



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	空間回路網法による固体内弾性波動の時間応答解析に関する研究
Author(s)	佐藤, 雅弘
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第3934号
Issue Date	1991-06-28
DOI	https://doi.org/10.11501/3085853
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/49716
Type	doctoral thesis
File Information	000000242525.pdf



空間回路網法による固体内弾性波動の
時間応答解析に関する研究

佐藤 雅弘

①

空間回路網法による固体内弾性波動の
時間応答解析に関する研究

佐藤 雅弘

目次

序論

1 .	はじめに	-----	1
2 .	弾性波動の時間応答解析	-----	3
3 .	空間回路網法	-----	8
4 .	Bergeron法	-----	1 2
5 .	本論文の構成	-----	1 8

第 I 編 空間回路網法による固体内弾性波動の時間応答解析

第 1 章 空間回路網法の 2 次元等方弾性体への適用

1 - 1 .	まえがき	-----	2 1
1 - 2 .	2 次元等方弾性体の等価回路表示	-----	2 2
1 - 3 .	Bergeron法による時間応答解析の定式化	-----	3 7
1-3-1.	1 次元線路のBergron表示	-----	3 7
1-3-2.	本等価回路へのBergeron法の適用	-----	3 7
1 - 4 .	解析結果	-----	4 4
1 - 5 .	むすび	-----	6 0

第 2 章 3 次元等方弾性体への適用

2 - 1 .	まえがき	-----	6 2
2 - 2 .	3 次元等方弾性体の等価回路表示	-----	6 2

2 - 3 .	時間応答解析の定式化	7 2
2 - 4 .	解析結果	7 5
2 - 5 .	むすび	8 1

第3章 異方性弾性体への適用

3 - 1 .	まえがき	8 3
3 - 2 .	異方性を含む弾性体の基本分布等価回路表示 ---	8 4
3-2-1.	基本分布等価回路	8 4
3-2-2.	回路定数と弾性体定数との対応	8 9
3-2-3.	等価回路と異方性弾性体との等価性	9 1
3 - 3 .	Bergeron法による時間応答解析の定式化	9 6
3 - 4 .	解析結果	9 8
3 - 5 .	むすび	1 1 1

第4章 自由境界条件の設定

4 - 1 .	まえがき	1 1 2
4 - 2 .	解析対象とした半無限弾性体モデル	1 1 2
4 - 3 .	解析結果と考察	1 1 7
4 - 4 .	むすび	1 2 1

第5章 流体内および固体内波動の統一的解析

5 - 1 .	まえがき	1 2 3
5 - 2 .	流体内および固体内波動の等価回路表示とその統一的扱 い	1 2 4

5 - 3 .	解析結果	-----	1 3 0
5 - 4 .	むすび	-----	1 4 3

第 II 編 空間回路網法による電磁気系と結合する弾性波動の 時間応答解析

第 1 章 空間回路網法の 1 次元超音波振動子への適用

1 - 1 .	まえがき	-----	1 4 7
1 - 2 .	解析手法	-----	1 4 8
1 - 3 .	解析結果	-----	1 5 3
1 - 4 .	むすび	-----	1 5 9

第 2 章 圧電セラミック平板への適用

2 - 1 .	まえがき	-----	1 6 0
2 - 2 .	圧電セラミック平板の等価回路表示	-----	1 6 1
2-2-1.	圧電セラミック平板の圧電基本式	-----	1 6 1
2-2-2.	圧電セラミック平板の基本等価回路	-----	1 6 4
2 - 3 .	Bergeron法による時間応答解析の定式化	-----	1 7 1
2 - 4 .	解析結果	-----	1 7 3
2 - 5 .	むすび	-----	1 9 0

結論	-----	1 9 3
----	-------	-------

謝 辞	-----	1 9 8
文 献	-----	1 9 9
付 録	-----	2 0 9
発 表 論 文 目 録	-----	2 1 1

序論

1. はじめに

弾性波の工学的利用がめざましく、洗浄や溶接といったその波動エネルギーを利用した動力的応用として、また遅延線、フィルタなどの電子デバイス、医療診断、探傷などの計測手段といった波動伝播特性を利用した通信的応用として有効性を発揮している⁽¹⁾。

弾性波動の時間応答解析は波動の物理的イメージの把握に役立つため、それらの装置、機器やデバイスの実動作の把握に不可欠である。更にそれらの設計指針にも有効である。特に近年のIC技術の発達に伴って過渡特性の把握が重要となり、時間応答解析の必要性が増している。一方機器全体の高性能化に伴い、その基本素子となる超音波デバイスの性能向上の要求が高くなり構造も複雑化してきている。従って、デバイス開発には低コスト化を含めて複雑な形状を持つ弾性体の効率的解析が必要となる。しかし1次元か単純な形状でない限り、現在のところ弾性波動の振舞を解析的に解くのは困難である。従って複雑な形状の弾性体を伝播する弾性波動の挙動を解析するには数値計算による手法が有効となる⁽²⁾。弾性波動の時間応答数値解析手法としては主に地震波動の研究を中心に差分法が用いられ⁽³⁾、また有限要素法⁽⁴⁾や境界要素法⁽⁵⁾といった手法による研究も行なわれている。特に最近のスーパ-コンピュータに代表されるデジタル計算機の発達に伴い数値解析手法の研究が盛んであり、弾性波の応用の中で特に超音波非破壊検査の分野では、パルス波形を解析する必要性から差分法^{(6)~(9)}や有限要素法^{(10), (11)}等を用いた時間軸上での解析の研究が進められている。現在行なわれている数値解析手法はそれぞれに有効な手法であるが、アルゴリズムが複雑であること、大次元のマトリクスを

解く必要があること，また系に成り立つ偏微分方程式をそのまま数値的に解く手法であるため電気音響変換部を含めた統一的な電氣的，音響工学的扱いに不便であるなど種々の欠点も有している。

電磁氣的エネルギーと機械的エネルギーの変換媒体となる電気機械変換素子（以下変換素子と呼ぶ）は超音波の発生に不可欠である。変換素子では電磁気系と機械系が相互に影響を及ぼしあうため，その解析はより複雑となる。それら変換素子の時間応答解析はこれまで主に等価回路を用いた1次元解析が行なわれてきた⁽¹²⁾。この場合，電氣量が関係していることから等価回路表示は機械系を含めた統一的扱いに有効である。そのような電磁気系と結合した弾性波動（以下結合波動と呼ぶ）の2次元以上の解析は，定常状態に関して数値解析を用いて行なわれるようになってきた⁽¹³⁾，⁽¹⁴⁾。しかし時間応答解析の研究はまだ少ないようである。

吉田らは最近，電磁界の時間応答解析手法として空間回路網法を提案した⁽¹⁵⁾，⁽¹⁶⁾。その方法は電磁界を微小1次元線路とそれらの接続する節点よりなる3次元空間分布回路網で表示し，各1次元線路の時間軸上での定式化にBergeron法を用いることで特に媒質条件を含めた統一的な節点方程式による解析手法を実現したものである。この手法により従来困難であった媒質の分散特性や異方性を含めた時間応答解析が可能となった。本研究はその空間回路網法（以下本手法と呼ぶ）の基本概念を固体内を伝播する弾性波動に適用し，その妥当性と有効性を検討したものである⁽¹⁷⁾～⁽¹⁹⁾。すなわち弾性波動を近似する微小同一長さ，同一特性の1次元線路を組み合わせた2次元および3次元空間等価回路網を構成し，各1次元線路と媒質特性を表す集中定数回路素子にBergeron法を適用して時間応答解析の定式化を行なう。本手法は以下のような特徴を持っている。弾性波動を等価回路表示することにより音響工学における扱いと合致したプログラム構成時における特性の電気回路論的類推による考察が容易になる。また電氣量を表現する等価回路網と弾性波動の等価回路網

とを結合させることにより圧電デバイスのような電気機械変換素子にも容易に適用可能である⁽²⁰⁾。特に本手法は等価回路による考察にその特徴を持つため電気音響変換素子に対しては他の手法に比べてより扱いやすい手法であると思われる。その等価回路はそのまま弾性波動を構成する応力や粒子速度の生ずるメカニズムの情報をすべて含んでおり、定常解も過渡解も考察できる。すなわち等価回路を用いたデジタルシミュレーションが可能となる。更に電気的入出力装置を含めた統一的な時間応答解析に有効と考えられる。一方、弾性波動のすべての変数を考慮したベクトル解析手法であることからパワー量やインピーダンス、伝播定数など弾性波動に関するあらゆる情報を一度に計算することができる。また時間軸上の定式化にBergeron法を用いたことにより、各節点ごとに差分法における陽公式と同様な逐次的定式化が可能となり高速演算が実現されるなど有効な点が多い。

以下、2.において弾性波動の時間応答解析の現状を簡単に述べ、3.では本論文の主題である弾性波動の空間回路網法による取扱い、4.でその時間軸上での定式化に用いるBergeron法について説明を行なう。最後に5.において本論文の構成を示す。

2. 弾性波動の時間応答解析

近年弾性波動の工学的利用が盛んである。まず波動伝播特性を利用した通信的応用として魚群探知機、ソナー用超音波発生素子、超音波探傷、超音波診断装置などといった計測への利用や超音波遅延線、フィルタ、共振子といった電子デバイスへの利用が挙げられる。また一方超音波洗浄、集塵、化学作用や超音波溶接、モータといった波動エネルギーを利用した動力的な応用も行なわれており、弾性波の応用範囲は広い⁽¹⁾。工学的に用いられる波動のもう一つの代表は電磁波である。電磁波は広い分野で応用

されているが，計測手段として見た場合水のようにあまり浸透できない媒質が数多くある。そういった場所では弾性波が有効な手段となる場合が多い。また弾性波は電磁波に比べその速度が $1/10^5$ ほどなので波長が極端に短いため，電子デバイスとして利用すれば製品を小型化できるという利点がある。このようなことから今後ますます弾性波動の工学的利用が盛んになると考えられる⁽²¹⁾。

弾性波動の解析の中で時間応答解析は弾性波ハールスを用いた計測分野（例えば地震波動の観測や超音波探傷，診断など）における波形予測に必要であり，また遅延線などの電子デバイスにおける波形ひずみや実動作の把握などに有効である。さらに時間応答解析結果の可視化は波動伝播の物理的イメージの把握の助けとなる。従って様々なデバイス中における波動現象の知見を得ることができ，それらの設計指針を与える。また各種機器やデバイスの高性能化の要求が強くなり構造もますます複雑化してきているため，試作や実験による開発には多大の経費が必要となる。従って設計した製品を実動作に近い状態でシミュレーションできれば開発の低コスト化，効率化に有効であると考えられる。特に最近の機器のデジタル化に伴うハールス技術の発達により時間応答解析の必要性が一段と増している。

弾性波動の時間応答解析を行なうことはすなわちフックの法則とニュートンの運動方程式から導かれる偏微分方程式を初期値，境界値問題として解くことである⁽²⁾。また例えば圧電媒質のような電氣的エネルギーと弾性的エネルギーとが結合している系では圧電基本式のような相互の関連を記述した式がそれに加わる⁽²²⁾。それらの偏微分方程式は1次元の場合かごく限られた形状の場合以外は解析的に解くことが難しい。2次元以上の時間応答解析における解析的な扱いとしてLambが行なった励振源と発生する弾性波動の関連を考察する研究がある。この研究は近年も続けられており，それらは総称してLambの問題と呼ばれている⁽²³⁾。しかし現在のところ解析的な値は半無限弾性体というごく簡単な形状以外には見つかった

ておらず複雑な形状に対しては数値計算にたよらざるを得ない。

固体内の弾性波動の時間応答解析は従来より地震波動の研究において盛んであり、差分法や有限要素法、境界積分方程式法（境界要素法）といった数値解法を用いて行なわれている。工学的分野においても土木、建築の分野における建造物の振動解析、超音波探傷における波形予測のための差分法、有限要素法を用いた解析や超音波顕微鏡の解析法の研究などが行なわれている。

差分法が弾性波動のコンピュータ解析に用いられたのは1966年のLloydとRedwoodによる圧電平板のモード解析が最初と考えられる⁽²⁴⁾、⁽²⁵⁾。その後差分法による弾性波動の時間応答解析はAlterman⁽²⁶⁾、Boor⁽²⁷⁾、佐藤⁽²⁸⁾らにより地震波動の解析という主に地球物理学的目的に適用されてきた。一方春海により超音波非破壊検査への適用の有効性が指摘された⁽⁶⁾。差分法は偏微分方程式の数値解法としては非常に汎用性のある手法であり、数値計算が盛んになった初期のころから研究され誤差論も確立している⁽²⁹⁾。また定式化のアルゴリズムも容易であり、安定性を維持するために離散時間の大きさに制約を受けるが、時間差分に対して陽公式を用いれば離散点ごとの逐次計算が可能となる。しかし差分法においてはそのままでは複雑な境界条件に対応できないという欠点を有しており、比較的単純な形状に適用が限定される。その欠点を解消するために提唱されたのが松沢、佐藤、春海らによる質点系モデルを用いた解析法である^{(7)~(9)}。この手法は質点同士をバネかそれに類似したものでつなぐことで弾性体を等価表現したもので、モデルが弾性体の物理的特性と若干異なる。しかし時間応答の定式化においては差分法による定式化とほぼ同一となり、かなり複雑な境界問題にも適用可能となる。だがその定式化に経験的な要素を必要とし、質点を格子状に並べるので曲線の境界は階段状の近似となる。そこで大槻らはより滑らかに境界を近似するため、境界部分だけに有限要素法を適用してその他の空間は質点系モデルにより計

算する結合解法を提案し，地下空洞周辺の波動伝播機構の解析に適用した⁽³⁰⁾。

有限要素法は解の領域を微小要素に分割し，要素内の値を適当な関数によって近似してその節点の値で代表させ，要素の特性を変分原理等で定式化し，要素間の連続や境界条件を考慮して領域全体の連立方程式を解いて解を求める方法である⁽⁴⁾。手法そのものの研究はコンピュータが発達する以前の1940年代から行なわれており，1960年代からコンピュータの発達に伴い工学的に盛んに利用されるようになった。その研究の初期から構造解析，すなわち弾性体の解析を目的としていた。その後各方面の研究が進み現在では電気工学の分野でも圧電媒質や電磁波などの解析に数多く応用されている⁽³¹⁾。弾性波動の時間応答解析は大次元のマトリクスを解く必要があるためか比較的活発でないようであり，最近清水らによる圧電円柱の過渡応答解析の研究⁽³²⁾やWinklerらによる超音波顕微鏡解析⁽³³⁾，Ludwingらによる非破壊検査への応用⁽¹⁰⁾，⁽¹¹⁾などの研究が見られるようになってきた。有限要素法によれば差分法に比べて境界を滑らかに近似でき境界付近の計算も比較的簡単で要素数も少なくすむといわれている。しかし大次元のマトリクスを解く必要があるため時間応答解析に対しては固有値を用いたモード重ね合わせ法や時間に関して直接定式化せずに差分を用いるなど種々の工夫がなされている。従って差分法による時間応答解析法に比べて計算が複雑で計算量も多い。

以上の解法は領域全体を離散化の対象とする領域型解法である。これと対をなす解法に境界積分方程式法もしくは境界要素法と呼ばれる境界型の解法がある。これは考えている問題の支配微分方程式を境界上の積分方程式に変換し，これを離散化して解析する手法である⁽³⁴⁾。非定常な弾性問題についてはDoyleがラプラス変換を用いる積分方程式の基礎的研究⁽³⁵⁾を行ない，その後CruseとRizzoが境界要素法による離散化と解法を提案し⁽³⁶⁾，続いてCruseにより半無限弾性体の過渡応答解析が行な

われた⁽³⁷⁾。このように時間変数に対してラプラス変換あるいはフーリエ変換を施すことによって方程式を楕円型に変換する方法と、時間依存性を示す基本解を用い適当な仮定のもとに時間積分を行なう方法が行なわれる。この手法も他の手法と同様に構造物の振動解析などに応用されている。この手法の特徴はまず境界型であることから他の手法に比べ次元を一つ減らして解析できる点であり、離散点の数を減らして計算できるので特に3次元解析には有効である。また無限遠の寄与も定式化に組み込まれているので開放領域問題や放射問題に適している。しかし微分方程式を積分方程式に変換するのに数学的手続きが必要であり、数値積分を含むため特異点での積分の問題など誤差の評価が難しい。また媒質が非均質な場合には不向きであり、内部の点は境界上の値を使って再度計算する必要がある。従って他の領域型の解法と組み合わせて計算する結合解法の研究も盛んである⁽³³⁾。

圧電媒質のような電磁氣的エネルギーと弾性的エネルギーの結合した系における時間応答解析はその複雑さからこれまで1次元解析が主であり、電氣量に関係していることもあって初期の段階から等価回路表示による解析が一般に行なわれている⁽¹²⁾。等価回路表示は後にも述べるように弾性波動伝播の物理イメージの把握に有効であり、電氣工学、音響工学の体系と合致しているためそれらの理論を利用できる。しかし1次元に限定してもかなり複雑な回路となり、これを厳密に解くのは容易ではない。2次元以上については先に述べた差分法や有限要素法等による解析が可能と考えられるが、現在のところデバイスの設計を目的とした定常状態の解析が主で時間応答解析の研究はまだ少ない⁽³²⁾。

以上見てきた解法はいずれも3次元偏微分方程式を直接解く方法のため、従来から電氣工学の分野で広く行なわれている1次元弾性体もしくは平面弾性波動の電氣的アナロジーによる音響工学的扱いを直接できない不便さがある。また電氣音響変換機器を含む電氣系を介した入出力特性を

定式化に組み込み総合的に計算するのに手間がかかる。特に圧電媒質などの変換素子は先に述べたように、その取り扱いの複雑さから2次元以上の時間応答解析の研究はまだ少ない。しかし音響波動と同様に等価回路表示により解析できれば、特に電子デバイスに適用されることが多いことから有効であると考えられる。弾性波動の等価回路による解析の有効性は従来より論じられているけれどもそれらの多くは特定の周波数もしくはモードを対象にしたものが多く、時間応答の解析には向いていない。最近、中村は弾性体を分布的等価回路によって表示しピコ線における弾性波動の解析を行なっている。しかし時間応答解析の定式化は差分法によっており手続きが煩雑で、まだ1次元解析しか行なわれていない⁽³⁹⁾、⁽⁴⁰⁾。

3. 空間回路網法⁽⁴¹⁾

吉田らは電磁界の時間応答解析法として空間回路網法を提案した⁽¹⁵⁾、⁽¹⁶⁾。その方法はJohnsらによって提案された伝送線路行列法(TLM法)⁽⁴²⁾、⁽⁴³⁾における電磁界の1次元線路による等価回路モデルを拡張し、各1次元線路の時間応答の定式化にBergeron法を用いることで特に媒質条件を含めた統一的な節点方程式による解析手法を実現したものである。Bergeron法は1949年にBergeronによって初め水槌の解析に提案された方法で⁽⁴⁴⁾、1次元線路上ではd'Alembertの解の性質により進行波、後退波に電圧電流変数よりなるある保存量が存在し、線路上の波動速度で移動することを利用して利用している。このようなBergeron法の電磁界の等価回路への適用により、各節点で等価電圧、電流が定義され他の手法では困難であった分極の運動方程式や媒質の分散特性さらに異方性を含めた時間応答解析が可能となった⁽⁴⁵⁾。本論文ではこの空間回路網法の弾性波動への適用を試みている。本手法における取り扱いの基本は2点に分けら

れる。まず第1に同一微小長さ，同一特性の1次元線路を3次元の場合は立方格子状に，2次元の場合には正方格子状に結合して弾性波動場を分布的等価回路網表示する。第2にその時間応答解析の定式化にBergeron法を適用し各節点ごとの差分法における陽公式と同等の逐次計算を実現していることである。

次に本手法の固体内弾性波動の取扱いの概念を簡単に説明する。まず等価回路の構成について説明する。2もしくは3次元空間に弾性体の変数である応力および粒子速度のおのおのの成分をフックの法則および運動方程式，また圧電体の場合には圧電基本式を区分的に満足するように等間隔に配置する。それらの配置点を節点とし，その間を同一性質の1次元線路でつなぎ1次元平面波が各節点で各方向に散乱するいわゆるホイアソンの原理の離散的表現を実現する。またこれは弾性波動の分布的等価回路表示ともなっている。さらに弾性体の媒質条件すなわち弾性定数などは各節点につないだ集中定数素子で実現する。すなわちこれは1次元線路においてその性質を調整するためのスタブと同様の働きを持つ。とくに弾性波動においてはその速度等の性質の違う2種類の波動が存在するためこの媒質条件の扱いが重要となる。また媒質が弾性的に異方性を持つ場合には各変数同士を相互誘導もしくは相互容量で結び付けることで表現する。更に圧電媒質のような電磁気エネルギーと機械エネルギーの結合した系を考えると，一般的にはその内部における波動は電磁波および弾性波が結合した形になると考えられる。しかし普通弾性波動の速度は電磁波のそれに比べ $1/10^5$ ほどであるため，ここでは弾性波動のみに着目し電磁界は時間的遅れのない空間分布するとして扱う。従って本手法では電磁気系はその性質を満足するような離散的な回路網表現を行ない，それを先に述べた弾性波動の分布的空間回路網に重ね合わせ，その間に結合を持たせて結合波動を近似する。

次に時間応答の定式化について説明する。上述のようにして得られた

等価回路の時間応答解析の定式化にBergeron法を適用する。すなわち図3-1に示す微小1次元線路に成り立つ1次元波動方程式のd'Alembertの解に基づいた次のような表現式を用いて定式化する。

$$V_k(t) + Z_0 \cdot I_k(t) = V_{k-1}(t - \Delta t) + Z_0 \cdot I_{k-1}(t - \Delta t) \quad (3.1a)$$

$$V_{k-1}(t) - Z_0 \cdot I_{k-1}(t) = V_k(t - \Delta t) - Z_0 \cdot I_k(t - \Delta t) \quad (3.1b)$$

第1式は進行波，第2式は後退波にそれぞれ対応している。次に各節点に負荷された集中定数素子には台形積分近似式を適用し，その離散時間を式(3.1a)，(3.1b)の離散時間 Δt と同じとして各節点におけるキルヒホッフ則と連立させて各節点ごとの時間軸上での定式化を行なう。現時間での各節点の電圧，電流はその周囲の節点やその節点での1離散時間前の電圧，電流の値を用いて定式化されるため差分法における陽公式と同等の逐次計算が実現される。ただし電磁気系と機械系の結合した媒質においては電磁気系をたんなる導体回路網として表現しているためそれと結合した弾性系の変数は結合した電磁気系の離散点の各変数と連立させて解く必要が出てくる。Bergeron法については次章で詳しく説明する。

次に本手法の特徴を述べる。まず第1に本手法は本質的には電気回路網解析に帰着するため回路網表示による利点を挙げることができる。すなわち弾性波動を電氣的類推により考察することができ，波動特性の物理的イメージを容易に得ることができる。その等価回路はそのまま波動を構成する応力，粒子速度等の情報をすべて含んでおり，媒質の等価回路素子を用いて定常解も過渡解も考察できるデジタルシミュレーションが可能となる。さらに境界条件は所定の反射，透過特性を持つ集中定数素子や分布線路を結合することにより扱える。また弾性波動の発生，検出は主に電氣的に行なわれるため等価回路表示はそれら電気入出力装置を含めた統一的解析に都合が良い。特に電気系と機械系の結び付いた圧電媒質のような電気機械変換素子に対して一層適用しやすい。更に回路を変形することにより特定の形状に対応したより簡単な等価回路を用いて解析を行なう

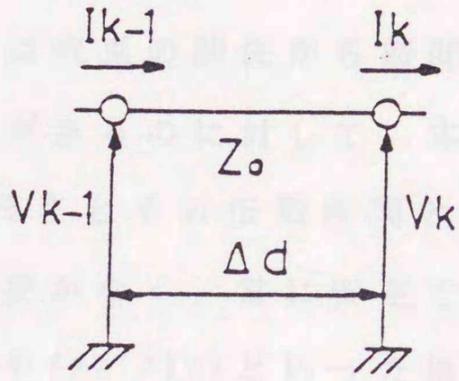


图3-1 基本1次元線路

ことも可能である。

第2に時間応答解析そのものについて本手法の特徴を考察する。時間応答解析の定式化にBergern法を適用することにより定式化アルゴリズムが簡単になり差分法の陽公式と同様な各節点ごとの逐次計算が実現できる。また集中リアクタンス素子の時間軸上での定式化に用いる台形近似は陽公式と陰公式の混合した式であり、数値計算上安定である。更に媒質条件の違いを各節点に負荷した集中定数素子で表現できるため特に全体のプログラムの変更なしにパラメータを変えるだけで種々の媒質に適用することが可能となる。ところで本手法は差分法や有限要素法と同様な領域型解法である。しかし他の手法では収束の関係から時間と空間の離散化に対しては特別な注意を払う必要があるのに対して、本手法では空間離散間隔と離散時間が1次元線路の長さとその伝搬時間という物理的關係で結ばれているため特に配慮の必要がなく、常に安定であることが知られている。安定度に対しては容量やインダクタンスといった集中定数素子に蓄積されるエネルギーが負にならないように配慮するだけで良い。更に本手法の特徴として応力と粒子速度の両方を一度に計算するベクトル解析法であるため一度の計算ですべての変数やそれに伴うパラメータなどを同時に計算することができるが挙げられる。同様に粒子速度および応力の両方を境界条件としているような複雑な系に対しても適応が容易である。一方、解析そのものは本質的には差分法と同等であるため通常満足な値を得る目安として波長の分割を10以上する必要がある。またベクトル解析法ということから他の手法に比べ必要な記憶領域すなわち計算容量が多くなる。

4. Bergeron法⁽⁴¹⁾

本手法における時間応答解析の定式化に用いるBergeron法について説明する。Bergeron法は1次元線路の進行波、後退波上ではd'Alembertの解

の性質より電圧，電流で構成される保存量が存在することを利用して
 いる。すなわち1次元線路の節点上の電圧，電流を隣接する節点の1離散時
 間前の値で表現する。そのとき離散時間 Δt は隣接する節点との距離と
 線路内を伝播する波動の速度で関係づけられたある決まった値とする。
 またその節点に集中定数素子が負荷されている場合はそれらの素子に成
 り立つ特性式を時間軸上で台形積分近似計算することにより現時間の電
 圧電流を1離散時間前の電圧，電流で表現し，そのときの離散時間を線
 路のBergeron表示式における離散時間と同じにする。これらの式とその
 節点に成り立つキルヒホッフ則とを連立させて定式化を行なえば Δt ごとの逐
 次計算が可能となる。以下1次元線路におけるBergeron表示式の導出と，
 台形近似によるリアクタンス素子の定式化について説明する。

1次元線路において単位長さあたりのインダクタンスを L ，容量を C とする
 き，線路中の電圧 V ，電流 I は互いに次の微分方程式で関連づけられる。

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (4.2)$$

1次元平面波は u を空間座標 x ，時間 t の関数とし， c を伝搬する波動の
 速度とすると，次式の波動方程式の形をとる。式(4.1)，(4.2)から電圧，
 電流に対してそれぞれ同型の波動方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

ここで波動速度 c は次式で表わされる。

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.4)$$

この式はd'Alembertの解としてよく知られているように次の形の一般

解を持つ。

$$u=f(x-ct)+g(x+ct) \quad (4.5)$$

上式の $f(x-ct)$ は x 軸の正の方向に速さ c で進む進行波を， $g(x+ct)$ は x 軸の負の方向に速さ c で進む後退波を表している。従って1次元線路の電圧，電流がこれと同型のd'Alembertの解を持つがそれらは独立ではなく式(4.1)，(4.2)から次のように関連づけられる。いま電圧，電流に対するd'Alembertの解をそれぞれ次式で与えるとき，

$$V(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \quad (4.6)$$

$$I(x,t)=f_1(x-ct)+g_1(x+ct) \quad (4.7)$$

式(4.6)，(4.7)の関係を用いて例えば式(4.1)を次のように変形する。ただし $\xi=x-ct$ とする。

$$-\frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = L \frac{\partial I}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \xi} = L \frac{\partial I}{\partial \xi} \cdot (-c) \quad (4.8)$$

$$\therefore f(x-ct) = Z \cdot f_1(x-ct) \quad (4.9)$$

ここで Z は線路の波動インピーダンスで，インダクタンス L と容量 C を用いて次式で与えられる。

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.10)$$

同様に

$$g(x+ct) = -Z \cdot g_1(x+ct) \quad (4.11)$$

が求まり，その結果式(4.6)，(4.7)を電圧に対するd'Alembertの式でまとめると次の関係式を得る。

$$V(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad (4.12)$$

$$I(x,t) = \frac{1}{Z} \{f(x-ct) + g(x+ct)\} \quad (4.13)$$

この結果から

$$V+Z \cdot I=2 \cdot f(x-ct) \quad (4.14)$$

$$V-Z \cdot I=2 \cdot g(x+ct) \quad (4.15)$$

が得られるが、これは進行波に対しては $V+Z \cdot I$ が、後退波に対しては $V-Z \cdot I$ が保存してそれぞれ進行することを表している。従って図3-1のような1次元線路について次式のようなBergeron表示式が得られる。

$$V_K(t)+Z_0 \cdot I_K(t)=V_{K-1}(t-\Delta t)+Z_0 \cdot I_{K-1}(t-\Delta t) \quad (3.1a)$$

$$V_{K-1}(t)-Z_0 \cdot I_{K-1}(t)=V_K(t-\Delta t)-Z_0 \cdot I_K(t-\Delta t) \quad (3.1b)$$

但し、 $\Delta t=\Delta d/c$ である。

Bergeron法においては1次元線路の各端子における回路変数として、電圧、電流の2変数を用いているため、各端子に接続された集中定数素子特性をその電圧、電流関係式で直接線路の逐次計算式に組み込むことが可能となる。抵抗やコンダクタンスは各時刻での電圧降下を $V_R(t), V_G(t)$ 、電流を $I_R(t), I_G(t)$ とすると次式で表される。

$$V_R(t)=R \cdot I_R(t) \quad (4.16)$$

$$I_G(t)=G \cdot V_G(t) \quad (4.17)$$

ここで R, G はそれぞれ抵抗、コンダクタンスの値である。またインダクタンスや容量などのリアクタンス素子はそれらの素子の電圧、電流の特性式を台形近似することで時間軸上で定式化され、線路特性のBergeron表示式と対応づけて一体の回路方程式を構成する。相互誘導を含むインダクタンスは図4-1に示すように端子電圧、電流を V_L, I_{L1}, I_{L2} と定義するとき特性微分式は

$$V_L(t)=L \frac{dI_{L1}}{dt} + M \frac{dI_{L2}}{dt} \quad (4.18)$$

で表されるが、 $t-\Delta t$ 時点から現時刻 t の間の積分形に直すと

$$\int V_L(\tau) d\tau = L \{I_{L1}(t)-I_{L1}(t-\Delta t)\} + M \{I_{L2}(t)-I_{L2}(t-\Delta t)\} \quad (4.19)$$

を得、積分計算を台形近似で表示すると次式を得る。

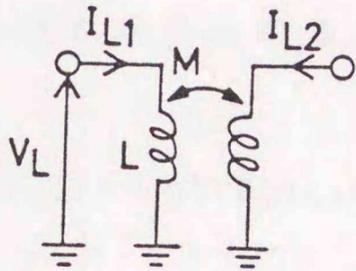


図4-1 相互誘導を含むインダクタンス回路

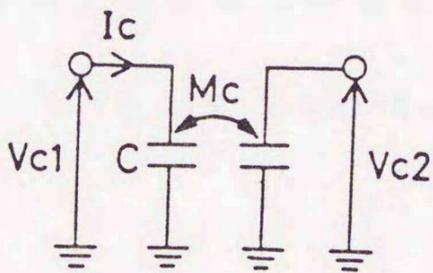


図4-2 相互容量を含むキャパシタンス回路

$$\frac{V_L(t)+V_L(t-\Delta t)}{2} \Delta t = L\{I_{L1}(t)-I_{L1}(t-\Delta t)\} + M\{I_{L2}(t)-I_{L2}(t-\Delta t)\} \quad (4.20)$$

上式を現時刻の項と， Δt 前の項とにまとめると次のインダクタンスに対する差分表示式を得る。

$$V_L(t) - R_L I_{L1}(t) - R_M I_{L2}(t) = -V_L(t-\Delta t) - R_L I_{L1}(t-\Delta t) - R_M I_{L2}(t-\Delta t) \quad (4.21a)$$

$$R_L = \frac{2L}{\Delta t}, \quad R_M = \frac{2M}{\Delta t} \quad (4.21b)$$

同様に容量についても図4-2に示す相互容量を持つ場合について端子電圧 V_{C1}, V_{C2} ，電流 I_C とすると

$$I_C(t) = C \frac{dV_{C1}(t)}{dt} + M_C \frac{dV_{C2}(t)}{dt} \quad (4.22)$$

で表される。上式の積分形は $t-\Delta t$ と現時刻 t との間で

$$\int I_C(\tau) d\tau = C\{V_{C1}(t) - V_{C1}(t-\Delta t)\} + M_C\{V_{C2}(t) - V_{C2}(t-\Delta t)\} \quad (4.23)$$

を得，その台形近似式は次のように与えられる。

$$\frac{I_C(t)+I_C(t-\Delta t)}{2} \Delta t = C\{V_{C1}(t) - V_{C1}(t-\Delta t)\} + M_C\{V_{C2}(t) - V_{C2}(t-\Delta t)\} \quad (4.24)$$

上式を $t-\Delta t$ 時刻の項と t 時刻の項に分けてまとめると次式を得る。

$$V_{C1}(t) - R_C I_C(t) + R_{MC} V_{C2}(t) = V_{C1}(t-\Delta t) + R_C I_C(t-\Delta t) + R_{MC} V_{C2}(t-\Delta t) \quad (4.25a)$$

$$R_C = \frac{\Delta t}{2C}, \quad R_{MC} = \frac{M_C}{C} \quad (4.25b)$$

以上のように台形近似で差分表現されたインダクタンスおよび容量の式は式(3.1a), (3.1b)の線路のBergeron表示式と同様，1離散時間前の電圧電流

値で現時刻の電圧電流値が決定されていく逐次計算式である。このとき時間差分間隔 Δt を各式で共通とし、各節点に成り立つキルヒホッフ則と連立させることにより、線路特性、集中定数素子を含めた統一的な回路方程式を時間軸上で定式化し時間応答を計算することができる。なお台形近似式は前進差分と後退差分の混合した形式であり、数値的に安定であることが知られている。

5. 本論文の構成

本論文を第I, II編に分け、第I編では一般的な固体内を伝播する弾性波動を、第II編では圧電体のような弾性系と電磁気系が相互に影響する媒質内の結合波動に対して空間回路網法の適用を試みる。第II編第1章の1次元振動をする超音波圧電振動子の研究を除いて、各波動に対する等価回路は本論文において新しく提案するものである。

第I編第1章では3次元空間の1方向に均一な2次元等方弾性体内を伝播する波動に空間回路網法を適用する。2次元等方弾性体は2次元以上の弾性波動の伝播媒体としては最も基礎的な構成である。そこでは進行方向に垂直で均一な座標方向に変位を持つ横波(SH波)と、同様に進行方向に垂直だが2次元平面内に変位を持つ横波(SV波)、進行方向に変位成分を持つ縦波(P波)の3種類の弾性波動が存在する。そこでここではSH波に対するものとP, SV波の両波動を表示するものの2種類の等価回路を提案し、その等価回路が対象とする波動を正しく近似していることを証明し、続いてその等価回路のBergeron法を用いた時間軸上での定式化を行なう。また弾性波動の時間応答数値解析法として現在一般的に用いられている差分法と比較しながら本手法の特徴を考察する。そして平面波の速度および平面波の自由境界上での反射特性解析に本手法を適用し解析解と比較してその妥当性を検討する。本章における取扱いの中で、本手

法の基本概念のほとんどが示されるであろう。

第I編第2章においては前章における2次元の議論を3次元に拡張することを試みる。すなわち3次元等方弾性体内を伝播する弾性波動を近似する空間回路網を提案し、Bergeron法による定式化を行なう。また等価回路が波動を正しく近似しているか証明する中で、時間応答解析の定式化を含めて本手法における空間的、時間的な近似度の評価を行なっている。そして解析結果の妥当性を確認するため真空中に置いた矩形弾性体ブロックの1面の中央にパルス状の応力を加えた時の波動伝播の特性を計算する。

弾性体は一般に方向による弾性的性質の違い、すなわち異方性を持つ。そのような性質は複雑な波動伝搬特性を生ずるとともに工学的に有効なデバイスを作成できる可能性がある。そこで前章までの議論をもとに、第I編第3章において異方性弾性体内を伝播する弾性波動へ空間回路網法を適用することを試みる。すなわち3次元等方弾性体内の波動を近似する等価回路において、応力節点に負荷された容量と粒子速度節点から3次元直角座標の各方向に伸びる1次元線路同士を結ぶ相互誘導の値を適当に選ぶことにより弾性係数の異方性を表現できることを示す。またその中で各集中定数素子および1次元線路のインピーダンスと速度の値と等価回路が近似する弾性波動の平面波の特性インピーダンス、速度などとの関係を明確にする。そしてその等価回路網の時間応答解析の定式化をBergeron法を用いて行なう。最後にその解析結果の妥当性を確認するため圧電性を無視した場合の水晶板を取り上げ縦波、横波平面波の波面と進行方向の違い、および辺上の1点にパルス状の応力が加わった時の波動伝播の様子の解析に本手法を適用する。

本手法における分布等価回路網では弾性体の変数である応力と粒子速度の各々を電圧に対応させた節点が存在する。従って自由境界を実現する場合でも、境界上での設定の仕方に幾種類かの方法がある。そこで第

I 編第4章では自由境界の設定について詳しく検討し，同時に他の数値解析手法との解析結果の比較も行なっている。

ところで工学的な応用を考えた場合固体内の波動と流体内を伝播する音波とが互いの媒質が接する境界上で結合する現象を利用したものが多くある。そこで第I編第5章では本手法において前章までに議論した固体内波動の取り扱いとともに流体内波動を統一的に解析する場合の方法について検討する。スカラー波として扱われる流体内を伝播する音波の空間回路網法による解析法については既に報告されている。そこでここでは音波を近似する回路網に粒子速度節点を設けることで，固体内波動を近似する回路網との境界上での結合が可能なことを述べる。そして解析的に扱える基礎的な例題に本取り扱い法を適用しその妥当性を検討する。

第II編第1章では1次元振動をする圧電トランスジューサに本手法を適用する。そして具体的な例題に応用してその特徴を詳しく検討する。

第II編第2章では結合波動が伝播する2次元媒質の中で最も単純な形状である，面内の大きさに比べ厚さの十分薄い圧電セラミック平板に空間回路網法を適用する。すなわち圧電セラミック平板の空間等価回路網を新提案し，その物理的意味を詳しく論ずる。続いてBergeron法による時間応答解析の定式化を行ない基本的な解析的に扱える問題に適用してその妥当性を検討する。

第 I 編 空間回路網法による固体内弾性波動の時間応答解析

第 1 章 空間回路網法の 2 次元等方弾性体への適用⁽¹⁾

1-1. まえがき

本章では 2 次元等方弾性体内を伝播する弾性波動への空間回路網法の適用について述べる。すなわち、固体として最も基本的な 2 次元等方弾性体を取り上げ、まずその中を伝搬する弾性波動を表現する等価回路を導いた。その等価回路は微小な同じ長さ、同じ特性を持つ 1 次元分布定数線路を正方格子状に組み合わせ、それらの接続点すなわち節点に集中定数素子を負荷した構成になっている。各節点には弾性体の変数に対応した電圧、電流が割り当てられている。次に、Bergeron 法による時間領域における定式化を行なった。そして簡単な例題について計算を行いその妥当性を確認した。その結果、等価回路表示による現象の把握しやすさ、音響工学の体系との合致などの利点と、定式化に Bergeron 法を適用したことによる計算の高速化、アルゴリズムの単純化の実現など多くの特徴を持つことがわかった。

以下、1-2. において 2 次元等方弾性体の等価回路表示について述べ、1-3. では 1-2. で得られた等価回路に Bergeron 法を適用した時間領域での定式化について述べる。最後に 1-4. で基本的な例題に、本手法を適用した結果について述べる。

1 - 2 . 2次元等方弾性体の等価回路表示

y方向に一様な2次元等方弾性体に成り立つ関係式は、次の式(I.1.1), (I.1.2)で示されるフックの法則と式(I.1.3), (I.1.4)における運動方程式である。なおここでは行数の節約のため $\partial/\partial x$, $\partial/\partial z$, $\partial/\partial t$, $\partial^2/\partial t^2$, $\partial^2/\partial x\partial z$ 等の微分記号は ∂_x , ∂_z , ∂_t , ∂^2_t , ∂^2_{xz} のように表す。

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_z w \\ \partial_z u + \partial_x w \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.1})$$

$$\begin{bmatrix} T_4 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_z v \\ \partial_x v \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.2})$$

$$\rho \partial^2_t \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_5 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.3})$$

$$\rho \partial^2_t v = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_4 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.4})$$

但し, λ , μ はラメの定数, ρ は密度である。ここで, 等価回路を導きやすくするため, 変数を次のように変える。

(1) 変位のかわりに, その時間微分 (以下, 粒子速度と呼ぶ) を変数にとる。

(2) 一般に, 圧縮力を負にとるが, ここでは正にとる。従って応力の符号が普通考える場合と逆になるので注意が必要である。

この条件をもとに式 (I.1.1) から (I.1.4) は次のような分布定数線路の電信方程式と同じ形の式に変形できる。

$$\begin{bmatrix} \partial_x \dot{u} \\ \partial_z \dot{w} \\ \partial_z \dot{u} + \partial_x \dot{w} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} & \frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} & 0 \\ \frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} & \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_5 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.5})$$

$$\begin{bmatrix} \partial_z \dot{v} \\ \partial_x \dot{v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} T_4 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.6})$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_5 \end{bmatrix} = -\rho \partial_t \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1.7})$$

$$\begin{bmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_4 \\ T_6 \end{bmatrix} = -\rho \partial_t \dot{v} \quad (\text{I.1.8})$$

ここで、変位記号の上のドットはその時間微分であることを示している。このうち(I.1.6), (I.1.8)はy方向に一様な粒子速度成分を持つ横波(SH波)を表し、両式よりその波動方程式は次のようになる。

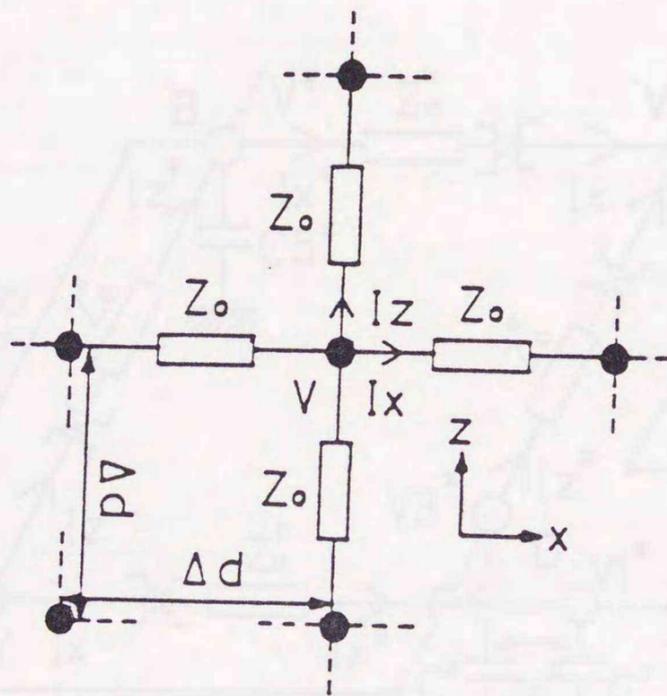
$$\mu \left(\frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial t^2} \quad (\text{I.1.9})$$

また、式(I.1.5), (I.1.7)は縦波(P波)とx-z平面内に粒子速度成分を持つ横波(SV波)を表しており、その粒子速度uについての波動方程式は次のように表される。

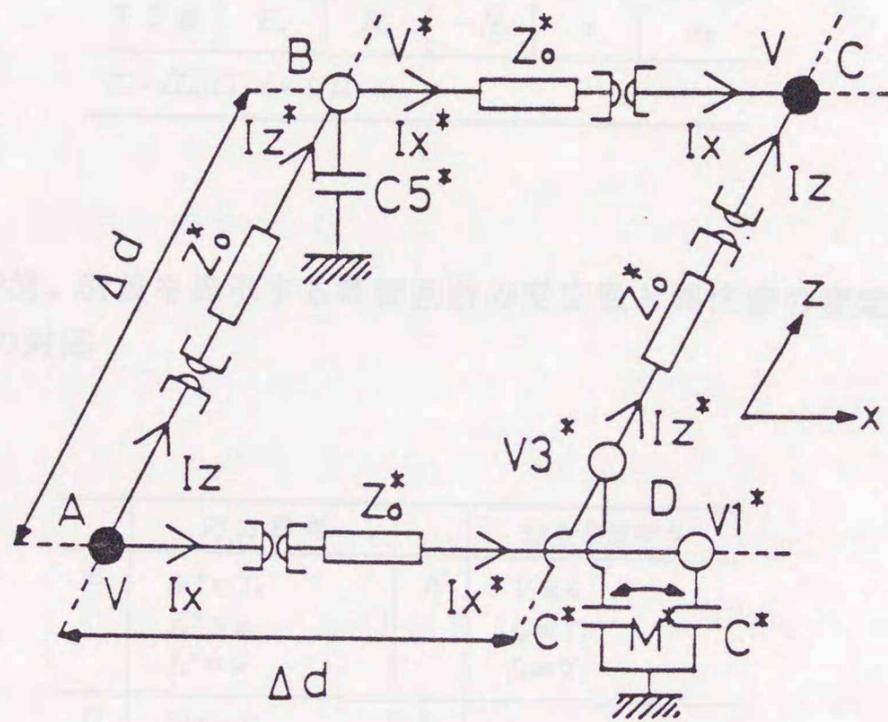
$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 \dot{u} = \rho \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} \quad (\text{I.1.10})$$

但し $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ 。

これらの関係式をもとに、微小区間 Δd における基本等価回路を図I-1-1, I-1-2, に示す。図I-1-1はSH波に、図I-1-2はP, SV波に対応する等価回路である。また、各節点における電圧、電流と弾性体の各変数との対応、および回路定数と弾性体の各定数との対応を表I-1-1, I-1-2に示す。但し、表I-1-2の各定数の対応はこの後で述べるようにある条件下で任意性を持っている。具体的な計算をする場合、これらの基本等価回路を正方格子状に組み合わせて弾性体の実際の形状を近似する。また境界上にある節点には、その境界条件に見合った負荷をつける。



図I-1-1 SH波と等価な基本分布等価回路



図I-1-2 P波, SV波の両方を表示する基本分布等価回路

表 I-1-1 SH波を表示する等価回路の変定数と弾性波の変定数との対応
と電磁波(TE波)の場合との比較
(E:電界; H:磁界; ϵ :誘電率; μ_e :透磁率)

	V	I_x	I_z	$2C_0$	L_0
SH波	\dot{v}	T_3	T_4	ρ	s
TE波	E_y	H_x	$-H_z$	ϵ	μ_e

$Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}, s = 1/\mu$

表 I-1-2 P波, SV波を表示する等価回路の変定数と弾性波の変定数との対応

	応力節点		粒子速度節点
B	$V^* \equiv T_3$ $I_x^* \equiv \dot{w}$ $I_z^* \equiv \dot{u}$	A	$V \equiv \dot{u}$ $I_x \equiv T_1$ $I_z \equiv T_3$
D	$V_1^* \equiv T_1$ $V_3^* \equiv T_3$ $I_x^* \equiv \dot{u}$ $I_z^* \equiv \dot{w}$	C	$V \equiv \dot{w}$ $I_x \equiv T_3$ $I_z \equiv T_1$

$Z_0^* = \sqrt{L_0^*/C_0^*}$ $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$
 $C_0^* = 1/2(\lambda + 2\mu)$ $C_0 = \rho/2$
 $L_0^* = \rho/2$ $L_0 = 1/2(\lambda + 2\mu)$

$C^* = \{(\lambda + 2\mu)/4\mu(\lambda + \mu) - 1/2(\lambda + 2\mu)\}2\Delta d$
 $M^* = \{-\lambda/4\mu(\lambda + \mu)\}2\Delta d$
 $C_3^* = \{1/2\mu - 1/2(\lambda + 2\mu)\}4\Delta d$

ところでSH波の波動方程式と等価回路の関係は、電磁波の2次元問題における等価回路表示と全く同じ表現になっている⁽²⁾。例えばTE波と比較すれば、その変定数には表I-1-1のような対応関係がある。従って、表に示すように変定数を読み替えることにより電磁波における計算結果がそのままSH波にあてはまる。そこでここでは、SH波に対しては等価回路表示だけにとどめ、P,SV波に対する考察のみを行う。

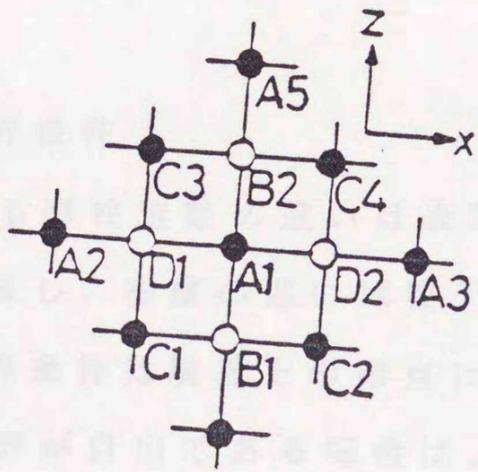
始めに、図I-1-2の回路表現を要約して説明する。図I-1-3にこの等価回路における節点の配列を示す。

(1) 等価回路の基本的構成

各節点には、弾性体の各変数が割り当てられ、それをその点の電圧と対応づける。そこで応力および粒子速度が電圧に対応する節点をそれぞれ応力節点および粒子速度節点と名付ける。表I-1-2では応力節点の回路変数に*印をつけて粒子速度節点での変数と区別している。また前者を白丸○で、後者を黒丸●で図示する。但し、伸縮応力(T_1, T_3)は同じ節点に置かれ、それが関与する音響ポインティングベクトルの方向にのみ枝を持つ。また、節点から伸びる枝に、その点の電圧に対応する変数と音響ポインティングベクトルを形づくる変数に対応する電流が、定められた方向に流れており、その節点においてキルヒホッフの電流則が成り立つ。これらの節点は波動方程式を満足するように、交互に配置されている。

(2) 回路定数について

本手法においては各節点に負荷された集中定数素子が適当な条件を満足すれば計算が常に安定であることが知られている。従って後述するようである条件下で線路および集中定数素子の値は任意性を持つが、ここでは考察を容易にするため表I-1-2に示すようにスティフネスを2倍、密度を半分にしており、線路の特性インピーダンスは、縦波の平面波における音響インピーダンスと同じ値としている。但し、線路の速度は、縦波速度の2倍となるので換算に注意を要する。伸縮応力(T_1, T_3)に対応する電圧間の結合



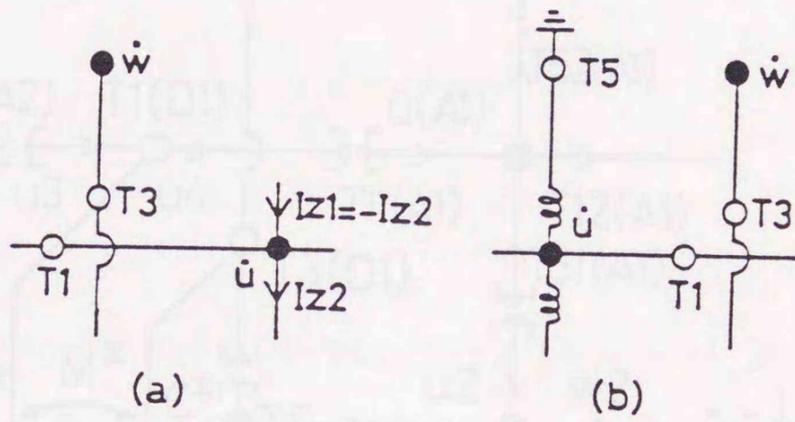
図I-1-3 A1節点を中心とした等価回路網

は、等価回路上の概念である相互容量で等価表示されている。この相互容量 M^* と容量 C^* が相互に関連して、いわゆるポアソン比の働きをしている。また T_5 節点には適当な容量 C_{5}^* をつけて線路のインピーダンスとその速度を見かけ上変えることにより、横波速度と横波波動が関連するインピーダンスに対応するようにしている。さらに節点間の回路変数同士の意味を等価回路上矛盾なく対応させるために各線路にジャイレータを接続する。特に、超音波トランスジューサの解析では力-電圧対応を用いることが多いので、線路を応力を電圧とする伝送路とするため、ジャイレータを粒子速度節点側に置いた。

