



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                     |                                                                                   |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title               | 3次元離散渦法による渦運動の数値解析                                                                |
| Author(s)           | 石井, 素                                                                             |
| Degree Grantor      | 北海道大学                                                                             |
| Degree Name         | 博士(工学)                                                                            |
| Dissertation Number | 甲第2972号                                                                           |
| Issue Date          | 1991-12-25                                                                        |
| DOI                 | <a href="https://doi.org/10.11501/3086314">https://doi.org/10.11501/3086314</a>   |
| Doc URL             | <a href="https://hdl.handle.net/2115/49717">https://hdl.handle.net/2115/49717</a> |
| Type                | doctoral thesis                                                                   |
| File Information    | 000000245489.pdf                                                                  |





3次元離散渦法による渦運動の数値解析

石 井 素



①

## 3次元離散渦法による渦運動の数値解析

石井 素



## 目 次

|       |                 |    |
|-------|-----------------|----|
| 第 1 章 | 序 論             | 1  |
| 1-1   | 本研究の背景          | 1  |
| 1-2   | 本論文の概要          | 6  |
| 第 2 章 | 3 次元離散渦法        | 9  |
| 2-1   | 離散渦法            | 9  |
| 2-1-1 | Biot-Savart の法則 | 12 |
| 2-1-2 | 渦度方程式           | 14 |
| 2-1-3 | 渦要素の伸縮・分割, その他  | 15 |
| 2-1-4 | 他の 3 次元離散渦法     | 22 |
| 2-1-5 | 計算手法の妥当性        | 27 |
| 2-2   | 力学的特性量の計算       | 28 |
| 2-2-1 | 運動エネルギー         | 28 |
| 2-2-2 | エンストロフィ         | 32 |
| 2-2-3 | ヘリシティ           | 35 |
| 2-2-4 | 全渦度             | 40 |
| 2-2-5 | 運動量             | 41 |
| 2-2-6 | 角運動量            | 42 |
| 第 3 章 | 渦の相互干渉          | 47 |
| 3-1   | 円形渦輪の渦要素数       | 49 |
| 3-2   | 円形渦輪と直線渦糸の相互干渉  | 53 |
| 3-2-1 | 計算条件            | 53 |
| 3-2-2 | 結果および考察         | 56 |



|       |                         |     |
|-------|-------------------------|-----|
| 3-3   | 2つの円形渦輪の相互干渉とBridging   | 73  |
| 3-3-1 | 数値計算                    | 75  |
| 3-3-2 | 結果および考察                 | 81  |
| 3-4   | 複数の円形渦輪の相互干渉とスペクトル      | 84  |
| 3-4-1 | 計算条件                    | 87  |
| 3-4-2 | 結果および考察                 | 87  |
| 3-5   | 第3章の総括                  | 101 |
| 第4章   | 非円形渦輪の変形と分裂             | 102 |
| 4-1   | 擬楕円渦輪の変形 (single chain) | 105 |
| 4-1-1 | 計算条件                    | 105 |
| 4-1-2 | 変形の様式                   | 107 |
| 4-1-3 | 力学的特性量の時間変化             | 116 |
| 4-2   | 擬楕円渦輪の変形 (multi chain)  | 118 |
| 4-2-1 | 計算方法                    | 118 |
| 4-2-2 | 渦輪断面の渦要素配置              | 122 |
| 4-2-3 | 計算条件                    | 126 |
| 4-2-4 | 結果および考察                 | 127 |
| 4-3   | 第4章の総括                  | 139 |
| 第5章   | 3次元物体の後流                | 140 |
| 5-1   | 数値計算                    | 144 |
| 5-1-1 | 境界条件                    | 144 |
| 5-1-2 | 円板                      | 147 |
| 5-1-3 | 渦要素の放出                  | 151 |
| 5-1-4 | 数値計算                    | 155 |



|       |         |     |
|-------|---------|-----|
| 5-2   | 結果および考察 | 157 |
| 5-2-1 | 流れの様式   | 157 |
| 5-2-2 | 時間平均的特性 | 175 |
| 5-3   | 第5章の総括  | 183 |
| 第6章   | 結 論     | 184 |
| 参考文献  |         | 186 |
| 謝 辞   |         | 194 |
| 付 録   |         |     |



## 主な記号

|                 |                                                               |
|-----------------|---------------------------------------------------------------|
| $A$             | : 角運動量                                                        |
| $d^3x^\alpha$   | : 渦要素 $\alpha$ の体積                                            |
| $E$             | : エネルギスペクトル                                                   |
| $H$             | : ヘリシティ                                                       |
| $I$             | : 運動量                                                         |
| $k$             | : 波数                                                          |
| $\mathbf{k}$    | : 波数ベクトル                                                      |
| $l$             | : 渦要素の長さ                                                      |
| $Q$             | : エンストロフィ                                                     |
| $R$             | : 円形渦輪の半径                                                     |
| $t$             | : 時間                                                          |
| $\Delta t$      | : 時間間隔                                                        |
| $\mathbf{u}$    | : 速度ベクトル                                                      |
| $\mathbf{x}$    | : 位置ベクトル                                                      |
| $\alpha, \beta$ | : 渦要素の番号                                                      |
| $\Gamma$        | : 循環                                                          |
| $\gamma^\alpha$ | : 渦要素 $\alpha$ の強さ ( $\omega(\mathbf{x}^\alpha)d^3x^\alpha$ ) |
| $\Omega$        | : 全渦度                                                         |
| $\delta$        | : 渦要素の断面半径                                                    |
| $\sigma$        | : 渦核半径                                                        |
| $\Phi$          | : エンストロフィスペクトル                                                |
| $\omega$        | : 渦度ベクトル                                                      |



## 第 1 章 序 論

### 1-1 本研究の背景

日常われわれの周辺に起きている流体现象の大部分は乱流である。身近な乱流現象の例として、地球上の大気の循環にともなう気象の変化，あるいは航空機に代表される工学的諸装置に関連する内部流れ，外部流れがあげられる。これらの乱流現象を研究する最終的な工学的目標は，その予測と制御である。言い換えれば，流れ場における物質の混合，拡散，熱伝達，騒音，物体に作用する流体力などを予想し，これらを促進あるいは抑制することである。制御には，能動制御（active control）と受動制御（passive control）の2種類が考えられる。能動制御は，近年，航空機，自動車，船舶等の姿勢制御に導入されている；流体に関して述べれば，時々刻々変化する流れ場の状況を感じし，これに何らかの操作を入力することで，流れの状態を操作することである。また受動制御は，一般的には境界条件（物体形状）を変えることによって行われる。身近な例として，ゴルフボールのディンプルが挙げられる。これは，ゴルフボールの表面に多数の凹凸を施すことによって，強制的に境界層を乱流に遷移させて境界層のはく離を遅らせ，ボールの抗力低減，飛距離の増加を実現したものである。このように受動制御は，予め決定されている操作を，予め決定されている手順に従って流れ場に入力する制御である。

しかし，流体運動の非定常性，非線形性のために任意の流れ場に対するこれらの制御は容易でない。つまり，乱流の非定常性，偶然性によって，時々刻々変化する流れ場の状況を全領域にわたって把握することは困難であり，また，非線形性により，流れ場に制御を目的として入力する操作によって予期しない効果を生む可能性がある。

乱流は，“不規則な変動を伴う無秩序な流体運動”（巽 1985）といわれるが，例えば，図1.1はBrown & Roshko (1974) による自由混合層中の渦構造の可視化結果であるが，これを見ても明らかなように，一見，全く規則性の無い乱流中には様々な大きさを持つ多数の渦が混在している。このことから，乱流を“大小無数



の渦の集合”と解釈することが可能である。この渦を乱流の基本構成要素とする観点にたつと，乱雑で捕らえどころのない無秩序な乱流現象を“大小様々な強さとスケールを持つ渦の運動と，それらの渦の相互干渉”として捕らえることができる。このことによって多種多様な乱流現象に共通した普遍的な渦構造，換言すれば，普遍的な乱流モデルの構築に寄与できると期待される。

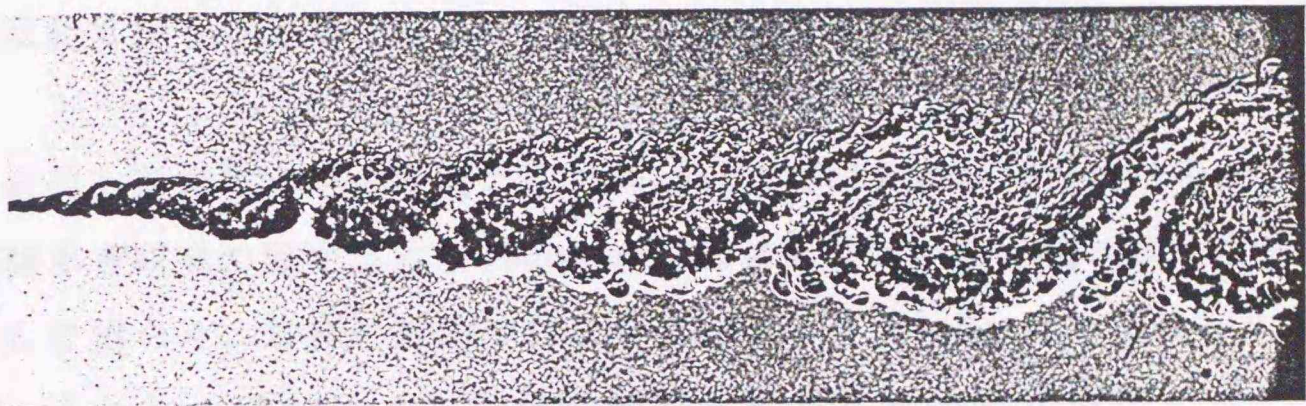


図1.1 自由混合層中の組織的渦構造 (Brown & Roshko 1974)

次に，渦の生成される領域について考えてみる。例えば，固体表面の影響の小さい流れ場の中の，速度勾配の大きいせん断層では，ここに小さな擾乱が与えられると，Kelvin-Helmholtz の不安定性によって渦の巻き上がりが起こる（図1.2）。これらが渦発生のきっかけであり，渦の源となる。作られた渦は，流体運動の持つ非線形性のために合体，分裂を繰り返して次第に複雑な流れ，すなわち乱流へと発達する。また，固体壁近くでは境界層で渦が生成される。渦が作られるためには空間的速度差（速度勾配）が必要である。速度勾配が大きい流れとしてせん断乱流（後流，噴流，自由混合層，境界層）があげられる。一様流中でこれらのせん断乱流ができる要因となるのは，密度の一樣な流れ場を仮定すると，物体の壁の存在である。この様に物体と乱流発生とは密接なつながりがある。さらに物体に作用する流体力，表面の圧力変動に関連して，物体に衝突する渦，物体から放出される渦など物体近傍に存在する渦を調べることは重要である。

以上のことから，乱流現象を渦と渦の干渉および渦と物体の干渉の2つのケースに分類することができる。

流れ場を規定する物理量は，対象とする領域内の密度が一樣，流体が均質の場



合、速度と圧力である。したがって、乱流現象を考える上で要求される情報は、流れ場の任意の点、任意の時刻における速度および圧力である。これらのことは、乱流を渦の集合として捕らえる立場をとると、流れ場のどの位置にどのような強さ・スケールの渦が存在するかを知ることに対応する。しかし、実際にはこれらの情報を得ることは、特に実験的には非常に困難であるので、限定された点の情報から、流れ場全体の様子を推測できる知識が必要である。そのためには、まず簡単な乱流に関する知識を得て、これらの情報を蓄積することが必要である。

渦に着目した流体力学の研究の歴史はLugt (1983) が、19世紀中期からの乱流現象に関する研究の歴史は谷 (1980) が詳細に記している。流れ場の変化を渦の運動として捕らえ、最初に理論づけたのは1858年のHelmholtzであるとされている。これは、Navier-Stokesの方程式が導き出された十数年後のことである。Helmholtzは、非粘性流体において“渦管は渦管として運動し、その強さは不変である”というHelmholtzの渦定理を導いた。乱流に関する最初の研究は、1883年のReynoldsによる円管内の流れの相似則について考察した実験である。それ以来多くの研究者が乱流を研究対象としてきたが、これが身近な現象でかつニュートン力学を適用できる力学系であるにも関わらず、あらゆる乱流現象を説明可能な普遍的理論は未だに確立されていない。

ニュートン流体の流れ場では、流体の運動は Navier-Stokes方程式によって記述されることはすでに19世紀に導かれている。もしもこの方程式を解析的に解くことができれば、任意の時刻の任意の点における速度と圧力の情報を得ることができる。これは実験では不可能なことである。しかし、この方程式は非線形な慣性項を含むため、解析的な解が得られるのは、この項を無視するか線形近似できる流れ、例えば流速が遅く定常で境界条件が単純な場合に限定される。そこで、この方程式の解を得ようとする数値的手法に頼らざるをえない。数値解析を行うためには、時間的、空間的に連続関数として表されている Navier-Stokes方程式を離散化しなければならない。数値的に微分方程式を解く方法の中でその結果を最も信頼できるのは、十分な計算格子をとることができるならば、モデルを一切取り入れずに直接的に差分法で解く方法である。



今世紀の科学技術革命の一つに1946年のコンピュータ (ENIAC) の出現があげられる。そしてその後の半導体技術の進歩によるコンピュータの高速化・大容量化にともない、1920年代に“Richardsonの夢”に終わった数値解析による気象予測もこの30年後には現実のものとなった。さらに、1970年代のスーパーコンピュータの誕生によって、最近ではよりの中率の高い数値予報が行われつつある。このように高速化・大容量化した現在の計算機をもってしても、Navier-Stokes方程式を直接解法によって解く場合、レイノルズ数 ( $Re = \text{流れ場の代表速度} \times \text{流れ場の代表長さ} / \text{流体の動粘性係数}$ ) が大きいと、特に物体近傍で多くの格子点を必要とするため、計算時間は実際に実行不可能なほど膨大なものになる。

十分に発達した3次元乱流では、流れの中に存在し得る最小の渦スケール (Kolmogorov length scale)  $\eta$  は  $L Re^{-3/4}$  ( $L$ : 流れ場の代表長さ) 程度の大きさである。 $L$  は一番大きなエネルギーを保有する渦スケールに対応する。したがって、 $L$  のスケールから  $\eta$  のスケールまで表現できるような計算格子をとるためには、 $Re^{3/4}$  に比例した計算格子数を要求される。つまり、3次元計算では  $Re^{9/4}$  に比例した計算格子数が必要となる。さらに、レイノルズ数を大きくする (例えば流速を速くする) と時間間隔も細かくしなければならない。最小の渦が存在し得る時間  $t$  (Kolmogorov time scale) は  $T Re^{-1/2}$  ( $T = L/U$ ) である。また、乱流の時間変動を表現するためには、 $\eta$  を速度で除した  $L Re^{-3/4}/U$  程度の時間分解能が必要である。よって、 $Re^{-1/2} > Re^{-3/4}$  から最小スケールの渦の移動、消散を表現できるように、結局  $Re^{3/4}$  回程度の時間積分を必要とする。以上より単純に計算すると計算時間は  $Re^{(9/4+3/4)} = Re^3$  に比例する。このことは、例えばレイノルズ数を一桁上げた計算を行うと、3次元の場合には  $10^3$  倍程度の計算時間を要することを意味している。このことに加えて、計算の安定条件を満たすためにはもう一桁、すなわち、計算時間は  $10^4$  倍程度になる。現在、直接計算による最も高いレイノルズ数は高々  $10^4$  程度で、その計算時間は最速のコンピュータで数十時間に達すると予想される。したがって、さらに高いレイノルズ数の計算をする場合には、乱流モデルによって微細な渦の挙動による流れ場に対する影響を定式化し、Navier-Stokes方程式に組み込み、空間格子、時間間隔をある程度粗く取り計算時間を短縮する。現在でも、0方程式モデル、1方程式モデル、2方程式モデル、代数応力モデル、応力方程式モデル、格子平均モデルなど数多く



のモデルが提案されているが、その普遍性に問題があることが指摘されている。普遍性のある乱流モデル構築のためには、第一段階として簡単な乱流について解析し理解することが必要である。そのためには実験と数値解析結果の対応を検討しながらモデルを改善していく必要がある。

数値解析には、差分法および有限要素法に代表される領域型解法と、境界要素法と呼ばれる境界型解法が挙げられる。渦の相互作用を数値解析する場合には、渦度が存在する領域のみを計算対象とする離散渦法が、渦度の存在しない領域も計算対象としてしまう（渦が存在しない領域にも計算格子を取らなければならない）領域型解法よりも、一般にデータ数および計算時間の節約ができるという点で有利であるとされている。



## 1-2 本論文の概要

本研究は、乱流を渦の集合体として捕らえ、乱流の基本構成要素と考えられる渦と渦の相互干渉、すなわち簡単な乱流を3次元離散渦法によって数値解析したものである。以下に本論文の概要を述べる。

第2章では、本研究で採用した3次元離散渦法について説明する。離散渦法は、1931年Rosenheadによって始められた計算方法である。図1.2(a)はその際の結果の一例である。この方法は主に2次元流れの計算に用いられてきたが、Leonard (1976) によって3次元流れの計算への拡張が行われた。最近の2次元および3次元の渦法による成果は、Leonard (1980, 1985), Sarpkaya (1989) にまとめられている。3次元離散渦法は、流れ場の中で渦度が存在する領域を分割して渦要素で近似し、渦要素の移動および変形（伸縮、回転）を、それぞれ Biot-Savart の法則および渦度方程式によってラグランジュ的に計算する方法である。コーディングが簡単であること、並列計算に向いていることなどの利点を持つ反面、3次元計算の場合には渦度の発散が起こりそれ以後の計算ができなくなる問題点をもつ。本研究の離散渦法の特徴の一つは、乱流を特徴づけるエネルギースペクトル、エントロフィスペクトル、ヘリシティ、全渦度、運動量、角運動量の物理量を容易に計算できる点である。

第3章では、渦の相互干渉の代表的な例として、円形渦輪と直線渦糸、複数の円形渦輪の相互干渉に対する計算結果とこれについての考察を行う。円形渦輪は、乱流を構成する基本要素であると考えられるからである。直線渦糸は円形渦輪の半径を無限大にしたものとみなせる。円形渦輪と直線渦糸の相互干渉には両者の相対位置によって4つのモードの存在が明らかになった。さらに、並進する2つの円形渦輪の相互干渉の解析を行い、渦のつなぎ換えにおけるBridging過程についても考察も行う。また初期状態において正多面体上に配置された4～8個の渦輪の相互干渉では、エネルギースペクトルにKolmogorovの $-5/3$ 乗則に近いスペクトルが現れることを示す。

第4章では、非円形噴流の軸の回転および分岐に関連して、非円形渦輪の時間発展に対する計算結果を示す。計算対象とした渦輪は、長方形の短辺を半円で置



き換えた擬楕円渦輪である。この渦輪の長軸と短軸の比を系統的に変化させて計算を行った。変形には、4つの基本的な変形パターンがあることを示す。さらに擬楕円渦輪を多数の渦管の集合で表現した場合の計算結果も示す。

第3章と第4章では渦輪を中心とする簡単な乱流について考察したので、次にもう少し複雑な乱流について数値解析を行うこととした。離散渦法を物体周りの流れに適用した例は多いが、そのほとんどは2次元流れの計算である。3次元物体周りの流れの離散渦法による計算は、一様流中に垂直に置かれた円板周りの流れ (Shirayama et al. 1985) のみである。離散渦法に類似した渦糸法による計算を含めても、球のまわりの流れ (Leonard 1976), 自由混合層 (Inoue 1987, Ashurst & Meiburg 1988, Meiburg & Lasheras 1988) などその応用例は多くない。第5章では、一様流中に様々な迎え角 ( $90^\circ \sim 45^\circ$ ) をもって置かれた円板まわりの流れに対する計算結果を示す。ここでは、計算結果に基づいてフローパターン、時間平均速度分布、レイノルズ垂直応力、およびレイノルズせん断応力に関する考察を行う。

第6章では本研究で得られた主な結論を要約してある。



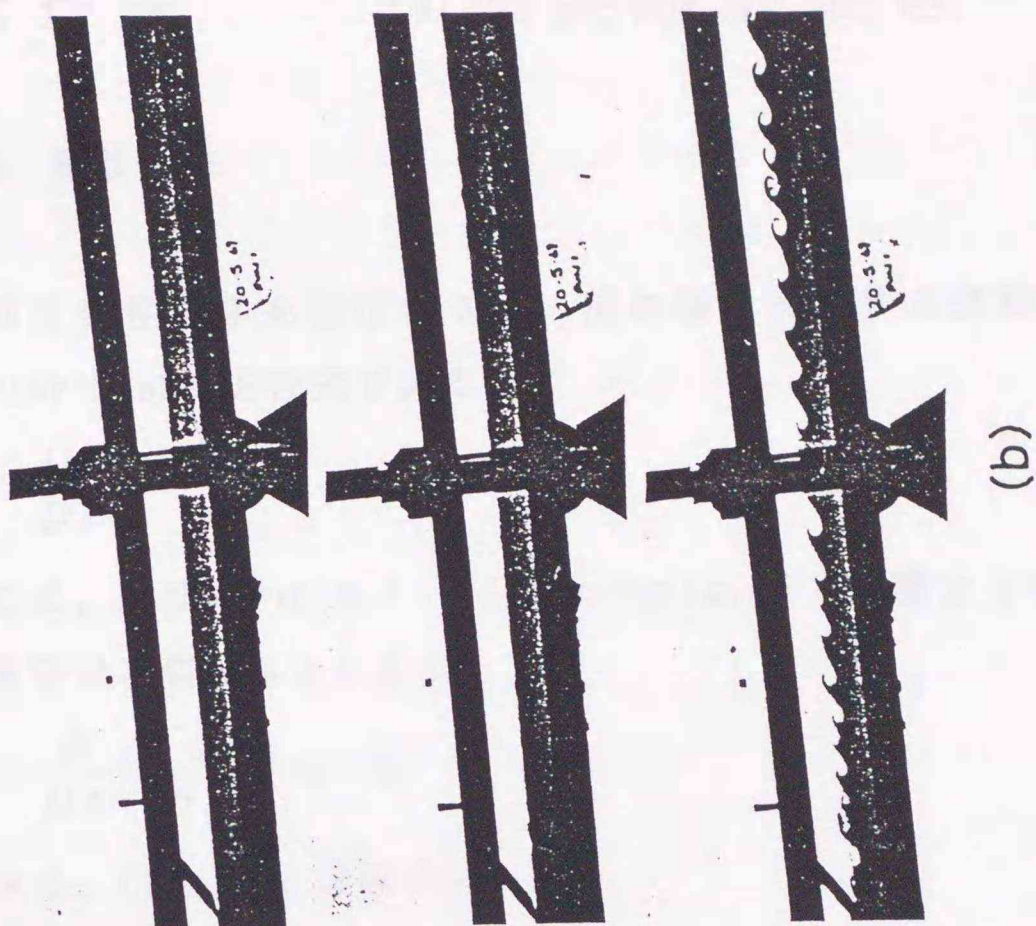
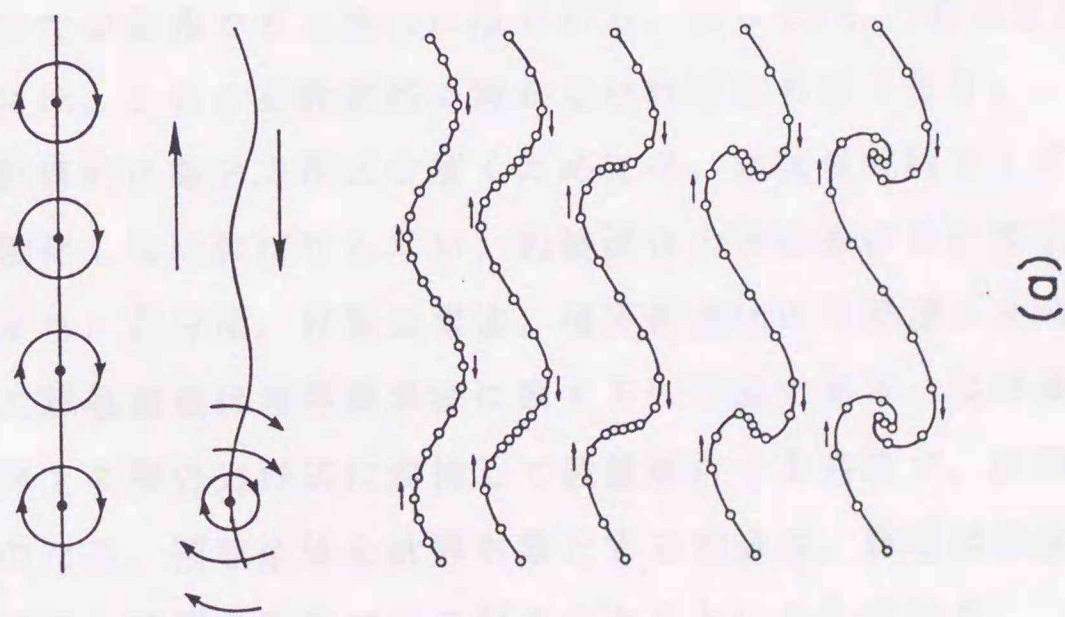


