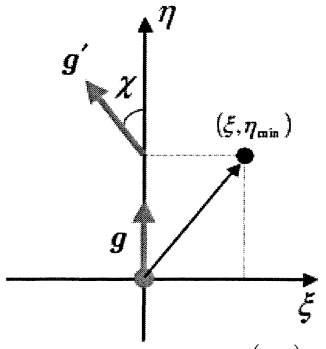


Fig.3 Coordinate transform from the (x,y) to (ξ,η). In this coordinate system, the scattering angle χ, i.e. the impact parameter b and the time of the interaction Δt are approximately given by ξ and η, respectively.

system, the field particle position ξ_{ij} and η_{ij} correspond to the velocity change $\Delta \boldsymbol{g}_{ij}$ and the time of the interaction Δt_{ij}, respectively. This procedure will be repeated until the test particle leaves the prescribed interaction region,

i.e. $r < \Delta l/2$ as depicted in Fig.1.

3 Calculation

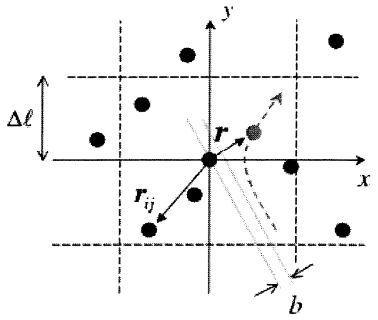


Fig.4 Typical initial particle positions. The almost-uniformly -distributed black circles are field particles. For Case 1, a gray circle circle (or red in color) is thetest particle at $\boldsymbol{r}$ with an impact parameter b. Initial conditions for Case 2 is that all the field particles are moving, and the test particle locates at orign at rest.

The numerical results with using the *direct integration method*, DIM, hereafter refers to that obtained by solving the following equation of motion a particle-i with a change q_i, a mass m_i, and velocity v_i at a position $\boldsymbol{r}_{ii}$

$$m_i \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = q_i \sum_{j\neq i}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{\left|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}\right|^3}, \qquad (9)$$

where $\boldsymbol{r}_j$ are the field particles' positions. As the DIM in this study, we will use the 6-stage 5-th order Runge-Kutta-Fehlberg method known as the RKF65 [5,6] with the absolute numerical error tolerance of 10^{-16}.

In the following, we will assume that, except a test particle, the field particles on the average are randomly distributed in the phase space $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})$. In configuration space, field particles are distributed with the average interparticle separation, Δl. We will consider two cases: all the field particles are fixed at their initial positions, the Case 1, and moving field particles, Case 2. The typical initial condition for Case 1 are depicted in Fig. (4)

3.1 Case 1: All the field particles at rest [5]

In Case 1, all the field particles are at rest, and one of them locates at the origin. The test particle starts from the position of $(b,-\Delta l/2)$ with a velocity of $(0,v_0)$. Thus b is the impact parameter against the field particle initially at the origin.

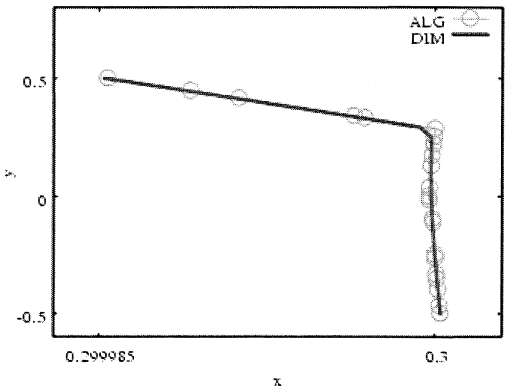


Fig.5 Comparison of algebraic trajectory (denoted by ALG) and the exact trajectory (denoted by DIM, direc inegration method) in the case of 442-body Coulomb collisions with an impact parameter $b = 0.3\Delta l$. Coordinates (x,y) are normalized by Δl. The circles in the figures for the algebraic trajectories stand for the positions at which the test partcile is given the impulse force by one of 441 field particles. See Ref. [7] for more detail.

Figure 5 is an example out of 10^5 Monte Carlo calculation for an impact parameter $b = 0.3\Delta l$, and compares the algebraic (ALG) trajectory and the exact (DIM) trajectory normalized by the interparticle separation Δl. Note that the DIM results are accurate up to of the order of 10^{-16} which is the absolute error tolerance adopted. The circles in the figure indicate the positions at which the test particle is given the impulse force by one of 441 field particles. The algebraic (ALG) approximation agrees well with the direct integration method, DIM, in most cases as shown in Fig. 5.

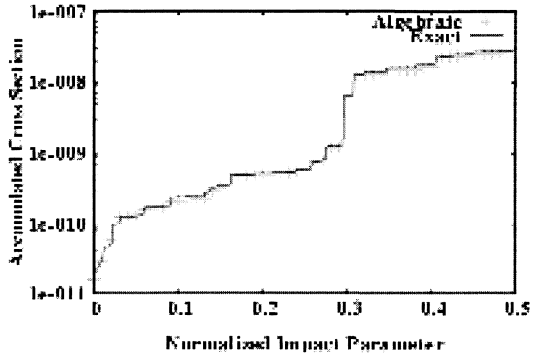


Fig.6 Accumulated Coulomb scattering cross section $\sigma_{ass}(b)/\Delta l^2$ vs normalized impact parameter $\bar{b} = b/\Delta l$ in the case of $N = 442$-body.

Depicted in Fig. 6 is the *accumulated* scattering cross section $\sigma_{acc}(b)$ as afunction of the impact parameter b defined by

$$\sigma_{acc}(b) = \int_0^b \left(\frac{\Delta \boldsymbol{g}}{g}\right)^2 \pi b \mathrm{d}b. \qquad (10)$$

The agreement with the exact one is also excellent. It should, however, be noted that all the field particles are at rest throughout the calculation in this case [7].

3.2 Case 2: Moving field particles.

In Case 2, we will loosen the above restriction on the field particle motion, and have applied the algebraic model to the 10-body problem, in which there are 9 moving field particles and a test particle initially at rest. The change in position $\Delta \boldsymbol{r}$ (results not shown) of the field particles are in good agreement with the exact one, since they are moving so that $\Delta \boldsymbol{r}_i \sim v_i(0)\ \Delta t$ to a good approximation. Although, the absolute value of the change in velocity $|\Delta \boldsymbol{v}|$ of each particle by the ALG are of the same order as the exact one, the orientation of $\Delta \boldsymbol{v}$ are not correct as shown in Fig. 7, in which the test particle is given impluse forces as marked with circles. Also depicted in Fig. 7 is the final point at $t = \Delta t$ by using the BIA, the binary ineraction approximation, recently proposed by some of the authors [8]. Note that the BIA accurately predicts the final point of the DIM with the absolute error tolerance of 10^{-16}.
In spite of poor accuracy in the individual particle motion, the ALG approximation gives a

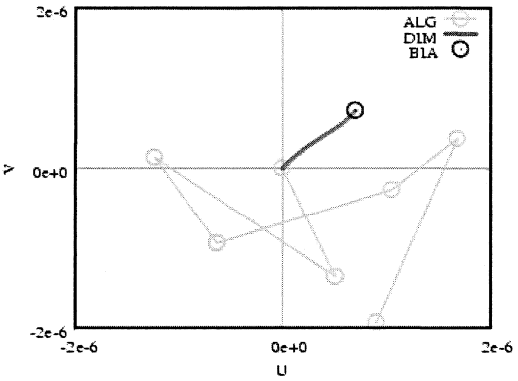


Fig. 7 Case 2: Trajectory of the test particle initially at rest,in the velocity space (U,V) normalized by a thermal speed. There are 9 moving field particles.

good results for the statistical quantities, such as variance of velocity changes for a sufficiently large number of Monte Carlo trials. Figure 8 shows the variance of changes in velocity, $\langle(\Delta \boldsymbol{g})^2\rangle$, of the test particle initially at rest, in the case of $N = 10$-body. For small numbers of

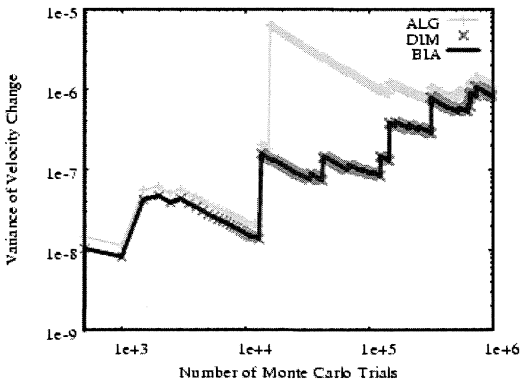


Fig. 8 Variance of the change in velocity of the test particle initially at rest, $\langle(\Delta \boldsymbol{g})^2\rangle$, in the case of N = 10-body. The DIA stands for the direct integration method, ALG the algebraic approximation, and BIA the binary interaction approximation [8].

trials $N_{MC} \sim 2\times10^4$ in Fig. 8, the ALG differes significantly from the DIM. Several jumps seen in the figure are due to the close encounters, i.e. the large angle scatterings. The ALG sometimes results in the false close encounters, especially at $N_{MC} \sim 2\times10^4$, which have led to numerical errors mentioned above. Such errors in variance

by the ALG becomes smaller for larger $N_{MC}\sim10^6$, since the large angle scattering seldom occurs in plasmas. The variance calculated by using the BIA, perfectly agrees with the DIM as was shown in Fig. 8.

4 Conclusion

The algebraic model (ALG) proposed by the authors hs sufficiently high accuracy in calculating the motion of a test particle with all the field particles at rest. When all the field particles are moving, however, the ALG has poor prediction ability on the motion of the test particle initially at rest. None the less, the ALG approximation gives a good results for the statistical quantities, such asvariance of velocity changes or the scattering cross section, for a sufficiently large number of Monte Carlo trials.

Acknowledgement

The author would like to thank Dr. A. Wakasa, prof. Y. Matsumoto and Prof. M. Itagaki for their fruitful discussions on the subject. The author would also acknowledge the continuous encouragement of the late Prof. T. Yamashina.

[1] A. W. Appel, An Efficient Program for Many-body Simulation, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **6** 85-103(1985)

[2] J. E. Barnes and P. Hutt, A hierarchical *0*(*N*log*N*) force calculation algorithm, *Nature* **324** 446-449 (1986)

[3] P. P. Brieu, F. J.Summers and J. P. Ostriker, Cosmological Simulations Using Special Purpose Computers: Implementing P^3 M on GRAPE *ApJ* **453** 566(1995)

[4] J. Makino and M. Taiji, GRAPE-4: A MASSIVELY PARALLEL SPECIAL-PURPOSE COMPUTER FOR COLLISIONAL *N*-BODY SIMULATIONS. APJ **480**, 432-446(1997)

[5] E. Fehlberg. Low-order classical Runge-Kutta formulas with step size control and their application to some heat transfer problems. NASA Technical Report 315(1969)

[6] E. Fehlberg. Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Warmeleitungsproblem, *Computing* (Arch. Elektron.Rechnen), vol. 6, (1970) pp. 61-71

[7] S. Oikawa, H. Funasaka, Algebraic analysis approach for multibody problems. J. Plasma Fusion Res. **36** (2008) S1073

[8] H. Funasaka, S. Oikawa, K. Higashi, and Y. Kitagawa, Binary Interaction Approximation to *N*-Body Problems, ITC-18

On tight closure with a view point from algebraic geometry

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程3年 廣瀬大輔

初等的な話を書かせていただきます.

目標はF-pure thresholdの定義までです.

1 序

k を体 (field) として, 次の環を考えます.

$$R := k[x_1, \cdots, x_n] = \{f | f \text{ は } n\text{-変数多項式 }\}.$$

この k に $\mathbb{C}$ を入れて考えると, R の元 f は正則な関数

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
$$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto f(a_1, \cdots, a_n)$$

を定めます. この $\mathbb{C}^n$ は滑らかな空間です.

今度は k に $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$(但し p は素数) を入れて考えます. このとき次のFrobenius写像が環の準同型になります.

$$F : R \to R$$
$$a \mapsto a^p$$

Kunzの定理は (だいたい) 次の事を主張しています. 正確な主張は [松村] を参照してください.

定理 1 (Kunz)**.**

$$R \text{が滑らかな図形に対応} \Leftrightarrow F \text{が平坦}$$

平坦の説明は置いておいて, $k = \mathbb{C}$ のときの (対応する $\mathbb{C}^n$ が滑らかという) 幾何学的情報が, $k = \mathbb{F}_p$ のときの "Frobenius写像の (平坦性という) 良い振舞" に置き換わったことに注目してください.

ページを変えまして, 次の環を考えます.

$$R := k[x_1,x_2,x_3]/(x_1^2+x_2^3+x_3^5) = \{\bar{f} | f \in k[x_1,x_2,x_3],\ \bar{f}=\bar{g} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f-g \in (x_1^2+x_2^3+x_3^5)\}$$

この k に $\mathbb{C}$ を代入すると, R の元 $\bar{f}$ は $\mathbb{C}^3$ 内の $x_1^2+x_2^3+x_3^5=0$ の解集合上の正則な関数を定めます. この解集合は原点 $(0,0,0)$ で滑らかになりません. [1] ですが, この解集合は (超曲面,Du Val, 有理二重点) 等かなり "たちの良い" タイプの特異性を持つものとして知られています. そして今回留意するのは, この解集合は極小モデル問題で扱う特異性のうちのログ端末特異性を持つクラスに属すると言う事実です. (但しログ端末特異性の説明は置いておきます.[2])

今度は k として $\mathbb{F}_p$ を代入して考えます. このとき Frobenius 写像は平坦にはなりませんが, Frobenius 写像を用いて定義される tight closure と呼ばれる, イデアルの閉包演算を考えてみます.

定義 1 (tight closure). $I \subseteq R$ を R のイデアルとする. I の *tight closure* I^* を次の様に定める.

$$a \in I^* \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists c \in R \setminus \{0\},\ s.t.\ ca^{p^e} \in F^e(I)R,\ \forall e \gg 0$$

イデアル $I=(\bar{x_2},\bar{x_3})$ の tight closure を考えてみます. (以降誤解のない限り同値類のバーは省略します.) $p=2$ のとき

$$1 \cdot x_1^{2^e} = (x_2^{3\cdot 2^{e-1}} + x_3^{5\cdot 2^{e-1}}) \in F^e(I)\cdot R = (x_2^{2^e}, x_3^{2^e}),\ \forall e > 0$$

となり $x_1 \in I^*$ がわかります. 少し検証が長くなりますが $p=3,5,7$ でも c として x_1 をとると $x_1 \in I^*$ が示せます.

一方で $p>7$ と仮定すると $x_1 \notin I^*$ 特に $I=I^*$ となることが, さらに R の全てのイデアル I に関しても $I=I^*$ が成立することがわかります. [3] このような環を F-正則環と言うことにします. [4]

定義 2 (F-正則環). 環 R が F-正則とは R の全てのイデアル I に対して $I=I^*$ が成立するときをいう.

前ページで扱った環もこのクラスに属します. Frobenius 写像が平坦になることを利用して F-正則になることを比較的簡単に示すことが可能です. tight closure 論の入門書として [Huneke] を挙げておきます.

この例のように $k=\mathbb{C}$ のときの対応する解集合の (定義をしていませんが) ログ端末特異性という幾何学的情報が, 少なくとも無限個の素数 p の $k=\mathbb{F}_p$ での F-正則という Frobenius 写像を用いて定まる演算の良い振舞に置き換わ

[1] 原点での $x_1^2+x_2^3+x_3^5$ のヤコビアン行列のランクが 0 になる.

[2] 商特異点はこのクラスに属します.

[3] この R は Gorenstein なので, 先ほどのひとつのパラメタイデアル I のみ検証すれば全てのイデアルのことがわかります.

[4] 本来は強弱の接頭語がつくのですが, 省略します. 少なくともその違いが現れないような良い環のみ扱うことにします.

ることが知られています. この議論の詳細, 証明は [原-吉田] を参照してください.

$\mathbb{C}$ 上の極小モデル問題に現れる特異性と $\mathbb{F}_p$ 上の[5] Frobenius 写像の振舞の間の幾つかの対応を背景にして次節で不変量を定義します. この不思議な対応に関する報告集として [Smith] を挙げておきます.

2 破

この節では環 R を

$$R := k[x_1, \cdots, x_n]/(f)$$

に制限して考えます. さらに f は既約な多項式で $f = 0$ の解集合は原点 $(0, \cdots, 0)$ 以外では滑らかになると仮定します. [6]

極小モデル論では, 特異性を扱うときに "解集合 (多様体) 自身のみで考えるより多様体, 部分スキーム, 正の実数のペアで扱う" 方が都合が良く, 例えばログ端末特異性なども, 川又ログ端末特異性という名のペアの特異性に一般化されました.

そこで tight closure の方もこれに対応するように拡張します. これ以降 k の標数は正, また議論の表面上は現れませんが R 自身は常に F-正則を仮定します.

定義 3 ($\mathfrak{a}^t$-tight closure)**.** イデアル $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ と正の実数 t を固定する. イデアル $I \subseteq R$ の *$\mathfrak{a}^t$-tight closure* $I^{*\mathfrak{a}^t}$ を次の様に定める.

$$a \in I^{*\mathfrak{a}^t} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists c \in R \setminus \{0\} \ s.t. \ ca^{p^e}\mathfrak{a}^{\lceil tp^e \rceil} \subseteq F^e(I) \cdot R, \ \forall e \gg 0$$

ここで $\lceil\ \rceil$ は実数の切り上げである.

定義 4 (ペアの F-正則性)**.** $(R, \mathfrak{a}^t)$ が *F-正則* であるとは, R の全てのイデアル I に対して $I^{*\mathfrak{a}^t} = I$ を満たすときをいう.

これらの定義に $\mathfrak{a} = R$ を代入すると前節の定義と同じになることがわかります. またイデアル $\mathfrak{a}$ を固定したときに t を動かしてみると

$$t \geq t' \Rightarrow I^{*\mathfrak{a}^t} \subseteq I^{*\mathfrak{a}^{t'}}, \ \forall I \subseteq R$$

が, 特に $t \geq t'$ のとき

$$(R, \mathfrak{a}^{t'})\text{: F-正則} \Rightarrow (R, \mathfrak{a}^t)\text{: F-正則}$$

となることがわかります. そこで F-正則を保つ境界値を環 R とイデアル $\mathfrak{a}$ に付随するひとつの不変量として定めます.

[5] $\mathbb{F}_p$ や有限体だと都合の悪いときがありますが, 大まかに正標数に還元したというのが重要です.

[6] 実際には原点での局所環で論じているシーンも出てきます.

定義 5 (F-pure threshold). イデアル $\mathfrak{a}$ の *F-pure threshold* $\mathrm{fpt}(\mathfrak{a})$ を次のように定める.

$$\mathrm{fpt}(\mathfrak{a}) := \sup\{t \in \mathbb{R}_{>0} | (R, \mathfrak{a}^t) : \ F\text{-正則}\ \}.$$

3 急

この F-pure threshold はどのように計算されるのか, また目標にあった F-threshold とは何なのか. これに関しては, 当日紹介させていただく予定です.