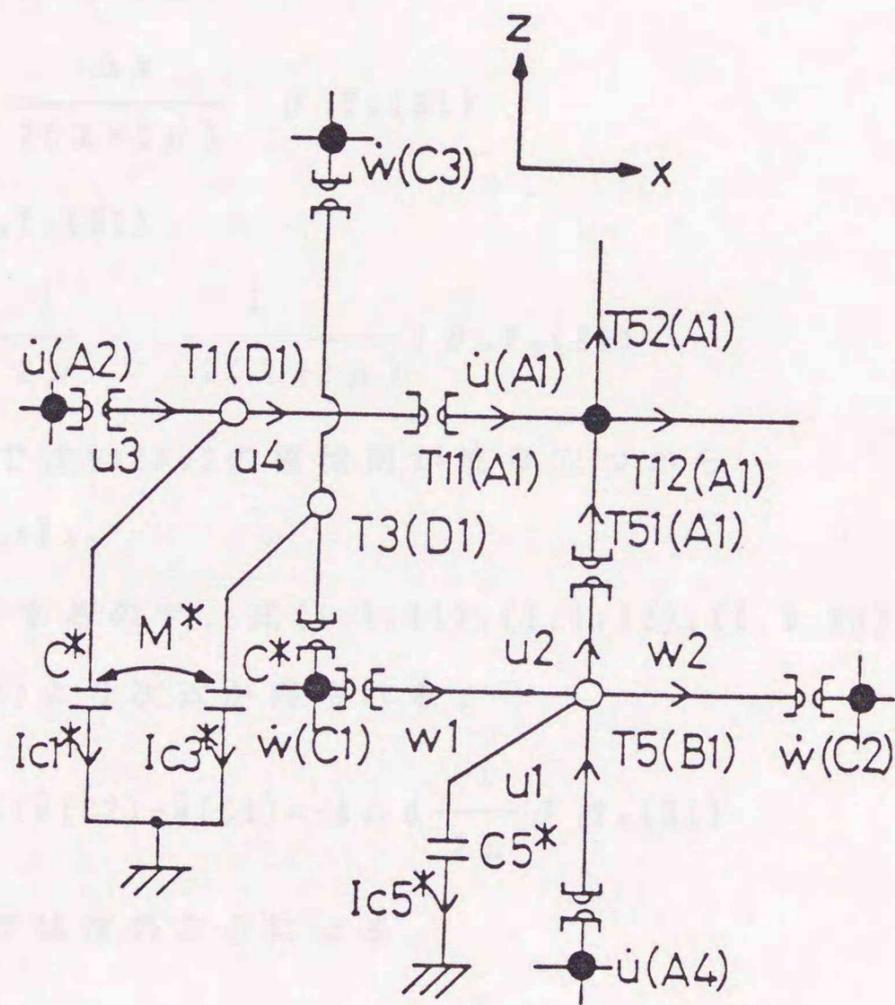
(3) 媒質条件と境界条件

固体の媒質条件である弾性定数の違いは表I-1-2より各応力節点の容量の値を変えることで表し、密度の違いは粒子速度節点に適当な容量をつけることで表す。境界条件は境界上の節点に適当な負荷をつないで満足させる。例えば、境界が自由である場合は、図I-1-4に示すように応力節点は応力に対応した電圧が零の条件に対応して短絡し、粒子速度節点は応力に対応した電流が零であるから、自由空間に向かって伸びる枝を開放にする。但し、節点を短絡する場合若干の注意が必要である。この点については第4章で詳しく述べる。ところでこの等価回路は正方形格子状に組み立てていくため、曲線を持つ境界は階段状に近似することになる。

次に、上記(1)から(3)の基本的取り扱いを用いた図I-1-2の等価回路が固体内を伝播する弾性波動を等価表現できることを示す。今、 \dot{u} をとり上げ、 \dot{u} を電圧とする節点の代表であるA1点に関する格子網を図I-1-3に示す。始めにB1, B2, C1, C2点を中心とした差分式を求める。これらはフックの法則における微分方程式の差分式にあたる。図I-1-5より、B1点におけるz方向の差分式は



図I-1-4 自由境界における境界条件の設定の例



図I-1-5 A1節点近傍の節点と変数の取り方

$$\dot{u}(A1) - u_2 = - \frac{\Delta z}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_t T_5(B1) \quad (I.1.11)$$

$$u_1 - \dot{u}(A4) = - \frac{\Delta z}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_t T_5(B1) \quad (I.1.12)$$

$$\dot{w}(C2) - w_2 = - \frac{\Delta x}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_t T_5(B1) \quad (I.1.13)$$

$$w_1 - \dot{w}(C1) = - \frac{\Delta x}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_t T_5(B1) \quad (I.1.14)$$

$$\begin{aligned} I_{c5}^* &= C_5^* \partial_t T_5(B1) \\ &= 4 \Delta d \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \right) \partial_t T_5(B1) \end{aligned} \quad (I.1.15)$$

となる。B1点ではキルヒホッフの電流則が成り立つから

$$u_1 + w_1 - u_2 - w_2 = I_{c5}^* \quad (I.1.16)$$

$\Delta x = \Delta z = \Delta d$ とするので，式(I.1.11)，(I.1.12)，(I.1.13)，(I.1.14)，(I.1.15)，(I.1.16)より次式が得られる。

$$\dot{u}(A1) - \dot{u}(A4) + \dot{w}(C2) - \dot{w}(C1) = -4 \Delta d \frac{1}{2\mu} \partial_t T_5(B1) \quad (I.1.17)$$

同様に，B2点では次のようになる。

$$\dot{u}(A5) - \dot{u}(A1) + \dot{w}(C4) - \dot{w}(C3) = -4 \Delta d \frac{1}{2\mu} \partial_t T_5(B2) \quad (I.1.18)$$

同じ手順で図1-1-5よりD1, D2での関係式を求めると次式が成り立つ。

$$\dot{u}(A1) - u_4 = - \frac{\Delta x}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_t T_1(D1) \quad (I.1.19)$$

$$u_3 - \dot{u}(A2) = - \frac{\Delta x}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_t T_1(D1) \quad (I.1.20)$$

$$\begin{aligned}
I_{c1}^* &= C^* \partial_t T_1(D1) + M^* \partial_t T_3(D1) \\
&= 2 \Delta d \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} - \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \right\} \partial_t T_1(D1) \\
&\quad + 2 \Delta d \left(\frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_3(D1) \tag{I.1.21}
\end{aligned}$$

$$u_3 - u_4 = I_{c1}^* \tag{I.1.22}$$

従って，式(I.1.19)，(I.1.20)，(I.1.21)，(I.1.22)より

$$\begin{aligned}
\dot{u}(A1) - \dot{u}(A2) &= -2 \Delta d \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_1(D1) \\
&\quad - 2 \Delta d \left(\frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_3(D1) \tag{I.1.23}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\dot{u}(A3) - \dot{u}(A1) &= -2 \Delta d \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_1(D2) \\
&\quad - 2 \Delta d \left(\frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_3(D2) \tag{I.1.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}(C3) - \dot{w}(C1) &= -2 \Delta d \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_3(D1) \\
&\quad - 2 \Delta d \left(\frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_1(D1) \tag{I.1.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}(C4) - \dot{w}(C2) &= -2 \Delta d \left(\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_3(D2) \\
&\quad - 2 \Delta d \left(\frac{-\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \right) \partial_t T_1(D2) \tag{I.1.26}
\end{aligned}$$

従って，(I.1.23)，(I.1.24)，(I.1.25)，(I.1.26)より次式が求まる。

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu) \{ \dot{u}(A1) - \dot{u}(A2) \} + \lambda \{ \dot{w}(C3) - \dot{w}(C1) \} \\
&= -2 \Delta d \partial_t T_1(D1) \tag{I.1.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \{ \dot{u}(A3) - \dot{u}(A1) \} + \lambda \{ \dot{w}(C4) - \dot{w}(C2) \} \\
 & = -2\Delta d \partial_t T_1(D2)
 \end{aligned} \tag{I.1.28}$$

ここでB1, B2, D1, D2点での応力成分をA1点での応力成分で表すため運動方程式を用いて関係式を導くと, 図I-1-5より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 T_{51}(B1) &= T_{51}(A1) - \Delta z \partial_z T_5(B1) \\
 &= T_{51}(A1) + \Delta z (\rho/2) \partial_t \dot{u}(B1)
 \end{aligned} \tag{I.1.29}$$

$$\begin{aligned}
 T_{52}(B2) &= T_{52}(A1) - \Delta z \partial_z T_5(B2) \\
 &= T_{52}(A1) + \Delta z (\rho/2) \partial_t \dot{u}(B2)
 \end{aligned} \tag{I.1.30}$$

$$\begin{aligned}
 T_{11}(D1) &= T_{11}(A1) - \Delta x \partial_x T_1(D1) \\
 &= T_{11}(A1) + \Delta x (\rho/2) \partial_t \dot{u}(D1)
 \end{aligned} \tag{I.1.31}$$

$$\begin{aligned}
 T_{12}(D2) &= T_{12}(A1) - \Delta x \partial_x T_1(D2) \\
 &= T_{12}(A1) + \Delta x (\rho/2) \partial_t \dot{u}(D2)
 \end{aligned} \tag{I.1.32}$$

A1点におけるキルヒホッフの電流則より

$$T_{51}(A1) - T_{52}(A1) + T_{11}(A1) - T_{12}(A1) = 0 \tag{I.1.33}$$

従って(I.1.29)-(I.1.30)+(I.1.31)-(I.1.32)として(I.1.17), (I.1.18), (I.1.27), (I.1.28), (I.1.33)を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \{ \dot{u}(A2) + \dot{u}(A3) - 2\dot{u}(A1) \} + \mu \{ \dot{u}(A4) + \dot{u}(A5) - 2\dot{u}(A1) \} \\
 & + (\lambda + \mu) \{ \dot{w}(C1) + \dot{w}(C4) - \dot{w}(C2) - \dot{w}(C3) \} \\
 & = -2\Delta d (\rho/2) \partial_t \{ \dot{u}(B1) + \dot{u}(B2) + \dot{u}(D1) + \dot{u}(D2) \}
 \end{aligned} \tag{I.1.34}$$

ここで両辺を $4\Delta d^2$ で割って $\Delta d \rightarrow 0$ の極限を考えると, 次のP波, SV波の波動方程式となる。

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 \dot{u} = \rho \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} \tag{I.1.10}$$

次に, A1点に容量を負荷して媒質条件を変えることを考える。容量の値を $(\Delta \rho/2) \times \Delta d$ とすれば, そこに流れる電流 I_ρ は次のようになる。

$$I_\rho = (\Delta \rho/2) \Delta d \partial_t \dot{u}(A1) \tag{I.1.35}$$

この点での電流は，キルヒホッフの電流則より次の関係にある。

$$T_{51}(A1) - T_{52}(A1) + T_{11}(A1) - T_{12}(A1) = I_0 \rho \quad (I.1.36)$$

この関係式を考慮すれば，波動方程式は次のようになり，媒質条件のうち
の密度が変化したことと等価になる。

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 \dot{u} = (\rho + \Delta \rho) \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} \quad (I.1.37)$$

また，弾性定数を変える場合はこれまでの議論から応力節点の容量の値
を変えれば良いことがわかる。

ところで先にも触れたように各回路素子の値はある条件下で任意性を
持っている。すなわち式(I.1.23)～(I.1.26)の導出過程からわかるよう
に1次元線路の容量分を s_1 とすると，D節点に負荷された容量 C^* との間
には次の関係が成り立てばよい。

$$\frac{C^*}{2 \Delta d} + s_1 = \frac{\lambda + 2 \mu}{4 \mu (\lambda + \mu)} \quad (I.1.38)$$

また C_5^* や粒子速度節点に負荷された容量の値によってそれぞれせん断
力に關係するスチフネス成分や密度を自由に変えることができることがわか
る。すなわちそれらの容量は線路の定数を調整するスタブの働きをしてい
る。しかし集中定数素子における蓄積エネルギーが負になると計算結果に発
散が生じてしまうので，D節点以外の単独の容量の値は正に，D節点では
次の条件を満足するようにする必要がある。

$$C^{*2} \geq M^{*2} \quad (I.1.39)$$

今，粒子速度節点には容量を負荷しないとして，線路内の伝搬時間を
 Δt ，弾性波動の縦波（その速度は $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ）が Δd 進むのに
要する時間を Δt_a とする。 $C^{*2} = M^{*2}$ としたときそれらの微小時間に成り
立つ関係は次のようになる。

$$\Delta t_a = 2 \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}} \Delta t \quad (I.1.40)$$

以下の定式化で説明するように Δt は本手法における離散時間にあたる。従って Δt は実際の波動である縦波における時間 Δt_a とずれがある(若干短い)ことがわかる。このずれが大きいと実際の波動がある距離だけ進んだ場合を計算するのにより多くの計算回数が必要となって不経済である。上式はそのずれが最も少ない場合となっている。

1-3. Bergeron法による時間応答解析の定式化⁽²⁾,⁽³⁾

前章における2次元等方弾性体の等価回路表示に対する時間軸上での定式化について述べる。

1-3-1. 1次元線路のBergeron表示

1次元線路は図I-1-6に示すように微小長さ Δd の基本線路に分割され、 k を離散点番号としたとき、各基本線路の電圧電流間にはd'Alembertの解の差分表現式より次の関係式が成立する。

$$V_k(t) + Z_0 I_k(t) = V_{k-1}(t - \Delta t) + Z_0 I_{k-1}(t - \Delta t) \quad (\text{I.1.41})$$

$$V_{k-1}(t) - Z_0 I_{k-1}(t) = V_k(t - \Delta t) - Z_0 I_k(t - \Delta t) \quad (\text{I.1.42})$$

上式は、それぞれ進行波、後退波を表わしている。ここで、 Z_0 、 Δt は基本線路の特性インピーダンス及び伝搬時間である。

1-3-2. 本等価回路へのBergeron法の適用

図I-1-2の等価回路において、表I-1-2では基本線路は自由空間での値の2倍のスティフネスと半分の密度を持つとした。そのため、基本1次元線路の特性インピーダンス、伝搬時間はそれぞれ Z_0^* 、 Δt として次式で与えられる。

$$Z_0^* = \sqrt{(\rho/2) \cdot 2(\lambda + 2\mu)} = \sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)} \quad (\text{I.1.43})$$

$$\Delta t = \Delta d \sqrt{\frac{2(\lambda + 2\mu)}{\rho/2}} = \frac{\Delta d}{2} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \Delta t_a / 2 \quad (\text{I.1.44})$$

此種情形下，其電壓降與電流之關係，由下列之關係式表示之。此種關係式，即為一次元基本分布線路之基本關係式。

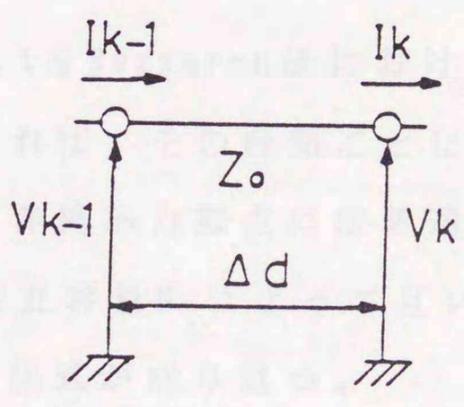
設電壓降與電流之關係，由下列之關係式表示之。此種關係式，即為一次元基本分布線路之基本關係式。

$$V_k - V_{k-1} = I_{k-1} Z_0 \quad (1.1.43)$$

上式之關係式，即為一次元基本分布線路之基本關係式。此種關係式，即為一次元基本分布線路之基本關係式。

$$I_k - I_{k-1} = -\frac{V_k - V_{k-1}}{Z_0} \quad (1.1.44)$$

此種關係式，即為一次元基本分布線路之基本關係式。此種關係式，即為一次元基本分布線路之基本關係式。



圖I-1-6 一次元基本分布線路

式(I.1.44)より離散時間は実時間 Δt_a の半分となるのでモデル化および結果の換算の際注意が必要である。この点を踏まえて等価回路の1次元線路にBergeron法を適用する。

容量の計算は台形積分近似を用いて次のように行う。容量 C の両端の電圧を V_c 、そこに流れる電流を I_c とすると次の微分式が成り立つ。

$$I_c = C \partial_t V_c \quad (\text{I.1.45})$$

この微分式に台形近似を適用すると、次に示す差分式が得られる。

$$V_c(t) - R_c I_c(t) = V_c(t - \Delta t) + R_c I_c(t - \Delta t) \quad (\text{I.1.46})$$

但し、 $R_c = \Delta t / (2C)$ 。

このときの離散時間 Δt をBergeron法における線路の伝搬時間に対応した差分時間と同じにすれば、その時間ごとに同期して、逐次時間応答が求まっていく。また、伸縮応力節点には普通の容量のほかに相互容量が存在する。この場合相互容量 M_c によって互いに結合する電圧を V_1, V_2 とすると、次のような関係式が成り立つ。

$$I_c = C \partial_t V_1 + M_c \partial_t V_2 \quad (\text{I.1.47})$$

この式を台形近似による差分式になおすと、次のようになる。

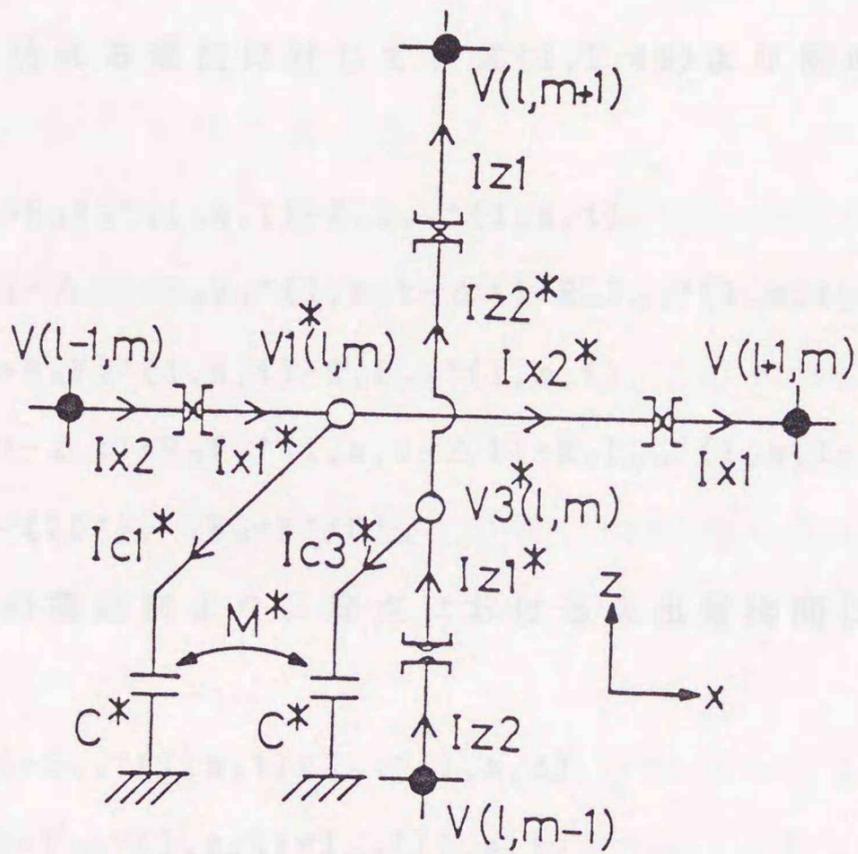
$$\begin{aligned} V_1(t) + R_M V_2(t) - R_c I_c(t) \\ = V_1(t - \Delta t) + R_M V_2(t - \Delta t) + R_c I_c(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.48})$$

但し、 $R_c = \Delta t / (2C)$, $R_M = M_c / C$ 。

以上の手続きをもとに、具体例として伸縮応力節点での計算法の定式化を行う。使用する記号を図I-1-7に示す。まず各線路ごとにBergeron法を適用すると、次の4式が得られる。

$$\begin{aligned} V_1^*(1, m, t) + Z_0^* I_{x1}^*(1, m, t) \\ = I_{x2}(1-1, m, t - \Delta t) + Z_0^* V(1-1, m, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.49})$$

$$\begin{aligned} V_1^*(1, m, t) - Z_0^* I_{x2}^*(1, m, t) \\ = I_{x1}(1+1, m, t - \Delta t) - Z_0^* V(1+1, m, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.50})$$



図I-1-7 $D(l, m)$ 節点での変数の取り方

$$\begin{aligned} V_3^*(1, m, t) + Z_0 I_{z1}^*(1, m, t) \\ = I_{z2}(1, m-1, t - \Delta t) + Z_0 V(1, m-1, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.51})$$

$$\begin{aligned} V_3^*(1, m, t) - Z_0 I_{z2}^*(1, m, t) \\ = I_{z1}(1, m+1, t - \Delta t) - Z_0 V(1, m+1, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.52})$$

ここで、式の右辺の電圧と電流の位置が式(I.1.41), (I.1.42)と逆になっているのは、粒子速度節点のところにジャイル-タを入れてあるためである。次に、容量に流れる電流に対して、式(I.1.48)より次のような関係式が得られる。

$$\begin{aligned} V_1^*(1, m, t) + R_M V_3^*(1, m, t) - R_C I_{c1}^*(1, m, t) \\ = V_1^*(1, m, t - \Delta t) + R_M V_3^*(1, m, t - \Delta t) + R_C I_{c1}^*(1, m, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.53})$$

$$\begin{aligned} V_3^*(1, m, t) + R_M V_1^*(1, m, t) - R_C I_{c3}^*(1, m, t) \\ = V_3^*(1, m, t - \Delta t) + R_M V_1^*(1, m, t - \Delta t) + R_C I_{c3}^*(1, m, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.1.54})$$

但し、 $R_C = \Delta t / (2C^*)$, $R_M = M^* / C^*$ 。

また、キルヒホッフの電流則より、節点における入出電流間には次の関係が成り立つ。

$$I_{x1}^*(1, m, t) - I_{x2}^*(1, m, t) = I_{c1}^*(1, m, t) \quad (\text{I.1.55})$$

$$I_{z1}^*(1, m, t) - I_{z2}^*(1, m, t) = I_{c3}^*(1, m, t) \quad (\text{I.1.56})$$

以上の式を連立させて電圧を求めれば次式のようなになる。ただし式(I.1.49)~(I.1.52)の右辺を $A_1 \sim A_2$, (I.1.53)~(I.1.54)の右辺を $B_1 \sim B_2$ とする。

$$\begin{aligned} V_1^*(1, m, t) \\ = \frac{1}{D} \left\{ \left(A_1 + A_2 + \frac{B_1}{R_C} \right) \left(2 + \frac{1}{R_C} \right) - \left(A_3 + A_4 + \frac{B_2}{R_C} \right) \frac{R_M}{R_C} \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.1.57})$$

$$\begin{aligned} V_3^*(1, m, t) \\ = \frac{1}{D} \left\{ \left(A_3 + A_4 + \frac{B_2}{R_C} \right) \left(2 + \frac{1}{R_C} \right) - \left(A_1 + A_2 + \frac{B_1}{R_C} \right) \frac{R_M}{R_C} \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.1.58})$$

但し、 $D = (2 + 1/R_C)^2 - (R_M/R_C)^2$ 。

この式を、再び式(I.1.49)～(I.1.54)へ代入すれば時刻 t における電流が求まる。他の節点でも同様に定式化でき、これらの計算を各節点で離散時間 Δt ごとに続けていけば、すべての変数に対して逐次時間応答が求まっていく。

本計算法は物理現象を記述する方程式を等価回路表示し、その回路方程式を解くという点に特徴があり、等価回路表示による利点はよく知られている。更に本計算法がこれまで主に用いられてきた陽公式の差分法と比較して持つ特徴を次の述べる。

(1) 差分法の場合は、速度と離散時間の関係が特に収束性との関連で問題となるが、本手法では空間離散間隔と時間離散間隔が線路長とその伝搬時間という物理的関係で結ばれているためその必要はなく、常に安定であることが知られている。また、この方法は基本的には差分関係に基づいているため誤差は差分法と同様、時空間の離散間隔に依存している。通常満足な値を得る目安として、波長の分割は10分割以上必要であることが知られている。

(2) 計算容量については、差分法の場合変位のみを変数として計算できるため、変数2個(u と w)と時間領域が3個の合計 $2 \times 3 = 6$ 個必要となる。本計算法では時間領域は2個で良いが、変数領域は少ない所で電圧と4方向の電流の5個、合計 $5 \times 2 = 10$ 個、多い所では電圧、電流が8個必要で合計 $8 \times 2 = 16$ 個必要となり差分法にくらべ必要な領域が多いが、これは本手法が全ての変数を一度に計算するベクトル計算法であるからである。さらにこのことから差分法と同じ時間分割にした場合、領域が差分法の4倍必要となる。すなわち1波長を10分割するように($10 \Delta d$ となるように)周期を選んだとしてもその間に応力成分で5分割、粒子速度成分で5分割にしかならない。結局どちらの成分に対しても10分割になるようにするには周期を2倍にし領域を面積的に4倍にしなければならない。以上のことから、計算容量については不利であるが、各節点ごとの1離

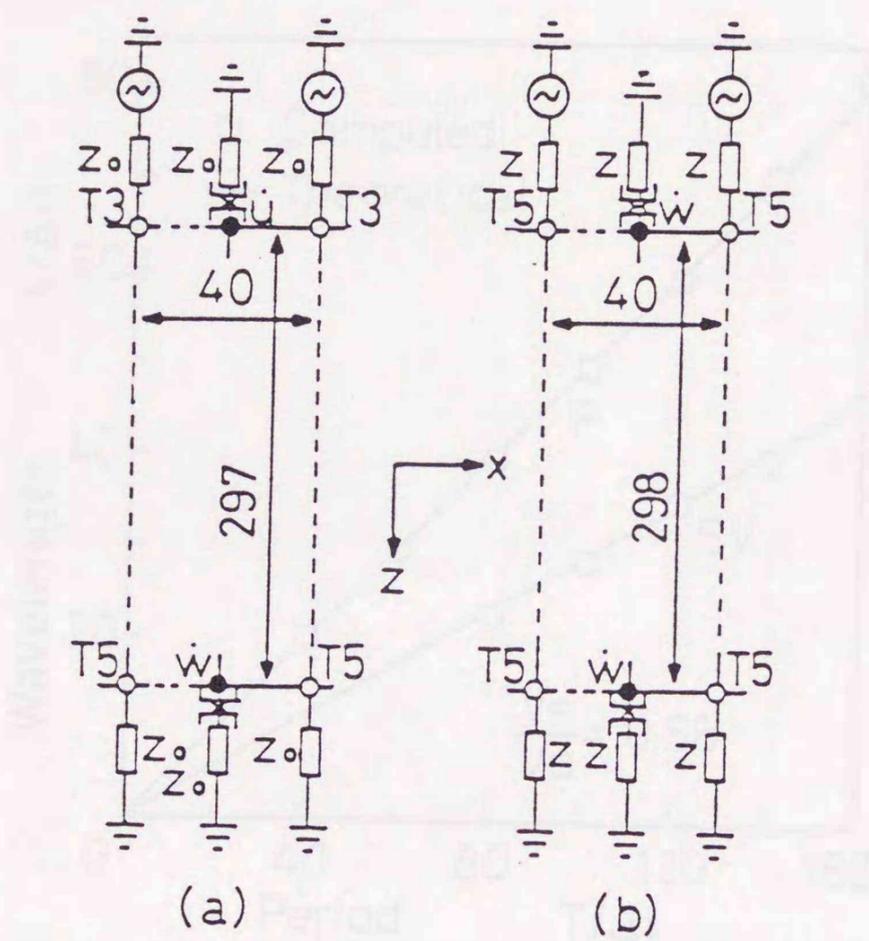
散時間前の値を用いての逐次計算は近年の並列ベクトル計算機に適合している。従って、最近のスーパーコンピュータに代表される大容量、超高速計算機の発達の本手法のこのような欠点を取り除きつつある。その結果、一度の計算で全ての変数がもとまるという本手法の特徴が非常に有効なものとなる。

(3) 差分法では複雑な境界条件に直接対応させることが難しいが、本手法では、境界条件は適当な集中定数素子をつけることで階段状に近似できる。

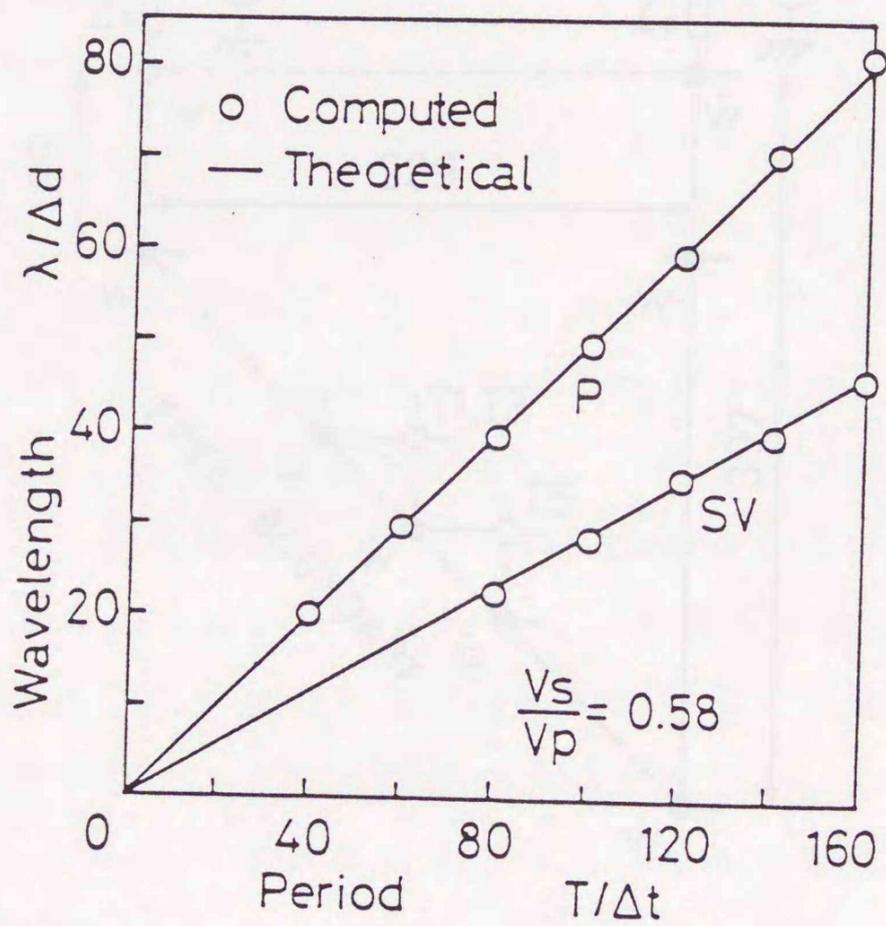
1-4. 解析結果

本手法が、2次元等方弾性体における弾性波の基本的な特性を満足するか確認する。まず、想定している速度で波動が進行するか確認するため、図I-1-8の条件で計算を行った。図I-1-8(a)は縦波について調べるための設定で、上辺を内部インピーダンス Z_0 の圧縮力(T_0)にあたる電圧源で励振し、下辺には同じインピーダンス Z_0 を負荷している。 Z_0 は縦波平面波における特性インピーダンスであり、等価回路の線路の特性インピーダンスに等しい。また左右の面は対称として計算する。以上の設定により z 方向に変位を持つ縦波平面波が図の下方へ進行する状態をシミュレートできる。図I-1-8(b)は横波をシミュレートしたもので、インピーダンスが横波平面波の特性インピーダンス $Z = \sqrt{\mu/\rho}$ であり、電圧源が T_0 節点にある以外は縦波の場合と同じである。なお、 x 方向の均一性は最小3節点でも実現できるが、ここでは以降の例題への拡張性を考えて約2波長分の領域を取った。図I-1-9にその理論値を直線で、本手法での計算値を丸印で示す。図の縦軸は波長 λ を Δd で規格化し、横軸は周期 T を離散時間 Δt で規格化してある。但し、ここではラメの定数 μ と λ を等しいとしており縦波、横波の速度をそれぞれ V_p 、 V_s とすると $V_s/V_p \approx 0.58$ の場合になっている。この結果から、波動は、ほぼ理論どおりの速度で進行していることがわかる。

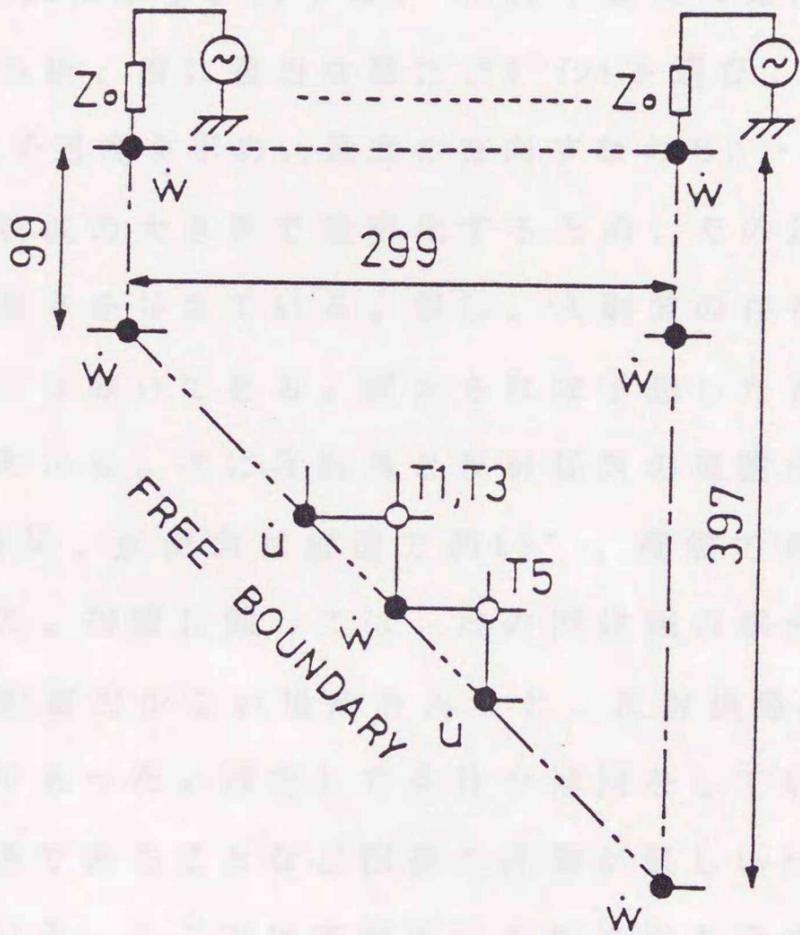
次に、縦波平面波が自由境界に斜め入射したときの、反射特性を調べた。媒質が均一な場所では、縦波と横波は独立して進むが、他の媒質との境界面で反射または透過する際に別の種類の波も一緒に発生する。実際の平面連続波の入射、反射をそのままシミュレートするのは困難なので、図I-1-10のような条件を考えた。図の左右の面(図の一点鎖線の部分)は対称とし、上面(図の破線の部分)に周期 $40\Delta t$ の正弦波5波長分の縦波を入射させる。縦波はほぼ平面波をなして下方に伝搬し左下方の自由境界(図の二点鎖線の部分)に入射角45度で斜め入射する。そこで縦波と



図I-1-8 平面弾性波の速度を確認するための計算モデル
 (a) P波平面波の速度を確認するためのモデル
 (b) SV波平面波の速度を確認するためのモデル



図I-1-9 平面弾性波の周期対波長の計算結果
 ($V_s/V_p=0.58$, V_s :SV波の速度, V_p :P波の速度)

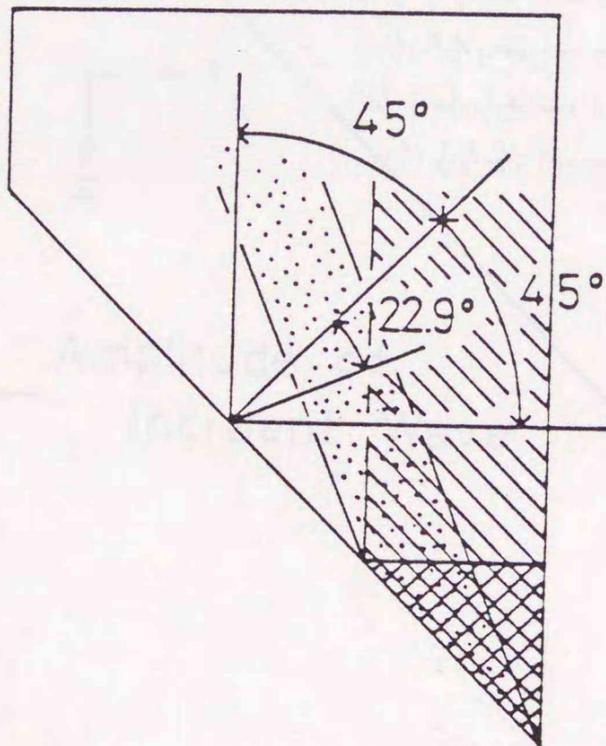


図I-1-10 P波平面波が自由境界に45°で斜め入射するときの
反射特性を計算するためのモデル

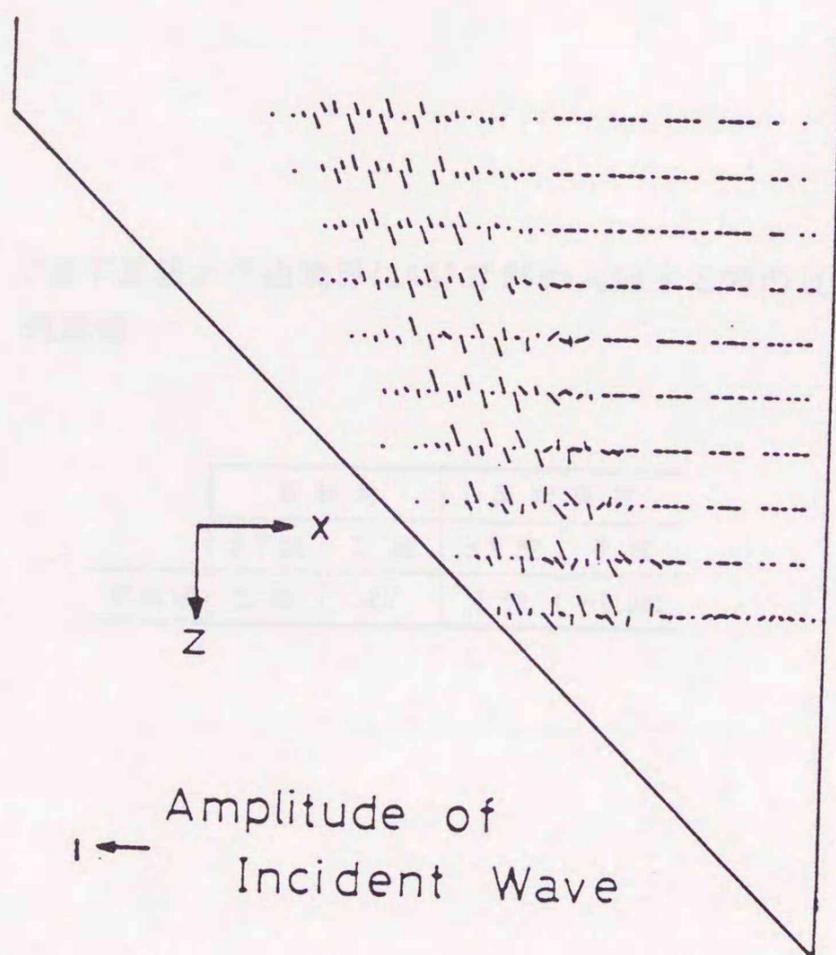
横波に分かれて反射し右方向に進む。入射した縦波の先頭が下端に到達したとき、入射P波、反射P波、反射SV波はそれぞれ図I-1-11の状態になると考えられる。入力を一定期間入力のパルス波としたので2種類の反射波が互いに重ならず存在する場所があり、その部分を調べれば反射波の振幅や反射角が求められる。計算した結果のうち領域内の粒子速度ベクトル図を図I-1-12に示す。図中のバーは粒子速度の方向と大きさを示している。すなわち縦、横に適当な数だけポイントを選び、その点におけるxおよびz方向の粒子速度を求め、速度の方向すなわちバーの傾きを決定する。次に図中の入射波の大きさを規格化するため、その速度の大きさに適当な定数をかけ長さを与えている。但し、入射波の存在している場所と振幅の小さい場所は除いてある。図からほぼ予想したとおりの分布になっていることがわかる。次に反射角と反射係数の理論値を表I-1-3に示す⁽⁴⁾。計算の結果、反射角は縦波で約 45° 、横波で約 24° でほぼ理論値どおりであった。振幅に関しては、波の同位相の部分で最も振幅が大きく、別の波の影響の少ない場所をみると、反射係数が縦波で約-0.38、横波で約1.05であった。設定した条件や補間をしていること、入射波が5波長のパルス波であることなど誤差の評価が難しいが比較的理論値に近い値になっている。ここでは本解析法の妥当性を示すため、解析的に扱える例題を選んだ。しかしこの手法は差分法と同様に汎用性のある数値計算法であり、解析的に求められない問題に対しても有効である。たとえば図I-1-12においても反射波の上側端部での回折の様子も計算されている。

次に、面内振動をする正方形板のモード解析を行なった。図I-1-13に示すように一辺が $33\Delta d$ で周囲が自由な正方形板を考え、対称なモードだけを考慮することとしてその1/4部分のみを計算した。従って図の破線部分には対称条件が考慮されている。自由端は粒子速度節点のみで境界条件を満足するようにした。この自由境界条件の設定の仕方については第

-  Incident Pwave
-  Reflected Pwave
-  Reflected SVwave



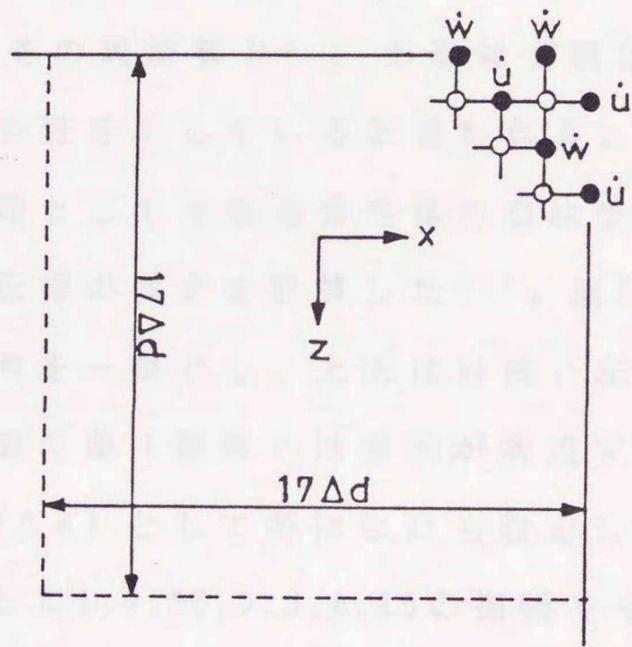
図I-1-11 図I-1-10の設定における反射特性の予測図



図I-1-12 図I-1-10の設定における粒子速度ベクトルの計算結果

表 I-1-3 P波平面波が自由境界に45°で斜め入射する時の反射特性の理論値

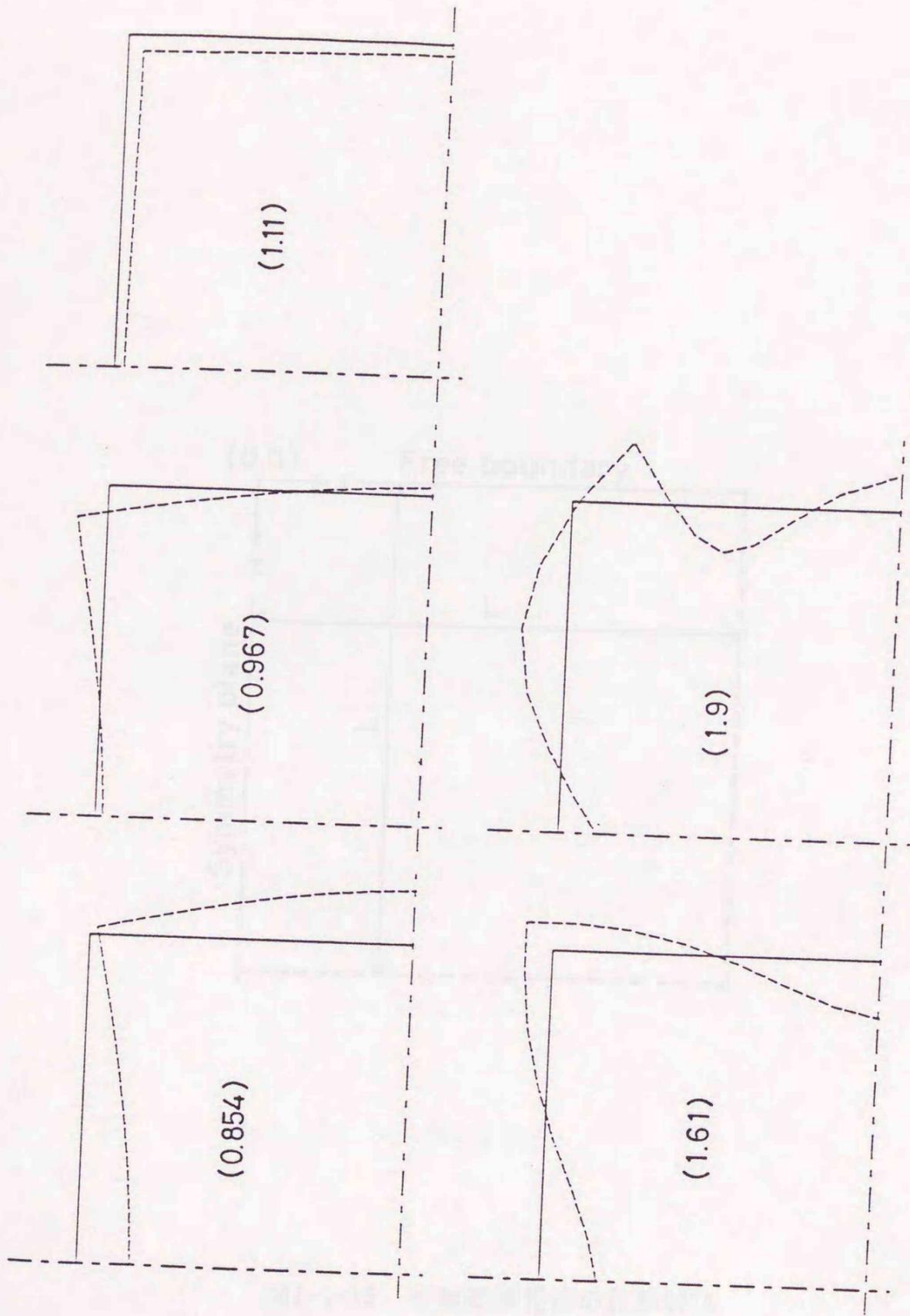
	反射角		反射係数	
	SV波	P波	SV波	P波
理論値	22.89°	45°	1.09	-0.381



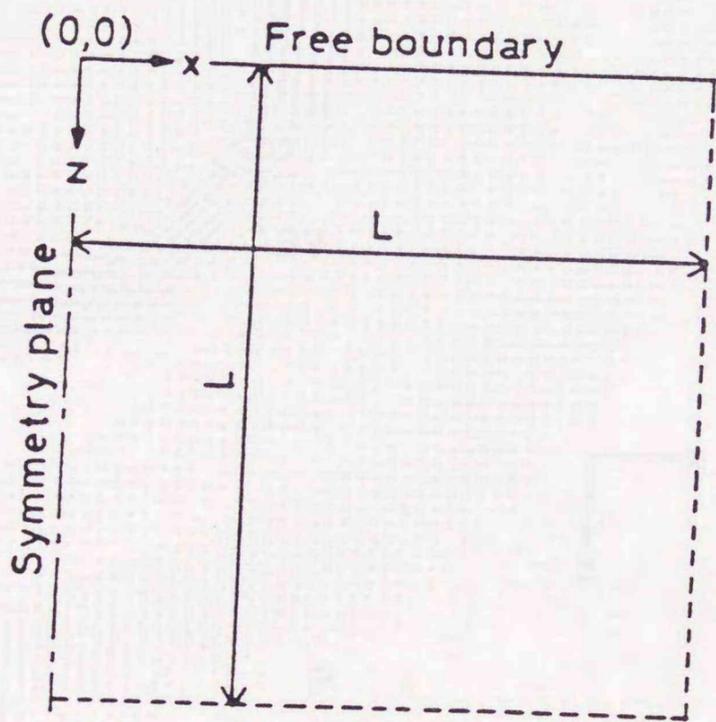
図I-1-13 正方形板の計算モデル

4章で詳しく述べる。弾性体の定数は平面応力問題⁽⁵⁾であることを考慮してコンプライアンスの値を読み替え、そのときのラメの定数を $\lambda/\mu=1.5$ とした。まず図の中央部の粒子速度節点A,Cに同じ大きさのインパルス電圧を与え、各辺の粒子速度の時間応答波形を求めた。計算時間は $2^{13}\Delta t$ とした。その結果にハック窓をかけFFTによりフーリエ変換を行なって5次までの共振周波数とモードの概略値を求めた。図I-1-14に示す結果の破線はモードの形を表し、図中の数値は一辺の長さに等しい縦振動棒の共振周波数で規格化した周波数値である。ここでは明確な共振点を求めておらずその近傍の値を用いているがその周波数とモードの形は文献値⁽⁶⁾に近い値となっており、本手法の妥当性を示していると思われる。

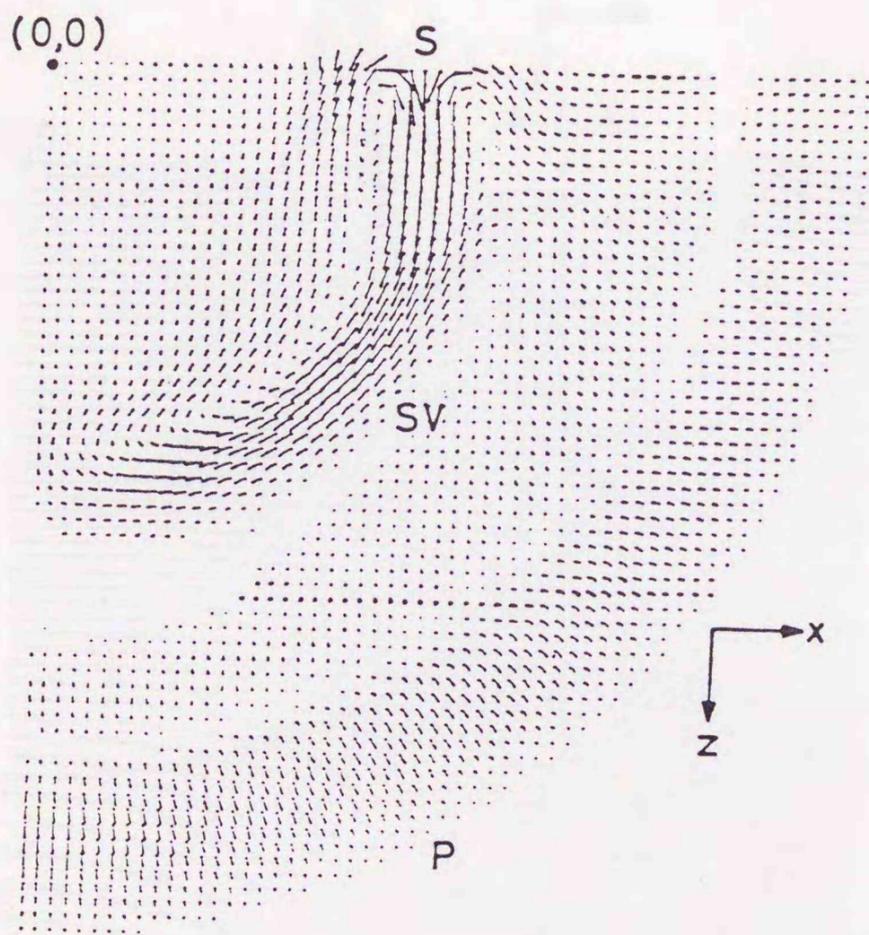
次に、一般的な問題として半無限弾性体の自由表面の一部にインパルス応力を加えたときの波動伝播の様子を計算した⁽⁷⁾。図I-1-15にその計算モデルを示す。図ではy方向を一様とし、上面は自由、左面(一点鎖線)は対称条件を与え、その他の面(破線)は波動が到達する距離よりも十分広く領域を取る($L=140\Delta d$)として特になにも設定していない。図の座標 $x=0, z=0$ から $2\Delta d$ ごとに1, 0.85, 0.5, 0.15の振幅をもつ電流源をC節点につないだ。電流源の波形は t を時間として $\exp(-(t-43\Delta t)^2/400\Delta t)$ の形のがウシアインパルスとした。計算時間は $240\Delta t$ である。その他の定数は反射特性の計算の場合と同じとした。図I-1-16(a)に粒子速度ベクトルの計算結果を示す。図の座標(0,0)から 45° 方向にSV波、それに先行して扇型にP波が確認される。また自由表面にはSV波より若干遅い表面波が観測され定性的に弾性波動の特徴をよく表わしている。図I-1-16(b),(c)にはそれぞれ応力の $T_{11}+T_{33}$ および T_{31} の計算結果を示す。また図I-1-16(d)には音響ポインティングベクトルを示す。その方向と大きさは矢印の方向と長さで表されている。この図から横波、縦波およびそれらのパワーの大きさが粒子速度ベクトル図よりも明確に観測されるのがわかる。このようにベクトル計算法である本手法により粒子速度ベクトル図だけでは得られない多くの有益な情