図1.2 Kelvin-Helmholtz の不安定性  
(a)数値解析例 (Lugt 1983), (b)可視化実験例 (Thorpe 1971)



## 第 2 章 3 次元離散渦法

### 2-1 離散渦法

非圧縮性流体を仮定すると，流れ場を表現する運動方程式は次に示される Navier-Stokes 方程式である．

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \quad (2.1)$$

ここに，速度  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,t)$ ，圧力  $p=p(x,t)$  は位置  $x$  と時間  $t$  の関数で，左辺の演算子は実質微分といわれ

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$$

である．(2.1)式と連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

によって，速度  $\mathbf{u}$  の 3 成分と圧力  $p$  の 4 個の未知数に対して，4 本の方程式が成立している．したがって，これらの方程式を連立させて解くことができれば，流れ場全体の速度と圧力が求められることになる．しかし実際には，(2.1)式の左辺に非線形な慣性項  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  があるので，解析的に解を得ることができるのは，非線形性が無視できる場合に限られる．よって(2.1)式および(2.2)式の解を得るためには，これらを数値的に解かなければならなくなる．

数値的に微分方程式を解くためには，連続な関数として表されている方程式を離散化しなければならない．数値流体力学における計算手法は，離散化法の違いにより，差分法，有限要素法，境界要素法の 3 種類に大別される．本研究で採用した離散渦法は境界要素法に属する一手法である．境界要素法は，支配方程式を境界上の積分方程式に変換して数値解析する方法で，計算対象を境界に限定する．このため，領域全体を計算対象とする差分法，有限要素法に比して，一般には計算容量・時間を節約できる利点があるといわれている．

3 次元離散渦法は，Beale & Majda (1982a, 1982b)，Anderson & Greengard (1985) によって提唱された方法である．この方法は，流体中で渦度が存在する



領域を多数の要素（渦要素と呼ぶ）の集合により近似し，これらの挙動をラグランジュ的に追跡するものである；渦要素の各時刻における位置はBiot-Savartの法則，渦度は渦度方程式から計算する．渦要素 $\alpha$ （ $\alpha$ ：渦要素の番号）は円筒形を仮定しており，その中心の位置ベクトル $\boldsymbol{x}^\alpha$ ，渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}^\alpha)$ ，太さ $\delta_\alpha$ および長さ $l_\alpha$ の8個の変数によって規定される（図2.1）．離散渦法は，計算の対象を渦度が存在する領域に限定するため，渦管，渦輪などの変形あるいはそれらの相互作用の時間発展を領域的解法である差分法・有限要素法に比べて容易に計算することができる．

また，3次元離散渦法には次の二通りの考え方がある．

（A）渦糸法：初期状態で隣接した計算節点間の連続性を強制する．

（B）離散渦法：初期状態で隣接した計算節点間の連続性を強制しない．

（A）の渦糸法は渦のつながぎ換えのときに人為的な操作を必要とする（Yamashita & Oshima 1988）のに対して，（B）の離散渦法は，自動的に渦のつながぎ換えを表現できると考えられるので，この操作を必要としない点で有利である．（A）と（B）を合わせて3次元の渦法と呼ばれている．



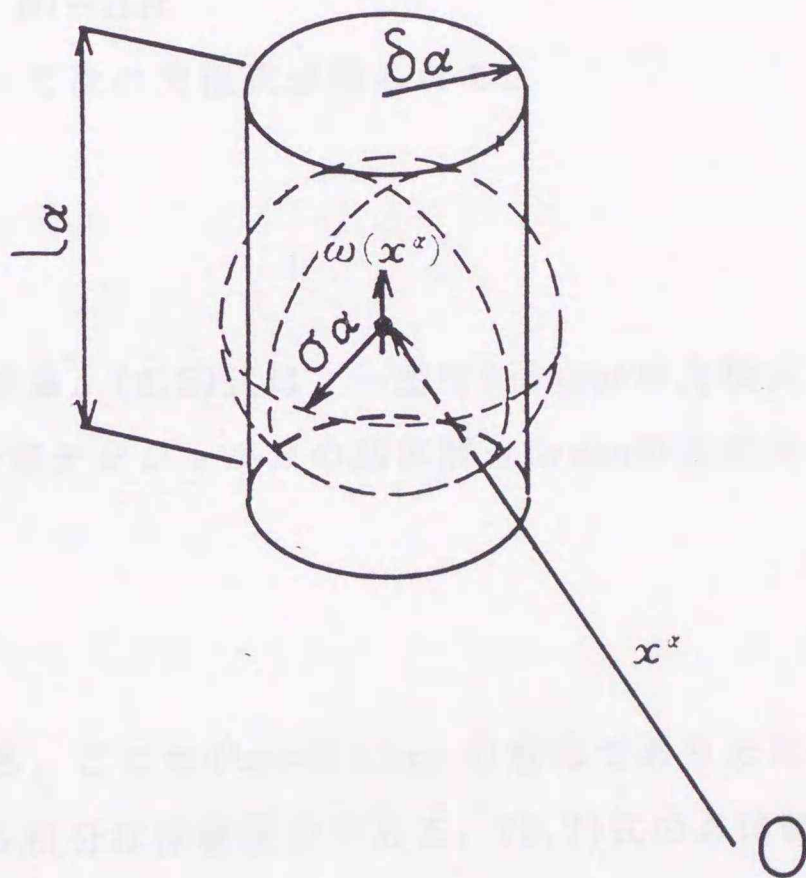


図2.1 渦要素



### 2-1-1 Biot-Savartの法則

(2.2)式の連続の式が成立するとき

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

となる  $\mathbf{B}$ ，すなわち  $\mathbf{u}$  のベクトルポテンシャルが一意的に存在する。また，渦度  $\omega = \omega(\mathbf{x}, t)$  の定義は

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.4)$$

である。(2.4)式に(2.3)式を代入し，ベクトル解析の公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$$

を適用することによって次の方程式が得られる。

$$\Delta \mathbf{B} = -\omega \quad (2.5)$$

ただし

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

が満足されるものとする。(2.5)式は，一般にPoissonの方程式と呼ばれている。(2.5)式よりベクトルポテンシャル  $\mathbf{B}$  の基本解はGreenの公式から，3次元のときは

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega}{r} d^3\mathbf{x} \quad (2.7)$$

と求めることができる。ここで  $d^3\mathbf{x} = dv(\mathbf{x})$  の意味であり  $\mathbf{x}$  に位置する微小体積を表す。 $d^3\mathbf{x}$  に関する積分は体積積分である。(2.7)式の  $\mathbf{B}$  は確かに(2.6)式を満足している (Batchelor 1967)。(2.7)式を(2.3)式に代入すると Biot-Savartの法則

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r} \times \omega(\mathbf{x}')}{r^3} d^3\mathbf{x}' \quad (2.8)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r = |\mathbf{r}|$$

が導かれる。ここで， $\mathbf{u}$  を磁場の強さ（正の単位点電荷に作用する磁気力）， $\omega$  を電流の強さ（任意の面を通り単位時間に流れる電気量）で置き換えると電気磁気学で使用されているBiot-Savartの法則の式となる。(2.8)式は，渦度を持った微小体積の流体粒子  $d^3\mathbf{x}'$  が  $\mathbf{x}$  に誘起する速度を領域全体で積分する形になっている。個々の流体粒子が  $\mathbf{x}$  に誘起する速度  $d\mathbf{u}(\mathbf{x})$  は，



$$d\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{r^3} d^3\mathbf{x}', \quad (2.9)$$

である。(2.9)式はBiot-Savartの法則の微分形とよばれる。この式に基づいて渦要素 $\alpha$ が任意の点 $\mathbf{x}$ に誘起する速度 $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x})$ を次の式で表す；簡単のために $\boldsymbol{\gamma}^\alpha = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\alpha) d^3\mathbf{x}^\alpha$ とおくと

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha) \times \boldsymbol{\gamma}^\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|^3} \quad (2.10)$$

$\boldsymbol{\gamma}^\alpha$ は渦要素の強さと呼ばれる量である。(2.10)式のBiot-Savartの法則は、渦要素中心 $\mathbf{x}^\alpha$ の近傍( $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha| \rightarrow 0$ )では速度 $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x})$ が無大に発散する特異性を持つ。したがって、数値計算を実行するときにはこの特異性を取り除く必要がある。

そこで本研究では渦要素 $\alpha$ による渦度分布 $\boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{x})$ を

$$\boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_\alpha^3} p\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) \boldsymbol{\gamma}^\alpha \quad (2.11)$$

で与える。 $p$ は

$$\int \frac{1}{\sigma_\alpha^3} p\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) d^3\mathbf{x} = 1 \quad (2.12)$$

の条件を満たす球対称な性質を持つ関数で、smoothing function (cut-off function, blob function, core function) と呼ばれる。ここで $\sigma_\alpha$ は渦要素 $\alpha$ の渦核半径で、渦度分布の標準偏差に対応するものである(図2.1)。本研究においてはRosenhead-Mooreの渦核構造(Leonard 1985, Sarpkaya 1989)を採用したので関数 $p$ は

$$p(r) = \frac{3a}{4\pi} \frac{1}{(r^2 + a)^{5/2}} \quad (2.13)$$

と書くことができる。定数 $a$ の値は、渦核内の渦度分布によって決まる定数で、これがGauss分布 $(\Gamma/\pi\sigma^2)\exp(-s^2/\sigma^2)$ ( $\Gamma$ :渦の循環,  $\sigma$ :渦の核半径,  $s$ :半径)のときは $a=0.4131$ となる。なお、本論文では第4章4-2においてWinckelmans & Leonard (1988)による、より高次のsmoothing function

$$p(r) = \frac{8a^2}{15\pi} \frac{1}{(r^2 + a)^{7/2}} \quad (2.14)$$



を採用した計算も行っている。この渦核構造を用いたBiot-Savartの法則，渦度方程式，力学的特性量の表示式は第4章4-2で述べる。

Rosenhead-Moore の渦核構造を導入した場合のBiot-Savartの法則は次に示すとおりである。

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha) \times \boldsymbol{\gamma}^\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|^3} q\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) \quad (2.15)$$

$q$  は(2.10)式の Biot-Savartの法則に現れる特異性を取り除くための関数である。Rosenhead-Moore の渦核構造のときは

$$q(y) = 4\pi \int_0^y p(r) r^2 dr = \frac{y^3}{(y^2 + a)^{3/2}}$$

である。

渦要素  $\alpha$  の速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha)$  は， $\alpha$  以外の各渦要素が  $\mathbf{x}^\alpha$  に誘起する速度の総和をとればよいから

$$\frac{D\mathbf{x}^\alpha}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta} \frac{\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta}{r_{\alpha\beta}^3} q\left(\frac{r_{\alpha\beta}}{\sigma_\beta}\right) \quad (2.16)$$

と表される。ここに  $\mathbf{r}^{\alpha\beta} = \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta$ ， $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}^{\alpha\beta}|$  である。

(2.4)式と後に述べる渦度方程式を連立させて解く方法もあるが，Biot-Savartの法則という境界上の積分方程式の形にして解くのが本方法の特徴となっている。これが本計算方法が境界要素法の一つであるといわれる所以である。

### 2-1-2 渦度方程式

(2.1)式で表される Navier-Stokes 方程式を，ベクトル解析の公式

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 2(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

により次のように変形する。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2.17)$$

両辺の rotation をとり，公式

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

と，連続の式(2.2)と(2.4)式の定義から明らかな渦度のソレノイダル条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \equiv 0 \quad (2.18)$$



を考慮することによって、渦度方程式

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u + \nu \Delta \omega \quad (2.19)$$

が求められる。右辺第1項は渦の回転と伸縮，第2項は粘性による渦度の拡散を表す。非粘性流体を仮定する場合には，右辺第2項の粘性項を無視することができて次のようになる。

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)u$$

この式は，Helmholtz の渦度方程式と呼ばれる。2次元流れでは，右辺は常に0である。しかし3次元流れの場合は一般に  $(\omega \cdot \nabla)u \neq 0$  であるので渦の伸縮を考慮しなければならない。このことが2次元と3次元の本質的な違いで，3次元計算を困難にしている。

渦要素  $\alpha$  に関する Helmholtz の渦度方程式は次のようになる。

$$\frac{D\omega(x^\alpha)}{Dt} = \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} u(x^\alpha) \quad (2.20)$$

ここで， $\nabla^\alpha$  は  $x^\alpha$  に関する演算子である。上式に(2.16)式で表されるBiot-Savartの法則を代入して，本研究における渦度方程式

$$\frac{D\gamma^\alpha}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta} \left\{ \frac{\gamma^\beta \times \gamma^\alpha}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{3/2}} - \frac{3(\gamma^\beta \times r^{\alpha\beta})(\gamma^\alpha \cdot r^{\alpha\beta})}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{5/2}} \right\} \quad (2.21)$$

を得ることができる（詳細な計算方法は付録I参照）。

### 2-1-3 渦要素の伸縮・分割，その他

#### (A) 体積の保存

流体の粘性を無視すれば，渦度を保有する体積は時間的に変化しないと見なせるので  $d^3x^\alpha$  は一定である。渦要素を半径  $\delta_\alpha$ 、長さ  $l_\alpha$  の円筒形としたときの体積  $d^3x^\alpha$  は

$$d^3x^\alpha = \pi \delta_\alpha^2 l_\alpha \quad (2.22)$$

である。

#### (B) 循環の保存



渦要素の循環  $\Gamma_\alpha$  は Kelvin の循環保存の法則より一定とし

$$\Gamma_\alpha = \pi \delta_\alpha^2 |\omega^\alpha| \quad (2.23)$$

の関係があるものとする：  $\Gamma$  と  $\delta_\alpha$  の値が与えられたとき，渦度  $\omega^\alpha$  の値はこの式から求められる。

### (C) 渦要素の分割

計算の進行にともない，渦要素は伸縮（主に伸長）を受けるので，その長さは時間とともに変化する．伸長によって渦要素の長さ  $l_\alpha$  が初期値  $(l_\alpha)_{t=0}$  の2倍以上になったときは，これを渦度が等しく長さ  $l_\alpha/2$  の二つの渦要素に分割した．分割した後の2つの渦要素中心位置ベクトルを  $x^{\alpha 1}$ ， $x^{\alpha 2}$  とすると

$$x^{\alpha 1} = x^\alpha + \frac{1}{2} l_\alpha \frac{\omega^\alpha}{|\omega^\alpha|}, \quad x^{\alpha 2} = x^\alpha - \frac{1}{2} l_\alpha \frac{\omega^\alpha}{|\omega^\alpha|}$$

である．Anderson & Geengard (1985) は分割するときに渦度を  $\omega^{\alpha 1} = \omega^{\alpha 2} = \omega^\alpha/2$  とする方法を提唱しているが，これでは循環が保存されない点で不合理である．

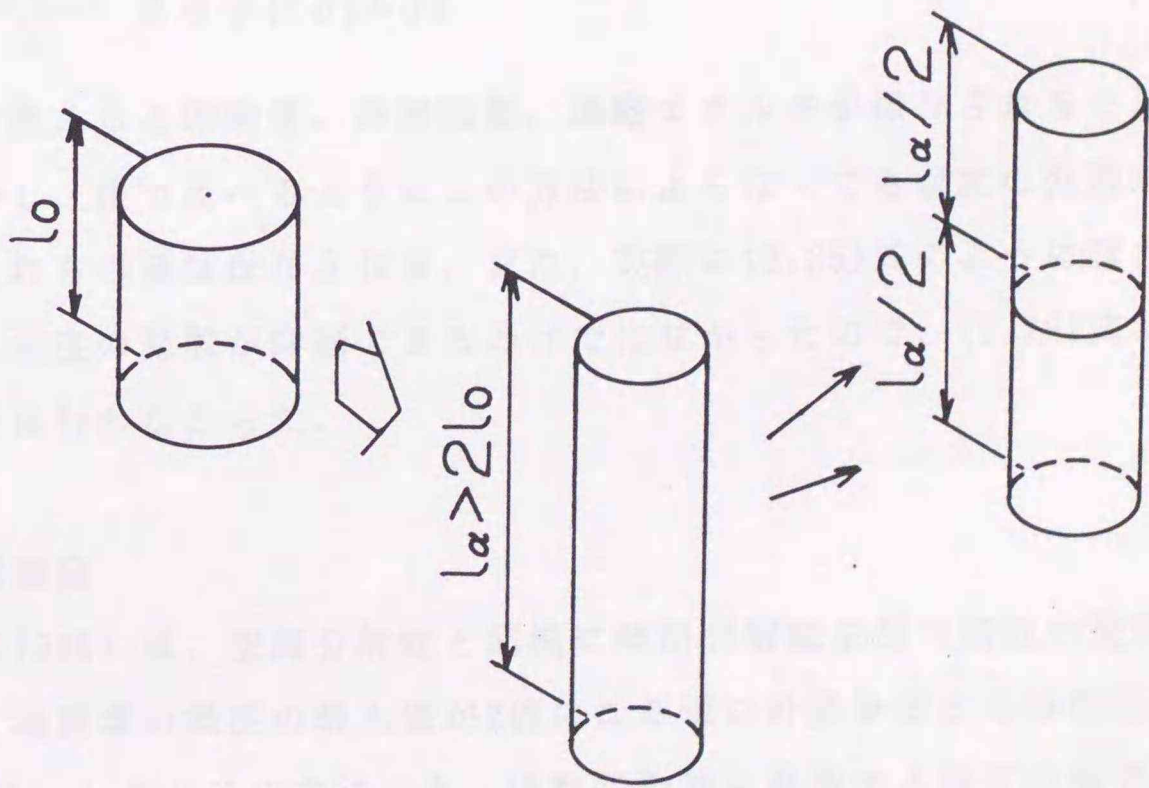


図2.2 渦要素の分割



#### (D) 渦核半径

渦核半径  $\sigma_\alpha$  と渦要素の太さ  $\delta_\alpha$  には2種類の取扱い方式がある。

(i)  $\sigma_\alpha$  と  $\delta_\alpha$  を常に同一とみなす。このときは渦要素の伸長とともに  $\sigma_\alpha$  と  $\delta_\alpha$  は減少する；渦要素の長さを渦要素の体積が一定となるように変化させる。

(ii)  $\sigma_\alpha$  を初期値のままとして時間的に変化させない。 $\delta_\alpha$  と長さはその伸縮にともない循環および体積が一定となるように変化させる。このとき渦核半径  $\sigma_\alpha$  を

$$\sigma_\alpha(t) = \sigma_\alpha(0) \left\{ \frac{d^3 \mathbf{x}^\alpha(t)}{d^3 \mathbf{x}^\alpha(0)} \right\}^{1/3} \quad (2.24)$$

とする。すなわち、渦要素が分割されないときは、時間的に変化させず一定とした。渦要素の半径  $\delta_\alpha$ 、長さ  $l_\alpha$  はその伸縮によって循環および体積が一定となるように変化させた。このようにすることによって、 $\sigma_\alpha$  と  $\delta_\alpha$  を常に同一としたときよりも渦度の発散を遅らすことができた。本論文では、第3章3-3において(i)の方法を使用している以外は、(ii)の方法を採用している。

Leonard (1980) によれば、Biot-Savartの法則および渦度方程式中の  $\sigma_\beta$  を

$$\sigma_\beta \rightarrow \frac{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2}{2} \quad \text{あるいは} \quad \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 \quad (2.25)$$

のように置き換えると運動量、角運動量、運動エネルギーが保存されると述べられている。しかし、後で述べるようにこの方法によらなくても渦度の発散が誘起されるまではこれらの量は保存される。また、実際に(2.25)式のように置き換えて計算したが、渦度の発散が抑制できるわけではなかったので、(2.25)式による渦核半径の置換は行わなかった。

#### (E) 時間積分

Kuwabara (1988) は、空間分解能と同様に時間分解能を保ち渦度の発散を回避するために、渦要素の渦度の最大値が2倍になる毎に計算を進める時間間隔  $\Delta t$  を1/2倍している。しかしこの方法でも、指数関数的に発散する渦度の爆発を抑えることはできない。この方法は、 $\Delta t$  が非常に小さくなり、計算が進行しなくなる問題点を持つので、本論文では計算の全時刻にわたって  $\Delta t$  を一定とした。



また，時刻  $t + \Delta t$  における渦要素の位置および強さは，一次精度の Euler 法（第 3 章，第 5 章）

$$x(t + \Delta t) = x(t) + u(t) \Delta t$$

$$\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + \left( \frac{D\gamma}{Dt} \right)_{(t)} \Delta t$$

あるいは二次精度の Adams-Bashforth 法によって計算する（第 4 章）。

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2} \{ 3u(t) - u(t - \Delta t) \} \Delta t$$

$$\gamma(t + \Delta t) = \gamma(t) + \frac{1}{2} \left\{ 3 \left( \frac{D\gamma}{Dt} \right)_t - \left( \frac{D\gamma}{Dt} \right)_{t-\Delta t} \right\} \Delta t$$

#### (F) 粘性効果

本研究では，流体は非粘性流体と仮定している（ただし，計算を実行する段階で数値誤差による粘性が自動的に取り込まれている可能性はある）。これに伴う問題点として，ある程度計算が進行した段階における渦度の発散が挙げられる。これは，粘性効果を取り入れることによって回避可能である。渦法では渦核半径を

$$\sigma_\alpha = \sigma_\alpha + \frac{2.242^2 \nu}{2\sigma_\alpha} \Delta t \quad (2.26)$$

によって時間間隔毎に大きくする方法が広く用いられている (Sarpkaya 1989)。しかしこの方法で計算した結果が，渦度方程式とは異なる粘性を表現しているという指摘があるので (Greengard 1985)，本論文ではこの方法は採用していない。

また，渦要素に random walk を施すことによって粘性を表現する方法もある (Chorin 1973)。この方法では，位置を計算するときに random walk による効果  $\xi^\alpha$  を加え合わせればよい。

$$x^\alpha(t + \Delta t) = x^\alpha(t) + u^\alpha(t) \Delta t + \xi^\alpha$$

ここに  $\xi^\alpha$  は，平均値が 0，標準偏差が  $(2\nu\Delta t)^{1/2}$  の Gauss 分布をするような乱数によって与えられる。この random walk 法で粘性を表現するには，渦要素数を十分に多くする必要がある。本論文では random walk 法を導入するほど多数の渦要素による計算はしていないので，この方法を使用していない。



Winckelmans & Leonard (1988) によって渦度方程式の粘性項を

$$\nu \Delta \gamma^a = \frac{2\nu}{\sigma_a^2} \sum_{\beta} \frac{1}{\sigma_{\beta}^3} \eta \left( \frac{|\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^{\beta}|}{\sigma_{\beta}} \right) (\gamma^{\beta} d^3 \mathbf{x}^a - \gamma^a d^3 \mathbf{x}^{\beta})$$