このテクニカルレポートでは, 分野紹介以前の話に終始させていただきました. 簡単にするというより傍に置いて進んだだけなのですが, もしここまで読まれる方がいましたら, 当日声をかけていただけると幾つかお話できることもあるかと思います.

参考文献

[原-吉田] N. Hara and K. Yoshida, *A generalization of tight closure and multiplier ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3143 – 3174.

[H] D. Hirose, *Formulas of F-thresholds and F-jumping coefficients on toric rings*,arXiv:0709.1627, preprint, to appear Kodai Math. J.

[Huneke] C. Huneke, *Tight closure and its applications*, CBMB Regional Conference Series in Mathematics, vol. **88**, Published for the Conference Board of Mathematical Sciences, Washington, DC, 1996, with an appendix by M. Hochster

[松村] 松村英之　可換環論, 共立出版, 1980,

[Smith] K. E. Smith, *Tight closure and vanishing theorems*, School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000) ICTP Lect. Notes vol. **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys. , Trieste, 2001, 149–213

CHARACTERIZATION OF CERTAIN PLANE CURVES BY GALOIS POINT

深澤 知 (早稲田大学理工学術院/日本学術振興会特別研究員)

概要：吉原久夫氏は 1996 年, 代数幾何においてガロア点とよばれる新たな概念を導入した. ガロア点を考察することにより得られる有効な観点のひとつのとして,「ガロア点の分布によってある種の平面曲線を特徴づける」ことが挙げられる. 本発表ではこの観点からのいくつかの結果を紹介し, 発表者によって得られた最近の結果を報告する.

必要な知識等：第 2 節から代数幾何の用語を使うが, 必要に応じて Shafarevich, Hartshorne, Namba, Stichtenoth 等の本を参照頂きたい. 書かれていることの理解には, 4 年生のゼミのテキストレベルで十分であると思う.

研究全般について：ガロア点に関する全般的な研究成果及び未解決問題については, [2, 7] 及びそこの参考文献を参照頂きたい.

1. 図形の対称性とガロア点

対称性の高い図形には, 群が作用するものがあり, 視覚的にも非常に美しいものが数多くある. 数々の図形の変換群を考えれば, それは千差万別である. ここで逆に, 変換群 (の種類) を固定してみよう. すると, その変換群で不変な図形の形状は絞られてくる. 例えば, 平面で原点における 点対称 を表す変換

$$\phi : (x, y) \mapsto (-x, -y)$$

を考えれば, (重心を原点にする) 正方形はこの変換で不変であるが, 正三角形や正五角形は, 対称性が高いにも関わらず, この変換で不変ではない (点対称ではない).

同様にして, 平面代数曲線のカテゴリーで, 代数的な変換群を考えれば, それは千差万別である. 本稿では, ガロア点というものから自然に誘導される変換群によって不変な対称性を考察することになる. ガロア点の存在によって曲線の形状は絞られ, ガロア点が複数存在することは, ある種の曲線の構造決定に繋がる.

2. ガロア点

以下本稿では, 基礎体 K を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とさせて頂く. 次数 d の既約な射影平面代数曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ を考える. C_{sm} で C の smooth locus をあらわし, $K(C)$ で C の関数体を表す. 平面 $\mathbb{P}^2$ 内の 2 点 $R \neq P$ を通る直線を $\overline{RP}$ とかく. $R \in \mathbb{P}^2$ を点とす

る. この時, 点射影 (とよばれる有理写像)

$$\pi_R : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; P \mapsto \overline{RP}$$

を考えることができる. ($\mathbb{P}^2$ 内の 1 点 R を通る直線全体の集合は射影直線 $\mathbb{P}^1$ と一対一対応が付くことに注意.) この射影により, 関数体の拡大

$$K(C)/\pi_R^* K(\mathbb{P}^1)$$

を得る. この拡大は, 有限次代数拡大である. 吉原久夫氏は次の定義を与えた:

定義 (吉原久夫, 1996 [2, 5, 6])

関数体の拡大 $K(C)/\pi_R^* K(\mathbb{P}^1)$ がガロアであるとき, R を C の**ガロア点**という.

また R がガロア点の時, G_R でそのガロア群 $\mathrm{Gal}(K(C)/\pi_R^* K(\mathbb{P}^1))$ を表す.

射影の計算方法について簡単に復習しよう. 点 $R \in \mathbb{P}^2$ が 2 枚の一次方程式 $aX + bY + cZ = dX + eY + fZ = 0$ で定義されているとき, 射影は

$$\pi_R(X : Y : Z) = (aX + bY + cZ : dX + eY + fZ)$$

と与えられる. $R = (1 : 0 : 0)$ であれば, $\pi_R = (Y : Z)$ と書ける. C の定義式を $F(X, Y, Z) = 0$ とし, $f(x, y) = F(x, y, 1)$ とする. この時 $Z = 1$ とすれば π_R によって得られる関数体の拡大は $K(x, y)/K(y)$ であり, その relation は, $f(x, y) = 0$ で与えられる.

これらのことから, 次の例を考察できる.

Example 1. 標数 $p \neq 2, 3$ とし, 次の式で定義される曲線 C を考える:

$$X^3 Z + Y^4 + Z^4 = 0.$$

この時, $R_1 = (1 : 0 : 0) \in C$, $R_2 = (0 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ は共にガロア点である. R_1 でのガロア群 G_{R_1} は位数 3 の, R_2 でのガロア群 G_{R_2} は位数 4 の巡回群である.

簡単の為, $R \in \mathbb{P}^2 \setminus C$ とする. この時, 拡大 $K(C)/\pi_R^* K(\mathbb{P}^1)$ の次数は d である. R をガロア点とすると, ガロア群 G_R の位数も d となる. $\sigma^* \in G_R$ を取れば, それは $K(C)$ の自己同型を与えるが, さらに双有理写像

$$\sigma : C \dashrightarrow C$$

を与える. ($K(C)$ の非特異モデル $\hat{C}$ を取れば, 自己同型写像 $\hat{\sigma} : \hat{C} \to \hat{C}$ を得る.) L を R を通る直線とすると,

$$\sigma(C_{\mathrm{sm}} \cap L) \subset C \cap L$$

を満たすことがわかる. 即ち σ は各直線 L 上の点 $C \cap L$ の変換を与える自己 (双有理) 同型写像である.

ガロア点ひとつで曲線のある種の対称性が保証されるが, それが複数あれば自ずとより高い対称性があることになる. 自然と次の問題に誘導される.

問題 1

与えられた曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ に対し, ガロア点の分布を調べよ.

次のように記号を準備する.

- $\Delta(C) := \{R \in C_{\mathrm{sm}} \mid R$ はガロア点 $\}$.
- $\Delta'(C) := \{R \in \mathbb{P}^2 \setminus C \mid R$ はガロア点 $\}$.

ガロア点の存在を規制するものは何か？次節でその分布の在り方について解説する.

3. 点射影の分岐とガロア点分布の在り方

まず, 一般の射影に対する分岐点と分岐指数について解説しよう. 分岐指数の定義はここできちんとはのべないことにして, それがどのように現れるかを解説する. (本来あまり難しいものではない.) 今, $R \in \mathbb{P}^2$ からの点射影 $\pi_R : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を考える. $P \in C_{\mathrm{sm}} \setminus \{R\}$ とする. この時, π_R の P での分岐指数 e_P は,

$$e_P = I_P(C, \overline{RP})$$

と与えられる. ここで, 右辺は曲線 C と 直線 $\overline{RP}$ の P での intersection multiplicity である. これらの値が 2 より大きければ, 当然, $\overline{RP}$ は P での接線となる. π_R の分岐点は $e_P \geq 2$ なる点 P と定義される. 即ち, (R 以外の非特異な) 分岐点は, 接線 $T_P C$ が R を含むような点 P である.

ここでひとつ注意として, π_R が非分離となる時を考えよう. この時, すべての $P \in C_{\mathrm{sm}}$ に対して, $e_P \geq 2$ が満たされる. 即ち, 上で考察したことから,

$$\pi_R \text{ が非分離} \Leftrightarrow I_P(C, \overline{RP}) \geq 2 \text{ for } \forall P \in C_{\mathrm{sm}}$$

が成立する. この時 R を通る直線はすべて C の接線になっている. 曲線 C がこのような点 R をもつとき, C は strange であるといい, R を strange center という.

R がガロア点のときどのような状況になるか見よう. 一般に, 非特異曲線の間の射 $f : C \to C'$ がガロア被覆 (関数体がガロア拡大であるということ) であるとすると, 前節にあるような自己同型の作用によって次が成立する:

$$P, Q \in C,\ f(P) = f(Q) \Rightarrow e_P = e_Q.$$

これを我々の点射影 $\pi_R : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ に当てはめると:

$$P, Q \in C_{\mathrm{sm}} \setminus \{R\},\ \overline{RP} = \overline{RQ} \Rightarrow I_P(C, \overline{RP}) = I_Q(C, \overline{RQ})$$

となる. 即ち, $Q \in C$ が直線 $\overline{RP}$ 上にあるとすると, Q は P と同じ重複度で直線 $\overline{RP}$ と交わらなければならない. π_R が双有理でなければ (Hurwitz formula より) 分岐点は必

ず存在する. よって標語的に,

ガロア点は多重接線や変曲点での接線たちの交点である

と言える. (一般に, $I_P(C, T_PC) \geq 3$ なる点 P は変曲点とよばれる.)

4. ガロア点の分布と平面曲線の特徴づけ

標数零の非特異曲線に対し, 吉原氏は 問題 1 の解を与える次の結果を得た:

Theorem 1 (吉原 [6]). $p = 0$ とし, C を次数 $d \geq 4$ の非特異曲線であるとする. この時, 次が成立する:

(1) $\sharp\Delta(C) = 0, 1$ or 4.
(2) $\sharp\Delta'(C) = 0, 1$ or 3.
(3) $\sharp\Delta(C) = 4 \Leftrightarrow d = 4$, C は $X^3Z + Y^4 + Z^4 = 0$ に射影同値.
$\sharp\Delta'(C) = 3 \Leftrightarrow C$ は $X^d + Y^d + Z^d = 0$ に射影同値.

この吉原氏の定理では,

ガロア点の個数の決定及びその最大個数をもつ曲線の分類

が成されている点が, 非常に重要であると思われる.

特異点をもつ曲線にも同種の結果が期待されるが, 一般にはできていない. また標数 $p > 0$ の場合には, 非特異の場合でさえガロア点の分布は完全には解明されていない ([2, 7]). そのような状況の中, 標数 $p > 0$ の時に, 無限個のガロア点をもつ曲線が存在することが, 長谷川武博氏及び発表者により明らかにされた:

Example 2 (深澤-長谷川 [3]). $p > 0, q \geq 4$ を p の冪とし, 次の式で定義される曲線 C を考える:

$$XZ^{q-1} - Y^q = 0.$$

$P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$ とすれば, 次が成立する:

(1) $\Delta(C) = C \setminus \{P\}$.
(2) $\Delta'(C) = \{Z = 0\} \setminus \{P, Q\}$.

さらに, 曲線上のほとんどすべての点がガロア点であることが上記の例の特徴づけを与える, ことが示された:

Theorem 2 (深澤-長谷川 [3]). $C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d \geq 4$ の曲線とする. この時, 次は同値:

(1) $\Delta(C)$ は空でない C の Zariski 開集合である.
(2) $p > 0$, d は p の冪であり, C は $XZ^{d-1} - Y^d = 0$ で定義される曲線に射影同値.

同様の分類問題を, 外のガロア点についても考えることは自然である. 発表者は, 曲線の外にガロア点が無限個あることによって, 上記の例の少し広いクラスの曲線が特徴づけられることを示した:

Main Theorem ([1])

$C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 $d \geq 3$ の曲線とする. この時, 次は同値:

(1) $\Delta'(C)$ は無限集合である.

(2) C は有理的な strange 曲線であり, 直線 L で strange center Q と無限個のガロア点を含むものが存在する.

(3) $p > 0$ であり, C は写像 $\psi(u:1) = (\psi_1(u) : \psi_2(u) : 1) : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$;

$$\psi_1(u) = a_0u + a_1u^p + \cdots + a_eu^{p^e},\ \psi_2(u) = b_0u + b_1u^p + \cdots + b_eu^{p^e}$$

の像に射影同値である. 但し, ψ は像へ双有理である.

(4) $p > 0$ であり, C は次の形の式で定義される曲線に射影同値である:

$$\alpha_e x^{p^e} + \alpha_{e-1}x^{p^{e-1}} + \cdots + \alpha_0 x + \beta_e y^{p^e} + \beta_{e-1}y^{p^{e-1}} + \cdots + \beta_0 y = 0.$$

5. 追記：ガロア点をたくさん持つ曲線

数だけでいえば, 無限個もつ上記の特異曲線が一番である. 次に有限個の例としては, $p > 0$ の $q+1$ 次 Hermitian 曲線 $H : X^qZ + XZ^q = Y^{q+1}$ が $\sharp\Delta(H) = q^3 + 1$, $\sharp\Delta'(H) = q^4 - q^3 + q^2$ を満たすことが知られており ([4]), 今の所最大のようである. (次数を上げればいくらでも大きくなることに注意.)

標数零の時は, $\sharp\Delta(C) = 4$ または $\sharp\Delta'(C) = 3$ を超える曲線の存在は知られておらず, これらが最大個数であるのかもしれない.

References

[1] S. Fukasawa, Classification of plane curves with infinitely many Galois points, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[2] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata (to appear).

[3] S. Fukasawa and T. Hasegawa, Singular plane curves with infinitely many Galois points, preprint.

[4] M. Homma, Galois points for a Hermitian curve, Comm. Algebra **34** (2006), 4503–4511.

[5] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[6] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340-355.

[7] H. Yoshihara, Open questions, available at: http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~yosihara/openquestion.html

E-mail address: s.fukasawa@kurenai.waseda.jp

3次元コーシー条件面法による核融合プラズマ境界形状の逆推定

Three-dimensional Cauchy condition surface method to reconstruct the fusion plasma boundary shape

北海道大学大学院工学研究科
前田　忠昭

Abstract:
The 2-D Cauchy condition surface (CCS) method to reconstruct the plasma boundary shape has been expanded to deal with a 3-D fusion plasma. This 3-D CCS method solves the 3-D Poisson-type equations in terms of vector potential with the aid of measured magnetic sensor signals. Results obtained in a trial calculation for axisymmetric plasma indicate that the new 3-D method can also determine the plasma boundary shape accurately in the same way as the 2-D CCS method.

1．はじめに

核融合装置内部のプラズマ境界形状を知ることは，運転制御上極めて重要であると同時に，プラズマのMHD平衡に関わる情報を引き出すためにも有用である．この場合，プラズマ温度は一億度を超えるため，プラズマ内部を直接測定することは困難である．そのため，プラズマ外部に配置した磁気センサー信号から，間接的にプラズマ境界形状を逆推定することになる．

トカマク型のように回転軸対称形状をしたプラズマは，2次元問題に近似できる．この場合は，磁気センサー信号からプラズマの位置と形状を同定する逆解析手法としてCauchy条件面法[1,2]と呼ばれる手法が確立されている．ここでCauchy条件とは，Dirichlet条件（磁束）とNeumann条件（磁場）が共に未知な閉曲面をいう．一方，ヘリカル型などの非軸対称なプラズマは3次元問題となる．3次元問題に対してCauchy条件面法が定式化された例はなく，2次元Cauchy条件面法に比べて未知数の数が増大するため，逆解析の解が一意に求まるか否か数理的に未解明であった．そのため，本研究はCauchy条件面法を3次元化することを目的とし，3次元の場合にも逆解が一意に定まるか検証を行った．

本研究では，境界要素法[3]で3次元Poisson方程式を解く計算コードPOISON3Dをベースとし，磁気センサー信号を取り込んで解析できる3次元Cauchy条件面法コードに発展させた．3次元解析が必要なヘリカル型プラズマに先立ち，まず，本来軸対称であり，2次元Cauchy条件面法でプラズマ境界形状を求められるトカマク型プラズマについて考える．

ここで，磁束ψは大半径R，ベクトルポテンシャルのトロイダル方向成分A_φを用いて

$$\psi = 2\pi R A_\varphi \tag{1}$$

と表せるため，本研究における3次元解析では式中のA_φを求めることとした．改良したPOISON3Dを用いて，センサー信号のみからベクトルポテンシャル分布を再構築する逆解析を行う．得られたベクトルポテンシャルを用いて磁束の等高線を描き，最外殻磁気面を判定

する.この結果を,原子力機構の平衡計算コードSELENE[4]による最外殻磁気面を比較して,3次元Cauchy条件面法が成立するか検証した.

