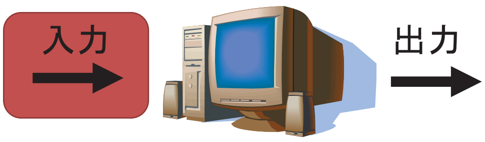
幾何的特徴を持つグラフクラスに対する効率のよいアルゴリズムの開発

斎藤　寿樹
ERATO湊離散構造処理系プロジェクト 研究員

ランダム生成（数え上げ）・列挙

計算機実験のテストデータ



偏ったテストデータを与えると，
正しい解析結果が得られない．

提案アルゴリズム

Proper Intervalグラフのランダム生成と列挙
[斎藤，山中，清見，上原，2009]

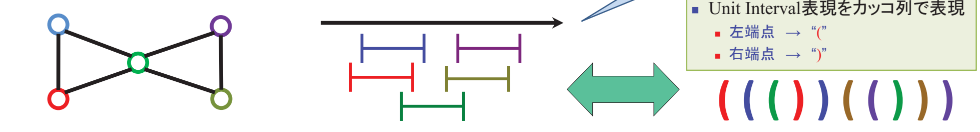
ランダム生成アルゴリズム
- 入力：自然数 n
- 出力：n頂点の連結なProper Intervalグラフ
  一様ランダムに生成(同型性を考慮)
  数え上げを利用
  $O(n+m)$時間

列挙アルゴリズム
- 入力：自然数 n
- 出力：n頂点の連結なProper Interval Graphを列挙
  漏れなく，重複なく（同型性を考慮）
  逆探索法[D. Avis and K. Fukuda, 96]を利用
  1つあたり$O(1)$時間

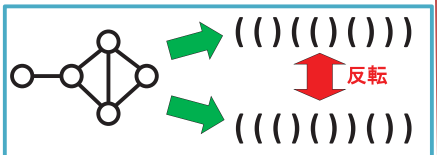
Unit Interval表現と呼ばれる区間の集合を持つグラフ
- 頂点は各数直線上の各区間と対応（区間の長さはすべて同じ）
- 2頂点間に辺が存在する ⇔ 対応する2つの区間に重なりがある

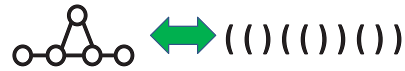
Interval表現の各端点を左からスイープすると左端点が現れる順番に右端点も現れる

- Unit Interval表現をカッコ列で表現
  - 左端点 → "("
  - 右端点 → ")"



補題 [X. Dell, P. Hell, J. Huang, 1996]
連結なProper Intervalグラフは1つ，
または2つのカッコ列表現を持つ





アルゴリズムのアイディア
- カッコ列をランダム生成や列挙

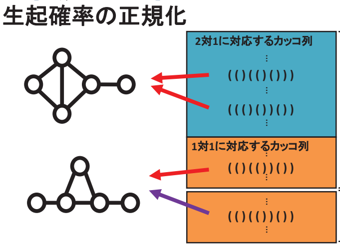
グラフとカッコ列が1対1に対応するわけではない！

ランダム生成アルゴリズム

生起確率（せいきかくりつ）の正規化（せいきか）

$$S_n + R_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$R_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$



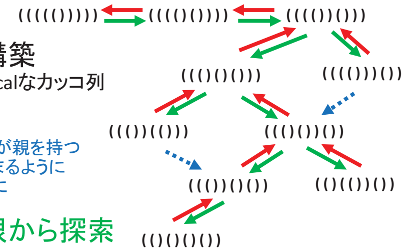
Case 1　確率：$\dfrac{S_n + R_n}{S_n + 2R_n}$

Case 2　確率：$\dfrac{R_n}{S_n + 2R_n}$

列挙

列挙木を構築
- ノード：Canonicalなカッコ列
- 根を定義
- 親を定義
  すべてのノードが親を持つ
  親が一意に決まるように
  根に近づくように

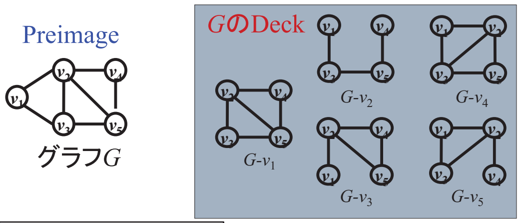
列挙木を根から探索



グラフ再構築問題

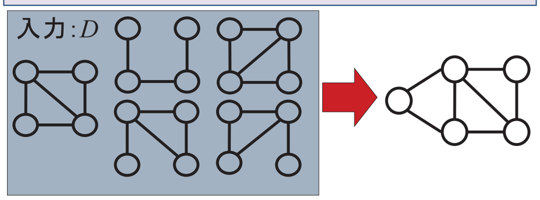
定義

グラフ$G=(V, E)$のDeck：グラフの多重集合$\{G\text{-}v \mid v \in V\}$
グラフの多重集合DのPreimage：DをDeckとするグラフ



グラフ再構築問題

入力：n-1頂点のn個のグラフD
質問：DをDeckとするPreimageは存在するか?



グラフ再構築予想[1957年]　未解決問題！

n-1頂点のグラフがn個与えられたとき($n \geqq 3$)，
それをDeckとするPreimageは高々一つ

既存の研究
- 予想が成立するグラフクラス
  正則グラフ，木，非連結グラフなど
- 再構築可能なもの(一意に決定)
  次数列，彩色数など
- グラフの同型性判定問題と深い関係

再構築問題は同型性判定問題以上に難しい

単純なグラフ再構築アルゴリズム

1. $G_i \in D$を選択
2. G_iに頂点vとvに接続する辺を追加(G_i^v)
3. G_i^vのDeck D_i^vを作る
4. D_i^vとDが等しいかをチェック(Deck Checking)
   - □ 等しければ，DのPreimageはG_i^v
   - □ 等しくなければ，2に戻る

グラフ再構築予想証明への足がかりとして多項式時間アルゴリズムの開発を行う

単純なアルゴリズムは遅い！
- ステップ2でG_i^v候補が指数個
- ステップ4で同型性判定を使用

入力に制限：
同型性判定を多項式時間で行えるグラフクラス

多項式時間アルゴリズムの開発
↓
グラフ再構築予想の証明