のように表す方法が提唱されている。本論文では、この方法を非円形渦輪の変形の数値解析で採用しているので、詳細は第4章4-2で述べることとする。

#### (G) 境界条件の表現方法

流れ場にある円柱，球などの有限な大きさの物体は，渦要素の配列によって表すことができる。本論文では第5章において円板まわりの解析を行っているが，円板はこの方法によって表現している。

無限長の壁は，壁面と法線方向の速度成分を打ち消し合うように，壁と対称な位置に同じ強さで反対符号の循環を持つ渦をおくことによって，境界条件が表現できる（中西・亀本 1990）。

3次元の渦法による，複雑な形状の物体まわりの流れに関する解析はまだなされていない。したがって，渦法の工学的に広範囲にわたる実用化を考えた場合，3次元計算における物体から放出される渦度の表現方法およびその導出方法も含めて，今後検討していく必要があると思われる。



(H) 計算機，計算アルゴリズム

本研究で使用した計算機は，北海道大学大型計算機センターの日立製作所製 HITAC M-682H および HITAC S820/80 である．S820/80 はスーパーコンピュータである．スーパーコンピュータによる計算にはFORTRANによるプログラミングが一般的で，その性能を十分に引き出すためには，ベクトル化率の高いプログラムを作成する必要がある．ベクトル化率を高くするためには，最内側のDOループを大きくし，論理演算，IF文，関数副プログラム，サブルーチン副プログラムを極力少なくする必要がある（明神 et al. 1990a, 1990b, 1991）．

本計算方法のアルゴリズムを図2.3に示す．また，3次元離散渦法のプログラムの例として，第5章の円板まわりの流れの計算の際に使用したものを付録にのせた．



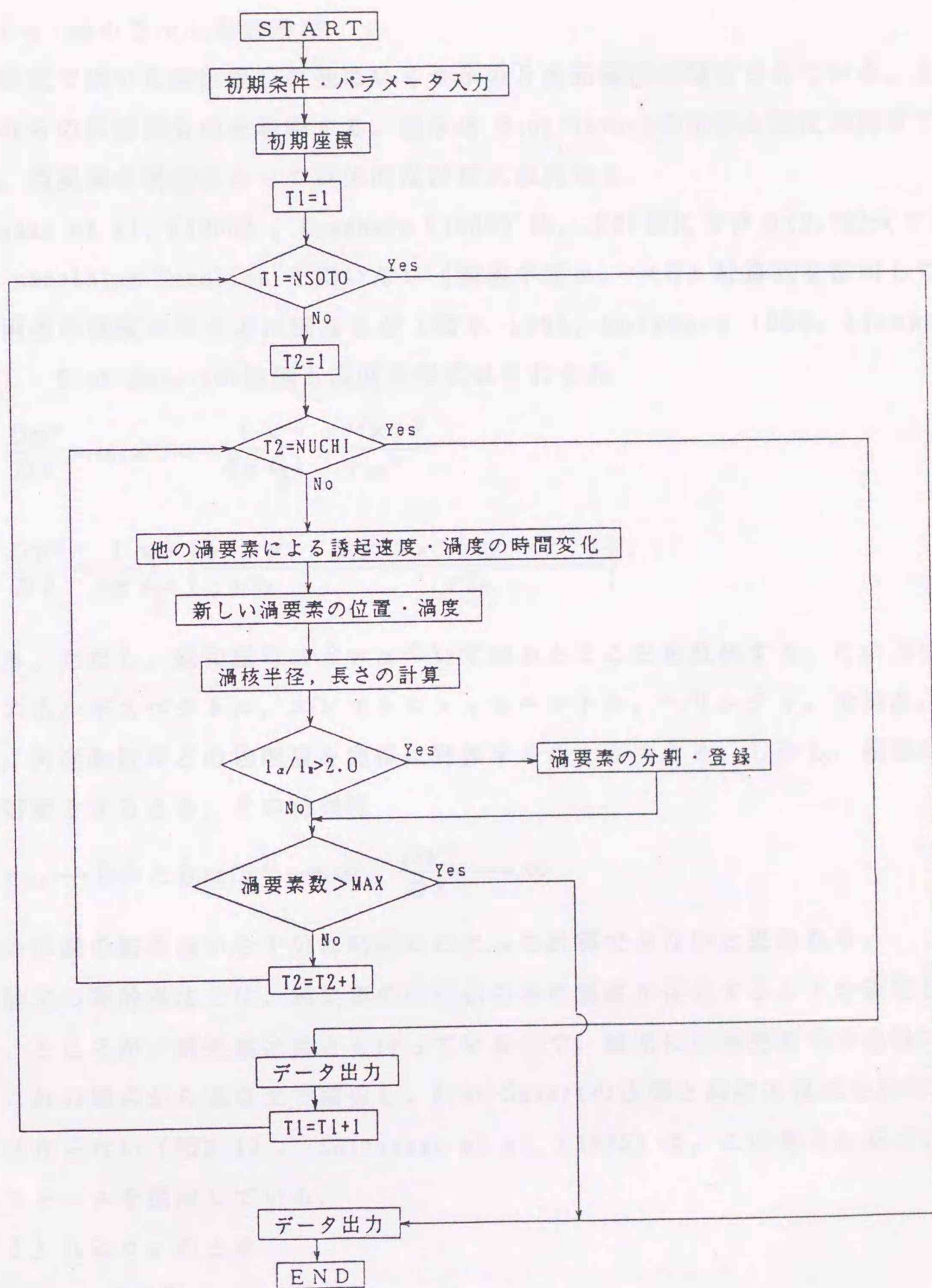


図2.3 計算アルゴリズム



#### 2-1-4 他の3次元離散渦法

本研究で用いた離散渦法の他にいくつかの3次元渦法が提案されている。ここでこれらの代表的ものを説明する。基本は Biot-Savart の法則と渦度方程式であるが、渦要素の構造によって具体的な計算式は異なる。

Aksman et al. (1985), Kuwabara (1988) は、本計算における(2.13)式で表される smoothing function を用いない(渦核半径  $\sigma_\alpha \rightarrow 0$ ) 計算式を採用している。両者の渦度の与え方は異なるが(橋本 1985, Kuwabara 1988, Alkemade 1989), Biot-Savart の法則と渦度方程式はそれぞれ

$$\frac{D\mathbf{x}^\alpha}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\beta}' \frac{\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta}{r_{\alpha\beta}^3}$$

$$\frac{D\boldsymbol{\gamma}^\alpha}{Dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta}' \left\{ \frac{\boldsymbol{\gamma}^\beta \times \boldsymbol{\gamma}^\alpha}{r_{\alpha\beta}^3} - \frac{3(\boldsymbol{\gamma}^\beta \times \mathbf{r}^{\alpha\beta})(\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \mathbf{r}^{\alpha\beta})}{r_{\alpha\beta}^5} \right\}$$

となる。ただし、総和記号は  $\beta \neq \alpha$  について和をとることを意味する。この方法では、エネルギースペクトル、エンストロフィスペクトル、ヘリシティ、全渦度、運動量、角運動量などの物理量を簡単に計算することができる。しかし、複雑な流れを対象とすると、その特異性

$$r_{\alpha\beta} \rightarrow 0 \text{ のとき } \mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha) \rightarrow \infty, \quad \frac{D\boldsymbol{\gamma}^\alpha}{Dt} \rightarrow \infty$$

のために渦の絡み合いを十分な時間にわたって計算できないと思われる。

本論文の離散渦法では、渦要素の中心点のみに渦度が存在することを仮定している。ところが、渦要素は長さを持っているので、厳密には渦要素の中心軸に沿ってこの端点から端点まで積分し、Biot-Savart の法則と渦度方程式を計算しなければならない(図2.4)。Shirayama et al. (1985) は、この考えに基づいた次のスキームを採用している。

(I)  $h \geq \sigma_\beta$  のとき

Biot-Savart の法則

$$\frac{D\mathbf{x}^\alpha}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha) = \sum_{\beta} F_\beta \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta) \times \mathbf{f}^{\alpha\beta}}{|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta)|}$$



渦度方程式

$$\frac{D\omega(x^\alpha)}{Dt} = \sum_{\beta} F_A \frac{\omega(x^\beta) \times \omega(x^\alpha)}{|\omega(x^\beta)|} \\ - \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{4\pi} \{ \omega(x^\alpha) \cdot (F_B f^{\alpha\beta} + F_C g^{\alpha\beta}) \} \frac{\omega(x^\beta) \times f^{\alpha\beta}}{|\omega(x^\beta)|}$$

ここで

$$F_A = \frac{\Gamma_{\beta}}{4\pi} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \right) \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} - l_{\beta}} - \frac{1}{f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} + l_{\beta}} \right) \\ F_B = -\frac{1}{f_{\alpha\beta}^3} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} - l_{\beta}} - \frac{1}{f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} + l_{\beta}} \right) \\ + \frac{1}{f_{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \right) \left\{ \frac{-1}{(f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} - l_{\beta})^2} + \frac{1}{(f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} + l_{\beta})^2} \right\} \\ F_C = -\frac{1}{g_{\alpha\beta}^3} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} - l_{\beta}} - \frac{1}{f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} + l_{\beta}} \right) \\ + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \right) \left\{ \frac{-1}{(f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} - l_{\beta})^2} + \frac{1}{(f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} + l_{\beta})^2} \right\}$$

(II)  $h < \sigma_{\beta}$  のとき

Biot-Savartの法則

$$\frac{Dx^\alpha}{Dt} = u(x^\alpha) = \sum_{\beta} F_D \frac{\omega(x^\beta) \times f^{\alpha\beta}}{|\omega(x^\beta)|}$$

渦度方程式

$$\frac{D\omega(x^\alpha)}{Dt} = \sum_{\beta} F_D \frac{\omega(x^\beta) \times \omega(x^\alpha)}{|\omega(x^\beta)|} \\ - \sum_{\beta} \frac{\Gamma_{\beta}}{8\pi \sigma_{\beta}^2 l_{\beta}} \{ \omega(x^\alpha) \cdot (F_E f^{\alpha\beta} + F_F g^{\alpha\beta}) \} \frac{\omega(x^\beta) \times f^{\alpha\beta}}{|\omega(x^\beta)|}$$

ここで

$$F_D = \frac{\Gamma_{\beta}}{8\pi \sigma_{\beta}^2 l_{\beta}} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \right) (l_{\beta} + f_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})(l_{\beta} - f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}) \\ F_E = -\frac{1}{f_{\alpha\beta}^3} (l_{\beta} + f_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})(l_{\beta} - f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}) - \frac{2}{f_{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \right) (f_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$



$$F_F = -\frac{1}{g_{\alpha\beta}^3} (l_\beta + f_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}) (l_\beta - f_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}) + \frac{2}{g_{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{f_{\alpha\beta}} + \frac{1}{g_{\alpha\beta}} \right) (f_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})$$

ただし  $f_{\alpha\beta} = |\mathbf{f}^{\alpha\beta}|$  ,  $g_{\alpha\beta} = |\mathbf{g}^{\alpha\beta}|$  である。記号の定義は図2.5に示すとおりである。この計算方法では、力学的特性量の計算が困難である。さらに渦核  $\sigma$  の外側と内側で異なる式を使用するので計算手順が複雑になる。

また、(2.16)式のBiot-Savartの法則と(2.21)式の渦度方程式を、渦要素の中心軸に沿って端点から端点まで積分すると次のようになる。

Biot-Savartの法則

$$\frac{D\mathbf{x}^\alpha}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha) = \sum_\beta F_A^\beta \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta) \times \mathbf{f}^{\alpha\beta}}{|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta)|} \quad (2.27)$$

渦度方程式

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\alpha)}{Dt} = & \sum_\beta F_A^\beta \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\alpha)}{|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta)|} \\ & - \sum_\beta \frac{\Gamma_\beta}{4\pi} \{ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\alpha) \cdot (F_B^\beta \mathbf{f}^{\alpha\beta} + F_C^\beta \mathbf{g}^{\alpha\beta}) \} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta) \times \mathbf{f}^{\alpha\beta}}{|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^\beta)|} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} F_A^\beta &= \frac{\Gamma_\beta}{8\pi l_\beta} \left( \frac{1}{h_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2} \right) \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}^2 + l_\beta^2 - f_{\alpha\beta}^2}{(g_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{1/2}} + \frac{f_{\alpha\beta}^2 + l_\beta^2 - g_{\alpha\beta}^2}{(f_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{1/2}} \right\} \\ F_B^\beta &= -\frac{4\pi}{\Gamma_\beta} \frac{F_A^\beta (g_{\alpha\beta}^2 + l_\beta^2 - f_{\alpha\beta}^2)}{l_\beta^2 (h_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)} \\ &+ \frac{1}{l_\beta (h_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)} \left\{ \frac{1}{(f_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{1/2}} - \frac{1}{(g_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{1/2}} - \frac{f_{\alpha\beta}^2 + l_\beta^2 - g_{\alpha\beta}^2}{(f_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{3/2}} \right\} \\ F_C^\beta &= -\frac{4\pi}{\Gamma_\beta} \frac{F_A^\beta (f_{\alpha\beta}^2 + l_\beta^2 - g_{\alpha\beta}^2)}{l_\beta^2 (h_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)} \\ &+ \frac{1}{l_\beta (h_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)} \left\{ \frac{1}{(g_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{1/2}} - \frac{1}{(f_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{1/2}} - \frac{g_{\alpha\beta}^2 + l_\beta^2 - f_{\alpha\beta}^2}{(g_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

この式による計算法の方が、本論文の計算方法よりも正確と思われるが、前述の物理量を求めるには、これらの式をさらに積分しなければならないので計算が困難である。また、本論文で採用した計算方法でも、十分な数の渦要素を取れば、精度のよい計算が可能であると考え (Beale & Majida 1982a 1982b, Anderson



& Greengard 1985) .

渦糸法による計算でも (Inoue 1987, Ashurst & Meiburg 1988) , 計算式は離散渦法と同様である。ただし先にも述べたように, 計算接点間の連続性を強制するので, (2.27) 式の Biot-Savart の法則のみによって計算する方法を採用している。この計算では, 本論文で採用している渦要素の中心点における速度を計算して移動距離を決定する方法と異なり, 渦要素の端点における速度を計算する。すなわち, 端点の速度差が渦要素の伸縮を表現することになる。

離散渦法においても端点移動による方法がある (福西 et al. 1988, 中西・亀本 1990) 。しかし, この方法では例えば渦要素の連続的な配列で表現された渦輪を計算する場合に, random walk によって個々の渦要素を平行移動する (福西 et al. 1988) か, あるいは (2.26) 式によって渦核を拡大することにより渦要素の長さを短くする (中西・亀本 1990) ことをしなければ, 初期状態において隣接した渦要素の連続性が保たれてしまうので, 渦糸法と同一になることを注意しなければならない。



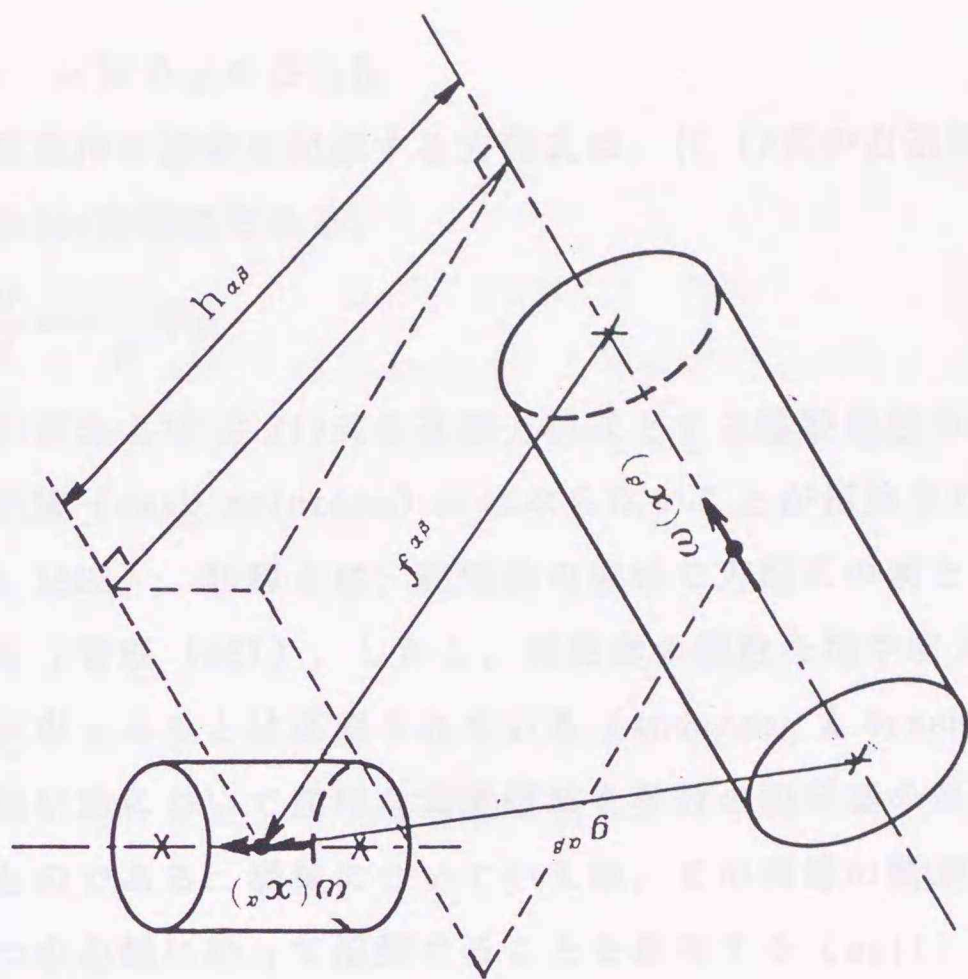


図 2.5 記号の定義

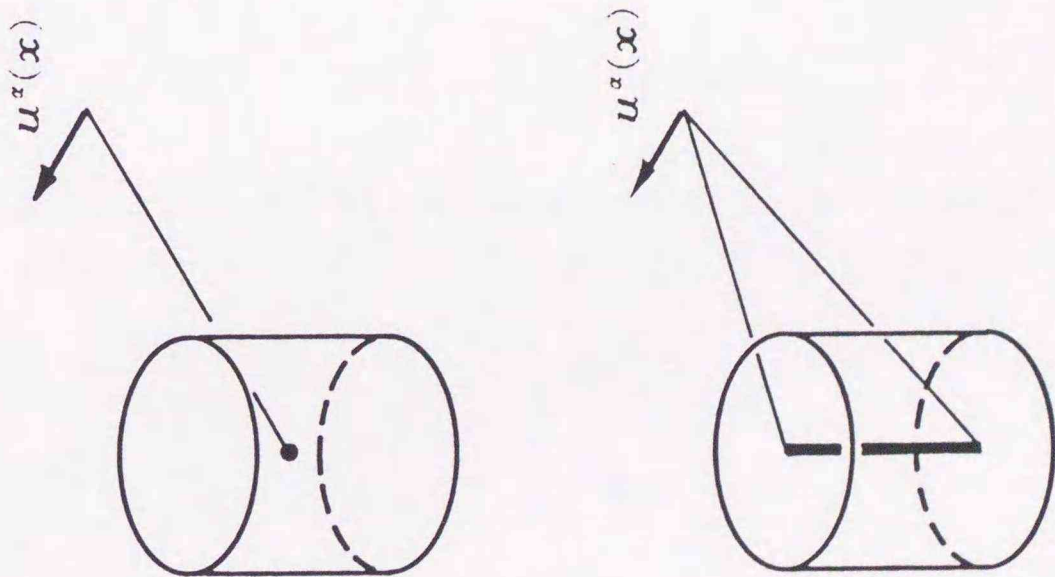


図 2.4 誘起速度計算法の違い



#### 2-1-5 計算手法の妥当性

非粘性流体の運動を記述する方程式は、(2.1)式の右辺第2項の粘性項を省略した次のEuler方程式である。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

(2.16)式および(2.21)式を基礎方程式とする離散渦法の計算結果が、Euler方程式の弱解 (weak solution) にはならないことが指摘されている (Greengard & Thomann 1988)。弱解とは、超関数の意味で方程式の解となっていることを意味している (曾根 1987)。しかし、渦要素の個数を増やすとともに Euler 方程式の解に収束することは証明されている (Anderson & Greengard 1985)。この証明は、初期状態において連続な渦度領域を多数の渦要素の集合によって置き換えたときのものである。渦輪についていえば、その渦管の断面を多数の渦要素に分割し、かつ中心軸に沿って配列することを意味する (multi chain)。これに対して本計算では渦核を一つの渦要素によって置き換えている (single chain) ので、厳密解への収束は保証されていない。しかし、渦輪が十分に細い ( $\sigma/R \ll 1$ ) ときには本計算結果は、渦糸近似法 (Leonard 1985) による計算結果と同一になるものと考えられる。言い換えれば、本計算法は細い渦輪の運動を数値的に解析するための一つの離散化法と解釈するべきである。



## 2-2 力学的特性量の計算

本研究の離散渦法では，運動エネルギー，エントロピー，ヘリシティ，全渦度，運動量，角運動量に対する表示式を解析的に計算することができる．3次元離散渦法においては，渦管や渦輪を構成する渦要素の連結性が強制されていないので，渦度ベクトル $\omega$ はソレノイダル条件(2.18)式を厳密には満足していない．そのため円形渦輪のように，静止した非粘性流体中で有限の範囲に分布した渦領域が運動するときには，一定に保たれるべき運動エネルギー，ヘリシティ，全渦度，運動量，角運動量は必ずしも一定にならない可能性がある．第3章と第4章ではこれらの物理量の時間変化を求め，計算結果の物理的妥当性を判断する一つの基準とした．なお，以下に上げる力学的特性量は全て時間の関数となっている．

### 2-2-1 運動エネルギー

領域全体の運動エネルギーは次式で表される．

$$\frac{T}{\rho} = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d^3x \quad (2.28)$$

任意の点 $\mathbf{x}$ における速度 $\mathbf{u}$ は，各渦要素によって $\mathbf{x}$ に誘起される速度 $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x})$ の総和であるから

$$\begin{aligned} \frac{T}{\rho} &= \frac{1}{2} \int \sum_{\alpha} \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \sum_{\alpha} \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) d^3x + \frac{1}{2} \int \sum'_{\alpha, \beta} \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) d^3x + \frac{1}{2} \sum'_{\alpha, \beta} \int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) d^3x \end{aligned} \quad (2.29)$$

である．ここで

$$\sum'_{\alpha, \beta} = \sum_{\alpha \neq \beta}$$

すなわち， $\alpha \neq \beta$ である渦要素全てに関して総和をとることを意味している．



速度のフーリエ変換を

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \quad (2.30)$$

上式のフーリエ逆変換を

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \quad (2.31)$$

で定義すると、渦要素  $\alpha$  に関する速度のフーリエ変換とフーリエ逆変換はそれぞれ

$$\hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x})\} = \int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k}$$

と表される。

(2.29)式の  $\alpha$  と  $\beta$  に関する積分の変形をすると

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} &= \int \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \right\} \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \left\{ \int \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \right\} d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^\beta(-\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \end{aligned}$$

となる。波数空間における半径  $k$  上の面素を  $dS_k$  として、 $d^3\mathbf{k} = dS_k d k$  で置き換えると

$$\int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d k \int d S_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^\beta(-\mathbf{k})$$

と表される。ここで

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d S_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^\beta(-\mathbf{k}) \quad (2.33)$$

とすると



$$\frac{1}{2} \int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

同様に

$$\int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\mathbf{k} \int dS_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^\alpha(-\mathbf{k})$$

$$E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^\alpha(-\mathbf{k})$$

より

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.34)$$

と書くことができる。

(2.29)式にこれらの式を代入すると

$$\frac{T}{\rho} = \sum_\alpha \int_0^\infty E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \sum_{\alpha, \beta} \int_0^\infty E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

ここで

$$E_0(\mathbf{k}) = \sum_\alpha E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}), \quad E_{\text{int}}(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha, \beta} E_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$$

の様におくこととする。  $E_0(\mathbf{k})$  は自己誘起エネルギースペクトル、  $E_{\text{int}}(\mathbf{k})$  は相互作用エネルギースペクトルとよばれる。さらに

$$E(\mathbf{k}) = E_0(\mathbf{k}) + E_{\text{int}}(\mathbf{k}) \quad (2.35)$$

とすると

$$\frac{T}{\rho} = \int_0^\infty E(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (2.36)$$

となり、領域全体の運動エネルギーが波数空間の積分の形で表される。  $E(\mathbf{k})$  はエネルギースペクトルである。波数の大きさは、流れ場に存在する渦のスケールの逆数に対応している。したがってエネルギースペクトルによって、渦のスケールに対応したエネルギーの大きさを知ることができる。エネルギースペクトルは以下のよう

に求められる。

(2.32)式のフーリエ変換は



$$\hat{u}^{\alpha}(k) = i a^{1/2} \sigma_{\alpha} k^{-1} K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} k) e^{-i k \cdot x} (k \times \gamma^{\alpha}) \quad (2.37)$$

と求められる (付録 II 参照). ただし,  $K_1$  は 1 次の第 2 種変形ベッセル関数である.