2．Cauchy条件面法

Cauchy 条件面法とは，プラズマの位置と形状を同定する逆解析手法である．この手法では，Dirichlet条件とNeumann条件の両方を未知とするCauchy条件面を，図1の左図のようにプラズマ中の適当な位置に設置する．無限遠方の境界Γ_∞と，実際のプラズマ内に十分含まれるようなCauchy条件面の境界Γ_Cで囲まれるドーナツ状の閉領域$\Omega_{C-\infty}$を考える．実際には領域Ω_{C-P}にはプラズマが存在するが，閉領域$\Omega_{C-\infty}$の内部を真空磁場と仮定する．プラズマ外部の磁気センサー信号とトロイダル電流値に基づいて真空磁場を支配する境界積分方程式を解き，得られたCauchy条件に基づいて同じ境界積分方程式を解けば，任意の点での磁束が求められる．磁束分布の等高線を描き，最も外側の閉曲線を最外殻磁気面，すなわちプラズマ境界であると判定する．

2次元 Cauchy 条件面法では，境界Γ_C上の 6 点に対して磁束（Dirichlet 条件）と磁場（Neumann 条件）を未知数とするため，磁気センサー信号とポロイダルコイル電流に基づき，真空場に対する3種類の境界積分方程式を立てる．

i)　点iにおかれた磁束センサーに対して

$$\int_{\Gamma_C}\left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\psi}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma=\psi_i-W_i^{\psi} \tag{2}$$

ii)　点iの磁場センサーに対して

$$\int_{\Gamma_C}\left(\frac{B^*}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\psi}{r}\frac{\partial B^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma=B_i-W_i^{B} \tag{3}$$

iii)　Cauchy条件面上の点iに対して

$$\int_{\Gamma_C}\left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\psi}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma-\frac{1}{2}\psi_i=-W_i^{C} \tag{4}$$

のように書ける．式(2)～(4)において$W_i^{\psi},W_i^{B},W_i^{C}$は，それぞれすべてのポロイダルコイルから点$i$に及ぼす寄与である．$\psi^*$は Grad-Shafranov 方程式に対応する境界積分方程式の基本解である．式(2)～(4)を離散化，連立させて解き，Cauchy条件面上の$\partial\psi/\partial n$とψが全て既知となれば，任意の位置の磁束が

$$\psi_i=\int_{\Gamma_C}\left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{\psi}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{5}$$

で計算できる．

本研究で行ったCauchy条件面法の3次元化においては，Dirichlet条件とNeumann条件を，それぞれベクトルポテンシャル，およびその微分値として計算を行う．また境界Γ_Cは，図1の右図のように3次元で配置されたプラズマ領域内に円環状に設定する．Γ_C上には境界要素の数に比例したノード点が存在する．この各ノード点に対して Dirichlet 条件と

Neumann 条件を定める．2 次元 Cauchy 条件面法の時と同様に，真空磁場に対する境界積分方程式を立てる．3 次元(x, y, z)座標系を用いて電流密度を$\boldsymbol{J}=(j_x, j_y, j_z)$，ベクトルポテンシャルを$\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$のように表示する時，両者の関係は Poisson 方程式

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{6}$$

にしたがう．円環状の Cauchy 条件面(Γ_C)をプラズマ内部に配置して真空磁場を仮定し，電流密度項をコイル電流の寄与のみとするとき，式(6)を Laplace 方程式の基本解ϕ_i^*に基づく境界積分方程式に変換した具体形は以下の通りである．

(i) Cauchy 条件面上の点iに対して：

$$\int_{\Gamma_C}\left(\phi_i^* \frac{\partial A_k}{\partial n} - A_k \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n}\right) d\Gamma = \frac{1}{2} A_{k,i}. \quad (k = x, y, z) \tag{7}$$

(ii) 磁気センサー位置iに対して：

$$\int_{\Gamma_C}\left\{\left(L\,\phi_i^*\right)\frac{\partial A_k}{\partial n} - A_k\left(L\,\frac{\partial \phi_i^*}{\partial n}\right)\right\} d\Gamma = (L\,A_{k,i}) - L\,W_{k,i}. \quad (k = x, y, z) \tag{8}$$

ここに，$W_{k,i}$は外部磁場コイル電流の寄与である．作用素Lは磁束センサーに対しては1であり，磁場センサーでは，センサー位置の大半径をR，トロイダル角をφ，センサーの向きをθとするとき，

$$L = \sin\theta \frac{1}{R} + \sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \tag{9}$$

となる．式(7)(8)を解けば，Γ_C上の Dirichlet 条件(A_k)と Neumann 条件($\partial A_k / \partial n$)が全て既知となる．両者を式(7)に再度代入すれば任意の位置iでA_kが求まるので，磁束$\psi = RA_\varphi$の等高線を描くことができる．

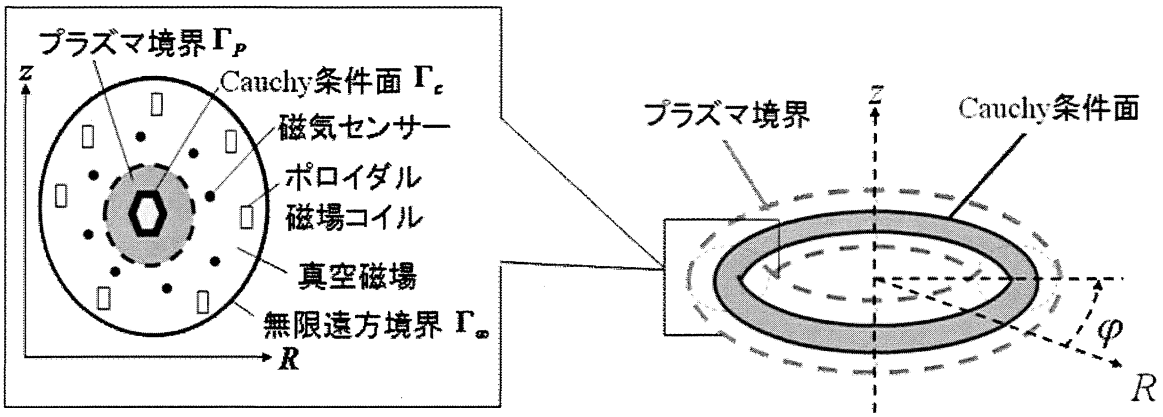


図 1　2 次元 Cauchy 条件面の 3 次元への拡張

3．計算条件

本研究では，図 1 の右図で示したプラズマ境界の外側に，境界を囲むように磁束センサーを 240 個，磁場センサーを 960 個配置した．Cauchy 条件面は,プラズマ境界の内部とみられる箇所に円環状に配置した．このとき R-z 断面上では，中心(3.33m, -0.02m)，長半径 0.13m，短半径 0.09mの楕円となるように設定した．この条件のもと，センサー位置での磁束と磁場の

信号値から任意の位置でのベクトルポテンシャルを計算し，式(1)によって磁束を求め，コイル電流の寄与を含めて等高線を描いて最外殻磁気面を判定した．

4．結果

図2にR-z断面での磁束の等高線を示す．中央の楕円がCauchy条件面の断面であり，実線が計算結果，破線はSELENEコードによって順解析された最外殻磁気面の正解である．逆解析されたプラズマ境界は，最外殻磁気面の正解とよく一致した．

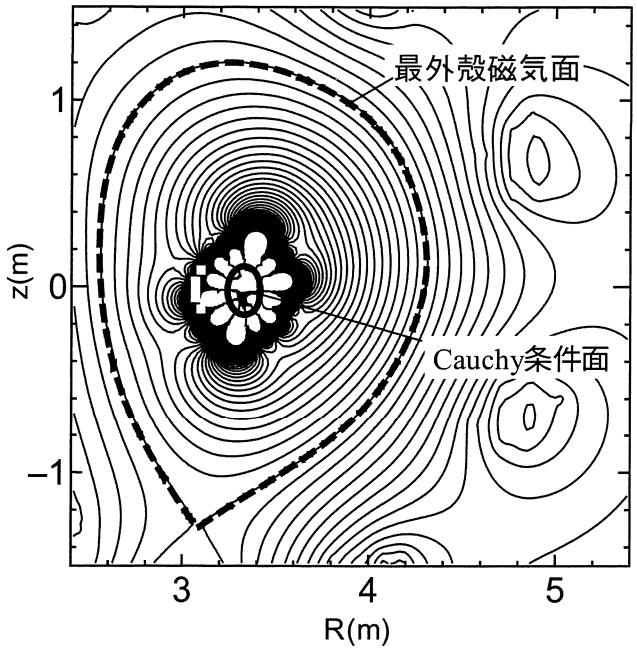


図2　磁束の等高線と最外殻磁気面

5．まとめ

本研究では，Cauchy条件面法を3次元化し，トカマク型の軸対称形状プラズマに適用して計算コードの検証を行った．この結果から、3次元Cauchy条件面法によっても，2次元Cauchy条件面法と同様にプラズマ境界の位置と形状を判定できることを確認した．今後は，実際にヘリカル型の非軸対称形状プラズマに対してもコードを適用できるようにすることが課題である．

参考文献

[1] KURIHARA, K, *Fusion Eng. Des.*, **51-52** (2000) 1049.

[2] Itagaki, M., Yamaguchi, S., Fukunaga, T., *Nuclear Fusion*, **45**, (2005) 153.

[3] Brebbia, C.A., "*The Boundary Element Method for Engineers*", Pentech Press, London (1978).

[4] Takeda, T., Tsunematsu, T., *JAERI-M 8042*, Japan Atomic Energy Research Institute (1978).

An introduction to exterior differential system

北海道大学大学院理学院 M1　矢野 充志 (Atsushi YANO)

C^∞-manifold Σ 上の Exterior differential system (EDS) $(\mathcal{I},\Omega)$ とは, Σ 上の微分形式からなる differential ideal $\mathcal{I}\subset\Omega^*(\Sigma)$ と n-form $\Omega\in\Omega^n(\Sigma)$ の組のことをいう. $\mathcal{I}$ はすなわち, ideal $\mathcal{I}\subset\Omega^*(\Sigma)$ で, 外微分 d で閉じている (i.e. $^\forall\theta\in\mathcal{I};\ d\theta\in\mathcal{I}$) ものを考える.

Example 1 (熱方程式)

PDE $u_t=u_{xx}$ を考え, これを EDS に変換してみる:

$J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3$ (has coordinates $t,x,u,p,q,\alpha,\beta,\gamma$)
$\Sigma=J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\cap\{p-\gamma=0\}$: submanifold

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{\theta^1=du-pdt-qdx,\theta^2=dp-\alpha dt-\beta dx,\theta^3=dq-\beta dt-\gamma dx\}_{\text{diff}}\\ &\overset{\text{i.e.}}{=} \{\theta^1,\theta^2,\theta^3,d\theta^1,d\theta^2,d\theta^3\}_{\text{alg}}\subset\Omega^*(J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))\text{ : differential ideal}\end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{I}$ を Σ 上に制限し, $\Omega=dt\wedge dx$ とおくと, Σ 上の EDS $(\mathcal{I}|_\Sigma,\Omega)$ が得られる.

ここで, $\iota^*\theta=0\ (^\forall\theta\in\mathcal{I})$, $\iota^*\Omega\neq0$ を満たすような 2 次元多様体 $\iota: M\longrightarrow\Sigma$ (*integral manifold*) が存在したとすると, M は PDE $u_t=u_{xx}$ の解 u のグラフ (u の偏導関数も込めて) になっている. 逆に, u をこの PDE の解とすると, 偏導関数も込めた u のグラフは $(\mathcal{I},\Omega)$ の integral manifold になっている. このようにして, PDE $u_t=u_{xx}$ と EDS $(\mathcal{I}|_\Sigma,\Omega)$ との対応が得られた.

一般に, EDS は本質的に偏微分方程式系を考えていると思える.

以下では, この認識の下に, integral manifold の存在に関する Cartan-Kähler の定理を説明して, 適用例をひとつ紹介することにする.

Definition 2

以下, Σ は C^∞-manifold, $(\mathcal{I},\Omega)$ を Σ 上の EDS とする.

(i) $M\subset\Sigma$: integral manifold of $(\mathcal{I},\Omega)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}{}^\forall\theta\in\mathcal{I};\ \theta|_M=0$ かつ $\Omega|_M\neq0$

(ii) $G_n(T\Sigma):=\{E\subset T_p\Sigma: n\text{-dimensional subspace},\ p\in\Sigma\}$ (*Grassmann bundle*)

(iii) $E\in G_n(T\Sigma)$: integral element of $(\mathcal{I},\Omega)\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}{}^\forall\theta\in\mathcal{I};\ \omega|_E=0$ かつ $\Omega|_E\neq0$

(iv) $E\in G_n(T\Sigma)$: integral element of $\mathcal{I}\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}{}^\forall\theta\in\mathcal{I};\ \omega|_E=0$

(v) $\mathcal{V}_n(\mathcal{I}):=\{E\in G_n(T\Sigma):\text{ integral element of }\mathcal{I}\}$

(vi) $E\in\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$: Kähler-ordinary $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 点 E の周りで $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ が smooth になっている

定義から分かる通り, integral manifold の接空間は integral element であるが, integral element に接するような integral manifold が存在するとは限らない. integral manifold の様子を知るために, integral element を考えることがひとつの重要な idea である.

Definition 3

$E\in\mathcal{V}_n(\mathcal{I})_p$ とする.

(i) $\omega\in\Omega^{k+1}(\Sigma)$ と $X\in\mathfrak{X}(\Sigma)$ に対して, $X\lrcorner\omega\in\Omega^k(\Sigma)$ を $X\lrcorner\omega(X_1,\cdots,X_k):=\omega(X,X_1,\cdots,X_k)$ $(X_1,\cdots,X_k\in\mathfrak{X}(\Sigma))$ と決める.

(ii) $H(E):=\{v\in T_p\Sigma\mid{}^\forall\theta\in\mathcal{I}^{n+1};\ v\lrcorner\theta|_E=0\}$: polar space of E

(iii) E: Kähler-regular $\overset{\text{def}}{\iff}$ E が Kähler-ordinary で, $E \in \mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ の周りで $\operatorname{codim} H(E)$ が変わらない

Theorem 4 (Cauchy-Kowalevski theorem)

$(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$: fix

$\xi^\alpha : (a_1, \cdots, a_n)$ の周りで定義された analytic function $(1 \le \alpha \le N)$

$b^\alpha := \xi^\alpha(a_1, \cdots, a_n)$

$A^\beta_{\alpha i}, B_\alpha : (a_1, \cdots, a_n, 0, b_1, \cdots, b_N) \in \mathbb{R}^{n+N+1}$ の周りで定義された analytic function $(1 \le \alpha, \beta \le N, 1 \le i \le n)$

このとき, 次を満たす $(a_1, \cdots, a_n, 0)$ の周りで定義された analytic function $u_1, \cdots, u_N$ が unique に存在する:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = \sum_{\beta, i} A^\beta_{\alpha i}(x_1, \cdots, x_n, y, u_1, \cdots, u_N) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_i} + B_\alpha(x_1, \cdots, x_n, y, u_1, \cdots, u_N)$$

$$u_\alpha(x_1, \cdots, x_n, 0) = \xi^\alpha(x_1, \cdots, x_n)$$

解析的な Cauchy problem (initial value problem) に対する解の存在定理である Cauchy-Kowalevski の定理のように, n-dimensional integral manifold N が与えられたときに, $N \subset \tilde{N}$ となるような $(n+1)$-dimensional integral manifold $\tilde{N}$ が存在するか (すなわち, N を 1 つ次元の高い integral manifold に拡張可能か) 知るために, 微分小の視点で integral element E_n が 1 つ次元の高い integral element に拡張される様子を調べる. そのとき, polar space $H(E_n)$ の様子を知ることが鍵となる.

$\mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I})$ と $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ について次の関係が成り立つ.

Lemma 5

Σ を $(n+s)$-dimensional C^∞-manifold とし, $p \in \Sigma$ とする.

$E \in \mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I})_p$

$E^+ \in \mathcal{V}(\mathcal{I})_p$ s.t. $E \subset E^+$

とするとき,

$$\operatorname{codim}_{E^+}(\mathcal{V}_n(\mathcal{I}), G_n(T\Sigma)) \ge \operatorname{codim}_E(\mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I}), G_{n-1}(T\Sigma)) + \operatorname{codim}(H(E), T_p\Sigma)$$

が成り立つ. ここで, $\operatorname{codim}_{E_n}(\mathcal{V}_n(\mathcal{I}), G_n(T\Sigma))$ とは $\mathcal{V}_n(\mathcal{I}) \subset G_n(T\Sigma)$ の点 $E_n \in \mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ における codimension を, $\operatorname{codim}(H(E), T_p\Sigma)$ は $H(E) \subset T_p\Sigma$ の codimension を表わしている.

次の定理は Cartan-Kähler の定理の最も基本的な形である.

Theorem 6 (First version of Cartan-Kähler theorem)

Σ : analytic manifold

$\mathcal{I}$: analytic EDS

$P \subset \Sigma$: analytic n-dimensional submanifold s.t. 任意の $p \in P$ に対して, T_pP が Kähler-regular integral element となり, かつ $\dim H(T_pP) = n+1$ が成り立つ

このとき, 任意の $p \in P$ に対し, p のある開近傍 $U \subset \Sigma$ が存在して, $P \cap U \subset N$ となるような analytic $(n+1)$-dimensional submanifold $N \subset U$ が unique に存在する.

Cauchy-Kowalevski の定理の幾何学的な拡張となっていることが見てとれる. 主張が座標に依らない形であるので, 幾何学的な問題に応用できることが重要である. これは最後に例で見てみる.

また, この定理は Cauchy-Kowalevski の定理に基づいているため, 微分構造が解析的でなければならないことに注意する.

次の second version は $\Sigma = R$ として, first version を適用したものである.

Theorem 7 (Second version of Cartan-Kähler theorem)

Σ : analytic manifold

$\mathcal{I}$: analytic EDS

$P \subset \Sigma$: analytic n-dimensional submanifold s.t. 任意の $p \in P$ に対して, T_pP が Kähler-regular integral element となり, かつ $\dim H(T_pP) = n+r+1$ が成り立つ

$R \subset \Sigma$: analytic r-codimensional submanifold s.t. $P \subset R$ かつ T_pR と $H(T_pP)$ は横断的に交わる.
このとき, 任意の $p \in P$ に対し, p のある開近傍 $U \subset \Sigma$ が存在して, $P \cap U \subset N$ となるような analytic $(n+1)$-dimensional submanifold $N \subset U$ が unique に存在する.

一般に使われるのは次の third version である. これは second version を繰り返し適用することで得られる.

Theorem 8 (Third version of Cartan-Kähler theorem)

Σ : analytic manifold
$\mathcal{I}$: analytic EDS
$\{E_k\}$: flag of integral elements of $\mathcal{I}$ at $p \in \Sigma$ s.t. $\dim E_k = k$ $(0 \le k \le n)$ かつ各 E_k $(1 \le k \le n-1)$ が Kähler-regular

このとき, $T_pN = E_n$ となるような analytic n-dimensional integral manifold N が存在する.
さらに, N について次のことが分かる:

$(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^s)$: local coordinates around $p \in \Sigma$ s.t.

(i) $x^1(p) = \cdots = x^n(p) = y^1(p) = \cdots = y^s(p) = 0$
(ii) $E_k = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle$
(iii) $H(E_k) = \{ dy^1 = \cdots = dy^{c_k} = 0 \}$ $\quad (c_k := \operatorname{codim} H(E_k))$

$T_pN = E_n$ となる analytic n-dimensional integral manifold N をこのような coordinates で

$$\{ (x^1, \cdots, x^n, F^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, F^s(x^1, \cdots, x^n)) \}$$

と表しておく. 今, 点 p を通る別の integral manifold $\tilde{N}$ が存在して,

$$\{ (x^1, \cdots, x^n, \tilde{F}^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, \tilde{F}^s(x^1, \cdots, x^n)) \}$$

と表されているとする. もし,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^a(x^1, 0, \cdots, 0) &= F^a(x^1, 0, \cdots, 0) && (c_0 < a \le c_1) \\
\tilde{F}^a(x^1, x^2 0, \cdots, 0) &= F^a(x^1, x^2, 0, \cdots, 0) && (c_1 < a \le c_2) \\
&\vdots \\
\tilde{F}^a(x^1, \cdots, x^n) &= F^a(x^1, \cdots, x^n) && (c_{n-1} < a \le c_n)
\end{aligned}$$

が成り立っているならば, 点 p の周りで N と $\tilde{N}$ は一致する. 逆に, 十分小さな analytic function $f^a(x^1, \cdots, x^k)$ $(1 \le k \le n, c_{k-1} < a \le c_k)$ が与えられたとき, これを initial data とするような n-dimensional integral manifold N が unique に決まる.