図I-1-14 正方形板のモードの計算結果

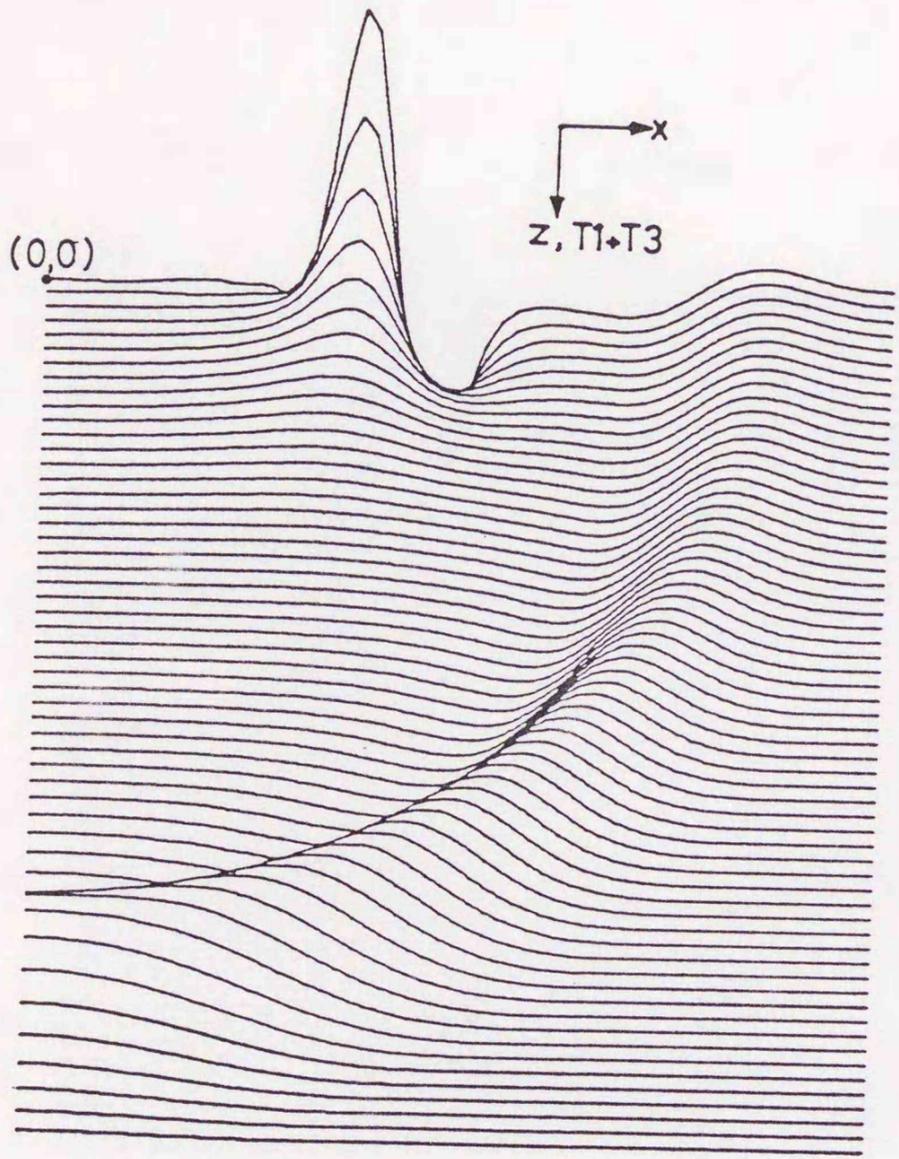


図I-1-15 半無限弾性体の計算モデル

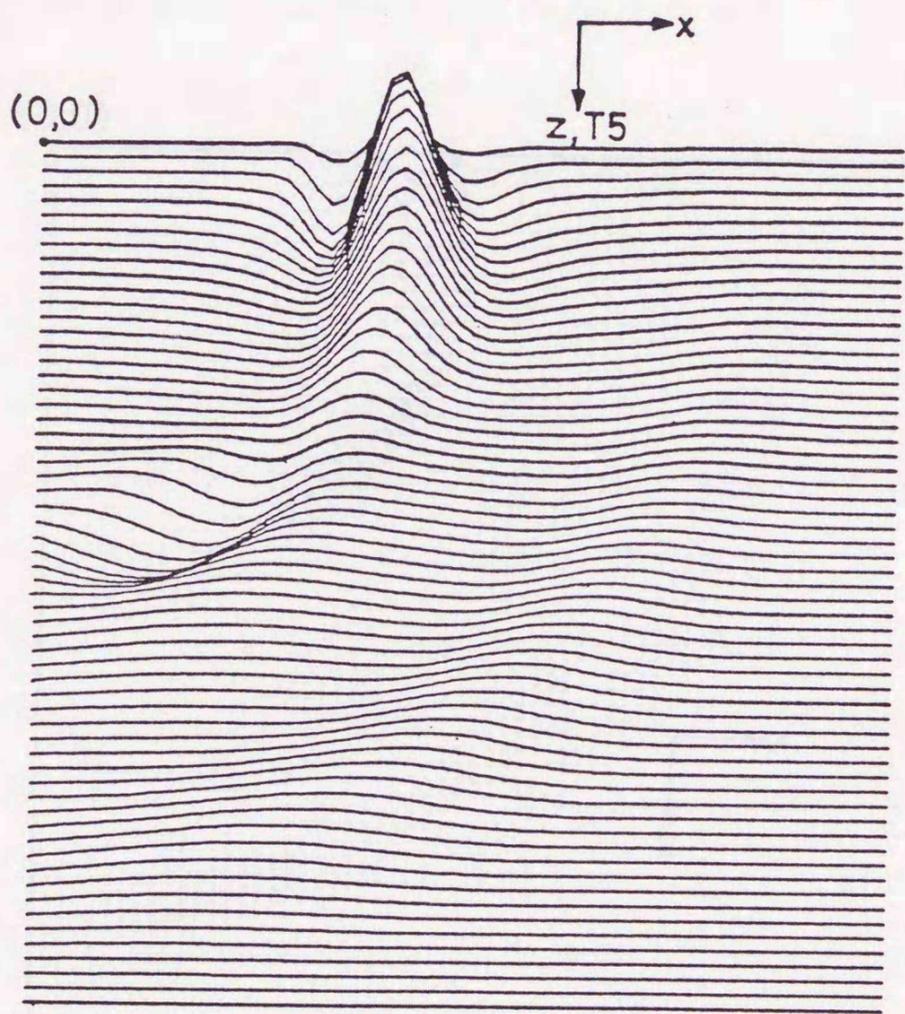


(a) 粒子速度ベクトルの計算結果

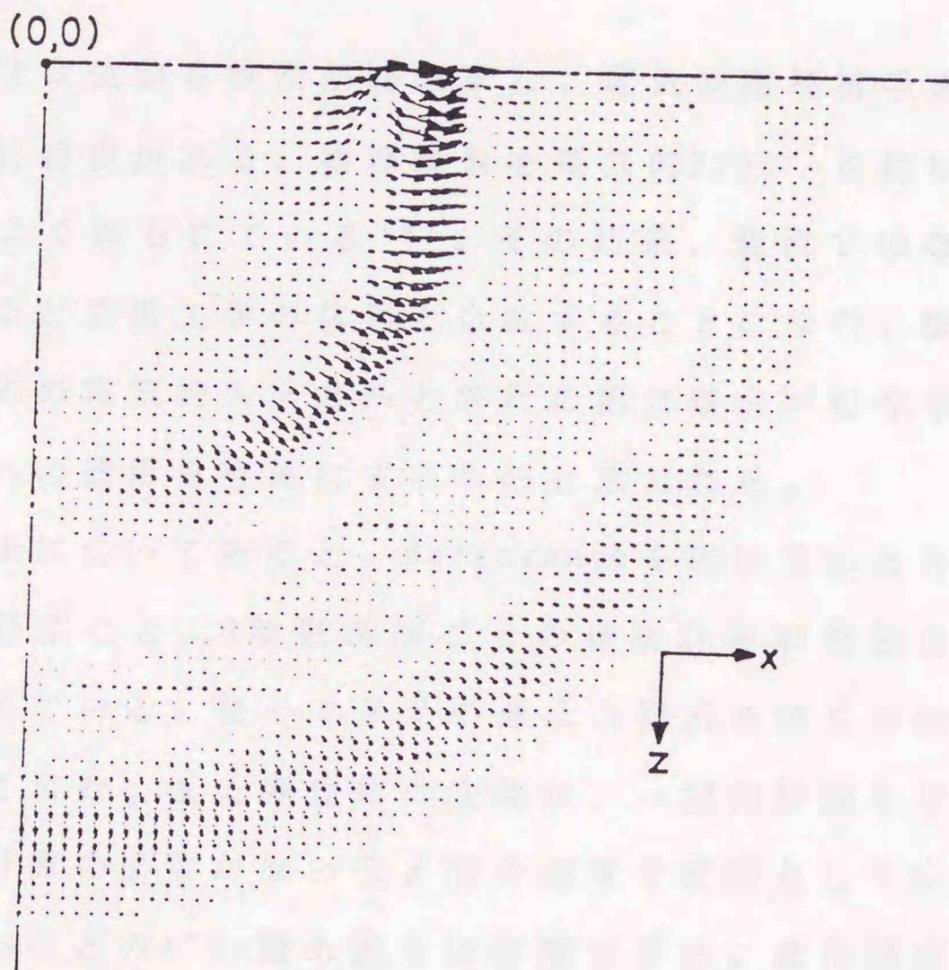
図I-1-16 半無限弾性体の自由表面に応力パルスを加えた時の
波動伝播特性の計算結果



(b) $T_1 + T_3$ 应力分布



(c) T_{xy} 应力分布



(d) 音響ポインティングベクトルの計算結果

報を我々に与えてくれる。

1-5. むすび

2次元等方弾性体について、その等価回路表示とBergeron法による時間軸上での定式化を行い、固体内を伝播する弾性波動の数値解析に有効であることを示した。また、ほぼ満足のゆく計算結果も得ることができた。これまでの議論で明らかとなった本手法の特徴は次のような点である。

(1) 本手法は波動を等価回路表示し、電気回路解析手法を用いて解析するところに特徴がある。物理現象を電氣的アナロジーを用いて考察することの利点はよく知られている⁽⁸⁾。その結果、変位ではなく粒子速度を変数とするなど音響工学の体系と合致することになり、弾性波動を発生検出するための電氣的入出力系と解析の際に整合が取りやすい。また同様に圧電体への適用を容易にするものと思われる。

(2) 計算法についてみると、Bergeron法を用いているため簡単な計算アルゴリズムで節点ごと、1離散時間ごとの逐次計算が可能となり、その高速化が計られている。従って多元の連立方程式を解く手法に比べ計算回数が少なくて済む。また弾性体の変数が、一度の計算ですべて求まるため繰り返し計算の必要がない。粒子速度を変数としているので音響ポインティングベクトルなどのパワー量も直ちに計算できる。また節点につながれた集中定数素子の値に注意すれば、時間と空間の離散間隔にはある一定の関係があり常に安定である。しかもそれらの素子が媒質条件を与えるため、不均一な場合でも素子の値を適当に定めるだけで離散間隔を変更することなしに計算が可能となる。更に差分法では解析が容易ではない複雑な境界形状に対しても本手法は階段状にはあるが適用可能である。但し、本手法は本質的には差分関係を基にしているため、よい近似を得

るためには波長を10分割以上する必要がある。また変位のみを変数として計算できる差分法に比べベクトル計算法である本手法はより多くの計算容量を必要とする。

本章における考え方を基本に以下の章では、本手法を3次元、異方性へと拡張し、上記の特徴をそのまま保った有効な解析法となることを示す。

第2章 3次元等方弾性体への適用⁽¹⁾

2-1. まえがき

前章では2次元等方弾性体内を伝播する弾性波動への空間回路網法の適用について考察した。そこでは、微小な同一長さ、同一特性の1次元線路を正方格子状に組合せ、各線路の交わる節点に弾性体の変数を電圧、電流として割り当てた基本等価回路を導いている。この基本等価回路は十分分割間隔を小さくしたとき弾性体の微小区間に成り立つ関係式を満足し縦波、横波双方の波動場を生成する。そのとき、その時間応答計算に際して、Bergeron法による波動伝搬の定式化を利用し、節点方程式による逐次的解析手法を実現している。しかし、2次元で扱える問題はかなり特殊な場合である。特に本来テンソル表現される弾性体においては3次元の取り扱いが本質的でありまた現実の問題の解決には不可欠である。そこで本章では、2次元問題における解析法の3次元等方弾性体への拡張を試みている。その結果、3次元においても2次元の場合と同様の解析法が適用でき、計算結果も妥当性を持つことが確かめられた。以下2-2. では3次元等方弾性体の等価回路表示について述べ、2-3. では時間応答解析の定式化、2-4. でその計算結果について述べる。

2-2. 3次元等方弾性体の等価回路表示

本章では3次元微小空間において弾性体の関係式を満足する基本分布回路を導き、それを多数組合せて、対象とする弾性体を近似する。従って従来から行われている特定のモードや波動成分に着目した集中定数素子による等価回路とは違って、その等価回路はただちに対象とする弾性波

動の性質を表現するものではなく、適当な境界条件、媒質パラメータを与えることによりあらゆる形状、励振条件に対する波動場を表現できる汎用性を持っている。本手法では3次元等方弾性体を図I-2-1のような立方格子網の等価回路として表す。格子網の各枝は1次元線路として、格子点は各線路が接続された電流連続の成立する節点として扱う。各枝は Δd という同一の微小長さを持つ1次元線路に当り、その方向に平面波が伝搬していることになる。各節点には表I-2-1に示すように弾性体の変数が電圧電流として割り当てられ、弾性体の関係式を満足するように配置されている。但し、一般の弾性体の取り扱いとは異なり、変位の時間微分（粒子速度と呼び x, y, z 方向の変位を表わす u, v, w の記号の上の \cdot はその時間微分を示す）と応力を変数としており、また応力は圧縮力を正としているので対応に注意を要する。等価回路の中で電圧と弾性体変数との対応を明確とするため応力を電圧とする節点を応力節点と呼び白丸 \circ で、粒子速度を電圧とする節点を粒子速度節点と呼び黒丸 \bullet で表して区別している。図I-2-1の中の最も基本となる回路を図I-2-2に示す。

次にこの図I-2-2の基本回路について簡単に説明する。

(1) 等価回路の基本構成

各節点は同じ長さの1次元線路でつながれており、各線路は応力を電圧とする伝送路となるよう粒子速度節点側にジャイラータを挿入している。伸縮応力 T_1, T_2, T_3 を電圧として持つ節点には3種類の電圧端子が関連づけられ、各端子につないだ容量 C_p と各容量間を結ぶ相互容量 M_c とでいわゆるポアソン比の動きを等価表示している。せん断応力節点には容量 C_s を負荷して線路のインピーダンスと速度を見かけ上変化させることにより、横波波動に対応するインピーダンス及び速度に対応させている。

(2) 媒質条件について

2次元の場合と同様に線路定数と容量 C_p, C_s の値はある条件下で任意性を持っている。すなわち節点に負荷された容量、インダクタンスなどの各集中

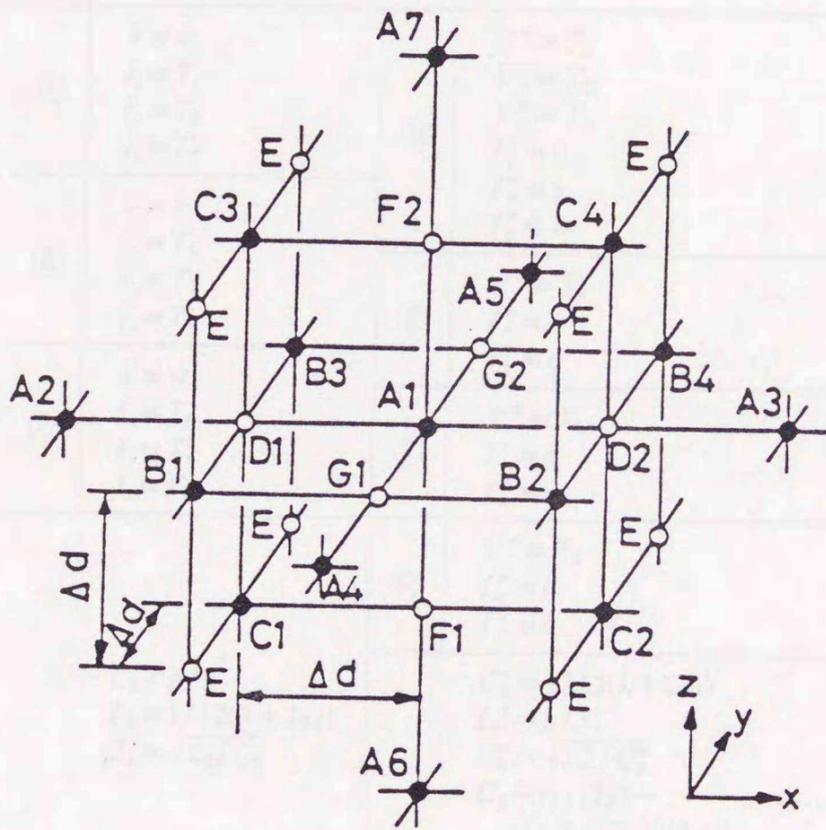


图 I-2-1 3次元立方格子網

表 I-2-1 3次元等方弾性体の変定数とその回路変定数との対応

	Particle velocity		Stress
Ⓐ	$V \equiv \dot{u}$ $I_x \equiv T_1$ $I_y \equiv T_6$ $I_z \equiv T_5$	Ⓓ	$V^* \equiv T_1$ $V_2^* \equiv T_2$ $V_3^* \equiv T_3$ $I_x^* \equiv \dot{u}$ $I_y^* \equiv \dot{v}$ $I_z^* \equiv \dot{w}$
	$V \equiv \dot{v}$ $I_x \equiv T_6$ $I_y \equiv T_2$ $I_z \equiv T_4$		Ⓔ
Ⓑ	$V \equiv \dot{w}$ $I_x \equiv T_5$ $I_y \equiv T_4$ $I_z \equiv T_3$	Ⓕ	$V^* \equiv T_5$ $I_z^* \equiv \dot{u}$ $I_x^* \equiv \dot{w}$
			Ⓖ
	$C_0 = \rho/3$ $L_0 = 1/\{2(\lambda + 2\mu)\}$ $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$		$C_0^* = 1/\{2(\lambda + 2\mu)\}$ $L_0^* = \rho/3$ $Z_0^* = \sqrt{L_0^*/C_0^*}$ $C_5 = [1/(2\mu) - 1/\{2(\lambda + 2\mu)\}]4\Delta d$ $C_p = [(\lambda + \mu)/\{\mu(3\lambda + 2\mu)\} - 1/\{2(\lambda + 2\mu)\}]2\Delta d$ $M_C = -\lambda/\{2\mu(3\lambda + 2\mu)\}2\Delta d$

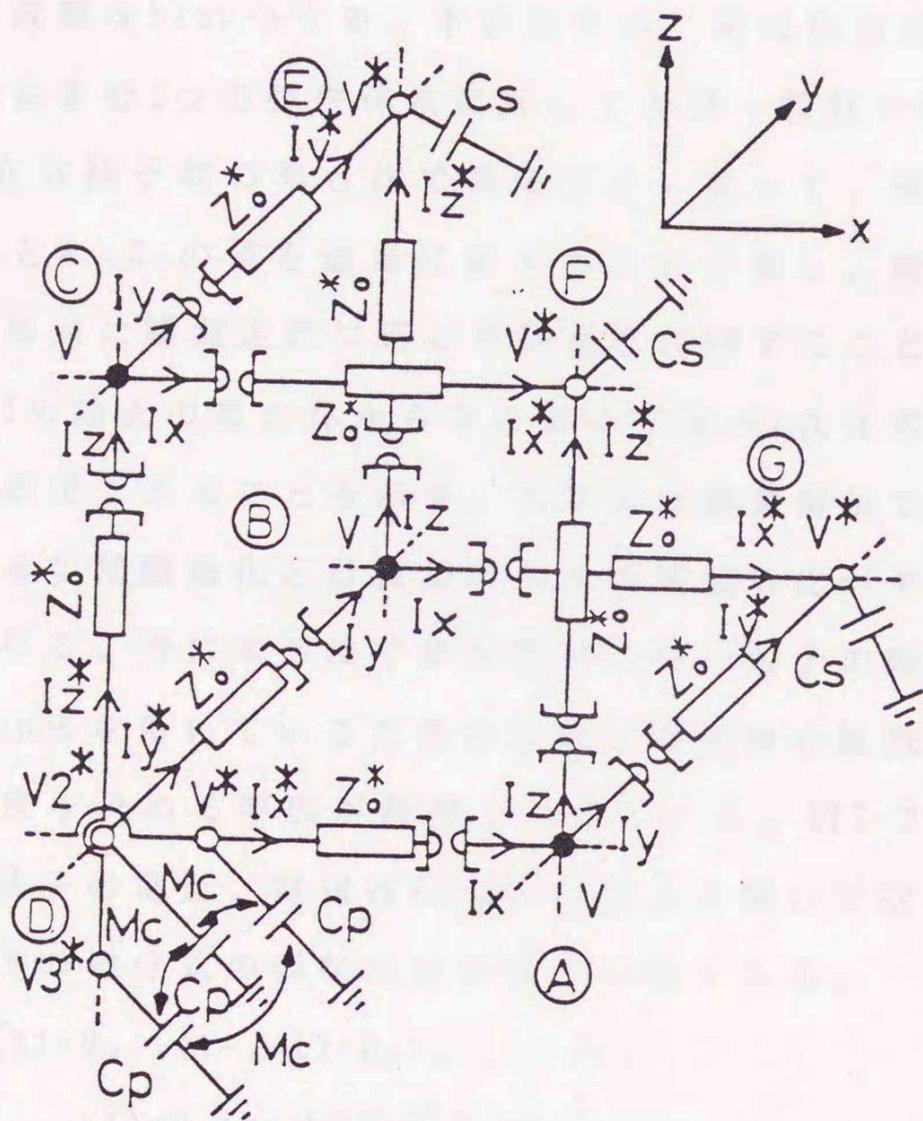


図 I-2-2 3次元等方弾性体の基本等価回路

定数素子の値をそれらに蓄積されるI値キ-が負にならないように選ばばよい。ここでは便宜的に1次元線路は、特性インピーダンスが弾性波の縦波平面波の音響インピーダンスの $\sqrt{2/3}$ 倍、速度の $\sqrt{6}$ 倍としている。これらの線路定数はそのようになっているが次に示すように節点が多数集合して相互に関連することにより、十分分割間隔をせばめたとき通常の弾性体のパラメータを持つ波動をシミュレートする。本手法では、定式化の便宜のため特性の違う弾性体を含む1つの弾性体系に対しても同一特性で同一長さ Δd の1次元線路の立方格子状の集合体で表現する。従って、弾性定数の違う媒質条件は C_p と M_c, C_s の値を適当に変えることで表し、同様に密度の違いは粒子速度節点に媒質定数に応じた容量を負荷することで表す。

以下図I-2-1の節点の集合体からなる等価回路が3次元等方弾性体の弾性波動を等価表現できることを示す。本手法は数値解析であり、等価回路表現における空間離散化と計算法の中の時間離散化がその近似の度合を示すことになる。特に本手法では線路やリアクタンス素子の時間軸上での定式化にBergeron法を用いているため時間軸と空間軸の離散化に一定の関係があり近似度を定める要因が厳密となっている。図I-2-3のような線路に対して各端子の電圧、電流はBergeron表示を用いて次のように表せる。但し、以下の微分式の表記法は前章と同様である。

$$V_k(t) + Z_0 I_k(t) = V_{k-1}(t - \Delta t) + Z_0 I_{k-1}(t - \Delta t) \quad (\text{I.2.1a})$$

$$V_{k-1}(t) - Z_0 I_{k-1}(t) = V_k(t - \Delta t) - Z_0 I_k(t - \Delta t) \quad (\text{I.2.1b})$$

ここで $\Delta t = \Delta d / v_1$ で v_1 は線路の速度である。この式を使って図I-2-4に示すD1節点のx方向の関係式は次のようになる。

$$Z_0 \dot{u}(A1, t) + T_{11}(A1, t) = Z_0 \dot{u}_2(D1, t - \Delta t) + T_1(D1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.2a})$$

$$Z_0 \dot{u}(A1, t) - T_{11}(A1, t) = Z_0 \dot{u}_2(D1, t + \Delta t) - T_1(D1, t + \Delta t) \quad (\text{I.2.2b})$$

$$Z_0 \dot{u}(A2, t) + T_{12}(A1, t) = Z_0 \dot{u}_1(D1, t + \Delta t) + T_1(D1, t + \Delta t) \quad (\text{I.2.2c})$$

$$Z_0 \dot{u}(A2, t) - T_{12}(A1, t) = Z_0 \dot{u}_1(D1, t - \Delta t) - T_1(D1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.2d})$$

また電流則より次式が成り立つ。

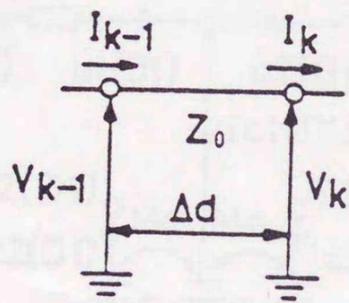


图 I-2-3 1次元基本分布线路

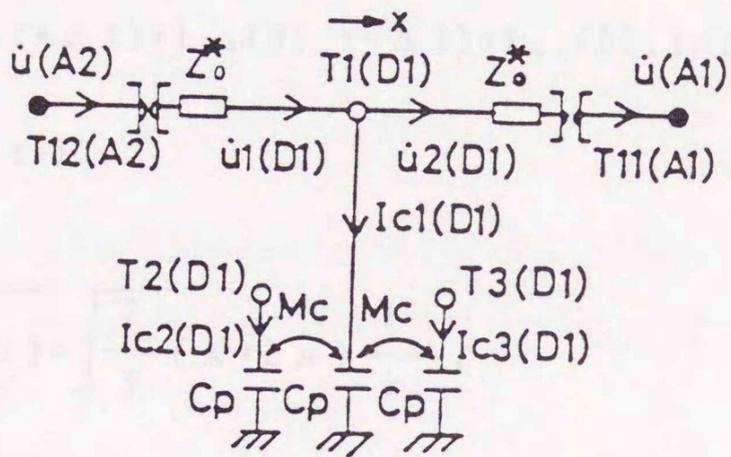


図 I-2-4 D1節点における詳細図

$$\dot{u}_1(D1) - \dot{u}_2(D1) = I_{c1}(D1) \quad (I.2.3)$$

(I.2.2) 式の $c+d-a-b$ とし電流則を代入すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} & 2Z_0^* \{ \dot{u}(A2, t) - \dot{u}(A1, t) \} \\ & = 2 \{ T_1(D1, t + \Delta t) - T_1(D1, t - \Delta t) \} + Z_0^* \{ I_{c1}(D1, t + \Delta t) \\ & \quad + I_{c1}(D1, t - \Delta t) \} \end{aligned} \quad (I.2.4)$$

同様の式が D2 節点でも得られ (I.2.4) 式との和をとれば次の式となる。

$$\begin{aligned} & \{ \dot{u}(A2, t) + \dot{u}(A3, t) - 2\dot{u}(A1, t) \} \\ & = \frac{1}{Z_0^*} \{ T_1(D1, t - \Delta t) - T_1(D2, t + \Delta t) - T_1(D2, t - \Delta t) \} \\ & \quad + \frac{1}{2} \{ I_{c1}(D1, t + \Delta t) + I_{c1}(D1, t - \Delta t) + I_{c1}(D2, t + \Delta t) \\ & \quad + I_{c1}(D2, t - \Delta t) \} \end{aligned} \quad (I.2.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} Z_0^* &= \sqrt{\frac{2}{3} \rho (\lambda + 2\mu)} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\lambda + 2\mu) \frac{1}{v_p}, \\ v_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \frac{\Delta d}{\sqrt{6} \Delta t} \end{aligned}$$

であるから (I.2.5) 式を書き直し両辺を $4\Delta d^2$ で割れば次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta d^2} \{ \dot{u}(A2, t) + \dot{u}(A3, t) - 2\dot{u}(A1, t) \} \\ & = \frac{1}{8\Delta d \Delta t} \cdot \frac{1}{\lambda + 2\mu} \{ T_1(D1, t + \Delta t) - T_1(D1, t - \Delta t) \\ & \quad + T_1(D2, t + \Delta t) - T_1(D2, t - \Delta t) \} + \frac{1}{8\Delta d^2} \{ I_{c1}(D1, t + \Delta t) \\ & \quad + I_{c1}(D1, t - \Delta t) + I_{c1}(D2, t + \Delta t) + I_{c1}(D2, t - \Delta t) \} \end{aligned} \quad (I.2.6)$$

今 $\Delta d \rightarrow 0$ とすれば $\Delta t = \Delta d/v_1$ より Δt も $\rightarrow 0$ となり、次の偏微分方程式と等価であることがわかる。

$$\begin{aligned} & \partial_x^2 \dot{u}(A1) \\ &= \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_{xt}^2 T_1(A1) \\ & \quad + \partial_{xt}^2 \{C_p' T_1(A1) + M_c' (T_2(A1) + T_3(A1))\} \end{aligned} \quad (I.2.7)$$

但し, $C_p' = C_p / (2\Delta d)$, $M_c' = M_c / (2\Delta d)$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad & \frac{1}{2} \{I_{c1}(t + \Delta t) + I_{c1}(t - \Delta t)\}_{\Delta t \rightarrow 0} \\ &= I_{c1}(t) = C_p \partial_t T_1 + M_c (\partial_t T_2 + \partial_t T_3) \end{aligned}$$

の関係を用いた。同様にG, F節点で関係式を求めてまとめれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta d^2} [(\lambda + 2\mu) \{\dot{u}(A2) + \dot{u}(A3) - 2\dot{u}(A1)\} \\ & \quad + \mu \{\dot{u}(A4) + \dot{u}(A5) - 2\dot{u}(A1) + \dot{u}(A6) + \dot{u}(A7) - 2\dot{u}(A1)\} \\ & \quad + (\lambda + \mu) \{\dot{v}(B1) + \dot{v}(B4) - \dot{v}(B2) - \dot{v}(B3) \\ & \quad + \dot{w}(C1) + \dot{w}(C4) - \dot{w}(C2) - \dot{w}(C3)\}]_{\Delta d \rightarrow 0} \\ &= (\lambda + \mu) \partial_x \{ \partial_x \dot{u}(A1) + \partial_y \dot{v}(A1) + \partial_z \dot{w}(A1) \} \\ & \quad + \mu \nabla^2 \dot{u}(A1) \\ &= \partial_{xt}^2 T_1(A1) + \partial_{zt}^2 T_5(A1) + \partial_{vt}^2 T_6(A1) \end{aligned} \quad (I.2.8)$$

但し, $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ で $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta d$ の関係を用いた。

またBergeron表示式から次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & 6Z_0 \cdot \{\dot{u}(A1, t + 2\Delta t) + \dot{u}(A1, t - 2\Delta t) - 2\dot{u}(A1, t)\} \\ &= 2\{T_1(D1, t + \Delta t) - T_1(D1, t - \Delta t) + T_1(D2, t + \Delta t) - T_1(D2, t - \Delta t)\} \\ & \quad + 2\{T_5(F1, t + \Delta t) - T_5(F1, t - \Delta t) + T_5(F2, t + \Delta t) - T_5(F2, t - \Delta t)\} \\ & \quad + 2\{T_6(G1, t + \Delta t) - T_6(G1, t - \Delta t) + T_6(G2, t + \Delta t) - T_6(G2, t - \Delta t)\} \end{aligned} \quad (I.2.9)$$

両辺を $4\Delta t^2$ で割って $\Delta d \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えれば次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \rho \partial_t^2 \dot{u}(A1) \\ & = \partial_{xt}^2 T_1(A1) + \partial_{zt}^2 T_5(A1) + \partial_{yt}^2 T_6(A1) \end{aligned} \quad (I.2.10)$$

ここで $Z_0^* = \sqrt{2/3} \rho v_p$ の関係を用いた。

(I.2.8), (I.2.10) 式より本手法が十分分割間隔が小さいとき次の3次元等方弾性体の $\dot{u}(A1)$ 節点における波動方程式を近似していることがわかる。

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \partial_x \{ \partial_x \dot{u}(A1) + \partial_y \dot{v}(A1) + \partial_z \dot{w}(A1) \} + \mu \nabla^2 \dot{u}(A1) \\ & = \rho \partial_t^2 \dot{u}(A1) \end{aligned} \quad (I.2.11)$$

以上のことから、本手法が(I.2.11)式の差分近似と考えればその近似の次数は Δd , Δt に対して2次ということがわかる。

中村は本手法と同様の考え方に基づいた微小空間における分布定数的等価回路を提案している⁽²⁾。本手法における等価回路との違いは中村の回路は格子状に組合せた集中定数素子、すなわち分布定数回路で表されている点である。また、その計算は各素子に成り立つ電圧、電流の連立1次偏微分方程式をたとえば差分法などを使って直接解いている⁽³⁾。その点本手法における計算法では2-3で述べるように簡単な代数方程式を解けば離散時間ごとに時間応答が計算できるので扱いやすく、時間領域も2つで済み計算容量の節約がはかれる。また場所によって媒質条件が変る不均質な弾性体の場合でも各節点に負荷した容量の値が媒質条件を与えるため、線路の値を変える必要がなく本手法がそのまま適用できる。

2-3. 時間応答解析の定式化

ここでは図I-2-5に示すD節点での時間領域での定式化について述べる。 Z_0^* を線路の特性インピーダンス、 Δt を伝搬時間として各1次元線路のBergerson表示式は次のようになる。

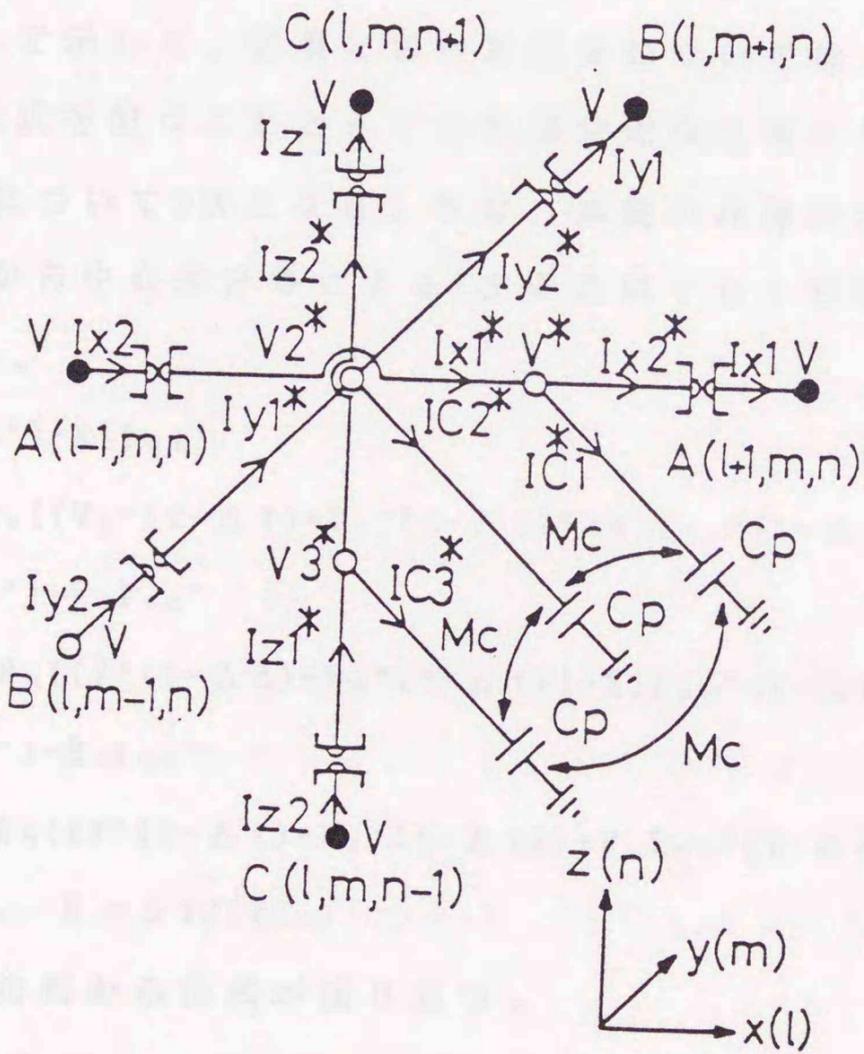


図 I-2-5 $D(1, m, n)$ 接点での変数のとり方

$$V^* + Z_0 I_{x1}^* = I_{x2}(l-1, t - \Delta t) + Z_0 V(l-1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.12a})$$

$$V^* - Z_0 I_{x2}^* = I_{x1}(l+1, t - \Delta t) - Z_0 V(l+1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.12b})$$

$$V_2^* + Z_0 I_{y1}^* = I_{y2}(m-1, t - \Delta t) + Z_0 V(m-1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.12c})$$

$$V_2^* - Z_0 I_{y2}^* = I_{y1}(m+1, t - \Delta t) - Z_0 V(m+1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.12d})$$

$$V_3^* + Z_0 I_{z1}^* = I_{z2}(n-1, t - \Delta t) + Z_0 V(n-1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.12e})$$

$$V_3^* - Z_0 I_{z2}^* = I_{z1}(n+1, t - \Delta t) - Z_0 V(n+1, t - \Delta t) \quad (\text{I.2.12f})$$

ここで各電圧，電流は座標 (l, m, n) ，時間 t での値，すなわち $V^* = V^*(l, m, n, t)$ であり，それと異なる座標，時間におけるものは簡単のため異なる因子のみ（ ）で示した。容量における計算については，できるだけ安定性の良い近似式を使うこととして台形積分近似を用いた。この場合近似の次数は Δt について3次となる。なお，線路の計算においては近似が2次であることから中心差分等による2次の近似でも十分な精度が得られると考えられる。

$$\begin{aligned} V^* + R_M(V_2^* + V_3^*) - R_C I_{c1}^* \\ = V^*(t - \Delta t) + R_M\{(V_2^*(t - \Delta t) + V_3^*(t - \Delta t))\} + R_C I_{c1}^*(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.2.13a})$$

$$\begin{aligned} V_2^* + R_M(V^* + V_3^*) - R_C I_{c2}^* \\ = V_2^*(t - \Delta t) + R_M\{(V^*(t - \Delta t) + V_3^*(t - \Delta t))\} + R_C I_{c2}^*(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.2.13b})$$

$$\begin{aligned} V_3^* + R_M(V^* + V_2^*) - R_C I_{c3}^* \\ = V_3^*(t - \Delta t) + R_M\{(V^*(t - \Delta t) + V_2^*(t - \Delta t))\} + R_C I_{c3}^*(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{I.2.13c})$$

但し， $R_M = M_C / C_P$ ， $R_C = \Delta t / (2C_P)$

また電流連続の法則から次式が成り立つ。

$$I_{x1}^* - I_{x2}^* = I_{c1}^* \quad (\text{I.2.14a})$$

$$I_{y1}^* - I_{y2}^* = I_{c2}^* \quad (\text{I.2.14b})$$

$$I_{z1}^* - I_{z2}^* = I_{c3}^* \quad (\text{I.2.14c})$$

以上の式を連立させることにより，時刻 t での各変数の値が求められる。今，式(I.2.12a)～(I.2.12f)の右辺をA1～A6，式(I.2.13a)～(I.2.13c)の右辺をB1～B3とすると電圧 V^* ， V_2^* ， V_3^* について次式のように定式化さ

れる。この式を再び(I.2.12a)～(I.2.12f),式(I.2.13a)～(I.2.13c)へ代入して各電流が求められる。

$$V^* = \frac{1}{D} \left\{ \left(1 + \frac{2R_o}{Z_o^*} + R_M \right) \cdot C1 - R_M \cdot (C2 + C3) \right\} \quad (\text{I.2.15a})$$

$$V_2^* = \frac{1}{D} \left\{ \left(1 + \frac{2R_o}{Z_o^*} + R_M \right) \cdot C2 - R_M \cdot (C1 + C3) \right\} \quad (\text{I.2.15b})$$

$$V_3^* = \frac{1}{D} \left\{ \left(1 + \frac{2R_o}{Z_o^*} + R_M \right) \cdot C3 - R_M \cdot (C1 + C2) \right\} \quad (\text{I.2.15c})$$

$$\text{但し } C1 = B1 + \frac{R_o}{Z_o^*} (A1 + A2)$$

$$C2 = B2 + \frac{R_o}{Z_o^*} (A3 + A4)$$

$$C3 = B3 + \frac{R_o}{Z_o^*} (A5 + A6)$$

$$D = \left(1 + \frac{2R_o}{Z_o^*} \right)^2 + R_M \cdot \left(1 + \frac{2R_o}{Z_o^*} \right) - 2 \cdot R_M^2$$

通常離散的手法では計算精度の問題から、波長を空間的に10分割以上する必要があり、本手法でも同様である。また取扱える対象の精度や規模は使用する計算機の容量と計算速度によって決まる。最近スーパーコンピュータに代表されるように計算機の大容量化、超高速化が進んできており、扱える問題も増えつつある。

2-4. 解析結果

本手法による計算の妥当性を確認するため、基本的な問題を設定して計算を試みた。まず想定している速度で波動が伝搬していることを確認するため図I-2-6のモデルで計算を行った。1次元線路は直接3次元弾性波

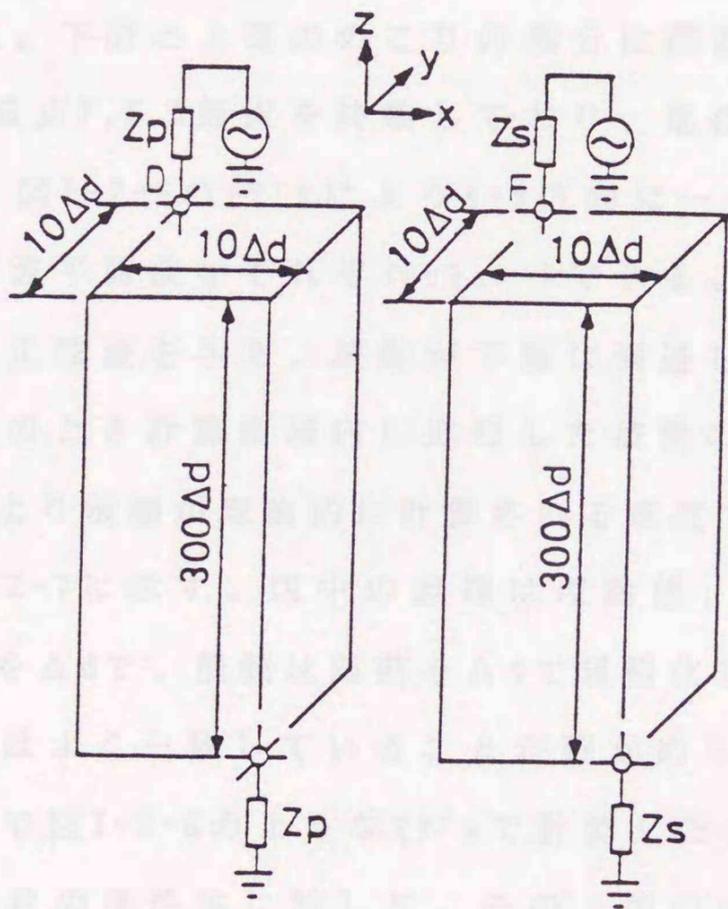


図 I-2-6 縦波および横波平面波の速度を確認するための節点配置

(1) (2) (3) に示す。図ではそれぞれ 1 種類の節点配置が示されているが、
 上の図は入力電圧の振動数 f が、 f_0 とおき、 $f = f_0 + \Delta f$ の場合の図であり、
 下の図は入力電圧の振動数 f が、 $f_0 - \Delta f$ の場合の図である。図 I-2-2
 (1) (2) (3) はそれぞれ $f = f_0 + \Delta f$ 、 $f = f_0$ 、 $f = f_0 - \Delta f$ の場合の節点配置を示す。

の特性を示しているわけではなく、その多数の集合体で弾性波を近似する。たとえば表I-2-1では縦波は線路の速度の $1/\sqrt{6}$ となっており、時間 Δt の間に $\Delta d/\sqrt{6}$ しか進まないことになる。図I-2-6に示す直方体の領域を考え、上面のD節点の V^* 端子に内部インピーダンスとして縦波平面波の音響インピーダンス $Z_p^* = \sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)}$ 、F節点に内部インピーダンスとして横波平面波の音響インピーダンス $Z_s^* = \sqrt{\rho\mu}$ を持つ電圧源を接続したものの2種類について計算した。下面と上面ののこりの部分は前者は Z_p^* 、後者は Z_s^* でそれぞれD, A, B節点F, E, C節点を終端しており、他の前後、左右の面は対称としている。図I-2-6のモデルによりx-y方向に一様でz方向に進行する縦波平面波、横波平面波をそれぞれシミュレートできる。そこで電圧として適当な周期の連続正弦波を与え、波動が下面に到達したところで励振を止める。そしてそのとき計算領域内に進行した波動の波長を調べた。波長を調べることにより波動が理論的に計算される速度で進むか確認できる。その結果を図I-2-7に示す。図中の直線は理論値、丸印が計算結果である。縦軸は波長を Δd で、横軸は周期を Δt で規格化している。その結果、理論値と計算値はよく一致していることが確かめられた。次に、より一般的な問題として図I-2-8のようなモデルで計算した。図I-2-8は周囲が全て自由の直方体状の弾性体に対して、その上面の中央部に周期 $40\Delta t$ の正弦波1波長分の T_x 応力を入力した場合の計算である。図の対称性を考えて鎖線で示した1/4の領域のみ計算を行った。図中には境界条件の設定も示してある。入力部は上面の中央から半径 $8\Delta d$ の中に分布し、入力部の中心における T_x の振幅は1とし、そこから $2\Delta d$ 離れるごとに0.85, 0.5, 0.15, 0.0の振幅としている。図I-2-8の設定の計算結果を図I-2-9(a), (b), (c)に示す。図ではそれぞれ2種類の結果が対で示されているが、上の図は入力領域のあるx-y面、すなわち図I-2-8の上面の様子であり、下の図は入力を中心点を含むx-z面の様子を示したものである。図I-2-9の(a), (b), (c)はそれぞれ $98\Delta t$, $146\Delta t$, $196\Delta t$ 時間後の粒子速度の計

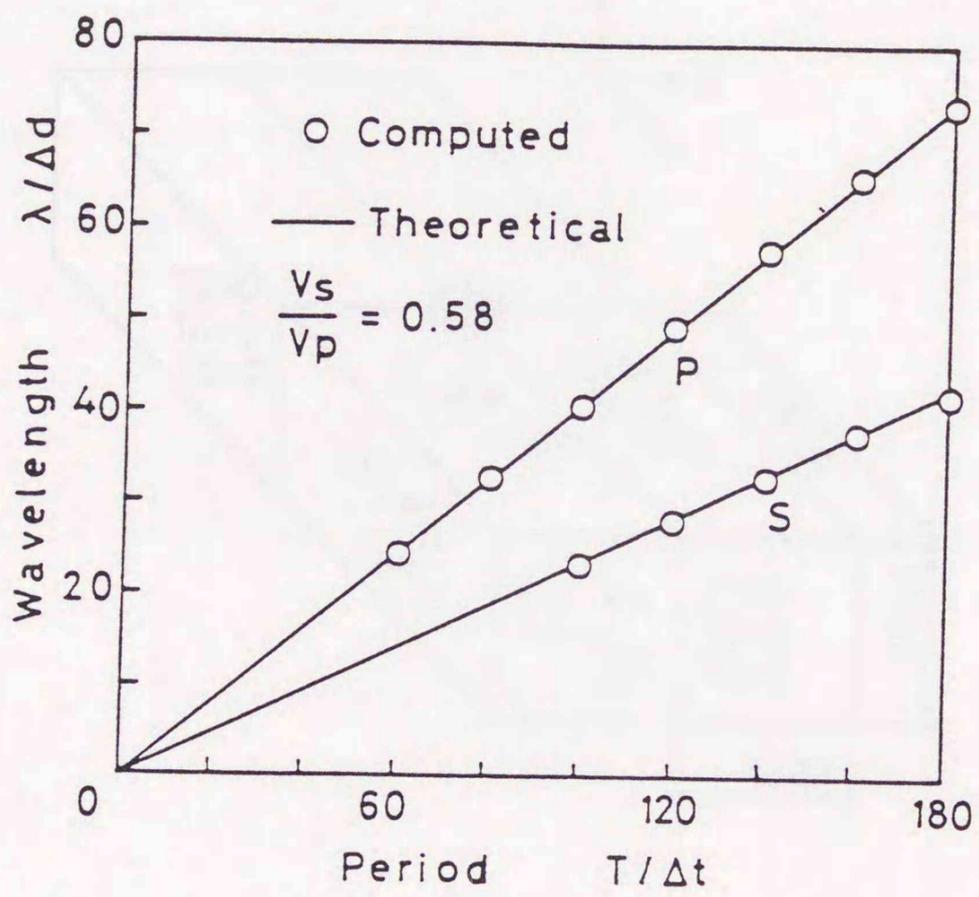


図 I-2-7 周期対波長の計算結果；

$V_s/V_p=0.58$, V_s :横波の速度, V_p :縦波の速度

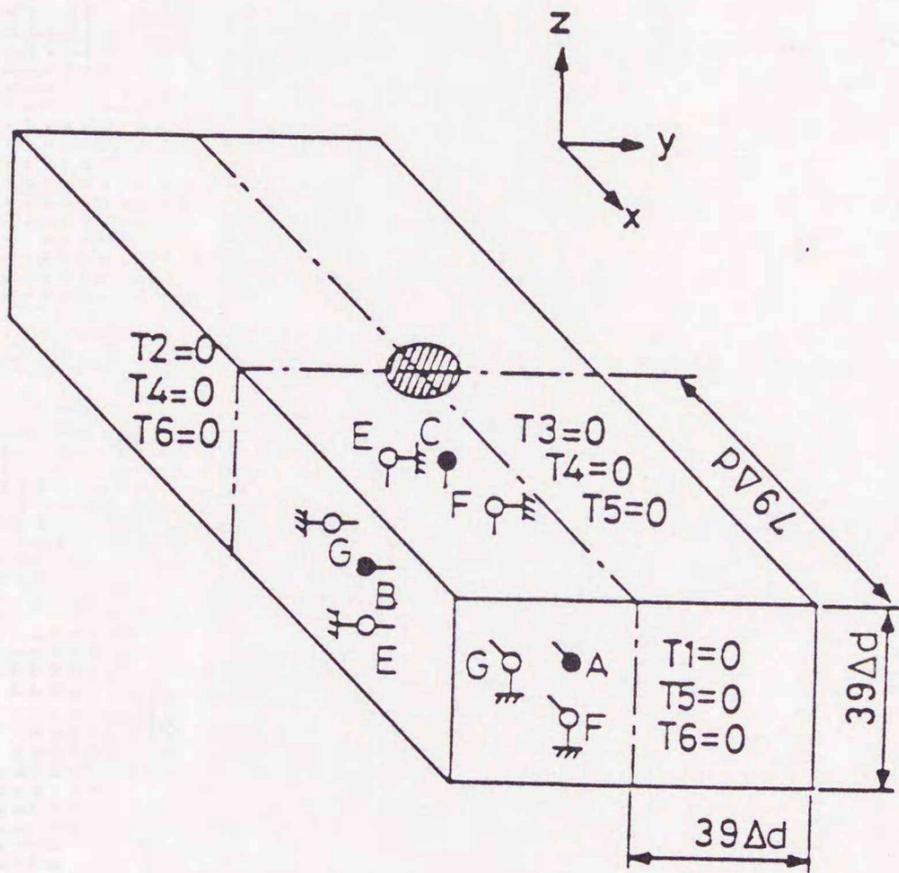


図 I-2-8 自由境界に囲まれた直方等方弾性体

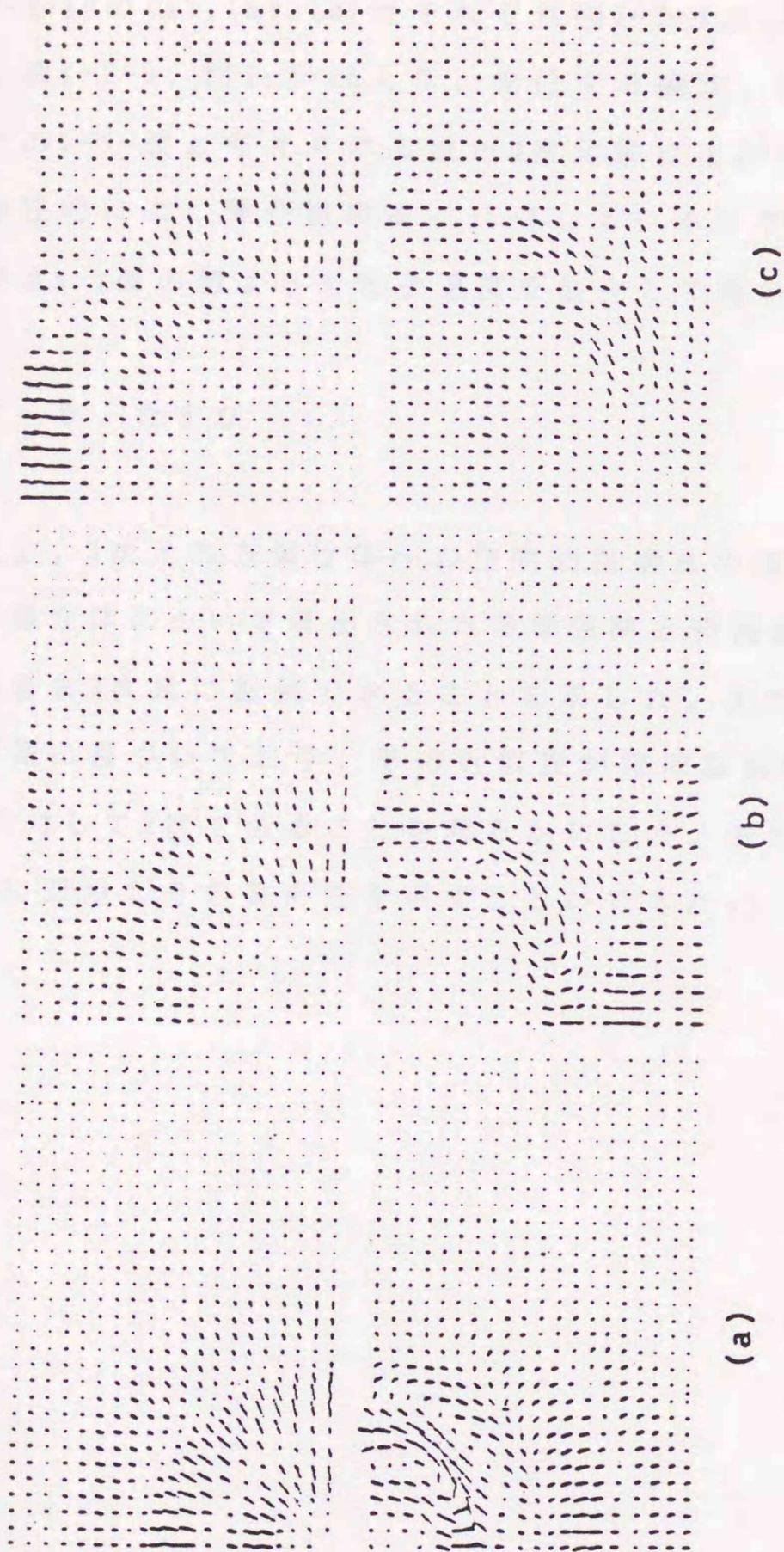


図 I-2-9 図 I-2-8 における 1/4 部分の粒子速度ベクトルの計算結果
 (a) $T=98\Delta t$ (b) $T=146\Delta t$ (c) $T=196\Delta t$

