



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	二分決定グラフによる列挙の幾何への応用：正多面体の列挙
Author(s)	堀山, 貴史
Description	ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト春のワークショップ（キックオフシンポジウム）．2010年5月28日（金）～29日（土）．ERATO湊プロジェクト研究室．
Relation	2010年度科学技術振興機構ERATO湊離散構造処理系プロジェクト講究録．p.283-286．
Issue Date	2011-06
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/48417
Type	conference presentation
File Information	01.horiyama_06.pdf



二分決定グラフによる列挙の 幾何への応用 ～正多面体の列挙～

堀山 貴史 (埼玉大学)

第1回 離散構造処理系シンポジウム (2010年 5月 28日)

1

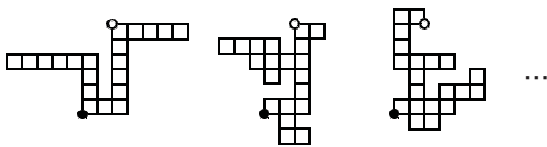
研究テーマ

- BDD 関連
 - 乗算の各ビットを表す BDD のサイズは、
どんな変数順序でも指数 [Bryant 1991]
 - 除算の各ビットも指数
 - データを BDD で表して、推論
 - 与えられた BDD は単調関数か?、Horn 関数か?
 - 性質 f が成立するか?
 - 事象 x_q が成立する条件? ($x_a x_b \dots \rightarrow x_q$ となる $x_a x_b \dots$ を探す)
- VLSI 設計 関連
- オンライン・アルゴリズム 関連
- オークション 関連
- 列挙アルゴリズム 関連
 - タイリングの列挙

2

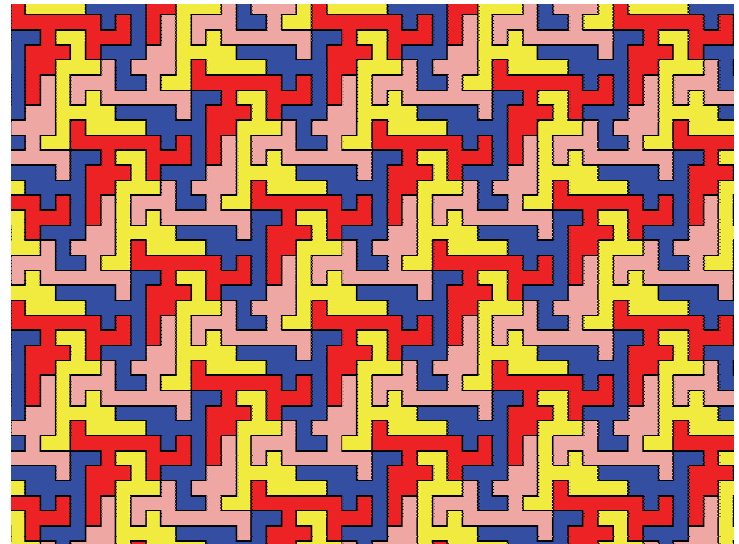
タイリングの列挙

タイリング図形を次々と見せてくれるウェブページを用意しました
<http://www.al.ics.saitama-u.ac.jp/horiyama/research/>



タイリング:
絵画 (エッシャーなど)、織物、壁面装飾、工業製品のデザイン、結晶物理学など
身の回りに色々な形で見られます
エッシャーの絵は <http://www.mcescher.com/> に沢山あります

4



正多面体の展開図の列挙

正四面体 正六面体 正八面体 正十二面体 正二十面体



2 種類



11 種類



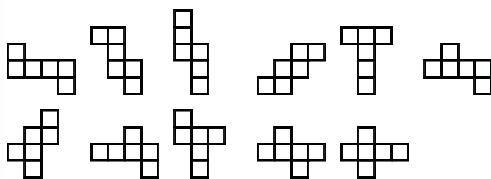
11 種類



43,380 種類



43,380 種類

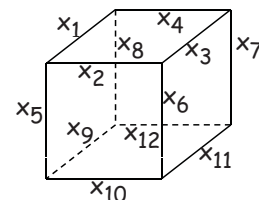


多面体の図は wikipedia より
http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

10

正多面体の展開図の列挙

- 各辺の「切る」/「切らない」を、論理変数で表す



- 展開図になるための制約条件を、BDD で表す
→ 1-path 1 つが、展開の仕方 1 つに対応
- 対称性を排除する
- 「切る」/「切らない」をもとに、展開図を作成

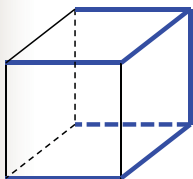
11

展開図になるための制約条件

■ 展開図

⇔ 「切る」辺が、全域木になる [文献 (?)]