定理の主張の後半部分は, integral manifold がいくつかの任意関数に依存して決まることを言っている. ただし, 実際に integral manifold がいくつかの任意関数に依存して決まる様子を explicit に書けるかは別問題である. 次の定理は Cartan-Kähler の定理を使う上で便利である.

Theorem 9 (Cartan's test for involutivity)

$\{E_k\}$ を $\dim E_k = k$ $(0 \le k \le n)$ となるような, 点 $p \in \Sigma$ における $\mathcal{I}$ の integral element の flag とする. このとき,

$$\operatorname{codim}_{E_n}(\mathcal{V}_n(\mathcal{I}), G_n(T\Sigma)) \ge c_0 + \cdots + c_n \tag{1}$$

が成り立つ. さらに, E_k が Kähler-regular $(1 \le k \le n-1)$ であるための必要十分条件は, $\mathcal{V}_n(\mathcal{I})$ が点 E_n で smooth で, (1) の等号が成り立つことである.

Cartan's test により, 点 p の周りでの polar equation の様子を考える必要がなくなる.
今, $s_0 = c_0$, $s_k = c_k - c_{k-1}$ $(1 \le k \le n-1)$, $s_n = \operatorname{codim} E_n - c_{n-1}$ とおき, 不等式 (1) を

$$\dim_{E_n} \mathcal{V}_n(\mathcal{I}) - \dim \Sigma \le s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n \tag{1'}$$

の形で使うことにする.

それでは, 今までのことを使って実際に例を計算してみる.

Example 10 (Minimal hypersurfaces in S^n)

n 次球面 S^n の中の極小超曲面を求める EDS を立てたい.

V : $(n+1)$-dimensional inner product space

$\boldsymbol{e}_0, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in V$: orthonormal basis

$\mathcal{F}_{\mathbb{E}^{n+1}} = \{(x, f_x) \mid f_x : V \longrightarrow T_x\mathbb{E}^{n+1} : \text{linear isometry}, x \in \mathbb{E}^{n+1}\} : \mathbb{E}^{n+1}$ 上の orthonormal frame bundle

$\mathcal{F} = \{f_x \in \mathcal{F}_{\mathbb{E}^{n+1}} \mid x \in S^n, f_x(\boldsymbol{e}_0) \perp T_xS^n\} \simeq O(n+1)$

$\omega = (\omega^i_j) : O(n+1)$ の Maurer-Cartan form

$\omega^i = \omega^i_0$ $(1 \leq i \leq n)$ とおくと, ω^i は自然な射影 $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow S^n$ に関して semi-basic である (i.e. $(\pi_*)_p X = 0$ $({}^\forall p \in \mathcal{F})$ となる $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ に対して, $\omega^i(X) = 0$ となる).

$\Xi = \sum_i (-1)^{i+1} \omega^n_i \wedge \omega^1 \wedge \overset{i}{\cdots} \wedge \omega^{n-1} \in \Omega^{n-1}(\mathcal{F})$ とおき ($\overset{i}{\cdots}$ は i 番目を抜くということ), 次の EDS を考える:

$$\mathcal{I} = \{\omega^n, \Xi\}_{\text{diff}}, \qquad \Omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}.$$

もし, $(\mathcal{I}, \Omega)$ の integral manifold H が存在したならば, $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}|_M \neq 0$ より, M 上 $\omega^n_i = h_{ij}\omega^j$ と書けるから,

$$0 = \Xi|_M = (h_{11} + \cdots + h_{n-1,n-1})\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}|_M$$

となる. 再び $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}|_M \neq 0$ より, $h_{11} + \cdots + h_{n-1,n-1} = 0$ となることが分かる. したがって, H は極小超曲面である.

さて, この $\mathcal{I}$ に対して, Cartan's test を実行する:

Maurer-Cartan equation より, $d\omega^n = -\sum_k \omega^n_k \wedge \omega^k$. ゆえに,

$$\mathcal{I} = \{\omega^n, \sum_k \omega^n_k \wedge \omega^k, \Xi, d\Xi\}_{\text{alg}}.$$

(今は $\mathcal{I}$ の $(n-1)$-dimensional integral manifold を考えているので, $d\Xi$ を計算する必要はない)

また, $\binom{n-1}{2}$-codimensional distribution $\mathcal{D} = \{\omega^i_j = 0 \ (1 \leq i < j \leq n-1)\}$ は completely integrable で, $\mathcal{D}$ の foliation による leaf space $\mathcal{F}/\sim$ を考えることができる. $\omega^n, \sum_k \omega^n_k \wedge \omega^k, \Xi, d\Xi, \Omega$ は semi-basic なので, $(\mathcal{I}, \Omega)$ を $\mathcal{F}/\sim$ 上の EDS と思ってもよいことが知られている (*Cauchy characteristic* による方法). これにより, ω^i_j の部分を考えなくてよくなり, 計算量が減る.

$E \in \mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I}, \Omega)$ とし, $\omega^n_i|_E = \sum_j h_{ij}\omega^j|_E$ と書けば,

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega^n_i|_E \\ &= \sum_{i<j} (h_{ij} - h_{ji})\omega^i \wedge \omega^j|_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \Xi|_E \\ &= h_{11}\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}|_E - h_{22}\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}|_E + \cdots + (-1)^n h_{n-1,n-1}\omega^{n-1} \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-2}|_E \\ &= (h_{11} + \cdots + h_{n-1,n-1})\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-1}|_E \end{aligned}$$

となるから, $\mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I}, \Omega)$ の定義方程式は

$$h_{ij} - h_{ji} = 0 \ (i \neq j), \qquad h_{11} + \cdots + h_{n-1,n-1} = 0.$$

ゆえに, $\mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I}, \Omega)$ は submanifold で

$$\dim \mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I}, \Omega) - \dim(\mathcal{F}/\sim) = \frac{1}{2}(n-2)(n+1).$$

$E \in \mathcal{V}_{n-1}(\mathcal{I}, \Omega)$ をとり, $e_i \in E$ を $\omega^i|_E \in E^*$ の dual とする. $E_0 = \{0\}$, $E_k = \langle e_1, \cdots, e_k \rangle$ $(1 \leq k \leq n-1)$ により, E の flag $\{E_k\}$ を決める.

$H(E_0) = \{\omega^n = 0\}$.

$e_1 \lrcorner (\sum_i \omega_i^n \wedge \omega^i) = \omega_1^n - \sum_i h_{1i}\omega^i$ より,

$H(E_1) = \{\omega^n = \omega_1^n - \sum_i h_{1i}\omega^i = 0\}$.

$e_2 \lrcorner (\sum_i \omega_i^n \wedge \omega^i) = \omega_2^n - \sum_i h_{2i}\omega^i$ より,

$H(E_2) = \{\omega^n = \omega_1^n - \sum_i h_{1i}\omega^i = \omega_2^n - \sum_i h_{2i}\omega^i = 0\}$.

$\vdots$

$H(E_{n-3}) = \{\omega^n = \omega_1^n - \sum_i h_{1i}\omega^i = \cdots = \omega_{n-3}^n - \sum_i h_{n-3,i}\omega^i = 0\}$.

$e_{n-2} \lrcorner (\sum_i \omega_i^n \wedge \omega^i) = \omega_{n-2}^n - \sum_i h_{n-2,i}\omega^i$,

$(e_1, \cdots, e_{n-2}) \lrcorner \Xi \equiv (-1)^{n-1}\omega_{n-1}^n \pmod{\omega^1, \cdots, \omega^{n-1}, \omega_1^n, \cdots, \omega_{n-2}^n}$ より,

$s_{n-2} = \dim H(E_{n-2}) - \dim H(E_{n-3}) = 2$.

$s_{n-1} = \operatorname{codim} E - (s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-2}) = \frac{1}{2}n(n+1) - \binom{n-1}{2} - (n-1) - (n-2) - 2 = 0$.

したがって,

$$\begin{aligned} s_1 + 2s_2 + \cdots + (n-1)s_{n-1} &= 1 + 2 + \cdots + (n-3) + (n-2) \times 2 \\ &= \frac{1}{2}(n-2)(n+1). \end{aligned}$$

$$E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{n-2} \subset \overset{\ulcorner 0 \urcorner}{E} \subset H(E) \subset \overset{\ulcorner 2 \urcorner}{H(E_{n-2})} \subset \overset{\ulcorner 1 \urcorner}{H(E_{n-3})} \subset \overset{\ulcorner 1 \urcorner}{H(E_{n-4})} \subset \cdots\cdots \subset \overset{\ulcorner 1 \urcorner}{H(E_1)} \subset \overset{\ulcorner 1 \urcorner}{H(E_0)} \subset \overset{\ulcorner 1 \urcorner}{T_p(\mathcal{F}/\sim)}$$

ゆえに, Cartan's test を満たしているので, Cartan-Kähler の定理を適用することができる.

この結果をまとめると次のようになる.

Theorem 11

$p \in S^n$, $E \in G_{n-1}(T_pS^n)$, trace が 0 となっている $n-1$ 次対称行列 h が与えられたとき, 点 p で E に接するような S^n の極小曲面が存在する.

参考文献

[1] E. Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Actualités Sci. Ind., no. 994. Hermann et Cie., Paris, 1945.

[2] T. A. Ivey and J. M. Landsberg. *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems,* Vol. 61 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[3] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. V.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

Time averaged properties along unstable periodic orbits in some systems of ordinary differential equations*

Yoshitaka SAIKI (斉木 吉隆)

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN
saiki@kurims.kyoto-u.ac.jp

Abstract

It is recently found in some dynamical systems in fluid dynamics that only a few UPOs (unstable periodic orbits) with low periods can give good approximations to mean properties of turbulent (chaotic) solutions. By employing three chaotic systems described by ordinary differential equations, we compare time averaged properties of a set of UPOs and those of a set of segments of chaotic orbits. For every chaotic system studied in this paper, the distribution of a time average of a dynamical variable along UPOs with lower and higher periods are similar to each other and the variance of the distribution is small, in contrast with that along chaotic segments. The distribution seems to converge to some limiting distribution with non zero variance as the period of the UPO increases, although that along chaotic orbits inclines to converge to the delta-like distribution. These properties seem to lie in the background of why only a few UPOs with low periods can give good mean statistical properties in dynamical systems in fluid dynamics.

Keywords: Chaotic dynamical systems, Unstable periodic orbits, Numerical calculations

1 Introduction

Chaos in dynamical systems has been discussed in relation to UPOs (unstable periodic orbits) embedded in a chaotic attractor, as a chaotic orbit is considered to be approximatable by an ensemble of UPOs which are densely distributed in the chaotic attractor. Recently, in some turbulence systems in fluid dynamics, it has been shown that even only a few UPOs with relatively low periods can capture mean properties of chaotic motions [7]. For the turbulent Couette flow of rather low Reynolds number in the full Navier-Stokes system, Kawahara and Kida obtained a remarkable agreement of an averaged velocity profile along a single UPO with that along a chaotic orbit in phase space of a turbulent Couette flow. Later van Veen *et al.* [15] performed a numerical study of an isotropic Navier-Stokes turbulence with high symmetry, and found that among several UPOs there is a UPO with relatively low period where the energy dissipation rate appears to converge to a nonzero value as assumed in the Kolmogorov similarity theory in the limit of large Reynolds number. This suggests that the UPO corresponds to the isotropic turbulence of fluid motion, although the Reynolds number is not large enough to discuss the detailed properties of the fully developed turbulence because of computational difficulties. As for the universal statistical properties of fluid turbulence at high Reynolds numbers, employing the GOY shell model, Kato and Yamada [8] found a single UPO which gives a fairly good approximation to the scaling exponents of structure functions of velocity, which suggests that the intermittency in the model turbulence can be interpreted as a property of a single UPO, rather than a statistical contribution of complex orbits.

In the above studies, it seems that only a few UPOs with relatively low periods are enough to capture some mean properties of a chaotic solution. However, on the other hand, the chaotic attractor is considered to include infinite number of UPOs, and it appears that an UPO with longer period gives a better approximation

*This is the joint work with M. Yamada at RIMS Kyoto University.

to the statistical properties of chaotic solutions, as a set of long UPOs and a set of chaotic orbits are intuitively taken to have similar statistical properties. So we may have a question why in the above systems even a small number of UPOs with rather low periods can give a remarkably good approximation to the chaotic mean values. Some studies have been concerned with this problem [9, 5, 12].

Kawasaki and Sasa studied a simple model of chaotic dynamical systems with a large degree of freedom, and found that there is an ensemble of UPOs with the special property that the expectation values of macroscopic quantities can be calculated using one UPO sampled from the ensemble. Hunt and Ott studied an optimal periodic orbit which yields the optimal (extreme) value of a time average of a given smooth performance function of dynamical variables. They obtained an implication that the optimal periodic orbit is typically a periodic orbit of low period, although they do not consider the relation of averaged statistical properties along UPOs and chaotic orbits. On the other hand, Yang *et al.* reported that the optimal UPO can be a periodic orbit of high period when the system is near crisis. In a recent study on UPOs of low dimensional map systems by Saiki and Yamada, it is reported that a few UPOs with low periods are not enough to approximate the time averaged properties of chaotic orbits.

In this paper, we employ chaotic systems described by ODEs (ordinary differential equations) and investigate the relation between the average of a dynamical quantity along a UPO and that along a chaotic orbit, especially with an attention focused on the dependence of the variance of averaged values on the periods of the UPOs. At a first glance, it may appear that if we take all the UPOs with the period around T, for example, and take the averages of a dynamical quantity along these UPOs, the variance of the averages would decrease as T increases, because an extremely long orbit would cover most part of the chaotic attractor, capturing possible dynamical states on the attractor.

Our aim in this paper is to see whether this intuitive discussion holds for chaotic systems simple enough to obtain a large number of UPOs by available numerical computation with double accuracy. For this purpose we take three chaotic systems; Lorenz system, Rössler model and a business cycle model. A set of UPOs in each model are obtained numerically, and time averages of variables along the UPOs are discussed especially in relation to the periods of the UPOs [13].

2 Lorenz system

UPOs in the Lorenz system ($dx/dt = \sigma(y-x), dy/dt = rx - y - xz, dz/dt = xy - bz$) with the classical parameter values ($\sigma = 10,\ b = 8/3,\ r = 28$) [10] have been extensively studied. Although the Lorenz system is not uniformly hyperbolic, it is recently proved by the aid of numerical calculation with guaranteed accuracy that the Lorenz attractor is chaotic and includes an infinite number of UPOs densely [14]. Also there are several studies about the UPOs from the viewpoint of dynamical system theory on, for example, the zeta function, the Hausdorff dimension and $f(\alpha)$ spectrum [2]. Franceschini *et al.* [3] and Viswanath [16] detected the UPOs in an systematic way and suggested that all the UPOs are labeled by a sequence of symbols, while Zoldi showed that an ensemble of UPOs weighted by their periods and stability indices gives an approximation to a histogram of a dynamical variable in the chaotic state [17].

Here we focus our attention to the distribution of time averaged values of a dynamical variable along UPOs of the Lorenz system. In order to detect UPOs we employ in this paper the Newton-Raphson-Mees method in which the period of the UPO is regarded as a variable to be found in the numerical calculation [11]. We found more than 1000 UPOs of the periods from 1.558 through 16.445, corresponding respectively from 2 through 23 rotations around a wing of the Lorenz attractor. The number of rotations (cycle number) corresponds to the period of the Poincaré map defined by the 'standard' Poincaré section at $z = r-1, dz/dt > 0$. In our numerical calculation, we identified more than 90% of the UPOs corresponding to those encoded by the symbol sequences up to 14 rotations [1]. One of the most important indices representing the complexity of a dynamical system is the topological entropy [1], which is estimated by the exponential growth rate of the number of periodic orbits; $h_{top} = \limsup_{N\to\infty} \log(\text{Number of UPOs with cycle-}N)/N$, and the topological entropy h_{top} of the Poincaré map in this case is estimated to be $\log(1.8)$ from Figure. 1. We should remark a clear linear dependence of log(Number of UPOs with cycle-N) on N which suggests that the number of detected UPOs in our computation is sufficient to study statistical properties of UPOs. We now calculate the time average of z ($\langle z\rangle \equiv \int_{t=0}^{T} z/T dt$) along each UPO with period T. $\langle z\rangle$s along

[1] We expect that the rest 10% of UPOs have no significant statistical difference from the obtained UPOs.

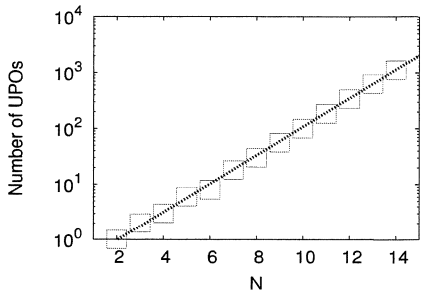


Figure 1: Number of detected UPOs with cycle-N of the Lorenz system in comparison with $0.3 \cdot 1.8^N$.

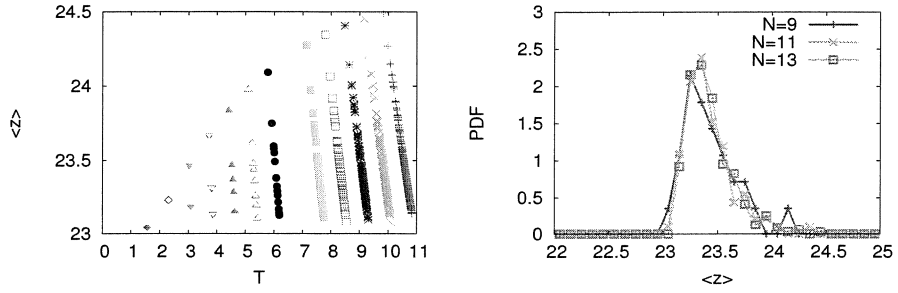


Figure 2: Time averages $\langle z \rangle$s ($\langle z \rangle \equiv \int_{t=0}^{T} z/T dt$) along UPOs with period T (left), Density distribution of $\langle z \rangle$s along UPOs with cycle-N(=9(+),11(×),13(□)) (right).

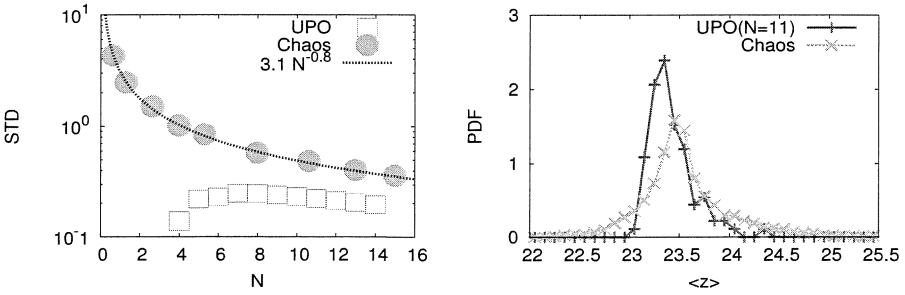


Figure 3: Standard deviation of density distribution of $\langle z \rangle$s along UPOs with cycle-N(□) and that along 10^5 chaotic segments with the corresponding time lengths $T(= 0.753 \cdot N)$(•) and $3.1N^{-0.8}$(line) (left), Density distribution of $\langle z \rangle$s along UPOs with cycle-11 (average=23.43)(+) in comparison with that along 10^5 chaotic segments with the corresponding time-length $T(= 0.753 \cdot 11)$ (average=23.55)(×) (right).

