



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 二分決定図と分配束                                                                         |
| Author(s)        | 岡本, 吉央                                                                            |
| Description      | ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト春のワークショップ（キックオフシンポジウム）．2010年5月28日（金）～29日（土）．ERATO湊プロジェクト研究室．  |
| Relation         | 2010年度科学技術振興機構ERATO湊離散構造処理系プロジェクト講究録． p. 291-294.                                 |
| Issue Date       | 2011-06                                                                           |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/48415">https://hdl.handle.net/2115/48415</a> |
| Type             | conference presentation                                                           |
| File Information | 03.okamoto-nu.pdf                                                                 |



## 二分決定図と分配束

岡本 吉央 (東京工業大学)

2010 年 5 月 28 日

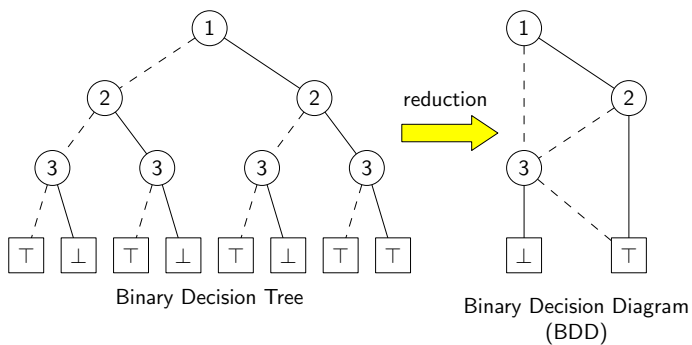
内容

[既存]                  二分決定図        :   プール束の部分集合の表現  
↓  
↓  
拡張  
↓  
[提案]

↓  
↓  
拡張  
↓  
分配束の部分集合の表現

## 論理関数と BDD

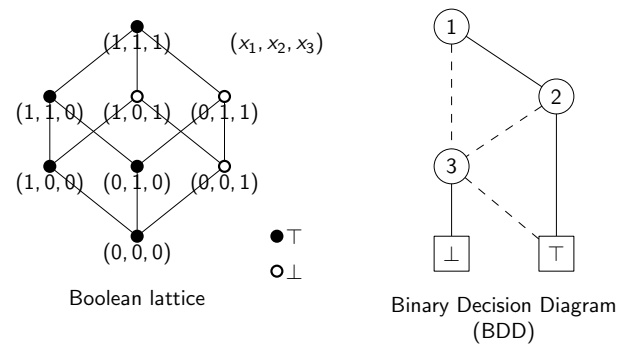
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x_3}$$



変数順序：1 < 2 < 3

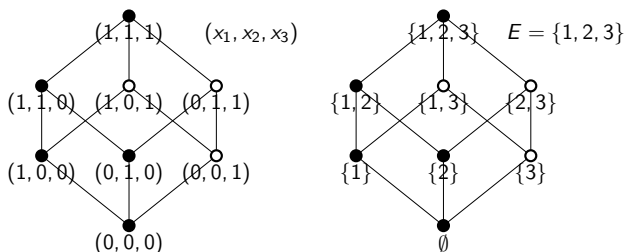
## 論理関数とブール束

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee \overline{x_3}$$



ブール束

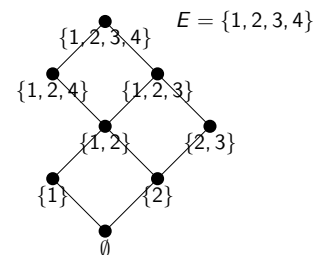
有限集合族  $\mathcal{F} \subseteq 2^E$  が**ブール束**であるとは、  
 $\mathcal{F} = 2^E$  を満たすことである



## 分配束：ブール束の一般化として

有限集合族  $\mathcal{D} \subseteq 2^E$  が**分配束**であるとは次を満たすことである

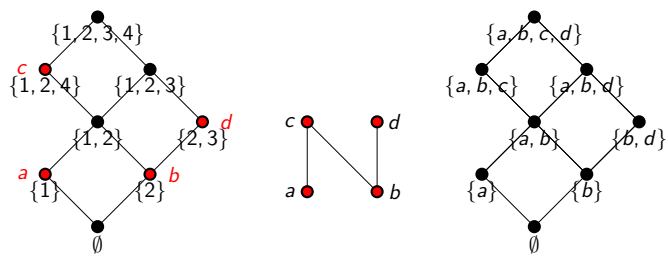
- 1  $\emptyset \in \mathcal{D}$
- 2  $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in \mathcal{D}$



注意：ブール束は分配束

分配束の性質：バーコフの表現定理 ('37)