算結果で、縦波平面波の移動距離に直すとそれぞれ約 $40\Delta d$, $60\Delta d$, $80\Delta d$ だけ進んだ場合にあたる。また図I-2-10には模式的な説明を示した。図I-2-10の(a), (b), (c)はそれぞれ図I-2-9の(a), (b), (c)に対応している。図I-2-9, 図I-2-10より、先行する縦波、遅れて進む横波と自由表面でのレリー波と考えられる波が3次元的に広がって進行する様子があり定性的によく弾性波動をシミュレートしていると考えられる。ただしx-y面の図はx-z面の図よりも粒子速度を拡大して描いてある。

2-5. むすび

以上、3次元等方弾性体への空間回路網法の適用について述べ、2次元等方弾性体について導出された等価回路と時間領域での定式化の概念がそのまま3次元に拡張できることを示した。また本手法は基本的には差分関係に基づいており、その近似度が空間離散間隔 Δd および離散時間 Δt に対して2次であることを明らかにした。最後に本解析法を基本的な例題に適用しその妥当性を示すことができた。

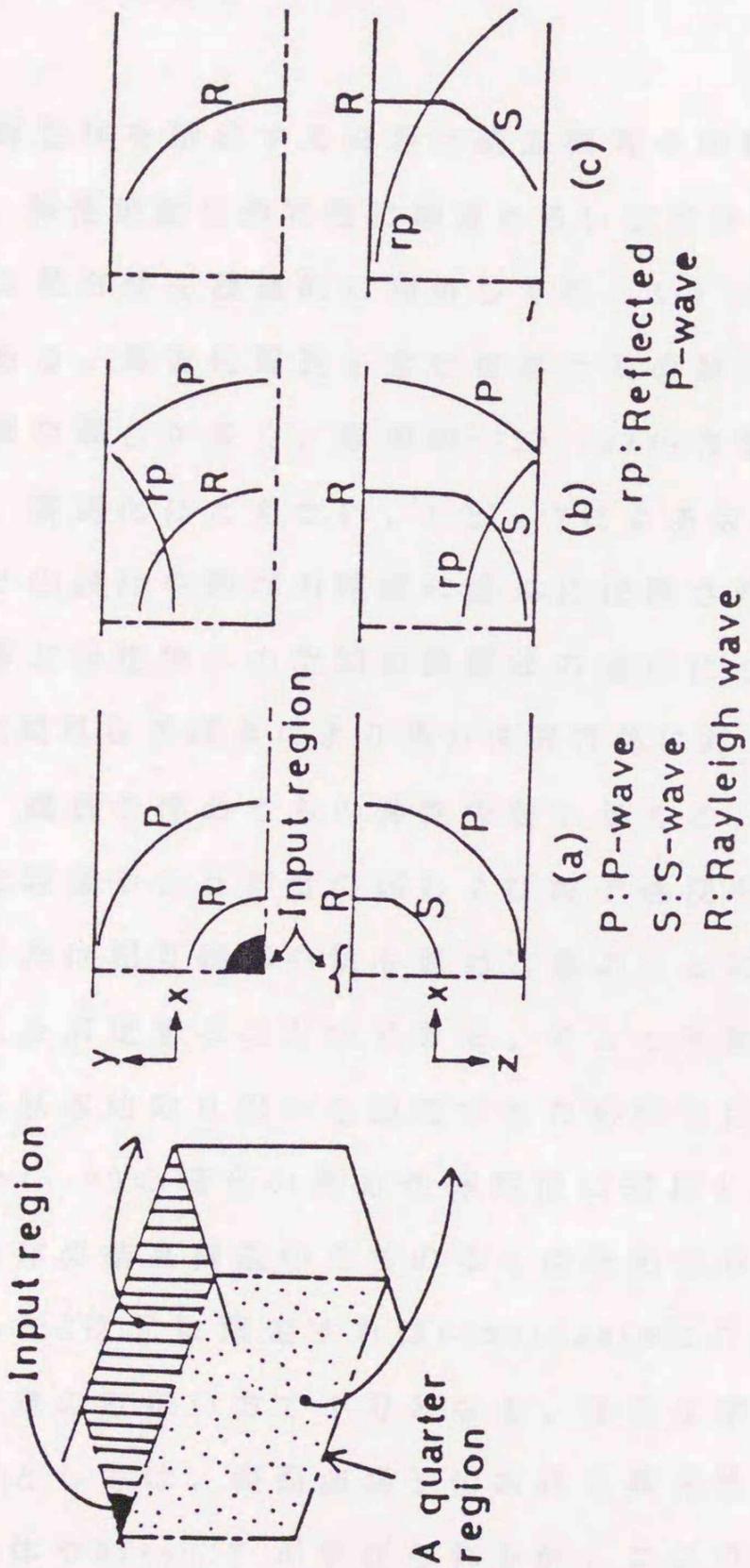


図 I-2-10 図 I-2-9の説明のための模式図

第3章 異方性弾性体への適用⁽¹⁾

3-1. まえがき

一般に弾性体を構成する材料は結晶軸等その物性的特性に基づく異方性を持ち、弾性波動伝搬特性に顕著あるいは微妙な影響を与える。また、そのような異方性を積極的に利用して新しいデバイスを構成していくことも可能である。異方性媒質を含む複雑な系の解析を行う場合、解析的手法では困難な場合が多く、数値的シミュレーションが有効になる。最近の計算機の大型化、高速化にともない、コンピュータによる数値シミュレーション手法が電子デバイスなどの設計や動作の確認に盛んに使用されるようになってきた。前章まで等方弾性体への空間回路網法の適用について論じてきた。本手法は比較的簡単な手続きにより異方性弾性体に対しても適用可能である。すなわち、媒質条件のうちの弾性係数を与える、応力を電圧とする節点に付加した容量や相互容量の値および粒子速度を電圧とする節点に付加した自己または相互誘導の値を適当に選ぶことにより対象とする弾性係数の異方性を満足することができる。そこで本章では本手法による異方性に対する基本的取り扱いを説明するため弾性係数 (compliance) のうち $s_{14}=s_{25}=s_{36}=0$ の場合の異方性弾性体に適用した結果について述べている。弾性体の結晶構造のうちの多くはそのような compliance の条件を持ち、扱いを2次元に限定すれば compliance にこれらの要素が現れてこないので本章の取扱い方で十分となる。また工学的に利用されている異方性弾性体としては、表面波素子における異方性圧電媒質などの圧電性を持つ結晶体やセラミック⁽²⁾が挙げられるが、ここでは圧電性は考慮していない。しかし電気機械結合が小さいとする弱結合近似の成り立つ場合も多く、本手法による異方性弾性体の解析結果はそれらの動作の把握に有

益な知見を与えると考えられる。なお圧電性媒質内を伝播する弾性波動の空間回路網法における取り扱いについては第II編において基本的な議論を行なう。以下、3-2.において異方性弾性体の等価回路表示について述べ、3-3.ではBergeron法による時間応答計算の定式化について述べる。次に3-4.では本手法を基本的な異方性弾性体問題に適用した結果について述べている。

3-2. 異方性を含む弾性体の基本分布等価回路表示

3-2-1. 基本分布等価回路

図I-3-1, I-3-2は本手法における、異方性を含む弾性体の3次元基本分布等価回路である。但し、ここでは簡単のため弾性係数 (compliance) が $s_{14}=s_{25}=s_{36}=0$ の場合を仮定している。図I-3-1における各線路の接続点 (節点) A~Gでの電圧、電流と弾性体の変数との対応を表I-3-1に示す。但し、本手法では弾性体の変数として応力と変位の時間微分 (粒子速度) をとっており、応力は一般的な取り扱いとは逆に圧縮力を正にとっているので注意を要する。前章までの議論で明らかになったように、図の等価回路を解くことにより本手法は応力と粒子速度が同時に求まるベクトル解析法となる。また粒子速度を変数にとることにより音響工学の分野と結び付けやすく、音響パワーなどの弾性体の関係諸量をただちに計算することができる。しかも本手法では媒質条件は各節点に付加した容量やインダクタンスの値で決まるため線路の定数を変える必要がなく同一プログラムで性質の違う媒質を統一的に扱うことができる。

各節点は微小距離 Δd ごとに弾性体の関係式を満たすように等間隔に配置され、それらの節点間は長さ Δd の1次元線路でつながれている。また各節点では電流連続の関係が成り立つ。ここでは節点の種類を明確に

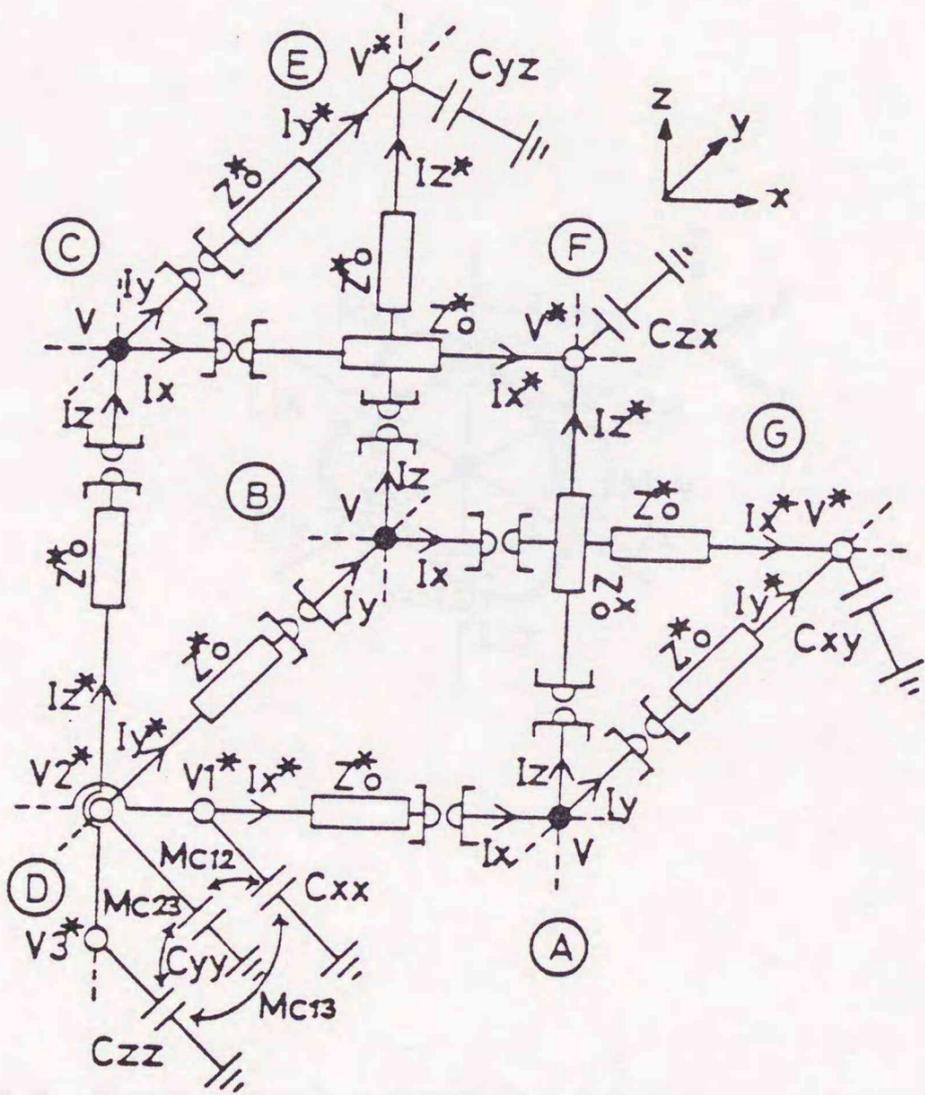


図 I-3-1 異方性弾性体の基本等価回路 ($s_{14}=s_{25}=s_{36}=0$)

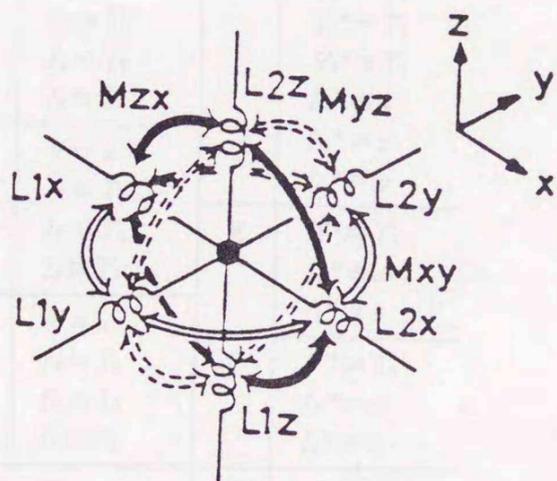


図 I-3-2 異方性を表示する相互誘導を含む図 I-3-1 の等価回路の粒子速度節点における詳細図

表 I-3-1 弾性体の変数とその回路変数との対応

粒子速度節点		応力節点	
A	$V \equiv \dot{u}$ $I_x \equiv T_1$ $I_y \equiv T_6$ $I_z \equiv T_5$	D	$V_1^* \equiv T_1$ $V_2^* \equiv T_2$ $V_3^* \equiv T_3$ $I_x^* \equiv \dot{u}$ $I_y^* \equiv \dot{v}$ $I_z^* \equiv \dot{w}$
B	$V \equiv \dot{v}$ $I_x \equiv T_6$ $I_y \equiv T_2$ $I_z \equiv T_4$	E	$V^* \equiv T_4$ $I_y^* \equiv \dot{w}$ $I_z^* \equiv \dot{v}$
C	$V \equiv \dot{w}$ $I_x \equiv T_5$ $I_y \equiv T_4$ $I_z \equiv T_3$	F	$V^* \equiv T_3$ $I_x^* \equiv \dot{w}$ $I_z^* \equiv \dot{u}$
$\dot{u} = \partial u / \partial t$ $\dot{v} = \partial v / \partial t$ $\dot{w} = \partial w / \partial t$		G	$V^* \equiv T_6$ $I_x^* \equiv \dot{v}$ $I_y^* \equiv \dot{u}$

するため、応力を電圧とする節点（応力節点）を白丸○で、粒子速度を電圧とする節点（粒子速度節点）を黒丸●で図示し、応力節点側の回路変数に*印をつけている。超音波トランスジューサを等価回路表示する場合、力-電圧対応が多く用いられるので、図の線路は応力を電圧とする伝送路として表現し、節点間の回路変数同士の物理的意味を矛盾なく対応させるために粒子速度節点側にジャイラータを挿入している。なお、D節点における変数間の関連づけを行う M_0 は等価回路上の概念である相互容量を表している。以上の点は前章までの議論と同様である。

図I-3-2は粒子速度節点であるA, B, C節点における詳細図で、本章の目的である異方性を表す等価インダクタンスおよびその間の相互結合を含んでいる。図I-3-1が繁雑になるのを避けるため分けて図示した。図I-3-2に示すように粒子速度節点では各線路にインダクタンスが付加されており、さらにそれらのインダクタンスは異方性に応じてy-z面内では M_{yz} 、z-x面内では M_{zx} 、x-y面内では M_{xy} のそれぞれの面内で同一の値の相互インダクタンスで結合されている。

ここで異方性の等価回路表示の考え方を簡単に説明する。フックの法則において \dot{u} のx方向微分は応力と $\partial_x \dot{u} = -\partial_t \{s_{11}T_1 + s_{12}T_2 + s_{13}T_3 + s_{14}T_4 + s_{15}T_5 + s_{16}T_6\}$ の関係にある。ここで T_1 についてはA(\dot{u})節点とx方向に線路で結ばれているため上式の関係を満たすことができる。また T_2, T_3 については \dot{u} 成分に対応する電流 I_{0i} と相互容量で結び付けることで上式に対応させている。但し、x方向の積分の意味で相互容量の値には $2\Delta d$ をかけている。残りの応力成分についてもそれを電圧とする節点と T_1 端子を相互容量でつないでもよいが、後に述べるように本手法は計算の定式化において各節点ごとに独立に計算できる点に特徴を持っており、何等かの形で節点同士を結び付けてしまうとその特徴が失われてしまう。従って T_5, T_6 成分についてはA節点に図I-3-2で示した相互インダクタンスにより \dot{u} 成分と結び付けている。従って、 T_1 端子を囲む四方のF(T_5), G(T_6)節点が平均

的に \dot{u} 成分と関係づけられるようにしている。ところが運動方程式では \dot{u} の時間微分は T_4 とは関係を持っていないため、 $A(\dot{u})$ 節点と $E(T_4)$ 節点は線路で結ばれておらず T_5 , T_6 のような扱いができない。ここでは異方性の扱いの基本的考え方について考察することを目的としているので、 $s_{14}=0$ を仮定して議論を進めることとする。 $s_{25}=s_{36}=0$ の仮定についても以上と同様の理由によっている。上記の異方性の等価回路表示の考え方について、回路定数と弾性体定数の関係および等価回路と弾性体の等価性について詳しい説明を以下に行う。

3-2-2. 回路定数と弾性体定数との対応

異方性の等価回路表示を可能にする各回路定数と弾性体の定数との対応を表I-3-2に示す。表I-3-2の中で大文字の S は未定定数であり小文字の s はcomplianceを表している。対応の明確でない S_{ij} ($i=x, y, z$; $j=A, B, C$)および c は以下の手順によりある条件下で任意に定めることができる。

(1) 粒子速度節点 A, B, C において、インダクタンス L_{kl} ($k=1, 2$; $l=x, y, z$)と相互インダクタンス M_{yz} , M_{zx} , M_{xy} に蓄積される電磁エネルギーが非負である条件⁽³⁾を満たすように S_{ij} を設定する。

(2) (1)で定めた S_{ij} を用いて、節点 D における容量 C_{ii} ($i=x, y, z$)および相互容量 M_{c12} , M_{c13} , M_{c23} が(1)と同様の蓄積エネルギー非負の条件を満たすように c を決定する。

(1), (2)の条件を満足する S_{ij} , c であれば、それらがどのような値をとっても表I-3-2の回路定数で表現する弾性波動は同じものになる。しかし表I-3-2の対応からわかるように、 c が大きいと図I-3-1の回路を多数接続したシステムとしての弾性波の速度は同じであるのに、線路の速度 v_1 だけが速くなってしまふ。本手法では離散時間 Δt は $\Delta t = \Delta d / v_1$ としており v_1 が大きくなるとそれだけ弾性波が同じ距離だけ進むのに、

表 I-3-2 弾性体の弾性係数 (compliance), 密度と回路定数との対応

回路定数	粒子速度節点		
	A	B	C
L_{ix}	$S_{xA}2\Delta d$	$S_{xB}2\Delta d$	$S_{xC}2\Delta d$
L_{iy}	$S_{yA}2\Delta d$	$S_{yB}2\Delta d$	$S_{yC}2\Delta d$
L_{iz}	$S_{zA}2\Delta d$	$S_{zB}2\Delta d$	$S_{zC}2\Delta d$
M_{yx}	$(S_{56}/4)2\Delta d$	$(S_{24}/4)2\Delta d$	$(S_{34}/4)2\Delta d$
M_{zx}	$(S_{16}/4)2\Delta d$	$(S_{46}/4)2\Delta d$	$(S_{35}/4)2\Delta d$
M_{zy}	$(S_{15}/4)2\Delta d$	$(S_{26}/4)2\Delta d$	$(S_{45}/4)2\Delta d$

 $i=1, 2$

回路定数	応力節点		
C_{xx}	$\{s_{11}-1/c-2S_{xA}\}2\Delta d$	M_{C12}	$s_{12}2\Delta d$
C_{yy}	$\{s_{22}-1/c-2S_{yB}\}2\Delta d$	M_{C13}	$s_{13}2\Delta d$
C_{zz}	$\{s_{33}-1/c-2S_{zC}\}2\Delta d$	M_{C23}	$s_{23}2\Delta d$
C_{yx}	$\{s_{44}/2-1/c-(S_{yB}+S_{zC})\}4\Delta d$		
C_{zx}	$\{s_{55}/2-1/c-(S_{xA}+S_{zC})\}4\Delta d$		
C_{zy}	$\{s_{66}/2-1/c-(S_{xB}+S_{yA})\}4\Delta d$		

$$L_0^* = \rho/3 \quad C_0^* = 1/c \quad Z_0^* = \sqrt{L_0^*/C_0^*}$$

多くの計算時間が必要となって不経済である。従って、できるだけ S_{11} ,
 c は小さくなるように選ぶのが望ましい。この弾性波速度と線路速度と
 の関係の自由度は応力節点に容量を負荷していることによる。すなわち、
 線路の速度が速ければその分容量の値を大きくし、波動のエネルギーを拘束
 して弾性波の速度が変わらないようにしていると考えられる。このことは
 線路の定数は同じであっても容量の値を変えるだけで性質の異なる弾性
 体を表現できることを意味しており、前に述べた本手法の特徴となっ
 ている。ところで、表の対応からわかるように、 L_{x1} を適当に選べば、
 せん断応力節点における容量の値が零になり、その節点での計算の定式化
 を簡単にすることができて効率的である。

3-2-3. 等価回路と異方性弾性体との等価性

次に、図I-3-1の回路構成における節点の空間配置が、 Δd を無限に小
 さくしたとき異方性弾性体と等価であることを示す。但し、ここでは簡
 単のため時間については離散化表示していないとする。また代表的な節
 点として図I-3-3に示す $D(T_1)$ および $A(\dot{u})$ 節点を中心とした部分を取り出
 して説明する。これらは弾性体を表す空間分布等価回路網の一部を構成
 している。図I-3-3では回路図が繁雑になるのを避けるため相互インタク
 ションの一部とジャイラタを省略している。

今、 $D1$ 節点を中心に線路に成り立つ関係式を空間差分の形で表すと次
 式となる。

$$\begin{aligned} & \dot{u}_1 - \dot{u}(A1) - L_x \partial_t T_{12}(A1) \\ & - M_{zx} \partial_t \{T_{51}(A1) + T_{52}(A1)\} - M_{xy} \partial_t \{T_{61}(A1) + T_{62}(A1)\} \\ & = - \frac{\Delta d}{c} \partial_t T_1(D1) \end{aligned} \quad (I.3.1)$$

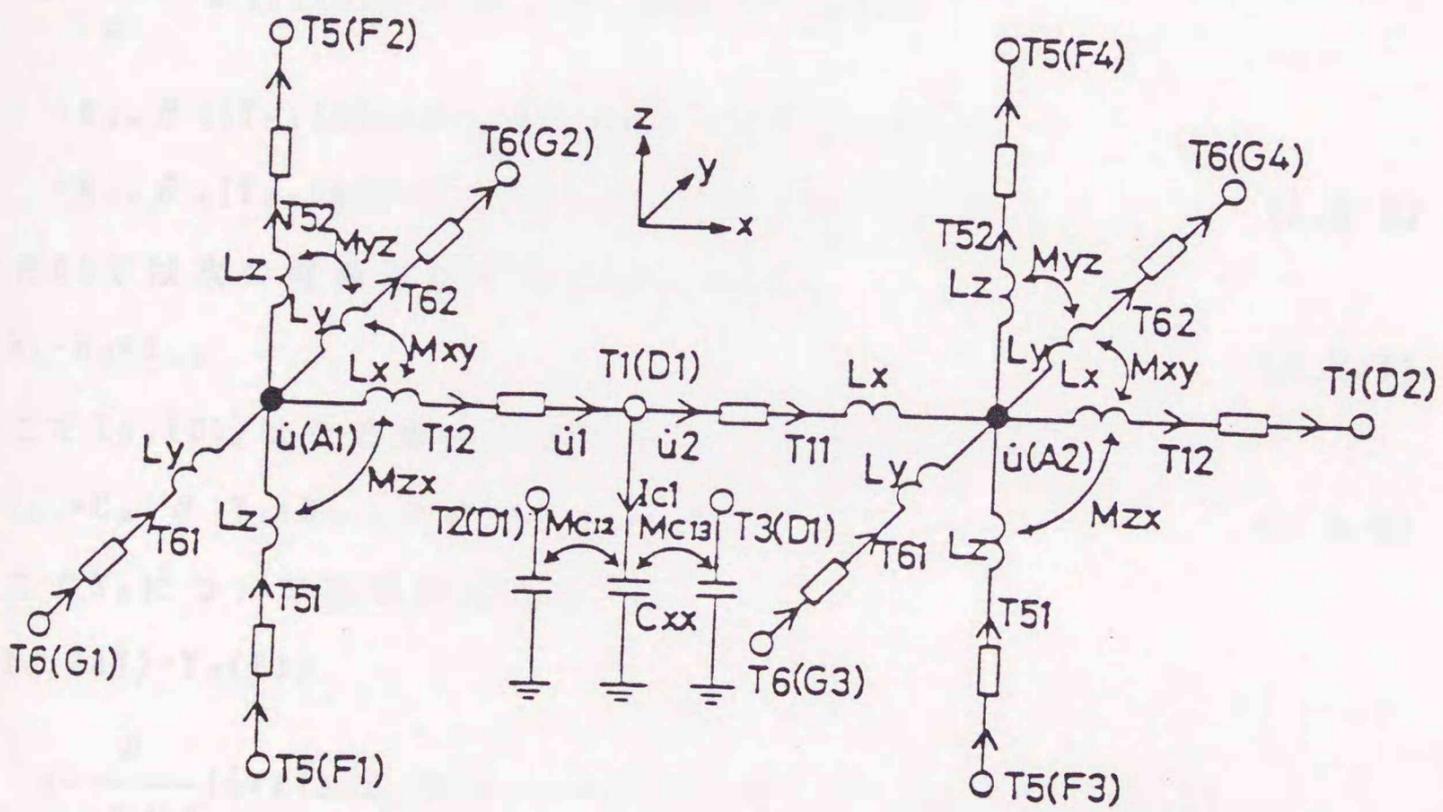


図 I-3-3 T_1 および \dot{u} 節点を中心とした等価回路網の部分詳細図

$$\begin{aligned}
& \dot{u}(A2) + L_x \partial_t T_{11}(A2) \\
& + M_{zx} \partial_t \{T_{51}(A2) + T_{52}(A2)\} + M_{xy} \partial_t \{T_{\theta 1}(A2) + T_{\theta 2}(A2)\} - \dot{u}_2 \\
& = -\frac{\Delta d}{c} \partial_t T_1(D1)
\end{aligned} \tag{I.3.2}$$

式(I.3.1), (I.3.2)の和をとれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \dot{u}(A2) - \dot{u}(A1) + \dot{u}_1 - \dot{u}_2 \\
& = -\frac{2\Delta d}{c} \partial_t T_1(D1) - L_x \partial_t \{T_{11}(A2) + T_{12}(A1)\} \\
& - M_{zx} \partial_t \{T_{51}(A1) + T_{52}(A1) + T_{51}(A2) + T_{52}(A2)\} \\
& - M_{xy} \partial_t \{T_{\theta 1}(A1) + T_{\theta 2}(A1) + T_{\theta 1}(A2) + T_{\theta 2}(A2)\}
\end{aligned} \tag{I.3.3}$$

またD1では次の電流連続の式が成り立つ。

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_2 = I_{c1} \tag{I.3.4}$$

ここで $I_{c1}(D1)$ はその節点の応力と次式の関係にある。

$$I_{c1} = C_{xx} \partial_t T_1 + M_{c12} \partial_t T_2 + M_{c13} \partial_t T_3 \tag{I.3.5}$$

ここで T_5 について次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
& T_{51}(A1) - T_5(F1) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\dot{u}(A1) + L_x \partial_t T_{51}(A1) + M_{zx} \partial_t \{T_{11}(A1) + T_{12}(A1)\}]
\end{aligned} \tag{I.3.6}$$

$$\begin{aligned}
& T_5(F2) - T_{52}(A1) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\dot{u}(A1) - L_z \partial_t T_{52}(A1) - M_{zx} \partial_t \{T_{11}(A1) + T_{12}(A1)\}]
\end{aligned} \tag{I.3.7}$$

$$\begin{aligned}
& T_{51}(A2) - T_5(F3) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\dot{u}(A2) + L_z \partial_t T_{51}(A2) + M_{zx} \partial_t \{T_{11}(A2) + T_{12}(A2)\}]
\end{aligned} \tag{I.3.8}$$

$$\begin{aligned}
& T_5(F4) - T_{52}(A2) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\dot{u}(A2) - L_z \partial_t T_{52}(A2) - M_{zx} \partial_t \{T_{11}(A2) + T_{12}(A2)\}]
\end{aligned} \tag{I.3.9}$$

今、 Δd が小さければ L と M_{zx} は Δd の関数であるので右辺第1項よりも速く零となり無視できるから、式(I.3.6)-(I.3.7)+(I.3.8)-(I.3.9)とすれば次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & T_{51}(A1)+T_{52}(A1)+T_{51}(A2)+T_{52}(A2) \\ & = T_5(F1)+T_5(F2)+T_5(F3)+T_5(F4) \end{aligned} \quad (I.3.10)$$

T_1, T_6 についても同様のことが言えるので、(I.3.3)式に(I.3.4),(I.3.5)を代入し、 Δd が小さいとして式(I.3.10)の関係を用いれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \dot{u}(A2)-\dot{u}(A1) \\ & = -2\Delta d \partial_x \left[\left\{ \frac{1}{c} + \frac{C_{xx}}{2\Delta d} \right\} T_1(D1) + \frac{L_x}{2\Delta d} \{ T_1(A1)+T_1(A2) \} \right. \\ & \quad + \frac{M_{zx}}{2\Delta d} \{ T_5(F1)+T_5(F2)+T_5(F3)+T_5(F4) \} \\ & \quad + \frac{M_{xy}}{2\Delta d} \{ T_6(G1)+T_6(G2)+T_6(G3)+T_6(G4) \} \\ & \quad \left. + \frac{M_{c12}}{2\Delta d} T_2(D1) + \frac{M_{c13}}{2\Delta d} T_3(D1) \right] \end{aligned} \quad (I.3.11)$$

今、 $\Delta d \rightarrow 0$ の極限を考えると、左辺はD1を中心としたx方向の微分式となり、右辺の第2項、3項、4項は平均としてそれぞれその中心の値、 $T_1(D1)$ 、 $T_5(D1)$ 、 $T_6(D1)$ に収束するから次式のD1点におけるフックの法則の $s_{14}=0$ の場合と等価になる。

$$\begin{aligned} \partial_x \dot{u}(D1) = & -\partial_x \{ s_{11}T_1(D1) + s_{12}T_2(D1) + s_{13}T_3(D1) \\ & + s_{15}T_5(D1) + s_{16}T_6(D1) \} \end{aligned} \quad (I.3.12)$$

次に $\dot{u}(A1)$ を中心に考える。各線路の関係式を空間差分で表すと次の式となる。

$$\begin{aligned}
& T_{11}(A2) - T_1(D1) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\partial_t \dot{u}(A2) + L_x \partial_t T_{11}(A2) \\
& \quad + \partial_t \{M_{zx}(T_{51}(A2) + T_{52}(A2)) + M_{xy}(T_{61}(A2) + T_{62}(A2))\}] \quad (I.3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_1(D2) - T_{12}(A2) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\partial_t \dot{u}(A2) - L_x \partial_t T_{12}(A2) \\
& \quad - \partial_t \{M_{zx}(T_{51}(A2) + T_{52}(A2)) + M_{xy}(T_{61}(A2) + T_{62}(A2))\}] \quad (I.3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{51}(A2) - T_5(F3) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\partial_t \dot{u}(A2) + L_z \partial_t T_{51}(A2) \\
& \quad + \partial_t \{M_{zx}(T_{11}(A2) + T_{12}(A2)) + M_{yz}(T_{61}(A2) + T_{62}(A2))\}] \quad (I.3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_5(F4) - T_{52}(A2) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\partial_t \dot{u}(A2) - L_z \partial_t T_{52}(A2) \\
& \quad - \partial_t \{M_{zx}(T_{11}(A2) + T_{12}(A2)) + M_{yz}(T_{61}(A2) + T_{62}(A2))\}] \quad (I.3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{61}(A2) - T_6(G3) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\partial_t \dot{u}(A2) + L_y \partial_t T_{61}(A2) \\
& \quad + \partial_t \{M_{xy}(T_{11}(A2) + T_{12}(A2)) + M_{yz}(T_{51}(A2) + T_{52}(A2))\}] \quad (I.3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_6(G4) - T_{62}(A2) \\
& = -\frac{\rho}{3\Delta d} [\partial_t \dot{u}(A2) - L_y \partial_t T_{62}(A2) \\
& \quad - \partial_t \{M_{xy}(T_{11}(A2) + T_{12}(A2)) + M_{yz}(T_{51}(A2) + T_{52}(A2))\}] \quad (I.3.18)
\end{aligned}$$

今、各式の和をとり、次の電流連続の式を代入すれば式(I.3.20)を得る。

$$T_{11}(A2) - T_{12}(A2) + T_{51}(A2) - T_{52}(A2) + T_{61}(A2) - T_{62}(A2) = 0 \quad (I.3.19)$$

$$\begin{aligned} T_1(D2) - T_1(D1) + T_5(F4) - T_5(F3) + T_6(G4) - T_6(G3) \\ = -\rho 2 \Delta d \partial_t \dot{u}(A2) \end{aligned} \quad (I.3.20)$$

ここで $\Delta d \rightarrow 0$ の極限を考えて、 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta d$ を考慮すれば、式(I.3.20)は次の運動方程式と等価であることがわかる。

$$\begin{aligned} \rho \partial_t \dot{u}(A2) \\ = -\{ \partial_x T_1(A2) + \partial_z T_5(A2) + \partial_y T_6(A2) \} \end{aligned} \quad (I.3.21)$$

このように本等価回路は各節点ごとに弾性体の関係式を満足するように配置されており、これらを組合せたシステムを考えたとき弾性体の波動方程式を満足することになる。ところで、この議論では式(I.3.12)に対応し $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ に対して $s_{14} = s_{25} = s_{36} = 0$ の条件を仮定している。この点については 3-2-1. で説明した。

3-3. Bergeron法による時間応答解析の定式化

本手法では時間領域の定式化にBergeron法を用いる。まず図I-3-4(a)に示すような1次元線路の端子の電圧，電流は次式で表す。

$$V_k(t) + Z_0 I_k(t) = V_{k-1}(t - \Delta t) + Z_0 I_{k-1}(t - \Delta t) \quad (I.3.22)$$

$$V_{k-1}(t) - Z_0 I_{k-1}(t) = V_k(t - \Delta t) - Z_0 I_k(t - \Delta t) \quad (I.3.23)$$

ただし $\Delta t = \Delta d / v_1$ で、 v_1 は線路の速度である。

また等価回路に見られる図I-3-4(b), (c)のような相互容量，相互誘導を含む容量およびインダクタンスにおける電圧，電流は台形積分近似を使って次のように時間離散化する。

$$\begin{aligned} V_L(t) - R_L I_{L1}(t) - R_{ML} I_{L2}(t) \\ = -V_L(t - \Delta t) - R_L I_{L1}(t - \Delta t) - R_{ML} I_{L2}(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (I.3.24)$$

$$\begin{aligned} V_{c1}(t) + R_{Mc} V_{c2}(t) - R_c I_c(t) \\ = -V_{c1}(t - \Delta t) + R_{Mc} V_{c2}(t - \Delta t) + R_c I_c(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (I.3.25)$$

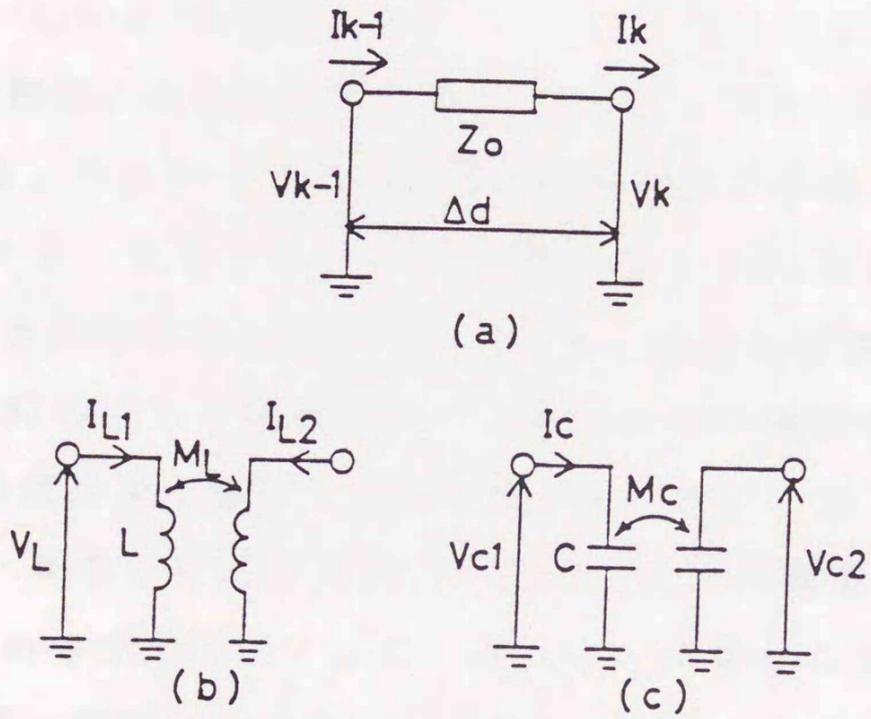


図 I-3-4 異方性弾性体の等価回路内の分布線路と集中定数素子

- (a) 1次元基本分布線路
- (b) 相互誘導を含むインダクタンス
- (c) 相互容量を含むキャパシタンス

但し, $R_L = 2L/\Delta t$, $R_{ML} = 2M_L/\Delta t$, $R_C = \Delta t/(2C)$, $R_{Mc} = M_C/C$

以上の式において各右辺は1離散時間 Δt 前の値であり, 初期値が与えられれば既知となる。これらの式の Δt を同じにして, 各節点におけるキルヒホッフ則と連立させれば現時間の電圧, 電流計算の定式化ができる。その具体的な例として, 図I-3-5のようなA(\dot{u})節点での連立式を表I-3-3に示す。表の電圧, 電流は座標 (l, m, n) , 時間 t での値とし, それ以外の座標, 時間, たとえば $l-1, t-\Delta t$ の場合は $[]_{l-1, t-\Delta t}$ のように表している。図I-3-5では図が繁雑になるのを避けるため相互インダクタンスの一部とジャイラクタを省略してある。ところで本手法を弾性体の波動方程式の差分近似と考えた場合, 3-2. で示したように空間的には Δd に対してその近似度は2次であることがわかる。時間に対しては, 線路の計算において式(I.3.22), (I.3.23)のような関係を用いた場合前章の議論から, やはり Δt に対して2次の近似度であることがわかっている。一方, 容量やインダクタンスの離散式は, なるべく安定な式ということでその離散時間 Δt に対して3次の近似度のものを用いている。従って, 本手法における計算はその近似度が空間, 時間両方に対して2次となっていることがわかり誤差の目安となる。ところで前章でも述べたように一般に離散的手法では計算精度の問題から波長を空間的に10分割以上する必要がある, 本手法でも同様である。

3-4. 解析結果

本手法の妥当性を検討するため, 水晶に代表される三方晶系($32, 3m, \bar{3}m$)のY-Z板を例にとり計算を行った。板は十分薄いとし($T_1 = T_5 = T_6 = 0$)弾性波はY-Z面内を伝搬するとする。座標軸を結晶軸と同じ方向に選べば, 本手法における等価回路は図I-3-6に示すような2次元の等価回路になる。各回路定数と弾性体定数は表I-3-4のような対応としている。こ

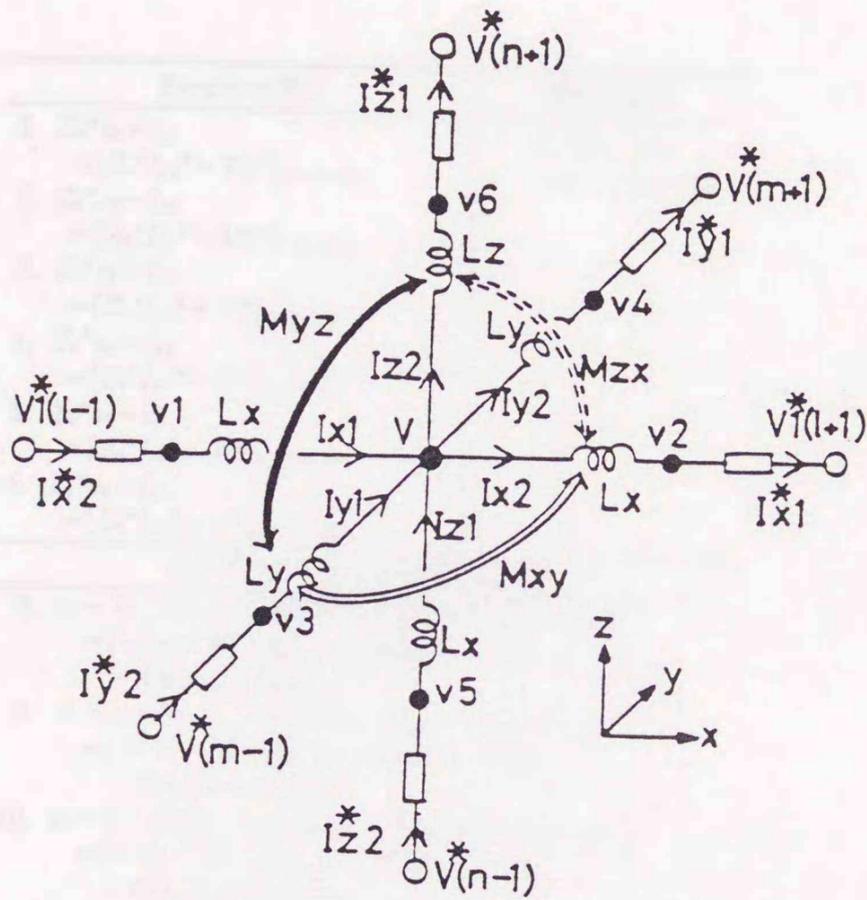


図 I-3-5 $A(1, m, n)$ 節点における変数のとり方

表 I-3-3 粒子速度節点A(1,m,n,t)における時間軸上での
定式化のための連立方程式

Bergeron表示	電流連続式
1. $Z_0^* v_1 + I_{x1}$ $= [Z_0^* I_{x2}^* + V1^*]_{l-1,t-\Delta t}$	7. $I_{x1} + I_{y1} + I_{z1}$ $= I_{x2} + I_{y2} + I_{z2}$
2. $Z_0^* v_2 - I_{x2}$ $= [Z_0^* I_{x1}^* - V1^*]_{l+1,t-\Delta t}$	
3. $Z_0^* v_3 + I_{y1}$ $= [Z_0^* I_{y2}^* + V^*]_{m-1,t-\Delta t}$	
4. $Z_0^* v_4 - I_{y2}$ $= [Z_0^* I_{y1}^* - V^*]_{m+1,t-\Delta t}$	
5. $Z_0^* v_5 + I_{z1}$ $= [Z_0^* I_{z2}^* + V^*]_{n-1,t-\Delta t}$	
6. $Z_0^* v_6 - I_{z2}$ $= [Z_0^* I_{z1}^* - V^*]_{n+1,t-\Delta t}$	
インダクタンスの台形積分近似式	
8. $v_1 - V - RL_x I_{x1} - RM_x(I_{y1} + I_{y2}) - RM_x(I_{x1} + I_{x2})$ $= [-(v_1 - V) - RL_x I_{x1} - RM_x(I_{y1} + I_{y2})$ $- RM_x(I_{x1} + I_{x2})]_{l-\Delta t}$	
9. $V - v_2 - RL_x I_{x2} - RM_x(I_{y1} + I_{y2}) - RM_x(I_{x1} + I_{x2})$ $= [-(V - v_2) - RL_x I_{x2} - RM_x(I_{y1} + I_{y2})$ $- RM_x(I_{x1} + I_{x2})]_{l-\Delta t}$	
10. $v_3 - V - RL_y I_{y1} - RM_x(I_{x1} + I_{x2}) - RM_y(I_{x1} + I_{x2})$ $= [-(v_3 - V) - RL_y I_{y1} - RM_x(I_{x1} + I_{x2})$ $- RM_y(I_{x1} + I_{x2})]_{l-\Delta t}$	
11. $V - v_4 - RL_y I_{y2} - RM_x(I_{x1} + I_{x2}) - RM_y(I_{x1} + I_{x2})$ $= [-(V - v_4) - RL_y I_{y2} - RM_x(I_{x1} + I_{x2})$ $- RM_y(I_{x1} + I_{x2})]_{l-\Delta t}$	
12. $v_5 - V - RL_z I_{z1} - RM_x(I_{x1} + I_{x2}) - RM_y(I_{y1} + I_{y2})$ $= [-(v_5 - V) - RL_z I_{z1} - RM_x(I_{x1} + I_{x2})$ $- RM_y(I_{y1} + I_{y2})]_{l-\Delta t}$	
13. $V - v_6 - RL_z I_{z2} - RM_x(I_{x1} + I_{x2}) - RM_y(I_{y1} + I_{y2})$ $= [-(V - v_6) - RL_z I_{z2} - RM_x(I_{x1} + I_{x2})$ $- RM_y(I_{y1} + I_{y2})]_{l-\Delta t}$	
$RL_x = 2L_x/\Delta t, RL_y = 2L_y/\Delta t, RL_z = 2L_z/\Delta t$ $RM_x = 2M_{xy}/\Delta t, RM_y = 2M_{yz}/\Delta t,$ $RM_z = 2M_{xz}/\Delta t$	

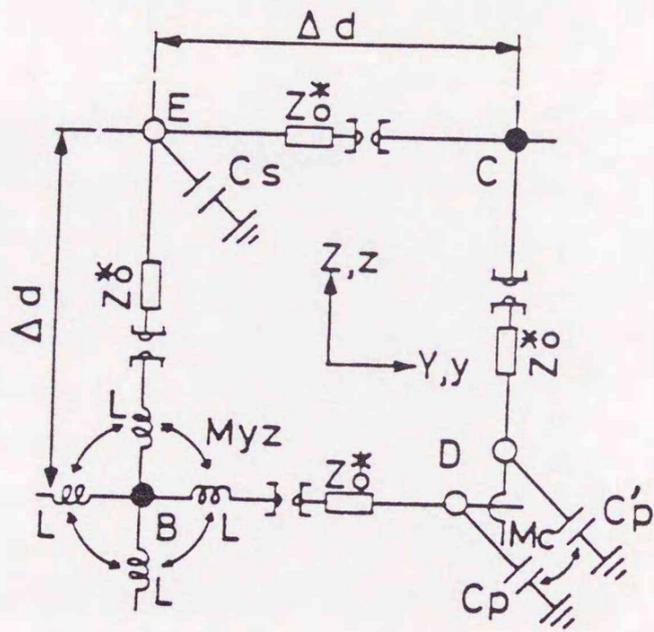


図 I-3-6 三方晶系(32, 3m, $\bar{3}m$)のY-Z平板の基本等価回路

表 I-3-4 三方晶系(32, 3m, 3m)の薄板の2次元等価回路の回路定数と弾性係数(compliance), 密度との対応

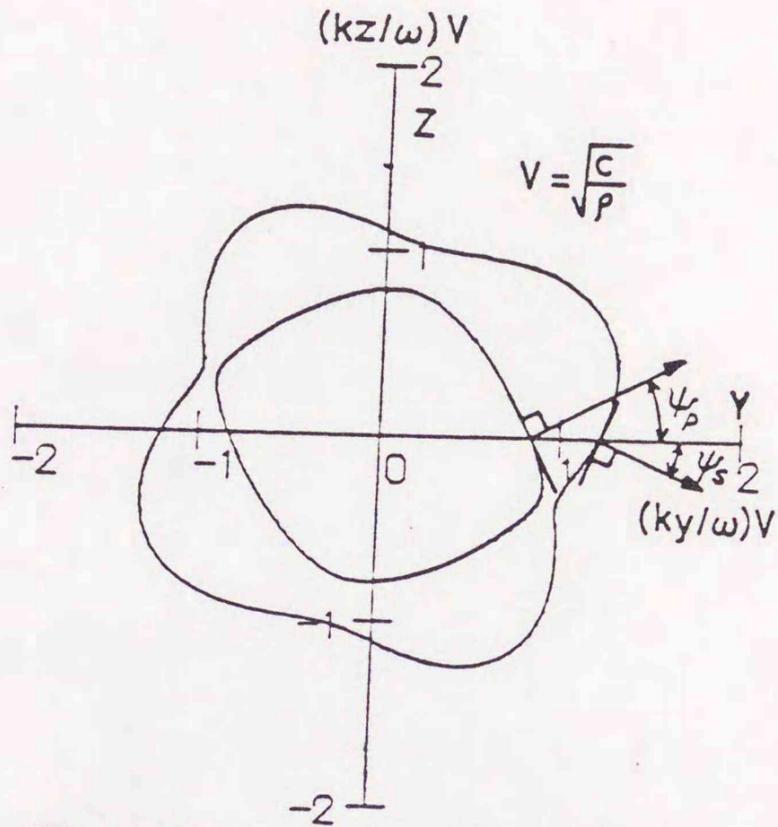
回路定数	粒子速度節点 B
L	$2 M_{yz} $
M_{yz}	$(-s_{14}/4)2\Delta d$
	応力節点 D, E
C_P	$\{s_{11}-1/(2c')- s_{14} \}2\Delta d$
\tilde{C}_P	$\{s_{33}-1/(2c')- s_{14} \}2\Delta d$
M_c	$s_{13}2\Delta d$
C_s	$\{s_{44}/2-1/(2c')- s_{14} \}4\Delta d$
$L_0^* = \rho/2 \quad C_0^* = 1/(2c') \quad Z_0^* = \sqrt{L_0^*/C_0^*}$	