UPOs take similar but different values around the average value of $\langle z \rangle$s along chaotic segments (23.55) (Figure. 2(left)). Figure. 2(right) shows the density distribution of $\langle z \rangle$s along UPOs for $N(= 9, 11, 13)$. We can see that the distribution stays similar shape though N varies, indicating that even longer UPO is not necessarily suitable for evaluation of z averaged along a long chaotic orbit. Although the range of N is limitted, this observation may be contrary to our expectation that a UPO with longer period would give better approximations to statistical properties of chaotic orbits. Actually in Figure. 3(left) the standard deviations of the density distribution of $\langle z \rangle$s along UPOs with cycle-N are seen to be nearly constant as N increases. The figure also shows that the standard deviations of $\langle z \rangle$s along segments of chaotic orbits with time length $T = N \cdot 0.753$, where 0.753 stands for the corresponding recurrent time to the Poincaré section. We can see that as N increases, the latter standard deviation decreases nearly as $N^{-0.75}$. The difference between the density distribution of time averages along UPOs is clearly observed in Figure. 3(right) in the case of the distribution of $\langle z \rangle$s along a set of UPOs with cycle-11 and chaotic segments with the corresponding lengths.

3 Rössler system

Next, UPOs of the Rössler system ($dx/dt = -y - z$, $dy/dt = x + 0.2y$, $dz/dt = 0.2 + xz - 5.7z$) are studied in the same way as the Lorenz system. Numerical detection of UPOs and its validity are studied by Galias [4]. Here we study time averaged properties of more than one thousand of UPOs, whose periods are between 5.881 and 140.619. More than 90% of UPOs with cycle-$N(\leq 17)$ are covered (Figure. 4), and are used for statistical analysis, where the cycle number means the period of a UPO of the Poincaré map of the Rössler system with the Poincaré section ($x = 0, dx/dt > 0$). The topological entropy of the Poincaré map is estimated to be log(1.55) from the figure. Time averages $\langle x \rangle$s ($\equiv \int_{t=0}^{T} x/T dt$) for each UPO is shown in

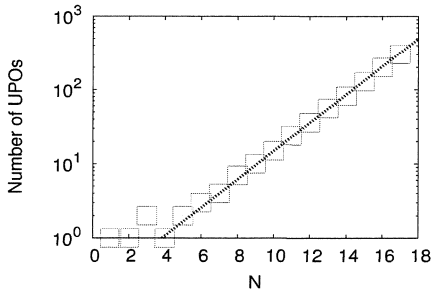


Figure 4: Number of detected UPOs with cycle-N of the Rössler system in comparison with $0.19 \cdot 1.55^N$.

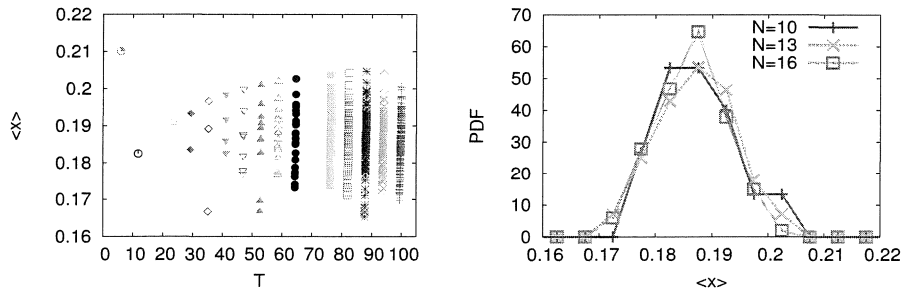


Figure 5: Time averages $\langle x \rangle$s ($\langle x \rangle \equiv \int_{t=0}^{T} x/T dt$) along UPOs with period T (left): Density distribution of $\langle x \rangle$s along UPOs with cycle-N (=10(+),13(×),16(□)) (right).

Figure. 5(left). The distribution of $\langle x \rangle$s is not very concentrated. In addition, the density distribution of $\langle x \rangle$s along UPOs with cycle-$N(= 10, 13, 16)$ do not depend so much on N (Figure. 5(right)). Figure. 6(left) also indicates that the variance of the density distribution of $\langle x \rangle$s of UPOs with cycle-$N(5 \leq N \leq 17)$ are

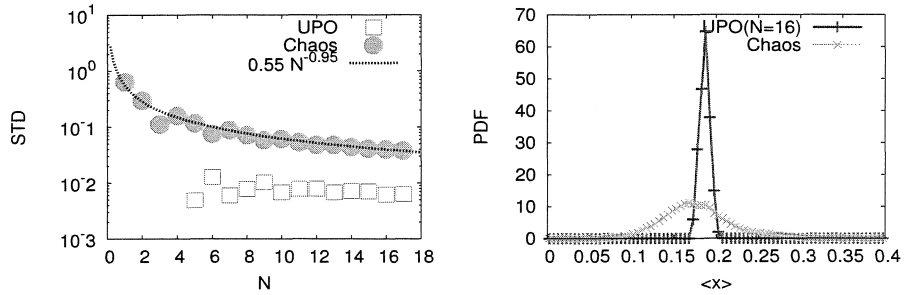


Figure 6: Standard deviation of density distribution of $\langle x \rangle$s along UPOs with cycle-$N(\square)$ and that along 10^5 chaotic segments with the corresponding time length $T(= 5.856 \cdot N)(\bullet)$ and $0.55N^{-0.95}$(line)(left), Density distribution of $\langle x \rangle$s along UPOs with cycle-16 (average=0.186)(+) in comparison with that along 10^5 chaotic segments with the corresponding time length $T = 5.856 \cdot 16$ (average=0.177)$(\times)$ (right).

small in comparison with that of 10^5 chaotic segments with the corresponding lengths. Figure. 6(right) shows a clear difference of the density distribution of $\langle x \rangle$s along UPOs with cycle-16 and chaotic segments with the corresponding time lengths.

4 Economic model

As the third example, we study UPOs embedded in a chaotic business cycle model of Goodwin type, which is described by six dimensional ODEs ($du_i/dt = 0.5(0.1/(1-v_i) + \pi_i^e - 0.5)u_i$, $dv_i/dt = 0.1(1.5(1-u_i)^5 + 3.5(u_j - u_i)^3 + 0.5u_i - a_i v_i + b_i)v_i$, $d\pi_i^e/dt = (v_i(0.4\pi_i^e + 0.2) - 0.4\pi_i^e - 0.16)/(1-v_i)$, where $(i,j) = (1,2),(2,1)$) [6]. The constants are set as $a_1 = 0.875, b_1 = -0.1, a_2 = -4.2, b_2 = 2.56$. More than 1000 UPOs, whose

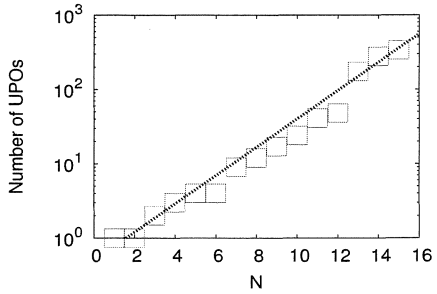


Figure 7: Number of detected UPOs with cycle-N of the economic system in comparison with $0.5 \cdot 1.55^N$.

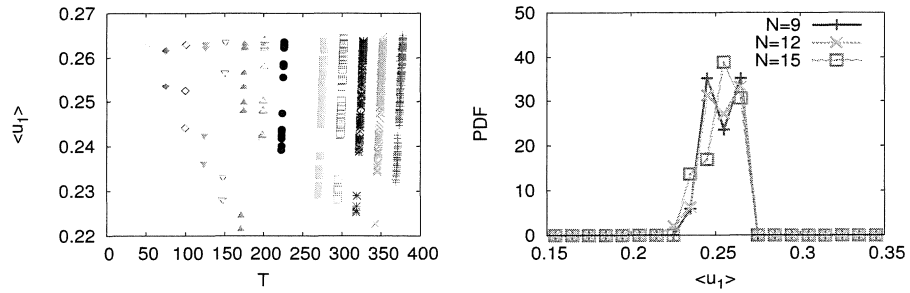


Figure 8: Time average $\langle u_1 \rangle$s ($\langle u_1 \rangle \equiv \int_{t=0}^{T} u_1 dt$) of UPOs with period T (left): Density distribution of $\langle u_1 \rangle$s along UPOs with cycle-N (=9(+), 12$(\times)$, 15$(\square)$) (right).

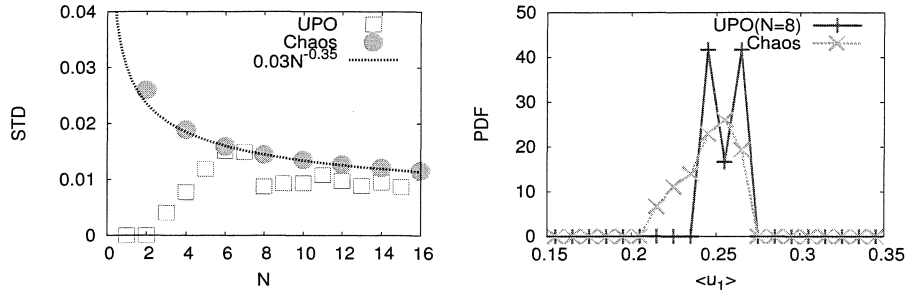


Figure 9: Standard deviation of density distribution of $\langle u_1 \rangle$s along UPOs with cycle-N(□) and 10^5 chaotic segments with the corresponding time length $T(= 24.541 \cdot N)$(•) and $0.03N^{-0.35}$(line) (left): Density distribution of $\langle u_1 \rangle$s along UPOs with cycle-8 (average=0.253)(+) in comparison with that along 10^5 chaotic segments with the corresponding time length $T(= 24.541 \cdot 8)$ (average=0.246)(×) (right).

periods are between 25.22 and 600.05, are numerically detected. We classify UPOs according to the cycle number which corresponds to the period of the Poincaré map ($\pi_1^e = 0, d\pi_0^e/dt > 0$) of the system (Figure. 7). Figure. 7 suggests that almost all UPOs with cycle-N (≤ 15) are thought to be covered and the topological entropy of the map is estimated to be log(1.55). Time averages $\langle u_1 \rangle$s ($\langle u_1 \rangle \equiv \int_{t=0}^{T} u_1(t)/t \; dt$) along UPOs with period $T(< 385)$ are discussed, hereafter. $\langle u_1 \rangle$s along UPOs take various values (Figure. 8(left)), and we find in Figure. 8(right) that the density distribution of $\langle u_1 \rangle$s along UPOs with cycle-N are similar for $N = 9, 12, 15$. This figure suggests that like the former two systems the time averaged value u_1 along a UPO with a long period does not necessarily approximate that along a chaotic orbit (0.246). In fact, the standard deviation of the density distribution of $\langle u_1 \rangle$s along UPOs with cycle-N are small if N is small, and does not decrease as N increases in comparison with that along chaotic segments with the corresponding time lengths (Figure. 9(left)). The difference between the density distribution of UPOs with cycle-8 and chaotic segments with the corresponding time lengths are clearly confirmed in Figure. 9(right).

5 Summary

We have discussed time averages of dynamical variables along UPOs in three chaotic dynamical systems described by ODEs (the Lorenz system, the Rössler system and a 6-dimensional economic model). We have calculated more than 1000 UPOs for each system, and found that time averaged properties along a set of UPOs and a set of chaotic orbits with finite lengths are totally different from each other. From our numerical result with double accuracy a longer UPO is not necessarily advantageous than shorter UPO to estimate mean properties of the chaotic state in these models. In other words, we can employ a short UPO for the estimation of the mean properties of the chaotic state without significant reduction of plausibility. In addition, it is conjectured that the time averages of the dynamical quantities along UPOs with the same period of the Poincaré map have a limiting distribution with nonzero variance. Recently in some fluid dynamical systems, it has been found that only a few UPO with low periods give fairly good approximations to some statistical properties. Our result suggests that the estimation by using a short UPO is as reliable (or unreliable) as that by using a long UPO if the limiting distribution is applicable to those variables. Thus the good approximation in the fluid dynamical models may not be improved substantially even if a UPO with longer period is employed.

Appendix. Algorithm for detecting UPOs [11]

The Newton-Raphson-Mees algorithm for detecting UPOs of the n dimensional ordinary differential equations

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x}), \; \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \; (\mathbf{C}^n) \tag{1}$$

is reviewed. $\{\phi_t(\mathbf{x})\}_{t\in\mathbf{R}}$ denotes the orbit passing through $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$)) at $t=0$. The periodic orbit of the system is determined by the zeros $(\mathbf{x},t)=(\mathbf{X},T)$ $(T>0)$ of

$$H(\mathbf{x},t) := \phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \tag{2}$$

where $\mathbf{X}$ is one point on the periodic orbit and T is the period. The normal Newton-Raphson algorithm does not work directly for solving this problem, because

$$H(\mathbf{x},t) = 0 \tag{3}$$

has n equations with $n+1$ unknowns: the n components of $\mathbf{X}$ on the periodic orbit and the period T. The numerical algorithm is as follows. Linearizing $H(\mathbf{x},t)$, we obtain

$$\begin{aligned} \Delta H(\mathbf{x},t) &= D_{\mathbf{x}}H(\mathbf{x},t)\Delta\mathbf{x} + D_tH(\mathbf{x},t)\Delta t & (4)\\ &= \{\Phi_t(\mathbf{x}) - I\}\Delta\mathbf{x} + F(\phi_t(\mathbf{x}))\Delta t, & (5)\end{aligned}$$

where $D_{\mathbf{x}}H$ and D_tH indicate the variations of H about $\mathbf{x}$ and t, respectively. Moreover, $\Phi_t(\mathbf{x})$ is the $n\times n$ matrix and represents the variation of $\phi_t(\mathbf{x})$ about $\mathbf{x}$, and I is the $n\times n$ unit matrix. Then $\Delta\mathbf{x}$ and Δt are determined so as to satisfy $H(\mathbf{x},t)+\Delta H(\mathbf{x},t)=0$, namely

$$\{\Phi_t(\mathbf{x}) - I\}\Delta\mathbf{x} + F(\phi_t(\mathbf{x}))\Delta t = -H(\mathbf{x},t). \tag{6}$$

Since this has n constraints with $n+1$ unknowns, $\Delta\mathbf{x}$ and Δt are not determined uniquely. Then one additional constraint is required in order to obtain a unique solution of the system. The constraint often employed is that the correction term $\Delta\mathbf{x}$ is to be orthogonalized to the orbit, *i.e.*,

$$< F(\mathbf{x}), \Delta\mathbf{x} >= 0. \tag{7}$$

We can detect periodic orbits by iterating the procedure (6) and (7) several times. That is, under an appropriate initial condition $(\mathbf{x},t)=(\mathbf{X}^{(i)},T^{(i)})$, we solve the equation about $\Delta\mathbf{X}^{(i)}$ and $\Delta T^{(i)}$,

$$\begin{pmatrix} \Phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - I & F(\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)})) \\ F(\mathbf{X}^{(i)})^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{X}^{(i)} \\ \Delta T^{(i)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(i)} - \phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

and modify the point as

$$(\mathbf{X}^{(i+1)}, T^{(i+1)}) = (\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)}) + 2^{-m}(\Delta\mathbf{X}^{(i)}, \Delta T^{(i)}), \tag{10}$$

where superscripts are added to indicate the iteration count denoted by i ($i\in\mathbf{N}$), and m ($m\in\mathbf{N}$) is the damping coefficient.

We use two sorts of errors in iterating the above algorithm:

$$err^{(i)}_{prac} := |H(\mathbf{X}^{(i)}, T^{(i)})| = |\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)}) - \mathbf{X}^{(i)}|, \tag{11}$$

$$err^{(i)}_{mod} := |(\Delta\mathbf{X}^{(i)}, \Delta T^{(i)})|. \tag{12}$$

The former is a practical error at the i-th iteration which is the distance between the initial point $\mathbf{X}^{(i)}$ and the point $\phi_{T^{(i)}}(\mathbf{X}^{(i)})$. The latter is the absolute value of the modified vector $(\Delta\mathbf{X}^{(i)}, \Delta T^{(i)})$. We consider an unstable periodic orbit to be numerically detected if both errors are sufficiently small at the i-th iteration. In this case $\mathbf{X}^{(i)}$ and $T^{(i)}$ are considered to be a point and the period of the UPO, respectively. The errors are regarded to be sufficiently small if

$$err^{(i)}_{prac} \ll 1, \quad err^{(i)}_{mod} \ll 1. \tag{13}$$

It is obvious from the criteria of the convergence of the algorithm that we cannot obtain UPOs which does not satisfy the condition $e^{\lambda T} \ll 1$, where λ is the Floquet exponent and T is the period.

Before iterating the algorithm, it is necessary to give the initial guess $(\mathbf{X}^{(0)}, T^{(0)})$. For the convergence of the algorithm it is very important to give an appropriate initial guess. We randomly choose $\mathbf{X}^{(0)}$ on the numerically calculated chaotic orbits, and give $T^{(0)}$ randomly. This is for the purpose of detecting various types of UPOs.

Acknowledgments

This work is partially supported by the Grant-in-Aids (16340023, 19654019 and 194048) and incentive system for young researchers of Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University.

References

[1] R. Bowen, *Topological entropy and AxiomA, Global Analysis* (Berkeley, CA, 1968) *Proc. Sympos. Pure Math.*,**14** AMS, Providence, RI (1970) 23–41.

[2] B. Eckhardt and E. Ott, *Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter*, **93** (2) (1994), 258–266: K. O. Wiklund and J. N. Elgin, *Phys. Rev. E*, **54**(2), (1996), 1111–1119.

[3] V. Franceschini, C. Giberti, and Z. Zheng, *Nonlinearity*, **6** (1993) 251–258:

[4] Z. Galias, *Inter. J. Bif. and Chaos*, **16**(10)(2006), 2873–2886.

[5] B. Hunt and E. Ott, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (13) (1996) 2254: B. Hunt and E. Ott, *Phys. Rev. E*, **54** (1996) 328: T.-H. Yang, B. Hunt and E. Ott, *Phys. Rev. E.* **62** (2000) 1950–1959.

[6] K. Ishiyama and Y. Saiki, *Chaos, Solitons and Fractals*, **26** (2005) 33–42.

[7] G. Kawahara and S. Kida, *J. Fluid Mech.*, **449** (2001) 291–300.

[8] S. Kato and M. Yamada, *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 025302(R).

[9] M. Kawasaki and S. I. Sasa, *Phys. Rev. E*, **72** (2005) 037202.