任意の分配束はある半順序集合の順序イデアルの族と同型である

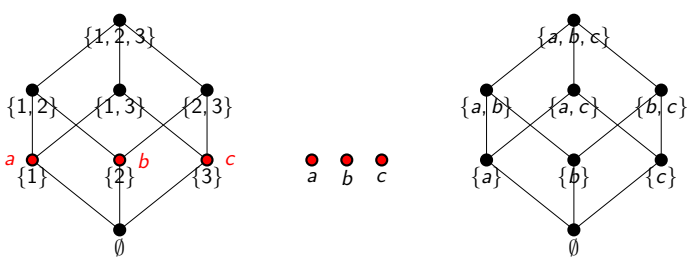


半順序集合  $(P, \leq)$  の順序イデアルとは、集合  $X \subseteq P$  で

$$a \in X, b \leq a \Rightarrow b \in X$$

を満たすもの

バーコフの表現定理：ブール束の場合



分配束と離散構造

モデル化 (既知)

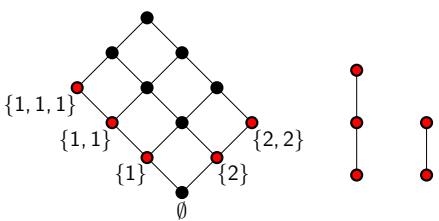
離散構造の中には、分配束を用いて自然に表現できるものが多い

- ▶ 格子 (Propp '97; Ferrari, Pinzani '05; Barucci, Bernini, Ferrari, Poneti '05)
- ▶ カタラン構造 (Propp '93; Khuller, Naor, Klein '93; Felsner '04)
- ▶ 平面的構造 (Ore '56)
- ▶ 劣モジュラ構造 (Gusfield, Irving, Leather, Saks '87)
- ▶ 安定マッチング
- ▶ .....

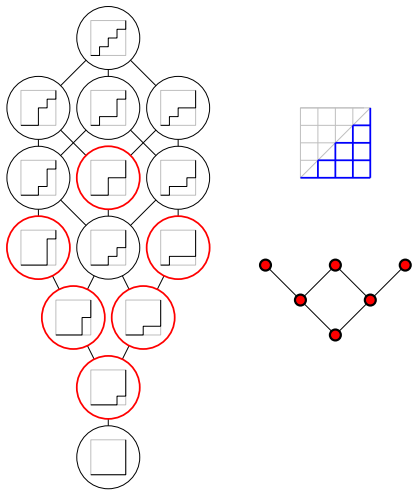
アルゴリズム (未知)

分配束上の BDD があると便利では？

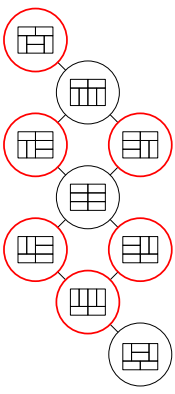
分配束の例：多重集合族 (格子)



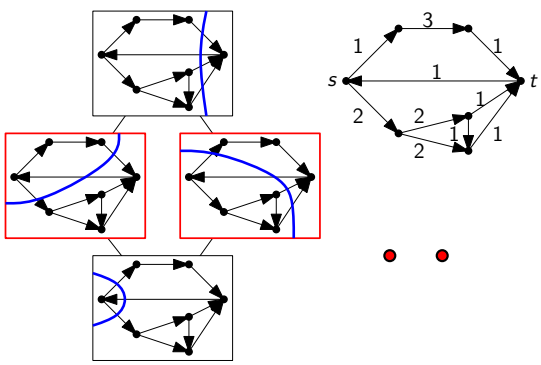
分配束の例：Dyck パス (カタラン構造)



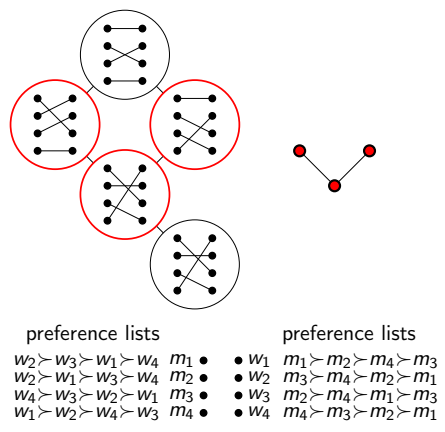
分配束の例：ドミノ・タイリング (平面的構造)



分配束の例：最小  $st$  カット (劣モジュラ構造)



分配束の例：安定マッチング



分配束と離散構造 (再掲)

モデル化 (既知)

離散構造の中には、分配束を用いて自然に表現できるものが多い

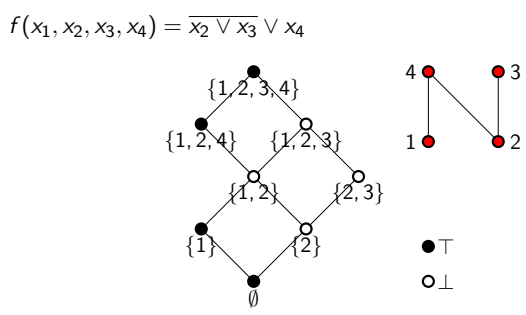
- ▶ 格子
- ▶ カタラン構造 (Propp '97; Ferrari, Pinzani '05; Barucci, Bernini, Ferrari, Poneti '05)
- ▶ 平面的構造 (Propp '93; Khuller, Naor, Klein '93; Felsner '04)
- ▶ 劣モジュラ構造 (Ore '56)
- ▶ 安定マッチング (Gusfield, Irving, Leather, Saks '87)
- ▶ .....