ここで弾性係数として水晶の値を用い、圧電性を無視すれば、Y-Z板における逆速度曲線 (slowness curve) は図I-3-7に示すようになる⁽⁴⁾。図I-3-7より平面波の波数ベクトル \bar{k} をY軸方向に選べば、そのエネルギーフローは \bar{k} に対して、縦波 (P波) ではZ軸の正方向、横波 (S波) ではZ軸の負方向にそれぞれ傾きを持つことがわかる。計算によるとP波では $\psi_P = 27.6$ 度、S波では $\psi_S = 23$ 度である。このような特性をシミュレートするため図I-3-8に示すモデルにより計算を行った。回路定数のうち S_{11} , c' は次の関係を満たすように選んだ。

$$L_{1y} = L_{2y} = L_{1z} = L_{2z} = 2|M_{yz}|$$

$$C_P \times C_S = (M_C)^2$$

Y軸方向の正方向における位相速度は図I-3-7より計算すると、
 $V = \sqrt{c'/\rho}$ (線路の速度の1/2) としてP波で約1.2V、S波で約0.8Vとなり、エネルギー速度はP波が $\cos(\psi_P)$ で割って約1.35V、S波が $\cos(\psi_S)$ で割って約0.9Vとなる。そこで今、 T_2 および T_4 応力を図I-3-8のz軸上 ($y=0$) の中央に $100 \Delta d$ の幅で印加するとする。P波を発生させるための T_2 応力を周期 $35 \Delta t$ 、S波を発生させるための T_4 応力を周期 $50 \Delta t$ のそれぞれ正弦波とし、5周期分加えればy方向に約 $100 \Delta d$ だけ進む。従って1波長が約 $20 \Delta d$ となり、応力および粒子速度節点が交互に並んでいるので、それぞれの成分に対して1波長が $10 \Delta d$ の分割となると考えられる。以上の考え方で計算を行った。ただしz軸上以外の境界は特に条件を設定せず、そこで計算を打ち切るようにしてある。図I-3-9(a), (b) に計算結果を示す。図I-3-9では計算された T_2 もしくは T_4 の振幅値をy軸方向に一致させて描いたもので、エネルギーフローの方向がわかりやすいように配慮したものである。結果を見るとy軸方向を向いた波数ベクトルに対して波動の進行方向が予想どおりの向きに傾いているのがわかる。その詳細な角度を図から知ることは難しいが、波群の中心部を追って行った場合ほぼ $20 \sim 30$ 度の範囲にあり、妥当な結果と考えられる。



Trigonal crystal classes (Quartz)
Compliance constants in Y-Z plane
($10^{-12} \text{ m}^2/\text{newton}$)

s_{11}	s_{13}	$-s_{14}$	$s_{11}=12.77$
s_{13}	s_{33}	0	$s_{13}=-1.22$
$-s_{14}$	0	s_{44}	$s_{14}=4.5$
			$s_{33}=9.6$
			$s_{44}=20.04$

図 I-3-7 水晶のY-Z板の逆速度曲線(圧電性無視)

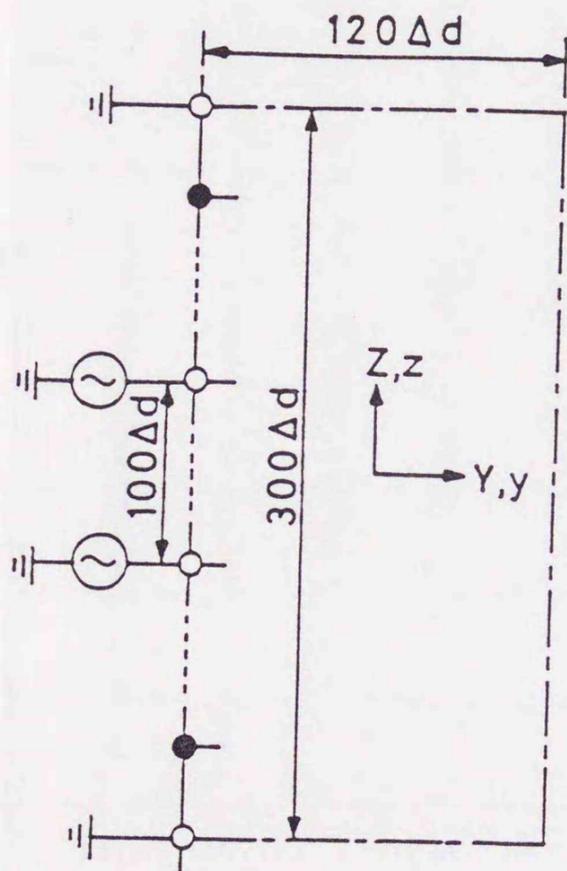


図 I-3-8 水晶のY-Z板のI補き π - π の方向確認のための節点配置

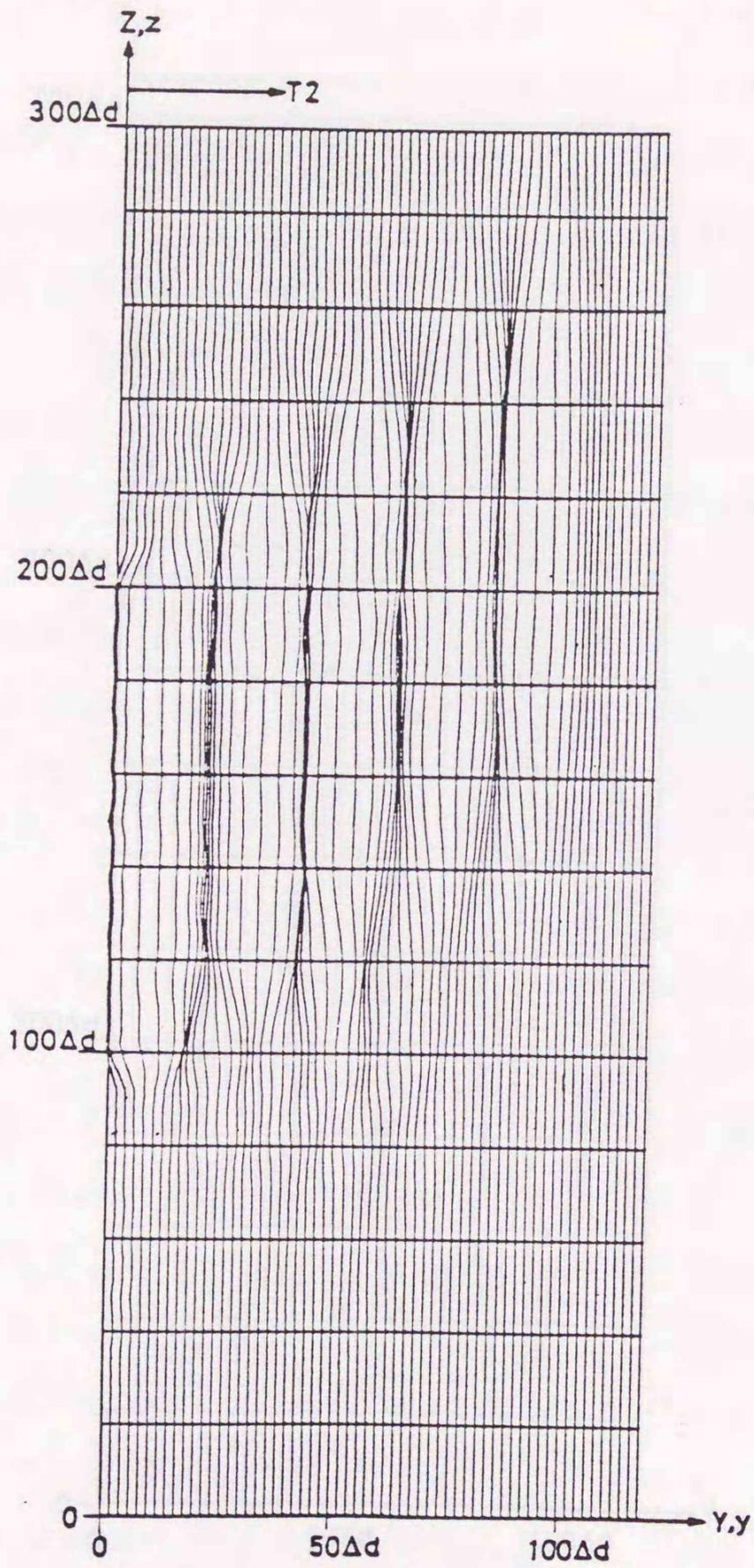
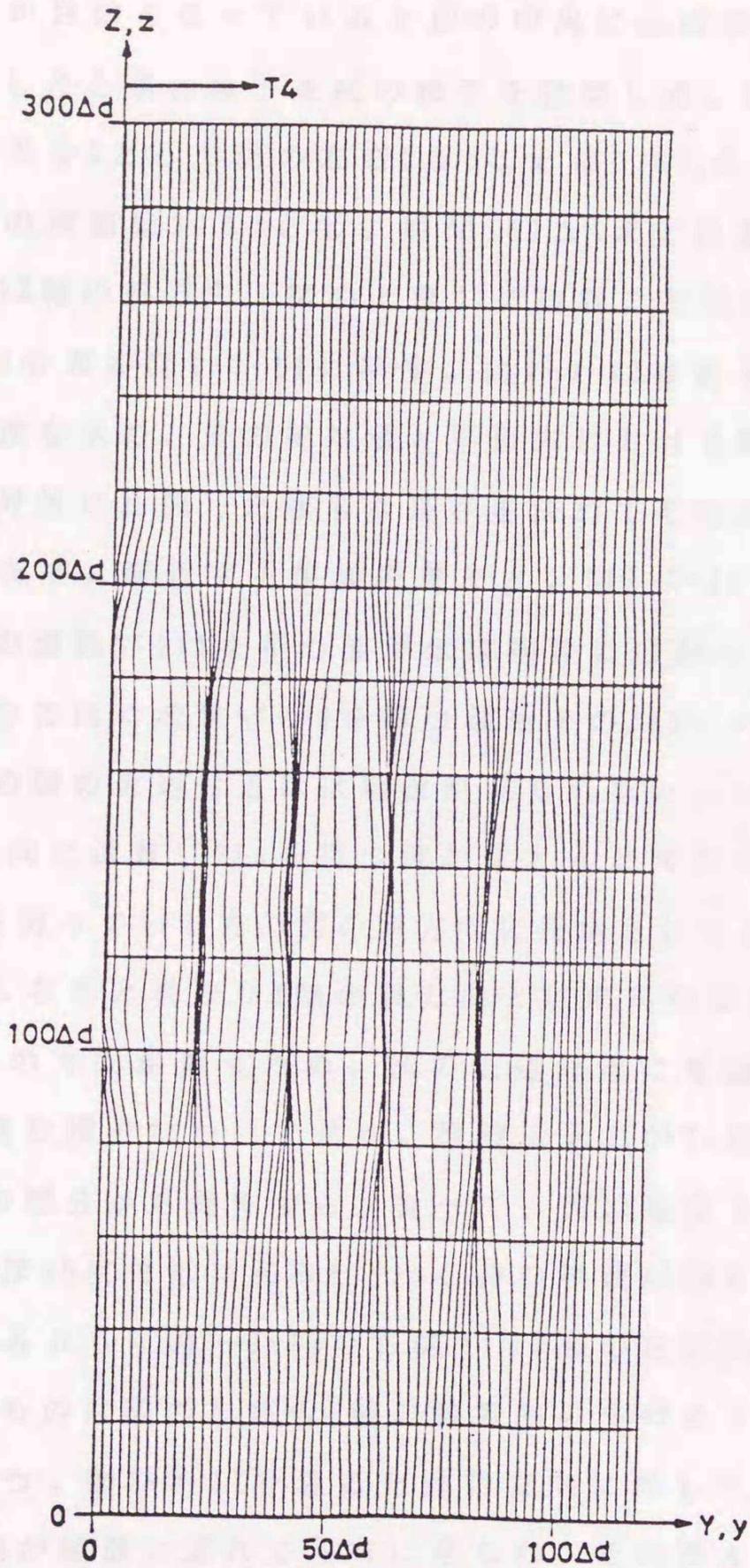


図 I-3-9 (a) T_2 応力の連続波を加えた時の水晶板内の T_2 応力分布



(b) T_4 応力の連続波を加えた時の水晶板内の T_4 応力分布

次に，図I-3-6と同様の等価回路と定数を用いて，図I-3-10の設定により境界条件が自由となっている上辺の中央に正弦波1周期分の T_0 応力のパルスを印加したときの粒子速度の様子を計算した。印加応力の振幅分布は上辺の中央を1として図の左右 $2\Delta d$ ごとに0.85, 0.5, 0.15, 0, としている。正弦波の周期は $30\Delta t$ とし，時間 $150\Delta t$ まで計算した。従って波動は図I-3-7のZ軸の正方向（図の上側）に進むことになる。その結果の粒子速度ベクトル分布を図I-3-11に示す。図I-3-11はある点でのyおよびz方向の粒子速度を求め，その絶対値と平面内における粒子速度の向きとを算出し，絶対値に比例した適当な長さを決めてその点から線を引いたものである。まず，先行する縦波を見ると，図I-3-11の右側ではY軸の正方向の種々の波数ベクトルを持つ波がほぼ均等に広がっている。しかしY軸とほぼ平行な方向に波数ベクトルを持つ波もそのエネルギーフローの方向が下を向いているため図の上辺付近には縦波が見られない。一方，図の左側ではY軸の負の方向に波数ベクトルを持つ波がほとんど同じ下方の角度にエネルギーフローの方向を持っているため図の下方に圧縮されたような形で集まっている。しかし右側と異なりY軸の負方向とほぼ平行な波数ベクトルを持つ波はエネルギーフローの方向が違いため，図の上辺付近にも縦波が見られる。次に，遅れて進む横波について見る。横波は入力が T_0 応力であることから入力部の縁の部分から発生する。従って，図の垂直下方には発生せずY軸に対してほぼ45度付近に波数ベクトルを持つ横波が強く励振される。図I-3-7からわかるように図I-3-11の右側ではY軸の正方向の45度付近の波数ベクトルを持つものは図の左側のY軸の負方向のものより幾分下方にそのエネルギーフローを持つ。図I-3-11を見ると進行方向に対して垂直な粒子速度分布を持つ横波が縦波に遅れて左右に見られ，その進んだ方向が予想どおり右側の方が幾分下を向いている。ところで，図の上辺には左右に分かれて進む表面波が見られるが，その振幅や形状は左右で幾分違っているのがわかる。このように軸対称に波が広がる等方弾性体と異なり，か

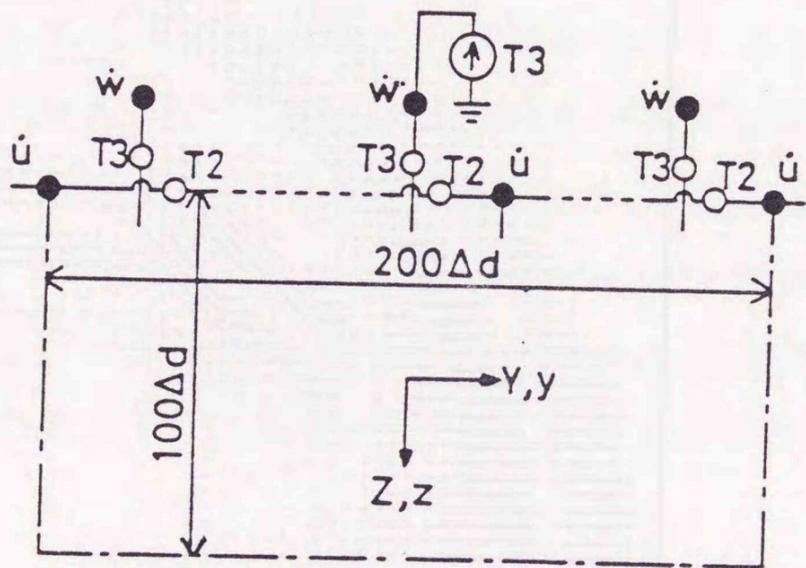


図 I-3-10 半無限水晶板のハルス入力応答計算のための節点配置

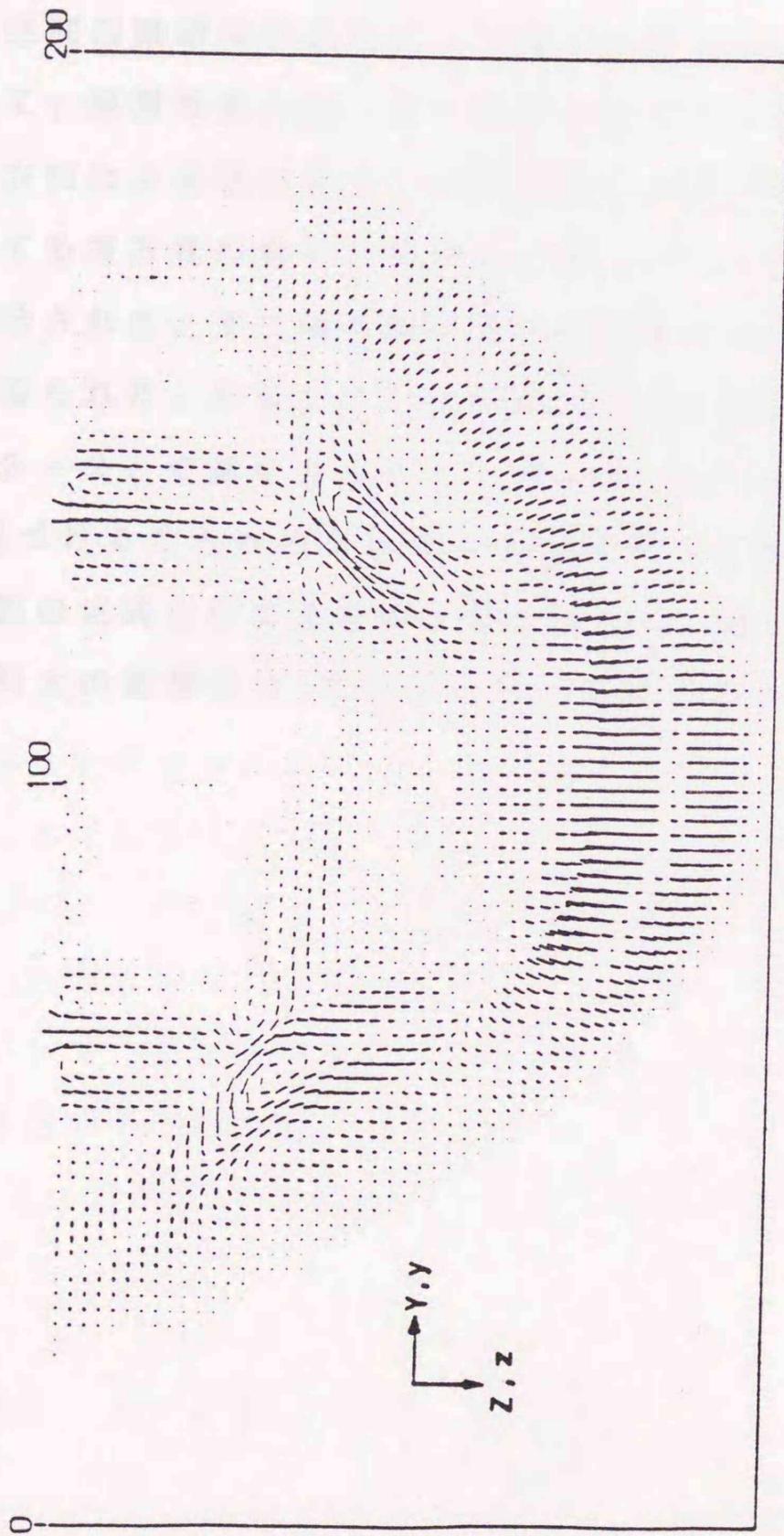


図 I-3-11 正弦波1周期分の T_0 応力を加え $150\Delta t$ 経過したときの水晶板内の粒子速度ベクトル分布

なり複雑な異方性媒質中の波の挙動が確かめられた。

3-5. むすび

以上空間回路網法が異方性に容易に拡張されることを示した。本手法において、媒質特性の扱いに一般性を与えている各節点での等価回路素子に、方向による違いあるいは相互結合を持たせることにより、異方性についても等方性の場合と基本的に同一なアルゴリズムで容易に取り扱えることが示された。また基本的な異方性問題に適用したところ満足できる結果が得られた。なおここではcomplianceに制限を設けている。この解決には3-2. で論じたように、例えば T_1 と T_4 を相互容量で結び付けて i と関連づけることが考えられるが節点同士を結び付けると節点ごとの逐次計算の定式化ができない不都合がある。従って相互容量による互いの節点同士の影響を Δt だけ遅らせて定式化するなどの方策が必要となるろう。

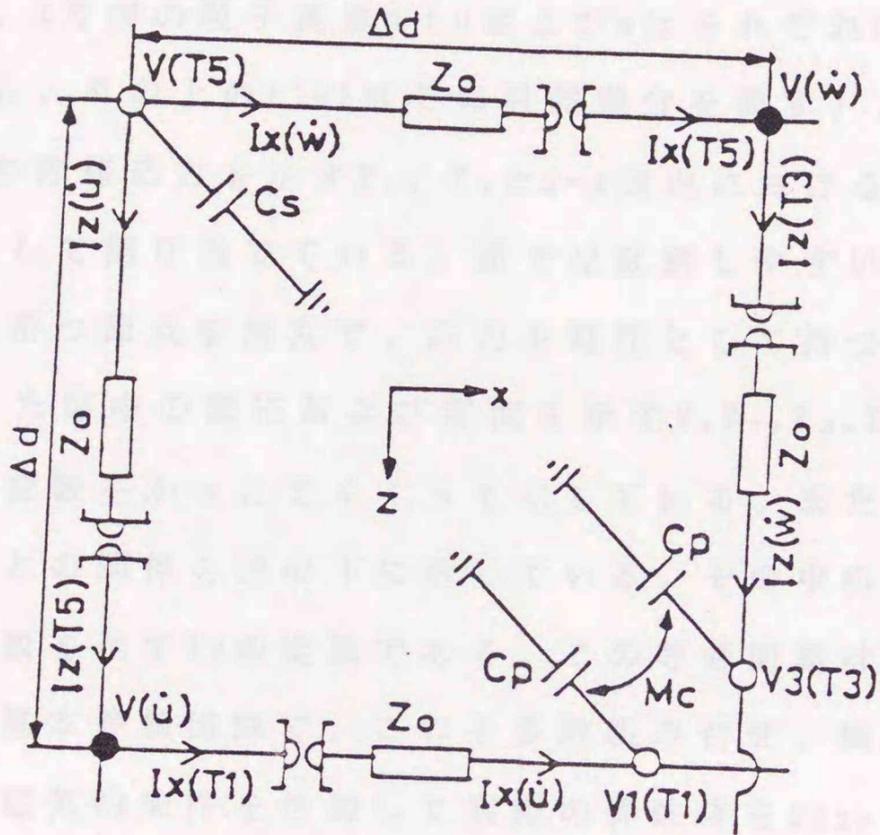
第4章 自由境界条件の設定⁽¹⁾

4-1. まえがき

前章まで固体内弾性波動に空間回路網法を適用する際の基本的な取扱いについて検討してきた。そしてこれまで特に境界条件については、例えば異なる媒質条件の弾性体が多数接しているといった不均一な条件を扱う場合、各節点に付加した集中定数素子の値をその不均一さに応じて変化させることで表現する、また、自由境界や対称条件の成り立つ場所では境界上の節点の電圧、電流、すなわち弾性体の変数の値をある一定値にすることで表示するといった方法を用いればよいことを示した。ところで、本手法はすべての変数を扱うベクトル解析法であり、弾性体の変数（応力と粒子速度）の各々を電圧あるいは電流とする節点が存在するので、ある境界条件に対して複数の設定の仕方が考えられる。その点についてはまだ詳しく検討していなかった。そこで本章では、弾性体問題の中で最もよく取り扱われる自由境界問題について、本手法において用いられる幾種類かの境界条件の設定による計算結果への影響について考察した。また、本手法による解析結果の特徴および妥当性を検討するため、弾性波動の時間応答数値解析法として従来から用いられている差分法⁽²⁾および質点系モデルによる解析法⁽³⁾により同じ計算を行い、互いの比較を行なった。

4-2. 解析対象とした半無限弾性体モデル

本章では簡単のため図I-4-2に示すような y 方向に一様な半無限等方弾性体を解析の対象とした。図I-4-1(a)に等方弾性体の縦波（P波）およ



$$\begin{aligned} \dot{u} &= \partial u / \partial t & Z_0 &= \sqrt{L_0 / C_0} \\ \dot{w} &= \partial w / \partial t & C_0 &= 1 / \{2(\lambda + 2\mu)\} \\ & & L_0 &= \rho / 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_p &= \left\{ \left\{ \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 1 / \{2(\lambda + 2\mu)\} \right\} 2\Delta d \\ M_c &= \left\{ -\lambda / (4\mu(\lambda + \mu)) \right\} 2\Delta d \\ C_s &= \left\{ 1 / (2\mu) - 1 / (2(\lambda + 2\mu)) \right\} 4\Delta d \end{aligned}$$

図 I-4-1(a) 2次元等方弾性体のP波, SV波に対する基本等価回路

び変位成分が図I-4-2のx-z面内にあり進行方向に垂直であるような横波(SV波)の両方の波の性質をあわせ持つ基本等価回路を示す⁽⁴⁾。この等価回路は特性インダクタンス Z_0 、長さ Δd の1次元線路を正方格子状に組合せたもので、線路の接続点(すなわち節点)には弾性体の変数であるx方向の粒子速度 \dot{u} 、z方向の粒子速度 \dot{w} (u および w はそれぞれx方向およびz方向の変位を表し、その上のドットはその時間微分を表す)、それぞれx方向およびz方向の伸縮応力を示す T_x 、 T_z とx-z面内におけるせん断応力 T_{xz} の各々を電圧として割り当てている。図では区別しやすいように粒子速度を電圧として持つ節点を黒丸で、応力を電圧として持つ節点を白丸で示してある。また図中の電圧および電流を示す V, V_x, V_z, I_x, I_z の隣に対応する弾性体の変数をかっこでくくって示している。また回路定数と弾性体の媒質定数との関係を図の下に示している。その中の λ, μ は等方弾性体の弾性定数を示すラメの定数である。この等価回路は弾性体の微小区間に成り立つ基本等価回路で、これを多数組み合わせ、境界ではその境界条件に見合う電氣的条件を付加して実際の弾性体をシミュレートする。等価回路の弾性体との等価性については第1章で証明した。また図I-4-1(b)には T_{xz} 応力を電圧とする節点に付加した、横波波動定数に適合した容量 C_0 の代用として、隣接する \dot{u}, \dot{w} を電圧とする節点にインダクタンスを付加した回路を示す。図I-4-1(a)と(b)の等価性については文献(5)の中で電磁波における同様の等価回路の証明がなされている。図I-4-2にここでの解析モデルを示す。図I-4-2の左辺 $x=0$ の面は対称とし、また $x=L, z=L$ の境界は簡単のため十分広くとり、打ち切りの影響を無くした。連続波応力を自由表面に印加するとして $L=400\Delta d$ とし、 $(x=0, z=0)$ から $(8\Delta d, 0)$ まで $2\Delta d$ ごとに振幅1、そこからx方向に $2\Delta d$ 離れるごとに0.85, 0.5, 0.15, 0.0, の振幅の T_{xz} 応力を印加した。応力の印加は \dot{w} を電圧とする節点のz方向の枝に電流源を直接つなぐことで表現している。入力応力の振幅分布には特に意味はなく、急激な不連続点のないようにするためと対称面

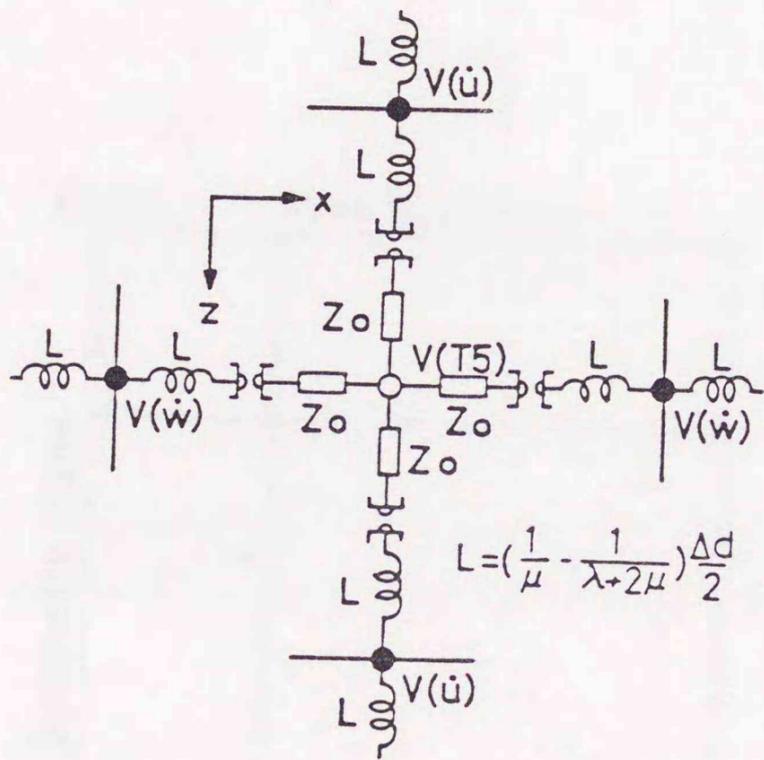


図 I-4-1(b) 図 I-4-1(a)の T_5 節点の容量 C_s の代わりに隣接する
粒子速度節点にインダクタンス L を挿入した等価回路

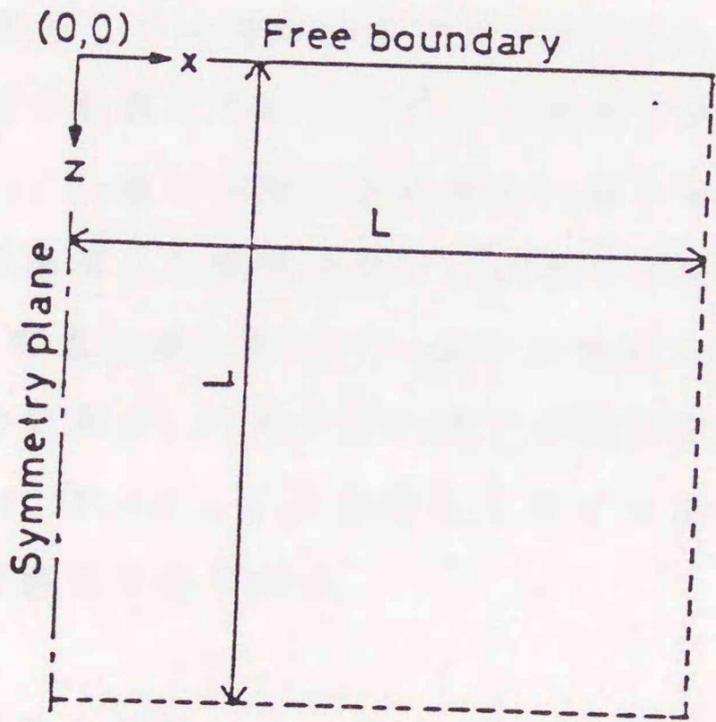


図 I-4-2 半無限等方弾性体の計算モデル

付近では平面波に近くなるように設定したものである。

ここで設定した境界条件について説明する。自由表面での境界条件は $T_3=0$, $T_5=0$ である。図 I-4-3(a) は図 I-4-1(a) の等価回路を用い、粒子速度節点のみを境界に置いたもので、 \dot{w} 節点は開放とし \dot{u} 節点は次のような境界条件を設定している。すなわち、 z 方向に伸びる1次元線路について \dot{u} 節点に流入する電流を I_{z1} 、流出する電流を I_{z2} としたとき $I_{z1} = -I_{z2}$ とした。この電流は T_5 応力にあたり、流れ込む T_5 応力成分と流れ出る T_5 応力成分が打ち消し合って平均的にその場所で零であると考えられる状況に設定したものである。この場合境界では Δd の凹凸があることになるが、弾性波の波長が十分長ければその凹凸は無視できると考えられる。これをさけるため T_1 , T_3 端子を境界面に置き T_5 端子を短絡すると、それらの相互結合項 M_c が無視され弾性体のモデル化が不十分となる。図 I-4-3(b) は図 I-4-1(b) の等価回路において T_5 端子を短絡しその x 方向隣の \dot{w} 端子を開放としたものである。このとき T_5 端子が短絡されたにも拘わらず容量 C_5 は \dot{u} 節点にインダクタンスとして双対表示されているので、横波特性に対応した等価回路は満足されている。

4-3. 解析結果と考察

時間応答計算の定式化は台形近似を用いたインダクタンス、容量の電圧電流関係の差分式と1次元線路の Bergeron 表示式および節点における電流連続則との連立から得られる⁽⁴⁾。図 I-4-4 に周期 $80 \Delta t$ の連続正弦波10周期分の T_3 応力を自由表面に印加した場合の半無限弾性体の表面における x 方向の粒子速度 \dot{u} と z 方向の粒子速度 \dot{w} の様子を示す。図 I-4-4(a), (b) はそれぞれ図 I-4-3(a), (b) の境界条件のモデル化に対応している。図 I-4-4(c), (d) はそれぞれ比較のために行った差分法および質点系モデルによる計算結果である。いずれの手法も変位のみを変数として計算するのが一

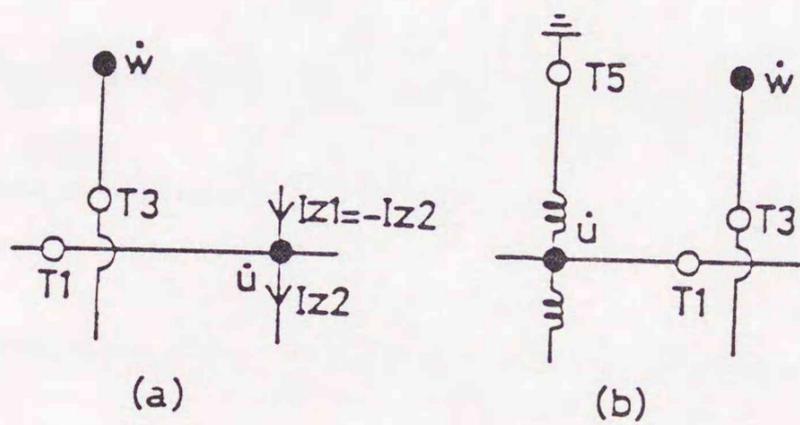


図 I-4-3 等価回路における自由境界条件の設定

- (a) 粒子速度節点を開放にした設定
- (b) 図 I-4-1(b)の等価回路の応力(T_5)節点を短絡,
粒子速度(\dot{w})節点を開放にした設定

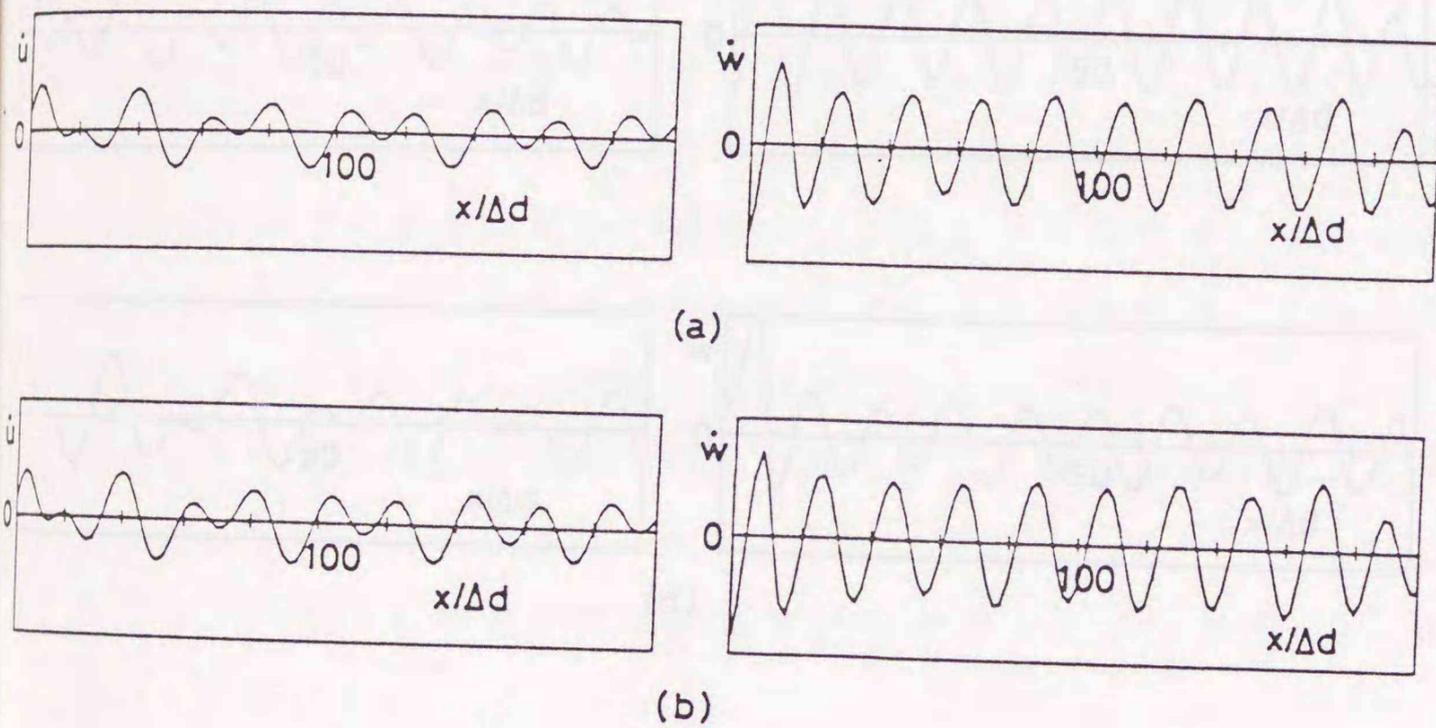
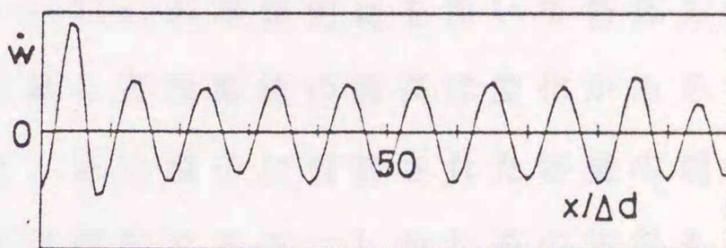
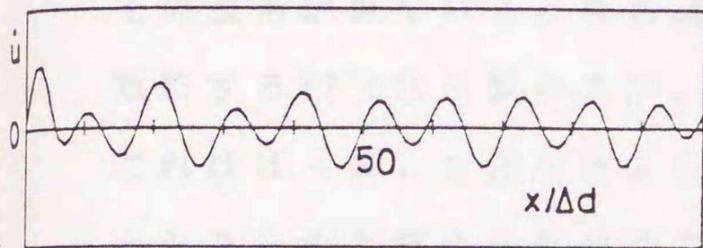


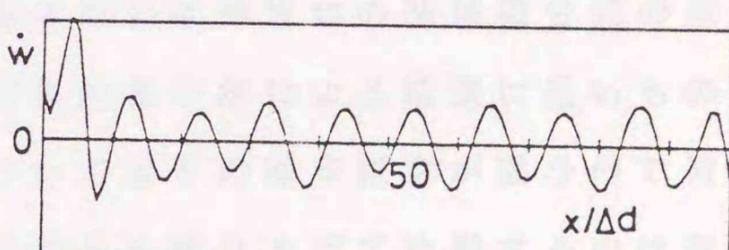
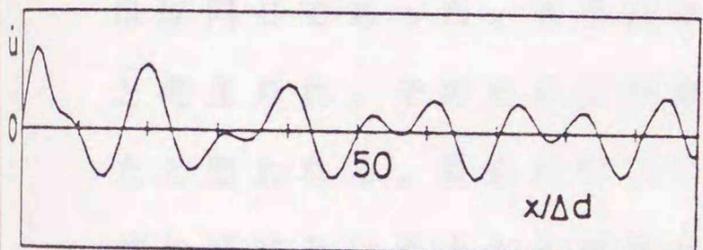
図 I-4-4 正弦波応力 T_s を加えたときの自由表面の粒子速度の計算結果
 : $V_s/V_p=0.577$, $T_p=80\Delta t$, $T_o=800\Delta t$ (V_s , V_p , T_p , T_o は
 それぞれSV波の速度, P波の速度, 入力波の周期, 計算時間)

(a) 図 I-4-3(a)の設定による計算結果

(b) 図 I-4-3(b)の設定による計算結果



(c)



(d)

- (c) 差分法による計算結果
- (d) 質点系モデルによる計算結果

般的であるので本手法の粒子速度の計算結果と比較するため、それらの計算領域の寸法と入力周期は本手法の半分とし、時間微分した入力応力を印加して計算を行なった。図I-4-4の \dot{w} については表面波が優勢であり、 \dot{u} については表面波と縦波の重畳した波形となっている。いずれも表面波の波長の理論値である $21\Delta d$ （本手法以外は $10.6\Delta d$ ）にほぼ近い値となっている。また本手法による結果は、差分法によるものと非常によくその波形が似ている。なお図I-4-1(a)の等価回路を用いて各応力端子を短絡するモデル化も試みたが、計算した表面波の波長に変化がみられた。これは4-2.で述べたように、応力端子に付加された容量の機能が失われたためと考えられ今後の検討課題である。しかしその結果も含めて弾性体内部での波動の様子は境界条件の設定や手法の違いにかかわらずほぼ同じであった。本手法は基本的には弾性体の関係微分式の差分近似と考えられ、そのために計算結果が差分法による結果に近いものとなったと思われる。質点系モデルについてはその基本概念が違うので微分方程式の解法という点から境界条件のみを取り上げて比較するのは難しい。質点系モデルと差分法による計算結果の比較については文献(3)に詳しく述べられている。

4-4. むすび

本章では、同一の自由境界条件を与える幾種類かの境界の設定において、その違いが計算結果に及ぼす影響について調べた。その結果、集中定数素子を並列に付加した応力節点を単に短絡することで自由境界条件を設定すると計算結果に違いが生じ、隣接する双対の節点にインダクタンス表示した上で短絡するなど注意が必要なことがわかった。また、現在一般的に用いられている数値解析法と比較したところ、本手法の計算結果は差分法によるものに近いことがわかった。本手法はその誤差が離散時間

Δt および空間離散間隔 Δd に対して2次であることがわかっており⁽⁸⁾、それと本章の結果を考慮すると、自由境界を持つ各種の境界値問題に対して有効な解析手段となると考えられる。

参考文献

1. 藤田 隆夫、自由境界問題の有限差分法による数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、1-10頁。
2. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、11-20頁。
3. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、21-30頁。
4. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、31-40頁。
5. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、41-50頁。
6. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、51-60頁。
7. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、61-70頁。
8. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、71-80頁。
9. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、81-90頁。
10. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、91-100頁。
11. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、101-110頁。
12. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、111-120頁。
13. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、121-130頁。
14. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、131-140頁。
15. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、141-150頁。
16. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、151-160頁。
17. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、161-170頁。
18. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、171-180頁。
19. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、181-190頁。
20. 藤田 隆夫、自由境界問題の数値解析、数値解析の発展と応用、1978年、191-200頁。

第5章 流体内および固体内波動の統一的解析⁽¹⁾

5-1. まえがき

流体と固体の接する面では弾性波動の反射，屈折や固体表面の漏れ弾性表面波を通した両媒質間の波動エネルギーのやりとりなど複雑かつ特徴ある現象が生じ，さまざまな工学的分野での応用が研究開発されている。例えば，非破壊検査に用いられている流体中のバルク波と固体中の導波モードとの間のモード変換を行う流体くさび，光変調器や偏向器⁽²⁾，流体に接した弾性体板のラム波タイプの漏れ波を利用した水中超音波ビーム用漏れ波トランスジューサ⁽³⁾，更に流体層を介して接合した固体を利用した弾性表面波可変時間遅延器⁽⁴⁾や漏れ表面波を利用した表面波速度計測法⁽⁵⁾などの提案がある。また，超音波顕微鏡においては超音波収束用音響レンズとその焦点付近に置かれた被測定試料との間の弾性波の伝搬媒体として一般に液体（主に水）が用いられている。そしてレンズによって収束された超音波により試料に生じた表面波からの水中への漏れ波がその結像特性に大きな影響を与えることが知られており，逆にそれらを積極的に利用した計測も行われている⁽⁶⁾。そのほかにも，海底における音波の反射の問題など，流体と固体が接している場合の波動の解析が必要な問題が数多くある。このような波動の解析は一般に層状構造など単純な形状を仮定して解析的に行われている⁽²⁾。しかし複雑な構造，機能をもつ電子デバイスの設計においては任意形状を扱える，より実際的な解析法が望まれる⁽⁴⁾。また同様の波動を用いた計測法ではバーストなどのバルク波を用いることが多く，それらの計測法の評価には3次元構造，媒質条件を考慮した過渡応答解析などの動的な解析が特に重要であると考えられる。弾性波は解析的に解き得る問題が少ないため，この目的には数値解析手

法が不可欠となる。基本的には差分法や有限要素法など一般の数値解析法が適用でき有効性も確かめられつつあるが、それぞれ固有の得失をもつことが知られており、また具体的な解析例は少ないようである⁽⁷⁾。

前章まで空間回路網法による固体内弾性波動の時間応答解析について述べてきた^{(8)~(10)}。一方本手法による流体内部波動の取扱いについてはすでに報告されている^{(11)・(12)}。流体内部波動はスカラー波でありベクトル波である固体内の弾性波とはその物理的性質を異にしているため、それらの回路網表現は互いに異なっており、両者の波動場の統一的取扱いのためにはその結合部の取扱いが重要となる。本章では流体内部の弾性波動を表す等価回路に新たに粒子速度節点を加えた等価回路を提案し、本手法において固体内および流体内部の波動現象を統一的に扱うための基本的な取扱いについて述べている。以下、5-2.において各波動の等価回路表示とそれらを統一的に扱う方法について述べ、5-3.では基本的な例題に本手法を適用した結果を示し、その妥当性を検討している。

5-2. 流体内部および固体内部波動の等価回路表示とその統一的扱い

本章では簡単のため固体は立方体とし、流体・固体とも y 方向に一様な2次元問題として取り扱う。また流体は流れや粘性を考えず、波動伝搬特性のみに着目する。流体においては連続方程式および運動方程式からスカラー形の波動方程式となり、固体では、フックの法則および運動方程式からベクトル形の波動方程式となることが知られている。それぞれの等価回路についての詳述は省略し、以下両等価回路の結合についての取扱いを中心に説明する。本手法では流体の波動場を図I-5-1のような等価回路で表現する^{(11)・(12)}。また固体内部の波動である縦波(P波)および $x-z$ 面内で進行方向に垂直な粒子速度成分をもつ横波(SV波)に対する波動場を図I-5-2のような等価回路で表示する⁽⁸⁾。各等価回路では各波動

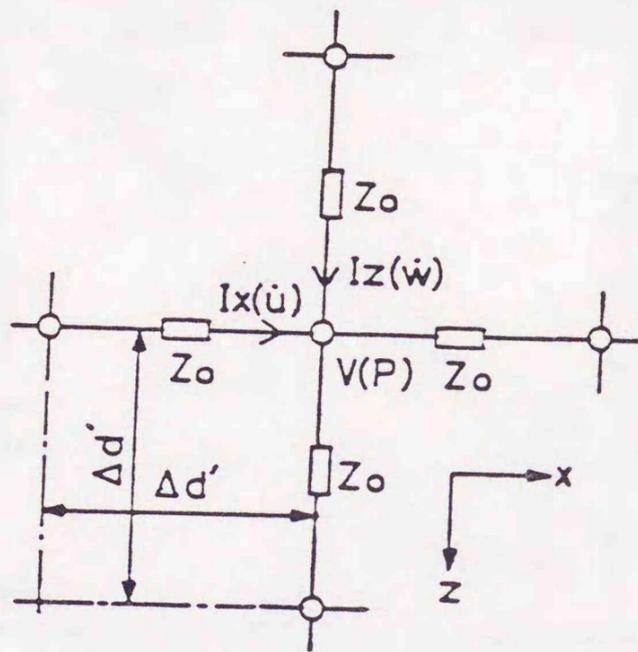


図 I-5-1 流体内波動の2次元基本等価回路

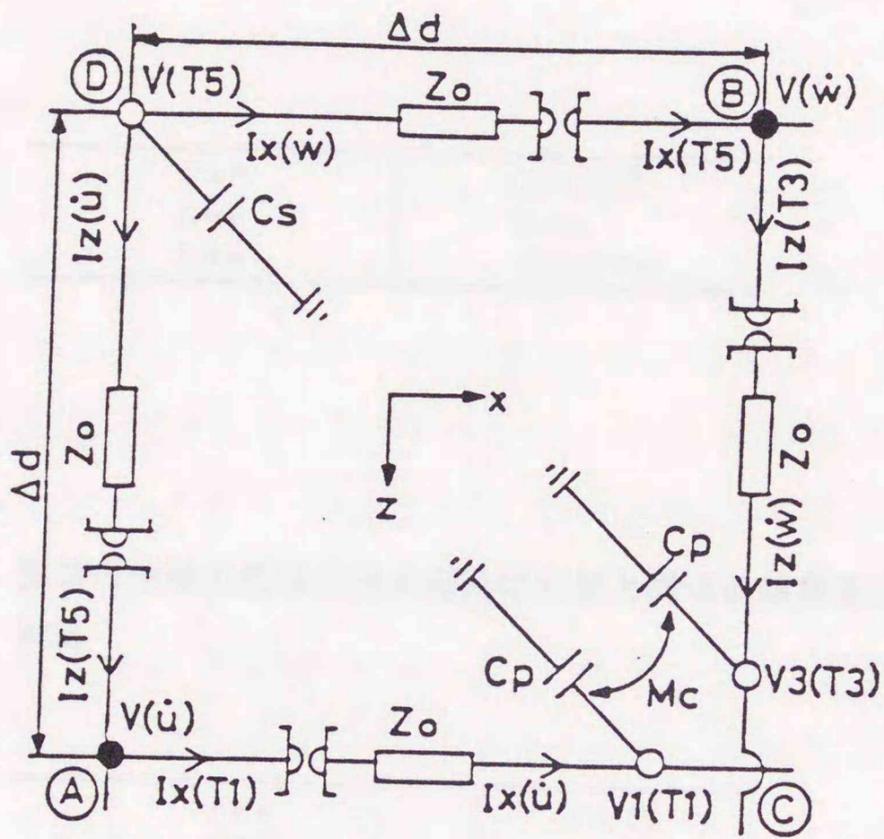


図 I-5-2 等方弾性体内のP波, SV波を表す2次元基本等価回路

表 I-5-1 流体内波動の変定数とその等価回路の回路変定数との対応

$V \equiv P$	$Z_0 \equiv \sqrt{L/C}$
$I_x \equiv \dot{u}$	$L \equiv \rho$
$I_z \equiv \dot{w}$	$C \equiv 1/(2\kappa)$

表 I-5-2 固体内波動の等価回路の回路変定数と固体の媒質変定数との対応

A	$V \equiv \dot{u}$ $I_x \equiv T_1$ $I_z \equiv T_3$	C	$V_1 \equiv T_1$ $V_3 \equiv T_3$ $I_x \equiv \dot{u}$ $I_z \equiv \dot{w}$
B	$V \equiv \dot{w}$ $I_x \equiv T_3$ $I_z \equiv T_1$	D	$V \equiv T_3$ $I_x \equiv \dot{w}$ $I_z \equiv \dot{u}$
$Z_0 = \sqrt{L/C}$ $C_p = (s_{11} - 1/(2c_{11}))2 \Delta d$ $C = 1/(2c_{11})$ $M_c = s_{13}2 \Delta d$ $L = \rho/2$ $C_s = (s_{33}/2 - 1/(2c_{11}))4 \Delta d$			

の平面波伝搬が行われる微小同一長さ，すなわち流体内では $\Delta d'$ ，弾性体内では Δd の無損失1次元線路が正方格子状につながれている。また各格子点すなわち節点では流体および固体内波動の各変数を電圧，電流に対応させている。それぞれの回路変定数と波動の変定数との対応を表I-5-1, I-5-2に示す。表中の \dot{u} , \dot{w} はそれぞれ x , z 方向の粒子速度， T_1 , T_3 , T_5 , P はそれぞれ応力成分と音圧， c , s , κ はそれぞれスティフネス，コンプライアンスと体積弾性率であり，また， ρ は密度である。図I-5-1, I-5-2では各節点の電圧，電流の記号の隣にそれらに対応する各波動の変数をかっこでくくって示してある。固体内の波動としてはこのほかに y 方向に粒子速度成分をもつ横波（SH波）が存在するがこの波動は流体内の波動とは結合しないのでここでは考えない。なお等価回路図では応力（または音圧）を電圧に対応させた節点（応力節点）を白丸○で，粒子速度を電圧に対応させた節点（粒子速度節点）を黒丸●で示している。各変数に対応した節点は波動方程式を満足するように交互に配置されている。微小線路の長さを，計算する波動の波長に比べて十分短くし図I-5-1, I-5-2の基本等価回路を多数接続して格子網を形成し，実際の波動を近似する。また本手法では等価回路の各節点に集中定数素子をつなぐことで媒質条件を表示する。すなわちそれらの集中定数素子は線路の性質を調整するスタブと同じ動きをすると考えれば理解しやすい。従ってその値を変更することで容易に媒質条件を変えることができる。具体的には流体内波動の等価回路の各節点と固体内波動の等価回路の応力節点に並列に容量をつなぐか，固体内波動の等価回路の粒子速度節点の各枝に直列にインダクタンスをつなぐことにより線路の容量分（弾性定数に当る）を調整できる。また，両者の応力節点に直列にインダクタンスを負荷するか固体内の粒子速度節点に並列に容量を負荷することで等価的に線路のインダクタンス分（密度に当る）を変化させることができる⁽¹⁰⁾。