[10] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963) 130–141.

[11] Y. Saiki, *Nonl. Process. Gophys.*, **13**, (2007), 615–620.

[12] Y. Saiki and M. Yamada, *Nonl. Process. Gophys.*, **15**, (2008), 675–680.

[13] Y. Saiki and M. Yamada, *Phys. Rev. E.*, **79**, (2009), 015201(R).

[14] W. Tucker, *Found. Comput. Math.*, **2**, 53-117 (2002).

[15] L. van Veen, S. Kida and G. Kawahara, *Fluid Dyn. Res.*, **38**(1) (2006) 19–46.

[16] D. Viswanath, *Nonlinearity* , **16** (2003) (4) 1035–1056: D. Viswanath, *Physica D*, **190** (2004), 115–128.

[17] S. M. Zoldi, *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) (16) 3375–3378.

Stochastic Process in Quantum Mechanics via Two-State Vector Formalism

Yutaka Shikano*
Department of Physics, Tokyo Institute of Technology
shikano@th.phys.titech.ac.jp

1 Brief Review of Quantum Mechanics

Quantum theory began in 1899 with the discovery of the Planck law in black body radiation. Its formulation was initiated by Heisenberg and Schrödinger, respectively. In 1932, von Neumann mathematically formulated quantum mechanics [1] as the following postulates;

Postulate 1 (Representations of states and observables) *Any quantum system* $\mathbf{S}$ *is associated with a separable Hilbert space* $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}$*, called the state space of* $\mathbf{S}$ *. Any quantum state of* $\mathbf{S}$ *is the element* ψ *of the Hilbert space and is represented in one-to-one correspondence by a positive operator* ρ *with unit trace, called a density operator. Any observable of* $\mathbf{S}$ *is represented in one-to-one correspondence by a self-adjoint operator* A *densely defined on* $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}$*.*

Postulate 2 (Schrödinger equation) *If* $\mathbf{S}$ *is isolated in a time interval* (t, t')*, there is a unitary operator* U *such that if* $\mathbf{S}$ *is in* ρ *at* t *then* $\mathbf{S}$ *is in* $\rho = U\rho U^{\dagger}$ *at* t'*.*

Postulate 3 (Born formula) *Any observable* A *takes the value in a Borel set* Δ *in any* ρ *with the probability* $\mathrm{Tr}[E^{A}(\Delta)\rho]$*, where* $E^{A}(\Delta)$ *is the spectral projection of* A *corresponding to* Δ*.*

Postulate 4 (Composition rule) *The composite system* $\mathbf{S} + \mathbf{S}'$ *is the tensor product* $\mathcal{H}_{\mathbf{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{S}'}$ *of their state spaces.*

While he discussed measuring processes, he failed to give the mathematical postulate of measurement. Thereafter, Ozawa introduced the postulate of measurement [2] to consider the measured system and probe system.

*This technical report is for the talk at "The 5th Mathematical Conference for Young Researchers" held at Hokkaido university.

Postulate 5 (Representation of generalized measurement) *When any observable A of the measured system is measured in any state ρ_{sys} before measurement, we obtain that the state after measurement is $M(\Delta)\rho_{sys} = \mathrm{Tr}_{prob}[U(\rho_{sys} \otimes \rho_{prob})U^\dagger]$ and A takes the value in a Borel set Δ with the probability $\mathrm{Tr}_{sys}[\rho_{sys}M(\Delta)]$, where the time evolution operator is defined on the composite system $\mathcal{H}_{sys} \otimes \mathcal{H}_{prob}$.*

$M(\Delta)$ is often called positive operator valued measure (POVM) or completely positive trace preserving (CPTP) map of measurement. This is a central concept of quantum information science. Furthermore, we refer the reader to the book [3] on the mathematical development in quantum mechanics.

In physics, measurement and state change are highly non-trivial and has been discussed by many researchers for a long time, which is called a measurement problem [4]. To discuss the measurement problem produces various interpretation of quantum mechanics, especially measuring process, e.g., the Copenhagen interpretation (state collapse), the Bohm interpretation, and the many-world interpretation.

Before discussing the measurement problem, we concentrate on discussing the Born rule (Postulate 3), that is, **what is a probability in quantum mechanics?** We show the inconsistency between the classical probability theory and the probability in quantum mechanics as the follows.

2 What is Probability in Quantum Mechanics?

Definition 1 (Expectation Value in Conventional Probabilistic Theory) *An expectation value* $\mathrm{Ex}[X]$ *of a random variable* $X(\omega)$ *defined on a probabilistic space* $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ *is*

$$\mathrm{Ex}[X] = \int X(\omega)dP, \tag{1}$$

where dP is a probability measure.

In the conventional probability theory, we give the probabilistic space $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. This does not depend on the measured subject, especially speaking, the probabilistic measure is independent of the observable. Of course, the random variable $X(\omega)$ is a function from Ω to $\mathbb{R}$. On the other hand, in quantum mechanics, the expectation value of an observable A is given by

$$\mathrm{Ex}[A, \psi] = \langle \psi, A\psi \rangle, \tag{2}$$

where $\psi \in \mathcal{H}$ ($||\psi|| = 1$). In order to remain the consistency to Definition 1, we give the following definition;

Definition 2 (Expectation Value in Quantum Mechanics (Mathematics)) *Let F be a subset of the self-adjoint operators (observables) on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and $\psi \in \mathcal{H}$ be a state with $||\psi|| = 1$. If there exist the probabilistic space $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ and the random variable $h_A(\omega)$ on $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ for any observable $A \in F$ such that*

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \int h_A(\omega)dP, \tag{3}$$

then the random variable $h_A(\omega)$ is called a functional representation of the observable $A \in F$.

We show a simple example as the above definition. Let $\psi_t(x) \in \mathcal{H} := \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ be a state as

$$\psi_t(x) = e^{R(t,x)+iS(t,x)}, \tag{4}$$

where $R(t,x)$ and $S(t,x)$ are real functions and p be a momentum operator, which is a Schrödinger operator, as

$$p = -i\hbar\nabla, \tag{5}$$

and $F = \{x, p, p^2\}$ be a set of the observables.

Proposition 1 *The functional representation of the observable p is*

$$h_p(t,x) = \hbar\nabla(R(t,x) + S(t,x)). \tag{6}$$

Proposition 2 *The functional representation of the observable p^2 is*

$$h_{p^2}(t,x) = \hbar^2 \left((\nabla R(t,x))^2 + (\nabla S(t,x))^2\right). \tag{7}$$

Lemma 1 *Except for $\nabla R \nabla S = 0$, the relation between the functional representations of p and p^2 is*

$$(h_p)^2 \neq h_{p^2}. \tag{8}$$

In this simple example, we obtain the strange result on the standard derivations of x and p as the follows. The variance of the momentum p is given by

$$Var(p) = Var(h_p) = \int \hbar^2 \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \mu_t dx - \left(\int \hbar \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x}\right) \mu_t dx\right)^2, \tag{9}$$

where $\mu_t = \psi_t^* \psi = e^{2R}$ is a probability density. The standard derivation of the momentum p is defined as $\tilde{\sigma}(p) := \sqrt{Var(h_p)} = \sqrt{Var(p)}$. From this definition, we obtain the following theorem.

Theorem 1 (Heisenberg Uncertainty Relationship (Mathematics)) *There does not exist a lower bound of $\tilde{\sigma}(x) \cdot \tilde{\sigma}(p)$.*

From the view of physics, this result is very strange since many physicists believe the Heisenberg uncertainty relationship,

$$\sigma(x) \cdot \sigma(p) \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{10}$$

as the principle of quantum mechanics. Of course, the definition of the variance differs from Eq. (9) and is

$$\sigma(A) := \sqrt{\langle \psi, \tilde{A}^2 \psi \rangle}, \tag{11}$$

where $\tilde{A} := A - \langle\psi, A\psi\rangle I$ for any state $\psi \in \mathcal{H}$ and any observable A.

Note that the product of the standard deviations of x and p has a lower bound in the case of $\int \nabla R \nabla S \mu_t dx = 0$, which is the exceptional case of Lemma 1. In this case, we obtain

$$\tilde{\sigma}(x) \cdot \tilde{\sigma}(p) \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{12}$$

As a simple example [5, Section 53], when the state ψ is given by

$$\psi = A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4\delta^2} + i\frac{p_0(x - x_0)}{\hbar} \right), \tag{13}$$

where x_0, p_0 and A are constants and the above condition $\int \nabla R \nabla S \mu_t dx = 0$ is satisfied and the equality of the above inequality is also satisfied. Furthermore, we obtain the following bound between the position x and the kinetic energy $p^2/2m$;

Theorem 2 *The product of the variance of the position and the expectation value of the kinetic energy $p^2/2m$ has a lower bound as*

$$\langle\psi_t, x^2\psi_t\rangle \cdot \langle\psi_t, \frac{p^2}{2m}\psi_t\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{2m}. \tag{14}$$

From the view of physics, while the relation between non-commutative observables is restricted, the position and the kinetic energy are commutative. This difference originally results from the definition of the random variables. Now, **what is a proper expression of random variables in quantum mechanics?**

3 Extended Probability Theory via Two-State Vector Formalism

First of all, we discuss the strangeness of the Born rule. In conventional quantum mechanics, the expectation value of the position x is given by

$$\mathrm{Ex}(x, \psi) := \langle\psi, x\psi\rangle = \int x\psi^*(x)\psi(x)dx = \int x|\psi(x)|^2 dx, \tag{15}$$

where $\psi(x) \in \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ and $|\psi(x)|^2$ is a probability distribution and $|\psi(x)|^2 dx$ is a probability measure. Furthermore, the expectation value of the momentum p is given by

$$\mathrm{Ex}(p, \psi) := \langle\psi, p\psi\rangle = \int p\mathcal{F}[\psi^*(x)](p)\mathcal{F}[\psi(x)](p)dp = \int p|\mathcal{F}[\psi(x)](p)|^2 dp, \tag{16}$$

where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier transform and the probability measure is $|\mathcal{F}[\psi]|^2 dp$ and differs from $|\psi(x)|^2 dx$.

Remark 1 (Contextual Dependence of Probability Measure) *The Born rule leads that the probability measure depends on the observables. That is, we cannot define the probability space a prior and decide this space on deciding the measured observable*[1].

In order to solve the inconsistency between physics and mathematics, we discuss what the random variable. As you know, the examples of the random variable are the obtained result of the dice, the prize price of the drawing lots, and so on. The common concept of the random variable is the **accessible quantities**. In other words in physics, the random variable must be an experimentally accessible quantity. In conventional quantum mechanics, especially, quantum measurement theory, the experimentally quantity is real since the observable is self-adjoint operator and only has the real spectrum. In quantum mechanics, we, however, can define the complex experimentally accessible quantity, that is, a weak value.

Weak values need the two state, which is called a pre-selected state and a post-selected state and are experimentally accessible[2].

Definition 3 (Weak Value) *The weak value of an observable A is defined as*

$$ {}_{\phi}\langle A\rangle_{\psi}^{w} := \frac{\langle \phi, A\psi\rangle}{\langle \phi, \psi\rangle} \in \mathbb{C}, \tag{17} $$

where $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ with $\int ||\phi||^2 d\phi = \int |||\psi||^2 d\psi = 1$ and $\langle \phi, \psi\rangle \neq 0$. In the case of $\langle \phi, \psi\rangle = 0$, we asymptotically define this[3].

We calculate the expectation value in quantum mechanics as

$$ \begin{aligned} \mathrm{Ex}(A) &= \langle \psi, A\psi\rangle = \psi^* A\psi \\ &= \int \psi^* ||\phi||^2 A\psi d\phi = \int \langle \psi, \phi\rangle \cdot \langle \phi, A\psi\rangle d\phi \\ &= \int \frac{\langle \phi, A\psi\rangle}{\langle \phi, \psi\rangle} |\langle \phi, \psi\rangle|^2 d\phi = \int {}_{\phi}\langle A\rangle_{\psi}^{w} |\langle \phi, \psi\rangle|^2 d\phi, \end{aligned} \tag{18} $$

where $h_A = {}_{\phi}\langle A\rangle_{\phi}^{w}$ is complex random variable and $dP = |\langle \phi, \psi\rangle|^2 d\phi$ is the probability measure and is independent of the observable A. This formula means that the extended

[1] As you may know the Kochen-Specker theorem, this theorem means that the spectral representation may depend on the context, that is, the order of taking the spectral representation of observables (See the book [6]). While this remark may be related to this theorem, we have not shown the direct relation.

[2] The concept of weak values are initiated by Aharonov and his collaborators [7] and has recently developed from both experimental and theoretical sides (See [8, Section 1]). In order to measure the weak values, we take the weak measurement, that is, the coupling constant between the measured system and the probe is very small and the post-selection. Therefore, the shift of the probe observables leads to the (complex) weak value.

[3] Since the weak value is based on the two state, this formalism is called a two-state vector formalism. Historically speaking, the two-state vector formalism was originally motivated by the time symmetric description of quantum measurement [9].

probability theory is corresponded to the Born rule, that is, the conventional interpretation. Of course, we obtain the variance as

$$Var(A) = \int |{}_{\phi}\langle A\rangle^{w}_{\psi}|^2 dP - \left(\int {}_{\phi}\langle A\rangle^{w}_{\psi} dP\right)^2. \tag{19}$$

In order to construct the stochastic process, we need obtain the sequential probability, that is, define the sequential weak value for some observables A and B as

$${}_{\phi}\langle B, A\rangle^{w}_{\psi} := \frac{\langle \phi, BA\psi\rangle}{\langle \phi, \psi\rangle}. \tag{20}$$

We obtain the following theorem;

Theorem 3 (Sequential Process in Quantum Mechanics) *The Hilbert space $\mathcal{H}$ takes a decomposition as $\mathcal{H} = \int \oplus_y \mathcal{H}_y$ according to the von-Neumann uniqueness theorem. Let P_y be a projector from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{H}_y$ such that $\int P_y dy = I$ where I is a identity operator on $\mathcal{H}$. Then, we obtain the sequential process as*

$$h_{B,A} := {}_{\phi}\langle B, A\rangle^{w}_{\psi} = \int dy\, {}_{\phi}\langle P_y\rangle^{w}_{\psi} \cdot {}_{\phi}\langle B\rangle^{w}_{y} \cdot {}_{y}\langle A\rangle^{w}_{\psi}, \tag{21}$$

where $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ and $y \in \mathcal{H}_y \subset \mathcal{H}$.

4 Conclusion and Discussion

We have shown the consistency between the extended probability theory and Born rule by considering the meaning of the random variable and have prepared the fundamental concepts in order to discuss the stochastic process in quantum mechanics. We can construct the stochastic process.

There remains the following problem. There are some extensions of the conventional probability theory. Especially, quantum probability theory (App. A) is familiar with quantum mechanics from the algebraic view. Furthermore, there are many studies of quantum walk analogous to the conventional random walk (App. B). These have not shown the relation each other. Since every concept is included in quantum mechanics, there may be strong relationships.

Acknowledgment

The author would like to acknowledge useful discussions with Professor Akio Hosoya and Etsuo Segawa. This work was motivated by the seminar talk of Professor Masao Nagasawa.

A Quantum Probability Theory

We refer the reader to the review paper [10]. There are many formulations on quantum probability theory, which is often called a non-commutative probability theory. All formulations are based on the algebraic view of quantum mechanics. In this paper, we explain the formulation using the von-Neumann algebra as follows. As analogous to the conventional probability theory, we define the Hilbert space $\mathcal{H}$, the set of the projection operators in the von-Neumann algebra $\mathcal{R}$ on $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}(\mathcal{R})$, and the state ϕ associated with the event space Ω, the set of the measurable function $\mathcal{F}$, the probability measure P, respectively.

B Quantum Walk

We refer the reader to the book [11]. In analogous to the classical random walk, we define a quantum walk as the follows. Let a particle state denote a tensored state $|x\rangle \otimes |c\rangle = |x, c\rangle$, a position state $|x\rangle \in \mathcal{H}_p := \{|x\rangle : x \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{C}^\infty$ and a chirality state $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_c := \{\alpha|L\rangle + \beta|R\rangle : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$, where

$$|L\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ |R\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

The time evolution of the one-dimensional quantum walk is given by the two steps:

$$U_{coin} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2), \tag{23}$$

where $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ and this is corresponded to a quantum coin toss. The time evolution $C = I_p \otimes U_{coin}$ solely acts on the chirality states as

$$C|x, R\rangle = a|x, R\rangle + c|x, L\rangle,\ C|x, L\rangle = b|x, R\rangle + d|x, L\rangle. \tag{24}$$

Furthermore, a position shift is subject to the chirality states defined as

$$S|x, R\rangle = |x + 1, R\rangle,\ S|x, L\rangle = |x - 1, L\rangle. \tag{25}$$

The time evolution of the quantum walk is given by the unitary operator $U = SC$ per a step. We assume that the initial position and chirality state be origin and ϕ_0, respectively. After t steps, we obtain the probability at the position x as

$$P(X_t = x) = ||\psi_t^{(\phi_0)}(x)||^2. \tag{26}$$

We obtain the weak convergence theorem as the follows.

Theorem 4 ([12, 13])

$$\frac{X_t}{t} \Rightarrow W\ (t \to \infty), \tag{27}$$

where " $\Rightarrow$ " *denotes the weak convergence. The density of* W *is given by*

$$f(x) = \frac{I_{(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}(x)}{\pi(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}, \tag{28}$$

where $I_A(x)$ *is the defined function of* A *in the case of the Hadamard coin* ($a = b = c = -d = 1/\sqrt{2}$) *and the initial chirality state* $\phi_0 = (|R\rangle + i|L\rangle)/\sqrt{2}$.

References

[1] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantumechanik* (Springer, Berlin, 1932), [Eng. trans. by R. T. Beyer, *Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).]

[2] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79 (1984).

[3] A. Arai and H. Ezawa, *Mathematical Structures of Quantum Mechanics vols. 1 and 2* (Asakura Shoten, Tokyo, 1999) (in Japanese).

[4] P. Busch, P. Mittelstaedt, and P. J. Lahti, *Quantum Theory of Measurement* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

[5] L. Pauling and E. B. Wilson, *Introduction to Quantum Mechanics* (Mcgraw-Hill, New York, 1935).

[6] C. J. Isham, *Lectures on Quantum Mechanics – Mathematical and Structural Foudantions* – (Imperial College Press, London, 1995).

[7] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, Phys. Rev. Lett. **60**, 1351 (1988).

[8] Y. Shikano and A. Hosoya, Weak Values with Decoherence, *e-Print:* arXiv:0812.4502 (quant-ph).

[9] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, and J. L. Lebowitz, Phys. Rev. **134**, B1410 (1964).

[10] M. Rédei and S. J. Summers, Stud. Hist. Philos. Sci. B **38**, 390 (2007).