アルゴリズム (未知)

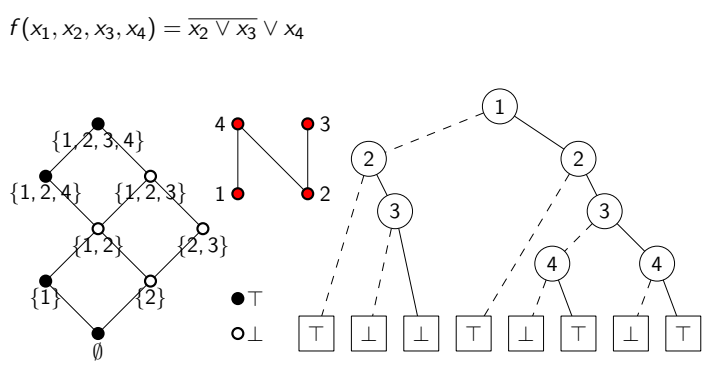
分配束上の BDD があると便利では？

分配束上の論理関数

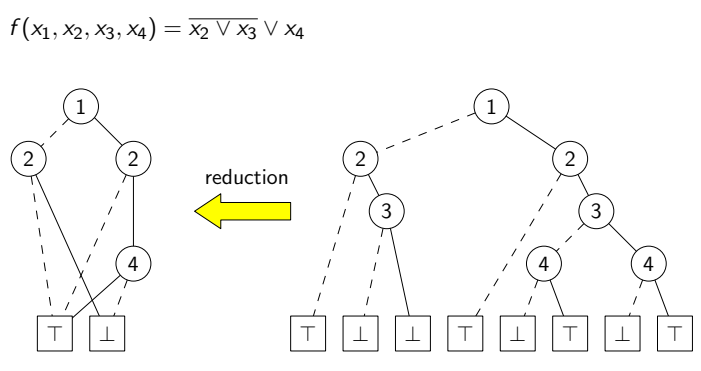
- ▶ 分配束  $\mathcal{D} \subseteq 2^E$
- ▶ 分配束上の論理関数  $f: \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$
- ▶ (通常の論理関数  $f: 2^E \rightarrow \{0, 1\}$ )



分配束上の論理関数と二分決定木



分配束上の論理関数と二分決定図



二分決定図の構成アルゴリズム

入力

- ▶ 分配束  $\mathcal{D}$  を表現する半順序集合  $P$
- ▶ 論理式  $f: \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$  (の論理式表現)

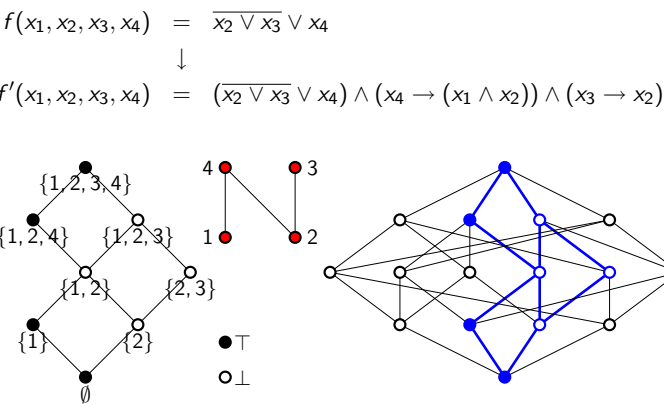
出力

- ▶  $\mathcal{D}$  上の  $f$  に対する二分決定図

アルゴリズムの戦略

- 1  $\mathcal{D}$  をブール束に埋め込み、既存のアルゴリズムを動かす
- 2 直接  $\mathcal{D}$  上で構成する

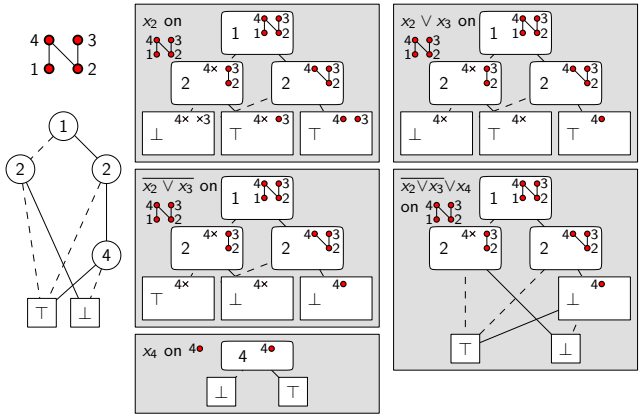
(1)  $\mathcal{D}$  をブール束に埋め込み、既存のアルゴリズムを動かす



(2) 直接  $\mathcal{D}$  上で構成する：まだ練られてない

変数順序：1 < 2 < 3 < 4

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_2 \vee x_3} \vee x_4$$



まとめ

提案

- ▶ 分配束に対する二分決定図

課題

- ▶ アルゴリズムの詳細の記述，計算量の解析
- ▶ より深い考察
- ▶ 適用範囲の調査
- ▶ 実装