- ⇔
1. 「切る」辺は、頂点数 - 1 本
 2. 各頂点には、「切る」辺が少なくとも 1 本
 3. 「切る」辺がサイクルを持たない



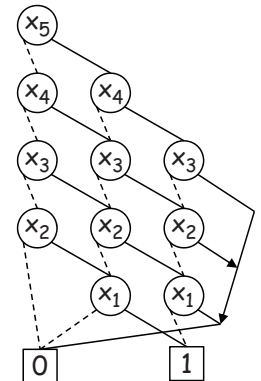
12

展開図になるための制約条件 (1)

■ 「切る」辺は、頂点数 - 1 本

Ex) 2 out of 5 possible positions

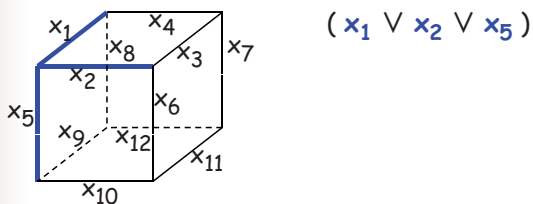
1 の個数を数える



13

展開図になるための制約条件 (2)

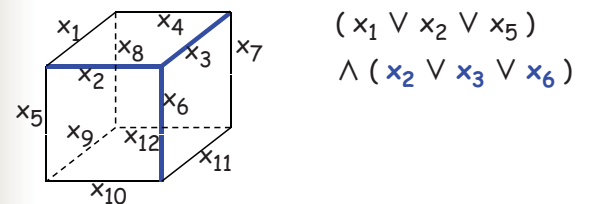
■ 各頂点には、「切る」辺が少なくとも 1 本



14

展開図になるための制約条件 (2)

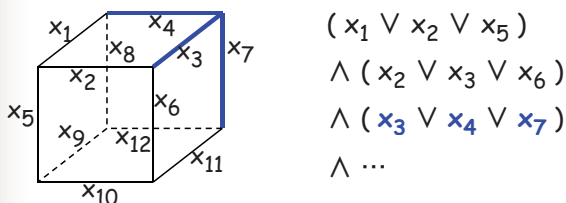
■ 各頂点には、「切る」辺が少なくとも 1 本



15

展開図になるための制約条件 (2)

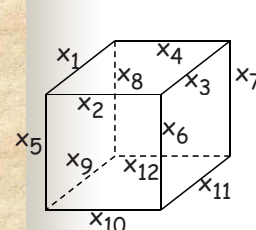
■ 各頂点には、「切る」辺が少なくとも 1 本



16

展開図になるための制約条件 (3)

■ 「切る」辺がサイクルを持たない = $\neg$ (「切る」辺がサイクルを持つ)

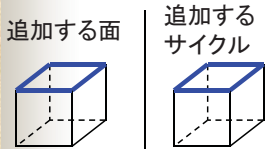


サイクル
… 各面の周囲を貼り合わせたもの
→ 面を 1 つずつ加えて、
サイクルを列挙する

17

展開図になるための制約条件 (3)

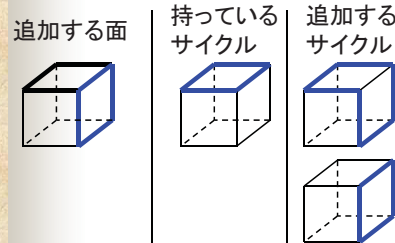
- 「切る」辺がサイクルを持たない
 $= \neg (\text{「切る」辺がサイクルを持つ})$



18

展開図になるための制約条件 (3)

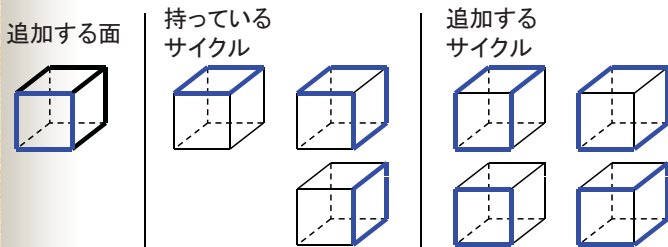
- 「切る」辺がサイクルを持たない
 $= \neg (\text{「切る」辺がサイクルを持つ})$



19

展開図になるための制約条件 (3)

- 「切る」辺がサイクルを持たない
 $= \neg (\text{「切る」辺がサイクルを持つ})$



追加するサイクル
 ・ 面の周囲
 ・ 持っているサイクルに、面の周囲で「切る」/「切らない」を反転

20

展開図になるための制約条件 (3)

- 「切る」辺がサイクルを持たない
 $= \neg (\text{「切る」辺がサイクルを持つ})$
- サイクルの列挙
 - $f_{\text{サイクルの集合}} := 0$
 - foreach 面 $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}) \{$
 - $f_1 := x_{i1} \wedge x_{i2} \wedge x_{i3} \wedge x_{i4} \wedge \text{他変数の負リテラル}$
 - $f_2 := f_{\text{サイクルの集合}}$ のBDDで、
 $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4}$ の 0-枝と 1-枝を入れ替える
 - $f_{\text{サイクルの集合}} := f_{\text{サイクルの集合}} \vee f_1 \vee f_2$
- $f_{\text{サイクルの集合}} := f_{\text{サイクルの集合}} \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$
 「全辺 切らない」を除外