■ 本解析で用いる粘性のない流体内においてはせん断応力を考慮する必

要がないスカラー形の波動方程式であるため，例えば \dot{u} に関連した音響ポインティングベクトルは x 方向にしかその成分を持たず，従って図I-5-1のように流体内部波動場のみを扱うときには特に粒子速度節点を設ける必要がない。このとき線路の中央に粒子速度節点を設け，変数の物理的意味を対応させるため各枝にジャイラタを挿入することで元の等価回路の概念を損なうことはなく，更に図I-5-2の等価回路と基本的に同じ表現を得ることができる。

この基本的概念の上に両波動を統一的に扱う等価回路を導く。すなわち流体内部および固体内部波動を表現するそれぞれの等価回路に次のような条件を設定する。

(1) 流体を近似表現する図I-5-1の回路の基本1次元線路の長さを固体内部波動を表す回路の線路の2倍とし ($\Delta d' = 2 \times \Delta d$)，固体の等価回路との結合部等必要な部分は線路中央に粒子速度節点を設ける。

(2) 両等価回路を含めた系全体における各節点間の波動伝搬時間を一定にして，時間軸上での同期した逐次計算を可能にするため，1次元線路の長さとは性質はすべて同じとする。そこで各媒質内における密度の違いは粒子速度節点に並列に容量（または応力節点の枝に直列にインダクタンス）を接続することで，また弾性定数の違いは応力節点に並列に容量（または粒子速度節点に直列にインダクタンス）を負荷することで調整する。但し，そのときの線路定数は，媒質条件調整のための容量やインダクタンスの蓄積エネルギーが負にならないように選ぶ。

またその条件下で線路中の伝播速度をできるだけ弾性波の速い速度に近づけた方が空間分割が少なくて済み計算効率が良い⁽¹⁰⁾。おおよその目安としてスリフネスの2倍の逆数 $1/2 c_{11}$ と体積弾性率の2倍の逆数 $1/2 \kappa$ のうちの小さい方，および密度 $\rho/2$ と ρ_s の小さい方を線路定数として選ぶはその条件はほぼ満足される。なお一般に離散的手法では計算精度の問題から波長を空間的に10分割以上する必要があり，本手法でも同様

である。

このような基本的条件を踏まえ、流体および固体の接している境界面の境界条件の取扱いを次のように行う。いま、図I-5-3に示すように両媒質が $z=0$ で接しているとすると、その面での境界条件は \dot{w}_s, \dot{w}_f を固体内、流体内の z 方向の粒子速度、固体内の z 方向の伸縮応力、せん断応力を T_s, T_s 、更に流体内の圧力を P とするとき次式のようになる。すなわち粒子速度の境界面における垂直成分の連続より

$$\dot{w}_s = \dot{w}_f \quad (\text{I.5.1})$$

応力の境界面での垂直成分の連続とせん断応力が零であることから

$$T_s = P \quad (\text{I.5.2})$$

$$T_s = 0 \quad (\text{I.5.3})$$

上式から、図I-5-3に示すように流体内部波動と固体内部波動の等価回路を接続することで境界条件に対応した等価回路表現が得られる。

5-3. 解析結果

時間応答計算の定式化について簡単に説明する。図I-5-4に示す1次元線路に対しては次のようなBergeron表示式で離散化する。但し、 $\Delta t = \Delta d/v_1$ で v_1 は線路中の波動の速度である。

$$V_k(t) + Z_0 I_k(t) = V_{k-1}(t - \Delta t) + Z_0 I_{k-1}(t - \Delta t) \quad (\text{I.5.4})$$

$$V_{k-1}(t) - Z_0 I_{k-1}(t) = V_k(t - \Delta t) - Z_0 I_k(t - \Delta t) \quad (\text{I.5.5})$$

5-2. における条件(2)から、本計算では線路伝搬定数はすべて同一とするので流体、固体内部波動の両等価回路で同じ時間差分をもつ式となる。また各節点に接続される集中定数素子である容量やインダクタンスは台形積分近似式により時間離散化し、その式とBergeron表示式(I.5.4), (I.5.5), および各節点におけるキルヒホッフ則とを連立させて定式化を行い各節点ごとの逐次計算式を得る⁽⁸⁾。

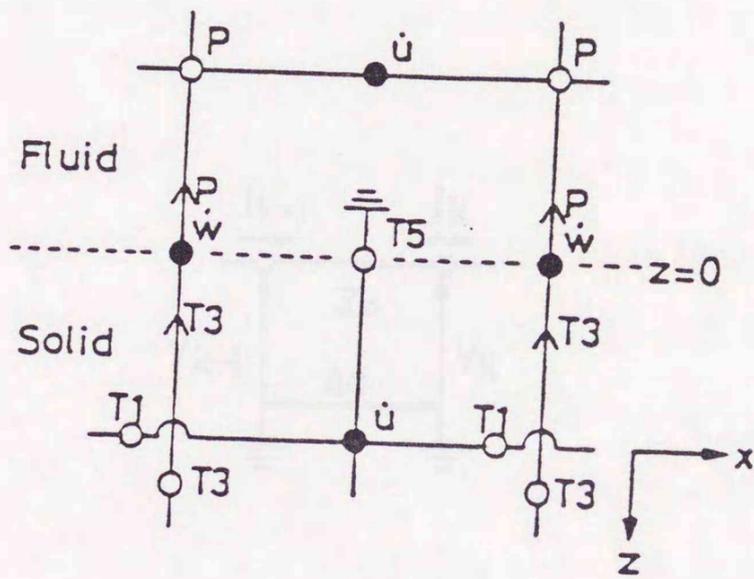


図 I-5-3 流体と固体の境界面での波動の等価回路表現

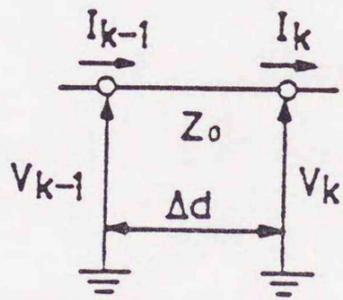


図 I-5-4 1次元基本分布線路

さて、本解析手法の妥当性の検討に用いる媒質として表I-5-3のような定数をもつ流体および固体を仮定する。流体は水、固体は真ちゅうの媒質定数に近い値を選んだ。ここでは条件の(2)から各回路定数を表I-5-4のように定めた。表の中で C_f および C_p はそれぞれ流体内部波動の等価回路の応力節点と固体内部波動のその粒子速度節点に並列に負荷した容量である。従って、この回路定数においては線路の速度が $\sqrt{2C_{11}/\rho_f}$ となり、固体内のP波速度の約4倍となる。なお実際の計算において計算効率を向上するためには各定数の規格化が有効であり、通常密度の比、弾性定数の比および各媒質内の速度比のうちのいずれか2つを指定する。

以下計算結果の説明と検討を行う。はじめに本取扱いの基本的検討のため、固体内のP波平面波が流体との境界面に垂直入射する1次元的問題に本手法を適用した。このときの計算モデルを図I-5-5に示す。図の等価回路は各媒質の波動がx方向に一様、すなわち $\dot{u}=0, T_s=0$ でz方向のみに伝搬する状況をシミュレートしており、このモデルにより、固体内のP波と流体内部の波動の音響特性インピーダンスの違いによる定在波分布や伝搬速度の違いによるそれぞれの波長が計算され本取扱いの妥当性が基本的に確認できる。入力より $498\Delta d$ の位置に固体と流体の境界面を想定している。図の左側の \dot{w} 節点にP波平面波の特性インピーダンス Z_1 を電源インピーダンスとしてもちつ電圧源をつなぎ、その入力電圧は周期 $204\Delta t$ 、規格化振幅1の連続正弦波とした。なおこの正弦波の周期は流体内部の波動の波長が $20\Delta d$ となるように設定したものであり、以下に示す解析でも同じ周期の波動を用いている。一方図の右端の \dot{w} 節点には流体内部の波動の音響特性インピーダンスに等しい負荷インピーダンスである Z_f を負荷し、その点で反射の生じないように整合をとった。入力正弦波でほぼ50周期間計算し、各節点の電圧の振幅値が安定し定常状態になるのを確認した。そのときの音圧および粒子速度の振幅分布を図I-5-6(a),(b)にそれぞれ示す。振幅の最小値がばらついているのは計算した離散値をそのまま結んだためであ

表 I-5-3 計算に用いた流体と固体の媒質定数

液体	密度 $\rho_f = 1,000 \text{ kg/m}^3$ 音速 $v_f = 1,500 \text{ m/s}$
固体	密度 $\rho = 8,100 \text{ kg/m}^3$ P 波速度 $V_L = 3,800 \text{ m/s}$ SV 波速度 $V_s = 2,000 \text{ m/s}$

表 I-5-4 計算に用いた媒質定数とその等価回路の回路定数との対応

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \sqrt{L/C} \\
 C &= 1/2 c_{11} \\
 L &= \rho_f \\
 C_r &= (1/(2\kappa) - 1/(2c_{11})) 4 \Delta d \\
 C_p &= (s_{11} - 1/(2c_{11})) 2 \Delta d \\
 M_c &= s_{13} 2 \Delta d \\
 C_s &= (s_{33}/2 - 1/(2c_{11})) 4 \Delta d \\
 C_o &= (\rho/2 - \rho_f) 4 \Delta d
 \end{aligned}$$

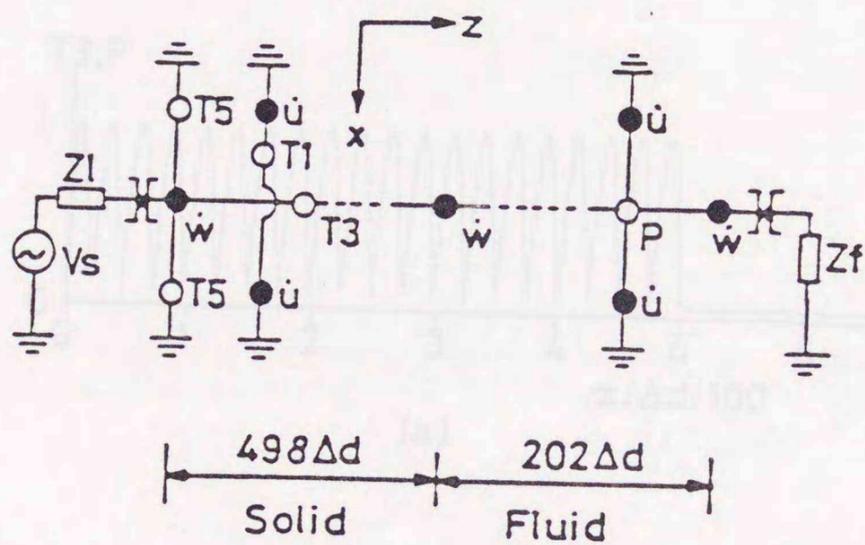


図 I-5-5 固体内のP波平面波が流体との境界面に垂直に入射する状況をシミュレートするための節点配置

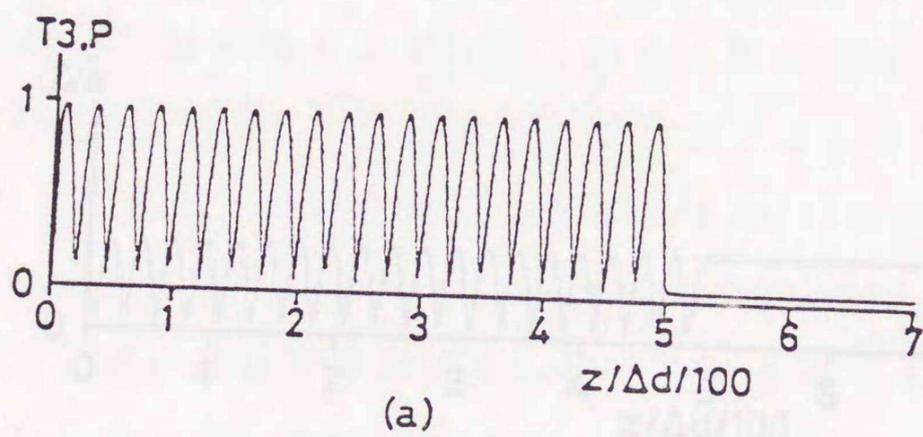
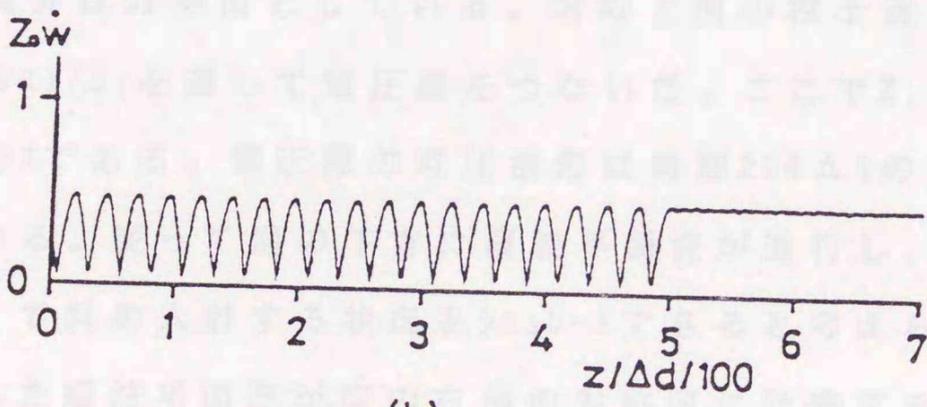


図 I-5-6 図 I-5-5 のモデルに対する定在波分布の計算結果
 (a) 固体内の応力と流体内の圧力の振幅分布

と、その振幅を測定して、数値比較を目的として管内の定電位比から、反射係数の算出を目的として、 $z/\Delta d$ を変化する。測定値は $z/\Delta d$ は 0.001で各点で測定を繰り返すこととなる。測定結果を図10の通り、 $z/\Delta d$ 0.001で測定した結果を示す。この結果から、粒子速度の振幅分布が $z/\Delta d$ 0.001で測定された結果が図10に示すように示されている。

図10は粒子速度の振幅分布を示す。図10の縦軸は粒子速度の振幅を示し、横軸は $z/\Delta d$ を示す。この図から、 $z/\Delta d$ が0.001で測定された結果が図10に示すように示されている。この結果から、粒子速度の振幅分布が $z/\Delta d$ 0.001で測定された結果が図10に示すように示されている。



(b)

(b) 粒子速度 \dot{w} の振幅分布

この結果から、粒子速度の振幅分布が $z/\Delta d$ 0.001で測定された結果が図10に示すように示されている。この結果から、粒子速度の振幅分布が $z/\Delta d$ 0.001で測定された結果が図10に示すように示されている。

り，その近傍を補間して，厳密に最小値を求めて固体内の定在波比から，反射係数を計算したところ約 0.91 となった。理論値⁽¹³⁾は 0.907 であるので妥当な結果と考えられる。また波長も固体内で約 $50\Delta d$ ，流体内で約 $20\Delta d$ となった。この結果それぞれ予想された特性インピーダンスや速度で各波動が伝搬していることが確かめられた。

次に2次元的な平面波の反射，屈折問題に本手法を適用し，その妥当性を検討した。すなわち図I-5-7に示すモデルを用いて固体内の縦波平面波が流体との境界面に 45° で斜め入射し，境界面で反射，屈折する様子をシミュレートした。図において 45° の境界の上側を固体，下側を流体とし，図の左右の境界は対称面としている。図の上面の粒子速度節点Bの全てに電源アドミタンス $1/Z_1$ を通して電圧源をつないだ。ここで Z_1 はP波平面波の特性インピーダンスである。電圧源の電圧波形は周期 $204\Delta t$ の正弦波1波長の λ としていた。従って図の下方に縦波平面波が進行し，液体との境界に入射角 45° で斜め入射する状況をシミュレートできると考えられる。そして境界で反射した縦波平面波が図の右側の対称面に到達する時間で計算を止める。そのときの粒子速度のベクトル図を図I-5-8(a)に示す。図の中でほぼ平面波に近く他の種類の波と結合していない部分を選び理論値と比較した結果を表I-5-5に示す。反射，屈折角は波面の傾きから求めた。なお，反射，屈折率は理論的には周波数に依存しないが，数値計算の結果においては等価回路の離散化に伴う分散性のため入力波形と反射，屈折波形との間にわずかの違いが現れるので，各波動を分離して空間的にフーリエ変換し，入力正弦波周波数における各波数の振幅同士を比較した。これらの結果は理論値⁽¹³⁾に近い値を示している。本手法は応力も同時に計算するベクトル解析法であり，その特徴を生かせば弾性波に関する種々の情報が同時に計算できる。その例として図I-5-8(a)の結果に対するポインティングベクトルを図I-5-8(b)に示す。図より入射縦波のエネルギーの多くが反射SV波に変換されたことがわかり，粒子速度ベクトルのみの計算では得

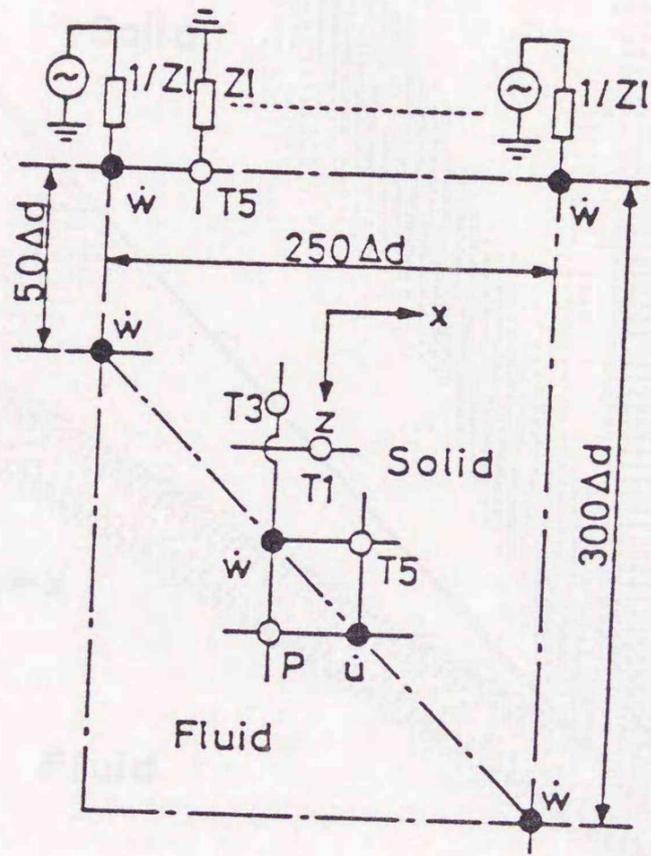


図 I-5-7 固体内のP波平面波が流体との境界面に入射角45°で斜め入射する状況をシミュレートするための節点配置と境界条件の設定

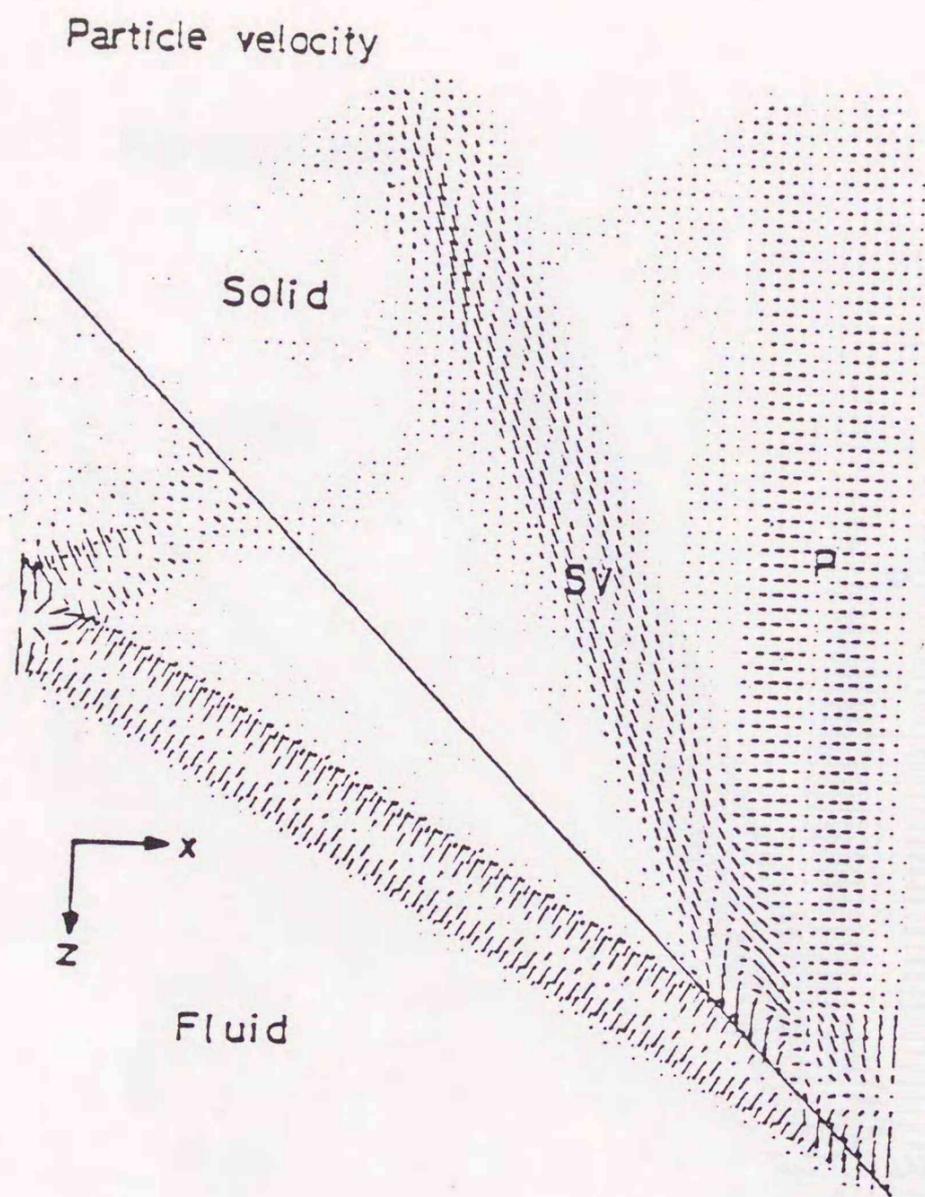
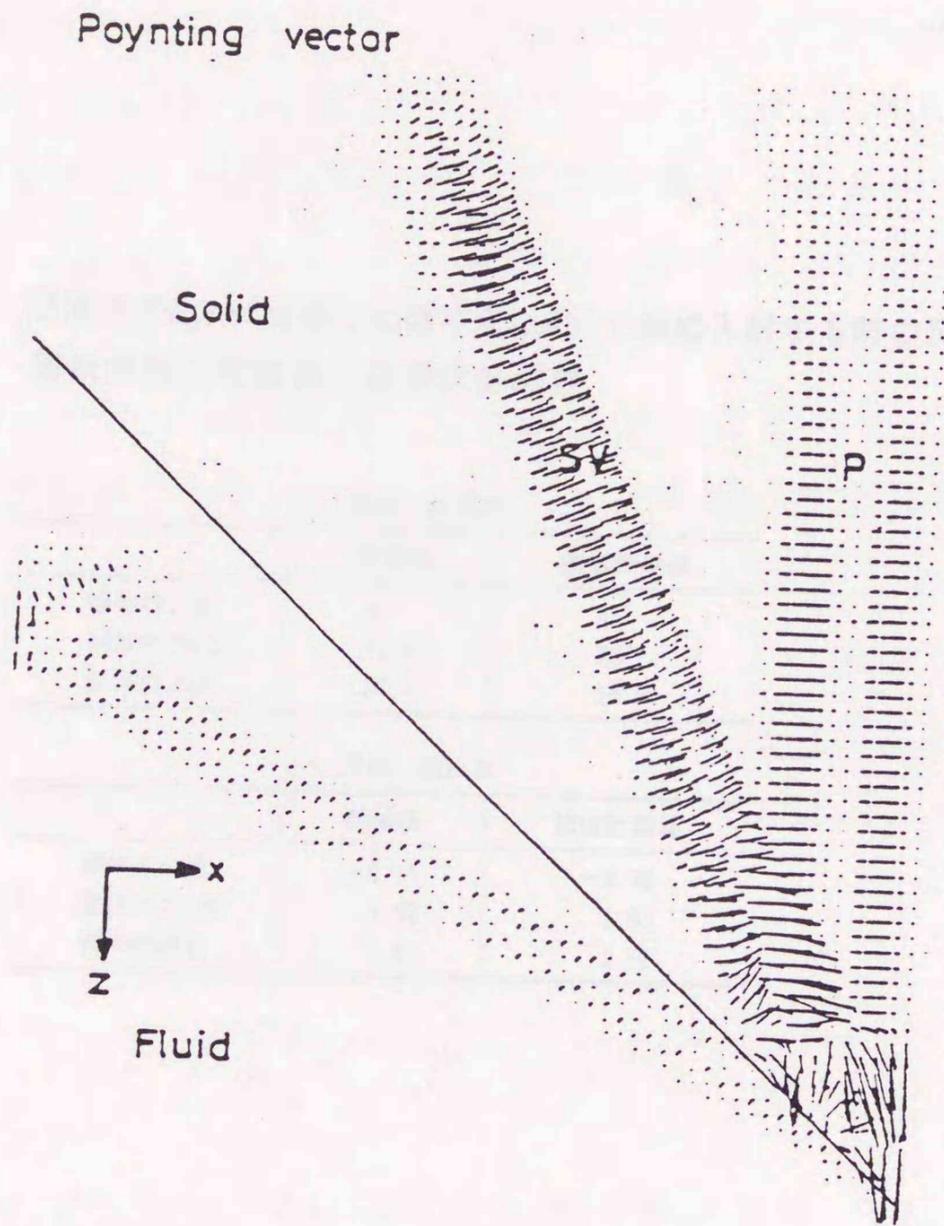


図 I-5-8 図 I-5-7 の設定による計算結果
(a) 粒子速度ベクトル分布



(b) ポインティングベクトル分布

表 I-5-5 固体内のP波が流体との接平面に45°で斜め入射する時の反射，
屈折特性の理論値と数値計算結果

(a) 反射, 屈折角		
	理論値	数値計算値
固体内P波	45°	45°
固体内SV波	21.9°	23°
流体内音波	16.2°	15.9°

(b) 反射, 屈折率		
	理論値	数値計算値
固体内P波	-0.40	-0.46
固体内SV波	1.02	1.03
流体内音波	1.41	1.51

られない有益な情報を与える。

次にハルス状のせん断応力(T_s)を流体と接した固体表面の一部に加えたときの波動伝搬の様子をシミュレートした。そのときのモデル図を図I-5-9に示す。 $x=0$ の面を対称とし、 $x=0, z=0$ の点の T_s 応力節点に規格化振幅1, そこから x 方向に $2\Delta d$ ごとに振幅0.85, 0.5, 0.15, 0.0の正弦波1周期分の電圧源をつないだ。時間を約 $650\Delta t$ まで計算したときの粒子速度ベクトル図を図I-5-10に示す。図I-5-10のPは固体内のP波, SV_1 は横波であり, SV_2 と C_1 はそれぞれ固体表面に沿って伝搬するP波が境界条件を満足するために放射した固体内SV波および流体内部音波と考えられる。P波平面波が流体との境界面に平行に入射するときのSV波の反射角および流体内部波動の屈折角は理論的⁽¹³⁾にそれぞれ 31.8° , 23.2° となるが, 図の SV_2 と C_1 の波面はほぼ理論値と同じ角度となっている。また図中のLSは漏洩弾性表面波と考えられそれによって励振された漏れ波 C_2 が見られる。その速度はSV波よりも遅く流体内部の波動よりも若干速いことが確かめられ定性的に理論と一致している⁽¹⁴⁾。

5-4. むすび

以上, 固体内部弾性波(ベクトル波)および流体内部音波(スカラー波)の空間回路網法による統一的時間応答解析における基本的取扱いについて述べた。その結合のためにまず, スカラー波動に対する等価回路に新しく粒子速度節点を導入することを提案した。次いで, 固体と流体の接する面では境界の連続条件に見合った節点同士をつなぎ, 固体内部波動の等価回路のせん断応力を電圧として持つ節点を短絡, それに対応する電流の流れる枝を開放にすればよいことを示した。そして基本的な例題に適用し, その特徴と妥当性を明らかにした。また前章でも述べたように, 本手法は応力と粒子速度を同時に計算できるベクトル解析法であるためポインティングベ

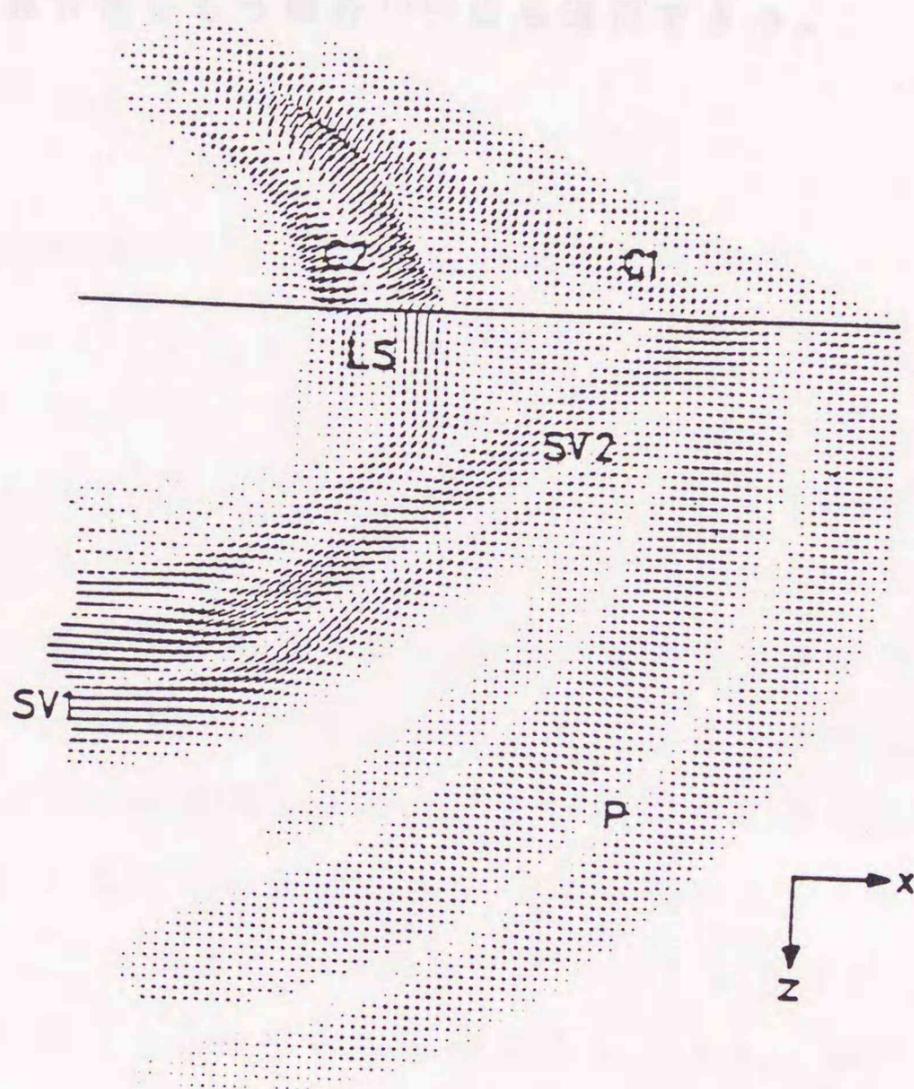


図 I-5-10 図 I-5-9 の設定による粒子速度ベクトル分布の計算結果

ベクトルなどのエネルギーに関する量も直ちに計算できる。そこで実際にポインティングベクトルを計算し、粒子速度ベクトルのみの場合よりもより情報量が多く有用であることを確かめた。本章での取扱いはそのまま3次元の場合⁽⁹⁾や固体が弾性的異方性をもつ場合⁽¹⁰⁾にも適用できる。

第II編 空間回路網法による電磁気系と結合する弾性波動の 時間応答解析

第1章 空間回路網法の1次元超音波振動子への適用⁽¹⁾

1-1. まえがき

前章までは他の系の影響を受けない場合の固体内弾性波動への空間回路網法の適用について検討してきた。第II編では超音波発生源や弾性波デバイスを実現するための圧電セラミックのような電気系と機械系のエネルギーのやりとりを媒介する媒質に空間回路網法を適用することを試みる。第1章では1次元振動をする圧電超音波振動子について検討する。

パルス駆動された超音波振動子の出力波形を知る上で、時間応答解析が重要である。その計算は通常電氣的等価回路を用いて行われるが、解析的に解くにはかなり煩雑であり、計算できる入力波形も限られる。従って数値解析によることが多く、例えばFFTを用いた離散フーリエ変換やz変換を使って入出力間の伝達関数を時間差分式化して計算するものなどが提案されている^{(2)・(3)}。いずれも有効な方法であるが、離散フーリエ変換による場合、周波数領域の計算と時間領域への変換という二度の操作が必要であり、また離散化による影響も無視できない。z変換法では直接時間領域で計算できる利点はあるが定式化に際して種々の困難がある。

1次元問題として扱える超音波振動子の等価回路として分布定数線路を用いた等価回路が提案されている⁽⁷⁾。本章では、それを微小同一長

さで同じ性質の1次元線路を多数従属に接続した回路に変形し，その時間領域での定式化にBergeron法⁽⁴⁾を適用する解析法について述べている⁽⁵⁾。本手法が一般に行なわれている解析法と比べて持つ特徴は (1) 電気回路解析手法を用いるので，分布定数線路による等価回路のもつ現象の把握し易さをそのまま残している。(2) 定式化や計算のアルゴリズムが簡単であり，整合層やマッチング回路などの付加的要素にも容易に対応できる。また時間を追って計算する逐時計算法であり，バクトル計算機により高速計算が可能である。(3) 回路内のすべての変数が一度に計算でき，繰返し計算の手間がはぶける。他の手法では一度の計算で一つの変数しか求まらない。(4) 形状の変化や不均一分極などのために弾性体部分の性質が均一でない場合⁽⁶⁾でも各節点での集中定数素子による計算が可能であり，このような問題への拡張は他の手法では難しいと考えられる。等である。

以下，本手法について説明し，基本的な例題に適用してその妥当性を示す。

1-2. 解析手法

ルソフ超音波の発生に良く使用される，図II-1-1(a)のモデルの厚みモード圧電振動子を対象にして，計算手法を説明する。その分布定数線路を用いた等価回路⁽⁷⁾を図II-1-1(b)に示す。ここで z_0 :振動子の特性インピーダンス， u :粒子速度， F_F ， F_B :前，後面の機械力， C_0 :制動容量 z_F ， z_B :前，後面の負荷， ϕ :電気機械変換係数， V_s ， I_s ， Z_s :電気端子の電源電圧，電流，出力インピーダンスである。図の1: ϕ のトランスを1:1にして機械量を等価な電気量になおすと図II-1-1(c)のようになる。図II-1-1(c)では後の説明のために線路を n 等分して示してある。線路を等しい間隔 Δd で n 分割したとき，ある分割点 k ， $k-1$ においてBergeron表示を用いて電圧，

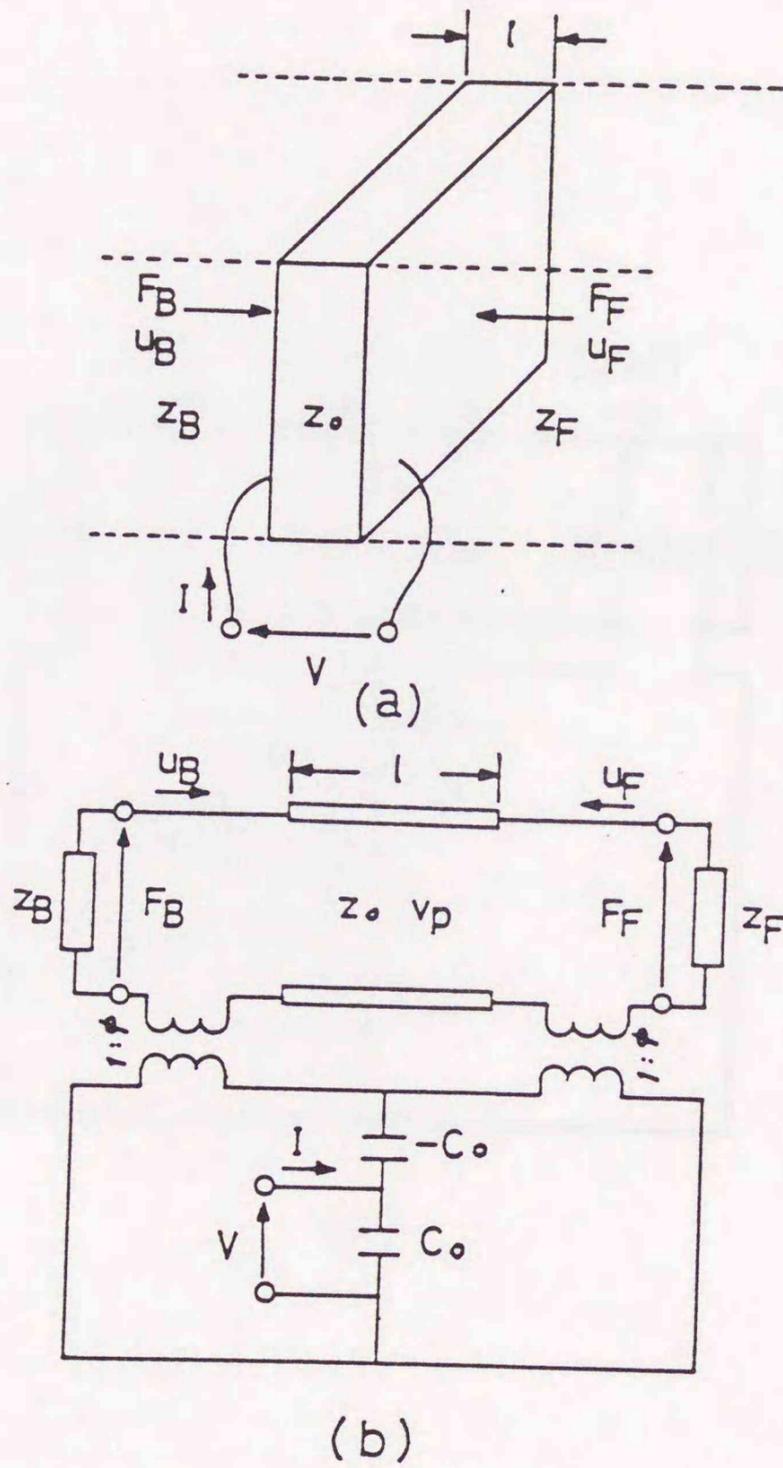
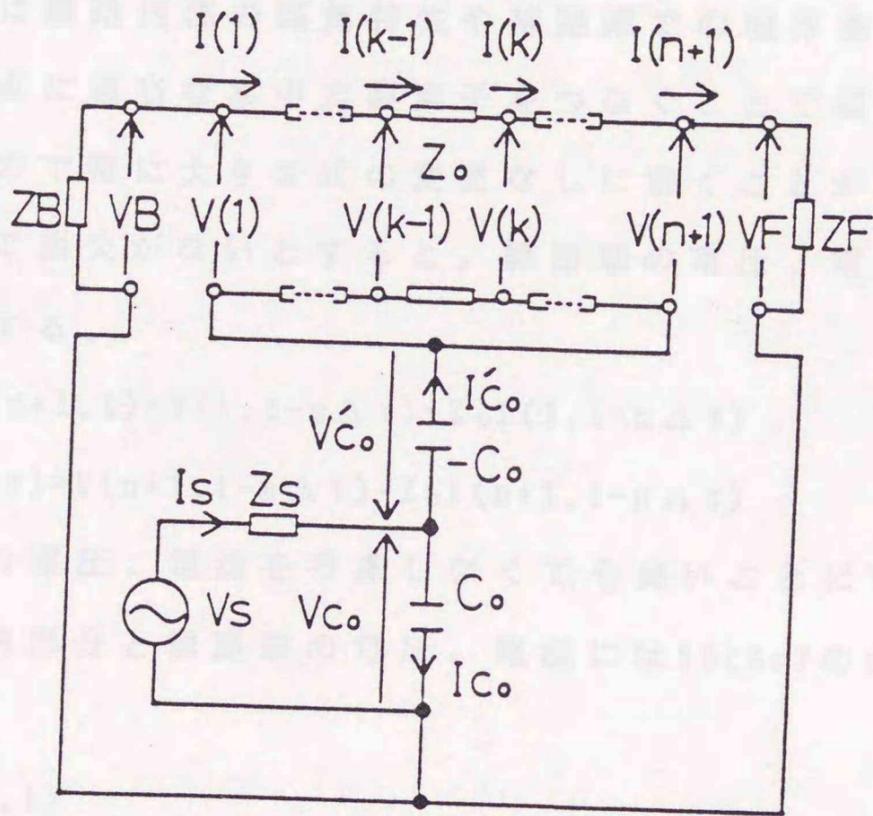


図 II-1-1 (a) 厚みモード圧電振動子のモデル図
 (b) 分布線路を用いた厚みモード圧電振動子の等価回路



(c)

(c) 図 II-1-1(b) の機械量を等価な電気量に変換した等価回路, $Z_0 = z_0 / \phi^2$, $Z_F = z_F / \phi^2$, $Z_B = z_B / \phi^2$, $V_F = F_F / \phi$, $V_B = F_B / \phi$

電流は次式を満足する。

$$V(k, t) + Z_0 I(k, t) = V(k-1, t - \Delta t) + Z_0 I(k-1, t - \Delta t) \quad (\text{II} . 1 . 1)$$

$$V(k-1, t) - Z_0 I(k-1, t) = V(k, t - \Delta t) - Z_0 I(k, t - \Delta t) \quad (\text{II} . 1 . 2)$$

ここで $\Delta t = \Delta d / v_p$ であり v_p は線路内を伝搬する波動の速度である。端部での境界条件を考慮して、上式を線路全体にわたって連立させて解き、 Δt ごとに逐次的に時間応答を計算していく。従って、前章までの議論からわかるように線路内部の媒質特性や線路端での境界条件が変化する場合でも、各節点に適当な集中定数素子をつなぐことで媒質定数を変えることができるので特に大きな式の変更なしに解くことができる。また線路内部が均一で損失がないとすると、線路端の電圧、電流は次のような関係式を満足する。

$$V(n+1, t) + Z_0 I(n+1, t) = V(1, t - n \Delta t) + Z_0 I(1, t - n \Delta t) \quad (\text{II} . 1 . 3)$$

$$V(1, t) - Z_0 I(1, t) = V(n+1, t - n \Delta t) - Z_0 I(n+1, t - n \Delta t) \quad (\text{II} . 1 . 4)$$

すなわち線路内の電圧、電流を考慮しなくても良いことになる。

さて、電気回路部分と線路端の電圧、電流にはキルヒホッフの法則により次式が成り立つ。

$$V_F(t) = Z_F I(n+1, t) \quad (\text{II} . 1 . 5)$$

$$V_B(t) = -Z_B I(1, t) \quad (\text{II} . 1 . 6)$$

$$V_F(t) = V(n+1, t) + V_{C_0}(t) - V_{C_0}'(t) \quad (\text{II} . 1 . 7)$$

$$V_B(t) = V(1, t) + V_{C_0}(t) - V_{C_0}'(t) \quad (\text{II} . 1 . 8)$$

$$V_S(t) = V_{C_0}(t) + Z_S I_S(t) \quad (\text{II} . 1 . 9)$$

$$I_S(t) = I_{C_0}(t) + I_{C_0}'(t) \quad (\text{II} . 1 . 10)$$

$$I_S(t) + I(1, t) = I_{C_0}(t) + I(n+1, t) \quad (\text{II} . 1 . 11)$$

また、容量の電圧、電流はBergeron法では次のように扱う。すなわち、 C_0 における電圧、電流の微分式

$$I_{C_0}(t) = C_0 \frac{dV_{C_0}(t)}{dt} \quad (\text{II} . 1 . 12)$$

に対して台形積分近似を適用すれば，次のように時間軸上で容量の関係式を表わすことができる。

$$V_{co}(t) - R_c I_{co}(t) = V_{co}(t - \Delta t) + R_{co} I_{co}(t - \Delta t) \quad (\text{II} . 1.13)$$

$$\text{但し, } R_c = \Delta t / (2C_o)$$

従って， $-C_o$ には次式が成り立つ。

$$V_{co}'(t) + R_c I_{co}'(t) = V_{co}'(t - \Delta t) - R_{co} I_{co}'(t - \Delta t) \quad (\text{II} . 1.14)$$

以上の式で(II.1.1), (II.1.2)と(II.1.13), (II.1.14)の Δt を同じに選べば，必要な式を連立させて離散時間 Δt ごとに時間 t での各変数の値を計算することができる。今，線路が均一で損失がない場合，式(II.1.3)から(II.1.14)より V_c, V_F 及び V_B が次のように求まる。但し，式(II.1.3), (II.1.4)の右辺をA, B, 式(II.1.13), (II.1.14)の右辺をC, Dとする。

$$V_{co}(t) = \frac{(1/Z_s - R_c \cdot Y_L / Z_s) V_s(t) - (A + C - D) / Z_{F0} - (B + C - D) / Z_{B0} + C / R_c}{1 / R_c + 1 / Z_s - R_c \cdot Y_L / Z_s} \quad (\text{II} . 1.15)$$

$$\text{但し } Z_{F0} = Z_F + Z_o, \quad Z_{B0} = Z_B + Z_o$$

$$Y_L = 1 / Z_{F0} + 1 / Z_{B0}$$

$$V_F(t) = \frac{A + C - D + R_c \cdot V_s(t) / Z_s - R_c \cdot V_{co}(t) / Z_s}{1 + Z_o / Z_F} \quad (\text{II} . 1.16)$$

$$V_B(t) = \frac{B + C - D + R_c \cdot V_s(t) / Z_s - R_c \cdot V_{co}(t) / Z_s}{1 + Z_o / Z_B} \quad (\text{II} . 1.17)$$

これらの式を再び式(II.1.3)から(II.1.14)へ代入して他の変数を求めることができる。

マッチングのためなどに新たに回路素子が挿入された場合でも，それによって成り立つ回路方程式をつけ加えて連立させれば良い。但し，インダクタンスは次のように扱う。すなわち，そこには次の微分式が成り立つ。

$$V_L(t) = L \frac{dI_L(t)}{dt} \quad (\text{II} . 1.18)$$

従って容量と同様に台形積分近似を適用すれば時間軸上で次式を得る。

$$V_L(t) - R_L I_L(t) = -V_L(t - \Delta t) - R_L I_L(t - \Delta t) \quad (\text{II.1.19})$$

但し $R_L = 2L / \Delta t$

次に、前面に整合層をつけた場合の扱いを示す。図II-1-2はインピーダンス Z_M 、波動の速度 v_m の均一な整合層を1個つけた場合を示している。これにBergeron法を適用すれば、次の式が成り立つ。但し、この整合層内では波動が端から端へ伝搬するのに $m \Delta t$ 時間かかるとしている。従ってこの整合層を時間的に Δt 、距離的に $\Delta t \times v_m = \Delta d \times (v_m / v_p)$ で等分割していることになる。

$$V_M(m+1, t) + Z_M I_M(m+1, t) = V_M(1, t - m \Delta t) + Z_M I_M(1, t - m \Delta t) \quad (\text{II.1.20})$$

$$V_M(1, t) - Z_M I_M(1, t) = V_M(m+1, t - m \Delta t) - Z_M I_M(m+1, t - m \Delta t) \quad (\text{II.1.21})$$

$$V_M(1, t) = V(n+1, t) + V_{co}(t) - V_{co}'(t) \quad (\text{II.1.22})$$

$$I_M(1, t) = I(n+1, t) \quad (\text{II.1.23})$$

従って、これらの式をつけ加えて連立させて解けば系全体の解を得ることが出来る。

1-3. 解析結果

本計算法の妥当性の確認のため図II-1-3のモデルで行った計算結果を示す。すなわち、図II-1-3(a)のようなハールズ電圧で駆動したときの音響負荷端子の電圧（力に対応する）を計算した。図II-1-3(b)は整合層なし、図II-1-3(c), (d)はそれぞれ一層と二層の整合層を前面につけた場合である。整合層やその他の回路定数の値は文献(8), (9)によっており、 Z_F, Z_B, Z_S は純抵抗としている。また整合層には振動子に近いほうから順に番号をつけてあり、振動子の線路の分割数を n 、第1整合層、第2整合層の分割数をそれぞれ m_1, m_2 としている。整合層はいわゆる $1/4$ 波長線路であり、その中を往復する波と振動子内を伝搬する波が半周期ごとに干

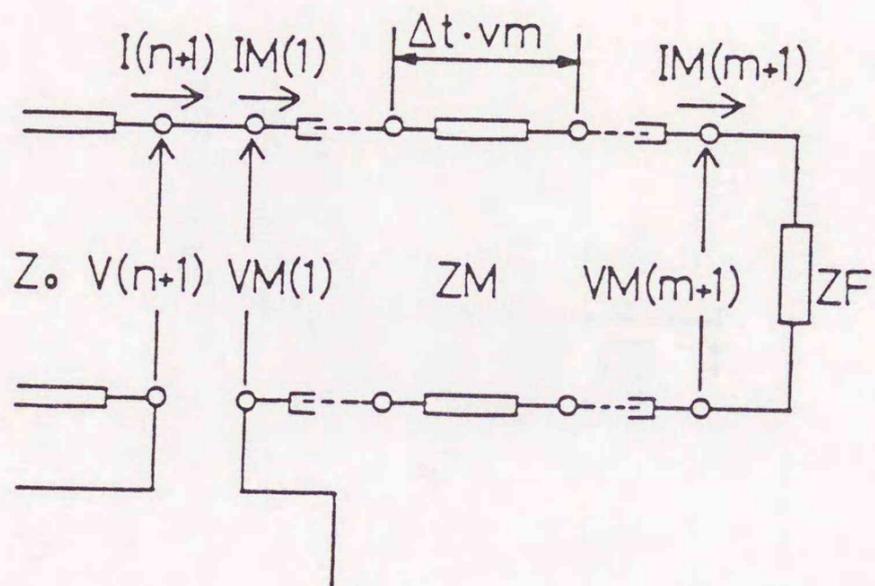


図 II-1-2 振動子前面につけた1層の整合層

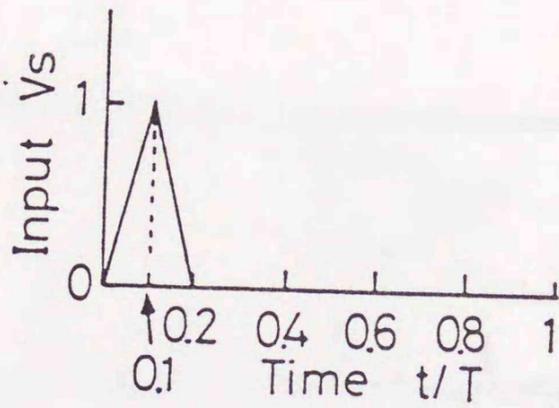
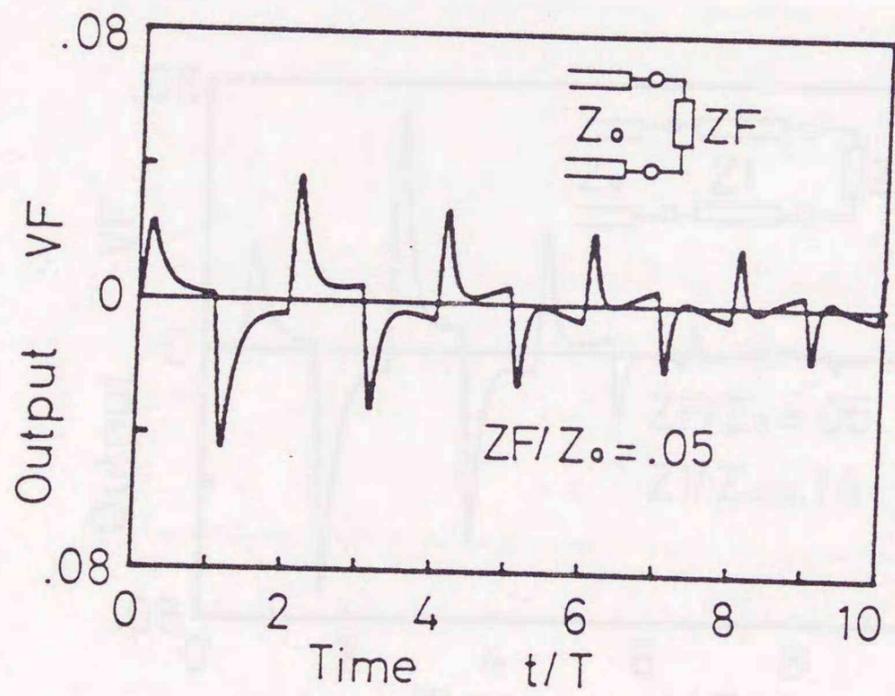


