経済学研究 *62-1*
北海道大学 2012.7

サヴェジ基礎論における期待値作用素概念について

園　信太郎

1．はじめに

サヴェジ氏は「基礎論」において，自身の「個人的確率，personal probability」に基づく期待値作用素を利用しているが，その明白な定義を避けている。彼にとっての「合理的な個人」は，終にはいかなる「事象，event」に対しても「確率」を配分するに至る，理念的「存在」なのだが，一方この「確率」は，加法法則，つまり有限加法性を満たすのだが，完全加法性を満たす保証はないのである。サヴェジ氏はBruno de Finettiの議論を支持しており，つまり（合理的個人が従う規範としての）「公準たち，postulates」に完全加法性を加えることを退けて，あくまでもそれを生産的な「仮説，hypothesis」として取り扱うのである。

サヴェジ氏の念頭にある例をあげると，次の様なものがある。（1から始まる自然数系列$\mathbf{N}$を添数集合とする）有界な実数列に作用するLimをBanach極限として，$\mathbf{N}$の任意の部分集合Aに対して，$P(A)=\mathrm{Lim}\ (\#A[n]/n\ ;\ n\in\mathbf{N})$と置く。但し，$A[n]=\{m\in A\mid m\leqq n\}$である。するとこの$P(\cdot)$は，$\mathbf{N}$の任意の部分集合に実数値を対応させる有限加法的確率測度であり，$P(\mathbf{N})=1$, $P(\{n\})=0\ \ \forall n\in\mathbf{N}$, より完全加法性は満たさない。また，$P(\mathbf{N}[n])=0\ \ \forall n\in\mathbf{N}$, $\cup\{\mathbf{N}[n]\mid n\in\mathbf{N}\}=\mathbf{N}$より，単調収束定理が成立しない。このような$P$を自身の「確率」として採用する「個人」を，はたして「不合理である」として排除することができるのであろうか。つまり，「明白に損な選択をしている」とか，「計算上の間違いをおかしている」とかで，「不合理」と断定できるのであろうか。サヴェジ氏はこのようなPも個人的確率となり得ると判断しているのである。なおこのPと任意の$n\in\mathbf{N}$とに対して，$\mathbf{N}$に対する分割$(A(i)\ ;\ i\in\mathbf{N}[n])$で$P(A(i))=1/n\ \ \forall i\in\mathbf{N}[n]$を満たすものが存在する。

2．Lebesgue 式近似和

「世界，world」$\mathbf{S}$の「任意の」部分集合に対して実数値を対応させる有限加法的確率測度$\mathbf{P}$を任意に固定しておく。$\mathbf{P}(\emptyset)=0$かつ$\mathbf{P}(\mathbf{S})=1$かつ$0\neq 1$より$\mathbf{S}$は空ではない。$\mathbf{S}$の任意の部分集合Aに対して，$\mathbf{P}$に関する「積分」$\int_A$を定義するのだが，A上で定義されている実数値を取る（A上で）有界な「任意の」関数fに対して値$\int_A f$を，Lebesgue式の近似和の「極限」で定めることとする。

下から上へと増大する「縦軸」を想定しておく。$a\leqq f(s)\leqq b\ \forall s\in A$を満たす実数$a, b, a\leqq b$, が存在する。区間［$a, b$］に対する分割$\Delta=(I_0,\cdots,I_n)$, $n\geqq 0$, を考える。ここで各I_iは空でない区間とし，これらは下から上へと並んでいるものとする。また各I_iは上下の端点によって規定されるが，これら各がその区間に属するか否かは各区間の事情による。また，点列$\xi=(\xi_i\ ;\ i=0,\cdots,n,)$で，各$i$に対して$\xi_i\in[\inf I_i, \sup I_i]$を満たすものを考える。このような点列を分割$\Delta$に対応する点列と呼ぶ。そこでLebesgue式の近似和，

$$S(\xi,\Delta)=\sum_{i=0}^{n}\xi_i\mathbf{P}(A\{f\in I_i\}),$$
$$A\{f\in I_i\}=\{s\in A\mid f(s)\in I_i\},$$