(2.37) 式を (2.33) 式と (2.34) 式に代入することによって, エネルギスペクトル  $E_0(k)$ ,  $E_{int}(k)$  を表わす式はそれぞれ次のようになる (付録 III 参照).

$$E_0(k) = \frac{1}{6\pi^2} \sum_{\alpha} a \sigma_{\alpha}^2 k^2 \{K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} k)\}^2 (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha}) \quad (2.38)$$

$$E_{int}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha, \beta}' a \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} k^2 K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} k) K_1(a^{1/2} \sigma_{\beta} k) \\ \times \{(\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\beta}) \phi_1(k r_{\alpha\beta}) + (\gamma^{\alpha} \cdot n^{\alpha\beta}) (\gamma^{\beta} \cdot n^{\alpha\beta}) \phi_2(k r_{\alpha\beta})\} \quad (2.39)$$

ただし,  $n^{\alpha\beta} = r^{\alpha\beta} / |r^{\alpha\beta}|$  および

$$\phi_1(y) = \frac{1}{y^3} \{(y^2 - 1) \sin y + y \cos y\}$$

$$\phi_2(y) = \frac{1}{y^3} \{(3 - y^2) \sin y - 3y \cos y\}$$

である. なお, (2.39) 式において,  $\beta \rightarrow \alpha$  ( $r_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ ) とすると

$\phi_1(k r_{\alpha\beta}) \rightarrow 2/3$ ,  $\phi_2(k r_{\alpha\beta}) \rightarrow 0$  であるから (2.38) 式に一致する.

また,  $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta} \rightarrow 0$  とすると Aksman et al. (1985) が用いている式と一致する.

ここで, 運動エネルギーの時間変化を考えてみることにする. まず, (2.1) 式の Navier-Stokes 方程式の両辺に  $u$  を掛けて微分方程式を保存形式に変形する.

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left\{ \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \cdot u \right\} + \nu u \cdot (\nabla \times \omega)$$

ただし,  $u^2 = u \cdot u$  とする. さらに, ベクトル解析の公式

$$u \cdot (\nabla \times \omega) = (\nabla \omega \times u) + \omega \cdot \omega$$

を適用すると

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left\{ \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \cdot u + \nu (\omega \times u) \right\} - \nu (\omega \cdot \omega)$$

となる. 次に両辺を体積積分することによって



$$\int \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2}{2} \right) d^3x = - \int \nabla \cdot \left\{ \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \cdot \mathbf{u} + \nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \right\} d^3x - \nu \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) d^3x$$

右辺第一項の積分に Gauss の発散定理を用いて

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{T}{\rho} \right) = - \int \left\{ \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \cdot \mathbf{u} + \nu (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \right\} dS - \nu \int (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) d^3x$$

渦度が有限の領域内に存在するものとする、積分する領域を十分に大きくとることによって面積分の項は 0 となる。以上のことから

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{T}{\rho} \right) = -2\nu Q \quad (2.40)$$

の関係を導くことができる (橋本 1985)。右辺の  $Q$  はエントロフィと呼ばれる量で、次節の (2.4) 式によって定義される。(2.40) 式から非粘性流体 ( $\nu=0$ ) の場合には、エネルギーが時間に依存しない不変量であることがわかる。

### 2-2-2 エントロフィ

エントロフィ  $Q$  は空間全体の渦度の大きさを表す量で、次式によって定義される。

$$Q = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x \quad (2.41)$$

任意の点  $\mathbf{x}$  の渦度  $\boldsymbol{\omega}$  は、各渦要素の  $\mathbf{x}$  に対する渦度分布の寄与の総和であるから

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int \sum_a \boldsymbol{\omega}^a(\mathbf{x}) \cdot \sum_a \boldsymbol{\omega}^a(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \sum_a \int \boldsymbol{\omega}^a(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}^a(\mathbf{x}) d^3x + \frac{1}{2} \sum_{a, \beta}' \int \boldsymbol{\omega}^a(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}^\beta(\mathbf{x}) d^3x \end{aligned} \quad (2.42)$$

で表される。

渦度のフーリエ変換を

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\} = \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \quad (2.43)$$

このフーリエ逆変換を



$$\omega(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\omega}(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\omega}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (2.44)$$

とすると、渦要素 $\alpha$ に関して(2.43)式と(2.44)式はそれぞれ

$$\hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\omega^\alpha(\mathbf{x})\} = \int \omega^\alpha(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \quad (2.45)$$

$$\omega^\alpha(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k})\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k$$

となる。

上式を考慮することによって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \omega^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \omega^\beta(\mathbf{x}) d^3x &= \int \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \right\} \omega^\beta(\mathbf{x}) d^3x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) \left\{ \int \omega^\beta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \right\} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\omega}^\beta(-\mathbf{k}) d^3k \end{aligned}$$

となる。 $d^3k = dS_k dk$  で置き換えると

$$\int \omega^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \omega^\beta(\mathbf{x}) d^3x = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \int dS_k \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\omega}^\beta(-\mathbf{k})$$

と表される。ここで

$$\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\omega}^\beta(-\mathbf{k}) \quad (2.46)$$

とすると

$$\frac{1}{2} \int \omega^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \omega^\beta(\mathbf{x}) d^3x = \int_0^\infty \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) dk$$

同様に

$$\Phi_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\omega}^\alpha(-\mathbf{k}) \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{2} \int \omega^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \omega^\alpha(\mathbf{x}) d^3x = \int_0^\infty \Phi_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) dk \quad (2.48)$$



とおくと，エンストロフィスペクトル  $\Phi(k)$  は

$$\Phi(k) = \Phi_0(k) + \Phi_{\text{int}}(k)$$

$$\Phi_0(k) = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha\alpha}(k), \quad \Phi_{\text{int}}(k) = \sum_{\alpha, \beta} \Phi_{\alpha\beta}(k)$$

$$Q = \int_0^{\infty} \Phi(k) dk$$

のように書くことができる。

(2.45)式の積分は，

$$\hat{\omega}^{\alpha}(k) = a^{1/2} \sigma_{\alpha} k K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} k) e^{-ik \cdot x} \gamma^{\alpha} \quad (2.49)$$

と求められるので（付録IV参照），エンストロフィスペクトルは次ようになる（付録V参照）。

$$\Phi_0(k) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha} a \sigma_{\alpha}^2 k^4 \{K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} k)\}^2 (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha})$$

$$\Phi_{\text{int}}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha, \beta} a \sigma_{\alpha}^2 \sigma_{\beta}^2 k^2 K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} k) K_1(a^{1/2} \sigma_{\beta} k) \frac{k^3 \sin(k r_{\alpha\beta})}{r_{\alpha\beta}} (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\beta})$$

なお，(2.48)式の左辺（ $Q_{\alpha\alpha}$  とおく）は，以下のように渦度分布を与える関数を積分することによって，計算することができる。

$$Q_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \int \omega^{\alpha}(x) \cdot \omega^{\alpha}(x) d^3x$$

$$= \frac{1}{2} \int (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha}) \left\{ \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} p \left( \frac{|x - x^{\alpha}|}{\sigma_{\alpha}} \right) \right\}^2 d^3x$$

$$= \frac{1}{2} (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha}) \int \left\{ \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} p \left( \frac{|x - x^{\alpha}|}{\sigma_{\alpha}} \right) \right\}^2 d^3x$$

$r = (x - x^{\alpha}) / \sigma_{\alpha}$ ， $r = |r|$  とすると  $d^3r = d^3x / \sigma_{\alpha}^3$  である。さらに関数  $p$  の球面対称性を考慮すると

$$Q_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha}) \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} \int p^2(r) d^3r = \frac{1}{2} (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\alpha}) \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} \int_0^{\infty} 2\pi r^2 p^2(r) dr$$

のように変形できる。ここで上式の積分部分を



$$J = \int_0^{\infty} r^2 p^2(r) dr$$

とにおいて計算すると

$$J = \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(r^2 + a \sigma_a^2)^5} dr$$

$$= \frac{45}{4096 \pi a^{1/2}}$$

であるから  $Q_{\alpha\alpha}$  は

$$Q_{\alpha\alpha} = \frac{45}{2048} \frac{(\gamma^\alpha \cdot \gamma^\alpha)}{(a^{1/2} \sigma_a)^3}$$

と表される。

### 2-2-3 ヘリシティ

ヘリシティ  $H$  は

$$H = \int \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x \quad (2.50)$$

で定義される。これは渦糸の絡み合いが位相幾何学的に変わらないときは一定の値を保つ物理量である (Moffat 1969, 橋本 1985)。単純な渦輪のような形状となるときは  $H=0$  であるが、渦輪と渦糸が図2.6(a)の場合は  $H>0$ ，図2.6(b)の場合は  $H<0$  となる。 $H \neq 0$  の渦糸の形状として図2.6(c)に示すものが考えられているが、実験的にはこのような形状を作ることは困難である (Lugt 1983)。

ここで、ヘリシティの時間変化について考察する。(2.17)式の両辺に  $\boldsymbol{\omega}$  を掛けると、 $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \equiv 0$  であるから

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \boldsymbol{\omega} \cdot \Delta \mathbf{u}$$

渦度  $\boldsymbol{\omega}$  はソレノイダル条件を満たすので

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \boldsymbol{\omega} + \nu \boldsymbol{\omega} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.51)$$

となる。また、(2.17)式の両辺のrotationをとる。



$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\nabla \times \{(\omega \times u) + \nu W\} \quad (2.52)$$

ここで  $W = \nabla \times \omega$  とおいた。  $W$  は di-vorticity と呼ばれる量である (Kida et al.)。さらに (2.52) 式の両辺に  $u$  を掛ける。

$$u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} = -u \cdot \nabla \times \{(\omega \times u) + \nu W\}$$

ベクトル解析の公式を適用すると

$$\nabla \cdot [ \{(\omega \times u) + \nu W\} \times u ] = u \cdot \nabla \times \{(\omega \times u) + \nu W\} - \{(\omega \times u) + \nu W\} \cdot \nabla \times u$$

となることから

$$\begin{aligned} u \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\nabla \cdot [ \{(\omega \times u) + \nu W\} \times u ] - \{(\omega \times u) + \nu W\} \cdot \omega \\ &= -\nabla \cdot [ \{(\omega \times u) + \nu W\} \times u ] - \nu W \cdot \omega \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.51) 式と (2.53) 式の和をとり、両辺を体積積分して右辺に Gauss の発散定理を適用すると

$$\int \frac{\partial}{\partial t} (u \cdot \omega) d^3x = - \int [ \{(\omega \times u) + \nu W\} \times u ] dS - 2 \int \nu \omega \cdot W d^3x$$

になる。上式右辺の面積分は、渦度が有限の領域に存在する場合 0 になるので

$$\frac{dH}{dt} = -2\nu \int \omega \cdot (\nabla \times \omega) d^3x$$

を導くことができる。この関係より、非粘性流体ではヘリシティは一定であることが明かである。なお、右辺の積分

$$H_S = \int \omega \cdot (\nabla \times \omega) d^3x$$

はスーパーヘリシティと呼ばれる量である。

本計算方法におけるヘリシティを求める手順は、先に求めたエネルギーおよびエントロフィと同様である。

$$\begin{aligned} H &= \int \sum_a u^a(x) \cdot \sum_a \omega^a(x) d^3x \\ &= \sum_a \int u^a(x) \cdot \omega^a(x) d^3x + \sum_{a, \beta}' \int u^a(x) \cdot \omega^\beta(x) d^3x \end{aligned} \quad (2.54)$$



右辺第2項の積分を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} &= \int \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \right\} \boldsymbol{\omega}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \left\{ \int \boldsymbol{\omega}^\beta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \right\} d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}^\beta(-\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\mathbf{k} \int dS_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}^\beta(-\mathbf{k})\end{aligned}$$

ここで

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}^\beta(-\mathbf{k}) \quad (2.55)$$

とすると

$$\int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}^\beta(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

同様に

$$F_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}^\alpha(-\mathbf{k}) \quad (2.56)$$

$$\int \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}^\alpha(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty F_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

としてさらに

$$F_0(\mathbf{k}) = \sum_a F_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}), \quad F_{\text{int}}(\mathbf{k}) = \sum_{a, \beta}' F_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$$

とおくと、ヘリシティは

$$\begin{aligned}H &= \int_0^\infty F(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \\ F(\mathbf{k}) &= F_0(\mathbf{k}) + F_{\text{int}}(\mathbf{k})\end{aligned} \quad (2.57)$$

の様に計算される。(2.55)式に(2.37)式と(2.49)式を代入すると

$$F_0(\mathbf{k}) = 0$$

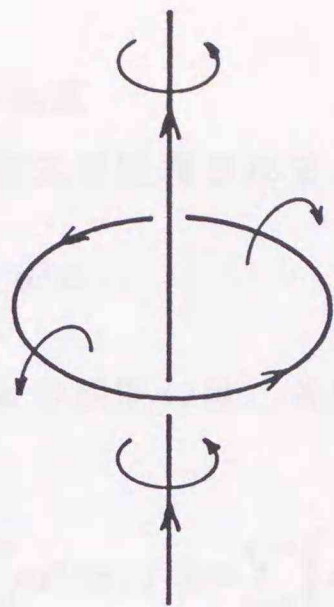


$$F_{\text{int}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} \sigma_{\alpha} \sigma_{\beta} K_1(a^{1/2} \sigma_{\alpha} \mathbf{k}) K_1(a^{1/2} \sigma_{\beta} \mathbf{k})$$

$$\times \frac{k^2}{r_{\alpha\beta}^2} \left( \frac{\sin(k r_{\alpha\beta})}{r_{\alpha\beta}} - \cos(k r_{\alpha\beta}) \right) (\boldsymbol{\gamma}^{\alpha} \times \boldsymbol{\gamma}^{\beta}) (\mathbf{x}^{\alpha} - \mathbf{x}^{\beta})$$

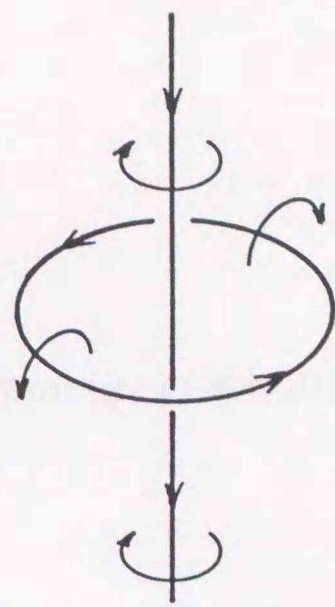
となる（付録Ⅵ参照）。





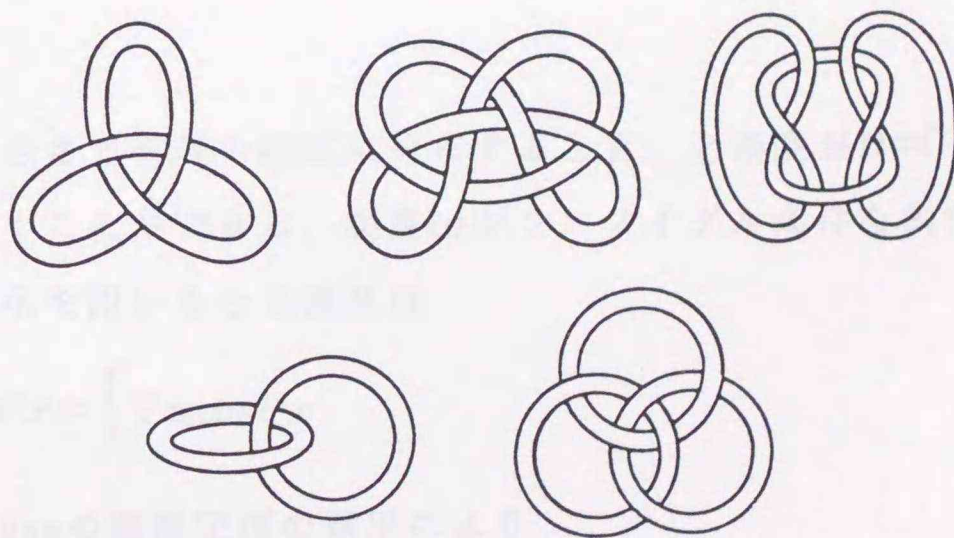
$H > 0$

(a)



$H < 0$

(b)



$H \neq 0$

(c)

図2.6 渦の絡み合いとヘリシティ



#### 2-2-4 全渦度

全渦度は次式で定義される。

$$\Omega = \int \omega \, d^3x$$

任意の点  $x$  の渦度  $\omega$  は、各渦要素の  $x$  に対する渦度分布  $\omega^a(x)$  の寄与の総和であるから

$$\Omega = \int \sum_a \omega^a(x) \, d^3x = \sum_a \int \omega^a(x) \, d^3x$$

この式に渦度分布  $\omega^a(x)$  を与える(2.11)式を代入すると

$$\Omega = \sum_a \int \frac{1}{\sigma_a^3} p\left(\frac{|x-x^a|}{\sigma_a}\right) \gamma^a \, d^3x = \sum_a \gamma^a \int \frac{1}{\sigma_a^3} p\left(\frac{|x-x^a|}{\sigma_a}\right) \, d^3x$$

であるから、関数  $p$  の条件(2.12)式を考慮することによって

$$\Omega = \sum_a \gamma^a \quad (2.58)$$

となる。

渦度が有限の大きさで有限の領域に分布するとき、全渦度が  $\Omega=0$  となることは次のようにして導くことができる。渦度  $\omega$  がソレノイダル条件を満たすことを考慮し、テンソル表示を用いると全渦度は

$$\Omega = \Omega_i = \int \omega_i \, d^3x = \int \nabla_{x_i} \omega \, d^3x \quad (2.59)$$

と変形できる。Gaussの発散定理の適用により

$$\Omega = \int x_i \omega \cdot n \, dS \quad (2.60)$$

となる。ここで、 $n$  は面素  $dS$  の法線方向単位ベクトルである。

また、全渦度の時間変化は、Helmholtzの渦度方程式の両辺を体積積分することにより求められる (Tsinober & Levich 1983)。



$$\int \frac{D\omega}{Dt} d^3x = \int (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} d^3x \quad (2.61)$$

右辺の被積分関数は渦度 $\omega$ がソレノイダル条件を満たすので

$$(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \omega_j) = \nabla (u_i \omega)$$

と変形できる。上式を(2.61)式に代入し、Gaussの発散定理を適用すると

$$\frac{d}{dt} \int \omega_i d^3x = \int u_i \omega \cdot \mathbf{u} dS$$

となる。渦度が有限の領域に存在する場合は右辺の面積分は0であるから、全渦度は時間によらず一定の不変量となる。

#### 2-2-5 運動量

運動量は次の式で定義される(橋本 1985)。

$$\frac{I}{\rho} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \omega d^3x$$

この式より全渦度の場合と同様の変形を行う。

$$\frac{I}{\rho} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \sum_a \omega^a(\mathbf{x}) d^3x = \sum_a \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \omega^a(\mathbf{x}) d^3x$$

より

$$\frac{I^a}{\rho} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \omega^a(\mathbf{x}) d^3x$$

とおき、以下では $I^a$ を求める。まず

$$\frac{I^a}{\rho} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x}^a \times \omega^a(\mathbf{x}) d^3x + \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times \omega^a(\mathbf{x}) d^3x$$

と変形する。(2.11)式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{I^a}{\rho} = & \frac{1}{2} \mathbf{x}^a \times \gamma^a \int \left\{ \frac{1}{\sigma_a^{\frac{3}{2}}} p \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^a|}{\sigma_a} \right) \right\} d^3x \\ & + \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times \left\{ \frac{1}{\sigma_a^{\frac{3}{2}}} p \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^a|}{\sigma_a} \right) \right\} \gamma^a d^3x \end{aligned}$$



と書くことができる。ここで  $r = (x - x^\alpha) / \sigma_\alpha$  とすれば、(2.12)式の条件により上の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{I^\alpha}{\rho} &= \frac{1}{2} x^\alpha \times \gamma^\alpha + \frac{1}{2} \sigma_\alpha \int r \times p(r) \gamma^\alpha d^3 r \\ &= \frac{1}{2} x^\alpha \times \gamma^\alpha - \frac{1}{2} \gamma^\alpha \times \sigma_\alpha \int r p(r) d^3 r \end{aligned}$$

第2項に現れる積分を

$$J = \int r p(r) d^3 r \quad (2.62)$$

とする。関数  $p$  は球対称な性質を持つので次のような変形が可能である

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{r}{r} r p(r) d^3 r \\ &= \int \frac{r}{r} dS_r \int_0^\infty r p(r) dr \end{aligned} \quad (2.63)$$

ここで  $d^3 r = dr dS_r$  とおいた。  $dS_r$  は半径  $r$  上の面素を表す。(2.63)式の第1の積分は曲面  $S_r$  が閉曲面のときは0である。第2の積分は有限な値をとるので  $J=0$  である。したがって、渦要素  $\alpha$  に関しては

$$\frac{I^\alpha}{\rho} = \frac{1}{2} x^\alpha \times \gamma^\alpha$$

となり、運動量はこれらの総和をとった

$$\frac{I}{\rho} = \frac{1}{2} \sum_\alpha x^\alpha \times \gamma^\alpha \quad (2.64)$$

で表される。

#### 2-2-6 角運動量

角運動量は

$$\frac{A}{\rho} = \frac{1}{3} \int x \times (x \times \omega) d^3 x \quad (2.65)$$

で定義される(橋本 1985)。運動量の場合と同様に



$$\frac{A}{\rho} = \frac{1}{3} \sum_a \int \mathbf{x} \times \{ \mathbf{x} \times \omega^a(\mathbf{x}) \} d^3 \mathbf{x}$$

より

$$\frac{A^a}{\rho} = \frac{1}{3} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \omega^a) d^3 \mathbf{x} \quad (2.66)$$

とする。ここで  $\omega^a = \omega^a(\mathbf{x})$  である。次に、被積分関数を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \omega^a) &= \mathbf{x}^a \times (\mathbf{x} \times \omega^a) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times (\mathbf{x} \times \omega^a) \\ &= \mathbf{x}^a \times (\mathbf{x}^a \times \omega^a) + \mathbf{x}^a \times \{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times \omega^a \} \\ &\quad + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times (\mathbf{x}^a \times \omega^a) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times \{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times \omega^a \} \end{aligned} \quad (2.67)$$

(2.66)式を

$$3 \frac{A^a}{\rho} = \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_1 + \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_2 + \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_3 + \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_4$$

とおき、(2.67)式の第1～4項に対応する体積積分の計算方法を以下に示す。

(A) 第1項

(2.11)式を代入することにより

$$\begin{aligned} \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_1 &= \int \mathbf{x}^a \times \mathbf{x}^a \times \omega^a d^3 \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^a \times \mathbf{x}^a \times \gamma^a \int p(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \end{aligned}$$

ただし  $\mathbf{r} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) / \sigma_a$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  である。(2.12)式より

$$\left( \frac{A^a}{\rho} \right)_1 = \mathbf{x}^a \times \mathbf{x}^a \times \gamma^a$$