図 II-1-3 パルス電圧駆動された振動子の音響負荷端子電圧 V_F の波形

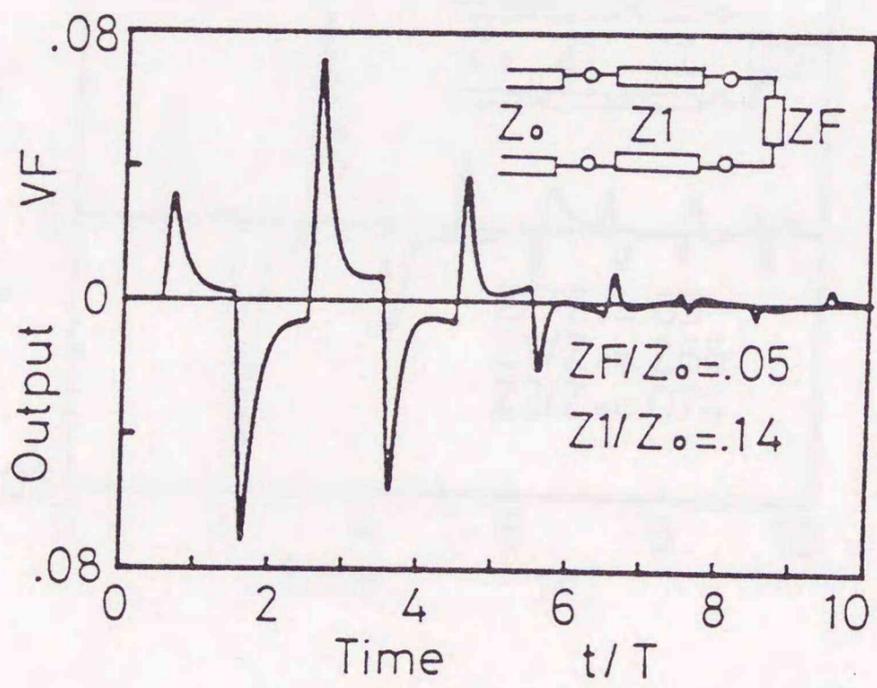
$T=n\Delta d/v_p$, $k=0.5$, $\tau/T=0.2$, $\tau=Z_s \cdot C_0$,

但し k は電気機械結合係数

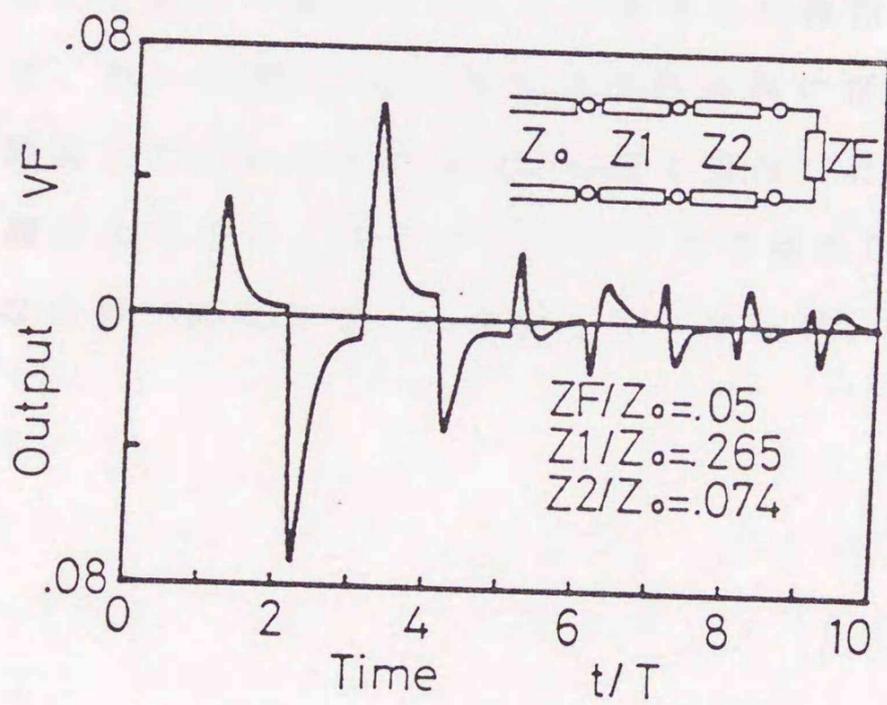
(a) 入力電圧波形



(b) 整合層無し, $n=100$, $Z_F/Z_0=Z_B/Z_0=0.05$



(c) 整合層1層, $n=100, m_1=50,$
 $Z_F/Z_0=Z_B/Z_0=0.05, Z_1/Z_0=0.14$



(d) 整合層2層, $n=100, m_1=55, m_2=55$

$$Z_F/Z_0 = Z_B/Z_0 = 0.05, Z_1/Z_0 = 0.265, Z_2/Z_0 = 0.074$$

渉し打ち消しあって多重反射が抑圧される。計算結果から整合層をつけることにより出力パルスの尾引きが短くなっているのがわかる。またこの計算の過程で端面の速度や電源の電流など他の変数も同時に計算されている。この他に必要であれば線路内の電圧，電流も知ることができる。

1-4. むすび

1次元振動をする超音波振動子への空間回路網法の適用について述べた。すなわち，従来から提案されている分布定数線路による等価回路を微小同一長さ，同一性質の1次元線路を多数従属に接続した回路に変形し，その時間軸上での定式化にBergeron法を適用した。その結果本手法の有効性が確かめられた。まえがきに述べた特徴の(4)については具体的な例が少ないので現在のところ確認していないが，有効な特徴と思われる⁽¹⁰⁾。

第2章 圧電セラミック平板への適用⁽¹⁾

2-1. まえがき

弾性波は非破壊検査，医療診断などの計測や共振子，フィルタといった電子デバイスなどとして広く用いられている。そこで弾性波を工学的に利用するために，圧電素子のような電気機械変換素子（以下簡単のため変換素子と呼ぶ）が不可欠である。近年の測定技術，電子機器の発達により，弾性波デバイスに対してもより高度な性能が要求されるようになってきた。デバイスの設計には変換素子の解析が必要である。これまでその解析には，振動姿態を1次元に限定した電氣的等価回路による解析法が一般に用いられている⁽²⁾。しかし，1次元解析では設計要件を満たせない場合が多く，2次元以上の解析が望まれる。そこで摂動論による近似解法や変分法による数値計算が一部に行われている⁽³⁾。更に最近スーパーコンピュータに代表される計算機の性能の飛躍的向上に伴い，差分法や有限要素法のような数値解析手法による変換素子の解析も盛んに行われるようになってきた⁽⁴⁾。しかし，それらの解析は定常状態に関するものがほとんどであり時間応答解析の報告は比較的少ない⁽⁵⁾。時間応答解析はパルス応答やデバイスの実動作の把握等に必要であり，最近注目されている数値計算による実験，すなわちシミュレーションの分野において非常に重要な位置を占めると考えられる。そこで，変換素子の2次元以上の時間応答の解析手法として，先の差分法や有限要素法等の適用が考えられるがそれぞれ固有の得失を持つことが知られている。

一方，弾性体を電氣的等価回路で表現し解析する方法が古くから行われている。特に変換素子は電気系と機械系が相互に影響し合っている系であり等価回路を用いた解析には多くの利点がある。例えば，変換素子

を電子デバイスに応用した場合は等価回路表示がより考察が容易であり、1次元振動に限定した変換素子の解析ではほとんどが等価回路によるものである。また弾性表面波を応用した表面波素子でも、その性能評価は分布的等価回路表示におけるその回路素子パラメータで行われている⁽⁸⁾。

前章では1次元振動に限定した超音波トランスジューサへの空間回路網法の適用について述べた。本章では空間回路網法の2次元以上の電磁気系と結合した弾性波動（以下、結合波動と呼ぶ）への適用について考察する。本手法を結合波動に適用すれば上記の等価回路表示による現象の把握し易さ、考察の容易さに加えて、時間応答解析による動作特性のシミュレーションを可能にする有効な数値解析手法となると考えられる。そこでここでは、2次元以上の扱いを必要とする結合波動媒質（すなわち変換素子）の中で最も単純な構成と考えられる、面内振動をする圧電セラミック平板に本手法を適用し、その妥当性、有効性について考察する。それらが確認されれば、本手法を用いることにより横効果圧電セラミック平板を用いたデバイスの中で、面内振動を利用したフィルタ⁽⁷⁾や共振子の共振状態に至るまでの過渡特性の観測、遅延線⁽⁸⁾や最近注目されているアクチュエータの過渡応答特性⁽⁹⁾の2次元解析などが可能となる。以下2-2. で圧電セラミック平板の等価回路表示、2-3. でその回路へのBergeron法による時間応答解析の定式化の適用について述べ、2-4. において本手法を解析的に扱える問題に適用し、その基本的妥当性を検討した。

2-2. 圧電セラミック平板の等価回路表示

2-2-1. 圧電セラミック平板の圧電基本式

図II-2-1にz方向に分極された圧電セラミック平板を示す。平板は十分薄いと見做し、面内振動のみを考える。圧電セラミックの結晶構造は6mmであることが知られており、その結晶軸を座標軸とともに括弧でくくって示してある。

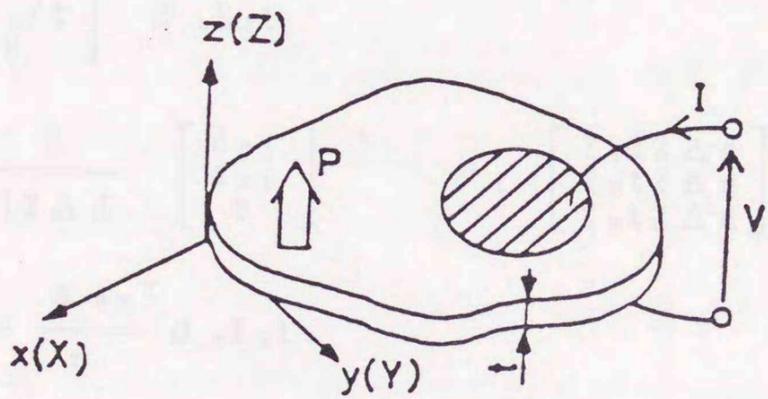


図 II-2-1 圧電セラミック平板とその座標系

圧電セラミック平板の圧電基本式をひずみと電束密度の各々を応力と電界の関数として表したd形式で示すと次のようになる⁽²⁾。なお式中のtは平板の厚さを表している。

$$\begin{bmatrix} \partial_x \dot{u} \\ \partial_y \dot{v} \\ \partial_y \dot{u} + \partial_x \dot{v} \end{bmatrix} = - \frac{1}{t2\Delta d} \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & 0 \\ s_{12}^E & s_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & s_{33}^E \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} T_1 t2\Delta d \\ T_2 t2\Delta d \\ T_3 t2\Delta d \end{bmatrix} - \frac{1}{t} \begin{bmatrix} d_{31}/t \\ d_{31}/t \\ 0 \end{bmatrix} \partial_t E_3 t \quad (\text{II.2.1})$$

$$\partial_t D_3 = \frac{1}{t2\Delta d} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{31} \\ 0 \end{bmatrix} \partial_t \begin{bmatrix} T_1 t2\Delta d \\ T_2 t2\Delta d \\ T_3 t2\Delta d \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_{33}^T}{t} \partial_t E_3 t \quad (\text{II.2.2})$$

$$t2\Delta d \rho \partial_t \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 t2\Delta d \\ T_2 t2\Delta d \\ T_3 t2\Delta d \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.3})$$

ここで弾性体の変数として粒子速度 \dot{u}, \dot{v} および応力（一般の取扱いと異なり圧縮力を正にとっている）を、電気量として電界 E_3 および電束密度 D_3 をとっている。すなわち、平板が十分薄いとすれば電気量としてはz方向成分のみを考えればよい。また、 s_{ij}^E は電界一定時のコンプライアンス、 ϵ_{33}^T は応力一定時の誘電率、 d_{ij} は圧電定数である。応力の符号を一般の場合と逆にしたため、エネルギー則から圧電定数の符号も負になっている。式(II.2.1)~(II.2.3)には後の規格化のため平板の厚さtおよび微小長さ $2\Delta d$ を係数として含ませてある。式からわかるようにx-y面内において弾性的に等方性を示すことがわかる。

2-2-2. 圧電セラミック平板の基本等価回路

図 II-2-2 に圧電セラミック平板の基本等価回路を示す。また、表 II-2-1, II-2-2 に弾性体の変定数と等価回路の変定数との対応を示す。電気量を表す E 節点以外は第 I 編第 1 章で論じた等方弾性体の 2 次元基本等価回路と同じものである⁽¹⁰⁾。以下この等価回路について簡単に説明する。この等価回路は特性インピーダンス Z_0 、長さ Δd の 1 次元線路を正方格子状に組合せたもので、線路の接続点（すなわち節点）には弾性体の変数である x 方向の粒子速度 \dot{u} 、 y 方向の粒子速度 \dot{v} 、それぞれ x 方向、 y 方向の伸縮応力を示す T_1 、 T_2 と x - y 面内におけるせん断応力 T_0 の各々を電圧として割り当てている。但し、 $Z_0 = \sqrt{L_1/C_1}$ で L_1, C_1 はそれぞれ微小線路のインダクタンスおよび容量成分である。図では区別しやすいように粒子速度を電圧としてもつ節点を黒丸 ● で、応力を電圧としてもつ節点を白丸 ○ で示してある。また、電気量を表す節点 E には微小容量 ΔC_0 が付加されており伸縮応力節点と相互容量 M_{00} で結ばれている。 ΔC_0 は微小面積 $2\Delta d \times 2\Delta d$ におけるセラミック平板の容量に等しい。このことはすなわち、その微小面積内で電界 E_0 が一定であるという近似をしていることである。この基本等価回路で圧電体領域を覆い、境界ではその境界条件に見合う電気的条件を付加して実際の圧電セラミック平板を等価回路表示する。そのとき Δd は考察する波動の波長よりも十分小さくする必要がある。

以上の回路を物理現象に対応させて概念的に説明する。まず電気量として電界は E_0 のみを考え厚み方向に一様とし、微小面積 $2\Delta d \times 2\Delta d$ 内で一定と仮定する。そしてその面積内の中央で弾性体変数と M_{00} (d_{31} に対応) を介して結合されている。但し、電極のある場合は、電極が完全導体でかつ励振電磁波波長に比べて寸法が十分小さいとして、その領域の電界をすべて等しいとする。但し、ここでは電極の質量による質量負荷効果については考慮していない。以上の議論は弾性波動に着目した準静電近似⁽²⁾によるものであり、また電界は時間的、空間的に変化はする

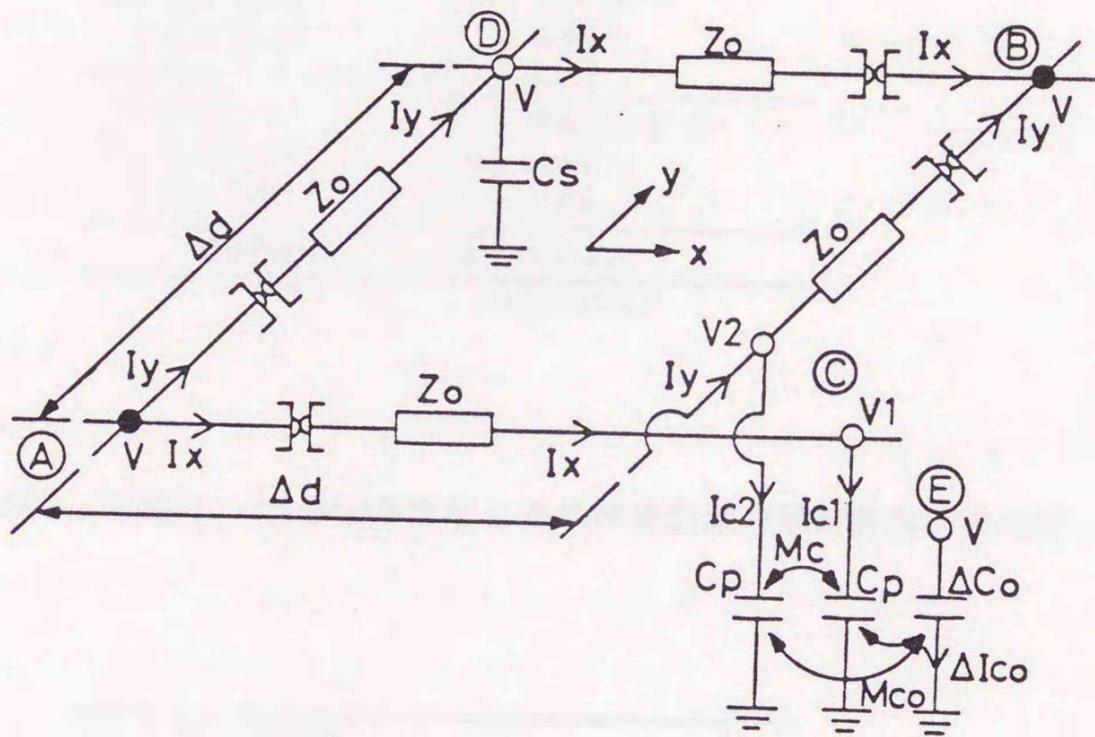


図 II-2-2 圧電セラミック平板の基本等価回路

表 II-2-1 圧電セラミック平板の各変数とその等価回路の変数との対応

粒子速度節点		応力節点	
A	$V \equiv \dot{u}$	C	$V_1 \equiv T_1 \Delta S$
	$I_x \equiv T_1 \Delta S$		$V_2 \equiv T_2 \Delta S$
	$I_y \equiv T_2 \Delta S$		$I_x \equiv \dot{u}$
			$I_y \equiv \dot{v}$
B	$V \equiv \dot{v}$	D	$V \equiv T_2 \Delta S$
	$I_x \equiv T_2 \Delta S$		$I_x \equiv \dot{v}$
	$I_y \equiv T_1 \Delta S$		$I_y \equiv \dot{u}$
電氣的接点		E	$V \equiv E_3 \cdot t$

$\Delta S = t \cdot 2 \Delta d$

表 II-2-2 圧電セラミック平板の各定数とその等価回路の回路定数との対応

$Z_0 = \sqrt{L_i / C_i}$
$s_{11}^E / \Delta S = C_p / 2 \Delta d + C_i$
$s_{12}^E / \Delta S = M_c / 2 \Delta d$
$s_{22}^E / \Delta S = C_s / 2 \Delta d + C_i$
$(s_{22}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E))$
$(\rho / 2) \Delta S = L_i$
$\epsilon_{33}^T / t = \Delta C_0 / (2 \Delta d)^2$
$d_{31} / t = M_{c0} / 2 \Delta d$

がそれ自身では波動場を形成せず，外部に放射することなく電極部内に分布しているとする無漏れ条件を適用している。一方，弾性波動については，等価回路の格子網において1次元線路を伝わる平面波がホイッソンの原理に従って各節点で四方に広がっていくことを想定している。そのとき線路の速度と形成される波動場における速度とは異なることが知られている。また，各節点に付加された容量は線路の特性の調整に用いるスタブと考えられ，線路の定数を変化させる働きをもつ。すなわち，基本1次元線路は弾性波の縦波を考慮したものであるのでD節点に付加した容量で線路の定数を横波に対応したものに変え，速度の違う縦波，横波の両方を表現するように設定している。但し，C節点の容量は相互結合のために付加したものである。これら弾性波動を表す格子網が最初に述べたように，C節点において電気量と相互容量を介して結合し，圧電平板の特徴ある物理的性質を表現している。

ここで図 II-2-3に示すようなC(E)節点を中心とした回路網が式(II.2.1), (II.2.2)を等価表現できることを示す。節点Cのxおよびy方向の座標をそれぞれ Δd で規格化された l, m (l, m は正の整数) 即ち $C(l, m)$ とし，その結果隣接するA, B節点の位置もそれぞれ $A_1(l-1, m), A_2(l+1, m)$ および $B_1(l, m-1), B_2(l, m+1)$ で表すこととする。各節点の電圧を表す記号Vのとなりに対応する弾性体の変数の記号を()でくくって示している。また，C節点の電流にも同様の説明を入れているが区別を明確にするため添字1, 2をつけてある。電氣的節点Eの電圧Vは先に述べたように $C(l, m)$ を中心とした $2\Delta d \times 2\Delta d$ の領域での均一電界 E_0 と平板の厚さ t の積に等しい。但し，以下の証明は簡単のため時間離散化はしていないとする。 $T_1(C)$ および $T_2(C)$ を中心として成り立つ差分式は次のようになる。ここで，応力を T とすると $T' = T \Delta S$, $\Delta S = t 2 \Delta d$ としている。

$$\dot{u}(A_2) - \dot{u}_2 = -\Delta d C_1 \partial_t T_1'(C) \quad (\text{II.2.4})$$

$$\dot{u}_1 - \dot{u}(A_1) = -\Delta d C_1 \partial_t T_1'(C) \quad (\text{II.2.5})$$

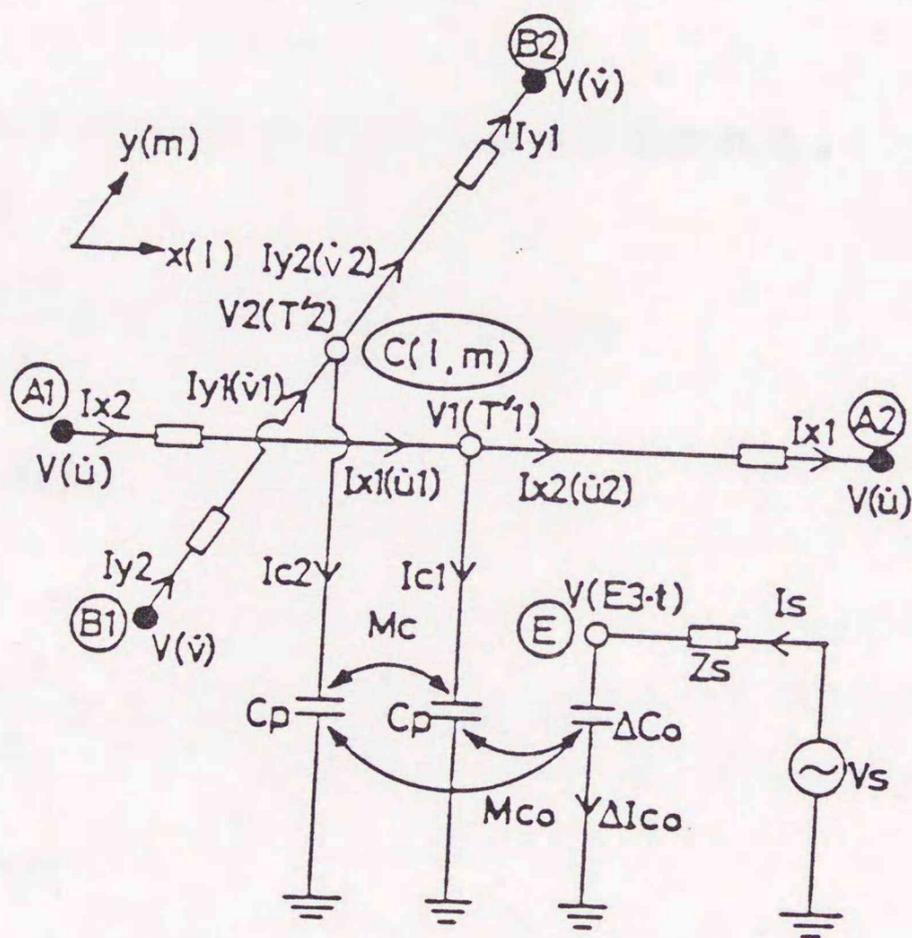


図 II-2-3 節点 C, E を中心とした回路網とその変数のとり方

$$\dot{v}(B2) - \dot{v}_2 = -\Delta d C_1 \partial_t T_2'(C) \quad (\text{II.2.6})$$

$$\dot{v}_1 - \dot{v}(B2) = -\Delta d C_1 \partial_t T_2'(C) \quad (\text{II.2.7})$$

また，容量 C_p に流れる電流 I_{c1} および I_{c2} は次のように表される。

$$I_{c1} = C_p \partial_t T_1'(C) + M_o \partial_t T_2' + M_{oo} \partial_t V(E) \quad (\text{II.2.8})$$

$$I_{c2} = C_p \partial_t T_2'(C) + M_o \partial_t T_1' + M_{oo} \partial_t V(E) \quad (\text{II.2.9})$$

C節点では次のキルヒホッフの電流則が成り立つ。

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_2 = I_{c1} \quad (\text{II.2.10})$$

$$\dot{v}_1 - \dot{v}_2 = I_{c2} \quad (\text{II.2.11})$$

従って，式(II.2.4)～(II.2.11)から次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \dot{u}(A2) - \dot{u}(A1) &= -2\Delta d \left\{ \frac{s_{11}^E}{\Delta S} \partial_t T_1'(C) + \frac{s_{12}^E}{\Delta S} \partial_t T_2'(C) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_{31}}{t} \partial_t V(E) \right\} \quad (\text{II.2.12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(B2) - \dot{v}(B1) &= -2\Delta d \left\{ \frac{s_{11}^E}{\Delta S} \partial_t T_2'(C) + \frac{s_{12}^E}{\Delta S} \partial_t T_1'(C) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_{31}}{t} \partial_t V(E) \right\} \quad (\text{II.2.13}) \end{aligned}$$

但し， $V = E_3 \cdot t$ である。

ここで， $\Delta d \rightarrow 0$ の極限を考えると式(II.2.12)，(II.2.13)は式(II.2.1)の第1，2式に収束することがわかる。また，節点Eに流れる電流 ΔI_{oo} は次の式を満たす。

$$\Delta I_{oo} = \Delta C_o \partial_t V(E) + M_{oo} \partial_t \{T_1'(C) + T_2'(C)\} \quad (\text{II.2.14})$$

E節点を中心とした $2\Delta d \times 2\Delta d$ の領域で電界が一定と仮定したので ΔI_{oo} は電束密度 D_3 と次の関係となり，式(II.2.14)は式(II.2.2)を満たすことがわかる。

$$\Delta I_{c0} = \partial_t \int \int D_s dx dy = (2 \Delta d)^2 \partial_t D_s \quad (\text{II} . 2 . 15)$$

同様にT_s節点と粒子速度節点を中心とした回路網はそれぞれ式(II.2.1)の第2式と式(II.2.3)を等価表現することを証明できるが、これは第I編第1章に示した証明と同じであるのでここでは省略する。

図II-2-2の等価回路から次のような性質が容易に導かれる。すなわち、電気端子Eが短絡されていればM₀₀の働きが無視され表II-2-2に示す弾性的性質をもつ等方弾性体として扱うことができる。また電気端子Eが開放である場合、C節点の容量に流れる電流I_{c1}はI=0であるから次の(II.2.16)式を(II.2.17)式に代入して、(II.2.18)式のようになる。I_{c2}についても同様である。

$$I = \Delta C_0 \partial_t V + M_{c0} \partial_t (V_1 + V_2) = 0 \quad (\text{II} . 2 . 16)$$

$$I_{c1} = C_p \partial_t V_1 + M_c \partial_t V_2 + M_{c0} \partial_t V \quad (\text{II} . 2 . 17)$$

$$I_{c1} = \left(C_p - \frac{M_{c0}^2}{\Delta C_0} \right) \partial_t V_1 + \left(M_c - \frac{M_{c0}^2}{\Delta C_0} \right) \partial_t V_2 \quad (\text{II} . 2 . 18)$$

従って容量C_pおよび相互容量M_cから見掛け上M₀₀²/ΔC₀が減じられたように表され、この場合もやはり弾性体のみを考慮すれば良いことになる。但し、前述のように電極が施されている場合は、その電極の存在する領域内の節点Eはすべて同電位として扱われる。

一方、節点C、Eには容量が付加されており、それらは互いに相互容量によって結合されている。従って、それらの容量に蓄えられるエネルギーが負にならないようにそれぞれの値を決定する必要があり注意を要する。逆に、表II-2-2からもわかるように線路の分布容量と節点Cの容量C_pは上記の条件の中で任意性を持っており、従ってC_pを変えるだけで弾性定数の異なる媒質を表すことができることになる。このことは次に述べる時間応答解析の定式化に示されているように同一プログラムの中で多媒質の弾性体を扱えるという本手法の特徴の一つとなっている。しかし、C_pを大きくとることはそれだけ離散時間を細かくとることと等価になり計

算効率が下がるので、対象とする媒質の伝搬特性を近似できる範囲内でできるだけ C_p は小さくとる方が経済的である⁽¹¹⁾。

2-3. Bergeron法による時間応答解析の定式化

時間軸上での定式化について簡単に説明する。すなわち、前章までと同様に基本1次元線路に対してBergeron表示式を用い、容量およびインダクタンスには台形積分近似式を用いる。そして、それらの時間離散式の離散時間を等しくし、各節点に成り立つキルヒホッフ則と連立させて定式化を行う。従って、いま図II-2-3示すように、節点Eに内部インピーダンス Z_s なる電圧源 V_s が繋がれたとき節点C, Eに成り立つ連立方程式は表II-2-3のようになる。但し、表の電圧、電流は Δd で規格化された座標 (l, m) 、離散時間 Δt で規格化された時間 n での値とし、それ以外の座標、時間は、例えば $l-1, n-1$ の場合 [] _{$l-1, n-1$} のように表している。表中の式1.~4.はBergeron表示式、7.~9.は台形積分近似式でその他の式はキルヒホッフ則である。更に、ある面積に電極が施されているとき、その中に存在する n 個のE節点に流れる電流を I_i ($i=1, 2, \dots, n$) とすると電源側に流れる電流 I_s は次式のようになる。

$$I_s = \sum_n I_i \quad (\text{II.2.19})$$

従って、表II-2-3の式の $\Delta I_{co} = I_s$ の代りに上式を用い、電極のある領域内に含まれるE, C節点全体を連立させて解けばよい。

ところで、弾性体部分の変数を $R_{mco}' \cdot V$, $R_{mco}' \cdot I$ 、電気端子の電流を $Z_s \cdot I_s$ と規格化すれば表II-2-3内の式より $R_{mco} \times R_{mco}'$ および Z_s/R_{co} なる定数が現れる。これらを電気機械結合係数 k_{s1} および時定数 $\tau = C_o Z_s$ (但し Z_s は純抵抗とする) を用いて表せば次のようになる。

$$R_{mco} \cdot R_{mco}' = \frac{M_{co}}{C_p} \cdot \frac{M_{co}}{\Delta C_o}$$

表 II-2-3 節点C(1, m, n), E(1, m, n)における時間軸上出の定式化のための連立方程式

節点	
C	1. $V_1 + Z_0 I_{x1} = [I_{x2} + Z_0 V]_{l-1, n-1}$
	2. $V_1 - Z_0 I_{x2} = [I_{x1} - Z_0 V]_{l+1, n-1}$
	3. $V_2 + Z_0 I_{y1} = [I_{y2} + Z_0 V]_{m-1, n-1}$
	4. $V_2 - Z_0 I_{y2} = [I_{y1} - Z_0 V]_{m+1, n-1}$
	5. $I_{x1} - I_{x2} - I_{c1} = 0$
	6. $I_{y1} - I_{y2} - I_{c2} = 0$
	7. $V_1 + R_M V_2 + R_{MCO} V - R_C I_{c1} = [V_1 + R_M V_2 + R_{MCO} V + R_C I_{c1}]_{n-1}$
	8. $V_1 + R_M V_2 + R_{MCO} V - R_C I_{c2} = [V_1 + R_M V_2 + R_{MCO} V + R_C I_{c2}]_{n-1}$
E	9. $V + R_{MCO} (V_1 + V_2) - R_{CO} \Delta I_{CO} = [V + R_{MCO} (V_1 + V_2) + R_{CO} \Delta I_{CO}]_{n-1}$
	10. $V = V_S - Z_S I_S$
	11. $\Delta I_{CO} = I_S$
$R_M = M/C_p, R_C = \Delta t / (2 C_p), R_{MCO} = M_{CO} / C_p, R_{MCO}' = M_{CO} / \Delta C_{CO}, R_{CO} = \Delta t / (2 \Delta C_{CO})$	

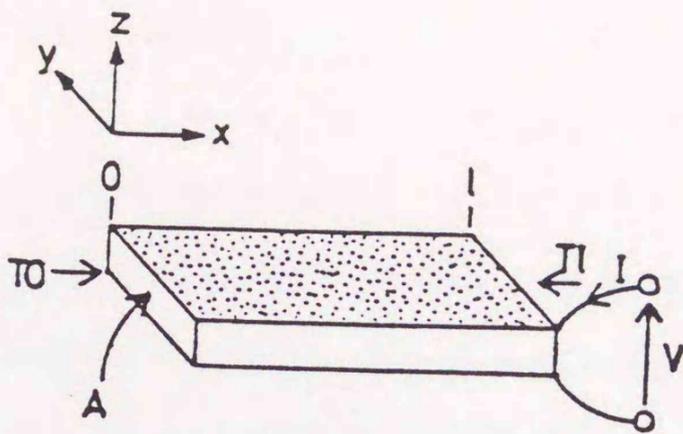
$$\begin{aligned}
 &= \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T \cdot s_{11}^E} \frac{1}{(1 - 2\Delta d C_1 / s_{11}^E)} \\
 &= \frac{k_{31}^2}{1 - 2\Delta d C_1 / s_{11}^E} \quad (\text{II.2.20})
 \end{aligned}$$

$$\frac{Z_s}{R_{oo}} = \frac{2Z_s \Delta C_0}{\Delta t} = \frac{2\tau}{\Delta t} \quad (\text{II.2.21})$$

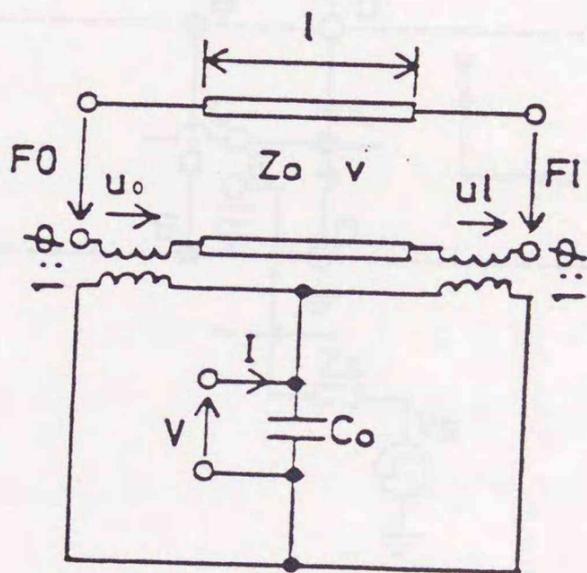
従って、個々の圧電材料における定数を直接代入する必要はなく、電気機械結合係数および時定数で一般化して計算することができ便利である。

2-4. 解析結果

本手法の妥当性を検討するため、1次元振動をする横効果縦振動子および対称伸び振動をする円板を例題として取上げ、解析的手法によって求めた結果と比較を行った。まず、図II-2-4(a)にx方向に1次元振動をする横効果縦振動子を示す。ここでは機械的負荷が零の場合に電気端子にステップ電圧を印加した時の電源に流れる電流を計算した。河西らはこの振動子に対して時間応答解析に適した分布線路を用いた図II-2-4(b)に示す等価回路を提案しており、奥山らはこの等価回路を用いた解析結果について報告している⁽¹²⁾。一方、図II-2-5に本手法における図II-2-4(a)の振動子のモデル化を示す。ここで振動子の寸法を $200\Delta d \times 2\Delta d$ としたのは振動方向の長さとの幅の比をできるだけ大きくして1次元形状に近づけるためと、基本共振周波数(その1波長は振動方向の長さの約2倍)の20倍の周波数に対しても、その1波長を応力節点または粒子速度節点のみで10分割されるように考慮したものである。またせん断応力節点Dに付加された容量 C_s の代わりに粒子速度節点のD節点に向いた枝に直列にインダクタンスを付加した等価回路を用いている。これは境界条件を満足させるためD節点を短絡すると容量 C_s の働きが無視され弾性波動のモデル化が



(a)



(b)

- Z_0 : $\rho v A$
 ρ : Density
 v : Sound velocity
 A : Area
 l : Length
 F : AT (T : Stress)
 u : Particle velocity
 V : Voltage
 I : Current
 C_0 : Clamped capacitance
 Φ : Electromechanical transformation factor

図 II-2-4 (a) 横効果縦型圧電振動子とその座標系
 (b) 河西らによる横効果縦型圧電振動子の等価回路

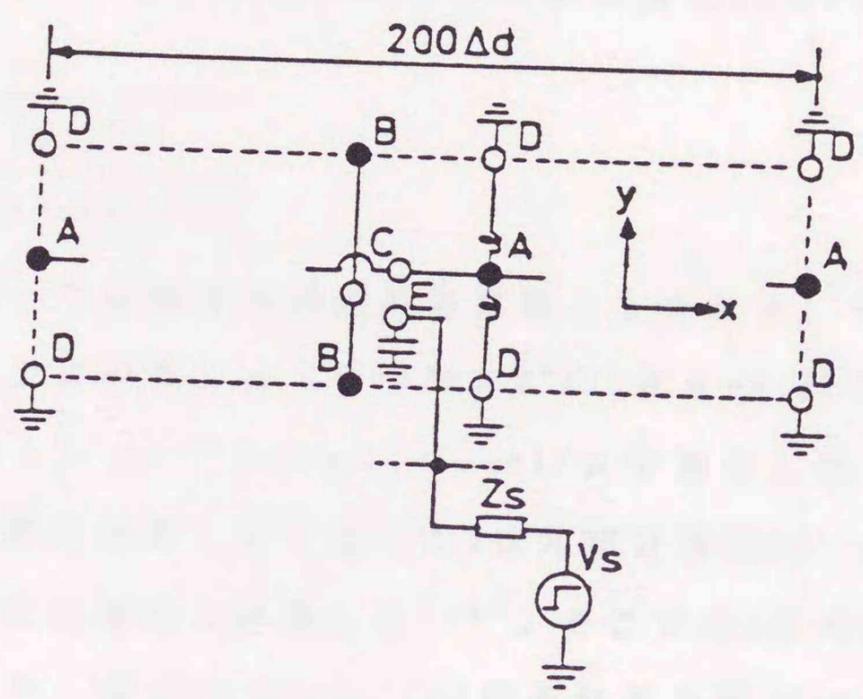


図 II-2-5 横効果縦型圧電振動子をシミュレートするための節点配置

不完全になることを解決するためであり，図 II-2-2 の回路との対応性を含めてすでに第 I 編第 4 章で述べた。ここで振動子の定数は次のように選んだ。すなわち電気機械結合係数 $k_{31}=0.3$ ， $\tau/T=0.1$ ，但し， $\tau=C_0 Z_0$ で C_0 は制動容量， Z_0 は電源の内部インピーダンス（ここでは Z_0 は純抵抗としている）， $T=l/v$ で l は振動方向の長さ， v は図 II-2-4(b) の線路内の波動の速さである。ところで本手法における縦波速度 V_p と v とは次のような関係となる⁽¹²⁾。

$$\frac{V_p}{v} = \sqrt{\frac{(s_{11}^E)^2}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2}} \quad (\text{II.2.22})$$

また本手法においては弾性体部分を等方性としたとき，その弾性定数を示すラメの定数 λ ， μ が等しい（すなわちポアソン比 $\sigma=0.25$ ）としている。但し， $s_{11} = (\lambda + \mu) / \mu / (3\lambda + 2\mu)$ ， $s_{33} = 1 / \mu$ である。図 II-2-4(b) の等価回路の計算は第 II 編第 1 章で述べた 1 次元超音波トランスジューサの空間回路網法による定式化を適用し計算した⁽¹³⁾。そこでは 1 次元線路を 100 等分して計算を行った。図 II-2-6(a)，(b) にそれぞれ図 II-2-4(b) の等価回路による計算結果と本手法による計算結果を示す。但し，両者の離散時間をそれぞれ $\Delta t'$ ， Δt とすれば $\Delta t' = 4.13 \Delta t$ の関係となっている。両者による結果は非常に良く一致している。なお境界条件や振動様式をあらかじめ考慮して本手法における等価回路を図 II-2-4(b) のような回路に変形することも可能である。しかしここでは 2 次元的な境界条件の設定を含めて，図 II-2-2 の基本等価回路の妥当性を確認するため図 II-2-5 のようなモデル化により計算を行った。

次に図 II-2-7 に示す圧電セラミック円板に本手法を適用した結果について述べる。いま，円板はその全面に電極が施されているとすれば円周方向に対称な径方向伸び振動を行う。すなわち図 II-2-7 の円筒座標系において r 方向に 1 次元振動をすると考えられる。先に佐藤は機械的に自由な状態の円板を電氣的に駆動する内部インピーダンス Z_0 の電源 V_0 とそこに流れる

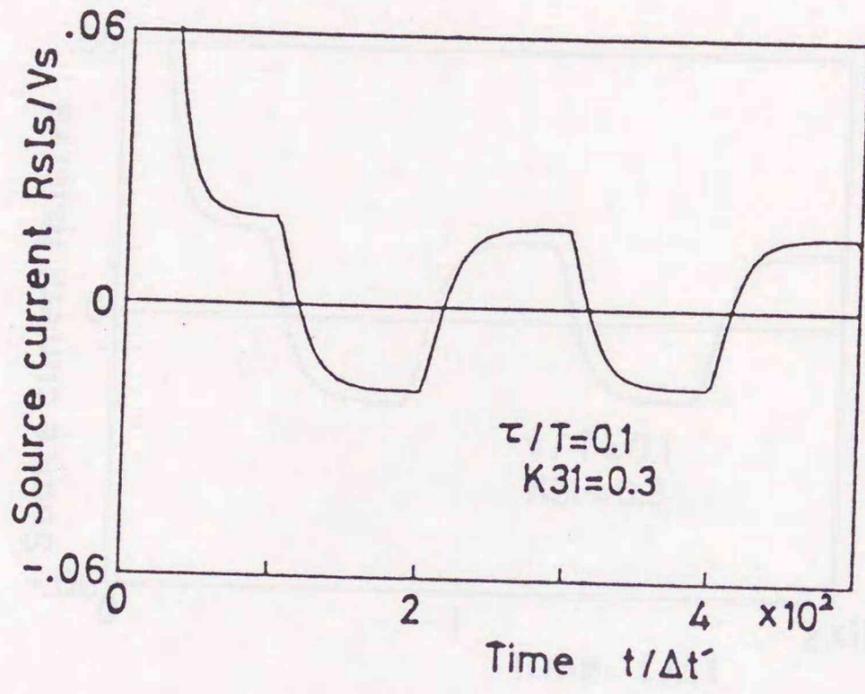
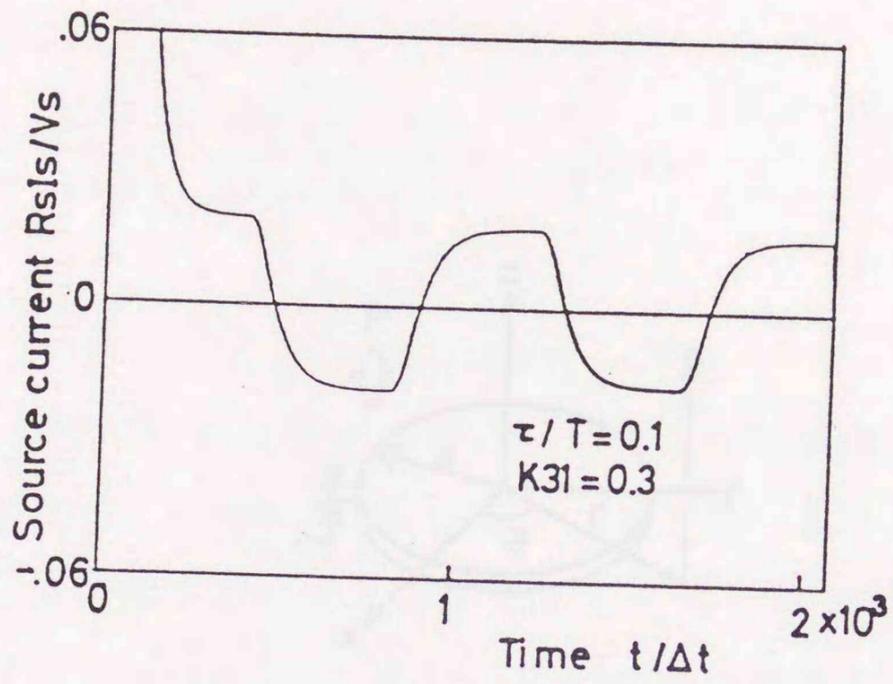


図 II-2-6 横効果縦型圧電振動子にステップ電圧を加えた時の電源電流の計算結果; $\tau / T = 0.1$, $k_{31} = 0.3$, $\tau = C_0 \cdot R_s$, $T = 1/\nu$
 (a) 河西らの等価回路による計算結果



(b) 本手法による計算結果

電流 I_s との間に成り立つ次式の周波数伝達関数を用いて、電圧波形として長周期の繰返し矩形波をもつ電源で駆動したときの I_s の様子を高速逆フーリエ変換 (IFFT) を用いて計算した⁽¹⁴⁾。式の導出は付録に示した。

$$I_s(\omega) = \frac{1}{1+1/(j\omega CZ_s)} \cdot \frac{V_s(\omega)}{Z_s} \quad (\text{II.2.23})$$

但し $\Omega = \omega a/v_p$ として

$$C = C_0 \left[\frac{(1+\sigma)k_p^2 J_1(\Omega)}{\Omega J_0(\Omega) - (1-\sigma)J_1(\Omega)} + 1 - k_p^2 \right]$$

$$C_0 = \frac{\pi a^2}{t} \cdot \epsilon_{33}^T, \quad k_p^2 = \frac{d_{31}^2 \cdot Y}{(1-\sigma) \cdot \epsilon_{33}^T}$$

ここで、 a は半径、 v_p は波動の速度、 k_p は円板の電気機械結合係数、 Y はヤング率、 ρ は密度、 σ はポアソン比である。そこで、本手法を圧電セラミック円板に適用し上述の解析的手法による結果と比較した。本手法による円板のモデル化を図II-2-8(a),(b)に示す。節点配置を説明するため、図II-2-8(a)に円板の半径を $9\Delta d$ とした場合を示す。まず、径方向に1次元振動すると考えて計算領域を1/8部分のみとし、 $y=0$ および $y=x$ 面にそれぞれ図II-2-8(b1),(b2)に示すような対称条件を付加した。また、全面に電極を施したものを対象とすることとし、電源がつながれている領域内のE節点のすべてを同電位とした。更に、基本等価回路は図II-2-5と同様のものを用い、自由境界条件を満足するように粒子速度節点および応力節点をそれぞれ開放、短絡とした。

実際の計算では、半径を $a=101\Delta d$ 、時定数を $\tau/T=0.2$ とし(但し、 $\tau=C_0Z_s$ 、 $T=a/v_p$)、他の定数は $\sigma=0.33$ 、 $k_p=0.6$ ($k_{31}^2=k_p^2(1-\sigma)/2$)、 $V_p/V_1=0.48$ (V_p は平板内の縦波速度、 V_1 は基本1次元線路の速度)とした。そして、電源の電圧として初期値0.5、次の値からはすべて1の振幅をもつステップ状の波形を与え、そのときの電源に流れる電流を計算した。解析的手法においても同じ時定数、ポアソン比、結合係数を用い、周期100

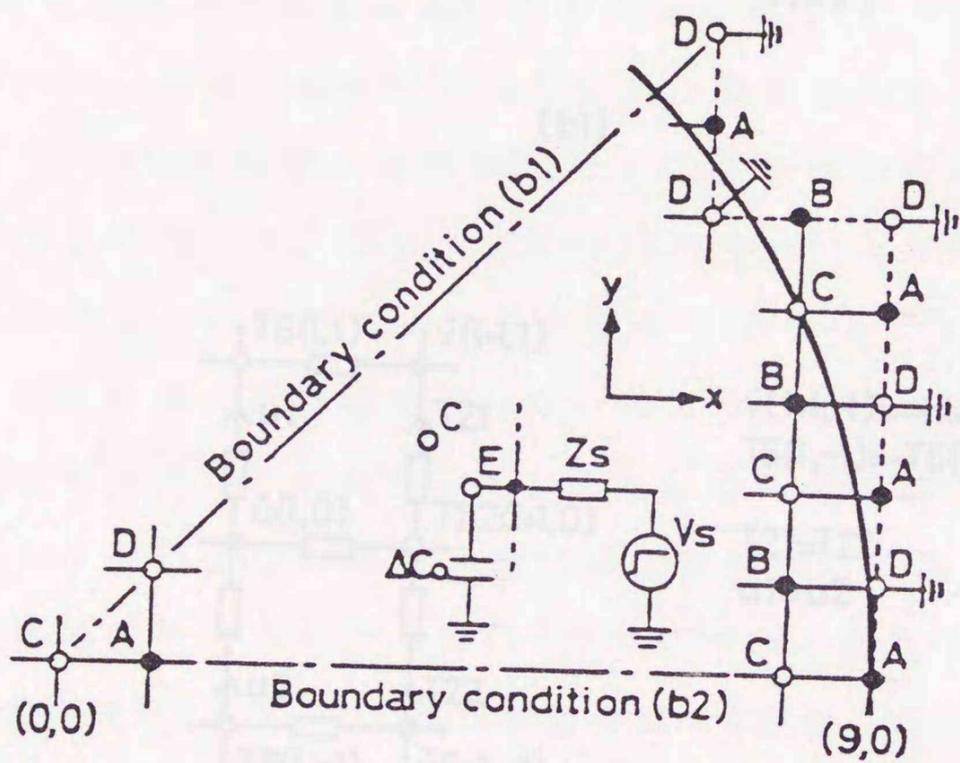
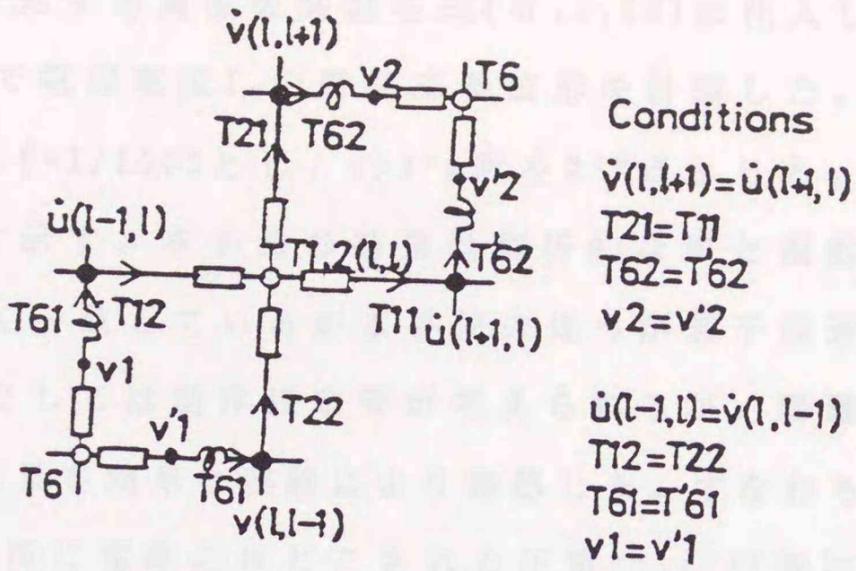
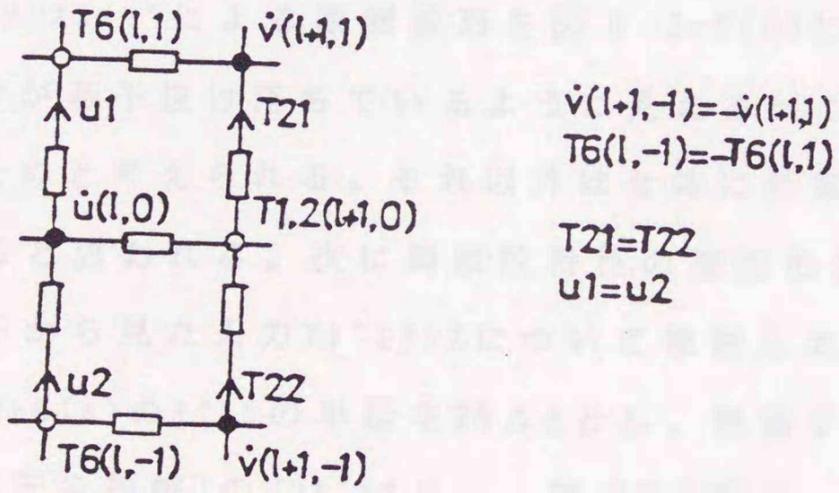


図 II-2-8 圧電セラミック円板をシミュレートするための節点配置と境界条件の設定

(a) 全体の節点配置と円周での境界条件の設定



(b1)



(b2)