21

展開図になるための制約条件 (3)

- 「切る」辺がサイクルを持たない
 $= \neg (\text{「切る」辺がサイクルを持つ})$

サイクルの列挙



$f_{\text{サイクルの集合}}(111100000000) = 1$
 $f_{\text{サイクルの集合}}(111101000000) = 0$
 $f_{\text{サイクルの集合}}(111100000110) = 0$

- $f_{\text{サイクルの集合}}$ の monotone 拡大をとる

$f_{\text{monotone 拡大}}(1111*****) = 1$

22

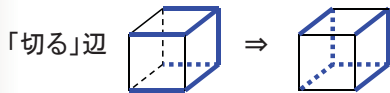
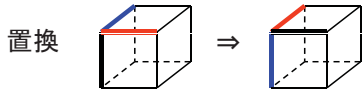
正多面体の展開図の列挙

- ✓ 展開図になるための制約条件を、BDD で表す
 $\rightarrow$ 1-path 1 つが、展開の仕方 1 つに対応
- 対称性を排除する
 - 辺の置換を定義し、対称の同値類で代表元を残す
 例) 正二十面体の置換を定義する辺は、30 本
 置換は、120 個
- 「切る」/「切らない」をもとに、展開図を作成

23

対称性の排除

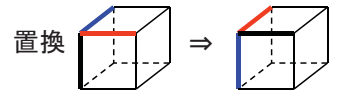
- 置換による「切る」辺の移動



$f_{\text{展開図}}(011100100111) = 1$ $f_{\text{展開図}}(101000111011) = 1$
 辞書順で大きい方を残す

25

対称性の排除

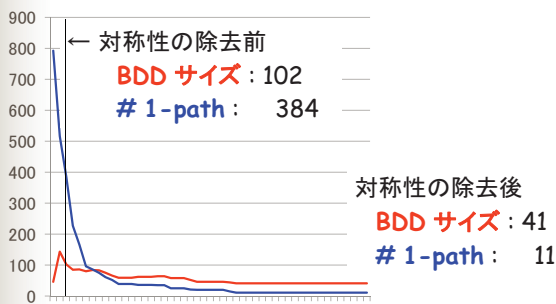


$f_{\text{展開図}}(011100100111) = 1$
 $f_{\text{展開図}}(101000111011) = 1$
 $\vdots$
 $f := f_{\text{展開図}} \wedge (x_1 \equiv y_5)(x_2 \equiv y_1)(x_3 \equiv y_8) \dots$ (置換による対応を作る)
 $f(011100100111 \ 101000111011) = 1$
 $f(101000111011 \ 000011110111) = 1$
 $\vdots$
 $f' := f \wedge ((x_1 \bar{y}_1) \vee (x_1 y_1)(x_2 \bar{y}_2) \vee (x_1 y_1)(x_2 y_2)(x_3 \bar{y}_3) \dots)$ (x が y より大なら残す)
 ~~$f(011100100111 \ 101000111011) = 1$~~
 $f'(101000111011 \ 000011110111) = 1$
 $\vdots$
 $f'' := \exists y_1 \exists y_2 \dots f'$ (y の部分を消す)
 $f''(101000111011) = 1$
 $\vdots$

26

実験結果

- BDD のサイズ、1-path の個数の推移 (正六面体)

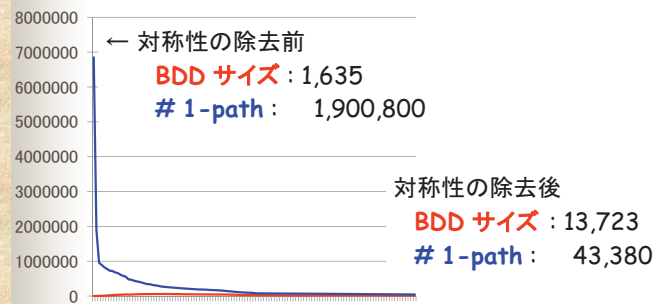


実行時間 0.04 秒

Intel Xeon 3.0 GHz / Debian GNU/Linux 27

実験結果

- BDD のサイズ、1-path の個数の推移 (正二十面体)



実行時間 565 秒

Intel Xeon 3.0 GHz / Debian GNU/Linux 28

実験結果

正四面体 正六面体 正八面体 正十二面体 正二十面体

展開図	2 種類	11 種類	11 種類	43,380 種類	43,380 種類
BDD	8	46	35	9,595	13,737
ZDD	5	33	20	8,875	9,600
ZDD'	5	25	25	6,220	11,576

「切る」/「切らない」の 1/0 を入れ替えた ZDD のサイズ

29

まとめ

- 正多面体の展開図を列挙
 - 展開図になるための制約条件を、BDD で表す
→ 1-path 1 つが、展開の仕方 1 つに対応
 - 対称性を排除する
 - 「切る」/「切らない」をもとに、展開図を作成
- 幾何図形の列挙が他にもできる？

30