を導入する。特に，$\xi_i=\sup I_i$, $i=0,\cdots,n,$の場

合の近似和を$U(\Delta)$，infの場合を$L(\Delta)$とする。ここで次が従う。

$$aP(A) \le L(\Delta) \le S(\xi,\Delta) \le U(\Delta) \le bP(A).$$

また分割の幅 $|\Delta|$ を $|\Delta| = \max(\sup I_i - \inf I_i ; i = 0,\cdots, n)$ と定義しておく。

ところで仮にfの「積分値」$I(f, a, b)$ が「定義」されたとして，分割の列 $(\Delta(n); n \in \mathbf{N})$ で $|\Delta(n)| \to 0,\ n \to \infty$，を満たすもので，但し $\xi(n)$ は $\Delta(n)$ に対応するある点列として，

$$S(\xi(n), \Delta(n)) \to I(f, a, b),\ n \to \infty,$$

を満たさないものが存在するとすれば，その「定義」には問題があることとなるであろう。しかも，「積分値」はa, bの取り方には依存しないはずである。この点に注意して，次に「積分」を定義することとする。

3．積分の定義

分割$\Delta =(I_0, \cdots, I_n),\ n \geqq 0,$が上に閉じているとは，各区間$I_i$の上端$\sup I_i$がその区間自身に属することである。上に閉じている分割Δ及びΔ'の分点を合併することによって得られる上に閉じている分割を考えることにより，任意の上に閉じている分割Δ及びΔ'に対して，$L(\Delta') \leqq U(\Delta)$となることがわかる。すると，上に閉じている分割の全体にわたるsup及びinfを考えると，$\sup_\Delta L(\Delta) \leqq \inf_\Delta U(\Delta)$となる。一方有限加法性により，

$$0 \le U(\Delta) - L(\Delta) \le |\Delta|\,\mathbf{P}(A),$$

となるが，ここで任意の正の数εに対してあるΔが存在して $|\Delta| < \varepsilon$ とできるので，

$$\sup_\Delta L(\Delta) = \inf_\Delta U(\Delta)$$

が従い，この値をIとすると，

$$0 \le U(\Delta) - I \le U(\Delta) - L(\Delta) \le |\Delta|\,\mathbf{P}(A)$$

となる。

次に$\Delta= (I_0 ,\cdots, I_n)$を一般の分割として，$I_i$の上端がこの区間に属していればそのままとし，属していなければ上の区間からその点を分離してこの区間に添加するという変形を，各I_iに対して行い，このようにして得られる分割をΔ^*とする。また，$\xi = (\xi_i ; i=0, \cdots, n)$を$\Delta$に対応する任意の点列とすると，近似和$S(\xi, \Delta)$に対して，

$$|S(\xi,\Delta) - U(\Delta^*)| \le |\Delta|\,\mathbf{P}(A)$$

となる。従って，

$$|S(\xi,\Delta) - I| \le 2|\Delta|\,\mathbf{P}(A)$$

が従う。これより，任意の正の数εと $|\Delta| < \varepsilon/2$ を満たす任意の分割Δと，それに対応する任意の点列ξとに対して，$|S(\xi,\Delta) - I| \le \varepsilon$となる。従って，$I$は前節で述べた収束に関する要請を満たしている。

但し，Iは見掛け上a, bに依存しているので，これを$I(a, b)$と記すと，別のa', b'に対して，$a''=\max(a, a')$，$b''=\min(b, b')$と置くと，

$$I(a,b) = I(a'',b'') = I(a',b')$$

となり，Iはa, bの取り方に依存しないことがわかる。このIを$\int_A f$と表記する。近似和の定義により，平均値の定理，

$$a\mathbf{P}(A) \le \int_A f \le b\mathbf{P}(A)$$

が成立している。

また上に閉じている任意の分割Δに対して，

$$\begin{aligned} U(\Delta) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} \sup I_i P(f \in I_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} -\inf[-I_i] P(-f \in [-I_i]) \end{aligned}$$