(b1) $y=x$ 上における境界条件の設定

(b2) $y=0$ 上における境界条件の設定

Tの繰返し矩形波に対する周波数関数を式(II.2.23)に代入しIFFTにより逆フーリエ変換を行って電源電流 I_s の時間応答波形を計算した。そのときサンプル周波数間隔を $\Delta f=1/100T$ とし、サンプル数を 2^{12} 点とした。その結果を図II-2-9(a),(b)に示す。本手法の結果は解析的な解と振動の周期やその波形において良く一致しているが本手法のほうが若干減衰が速いようである。この原因としては境界設定等が考えられるが、明確なことは不明である。以上の結果を簡単な実験により確認した。すなわち直径12mm、厚さ0.2mmのほぼ全面に電極のほどこされた圧電セラミック円板に立ち上がり時間が約40nsec、繰返し周期が100Tの矩形波電圧を印加したときの電源電流を図II-2-10の回路構成で観測した。振動子の定数は計算で用いたものとほぼ同じであった。なお、定数はIEEE規格により共振、反共振周波数から求めた。オシロスコープによる観測波形を図II-2-9(c)に示す。実験結果では高周波成分が若干抜け落ちているように見えるがこれは振動子の弾性的な損失のためと考えられる。それ以外は全体に計算結果と比較的良く一致していると思われる。次に周波数特性の確認のため3次モード付近までの電気端子から見た入力アドミタンスについて検討した。まず、本手法において図II-2-8(a)のモデルの半径を $25\Delta d$ とし、振動子の定数はそのままとして入力電圧を振幅1のインパルスとし、節点Eの電圧、電流の時間軸上での計算結果をFFTによりフーリエ変換してアドミタンスの周波数特性を求めた。サンプル数は 2^{14} 点とした。また、式A-6から直接アドミタンスを求め比較した。周波数のサンプル間隔 Δf は前の例と同じである。その結果をそれぞれ図II-2-11(a),(b)に示す。共振周波数は約3%程度本手法の方が高いが良く一致していると言える。本手法の結果において2次と3次モードの間に微小な共振点がみられるが、これは半径を比較的小さくとったため円周境界の近似が粗くその影響と考えられる。

次に、正方形板について円板と同様なインディシャル応答を計算した。正方形板は一辺が $202\Delta d$ の大きさで、全面に電極が施され、周囲は自由境界

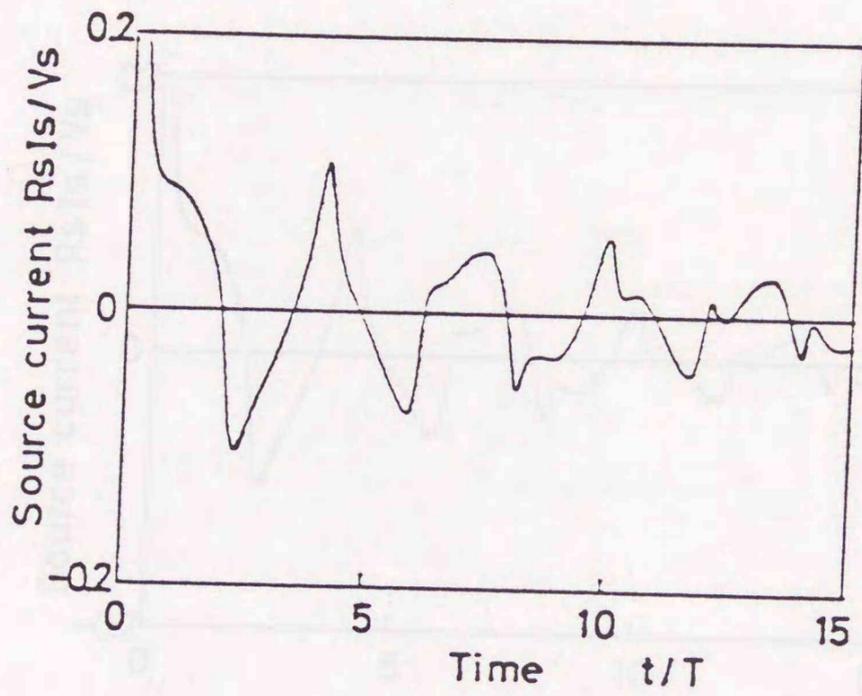
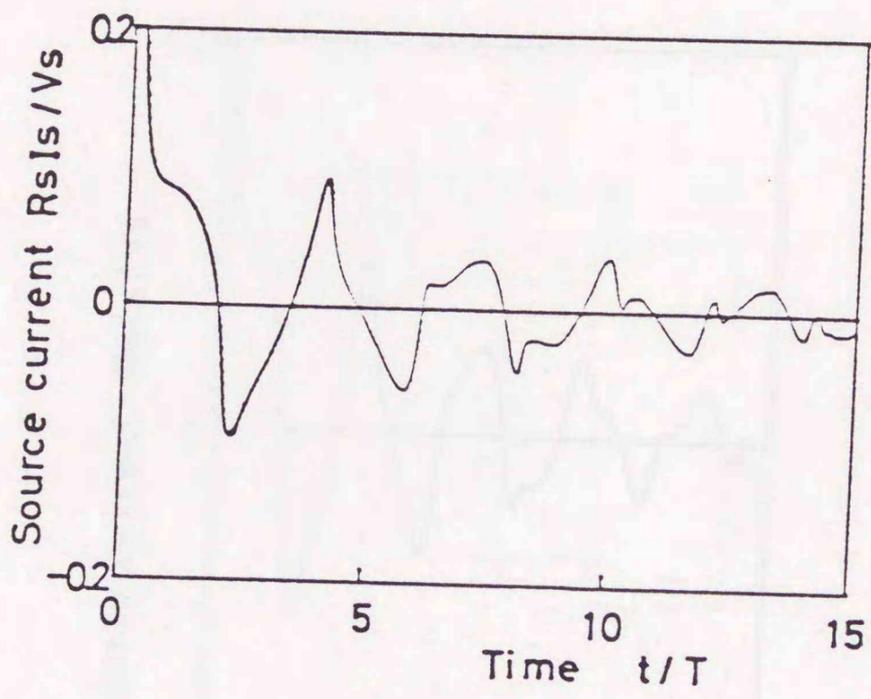
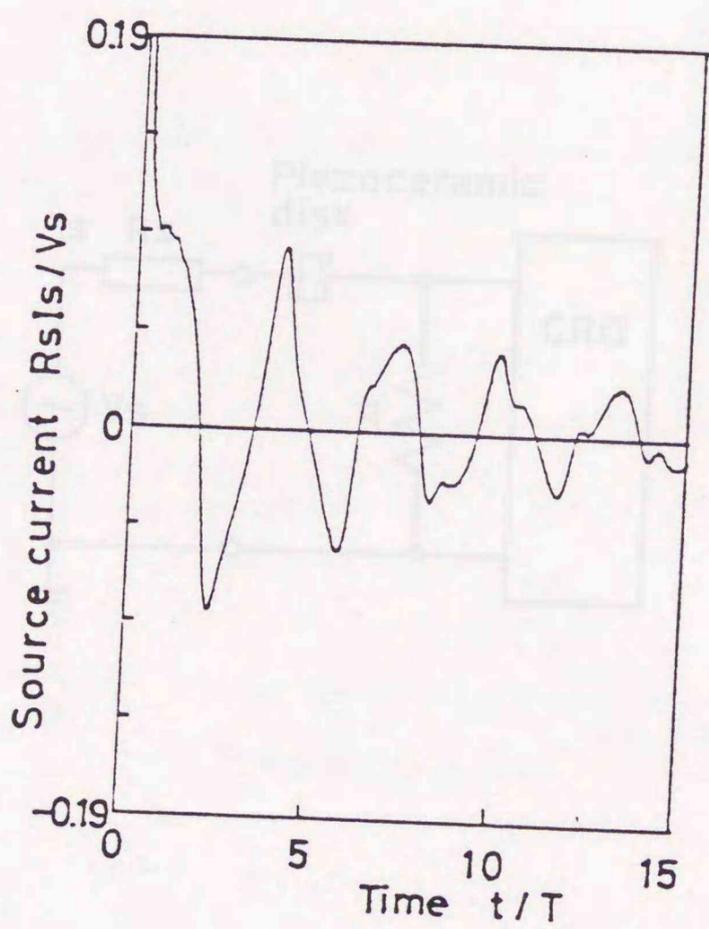


図 II-2-9 圧電セラミック円板にステップ電圧を加えた時の電源電流
 $\tau/T=0.2$, $k_p=0.3$, $\sigma=0.33$, $\tau=C_0 \cdot R_s$, $T=a/v_p$
 (a) 解析的手法による計算結果



(b) 本手法による計算結果



(c) 実験結果

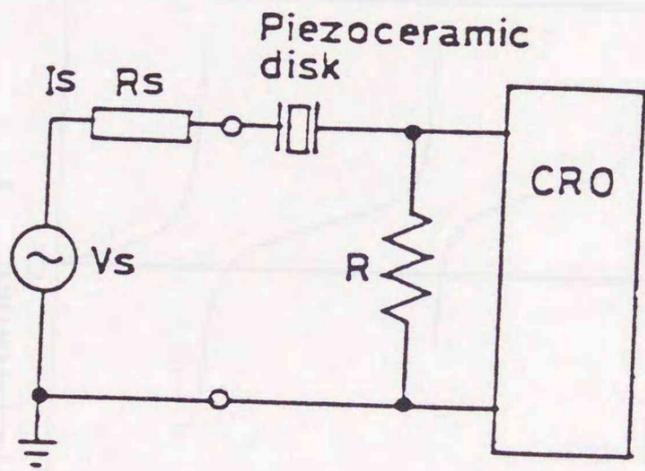


図 II-2-10 電源電流を観測するための実験回路

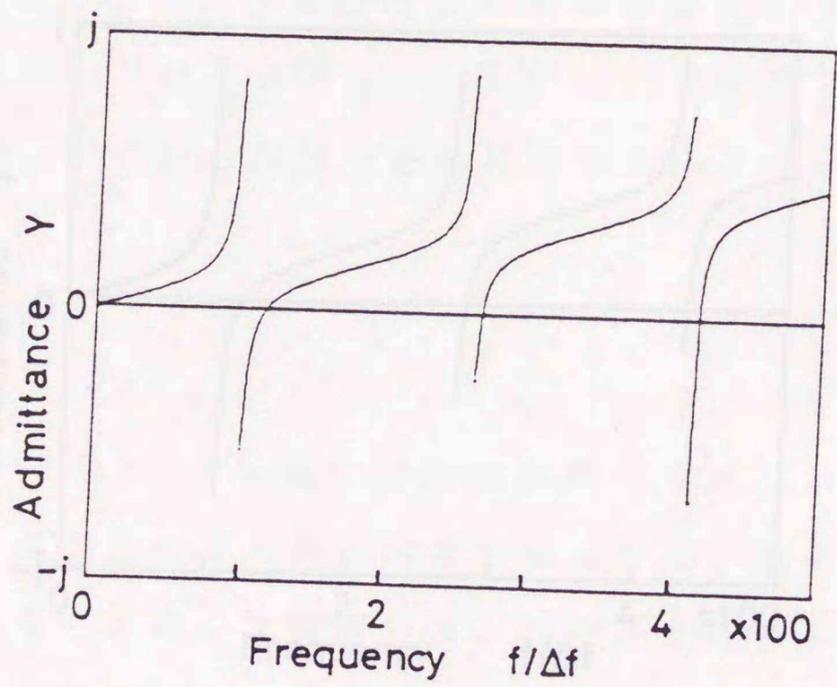
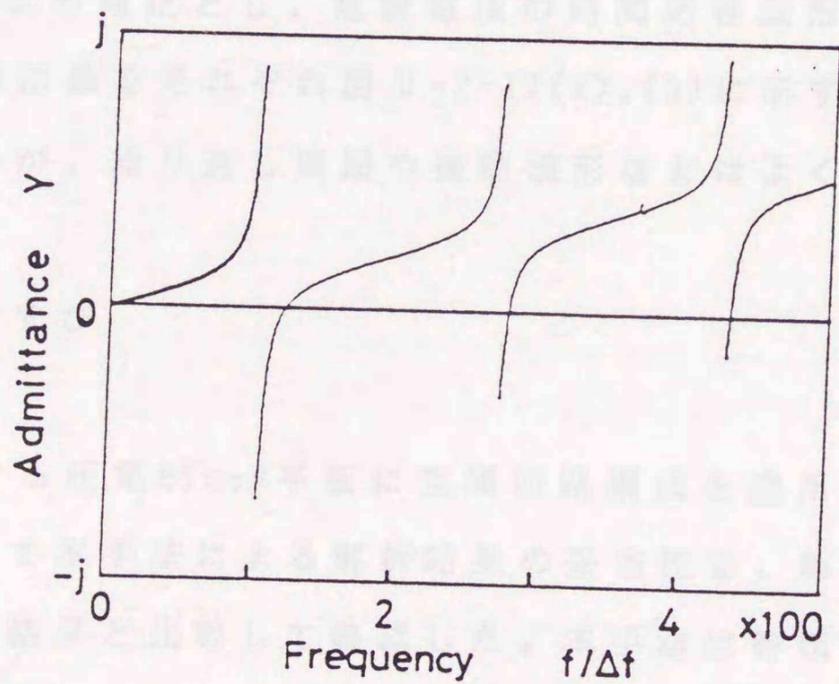


図 II-2-11 圧電セラミック円板の第3高次モード付近までの入力アドミタンスの周波数特性

(a) 理論式(A・6)による計算結果



(b) 本手法による時間応答解析結果をフーリエ変換したもの

とした。境界条件は円板の場合と同様の設定であるが、本手法の場合正方形格子状の回路網で対象を表現するため矩形の境界は円板より設定が容易である。また、対象条件を考慮し正方形板の1/4部分のみを計算した。更に、解析とほぼ同じ条件の一辺が10mmで厚さ0.2mmのPZT系圧電セラミックを用いて実験を行なった。解析に用いた定数は実験試料に合わせてポアソン比を $\sigma=0.34$ 、電気機械結合係数を $k_{31}=0.33$ 、時定数 $\tau/T=0.1$ （但し、 $\tau=C_0 \cdot R_s$ 、 $T=1/v_p$ で C_0 は平板の容量、 R_s は電源の内部抵抗、 l は一辺の長さ、 v_p は平板内の縦波の速さ）とした。入力解析も実験も円板の場合と同じステップ状の電圧とし、電源電流の時間応答波形を求めた。解析結果および実験結果をそれぞれ図II-2-12(a),(b)に示す。実験の方が若干振幅が小さいが、繰り返し周期や振動波形などはよく一致している。

2-5. むすび

面内振動をする圧電セラミック平板に空間回路網法を適用した結果について述べた。そして本手法による解析結果の妥当性を、解析的手法による計算結果や実験結果と比較して確認した。本手法は等価回路を用いるため音響工学における電気系と弾性系の統一的な扱いと合致することから特に結合波動に対して有効な点が多いと思われる。本章における取扱いは電界が一様という仮定が成り立てば第I編第2章で考察した回路に圧電変換部の等価回路を組み込むことで、厚み方向も考慮に入れた3次元解析にそのまま適用できる。また、第I編第3章に述べたように、弾性的に異方性をもつ平板や任意の圧電定数をもつ場合にも容易に適用可能である。更に、本章の理論は磁界が一様として扱える場合の磁気ひずみ振動子について、その双対性を考慮すればそのまま成り立つと考えられる。

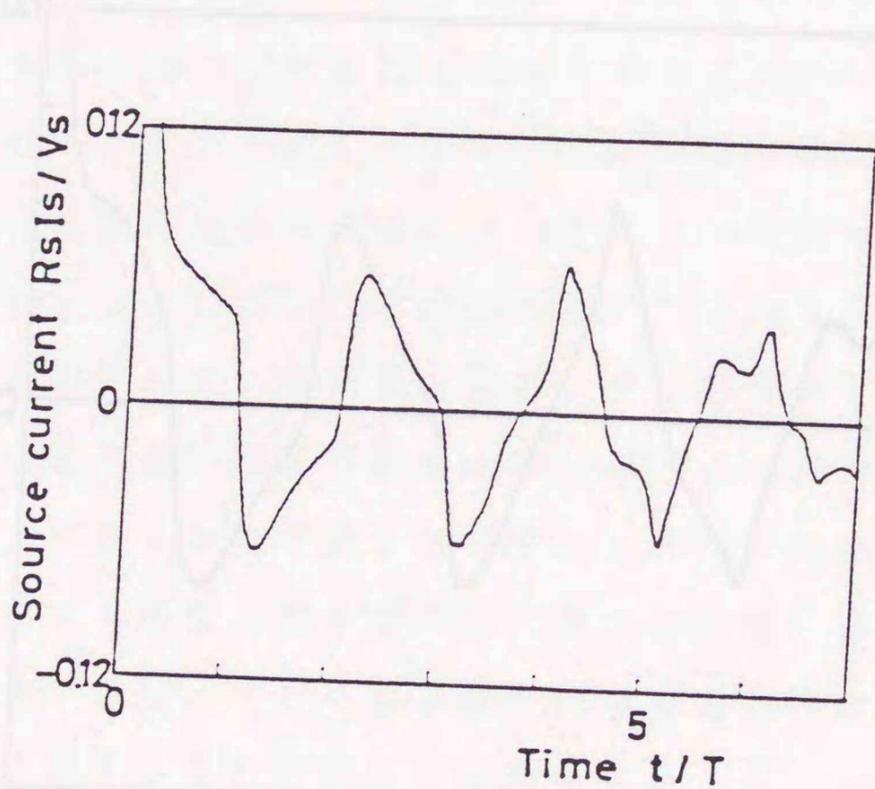
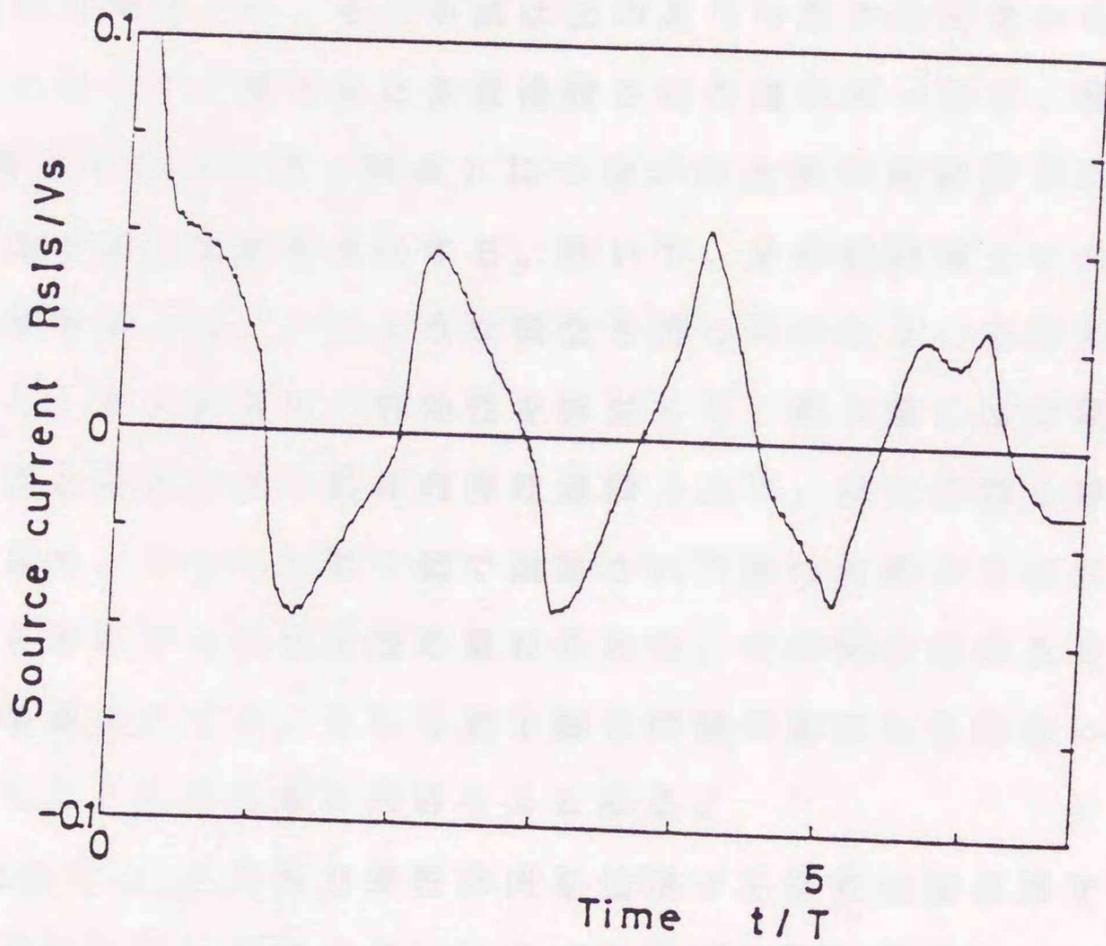


図 II-2-12 圧電セラミックの正方形板にステップ電圧を加えた時の電源電流
 $\tau/T=0.1$, $k_{13}=0.33$, $\sigma=0.34$, $\tau=C_0 \cdot R_s$, $T=1/v_p$
 (a) 本手法による計算結果



(b) 実験結果

結論

本論文では固体内を伝播する弾性波動の空間回路網法による時間応答数値解析法の提案とその妥当性について論じた。その結果、本手法の特徴が明確になりその有効性が確認された。以下に各章での論点を簡潔に述べ、最後に本手法の特徴をまとめる。

本論文を大きく2編に分けた。第I編では空間回路網法の固体内弾性波動への適用を検討した。その手法は次のような基本的概念からなっている。すなわちまず、格子状に多数接続された微小同一長さ、同一特性の1次元線路とその接続点（節点）につながれた集中定数素子による分布的等価回路で弾性波動を表示する。次いで、その時間軸上での定式化にBergeron法を用いる。このような概念を持つ本手法を、各章で具体的問題に適用し、その妥当性、有効性を検討した。第II編では空間回路網法の電磁気系と結合を持つ固体内弾性波動（以下、結合波動と呼ぶ）への適用を試みた。すなわち第I編で議論された弾性波動の等価回路に電気的な特性を表示する等価回路を重ね合わせ、その間に結合を持たせて結合波動を等価表示する。そして第I編と同様の定式化を行ないその妥当性を検討した。以下各章の内容をまとめる。

第I編第1章では2次元等方弾性体内を伝播する弾性波動に対する空間回路網法の適用について述べた。ここでは弾性波動に空間回路網法を適用する上での基本的な取扱いの概念と注意点のほとんどが紹介されている。その基本概念の一つは、まず同じ微小長さで同じ特性の1次元線路と集中定数素子を用いた分布等価回路を導くことである。すなわちその1次元線路を正方格子状につなぎ合わせ、それらの接続点すなわち節点に適当な集中定数素子を負荷して弾性波動を等価表現する。この章ではSH波に対するものと、P波、SV波の両方の性質を表現できるものの2通りの等価回路が導かれ、それらが各波動を正しく近似していることの証明

が行なわれた。第二点はこの等価回路を用いた時間軸上での解析の定式化の仕方である。定式化にはBergeron法が用いられた。すなわちまず1次元線路においてはその端部の電圧，電流をもう一端の電圧，電流の1離散時間（線路の速度と長さで決まる）前の値で表現したBergeron表示式で表す。次に各節点の集中定数素子はそこに成り立つ電圧，電流の特性式（積分形）を台形近似で表現し，そのときの離散時間を前の線路の関係式のものと同じにする。更に，それらの式と各節点の電流連続則を連立させて定式化を行なうことにより1離散時間ごとの逐次計算が可能となる。その定式化を用いて解析的に扱える基本的な例題に適用し，その妥当性を確認した。その結果，後に示すように本手法の特徴が明確になった。

第I編第2章では前章の概念を基に空間回路網法を3次元等方弾性体に適用した。そして基本的な例題を使ってその妥当性を確認した。特に本章では，差分法と同様の評価により，本手法の近似度が時間的，空間的にその離散間隔について2次であることを確認した。

第I編第3章では3次元等方弾性体の等価回路の相互容量の値および粒子速度節点に新たに負荷された相互誘導の値を適当に設定することにより，弾性体の異方性を表現できることを示した。また，その場合の物理定数と等価回路定数との関係を明確にし，集中定数素子に要求される条件を示した。更に，基本的な例題に適用してその妥当性を確認した。その結果，この方法だけでは弾性体のコンプライアンス要素のうち s_{14} ， s_{25} ， s_{36} を表現することが困難であり，他の工夫が必要なことが判明した。

第I編第4章では自由境界の設定の方法について詳しく検討した。その結果，容量の負荷された応力節点をそのまま短絡すると容量の効果がなくなり計算結果に不都合の生じることがわかった。従って応力節点の容量の代わりに粒子速度節点にインダクタンスを負荷し，集中定数素子がなにも負荷されていない状態の応力節点を短絡するか，粒子速度節点のみを

境界上に配置して境界条件を満足させる2通りの方法が適切であることを示した。またここでは他の数値解析法である差分法及び質点系モデルを用いた解法により同じ計算を行ない比較した。その結果、本手法の計算結果は差分法によるものに近いことがわかった。

第I編第5章では流体内波動と固体内波動を本手法において統一的に扱う上での基本的な考え方について検討した。その概念はまず、流体内波動の等価回路に粒子速度節点を設け、それぞれの等価回路の1次元線路を同じ長さとすることである。そして2つの媒質の接する境界上では、その場所の連続条件に見合った節点同士をつなぎ合わせ、更に個体内波動の等価回路のせん断応力節点を短絡することで境界条件を満足させるようにする。以上の取扱いを基本的な例題に適用しその妥当性を確認した。

第II編第1章では1次元圧電トランスジューサに空間回路網法を適用した。そして基本的例題により妥当性を確認した。ところで、1次元トランスジューサの時間応答解析は従来から、フーリエ変換法やz-変換法などにより解析的、数値解析的手法により盛んに行なわれている。そこで、それらの手法と比較して次の点で本手法の有効性が確認された。(1) 等価回路解析手法を用いるので分布的等価回路の持つ現象の把握しやすさをそのまま残している。(2) 定式化や計算のアルゴリズムが簡単である。(3) 回路内の全ての変数が一度に計算でき繰り返し計算の手間が省ける。(4) 振動子が不均一な場合にも適用が可能である。

第II編第2章では2次元以上の結合波動の基本的な例として面内振動をする圧電セラミック平板を取り上げ、空間回路網法の適用を検討した。すなわち薄板内を伝播する弾性波動の第I編で議論されたものと同じ等価回路に電氣的性質を表現する回路網を重ね合わせ、その間に結合を持たせた圧電セラミック平板の等価回路を提案し、Bergeron法を用いた時間応答解析の定式化について検討した。そして基本的な問題に適用しその妥当性

を確認した。

以上の結果，本手法は次のような特徴を持つことが確認された。

- (1) 等価回路表示という電氣的アナロジーを用いているため，他の手法のように直接微分方程式を解く場合と異なり，波動現象をある程度把握できる。例えば，本手法では1次元線路を伝わる平面波が節点で四方に広がるいわゆるホイッソの原理をイメージできるし，負荷をつないだり端子を短絡，開放したりした場合に波動の伝播特性をある程度予測できる。但し，その場合従来の1次元線路における波動特性をそのまま当てはめることはできない。なぜなら本手法の回路は多数の1次元線路の集合体であり，互いに影響を及ぼしあって一つの波動を表現しているためである。等価回路表示の利点として次に音響工学的扱いと合致することが挙げられる。すなわち，弾性波を線路表現することにより必然的に変数として応力と粒子速度をとることになる。従って，従来から行なわれている音響工学における弾性波の電気回路的扱いの延長として考察でき，電氣的入出力系との統一的な考察が容易となる。
- (2) 時間応答解析の数値的手法としてみた場合，次のような特徴がある。時間軸上での定式化にBergeron法を用いたことで定式化のアルゴリズムが簡単となり計算が高速化された。また各節点ごと，1離散時間ごとの逐次計算が可能となり，多元の連立方程式を解く必要のある手法に比べ計算回数が少なくて済む。また本手法は基本的には差分関係に基づいているため，誤差は差分法と同様空間離散間隔に依存し，通常満足な値を得る目安として波長を10分割以上する必要がある。以上の点は一般的に用いられる差分法とほぼ共通の特徴である。そこで差分法と比較した場合，次のような違いが認められる。差分法では速度と離散時間との関係が特に収束性との関連で問題となるが，本手法では時間離散間隔と空間離散間隔とは1次元線路の速度と長さで決まるある一定の関係にあり，各節点に負荷した集中定数素子に注意すれば常に安定であることが知ら

れている。しかもそれらの集中定数素子が媒質条件を表示しているため、固体が不均一な場合でも時間や空間の離散間隔を変えずに素子の値を変えるだけで計算が可能である。また、差分法では複雑な境界条件を満足させるために境界付近で離散間隔を変化させるなど高度な技法が必要とされるが、本手法では境界条件を考慮して、適当な集中定数素子を境界面上に負荷することで階段状に近似できる。一方、計算容量についてみると差分法は変位のみを変数として微分方程式を解くことも可能なため、本手法における粒子速度、応力の両変数を計算するベクトル計算法よりも容量が少なく済む利点がある。

以上本論文の内容を簡潔に述べた。今後、具体的な問題に数多く応用し、その適用性を確認する必要がある。更に、本手法が損失の問題、結合波動について任意の電界、磁界を扱える一般的な問題、更に非線形問題等に対して理論的に拡張されればより汎用性の高い手法となると思われる。

謝辞

本研究の遂行にあたり直接御指導，御鞭達を賜わった北海道大学工学部電気工学科，深井一郎教授並びに吉田則信助教授に深甚より感謝申し上げます。また有益な御討論を頂いた電子工学科，小柴正則教授並びに機械工学科，山田元教授に厚く御礼申し上げます。さらに柏達也氏はじめ電気回路工学講座の諸兄は終始温かい御指導，御激励を下された。

昭和54年筆者が秋田高専に赴任し，超音波振動子の過渡応答解析に携わったのは，秋田大学鉱山学部電子工学科，奥山大太郎教授の御指導を頂いてからである。これが本研究を始めるきっかけとなった。ここに同教授の御厚情に深く感謝申し上げます。また当時から熱心な御指導，御討論を頂いた同学科，井上浩助教授，今野和彦氏，吉田泰夫氏に厚く御礼申し上げます。

筆者が超音波の研究を始めたのは東北大学工学部通信工学科に在学中に卒業研究として当時通信工学科教授，現電気通信大学電子情報学科，清水洋教授の御指導を頂いたのがきっかけである。同教授に深甚より感謝申し上げます。また東北大学工学部通信工学科，中村喜良教授，山田顕博士，東海大学海洋学部斎藤繁実助教授，東北大学通信研究所竹内正雄助教授をはじめ旧清水研究室の諸兄には超音波全般にわたり多くの教えを頂いた。

元秋田高専電気工学科，佐藤武治教授からは筆者が秋田高専に赴任してから終始好意溢れる御激励を頂いた。また秋田高専電気工学科，坂上登教授，宮田克正助教授並びに電気工学科の諸兄はいつも温かい御支援を下された。本研究は秋田高専の研究に対する自由な雰囲気と教職員の御協力がなければ成し得なかったものである。関係各位に厚く御礼申し上げます。更に卒業研究を通して筆者の研究に協力してくれた諸氏に感謝する。

文献

序論

- (1) 例えば，電子情報通信学会編：“超音波特集”，信学誌，72，4，pp.351-487（平1）。
- (2) 佐藤泰夫：“弾性波動論”，岩波書店（昭53）。
- (3) 文献(2)のpp.413-437。
- (4) 例えば，K.J.Bathe and E.L.Wilson著，菊池文雄訳：“有限要素法の数値計算”，第8,9章，pp267-406，科学技術出版社（昭55）。
- (5) 境界要素法研究会編：“境界要素法の理論と応用”，第5章，pp.93-118，コロナ社（昭61）。
- (6) K.Harumi, F.Suzuki and Y.Sato：“Computer simulation of the nearfield for elastic wave in a solid half-space”，J. Acoust. Soc. Amer., 53, 2, pp.660-664(1973)。
- (7) 春海佳三郎，五十嵐高，斎藤鉄夫：“ポテンシャルを持つ質点系モデルによる弾性波の数値実験”，非破壊検査，27,12,pp.807-816（昭53-12）。
- (8) 松沢武雄：“地震の理論とその応用”，東大出版会（昭51）。
- (9) 佐藤泰夫：“弾性波動論”，pp.438-450，岩波書店（昭53）。
- (10) R.Ludwig and W.Lord：“A finite-element formulation for the study of ultrasonic NDT systems”，IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr., UFFC-35, 6, pp.809-820(1988)。
- (11) R.Ludwig D.Moore and W.Lord：“A comparative study of analytical and numerical transient force excitations on an elastic half-space”，IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr., UFFC-36, 3, pp.342-350(1989)。
- (12) W.P.Mason：“Electro-mechanical Transducers and Wave

- Filters", D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 2nd ed. (1948).
- (13) 加川幸雄: "有限要素法による振動・音響工学/基礎と応用", 培風館(昭56).
- (14) 加川幸雄, 小柴正則, 池内雅紀, 鏡 慎: "電気・電子のための有限/境界要素法", オーム社(昭59).
- (15) 吉田則信, 深井一郎, 福岡淳一: "Bergeron法による2次元マックスウェル方程式の過渡解析", 信学論(B), J62-B, 6, pp.511-518(昭54-06).
- (16) 吉田則信, 深井一郎, 福岡淳一: "電磁界の節点方程式による過渡解析", 信学論(B), J63-B, 9, pp.876-883(昭55-09).
- (17) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: "Bergeron法による2次元等方弾性体の時間応答解析", 信学論(A), J70-A, 11, pp.1515-1523(昭62-11).
- (18) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: "節点方程式による3次元等方弾性体の時間応答解析", 信学論, J71-A, 3, pp.580-586(昭63-03).
- (19) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: "Bergeron法による異方性弾性体の時間応答解析", 信学論(A), J71-A, 8, pp.1479-1488(昭63-08).
- (20) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: "空間回路網法による圧電セラミックス平板の時間応答解析", 信学論(A), J72-A, 10, pp.1466-1475(平1-10).
- (21) 電子情報通信学会編: "超音波特集", 信学誌, 72, 4, pp.351-487(平1).
- (22) 尾上守夫監修: "個体振動論の基礎", 第6章, オーム社(昭57).
- (23) 力武常次, 佐藤良輔, 萩原幸男: "物理数学II", 第3章, pp.47-92, 学会誌刊行センター(昭55).
- (24) P. Lloyd and M. Redwood: "Finite-difference method for the investigation of the vibrations of solids and the evaluation of the equivalent-circuit characteristics of piezoelectric resonators. I, II", J. Acoust. Soc. Amer., 39, 2, pp.346-361(1965).

- (25) P.Lloyd and M.Redwood: "Finite-difference method for the investigation of the vibrations of solids and the evaluation of the equivalent-circuit characteristics of piezoelectric resonators. III", J. Acoust. Soc. Amer., 40, 1, pp.82-85(1966).
- (26) Z.S.Alterman: "Finite difference solutions to geophysical problems", J. Phys. Earth, 16, special issue, pp.113-128(1968).
- (27) D.M.Boore: "Love waves in nonuniform wave guides: finite difference calculations", J. Geophys. Res., 75, 8, pp.1512-1527 (1970).
- (28) Yasuo Sato: "A numerical experiment on wave propagation in an elastic quarter space", J. Phys. Earth, 20, pp.287-299 (1972).
- (29) 戸川隼人: "微分方程式の数値計算", オーム社(昭48).
- (30) 大槻 明, 春海佳三郎: "地震時の大規模地下空洞周辺の波動伝播機構", 土木学会論文報告集, 339, pp.227-230(1983).
- (31) 加川幸雄: "有限要素法および境界要素法の現状", 信学誌, 72, 10, pp.1074-1084(平1-10).
- (32) H.Shimizu and T.Kondo: "Finite element analysis of axisymmetric piezoelectric vibrator", J. Acoust. Soc. Jpn. (E), 6, 4, pp.297-307(Oct.1985).
- (33) J.R.Winkler and J.B.Davies: "Accurate field analysis of the propagation of elastic waves through an acoustic microscope, Part I and II", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr., UFFC-33, 6, pp.644-668(1986).
- (34) 鷺津久一郎監修, 田中正隆, 田中喜久昭著: "境界要素法 - 基礎と応用", p.5, 丸善(昭57).
- (35) J.M.Doyle: "Integration of the Laplace transformed equa-

- tions of classical elastokinetics” , Jour. Math. Anal. & Applic. , 20, pp.118-131(1966).
- (36) T.A.Cruse and F.J.Rizzo : “A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I” , Jour. Math. Anal. & Applic. , 22, pp.244-259(1968).
- (37) T.A.Cruse : “A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamic problem. II” , Jour. Math. Anal. & Applic. , 22, pp.341-355(1968).
- (38) 加川幸雄 : “開領域問題のための有限/境界要素法” , サイソス社 (昭58) .
- (39) 中村 薫 : “等価回路による弾性波動の考察” , 音響誌 , 36,4, PP.185-193 (昭55) .
- (40) 中村 薫 : “発音機構のシミュレーション・プログラムの音響学的研究第2報 - ” , 音響誌 , 37,2,PP.65-75 (昭56) .
- (41) 吉田則信 : “山下栄吉監修 ; 電磁波問題の基礎解析法” , 電子情報通信学会 , 第5章 , pp.130-164 (昭62) .
- (42) P.B.Johns and R.L.Beurlle : “Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix” , proc. IEE, 118, 9, pp.1203-1208(1971).
- (43) S.Akhtarzad and P.B.Johns : “Solusion of Maxwell's equation in three space dimensions and time by the t.l.m method of numerical analysis” , Proc. IEE, 122, 12, pp.1344-1348(1975).
- (44) G.Metzger and J-P.Vable : “ Transmission Lines with Pulse Excitation” , Academic Press, New York and London(1969).
- (45) 吉田則信 , 深井一郎 , 福岡醇一 : “ヘルシュロツ法の異方性媒質への適用” , 信学論(B) , J.64-B, 11, pp.1242-1249 .

第 I 編

第 1 章

- (1) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による2次元等方弾性体の時間応答解析”, 信学論(A), J70-A, 11, pp.1515-1523 (昭62-11).
- (2) 吉田則信, 深井一郎, 福岡淳一: “Bergeron法による2次元マックスウェル方程式の過渡解析”, 信学論(B), J62-B, 6, pp.511-518 (昭54-06).
- (3) 吉田則信, 深井一郎, 福岡淳一: “電磁界の節点方程式による過渡解析”, 信学論(B), J63-B, 9, pp.876-883 (昭55-09).
- (4) 例えば, 佐藤泰夫: “弾性波動論”, 岩波書店 (昭53).
- (5) 例えば, 戸川隼人, 下関正義: “ハソコソによる境界要素法入門”, 第8章, pp.178-183, サイエンス社 (昭58).
- (6) 山梨龍夫, 加川幸雄: “二次元電気・機械振動子の有限要素シミュレーション”, 音響誌, 30, 7, pp.398-409 (昭49-07).
- (7) M.Sato, N.Yoshida and I.Fukai: “Transient analysis of isotropic elastic medium by nodal equations”, Proc.8th Symp.Ultra-sonic Electronics, Tokyo 1987, Jpn.J.Appl.Phys.27(1988) Suppl. 27-1, pp.102-104.
- (8) 近野 正編: “ダイナミカル・アナロジー-入門-回路と類推-”, コロナ社 (昭55).

第 2 章

- (1) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “節点方程式による3次元等方弾性体の時間応答解析”, 信学論(A), J71-A, 3, pp.580-586 (昭63-03).
- (2) 中村 薫: “等価回路による弾性波動の考察”, 音響誌, 36, 4,

PP.185-193 (昭55) .

(3) 中村 薫：“発音機構のシミュレーション・ヒアノの音響学的研究第2報 -”，音響誌，37,2,PP.65-75 (昭56) .

第3章

(1) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による異方性弾性体の時間応答解析”，信学論(A)，J71-A，8,pp.1479-1488 (昭63-08) .

(2) 山田 晃，清水 洋：“異方性圧電基板における $\Delta v/v$ 弾性表面波が伝うの精密解法”，信学論(A)，J69-A，6,pp.775-783 (昭61-06) .

(3) 熊谷ほか共編：“電気回路(1)”，p.73，オーム社 (昭43) .

(4) B.A.Auld：“Acoustic Fields and Waves in Solids”，I,p.394，Jhon Willey & Sons,Inc.(1973) .

第4章

(1) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による弾性体時間応答解析法の自由境界問題への適用”，信学論(A)，J71-A，10,pp.1991-1994 (昭63-10) .

(2) 佐藤泰夫：“弾性波動論”，pp.413-437，岩波書店 (昭53) .

(3) 春海佳三郎，五十嵐高，斎藤鉄夫：“ポテンシャルを持つ質点系モデルによる弾性波の数値実験”，非破壊検査，27，12,pp.807-816 (昭53-12) .

(4) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による2次元等方弾性体の時間応答解析”，信学論(A)，J70-A，11,pp.1515-1523 (昭62-11) .

(5) 久々津直哉，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法を用いた異方性媒質の基本的扱い”，信学論(C)，J69-C，12,pp.1557-1559 (昭61-12) .

(6) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“節点方程式による3次元等方弾

性体の時間応答解析”，信学論(A)，J71-A，3，pp.580-586（昭63-03）。

第5章

- (1) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“空間回路網法による流体内および固体内波動の統一的時間応答解析”，信学論(A)，J72-A，11，pp.1741-1747（平1-11）。
- (2) 尾上守夫，小林洋一：“固体にはさまれた流体中の超音波伝搬”，音響誌，29，7，pp.397-402（昭48-07）。
- (3) 竹内正男，清水 洋：“片面が水に接した弾性体板を伝搬する漏洩ラム波”，音響誌，32，7，pp.420-429（昭51-07）。
- (4) 清水康敬，吉田光治：“すべり境界面をもつ3層固体構造の弾性表面波伝搬”，信学論(A)，J59-A，1，pp.55-60（昭51-01）。
- (5) T.Nomua, T.Yasuda and S.Shiokawa: “Precise measurement of surface acoustic wave velocity using a swept frequency IDT-NDE system”，Jpn. J. Appl. Phys., 27, Suppl.27-1, pp.160-162(1987)。
- (6) J.Kushibiki and N.Chubachi: “Material characterization by line-focus-beam acoustic microscope”，IEEE Trans. Sonics & Ultrason., SU-32, 2, pp.189-212(1985)。
- (7) J.R.Winkler and J.B.Davies: “Accurate field analysis of the propagation of elastic waves through an acoustic microscope, part I and II”，IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr., UFFC-33, 6, pp.644-668(1986)。
- (8) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による2次元等方弾性体の時間応答解析”，信学論(A)，J70-A，11，pp.1515-1523（昭62-11）。
- (9) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“節点方程式による3次元等方弾性体の時間応答解析”，信学論(A)，J71-A，3，pp.580-586（昭63-03）。

- (10) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による異方性弾性体の時間応答解析”, 信学論(A), J71-A, 8, pp.1479-1488 (昭63-08).
- (11) 高木 彰, 吉田則信, 深井一郎: “駆動系を含む音場の統一的時間応答解析”, 信学論(A), J68-A, 7, pp.688-695 (昭60-07).
- (12) 霜田英麿, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による室内音場解析”, 信学論(A), J72-A, 1, pp.1-11 (平1-01).
- (13) L.M.Brekhovskikh: “Waves in Layered Media”, p.35, New York Academic(1960).
- (14) 柴山乾夫監修: “弾性表面波工学”, 電子通信学会, p.47 (昭58).

第 II 編

第 1 章

- (1) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による超音波振動子の時間応答解析”, 信学論(A), J70-A, 11, pp.1715-1718 (昭62-11).
- (2) 木村正雄: “高速フーリエ変換による厚みモード圧電振動子の過渡応答解析”, 信学技報, US81-47(191-12).
- (3) G.Hayward and M.N.Jackson: “Discrete-time modeling of the thickness mode piezoelectric transducer”, IEEE Trans. Sonics & Ultrason., SU-31, 3, pp.137-150.
- (4) 高木 彰, 吉田則信, 深井一郎: “駆動系を含む音場の統一的時間応答解析”, 信学論(A), J68-A, 7, pp.688-695 (昭60-07).
- (5) 佐藤雅弘: “ベルジェロン法による超音波振動子の過渡応答解析”, 昭61信学総全大, 94.
- (6) R.J.Kazys: “Equivalent circuit of the non-uniform piezoelectric transducer”, Ultraonics, 14, 3, pp.115-118.

- (7) 河西千広, 奥山大太郎, 菊池喜充: “時間領域での解析に適した超音波トランスジューサの等価回路”, 東北大電通談話会記録, 41, 3, pp. 237-244 (Sept. 1972).
- (8) 河西千広, 奥山大太郎, 菊池喜充: “1/4波長の間媒質層を有する圧電変換器による短いパルスの発生, 検出”, 信学論(A), 56-A, 4, pp. 242-249 (昭48-04).
- (9) K. Shibayama, T. Matsunaka and H. Sato: “Exact design of acoustic matching networks for ultrasonic transducers”, J. Acoust. Soc. Jpn. (E), 1, 2, pp. 113-119 (1980).
- (10) 佐藤雅弘: “不均一超音波トランスジューサの離散的等価回路表示と時間応答解析”, 信学会秋季全大, A-82, p. 1-85 (1989).

第2章

- (1) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “空間回路網法による圧電セラミック平板の時間応答解析”, 信学論(A), J72-A, 10, pp. 1466-1475 (平1-10).
- (2) 尾上守夫監修: “固体振動論の基礎”, 第6章, オーム社 (昭57).
- (3) B.A. Auld: “Acoustic Fields and Waves in Solids”, II, John Wiley & Sons, Inc. (1973).
- (4) 例えば, 加川幸雄: “有限要素法による振動・音響工学/基礎と応用”, pp. 215-228, 培風館 (昭56).
- (5) H. Shimizu and T. Kondo: “Finite element analysis of axisymmetric piezoelectric vibrator”, J. Acoust. Soc. Jpn. (E), 6, 4, pp. 297-307 (Oct. 1985).
- (6) 柴山乾夫監修: “弾性表面波工学”, 電子通信学会 (昭58).
- (7) 電気学会編: “エレクトロメカニカル機能部品”, pp. 194-207, 電気学会 (昭47).

- (8) 尾上守夫：“超音波遅延線の直流ハルス伝送理論”，信学誌，44，1，pp.29-36（昭36-01）。
- (9) 日下部千春，富川義朗，高野剛浩：“圧電アクチュエータのハルス駆動による高速動作と残留振動の停止”，信学技報，US88-8(198-06)。
- (10) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による2次元等方弾性体の時間応答解析”，信学論(A)，J70-A，11，pp.1515-1523（昭62-11）。
- (11) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による異方性弾性体の時間応答解析”，信学論(A)，J71-A，8，pp.1479-1488（昭63-08）。
- (12) 奥山大太郎，熊谷敏彦：“横効果縦振動様式における圧電振動子の過渡応答解析”，信学技報，EA78-46(1978-08)。
- (13) 佐藤雅弘，吉田則信，深井一郎：“Bergeron法による超音波振動子の時間応答解析”，信学論(A)，J70-A，11，pp.1715-1718（昭62-11）。
- (14) 佐藤雅弘，奥山大太郎：“対称伸び振動圧電セラミック円板の過渡応答解析”，昭60春季音響学会全大，3-1-4。

付録

図 II-2-7 に示すような圧電セラミック円板の圧電基本式は図中の円筒座標を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \frac{Y}{1-\sigma^2} (S_{rr} + \sigma S_{\theta\theta}) - \frac{d_{31}Y}{1-\sigma} E_z \\ T_{\theta\theta} &= \frac{Y}{1-\sigma^2} (S_{\theta\theta} + \sigma S_{rr}) - \frac{d_{31}Y}{1-\sigma} E_z \end{aligned} \quad (A-1)$$

$$D_z = d_{31}(T_{rr} + T_{\theta\theta}) + \epsilon_{33} E_z$$

但し,

$$S_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \frac{u_r}{r} \quad (A-2)$$

ここで T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, u_r , u_θ および S_{rr} , $S_{\theta\theta}$ はそれぞれ径方向および円周方向の応力, 変位およびひずみであり, D_z , E_z はそれぞれ z 方向の電束密度および電界である。今, 変位は対称伸び振動であるから u_r のみを考慮し, 上式と運動方程式を連立させれば u_r を $u_r = u(r)e^{-j\omega t}$ とおいて, 次式のように求められる。

$$u(r) = A J_1\left(\frac{\omega r}{v_p}\right) \quad (A-3)$$

ここで A は定数, $J_1(z)$ は第1種のベッセル関数である。

次に, 振動子に流れる電流は式 A-1 を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} I &= j\omega \int \int D_z r dr d\theta \\ &= j\omega \frac{2\pi a d_{31}Y}{1-\sigma} A J_1(\Omega) - j\omega \frac{\pi a^2 \epsilon_{33} E_z}{t} (k_p^2 - 1) E_z t \end{aligned} \quad (A-4)$$

但し $\Omega = \omega r / v_p$ 。

また, $r=a$ で $T_{rr}=0$ であることから定数 A を求めると次のようになる。

$$A = \frac{d_{31}(1+\sigma)aE_z}{\Omega J_0(\Omega) - (1-\sigma)J_1(\Omega)} \quad (\text{A-5})$$

但し、 J_0 は0次のベッセル関数である。従って、式A-5をA-4に代入すれば電気端子における電圧 V と電流 I は次式の関係となる。

$$I = j\omega \frac{\pi a^2 \epsilon_{33}^T}{t} \left[\frac{(1+\sigma)k_p^2 J_1(\Omega)}{\Omega J_0(\Omega) - (1-\sigma)J_1(\Omega)} + (1-k_p^2) \right] \cdot V \quad (\text{A-6})$$

但し、 $V = E_z \cdot t$ とした。ゆえに、内部インピーダンス Z_0 なる電圧源 V_0 を電気端子につないだ場合、電流は本文の式(II.2.23)となる。

本論文に関する筆者の研究発表

第I編に関する論文

- (1) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による二次元等方弾性体の過渡解析”, 昭61北海道連大, 35.
- (2) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による等方弾性体の時間応答解析”, 信学技報, MW86-86, pp.27-34(1986-12).
- (3) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “節点方程式による三次元等方弾性体の時間応答解析”, 昭62信学総全大, 72.
- (4) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “節点方程式による三次元等方弾性体の時間応答解析”, 昭62音響春季講論, 1-1-4.
- (5) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “節点方程式による3次元等方弾性体の時間応答解析”, 信学技報, MW87-29, pp.1-6(1987-07).
- (6) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “節点方程式による等方弾性体の時間応答解析-定量的検討-”, 昭62音響秋季講論, 2-1-9.
- (7) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による2次元等方弾性体の時間応答解析”, 信学論(A), J70-A, 11, pp.1515-1523(昭62-11).
- (8) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による弾性波の取り扱いの導波路への適用”, 電学会電磁界理論研資, EMT-88-5, pp.37-46(1988-02).
- (9) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “節点方程式による3次元等方弾性体の時間応答解析”, 信学論(A), J71-A, 3, pp.580-586(昭63-03).
- (10) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による異方性弾性体の時間応答解析”, 昭63信学春季全大, A-242.
- (11) M.Sato, N.Yoshida and I.Fukai: “Transient analysis of isotropic elastic medium by nodal equations”, Jpn.J.Appl.Phys., 27, suppl.27-1, pp.102-104(1988).

- (12) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による異方性弾性体の時間応答解析”, 信学論(A), J71-A, 8, pp.1479-1488 (昭63-08).
- (13) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による弾性体時間応答解析法の自由境界問題への適用”, 信学論(A), J71-A, 10, pp.1991-1994 (昭63-10).
- (14) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “空間回路網法による弾性体および流体内の波動の統一的時間応答解析”, 日本シミュレーション学会第10回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, I-25, pp.163-168(1989-03).
- (15) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “空間回路網法による流体内および固体内波動の統一的時間応答解析”, 信学論(A), J72-A, 11, pp.1741-1747 (平1-11).

第II編に関する論文

- (1) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “ヘルツェロン法による超音波振動子の過渡応答解析”, 昭61信学総全大, 94.
- (2) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “Bergeron法による超音波振動子の時間応答解析”, 信学論(A), J70-A, 11, pp.1715-1718 (昭62-11).
- (3) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “二次元電気機械振動子の等価回路表示と時間応答計算法”, 昭62音響春季講論, 2-8-4.
- (4) M.Sato, N.Yoshida and I.Fukai: “Transient analysis of a piezoelectric ceramic thin plate by Bergeron's method”, 昭63北海道連大, 143.
- (5) M.Sato, N.Yoshida and I.Fukai: “Transient analysis of a piezoelectric ceramic thin plate by spatial network method”, Jpn.J.Appl.Phys., 28, suppl.28-1, pp.83-85(1989).
- (6) 佐藤雅弘, 吉田則信, 深井一郎: “空間回路網法による圧電セラミック平板の時間応答解析”, 信学論(A), J72-A, 10, pp.1466-1475 (平1-10).



inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