(B) 第2項

$$\begin{aligned} \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_2 &= \int \mathbf{x}^a \times \{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}^a) \times \omega^a \} d^3 \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^a \times \left\{ \int (\sigma_a \mathbf{r}) \times \gamma^a p(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \right\} \end{aligned}$$



$$= -x^a \times \left\{ \gamma^a \times \sigma_a \int r p(r) d^3 r \right\}$$

最後の式の積分は(2.62)式のものと同じであるから 0 である。よって

$$\left( \frac{A^a}{\rho} \right)_2 = 0$$

(C) 第 3 項

$$\begin{aligned} \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_3 &= \int (x - x^a) \times (x^a \times \omega^a) d^3 x \\ &= \int \sigma^a r \times \{ x^a \times \gamma^a p(r) \} d^3 r \\ &= - (x^a \times \gamma^a) \times \sigma^a \int r p(r) d^3 r \end{aligned}$$

より最後の式の積分は 0 となるので

$$\left( \frac{A^a}{\rho} \right)_3 = 0$$

(D) 第 4 項

この項に対する積分は、関数  $p$  の球対称性を利用して以下のように変形する。

$$\begin{aligned} \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_4 &= \int (x - x^a) \times \{ (x - x^a) \times \omega^a \} d^3 x \\ &= \sigma_a^2 \int r \times \{ r \times \gamma^a p(r) \} d^3 r \end{aligned}$$

ここで、ベクトル解析の公式を適用することによって被積分関数は

$$r \times \{ r \times \gamma^a p(r) \} = -r^2 \gamma^a p(r) + \{ (r \cdot \gamma^a p(r)) r \} \quad (2.68)$$

のように変形できるので

$$\begin{aligned} \left( \frac{A^a}{\rho} \right)_4 &= \sigma_a^2 \int \left\{ -\gamma^a r^2 p(r) + \frac{r}{r} \left( \frac{r}{r} \cdot \gamma^a \right) r^2 p(r) \right\} d^3 r \\ &= \sigma_a^2 \int \left\{ -\gamma^a + \frac{r}{r} \left( \frac{r}{r} \cdot \gamma^a \right) \right\} dS_r \int_0^\infty r^2 p(r) dr \quad (2.69) \end{aligned}$$

上式の面積分の部分を最初に計算する。まず



$$J_1 = - \int \gamma^\alpha dS_r$$

とするとこの積分は

$$J_1 = -\gamma^\alpha \int dS_r = -4\pi r^2 \gamma^\alpha$$

である。同様に

$$J_2 = \int \frac{r}{r} \left( \frac{r}{r} \cdot \gamma^\alpha \right) dS_r$$

とにおいてこの計算を行う。Gaussの発散定理を適用することによって

$$J_2 = \frac{1}{r} \int \frac{r}{r} (r \cdot \gamma^\alpha) dS_r = \frac{1}{r} \int \nabla (r \cdot \gamma^\alpha) dV_r$$

と変形できる。上の式は、以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{r} \int \gamma^\alpha dV_r = \frac{1}{r} \gamma^\alpha \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi r^2 \gamma^\alpha \end{aligned}$$

したがって、(2.69)式は

$$\begin{aligned} \left( \frac{A^\alpha}{\rho} \right)_4 &= \sigma_\alpha^2 (J_1 + J_2) \int_0^\infty r^4 p(r) dr \\ &= -\frac{8}{3} \pi \sigma_\alpha^2 \gamma^\alpha \int_0^\infty r^4 p(r) dr \end{aligned}$$

となる。

以上(A)～(D)の計算結果により、渦要素 $\alpha$ に関する角運動量は

$$\frac{A^\alpha}{\rho} = \frac{1}{3} x^\alpha \times (x^\alpha \times \gamma^\alpha) - \frac{8}{9} \pi \sigma_\alpha^2 \gamma^\alpha \int_0^\infty r^4 p(r) dr$$

と書くことができ、したがって流れ場全領域での角運動量は

$$\frac{A}{\rho} = \frac{1}{3} \sum_a x^\alpha \times (x^\alpha \times \gamma^\alpha) - \frac{8}{9} \pi \int_0^\infty r^4 p(r) dr \sum_a \sigma_\alpha^2 \gamma^\alpha \quad (2.70)$$



と求められる。上式の角運動量の第2項に含まれる積分は、本研究で採用した(2.11)式の渦度分布関数 $p(r)$ については対数的に発散する。したがって、第3章、第4章に示す角運動量 $A$ はこの項を省略し

$$\frac{A}{\rho} = \frac{1}{3} \sum_a \mathbf{x}^a \times \mathbf{x}^a \times \gamma^a$$

として計算した。ただし、関数 $p(r)$ として Winckelmans & Leonard (1988) によって提案されている(2.11)式より高次の(2.14)式を採用すれば、(2.70)式の積分は有限となる(第4章4-2参照)。



図1-1 渦管のモデル。中心に渦核があり、その周囲に渦度分布関数 $p(r)$ が定義される。渦管の境界は渦シートで示される。



### 第3章 渦の相互干渉

渦度 $\omega$ は、ソレノイダル条件  $\nabla \cdot \omega = 0$  を満たす。この条件は、流れ場中の渦糸に自由端がないことを示している。すなわちこの条件を満たす渦糸の形状として、図3.1(a)のように対象としている領域の境界から境界へ伸びているものと、図3.1(b)のようにその領域内で閉じた形をとるものの2つのケースが考えられる。前者で最も単純な形状のものは直線渦糸で、後者のそれは円形渦輪である。なお、一般に渦糸 (vortex filament) とは厳密にはその断面積が 0 のものを指すが、本論文では断面積が 0 でない、例えば粘性渦のような渦管 (vortex tube) と呼ばれているものも含めて渦糸と呼ぶことにする。

建築物周囲の流れや工学的諸装置等に関連する流れでは、噴流、後流、混合層などのせん断乱流が多くみられる。これらのせん断乱流中には組織的渦構造が存在することが知られている (Hussain 1986)。組織的渦構造が下流へ推移するのに従いそれらの相互作用によって、より高波数の不規則乱流成分を形成すると考えられる。また、実際にはせん断乱流の主流は、ほとんどの場合において乱れを含む。これらの主流乱れおよび組織的渦構造を表す簡単な渦のモデルとして、円

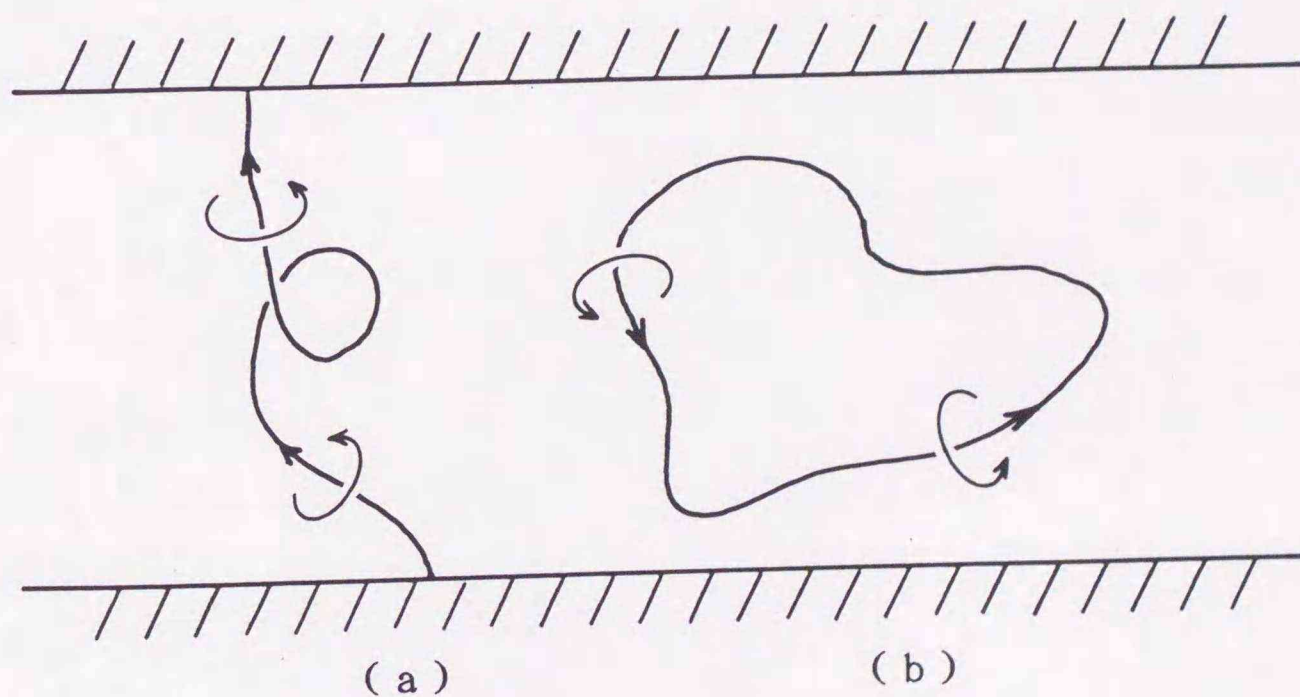


図3.1 渦度のソレノイダル条件を満たす渦糸の形状  
(a)渦糸, (b)渦輪。



形渦輪および直線渦糸があげられる。よって、これらの相互干渉を調べることは、せん断乱流中の組織的渦構造の相互干渉、あるいは主流乱れのせん断乱流に対する影響を調べる基礎的な研究とみなすことができる。

本章では、最初に円形渦輪に必要とされる渦要素数を検討した後、乱流を構成する基本要素を直線渦糸あるいは円形渦輪とみなし、円形渦輪と直線渦糸、並進する円形渦輪と円形渦輪、正多面体上に置かれた4～8個の円形渦輪の相互干渉を、3次元離散渦法によって計算した結果を示し、力学的特性量の時間変化についても言及する。



### 3-1 円形渦輪の渦要素数

まず、円形渦輪を精度良く表現するのに最低必要な渦要素数を決定しなければならない。このことは、理論的に求められる円形渦輪の移動速度と、渦要素の配列によって表された円形渦輪の移動速度を比較することによって行う。以下にその詳細を述べる。

渦核半径  $\sigma_0$ 、渦輪半径  $R$ 、循環  $\Gamma$  の円形渦輪 (図3.2) の移動速度  $V_R$  は

$$V_R = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[ \ln \frac{8R}{\sigma_0} - \frac{1}{2} + \int_0^{\sigma_0} \chi^2(r) \frac{dr}{r} + \int_{\sigma_0}^{\infty} \{\chi^2(r) - 1\} \frac{dr}{r} \right] \quad (3.1)$$

で近似できることが示されている (Leonard 1985)。ここで

$$\chi(r) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^r 2\pi y \omega(y) dy$$

である。 $\omega$  は渦度分布を与える関数で、渦度分布として2次の Gauss分布を仮定するとき

$$\omega(y) = \frac{\Gamma}{\pi \sigma_0^2} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma_0^2}\right)$$

となるから、(3.1)式は

$$V_R = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R}{\sigma_0} + 0.558 \right) \quad (3.2)$$

である (Stanaway et al. 1986, Knio & Ghoniem 1990)。(3.2)式は、渦核半径が小さい範囲 ( $\sigma_0/R < 0.25$ ) では、Norbury (1973) によって求められた厳密解に一致する漸近解であるので、その範囲で有効な式である。

円形渦輪を構成する渦要素数  $N_R$  および渦核半径を系統的に変化させて、本研究の離散渦法による円形渦輪の移動速度  $U_R$  を求め、(3.2)式で求められる移動速度  $V_R$  と比較する。図3.3は渦核半径  $\sigma_0/R$  と円形渦輪の移動速度との関係を示したものである。渦輪を構成する渦要素数が少ない場合、例えば  $N_R = 30$  のときには、渦核半径が  $\sigma_0/R > 0.25$  で漸近解と一致する。しかし、 $\sigma_0/R > 0.25$  は厳密解に漸近解が一致する範囲ではないので、円形渦輪を構成する渦要素数は  $N_R = 30$  では不十分であることがわかる。また、円形渦輪の渦要素数を一定にすると、渦核



半径を小さくするほど漸近解との差が大きくなる。したがって、渦核半径を小さくする場合には、より多くの渦要素を必要とする。図3.4は、横軸を円形渦輪を構成する渦要素数、縦軸を渦輪の移動速度として、これらの関係を示したものである。  $\sigma_0/R$  を小さくする程、漸近解と一致する移動速度を得るためには渦要素数を多くしなければならない。渦輪の移動速度を十分正確に近似できる最低の渦要素数を  $N_{min}$  とすると、図3.4より  $N_{min}$  を決定することができる。例えば、  $\sigma_0/R = 0.20$  のときは  $N_{min} \approx 40$ 、  $\sigma_0/R = 0.10$  のときは  $N_{min} \approx 70$  である。

離散渦法における誤差  $e_r$  は

$$e_r \leq c_1 \left( \frac{h}{\sigma} \right)^m + c_2 \sigma^n \quad (3.3)$$

で表される (Anderson & Greengard 1985, Calfisch 1989, Winckelmans & Leonard 1989)。ここに  $h$  は隣接する渦要素間距離、  $c_1$  と  $c_2$  は定数である。

(3.3)式より、誤差を小さくするためには  $h/\sigma < 1$  の条件を満たす必要がある。このことは渦要素の渦核が十分に重なり合うように、渦要素の大きさを設定しなければならないことを示している。初期状態では  $h = l_0$  ( $l_0$ : 初期渦要素長さ) と見なすことができ、  $h/\sigma = l_0/\sigma_0$  である。  $l_0/\sigma_0$  および  $\sigma_0/R$  が与えられたときの円形渦輪の構成要素数  $N_R$  は

$$N_R = \frac{2\pi}{(l_0/\sigma_0)(\sigma_0/R)}$$

となる。この式から、  $l_0/\sigma_0 = 1$  を満足するのに必要な渦要素数は、  $\sigma_0/R = 0.20$  のとき  $N_R = 32$ 、  $\sigma_0/R = 0.10$  のとき  $N_R = 63$  である。円形渦輪の移動速度を精度良く近似できる渦要素数をとれば、(3.3)式の条件も満たすことがわかる。Knio & Ghoniem (1990) は、計算精度を保つためには  $\sigma_0/l_0 \geq 2$  ( $l_0/\sigma_0 \leq 0.5$ ) が必要であるとしている。本論文では、第5章のように多数の渦要素を必要とする計算では、計算時間を節約するために  $\sigma_0/l_0 \geq 2$  の条件を満たしていない場合もある。しかし、  $V_R$  と  $U_R$  の差を十分に小さいと見なすことができる渦要素数を用いている。



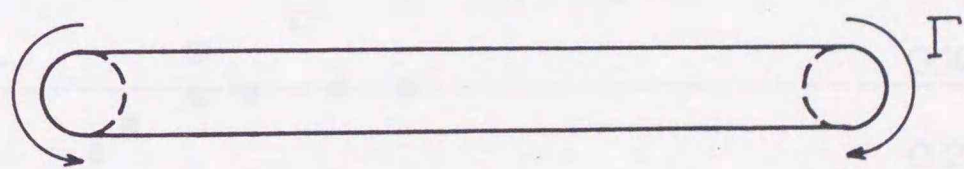
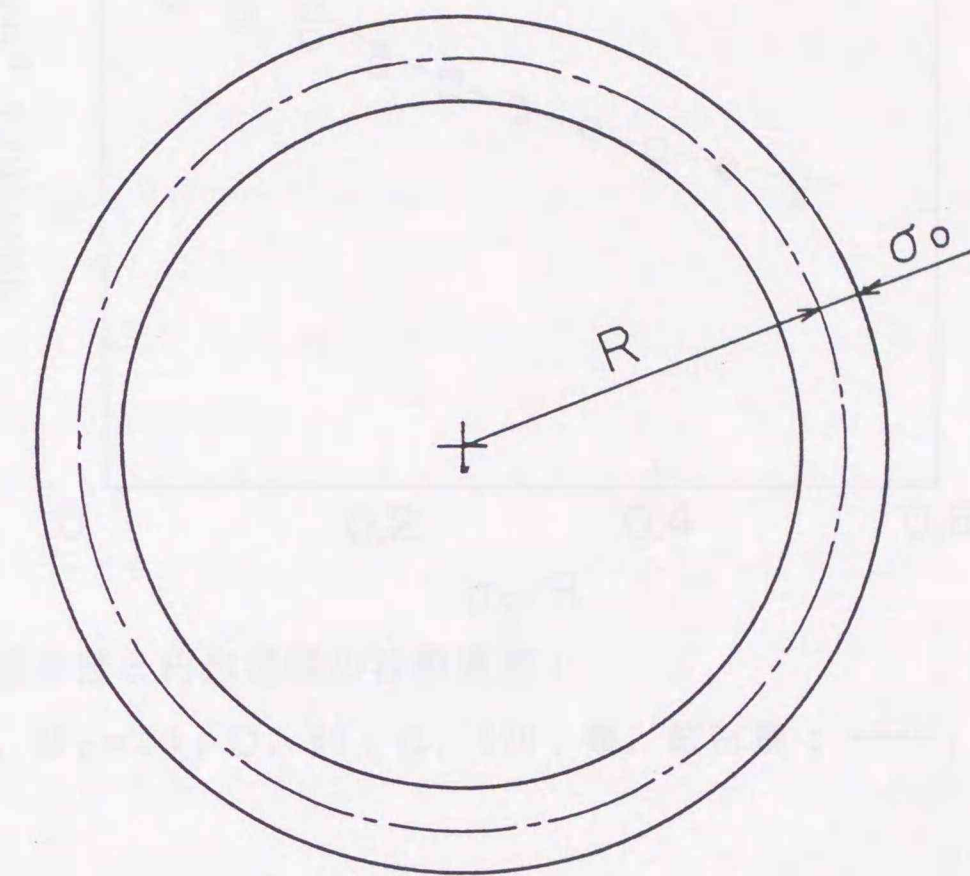


圖3.2 円形渦輪



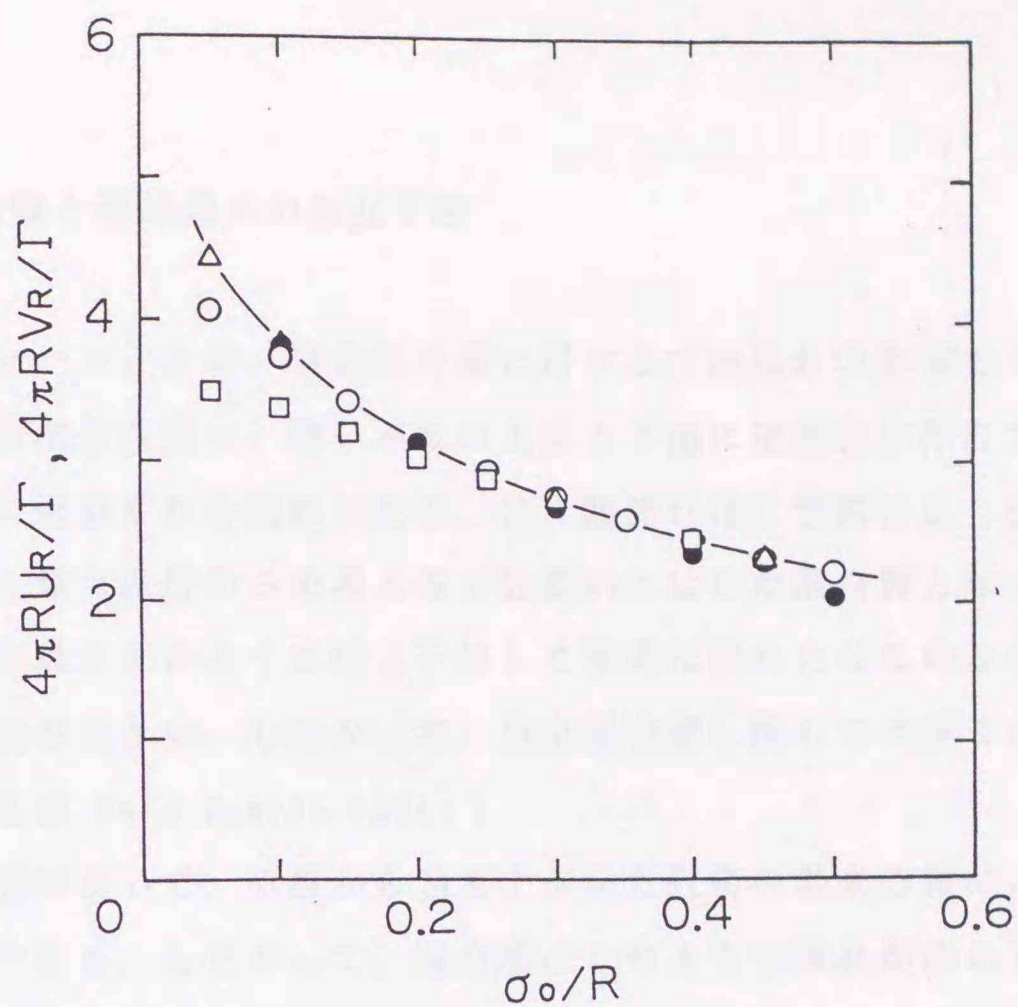


図3.3 渦核半径と円形渦輪の移動速度：

□,  $N_R = 30$  ; ○, 60 ; △, 120 ; ●, 厳密解 ; —, 漸近解

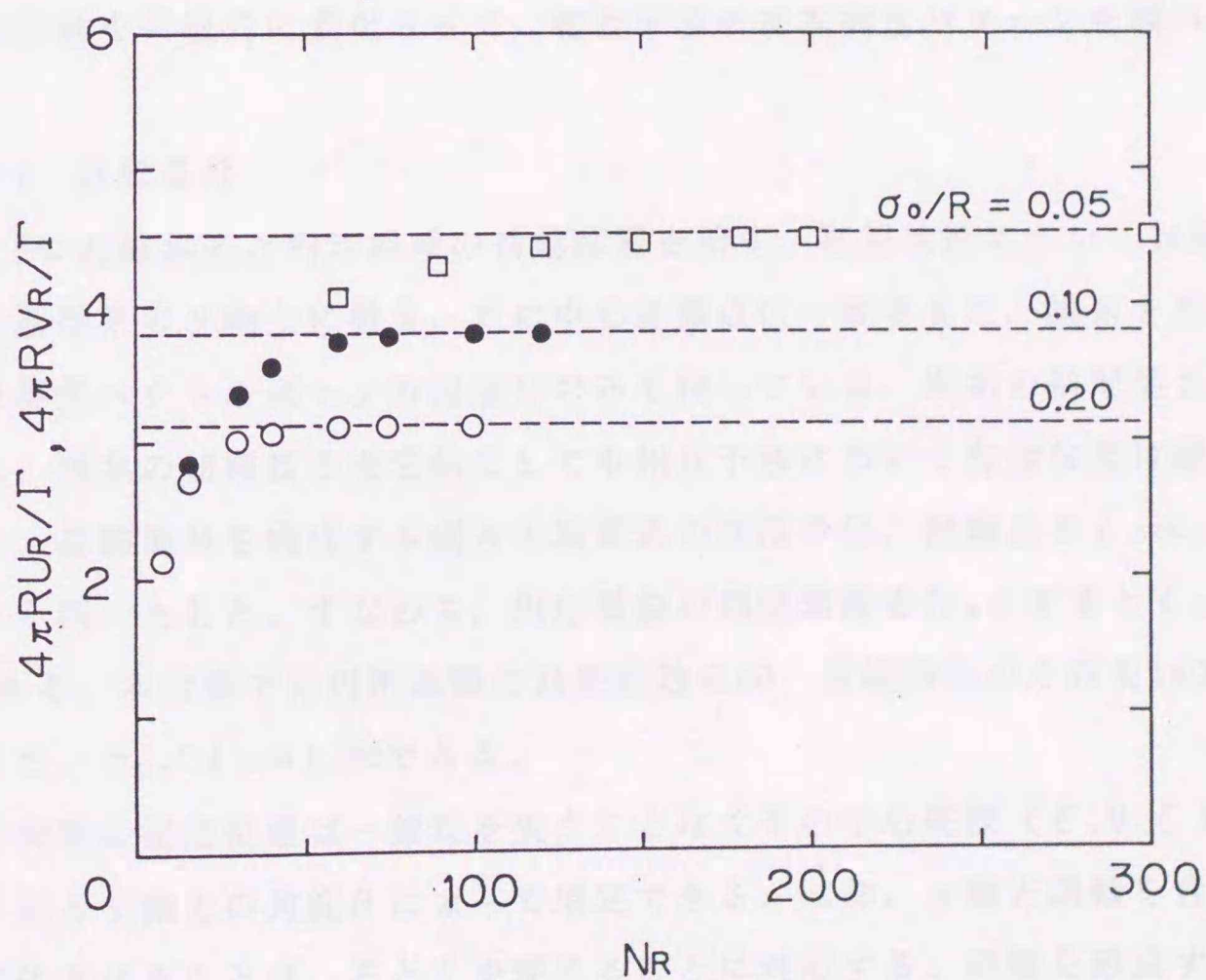


図3.4 円形渦輪の構成渦要素数と移動速度：

○,  $\sigma_0/R = 0.20$  ; ●, 0.10 ; □, 0.05



### 3-2 円形渦輪と直線渦糸の相互干渉

本シミュレーションは、自由混合層に対する主流乱れの影響をモデル化したものである。自由混合層は、薄い平板の上面と下面に速度差が存在する場合、平板後端の下流に形成される流れである。はく離流れは工学的に広く見られる流れであるが、はく離点近傍のみを考えると近似的には自由混合層となっている。自由混合層の中の渦がどのように相互干渉して複雑な流れとなるのかを調べることは、工学的な意義が大きい。したがって、自由混合層に関しては多くの報告がなされている（例えば Ho & Huerre 1984）。