$$=-\sum_{j=0}^{n}\inf[-I_{n-j}]P(-f\in[-I_{n-j}])$$

なので，$|\Delta|\to 0$ として，$\int_A f=-\int_A(-f)$ となり，

$$\int_A(-f)=-\int_A f$$

を得る。

また $(A_i\,;i=1,\cdots,n),n>0$, を A に対する分割として，$(a_i\,;i=1,\cdots,n)$ を互いに異なる実数値からなる列とし，f を各 A_i 上で値 a_i を取る関数とすると，$\int_A$ の定義により，

$$\int_A f=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{P}(A_i)$$

が従う。特に定数 c に対しては，$\int_A c=c\mathbf{P}(A)$ だが，左辺の c は A 上で値 c のみを取る関数である。

4．定義域に関する加法性

A, B を共に S の部分集合とし，f を $A\cup B$ 上で定義されている有界な実数値関数とすると，

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f$$

が従う。ここで右辺の f は，順に $f|A, f|B$ である。実際，任意の分割 Δ に対して，A と B とが互いに排反ならば，

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}((A\cup B)\{f\in I_i\})\\&=\mathbf{P}(A\{f\in I_i\}\cup B\{f\in I_i\})\\&=\mathbf{P}(A\{f\,|\,A\in I_i\})+P(B\{f\,|\,B\in I_i\})\end{aligned}$$

となるので，近似和 $U(\Delta)$ は，A, B の各へと分割される。そこで $|\Delta|\to 0$ とすればよい。

f を A 上の有界関数として，$(A_i\,;\,i=1,\cdots,n)$ を A に対する分割とすると，数学的帰納法により，

$$\int_A f=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}f$$

が従う。また $\int_\varnothing f=0$。

なお B が A の部分集合である場合，A 上で定義されている B の指示関数を，$I_{B,A}$ と記す。つまり $I_{B,A}(x), x\in A$, は，x が B に属しているか否かに応じて，各値 1 か 0 を取る。すると，

$$\int_A I_{B,A}f=\int_B f$$

が従う。但し，右辺の f は $f|B$ である。さらにまた，$B\subset A$ で g の定義域は B とし，B 上で g に一致し，他の A 上で値 0 を取る g^* を考えると，$\int_B g=\int_A g^*$ となる。なお，$I_{B,\mathrm{S}}$ は単に I_B と記される。

5．順序を弱く保つ

f 及び g を A を定義域とする（実数値を取る）有界関数とし，$f(x)\leqq g(x)\,\forall x\in A$ とする。この場合，

$$\int_A f\leq\int_A g$$

が従う。実際，分割 $\Delta=(I_i;i=0,\cdots,n),n\geqq 0$, に対して $A_i=A\{f\in I_i\}$ と置くと，

$$\inf I_i\leq f(x)\leq g(x)\forall x\in A_i$$

となるので，平均値の定理により，

$$\inf I_iP(A_i)\leq\int_{A_i}g$$

であり，定義域に関する加法性を使えば，

$$\sum_{i=0}^{n}\inf I_iP(A_i)\leq\sum_{i=0}^{n}\int_{A_i}g=\int_A g$$

となる。左辺は f に対する近似和で Δ は任意。従って，結論を得る。

特に $0\leqq f(x)\,\forall x\in A$ とすると，$\int_A f\geqq 0$ で

ある。しかし，冒頭の節で言及した P に関しては，$f(x)=1/x,\ x\in\mathbf{N}$, とすると，$f(x)>0\ \forall x\in\mathbf{N}$ かつ $\int_{\mathbf{N}} f=0$ である。