[11] N. Konno, *Mathematics on Quantum Walk* (Sangyo Tosho, Tokyo, 2008) (in Japanese).

[12] N. Konno, Quantum Inf. Process. **1**, 345 (2002).

[13] N. Konno, J. Math. Soc. Jpn. **57**, 1179 (2005).

INVERSE SCATTERING PROBLEMS FOR NONLINEAR DISPERSIVE EQUATIONS

佐々木 浩宣 （大阪大学大学院理学研究科）
e-mail: hisasaki@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

ABSTRACT. 多体問題で導出される非線型 Schrödinger 方程式を考える. 非線型項には未知なる相互作用ポテンシャル V が含まれている. 本講演の目的は「散乱データが充分得られているとき, それを用いて未知なる V を決定すること」である.

1. 背景

先ず何か分からないことがある. 直接調べたいがそれが叶わない, その様なときは「間接的であるが利用可能な概念」を使って何とか調査する. このような行為は日常であれ, 非日常であれ幾らでも試行しているものである. 特に「間接的であるが利用可能な概念」が**散乱データ**と呼ぶに相応しい物である場合, この調査は**逆散乱問題** (inverse scattering problem) と呼ばれる. 本講演では或る非線型 Schrödinger 方程式に於ける逆散乱問題を扱うが, 本題に入る前に少し準備をしておこう.

1.1. 簡単な例 — 古典的運動 —.

逆散乱問題の具体例を挙げよう. 直線に於ける質点の運動方程式

$$\ddot{x}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

を考える. (1.1) の右辺 $f(t)$ は

$$f(t) = A(1+|t|)^{-3}$$

を満たす外力項である[1] が, 実数 A の具体的な値は不明である.

我々は散乱データを用いて f を決定すること, 即ち A の値を見つけ出すことを目指す. ところで, この問題に於ける散乱データとは何であろうか? 人情としては, 発動された運動 $x(t)$ に対する過去と未来のデータを取りたい訳である. しかし「過去」と「未来」では曖昧にも程があるので, ここでは過去を $t=-\infty$, 未来を $t=+\infty$ と設定する. すると今度は過去と未来のデータ "$x(-\infty)$", "$x(+\infty)$" の扱いが困難になるので, 代替となる概念が要求される. ここで重要な性質「$x(t)$ は時刻 $t=\pm\infty$ に近ければ, **自由運動**（f の影響が一切無い運動）に漸近する」ことを利用しよう. 過去のデータ "$x(-\infty)$" から発動される運動は $t=-\infty$ の周辺では或る自由運動 $x_-(t)$ に漸近する. 今, この $x_-(t)$ の $t=0$ に於ける状態 $(x_-(0), \dot{x}_-(0))$ を ϕ_- としよう. 同様に未来のデータに対して ϕ_+ を定める. こうして得られた ϕ_-（又は, ϕ_+）を用いて, 過去（又は, 未来）のデータと見做すのである（下図参照）.

以上の背景を整理すると, 散乱データとは次の過程で得られる組 $(\phi_-, \phi_+) = ((\phi_-^0, \phi_-^1), (\phi_+^0, \phi_+^1))$ である, と言える：

(I)* 時刻 $t=0$ に於いて位置 $\phi_-^0 \in \mathbb{R}$, 速度 $\phi_-^1 \in \mathbb{R}$ を満たし, 自由運動をする質点 p_- を与える. このとき, $t=-\infty$ 付近で p_- の運動に漸近するような (1.1) の解 $x(t)$ が存在する. しかし $x(t)$ は次第に外力の影響を受け, p_- の運動には漸近しなくなる.

(II)* 運動 $x(t)$ は時刻 $t=+\infty$ 付近で外力の影響を受けなくなる為, 別の自由運動をする質点 p_+ に漸近する. 質点 p_+ は $t=0$ に於いて位置 $\phi_+^0 \in \mathbb{R}$, 速度 $\phi_+^1 \in \mathbb{R}$ で表わされる.

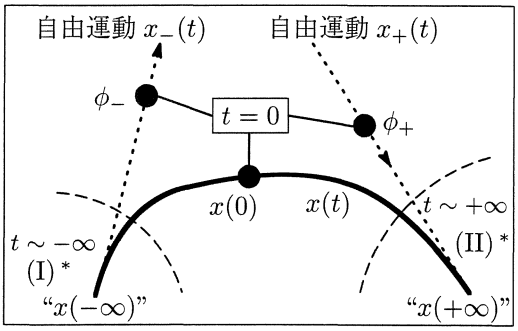
ここで ϕ_-, ϕ_+ は其々入射データ, 反射データと呼ぶことにする.

さて, この散乱データを用いて A を決定しよう. 運動方程式を解けば入射データと反射データとの関係は

$$\phi_+^1 = \phi_-^1 + \int_{\mathbb{R}} f(t)dt$$

で与えられるので, 未知なる A は以下の公式によって決定される:

$$A = \frac{\phi_+^1 - \phi_-^1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1+|t|)^{-3} dt}.$$



[1] 特に物理的意味は無いが, 説明の簡単化の為に採用した.

1.2. **問題の定式化.** 前小節 1.1 の例を本講演の主題に適合するよう一般化・定式化しよう. 時間発展方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t) - Hu(t) = F(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

を考える. 但し, $i = \sqrt{-1}$, $u(t)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ で Hilbert 空間 X の元であり, 特に $u \in C(\mathbb{R}; X)$ を満たす[2]. 又, H は X 上の線形作用素であり[3], $F(t)$ は未知なる**摂動項**とする. $F \equiv 0$ の場合に於ける (1.2) の解を**自由解**と呼ぶことにする. 初期値が $\phi \in X$ であるとき自由解は $e^{-itH}\phi$ となる[4].

方程式 (1.2) は (1.1) の一般化である. 何故なら両者は

$$X = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dfrac{\partial x}{\partial t}(t) \end{pmatrix}, \quad H = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ if(t) \end{pmatrix}$$

の下で同値な為である.

我々は再び散乱データを用いて F を決定することを目指す. 前回の散乱データの定義は大雑把であったが, 今回は厳密に与えておこう. X_- は X の適当な原点近傍とする. このとき散乱データ $(\phi_-, \phi_+) \in X_- \times X$ は以下の条件を満たしたとき定義される:

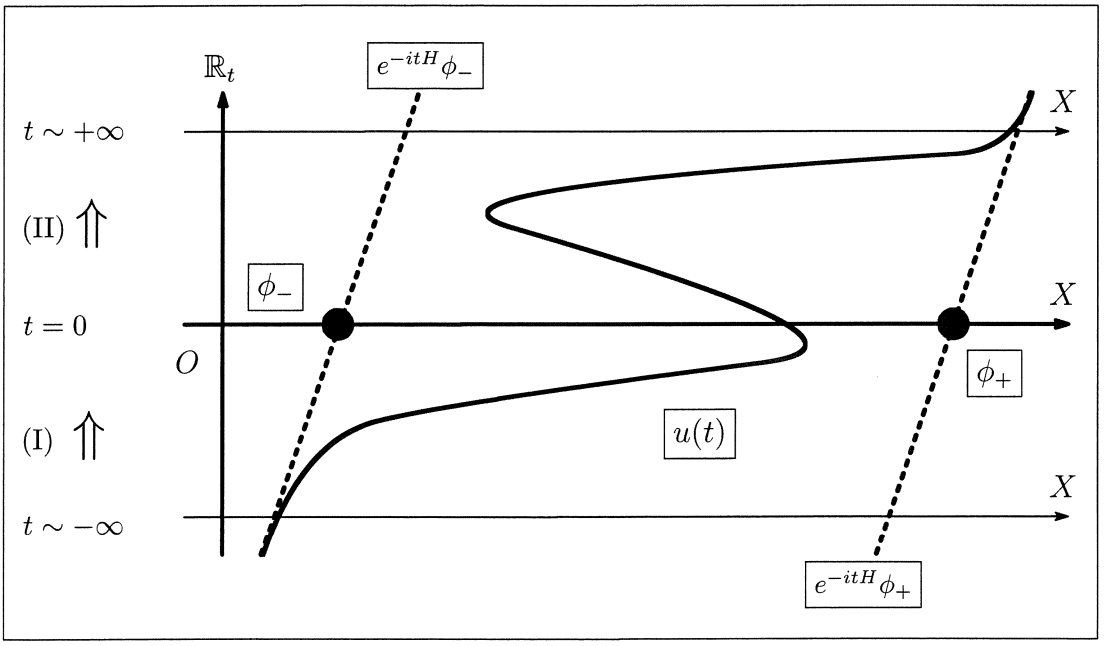
(I) 任意の $\phi_- \in X_-$ に対して, (1.2) の (適切な意味の) 一意な解 $u(t)$ が存在し, 次を満たす[5] :

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t) - e^{-itH}\phi_-\|_X = 0. \tag{1.3}$$

(II) 更に或るデータ $\phi_+ \in X$ が一意に存在し, 次を満たす:

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t) - e^{-itH}\phi_+\|_X = 0. \tag{1.4}$$

ここで条件 (I), (II) の模式図を以下に挙げておく :



[2] t に関して, X の強位相の意味で連続な写像全体の空間である.

[3] X が無限次元の場合, H は特に自己共役作用素であるとする.

[4] 自己共役作用素 H のスペクトル測度を m とするとき, e^{-itH} は

$$\left\langle e^{-itH}\varphi_1, \varphi_2 \right\rangle_X = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d\left\langle \mathrm{m}(\lambda)\varphi_1, \varphi_2 \right\rangle_X, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in X$$

を以て定義される.

[5] ノルム空間 Y のノルムを $\|\varphi\|_Y$ 又は $\|\varphi; Y\|$ ($\varphi \in Y$) で表わす. 特に Y が Hilbert 空間であるとき, その内積を $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_Y$ ($\varphi_1, \varphi_2 \in Y$) で表わす.

さて, 入射データ $\phi_- \in X_-$ から反射データ $\phi_+ \in X$ への写像を**散乱作用素** S と呼ぶことにする[6]. 即ち $S(\phi_-) = \phi_+$ と置く. S は摂動項の「大きさ」に関する指標と言える.

S 及び X_- を用いると, 発展方程式 (1.2) に於ける逆散乱問題は以下のように定式化される：

> 散乱データ $(\phi, S(\phi)) \in X_- \times S(X_-)$ を用いて未知なる摂動項 F を決定せよ.

1.3. **主題.** 本講演で考察していく逆散乱問題について記述する. 対象の方程式は以下の n 次元非線型 Schrödinger 方程式である:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \Delta u(t,x) = \left(V * |u(t,x)|^2\right) u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{NLS}$$

ここで $u(t,x)$ は複素数値未知関数, V は $\mathbb{R}^n$ で定義された実数値関数, Δ 及び $*$ は其々 $\mathbb{R}^n$ に於ける Laplacian と合成績である. 即ち, これらは適切な関数 $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に関して,

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}, \quad f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(x)dy$$

で与えられるものである. (NLS) は

$$X = H^1(\mathbb{R}^n), \quad u(t) = u(t,\cdot) \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n)), \quad H = -\Delta, \quad F(t) = (V * |u(t)|^2)u(t)$$

のもとで (1.2) と同値である[7]. 但し, $H^1(\mathbb{R}^n)$ は Sobolev 空間[8]である. よって $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする自由解は $e^{it\Delta}\phi$ で表わされるが, これは Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を用いることにより

$$e^{it\Delta}\phi = \mathcal{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}\phi$$

と書ける.

この方程式は非相対論的多体問題に基づく. 今 N 個の非相対論的粒子があって, 其々の粒子にはポテンシャル V で表わされる相互作用が働いている. この多体粒子系の支配方程式は（時間依存型）多体 Schrödinger 方程式と呼ばれる. この方程式の未知関数は $\widetilde{u}(t, x^1, x^2, \cdots, x^N)$ $(x^k \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \cdots, N)$ で表わされており, 大変入り組んでいる. ここで, $\widetilde{u}$ が変数分離の型

$$\widetilde{u}(t, x^1, x^2, \cdots, x^N) = u_1(t, x^1)u_2(t, x^2)\cdots u_N(t, x^N)$$

を成すものと仮定した上で多体 Schrödinger 方程式を見直す[9]と時間依存型 Hartree 方程式

$$i\frac{\partial u_k}{\partial t}(t,x) + \Delta u_k(t,x) = \sum_{l \neq k}^{N} \left(V * |u_l(t,x)|^2\right) u_k(t,x), \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{TDH}$$

を得る. (NLS) は (TDH) を単独化したものである.

方程式の由来から V を**相互作用ポテンシャル**と呼ぼう. V の最も基本的なモデルは Coulomb ポテンシャル $V(x) = Q|x|^{-1}$ であるが, 内的・外的要因が加わることにより, V は 未知なる 様々な形を成し得る. 以上の背景の下, 本講演の目的は方程式 (NLS) の逆散乱問題を解くことである. 即ち, **散乱データを用いて V を決定すること**である.

2. 順問題 —散乱作用素の存在定理 —

方程式 (NLS) の逆散乱問題を議論する前に, 散乱作用素 S の存在定理について述べる. 即ち,1.2 で述べた条件 (I), (II) が実際に成り立つことを示そう. その為には未知なる V に一定の条件を加える必要が生じる. 例えば V が Coulomb ポテンシャルである場合, (NLS) の解 $u(t)$ は何時まで経っても自由解には漸近しない. それは V が空間遠方でも自身の影響力を行使してしまうからである. 数学的に言えば, 空間遠方での減衰が弱過ぎる為である. とどのつまり, S が定義される為には, $V(x)$ に或る程度強い減衰条件を課す必要が生じる. この様な事情を踏まえ, 以下の仮定を設ける：

---

[6]散乱作用素の理論をより詳しく扱う為には「波動作用素」「漸近完全性」等の概念の導入・議論が要されるが, ここでは最低限の記述に留める為省略した. 興味のある方は [3] 等を参照されたい.

[7]各 $t \in \mathbb{R}$ で, $u(t,\cdot)$ は写像 $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto u(t,x) \in \mathbb{C}$ を意味する.

[8]$H^1(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n);\ \|\varphi; H^1(\mathbb{R}^n)\| := \|\varphi; L^2(\mathbb{R}^n)\| + \|\nabla\varphi; L^2(\mathbb{R}^n)\|\}$.

[9]詳しくは, 変数分離型の $\widetilde{u}$ を多体 Schrödinger 方程式の Lagrangian に代入し, これの停留値をとるような u_k を導く方程式を導出する. この一連の操作を Hartree 近似という.

仮定 2.1. $n \geq 3$ とする. V は或る $\sigma \in [2,4] \cap [2,n)$ 且つ或る $C > 0$ に対して, 次を満たす:

$$|V(x)| \leq C|x|^{-\sigma}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

それでは仮定 2.1 の下で ([9, 2]) 等で示された S の存在定理を述べよう.

命題 2.2. $n \geq 3$ とせよ. このとき充分小さい $\delta > 0$ について, S が $H^1(\mathbb{R}^n)$ の近傍 $B(\delta; H^1(\mathbb{R}^n)) = \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^n);\ \|\phi\|_{H^1} \leq \delta\}$ 上で定義される.

注意 2.3. 小節 *1.2* の条件 *(I)* で触れている通り, 解 $u(t)$ には何らかの一意性が成立していなければならない. 上記命題 *2.2* の場合 $u(t)$ は, *(NLS)* の積分形

$$u(t) = e^{it\Delta}\phi_- - i\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-\tau)\Delta}\left(V * |u(\tau)|^2\right)u(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

の, 関数空間 $Z = C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^3(\mathbb{R}; H^1_{6n/(3n-4)}(\mathbb{R}^n))$ 上の一意な解である[10].

命題 *2.2* の証明の概要. Strichartz 型評価と非線型項 $F(u) := (V * |u|^2)u$ の評価を合わせると, 非線型項の可積分性 $F \in L^1(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$ 並びに不等式

$$\left\|e^{it\Delta}\phi_-\right\|_Z + \left\|\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-\tau)\Delta}\left(V * |u(\tau)|^2\right)u(\tau)d\tau\right\|_Z \leq C\left(\|\phi_-\|_{H^1} + \|F(t)\|_Z^3\right)$$

を得る. この不等式と縮小写像の不動点定理より, (2.1) の解 $u(t)$ が Z 上で一意に取れることが分かる. 又, F の可積分性より

$$\|u(t) - e^{it\Delta}\phi_-\|_{H^1} \leq C\left\|\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-\tau)\Delta}F(u(\tau))d\tau\right\|_{H^1} \to 0 \quad \text{as } t \to -\infty$$

即ち, (1.3) が示される. 更に ϕ_+ を

$$\phi_+ = \phi_- - i\int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau\Delta}F(u(\tau))d\tau d\tau \tag{2.2}$$

で与えると, 再び F の可積分性から,

$$\|u(t) - e^{it\Delta}\phi_+\|_{H^1} \leq C\left\|\int_{t}^{\infty} e^{i(t-\tau)\Delta}F(u(\tau))d\tau\right\|_{H^1} \to 0 \quad \text{as } t \to +\infty$$

即ち, (1.4) が成立する. □

3. 逆問題 —未知なる V の決定 —

本節では $n \geq 3$ と, 仮定 2.1 は常に設定されているものとする. (NLS) の散乱データ $(\phi_-, S(\phi_-)) \in B(\delta; H^1(\mathbb{R}^n)) \times S(B(\delta; H^1(\mathbb{R}^n)))$ を用いて, 未知なる相互作用ポテンシャル V を決定していこう. ここで, S や $B(\delta; H^1(\mathbb{R}^n))$ は命題 2.2 に基づき定義された (NLS) の散乱作用素とその定義域である.

3.1. $u(t)$ の処理.