自由混合層において、平板から巻き上がった直後の渦糸の軸は、スパン方向にほぼ直線的である。したがって、混合層はこのような渦糸が流れ方向に適当な間隔に配列しているものと考えられる。実際の流れでは主流に乱れを含むので、これをモデル化したものが、円形渦輪である。Kiya et al. (1986) によって、混合層中の渦と渦対の相互干渉について報告されているが、円形渦輪と直線渦糸の相互干渉はこれを3次元に拡張したものといえる。本計算では直線渦糸と円形渦輪の相対位置を系統的に変化させて、相互干渉の基本的なパターンを調べた。

#### 3-2-1 計算条件

図3.5に直線渦糸と円形渦輪の初期配置を示す。初期状態においては直線渦糸を、 $x y z$ 座標系の $y$ 軸上に置き、その中心を原点に一致させた。渦糸を形成する渦要素の渦度ベクトルは $+y$ 方向成分のみを持っている。渦糸の初期長さは $16.8R$ である。渦糸の初期長さを2倍にしても相互干渉において有意な差は認められなかった。直線渦糸を構成する個々の渦要素の初期半径、初期長さ $l_0$ は、円形渦輪のそれと同一とした。すなわち、円形渦輪の渦要素数を $N_R$ とすると $l_0 = 2\pi R / N_R$ である。本計算では円形渦輪の渦要素数を60、直線渦糸のそれを160としている。なお、 $\sigma_0 / l_0 = 1.90$ である。

円形渦輪の初期位置は一般性を失うことなくその中心座標 $(\xi, 0, \zeta)$ 、渦輪を含む平面と $y$ 軸との角度 $\theta$ によって規定できる。なお、 $x$ 軸と渦輪を含む面の角度を変化させることは、 $\xi$ と $\zeta$ を変えることに対応する。渦輪を形成する渦要素



の循環は，渦輪の移動方向が $-z$ 方向になるように設定している．本計算では，渦輪の中心座標と $y$ 軸との角度を

$$\zeta/R = 1.0$$

$$\xi/R = -2.3 \sim 1.0 \text{ (0.1間隔)}$$

$$\theta = 0^\circ$$

とした．また，初期渦核半径 $\sigma_0$ および時間間隔 $\Delta t$ は

$$\sigma_0/R = 0.2, 0.1$$

$$U_0 \Delta t / R = 0.00113$$

とした．ここに $U_0$ は渦輪の移動速度である．時間間隔 $\Delta t$ の間の渦輪の移動距離は渦輪半径の約 $1/1000$ であり，十分に小さいと言える．前節に述べたように， $U_0$ は渦核半径が小さいほど大きくなる傾向がある．渦輪の循環と半径によって $\Delta t$ を表すと， $\sigma_0/R = 0.2$ のとき $\Gamma \Delta t / R^2 = 0.00227$ ， $\sigma_0/R = 0.1$ のとき $\Gamma \Delta t / R^2 = 0.00185$ となる．なお，渦輪と渦糸の循環 $\Gamma$ は同一で， $\Gamma = 0.0227 \text{ m}^2/\text{s}$ である．



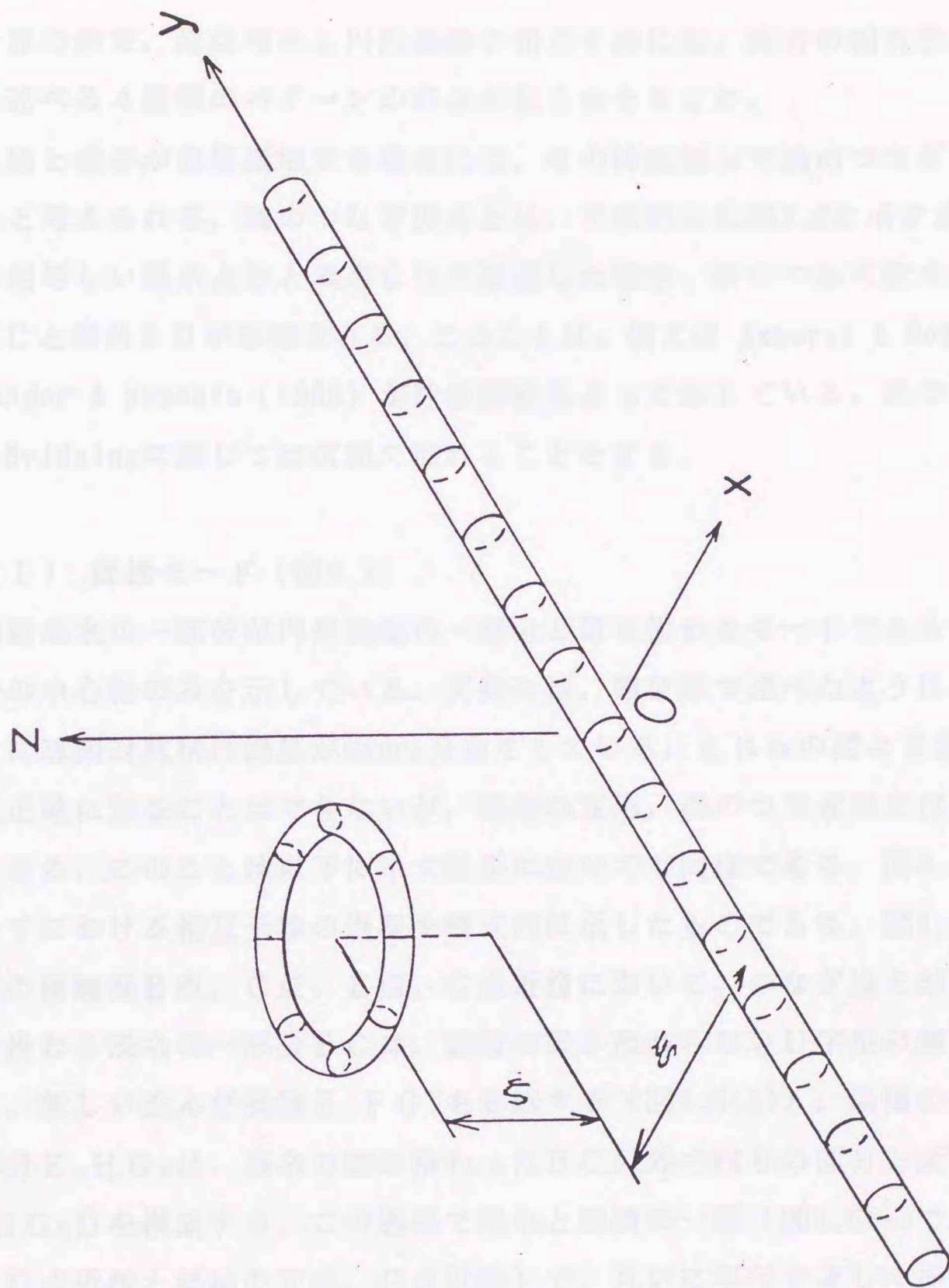


図3.5 円形渦輪と直線渦糸の初期配置



### 3-2-2 結果および考察

計算の結果，直線渦糸と円形渦輪の相互干渉には，両者の相対位置によって以下に述べる4種類のパターンの存在が明らかとなった。

渦輪と渦糸が直接接触する場合には，その接触部分で渦のつなぎ換えが起こるものと考えられる。渦のつなぎ換えとは，定性的には図3.6に示す過程である。循環が相等しい渦糸ABと渦糸CDが接近した場合，渦のつなぎ換えが起きて，渦糸ACと渦糸BDが形成される。このことは，例えば Ashurst & Meiron (1987)，Melander & Hussain (1989) が数値解析によって示している。渦のつなぎ換えの際のBridgingに関しては次節で触れることとする。

#### (I) 置換モード (図3.7)

直線渦糸の一部分が円形渦輪の一部分と置き換わるモードである。図中では渦要素の中心軸のみを示している。実際には，第2章で述べたように渦要素中心の周りに球対称状に渦度がGauss分布をしている。これらの図より渦度の分布の状況を正確に知ることはできないが，渦線の変形，渦のつなぎ換えは把握することができる。このことは以下に示す結果においても同様である。図3.8(a)(b)はこのモードにおける相互干渉の過程を模式的に示したものである。図3.8(a)の渦輪と渦糸の接触部B点，C点，E点，G点近傍において，つなぎ換えが起こっている。置き換わる渦糸の一部分BCは，渦輪の置き換わらないU字型の部EFGとつながり，新しい歪んだ渦輪 $E_1FG_1$ を形成する (図3.8(b))。渦輪の置き換えられた部分 $E_2HG_2$ は，渦糸の置き換わったBC以外の残りの部分と変形した渦糸 $A E_2HG_2D$ を構成する。この過程で渦糸と渦輪の一部 (図3.8(a)では，渦糸のB点，C点近傍と渦輪のE点，G点近傍) で，互いに平行で著しく接近した部分が発生するが，両者の符号が反対になっているので，この領域では粘性によって渦度が消去されると解釈できる。渦要素数は図3.7(a)では220，(b)では230，(c)では265，(d)では327である。図3.7の状態からさらに時刻が経過すると渦度の発散が生じ，図3.9のように渦要素が短時間で激増するので計算を継続できない。なお，図3.9における渦要素数は673である。



## (II) 合体モード (図3.10)

このモードの概略図を図3.11(a)~(c)に示す。図3.11(a)の初期状態における渦糸の一部BCと渦輪の一部EFが渦対を形成し、x方向に移動しながら著しく接近する(図3.11(b)のBCとEF)。渦対の形成に寄与しない残りの渦輪の部分EFGは、z方向の誘起速度を持たないため、渦輪はx方向に引き延ばされた形状となる。渦糸のうち渦対(BC)を形成する以外の部分(渦糸ABおよび渦糸CD)と、渦輪のうち渦対(EF)を形成する以外の部分(渦輪EGF)が、変形した渦糸 $AE_2GE_1D$ を構成すると考えられるので、このパターンを合体モードとした。図3.11(c)のBCと $E_1F_1$ は、実際の流体においてはその渦度が粘性によって打ち消し合うと予想される。

## (III) 遠隔作用モード (図3.12)

渦糸と渦輪の間で渦のつなぎ換えは起きないが、相互の誘起速度によって両者の一部分の曲率が著しく大きくなる。そして、これらの先端部分の渦要素がそれぞれの渦輪あるいは渦糸から遊離する。実際の流れではこれらの遊離した渦度は粘性によって消散するが、その過程で渦輪に攪乱を与えてその崩壊をもたらし、乱流中の高波数成分の発生に寄与する可能性が考えられる。

## (IV) 弱相互作用モード (図3.13, 図3.14)

(I)~(III)のモードに比べて初期状態における渦輪と渦糸の距離が大きいため、両者の相互作用は小さくなり、両者に顕著な変形は認められない。この小さな変形をきっかけとして、渦糸および渦輪の不安定が生じ、両者の形状に大きな変化が起こることも考えられる。しかし、本計算範囲内ではこのようなことは起こらなかった。図3.14の場合は、渦糸の誘起速度によって渦輪の進行方向が変化する。

Schwarz (1985) によって、超流動He中の円形渦輪と直線渦糸との干渉の考察がされている(図3.15)。超流動状態の流体中における渦糸および渦輪の挙動は超伝導現象と関連して重要である。本計算結果と多少異なるのは、Schwarzの計算では、初期状態において渦輪と渦糸の角度 $\theta \neq 0$ と仮定しているためである。



図3.16に $\xi/R$ および $\sigma_0/R$ と(I)~(IV)の4つのモードとの関係を示す。渦核半径を小さくとると(III)の遠隔作用モードの現れる範囲が狭くなる。渦核半径が小さいと速度を誘起する範囲が小さいことが原因であると考えられる。 $\xi/R$ の変化によっても、4つのモードが現れる $\xi/R$ の範囲は変わることが予想される。

置換モードにおけるエネルギースペクトルの分布を図3.17に、エンストロフィスペクトルの分布を図3.18に示す。図3.19(a)に直線渦糸のみが空間に存在するときのスペクトルと、円形渦輪だけが存在するときのスペクトルを示す。いずれのスペクトルも両対数グラフに表示してある。円形渦輪のスペクトルは $k \sim 10^0/R$ 近傍に最大値を持っている。このことは、渦輪半径 $R$ に対応するスケールの渦がいちばん大きなエネルギーを持っていることを示している。エネルギースペクトルの最大値を与える波数よりも低い波数では、円形渦輪のエネルギースペクトルは $E(k) \propto k$ である(Leonard 1985)。高波数側が急激に減衰しているのは、エネルギースペクトルの表示式中のベッセル関数 $K_1$ によるものである。また、直線渦糸のエネルギースペクトルは円形渦輪の場合のような最大値を持っていない。これは直線渦糸を表す渦線の曲率が0(曲率半径は $\infty$ )であるので、大きなエネルギーを保有する特定の渦スケールが無いことによると考えられる。図3.17のエネルギースペクトルにおいて、低波数側が一定の値となるが、これは直線渦糸によるものであることがわかる。これに対して高波数側の小さな凹凸は円形渦輪によるものである。渦輪と渦糸が接触するまでは、ほとんどこの分布形状に変化はみられない。両者が接触すると、渦要素の配列が不規則になるので高波数成分が大きくなる。(I)~(IV)のモードの違いによるスペクトルの分布形状の顕著な相違は認められなかった。

本計算においては、エネルギーの大きさが変化する。簡単のために2つの渦要素AとBを考え、両者の相対位置によってエネルギースペクトルがどのように変化するか調べてみることにする。渦要素AとBの渦度、渦核半径、長さが等しければ自己誘起エネルギースペクトルは

$$E_{AA}(k) = E_{BB}(k)$$

である。相互作用エネルギースペクトルは、渦要素AとBの相対位置と両者の渦度ベクトルの方向によって異なる値をとる。



(1) 渦要素 A と渦要素 B が十分に離れていれば (距離  $r_{AB} \rightarrow \infty$ )

$$E_{AB}(k) = E_{BA}(k) = 0$$

(2) 両者の渦度ベクトルが  $\omega(x^A) = \omega(x^B)$  で、距離  $r_{AB} \rightarrow 0$  のとき

$$E_{AB}(k) = E_{BA}(k) = E_{AA}(k)$$

(3) 両者の渦度ベクトルが  $\omega(x^A) = -\omega(x^B)$  で、距離  $r_{AB} \rightarrow 0$  のとき

$$E_{AB}(k) = -E_{BA}(k)$$

である。したがって、(1), (2), (3) のエネルギースペクトルをそれぞれ  $E_{(1)}$ ,  $E_{(2)}$ ,  $E_{(3)}$  とすると以下のようなになる。

$$E_{(1)} = E_{AA}(k) + E_{BB}(k) = 2E_{AA}(k)$$

$$E_{(2)} = E_{AA}(k) + E_{BB}(k) + E_{AB}(k) + E_{BA}(k) = 4E_{AA}(k)$$

$$E_{(3)} = E_{AA}(k) + E_{BB}(k) = 0$$

このように複数の渦要素の相対位置によって、渦核半径の重なり合う領域が変化して、エネルギーが多少変化する。他の力学的普遍量に対しても同様のことがいえる。



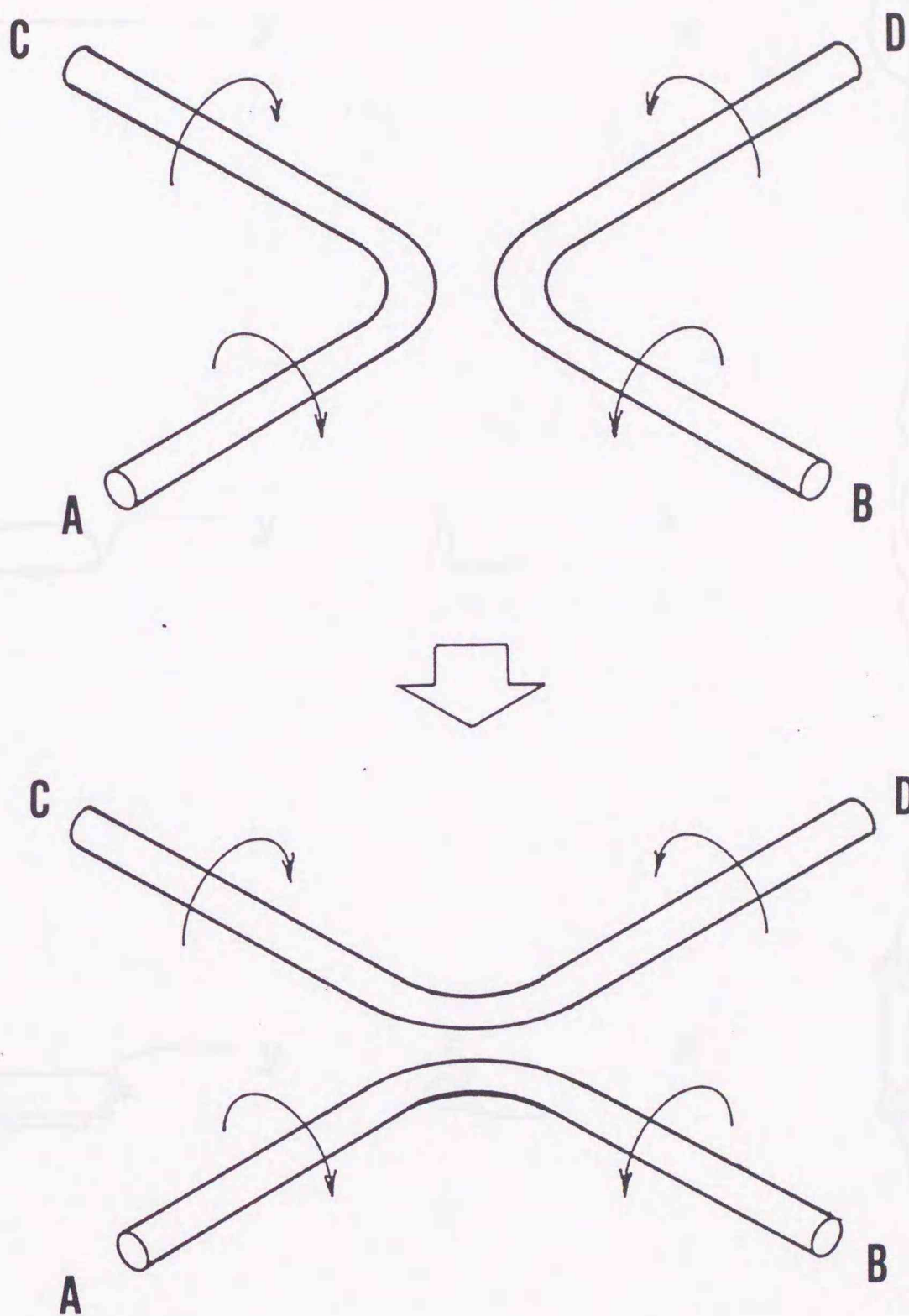


図3.6 渦のつなぎ換え



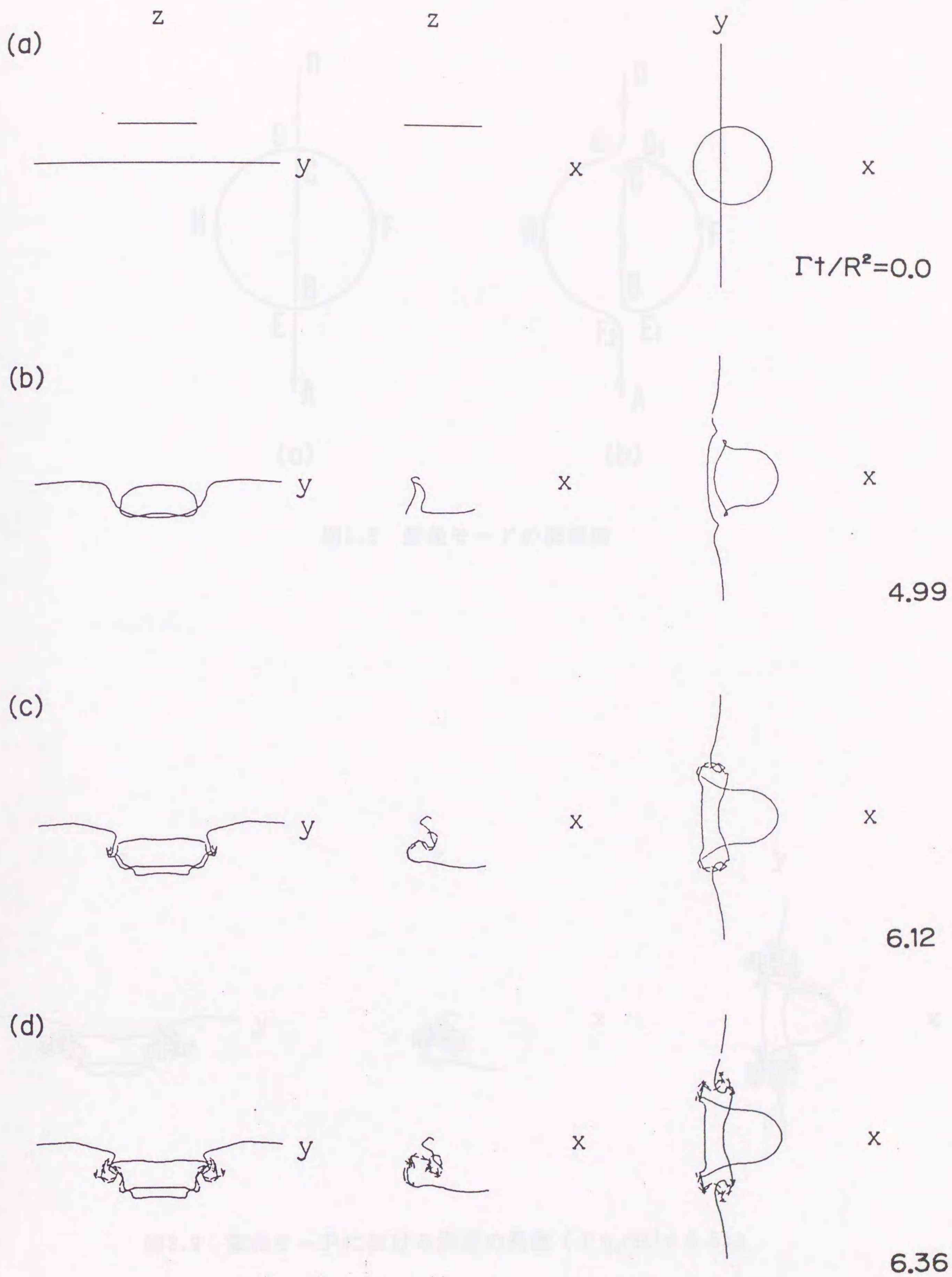


図3.7 置換モード ( $\sigma_0/R=0.20$ ,  $\xi/R=0.3$ )