６．線形性

c を定数，f を A 上の有界関数とすると，

$$\int_A (c+f)=c\mathbf{P}(A)+\int_A f$$

となる。但し，左辺の c は A 上で値 c のみを取る関数である。実際，Δ を第２節と同様の（但し，$[a+c,\ b+c]$ に対する）分割とすると，$c+f$ に対する近似和 $U(c+f,\ \Delta)$ は，

$$\begin{aligned}&U(c+f,\Delta)\\&=\sum_{i=0}^{n}\sup I_i\mathbf{P}(A\{c+f\in I_i\})\\&=\sum_{i=0}^{n}(c+\sup[I_i-c])\mathbf{P}(A\{f\in[I_i-c]\})\\&=cP(A)+\sum_{i=0}^{n}\sup[I_i-c]\mathbf{P}(A\{f\in[I_i-c]\})\end{aligned}$$

と書ける。二項目の総和は f に対する近似和 $U(f,\ \Delta')$ だが，ここで Δ' は $[a,b]$ に対する分割であり，$|\Delta|=|\Delta'|$ である。従って，$|\Delta|\to 0$ とすることで，結論の式が得られる。

f,Δ は第２節と同様とし，g を A 上の有界関数とする。

$$f(x)+g(x)\le\sup I_i+g(x),\forall x\in f^{-1}[I_i],$$

となる。故に，

$$\begin{aligned}&\int_{f^{-1}[I_i]}(f+g)\le\int_{f^{-1}[I_i]}(\sup I_i+g)\\&=\sup I_i\mathbf{P}(A\{f\in I_i\})+\int_{A\{f\in I_i\}}g\end{aligned}$$

となり，Σ_i をほどこすと，定義域に関する加法性を使って，

$$\begin{aligned}&\int_A(f+g)\le\sum_{i=0}^{n}\sup I_i\mathbf{P}(A\{f\in I_i\})\\&+\int_A g=U(\Delta)+\int_A g\end{aligned}$$

を得る。同様にして，

$$L(\Delta)+\int_A g\le\int_A(f+g)$$

が得られる。従って，$|\Delta|\to 0$ として，

$$\int_A(f+g)=\int_A f+\int_A g$$

が従う。

また，定数 a に対して，

$$\int_A af=a\int_A f$$

となる。実際，a を正とすると，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}\sup I_i\mathbf{P}(A\{f\in I_i\})\\&=a^{-1}\sum_{i=0}^{n}\sup[aI_i]\mathbf{P}(A\{af\in[aI_i]\})\end{aligned}$$

より，$\int_A f=a^{-1}\int_A af$ となり，従う。$a=0$ だと明らか。a が負の場合は，第３節で示しておいた $\int_A(-f)=-\int_A f$ を利用すれば，正の場合に帰着する。

以上により $\int$ の線形性が従うが，数学的帰納法により，

$$\int_A\sum_{i=1}^{n}a_i f_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\int_A f_i$$

となる。

７．期待値及び半期待値という言葉

以上により，$\int$ が実際に「積分」であることが確認された。また，$\int_A f$ を，

$$\int_A f(s)\mathbf{P}(ds)$$

と表記しても良いであろう。特に，

$$E(f)=\int_{\mathbf{S}} f(s)\mathbf{P}(ds)$$

と置き，$E(f)$ を f の「期待値，expectation」と呼ぶこととする。但し，ここに f は **S** 上の有界関数である。さらに，

$$E(f,A)=E(I_A f)=\int_A f$$

と置く。ここで二番目の等号は第 4 章の末尾の段落より従う。また右辺の f は $f|A$ である。この $E(f,A)$ の呼称が見当たらないが，f の A 上の「半期待値，partial expectation」とでも呼んではいかがであろうか。また以上で，サヴェジ氏の期待値作用素 $E(\cdot)$ が「正式に」導入されたこととなる。