以下では入射データを ϕ で表わす. 前節 (2.2) によって $S(\phi)$ の具体的表示

$$S(\phi) = \phi - i\int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta}F(u(t))dt \tag{3.1}$$

が得られるが, これには非線形解 $u(t)$ が含まれている. この $u(t)$ には, 未知なる V の情報が exact に表現できない状態で "ぎっしり"詰まっており, このままでは目的達成は困難である. そこで, $u(t)$ から V の情報を追い出す, 言い換えれば $F(u(t))$ を $F(e^{it\Delta}\phi)$ に置き換える以下の操作を行おう:

---

[10] $1 \leq p, q < \infty$, Banach 空間 Y に対して, $H^1_p(\mathbb{R}^n)$ と $L^q(\mathbb{R}; Y)$ は其々次で与えられる:

$$H^1_p(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n);\ \|\varphi; H^1_p(\mathbb{R}^n)\| := \|\varphi; L^p(\mathbb{R}^n)\| + \|\nabla\varphi; L^p(\mathbb{R}^n)\| < \infty\right\},$$

$$L^q(\mathbb{R}; Y) = \left\{v : \mathbb{R} \to Y \text{ (強可測)};\ \|v; L^q(\mathbb{R}; Y)\| := \left(\int_{\mathbb{R}} \|v(t); Y\|dt\right)^{1/q} < \infty\right\}.$$

命題 3.1. $n \geq 3$ とする. このとき任意の $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ について以下が成り立つ:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\varepsilon^3} \langle S(\varepsilon\phi) - \varepsilon\phi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}} \left\langle F\left(e^{it\Delta}\phi\right), e^{it\Delta}\phi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt. \tag{3.2}$$

証明の概要. 入射データ $\varepsilon\phi$ に基づく (NLS) の解を $u_\varepsilon(t)$ と置く. また, 関数 $u_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ に対し, $[u_1, u_2, u_3](t) = (V * u_1(t)\overline{u_2(t)})u_3(t)$ と定める. このとき (3.1) から

$$S(\varepsilon\phi) - \varepsilon\phi = -i\varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} e^{-it\Delta} F(e^{it\Delta}\phi) dt - i \int_{\mathbb{R}} R(t) dt$$

が成り立つ. 但し, $R(t)$ は

$$R(t) = [u_\varepsilon - \varepsilon e^{it\Delta}\phi, u_\varepsilon, u_\varepsilon] + [\varepsilon e^{it\Delta\phi}, u_\varepsilon - \varepsilon e^{it\Delta}\phi, u_\varepsilon] + [\varepsilon e^{it\Delta\phi}, \varepsilon e^{it\Delta\phi}, u_\varepsilon - \varepsilon e^{it\Delta}\phi]$$

で与えられる項である. ここで, 命題 2.2 の証明を吟味すると,

$$\left\| [u_1, u_2, u_3]; L^1(\mathbb{R}; L^2) \right\| \leq C \|u_1\|_Z \cdot \|u_2\|_Z \cdot \|u_3\|_Z,$$
$$\left\| u_\varepsilon(t) - \varepsilon e^{it\Delta}\phi \right\|_Z \leq C\varepsilon^3 \quad \text{且つ} \quad \|u_\varepsilon\|_Z \leq C\varepsilon$$

であり, $\|R; L^1(\mathbb{R}; L^2)\| \leq C\varepsilon^5$ が言える. この評価と, 性質 $\langle e^{-it\Delta}F, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle F, e^{it\Delta}\phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ から (3.2) を得る. □

(3.2) で登場した極限操作

$$I[\phi] := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\varepsilon^3} \langle S(\varepsilon\phi) - \varepsilon\phi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

は小振幅極限 (small amplitude limit) と呼ばれている. これは元来, 冪乗型非線型項付き Schrödinger 方程式の逆散乱問題 ([8] 等) に用いられた手法であるが, 今回の項であっても, 利用可能な方法であることが分かる. しかし, ここから先の段階では最早既存の手法 (=冪乗型のときの手法・公式) では無理が生じる為, 新たな手法・公式を作らなければならない. もし V に具体的形状を仮定すれば先行結果が存在する[11]が, 本節では V に可積分条件[12]

$$\text{或る } A > 0 \text{ に対して } e^{A|x|}|V(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n_x) \tag{3.3}$$

のみを課し[13], **具体的形状は仮定しないで** V の情報を引き出すことを目指そう.

3.2. **形式的考察.** 形式的な考察によって V の決定法を検討しよう. 問題解決の鍵は小振幅極限 $I[\phi]$ と入射データのスケール変換 $\phi^\lambda(x) = C_0\lambda^{-m}\phi(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$ である[14]. これはどういうことであろうか. 先ず前述した命題 2.2 の通り, $I[\phi]$ によって, 厄介な未知情報 $u(t)$ は放逐され形式的に,

$$(\text{既知なる情報}=)\ I[\phi] = \int_{\mathbb{R}} \langle V, |e^{it\Delta}\phi|^2 * |e^{it\Delta}\phi|^2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt\ (= \text{未知なる情報})$$

という幾分単純な関係に至る. 後は如何にして積分中に潜り込んでいる V を決定するか, である. ここでスケール変換された $\phi^\lambda(x)$ が重要な働きをする. 極めて形式的な考察であるが, $\lambda \to 0$ のとき, $\partial_\lambda^M(|e^{it\Delta}\phi^\lambda|^2 * |e^{it\Delta}\phi^\lambda|^2)$ は $g_M(x)\delta(t)$ に収束する. ここで, $\partial_\lambda = \partial/\partial\lambda$, g_M は x に関する M 次多項式, $\delta(t)$ は $\mathbb{R}_t$ 上の Dirac–delta 関数である. よって公式

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d^M I[\phi^\lambda]}{d\lambda^M} = \int_{\mathbb{R}^n} g_M(x)V(x)dx$$

が予測される. かなり飛躍した期待を込めると上記 $g_M(x)V(x)$ の積分は, V の Fourier 変換 $\mathcal{F}V$ の M 階導関数に於ける原点での値 (形式的に $\partial^M \mathcal{F}V(0)$ と書いておこう) に同質なものと思えるので, C_0 を適当に取り直すと

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{d^M I[\phi^\lambda]}{d\lambda^M} = \partial^M \mathcal{F}V(0)$$

---

[11] [11, 13, 12, 5, 4] では, $V(x) = Q|x|^{-\sigma}$ の仮定の下で未知定数 Q と σ を決定した.

[12] この条件を満たす相互作用ポテンシャルの例として湯川ポテンシャル等が挙げられる.

[13] 定数 A は未知であっても差し支えない.

[14] 実数 C_0, m は問題設定により異なる.

によって $\partial^M \mathcal{F}V(0)$ が求められそうだと気づく．もし V に充分な急減衰条件 (3.3) を課せば $\mathcal{F}V$ は実解析的になり，Maclaurin 展開

$$\mathcal{F}V(\xi) = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{\partial^M \mathcal{F}V(0)\xi^M}{M!}$$

によって V が完全に決定されるであろう[15]．

3.3. **証明の概略.** 前小節 3.2 の考察は飽くまで形式的議論に過ぎず，実際に正しいか否かは証明してみなければ分からない．現在のところ仮定 (3.3) の他に一定の対称性を仮定すれば上記考察は正しいことが得られている．それでは早速その結果について述べよう．

Case A ([4]). V が球対称である場合を考える．作用素 $U(t)$ を $U(t) = e^{it\Delta}$ で定義する．又，関数 $\varphi(x)$ と $\lambda > 0$ に対し関数 $\varphi[\lambda]$ を $\varphi[\lambda](x) = \varphi(\lambda x)$ で定めよう．このとき，$U(t)\phi[\lambda] = (U(\lambda^2 t)\phi)[\lambda]$ であるから，小振幅極限 $I[\phi[\lambda]]$ について命題 3.2 から

$$I[\phi[\lambda]] = \int_{\mathbb{R}} \left\langle V * \left|(U(\lambda^2 t)\phi)[\lambda]\right|^2, \left|(U(\lambda^2 t)\phi)[\lambda]\right|^2 \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt$$

を得る．更に $\mathcal{F}$ に関する Parseval の等式，積分の変数変換を経て

$$I[\phi[\lambda]] = (2\pi)^{n/2}\lambda^{-2-n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}V(\lambda\xi)\Phi(\phi; t, \xi) d\xi dt$$

に至る．但し，ここで $\Phi(\phi; t, \xi)$ は

$$\Phi(\phi; t, \xi) = \left| \mathcal{F}\left|(U(t)\phi)\right|^2 (\xi) \right|^2$$

で定義される既知な関数である．今 V は球対称なので $\mathcal{F}V$ も球対称である．従って，或る 1 変数関数 $\nu(\rho)$ $(\rho \in \mathbb{R})$ が存在して $\mathcal{F}V(\xi) = \nu(|\xi|)$ $(\xi \in \mathbb{R}^n)$ と書ける．更に仮定 3.3 から $\mathcal{F}V \in C^{2M}(\mathbb{R}^n)$ なので

$$(2\pi)^{-n/2} \frac{d^{2M}}{d\lambda^{2M}} \lambda^{n+2} I[\phi[\lambda]] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{2M}}{\partial \rho^{2M}} \nu(\lambda|\xi|)|\xi|^{2M} \Phi(\phi; t, \xi) d\xi dt \tag{3.4}$$

が成り立つ．ϕ に充分な滑らかさと減衰条件を与えれば Lebesgue の優収束定理より

$$\frac{\partial^{2M}\nu}{\partial \rho^{2M}}(0) = \frac{\lim_{\lambda \to 0} \frac{d^{2M}}{d\lambda^{2M}} \lambda^{n+2} I[\phi[\lambda]]}{(2\pi)^{n/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2M} \Phi(\phi; t, \xi) d\xi dt} \tag{3.5}$$

を得る．ν の原点に於ける奇数階微分は常に 0 となることに注意されたい．前小節 3.2 で触れた通り，後は Maclaurin 展開を利用することにより ν は再構成される．従って V が完全に決定される．

Case B ([7]). 次に V に対称性の条件

$$V(x_1, \cdots, \pm x_j, \cdots, x_n) = V(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n), \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, 2, \cdots, n$$

を課す．この仮定は Case A の其れより緩くなっていることは明白である．このとき，仮定 (3.3) により Maclaurin 展開

$$\mathcal{F}V(\xi) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\partial_\xi^{2\alpha} \mathcal{F}V(0)\xi^{2\alpha}}{(2\alpha)!}$$

が得られる[16]ので，各 $\partial_\xi^{2\alpha}\mathcal{F}V(0)$ を決定すれば充分である．以下では例として，$n = 3$, $|\alpha| = 1$ のときの決定法について述べておく：

---

[15] 上記 Maclaurin 展開の収束半径は A 以上であるが $+\infty$ とは限らない．それ故，V を決定させる為には更に複数回の Taylor 展開（この収束半径も A 以上）が必要である．いずれにしても $\partial^M \mathcal{F}V(0)$ の決定が鍵となるのは変わらない．

[16] $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ を multi-index という．このとき，

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_1}}$$

等が定義される．

先ず Case A のときと同様にして

$$(2\pi)^{-3/2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^5 I[\phi[\lambda]]=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\mathcal{F}V}{\partial\xi_j^2}(0)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}x_j^2\Phi(\phi;t,\xi)d\xi dt \tag{3.6}$$

を得る. ここで入射データの組 $\{\phi_j\}_{j=1}^3$ に対して

$$\mathcal{I}=(2\pi)^{-3/2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{d^2}{d\lambda^2}\lambda^5\begin{pmatrix}I[\phi_1[\lambda]]\\ I[\phi_2[\lambda]]\\ I[\phi_3[\lambda]]\end{pmatrix},\quad \mathcal{M}=\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}x_k^2\Phi(\phi_j;t,\xi)d\xi dt\right)_{1\le j,k\le 3}$$

を定める. また未知なる縦ベクトル $\mathcal{V}_0$ を $\mathcal{V}_0={}^t(\partial_{\xi_1}^2\mathcal{F}V(0),\partial_{\xi_2}^2\mathcal{F}V(0),\partial_{\xi_3}^2\mathcal{F}V(0))$ で表わす. よって (3.6) は $\mathcal{I}=\mathcal{M}\mathcal{V}_0$ と書ける. ここで適切な $\{\phi_j\}$ を選べば行列 $\mathcal{M}$ は可逆となり $\mathcal{V}_0$ が決定される.

一般の n や α に関しては上記の手法を更に一般化することで得られる. いずれにしてもデータ $\{\phi_j\}$ の選び方が重要である. 選び方の例としては, 球対称ではない ϕ を固定し, 原点を中心に回転させることで作られる $\{\phi\circ R_j\}$ (R_j は回転行列) 等が挙げられる.

4. 他の分散型方程式について

本節では, 他の非線型分散型方程式[17] に対する逆散乱問題の結果 ([6]) について述べておく.

4.1. 線型摂動項付き NLS. プラズマ中の多電子原子に関連のある方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\Delta u(t,x)=V_0u(t,x)+\left(V_1*|u(t,x)|^2\right)u(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$$

を考える. ここで V_j $(j=0,1)$ は未知パラメータ $Q_j\in\mathbb{R}$, $\mu_j>0$ によって

$$V_j(x)=\frac{Q_j\exp(-\mu_j|x|)}{|x|}$$

で定まる未知なる湯川ポテンシャルである. 前節の記号 $U(t)$ を用いると, 自由解は $U(t)\varphi$ の如く表現されることを注意されたい. 先ず, 散乱作用素 S の存在であるが,

$$|\mu_0|>Q_0 \tag{4.1}$$

であれば $B(\delta;L^2(\mathbb{R}^3))$ ($\delta>0$ は充分小さいとする) に於いて S が定義される.

今後 (4.1) を常時仮定する. もし線型摂動項を構成する V_0 が恒等的に 0 であれば, 前節の手法により残る V_1 は決定出来る. しかし恒等的に 0 ではない場合, 最早前節の手法を直接使用することは不可能である為, 新たな方法の開発が要される. 以下に V_j の決定法の概要を述べる:

Step 1 まず, 非線型項 $F(u)$ を追い出す. 具体的に公式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S(\varepsilon\phi)}{\varepsilon}=S_0(\phi),\quad \phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

を用いる. ここで S_0 は摂動項 V_0u の*み*伴った線型 Schrödinger 方程式に関する散乱作用素である.

Step 2 Higher velocity limit と呼ばれる極限や Radon 変換を用いることにより S_0 から Q_0, μ_0 が決定される ([1]). 従って, 既知となった線型発展群 $U[V_0](t)=\exp(-it(-\Delta)+V_0)$ 並びに波動作用素

$$\Omega_\pm=\mathrm{s}-\lim_{t\to\pm\infty}U[V_0](-t)U(t)\qquad (\text{複号同順})$$

が構成される.

Step 3 既知となった $\Omega_\pm$ 及び, 命題 3.2 に対する証明のアイデアを用いると

$$i\lambda^{-4}\left\langle(\Omega_+S\Omega_-)(\lambda^3\phi[\lambda])-\lambda^3\phi[\lambda],\phi[\lambda]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{Q_1\exp(-\mu_1|y|)}{|y|}\Psi(\lambda;y)dy+o(\lambda)$$

---

[17] 主に非線型波動又は其れに関連のある現象を記述する為に導入された方程式である. 非線型 Schrödinger 方程式, Korteweg-de Vries 方程式, Benjamin-小野方程式等は非線型分散型方程式の著名な例である. 又, 双曲型に分類される Klein-Gordon 方程式も分散型として括られることも多い.

に至る. 但しここで, $\Psi(\lambda;y)$ は

$$\Psi(\lambda;y)=\int_{\mathbb{R}^{1+3}}\left|e^{-itH(\lambda,y)}\phi(x-\lambda y)\right|\left|e^{-itH(\lambda,0)}\phi(x)\right|d(t,x),\quad H(\lambda,y)=-\Delta+\lambda^{-2}V_0(\lambda^{-1}x-y)$$

で与えられる関数である. ここで適当な ϕ を取る[18]と, $L^2(\mathbb{R}^3)$ の意味で $e^{-itH(\lambda,y)}\phi\to U(t)\phi$ ($\lambda\to 0$ のとき) となる. 更に吟味すると, $\Psi(\lambda,y)$ は既知なる定数 $\|U(t)\phi;L^4(\mathbb{R};L^4)\|^4$ に収束することが分かる. 湯川ポテンシャル V_1 について,

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{Q_1\exp(-\mu_1|y|)}{|y|}dy=4\pi\frac{Q_1}{\mu_1^2}$$

が成り立つので, 最終的に公式

$$\frac{Q_1}{\mu_1^2}=\frac{i\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-4}\left\langle(\Omega_+S\Omega_-)(\lambda^3\phi[\lambda])-\lambda^3\phi[\lambda],\phi[\lambda]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{4\pi\|U(t)\phi;L^4(\mathbb{R};L^4)\|^4}$$

を得る. 故に Q_1/μ_1^2 が決定される.

Step 4 既知となった Q_1/μ_1^2 を用いて定数 a,b 並びに関数 $G(s)$ $(s\in\mathbb{R})$ を

$$b=\left|\frac{Q_1}{\mu_1^2}\right|^{1/2},\quad a=i\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-3}b^{-7}\left\langle(\Omega_+S\Omega_-)(\varepsilon\phi[b^{-1}])-\varepsilon\phi[b^{-1}],\phi[b^{-1}]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

$$G(s)=\int_{\mathbb{R}}\left\langle\frac{s\exp\left(-\sqrt{|sx|}\right)}{|x|}*\left|e^{-itH(b,0)}\phi\right|^2,\left|e^{-itH(b,0)}\phi\right|^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt$$

と定義する. これらは全て既知であることに注意されたい. そのとき命題 3.2 より

$$G(Q_1)=a$$

となる. 関数 G は狭義単調増加・連続なので挟みうちの原理から $G^{-1}(a)$ は容易に構成できる. 即ち, Q_1 そして μ_1 が決定される.

4.2. **相対論的 Hartree 方程式.** 前小節 4.1 のアイデアは, 相対論的非線型発展方程式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}-\sqrt{1-\Delta}\right)w(t,x)=\left(\frac{Q_2\exp(-\mu_2|x|)}{|x|}*|w(t,x)|\right)w(t,x)$$

の逆散乱問題に直接応用できる. 但し, ここで $Q_2\in\mathbb{R}$, $\mu_2>0$ は未知なパラメータである. 所謂非相対論的極限

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|\exp\left(i\lambda^{-2}t-i\lambda^{-1}t\sqrt{\lambda^{-2}-\Delta}\right)\phi-\exp\left(\frac{it\Delta}{2}\right)\phi\,;L^4(\mathbb{R};L^4)\right\|$$

に注意しつつ, 前小節 4.1 の Step 3,4 を繰り返すと, Q_2 及び μ_2 が決定される.

References

[1] V. Enss and R. Weder, J. Math. Phys. 36 (1995), 3902–3921.
[2] K. Mochizuki, J. Math. Soc. Japan 41 (1989) 143-160.
[3] M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics III, Academic Press 1978.
[4] H. Sasaki, Journal of Physics: Conference Series 73 (2007), 012021.
[5] H. Sasaki, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 66 (2007), 1770–1781.
[6] H. Sasaki, Comm. Partial Diff. Equations 33 (2008), 1175–1197.
[7] H. Sasaki, in preparation.
[8] W.A. Strauss, Non linear scattering theory, in "Scattering Theory in Mathematical Physics", pp. 53–78. J. A. Lavita and J.-P. Marchand, editors, D. Reidel, Dordrecht-Holland / Boston 1974.
[9] W.A. Strauss, J. Funct. Anal., 43 (1981), 281–293.
[10] M. Watanabe, Tokyo J. Math. 24 (2001), 59–67.
[11] M. Watanabe, Inverse Problems 18 (2002), 1477–1481.
[12] M. Watanabe, Journal of Physics: Conference Series 73 (2007), 012025.
[13] M. Watanabe, J. Math. Phys. 48, 053510 (2007) (9 pages).

[18] 具体的には $(\Delta^2+1)^{-1}\phi$ が滑らかで且つ, 台が原点から外れているような ϕ を取る.