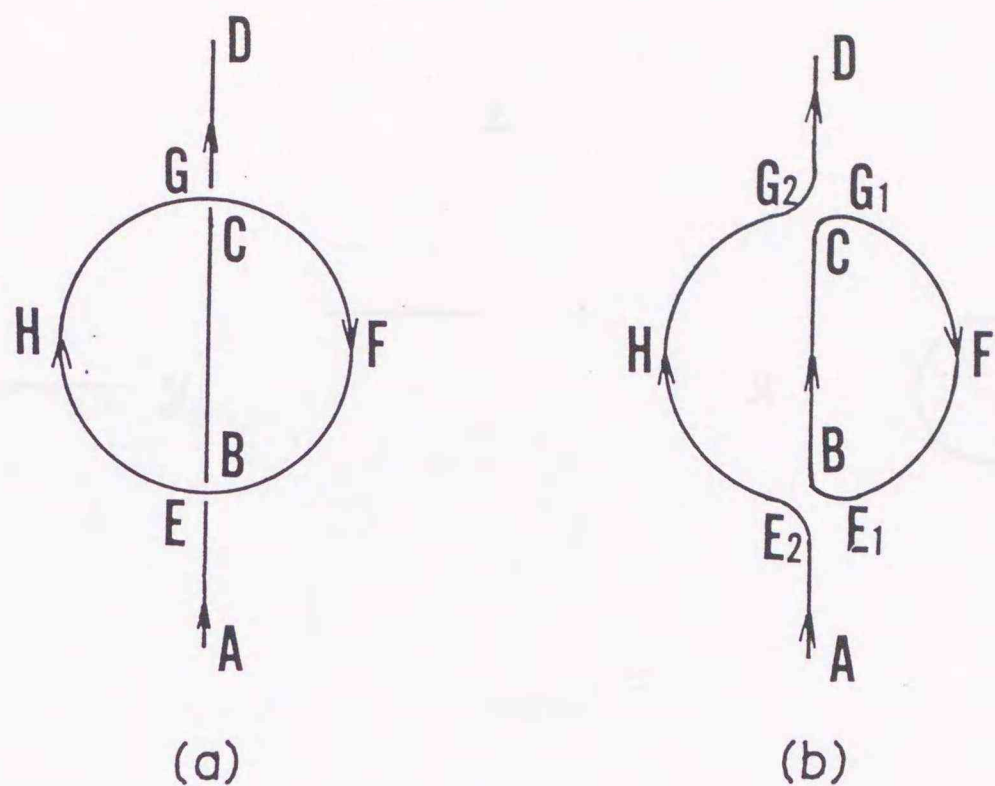


図3.8 置換モードの概略図

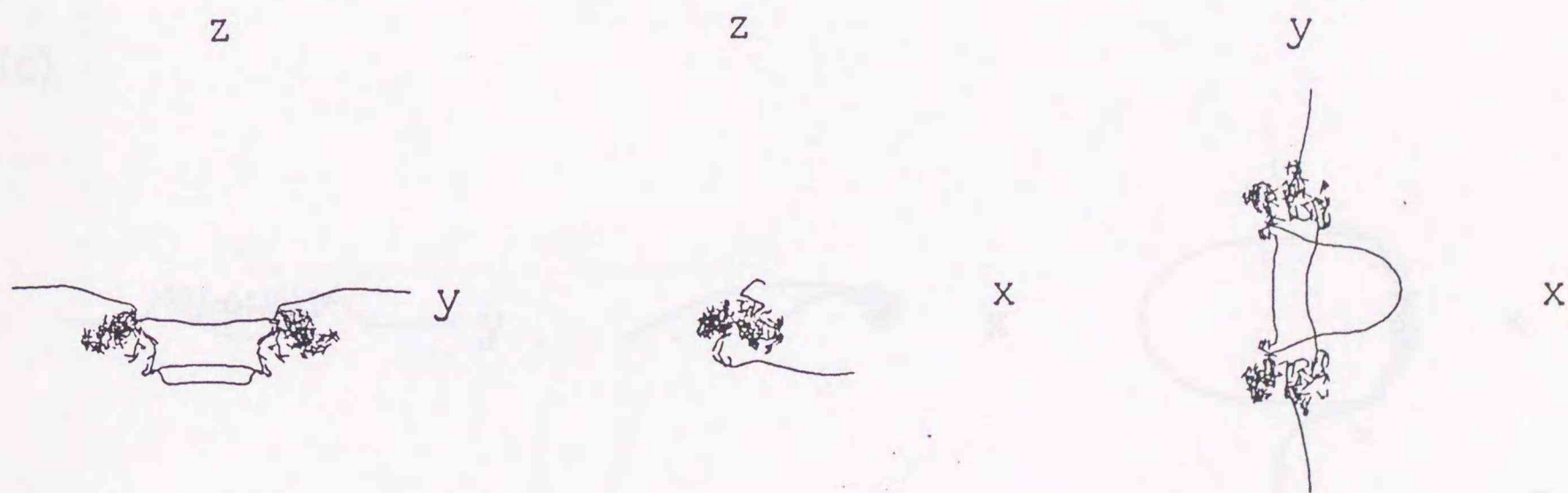


図3.9 置換モードにおける渦度の発散 ( $\Gamma t/R^2 = 6.53$ )



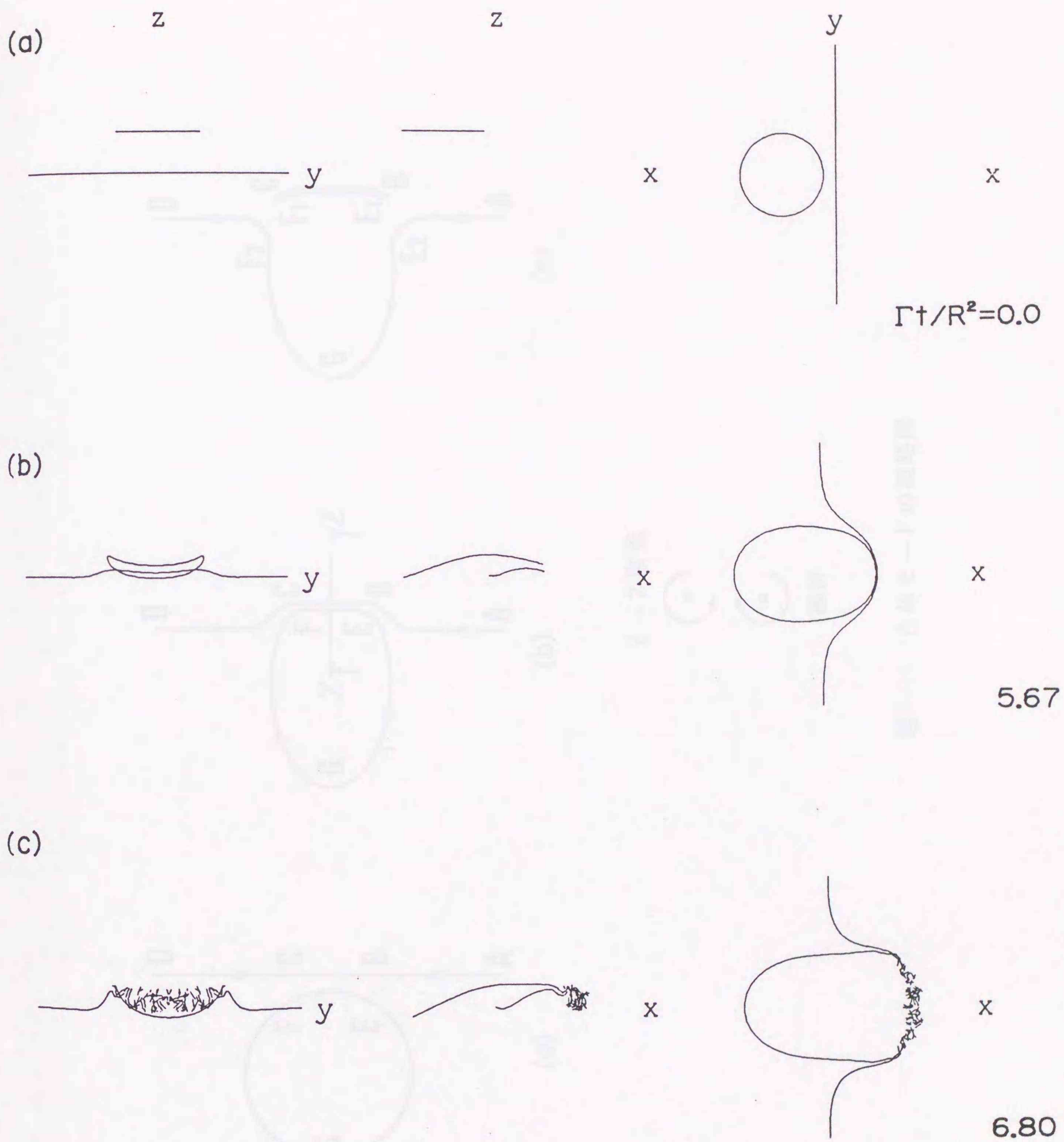
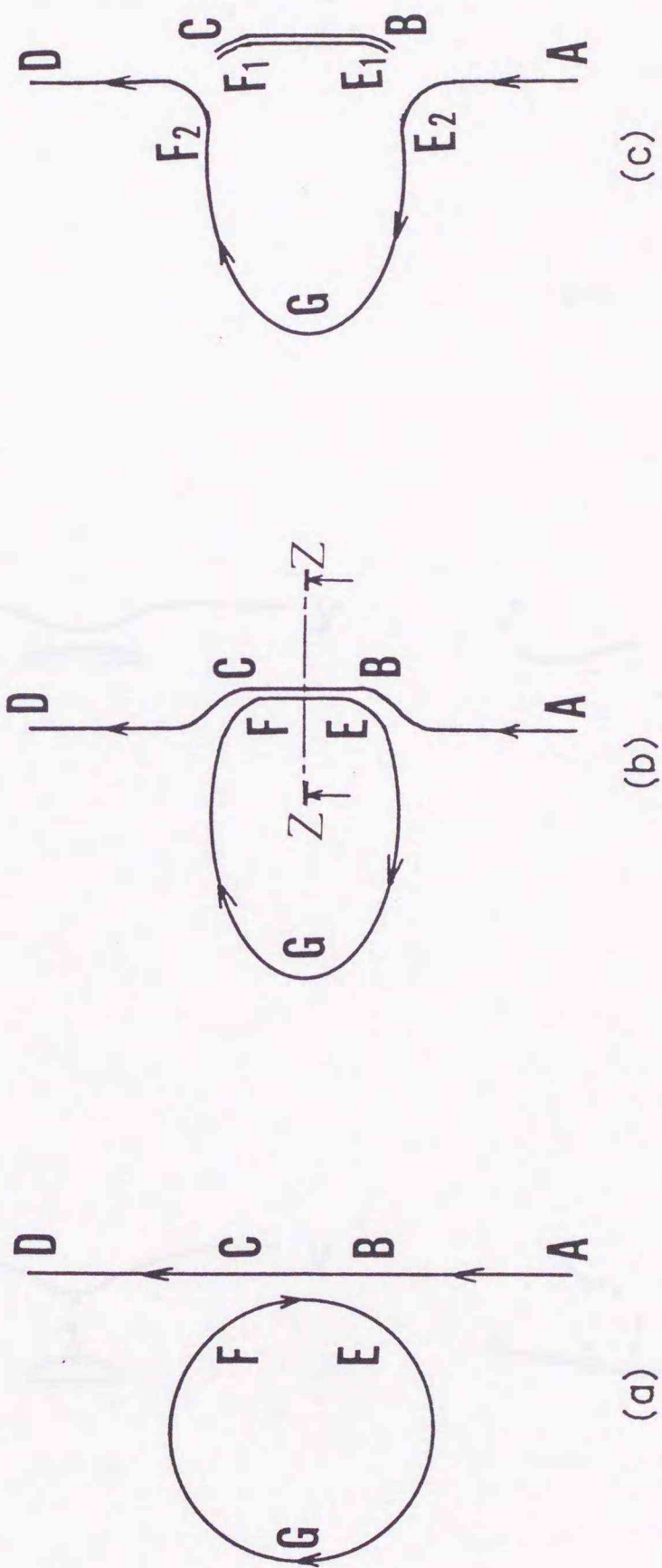
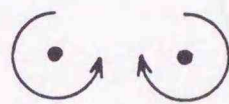


図3.10 合体モード ( $\sigma_0/R=0.20$ ,  $\xi/R=-1.3$ )





Z-Z 断面

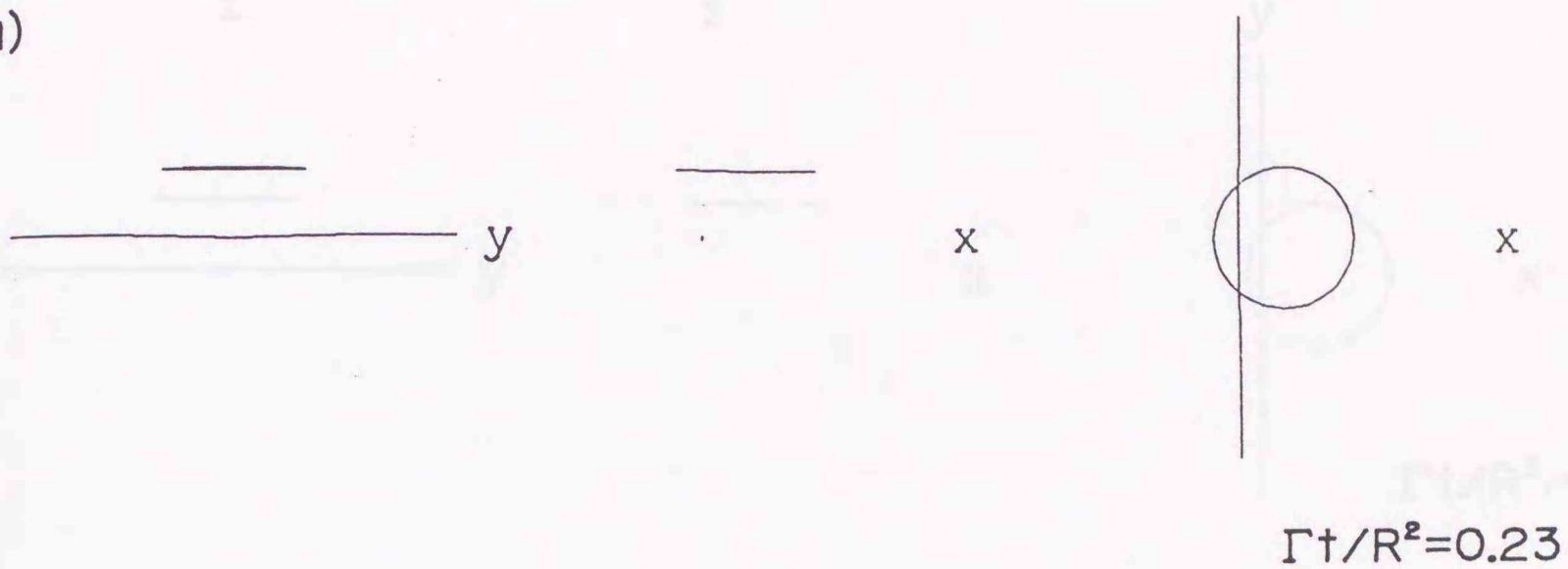


渦対

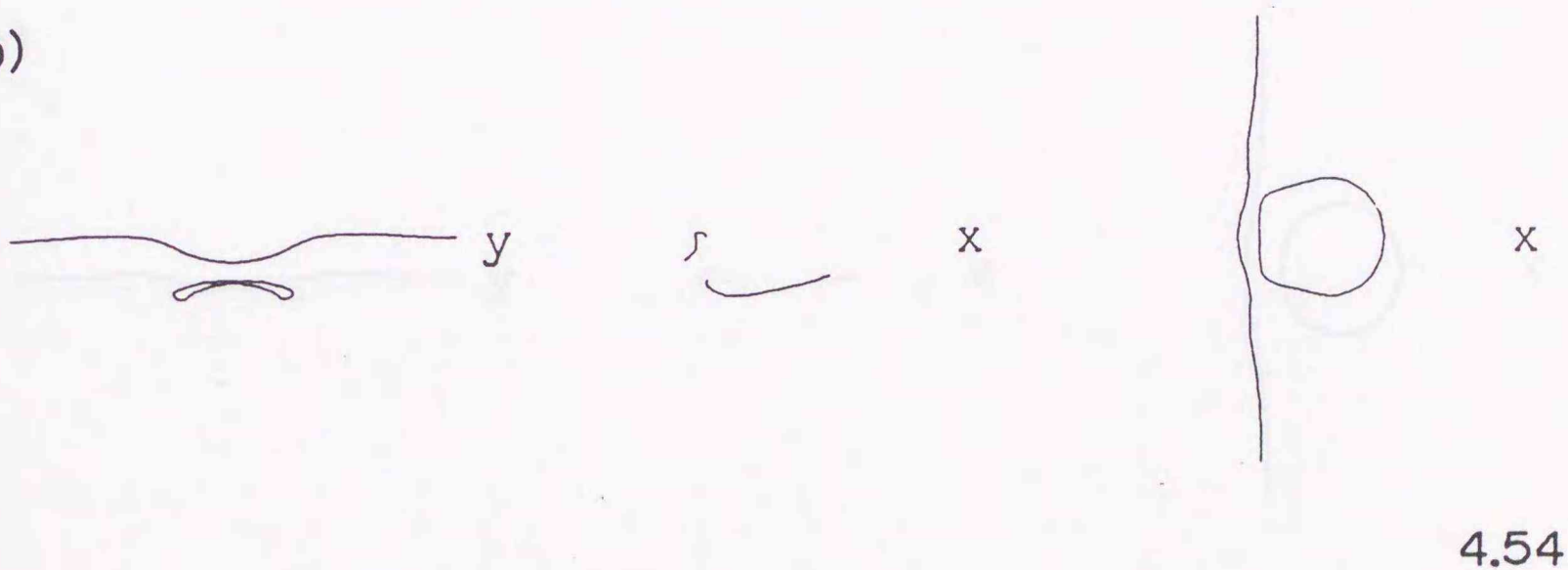
図3.11 合体モードの概略図



(a)



(b)



(c)

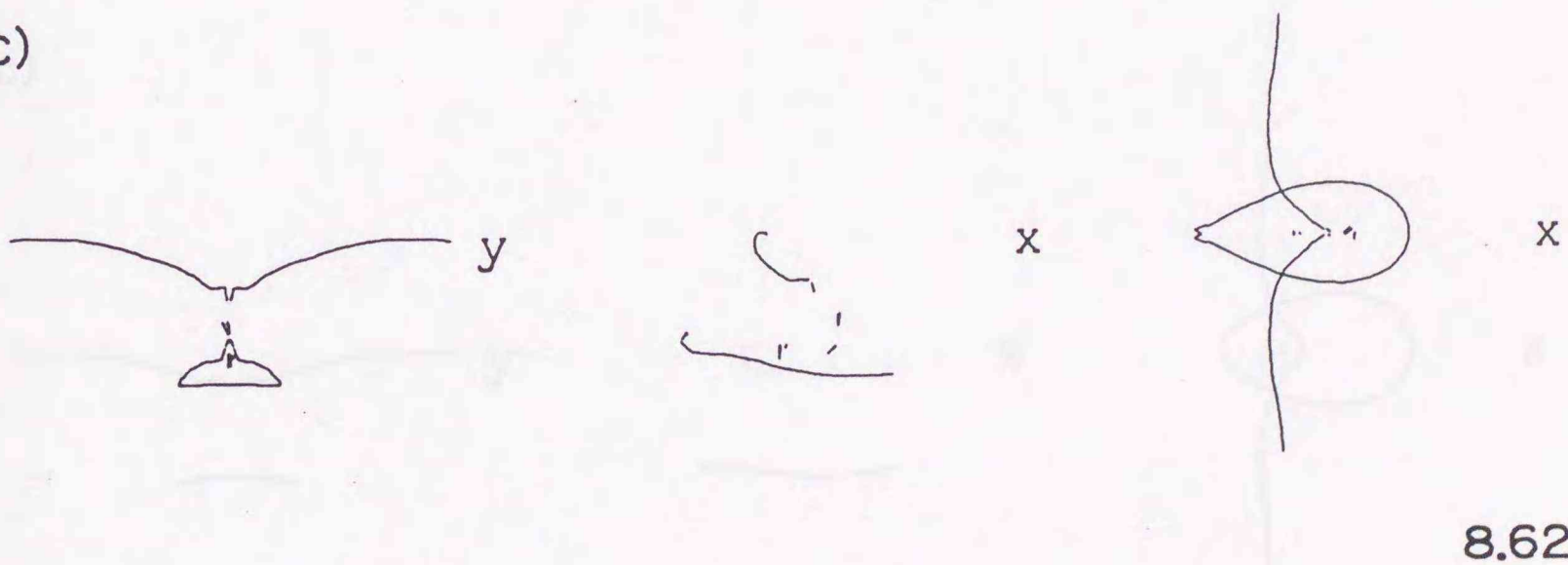


図3.12 遠隔作用モード ( $\sigma_0/R=0.20$ ,  $\xi/R=0.6$ )