８．効用関数の有界性

サヴェジ氏の公準系では，第七公準 **P7** を利用することによって，個人的効用関数の有界性が従う。彼の期待値作用素 E はこの「有界効用」に作用するのである。つまり，個人的効用関数 **U** とその個人の行為 **f** とに対して，

$$E(U\circ f)=\int_{\mathbf{S}} U(f(s))\mathbf{P}(ds)$$

を考えるのである。個人の価値尺度が上に有界でないのならば，即ち，いかなる有限の限界をも越えて増大し得るのならば，St. Petersburg paradox に突き当たるので，「その個人」は「事実上の不合理」に陥ることとなる。つまり彼は，「コモン・センス，common sense」に反する，「事実上は明白に損である」選択を為すに至るのである。つまり効用関数は上に有界でなければならない。同様にして，効用関数は下にも有界である。特に「その個人」の「貨幣，money」に対する効用関数は有界なのである。

９．補遺 1―区間の概念―

第 2 節で実数直線 **R** の「区間，interval」に言及したが，そこではサヴェジ氏の「基礎論」の付録 2（266 頁）の概念規定を念頭に置いた。つまり，**R** の部分集合 I で，

$$\forall x,y\in I\,\forall z\in\mathbf{R}(x\le z\le y\to z\in I)$$

を満たすものを（**R** における）区間と呼ぶのであり，サヴェジ氏が表で示しているように，Dedekind 切断の原理により，区間たちは，$\varnothing$, **R**, $\{x\}$ という「極端な」場合をも含めて，11 通りの「型」に分類されるのである。

10．補遺 2―Banach 極限―

冒頭の節で言及した Lim につては，Royden（1988）の 228 頁，問 20，224 頁から 225 頁にかけての 5 命題，及び 223 頁から 224 頁にかけての 4 定理を参照されることを勧める。この定理とは，Hahn-Banach の拡張定理であり，また命題の方はその「精密化」である。なお，Yosida（1971）の 104 頁の定理では，添数集合が一般の有向集合に置き換えられたために，$\mathrm{Lim}(\xi_n;n\in N)=\mathrm{Lim}(\eta_n;n\in N),\eta_n=\xi_{n+1}\forall n\in N$, という基本性質が欠落している。

11．補遺 3―選択公理―

通常 Hahn-Banach の拡張定理は，選択公理（と同等な命題）を利用して導出される。しかし，田中（1999）の 125 頁から 131 頁で議論されているように，この拡張定理そのものは選択公理より弱い命題から導出できる。またサヴェジ氏が「基礎論」第 3 章第 4 節，42 頁，で言及しているように，Banach-Tarski paradox の問題がある。つまり，「すべての」事象に「確率」を配分するのならば，選択公理によって導出される「集合」も「確率」を持つわけだが，そこで厄介な事態が生じ得るのである。サヴェジ氏自身が注意しているように，**S** 上の（うまく選ばれた）完全加法族に事象を制限することが，「数学」上は得

策であるかもしれない。だが彼自身は結局の所そうはしなかったのである。「その個人」が統計家であるのならば，当然実証的な傾向を持っているであろうから，選択公理を無条件で受け入れるとは考えづらい。「彼」は結局選択公理を制約して行く道を選ぶのではなかろうか。

参考文献

Royden, Halsey Lawrence, *Real Analysis, Third Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1988. 初版は 1963 年である。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. 初版は 1954 年に Wiley, New York, から出ている。これはサヴェジ氏の「基礎論」である。また，園(2001, 2007)を一瞥して頂ければ幸いである。

Yosida, Kôsaku, (吉田 耕作), *Functional Analysis, Third Edition*, Springer-Verlag, New York, 1971. 初版は 1965 年である。

園 信太郎，『サヴェジ基礎論覚書』，岩波出版サービスセンター，東京，2001 年。

園 信太郎，『サヴェジ氏の思索』，岩波出版サービスセンター，東京，2007 年。

田中 尚夫，『選択公理と数学　増補版』，遊星社，東京，1999 年 9 月 13 日。初版は 1987 年 5 月 17 日だが，増補版第 1 刷は 1999 年である。

辻 正次，『実函数論』，槇書店，東京，1962 年 10 月 1 日。但し，筆者の手元にあるのは第 1 版第 5 刷 1970 年 7 月 1 日である。この労作の第 5 章の 110 頁から 122 頁にかけての議論を大いに参考にした。

2011 年 11 月 24 日(木)