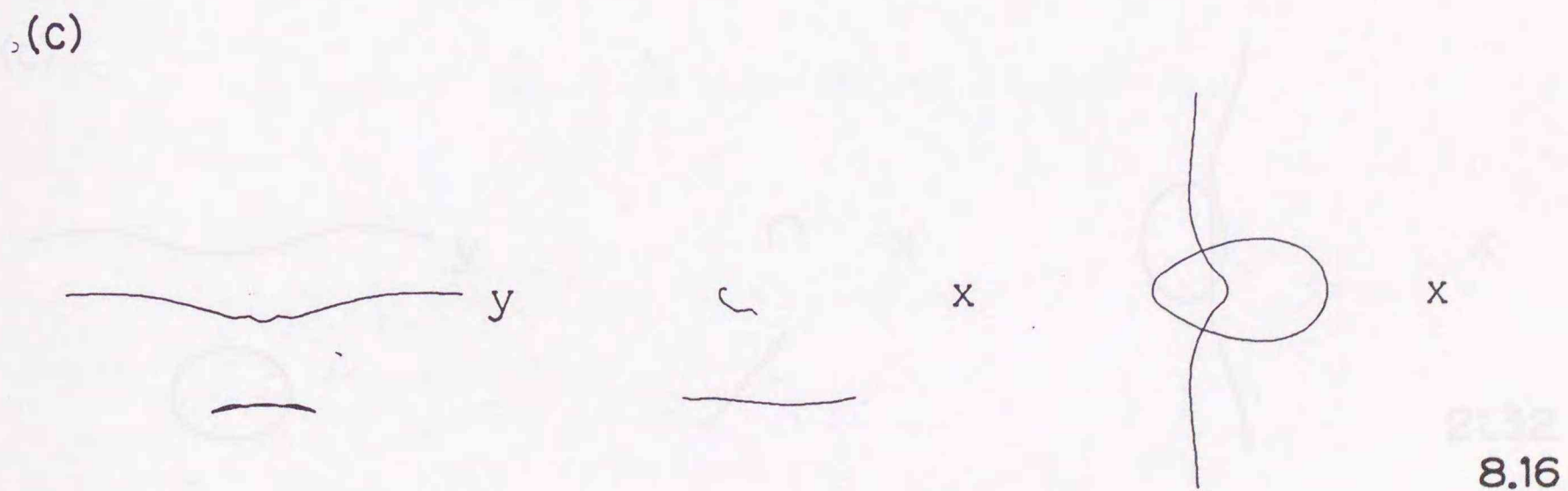
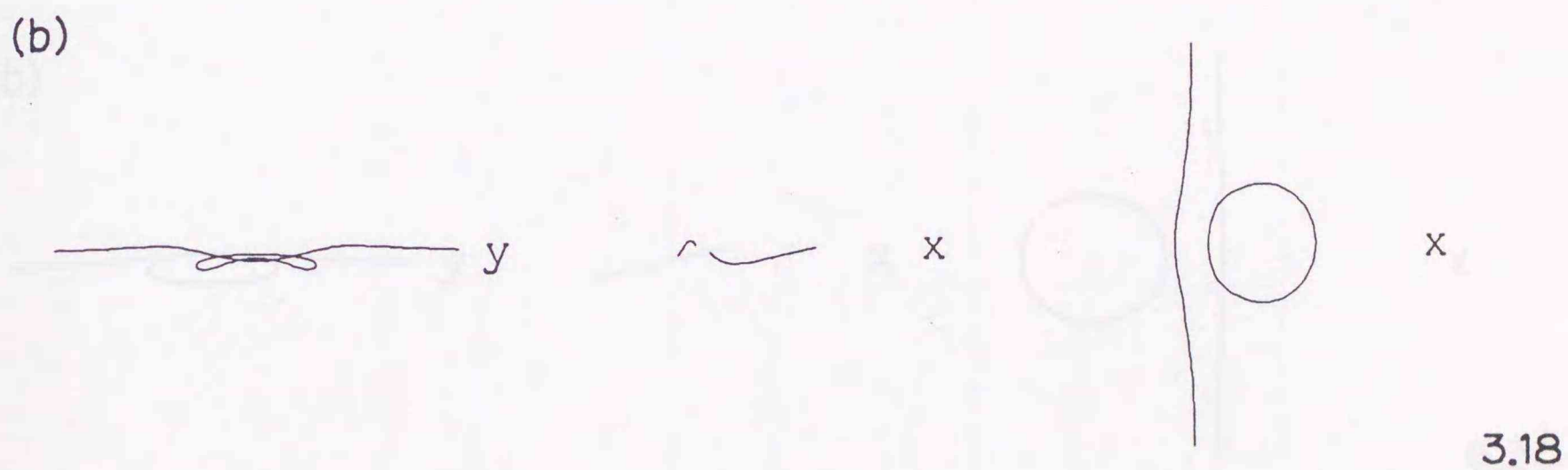
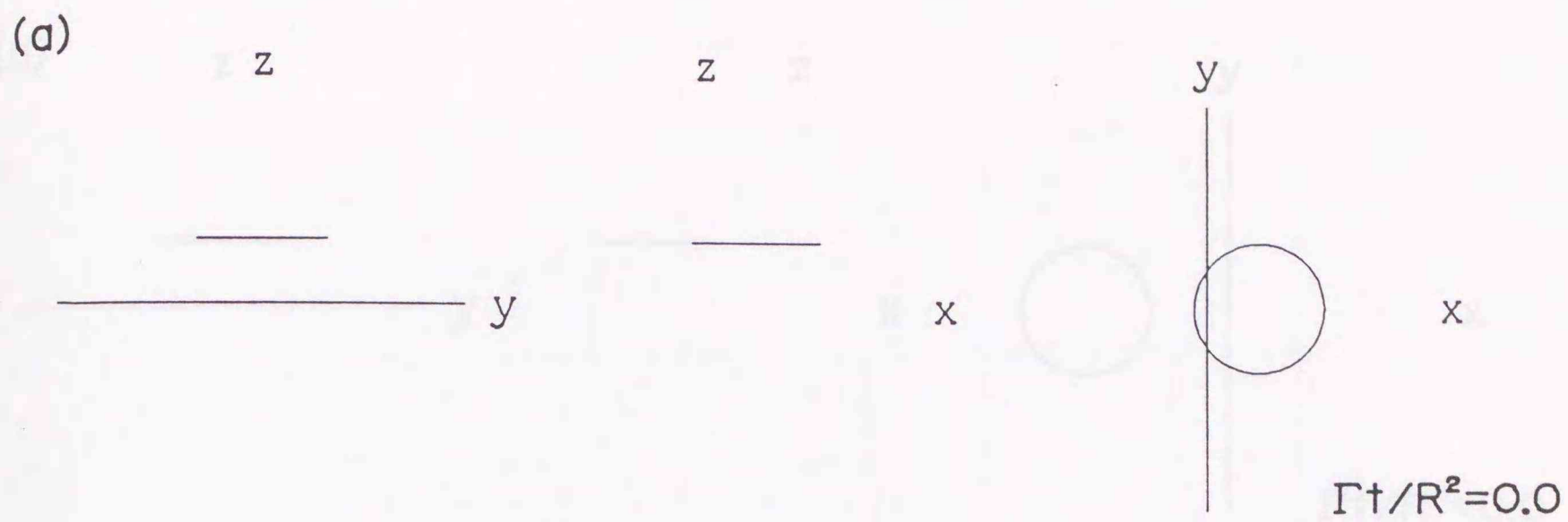


図3.13 弱相互作用モード ( $\sigma_0/R = 0.20$ ,  $\xi/R = 0.9$ )



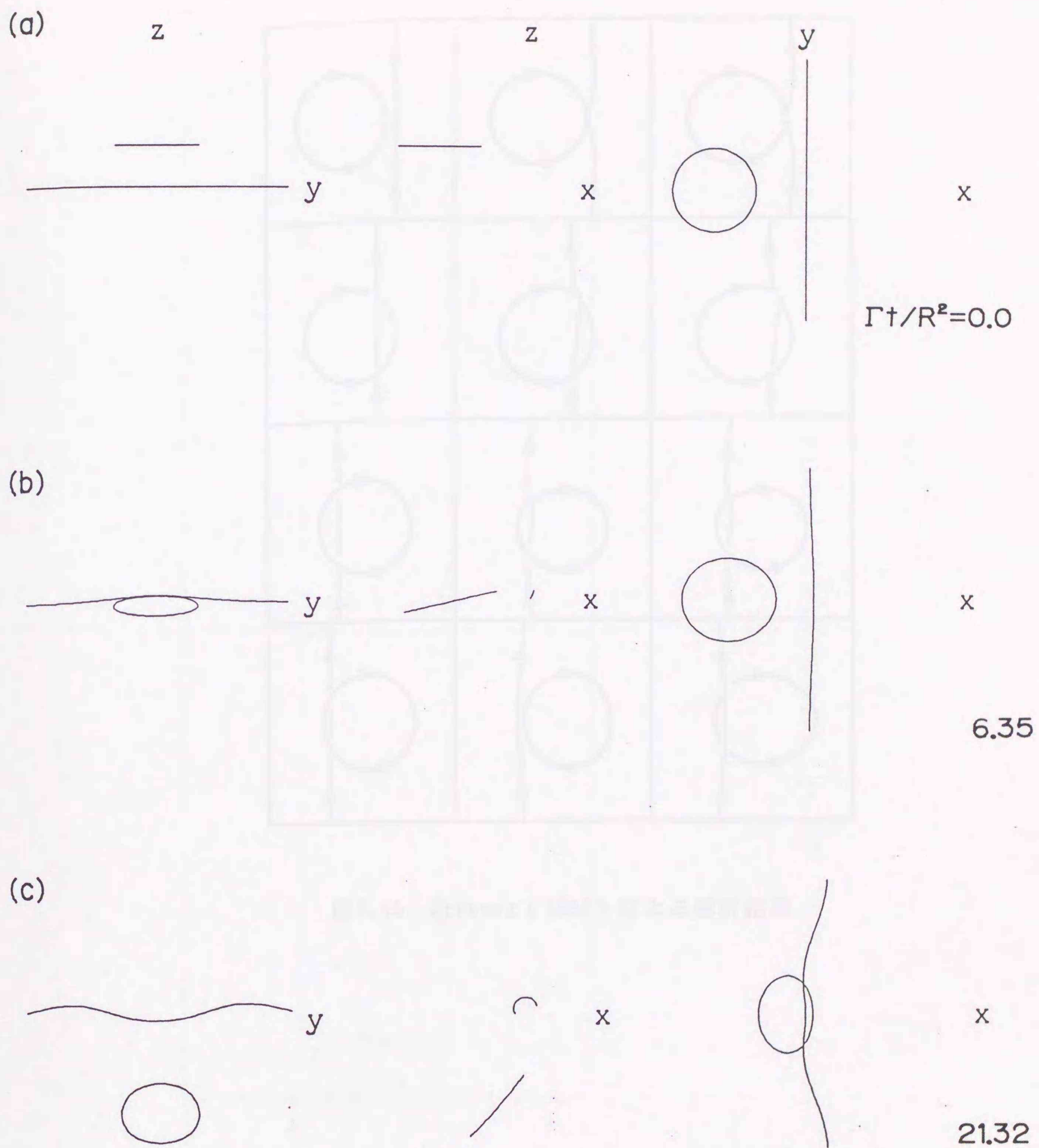


図3.14 弱相互作用モード ( $\sigma_0/R=0.20$ ,  $\xi/R=-2.0$ )



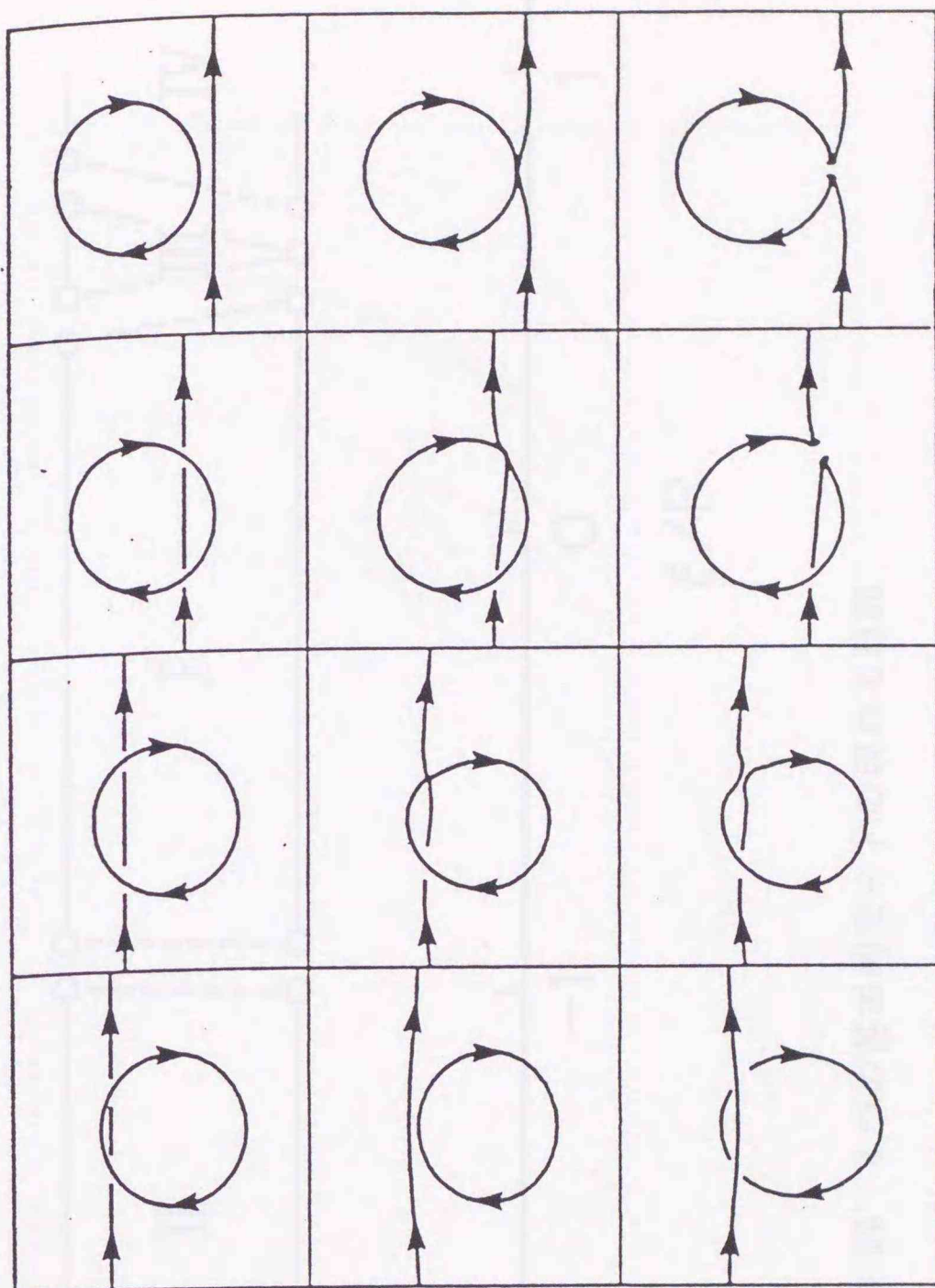


図3.15 Schwarz (1985) による解析結果



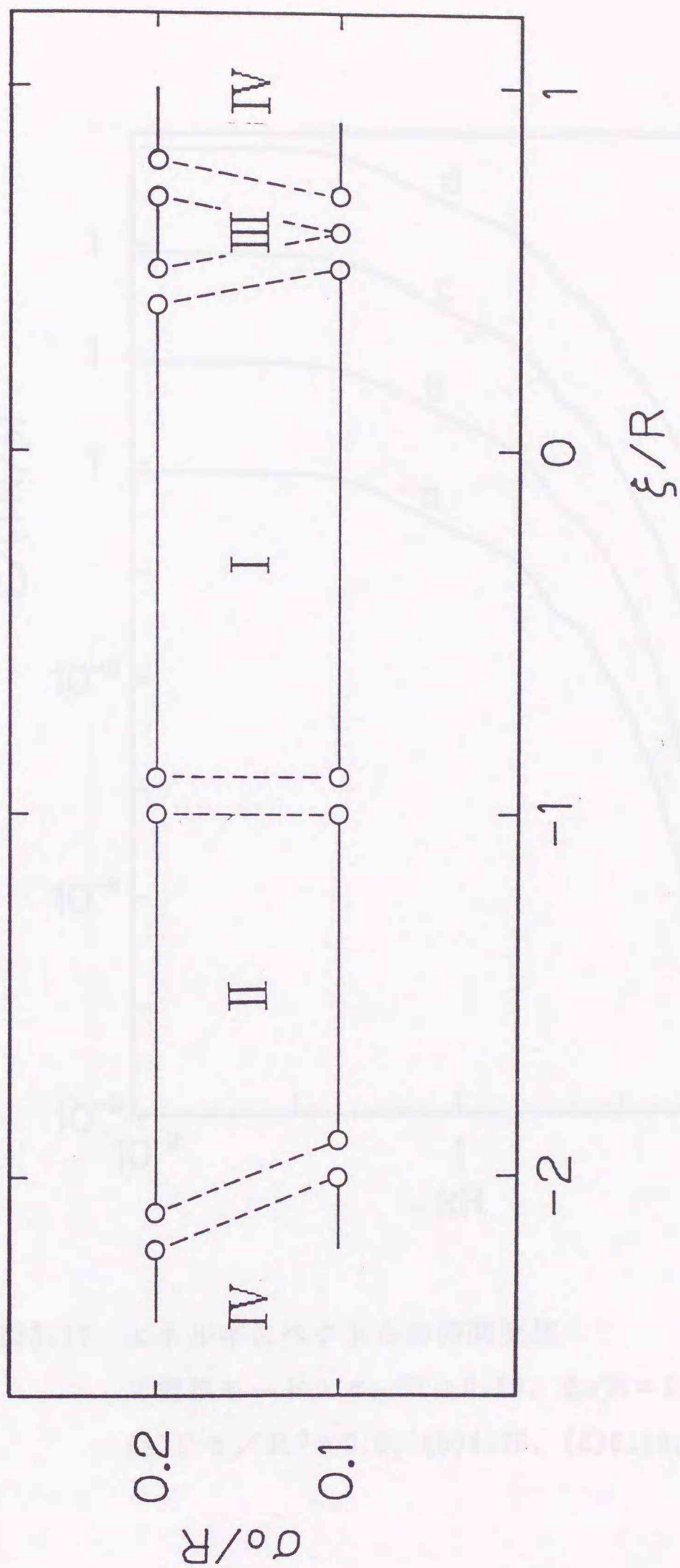


図3.16 4つの基本的モードの現れる範囲



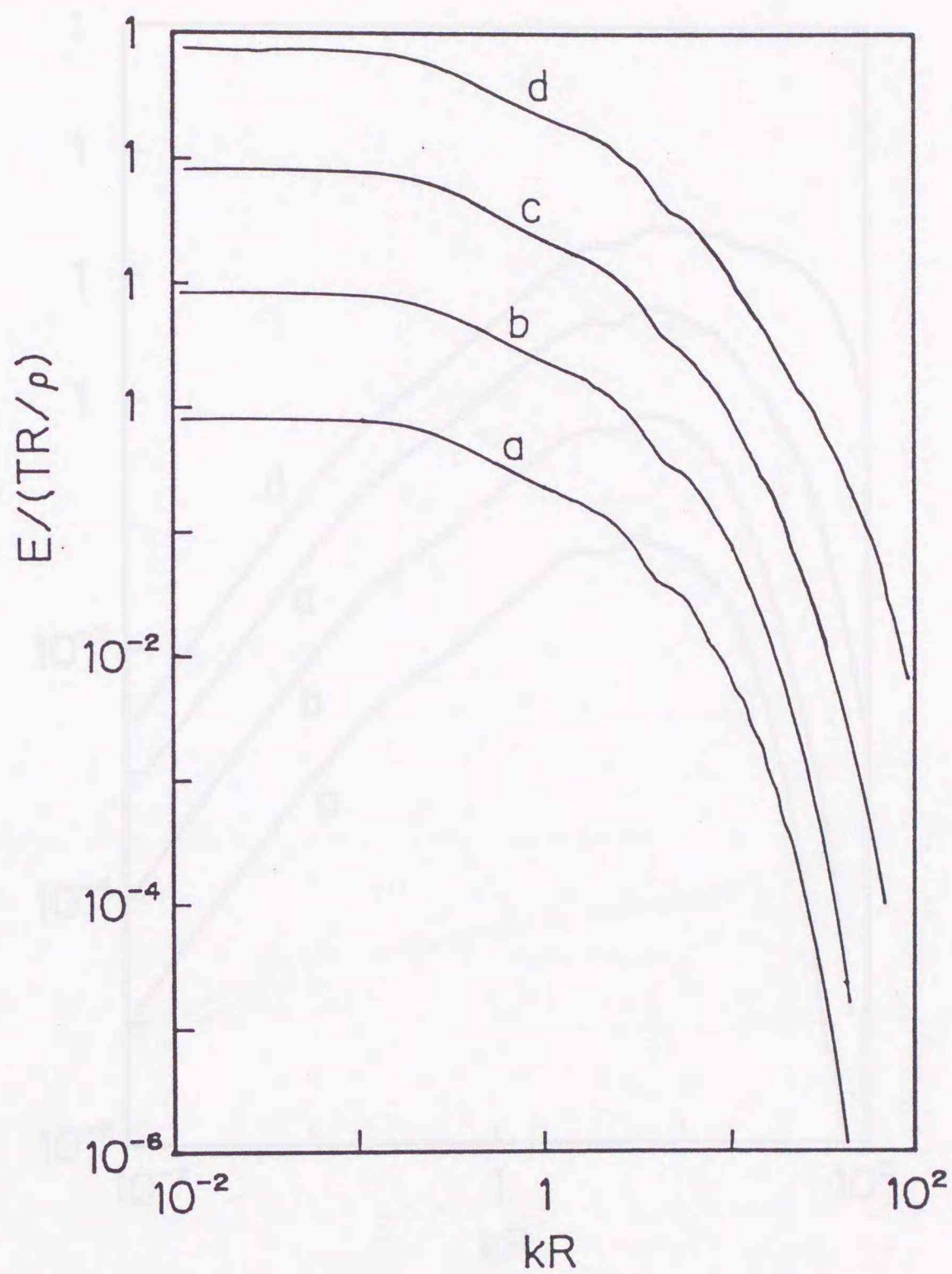


図3.17 エネルギスペクトルの時間発展

(置換モード:  $\sigma_0/R = 0.20$ ,  $\xi/R = 0.3$ )

(a)  $\Gamma t / R^2 = 0.0$ , (b) 4.76, (c) 6.12, (d) 6.35



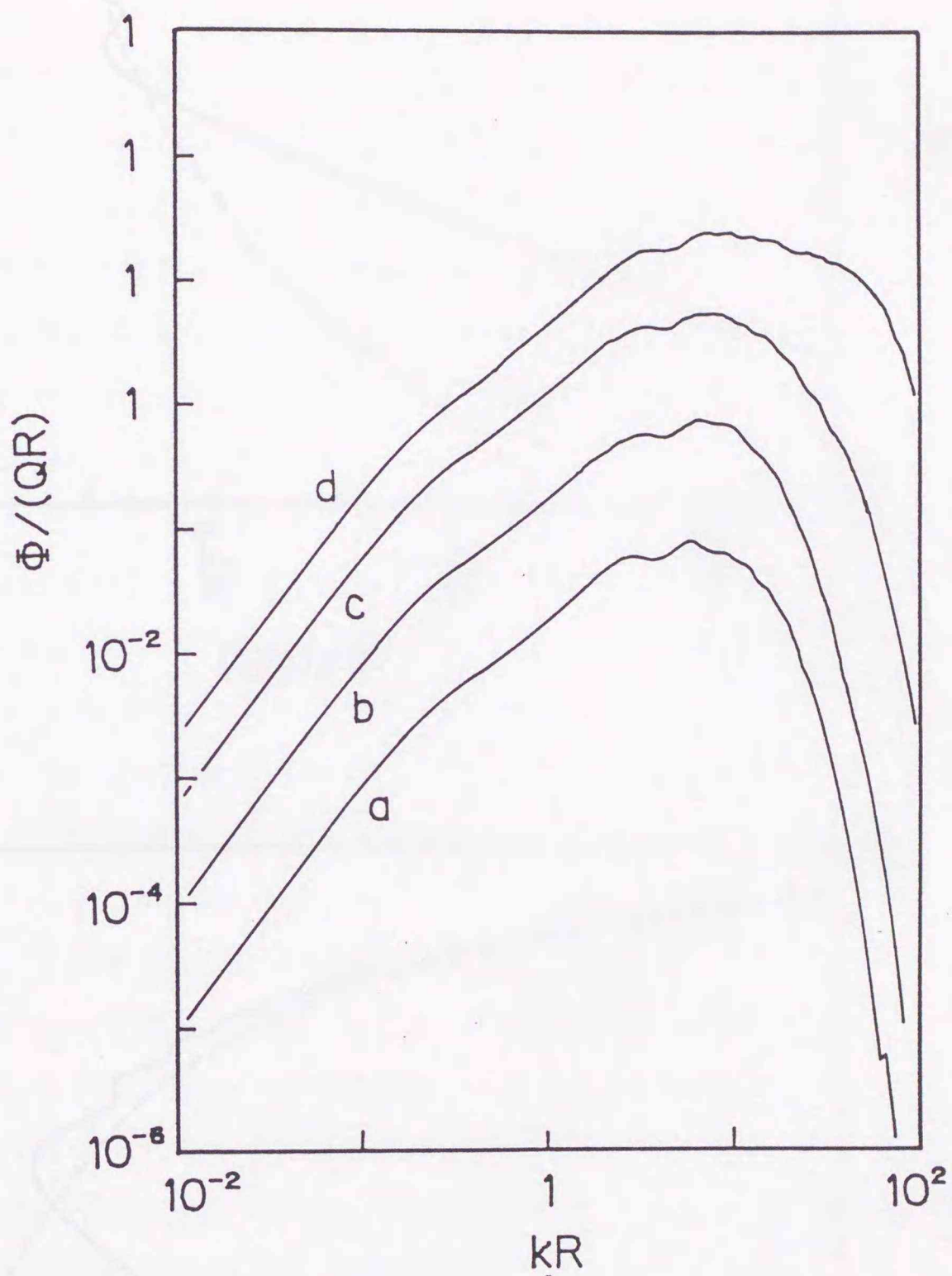


図3.18 エンストロフィスペクトルの時間発展

(置換モード:  $\sigma_0/R = 0.20$ ,  $\xi/R = 0.3$ )

(a)  $\Gamma t / R^2 = 0.0$ , (b) 4.76, (c) 6.12, (d) 6.35



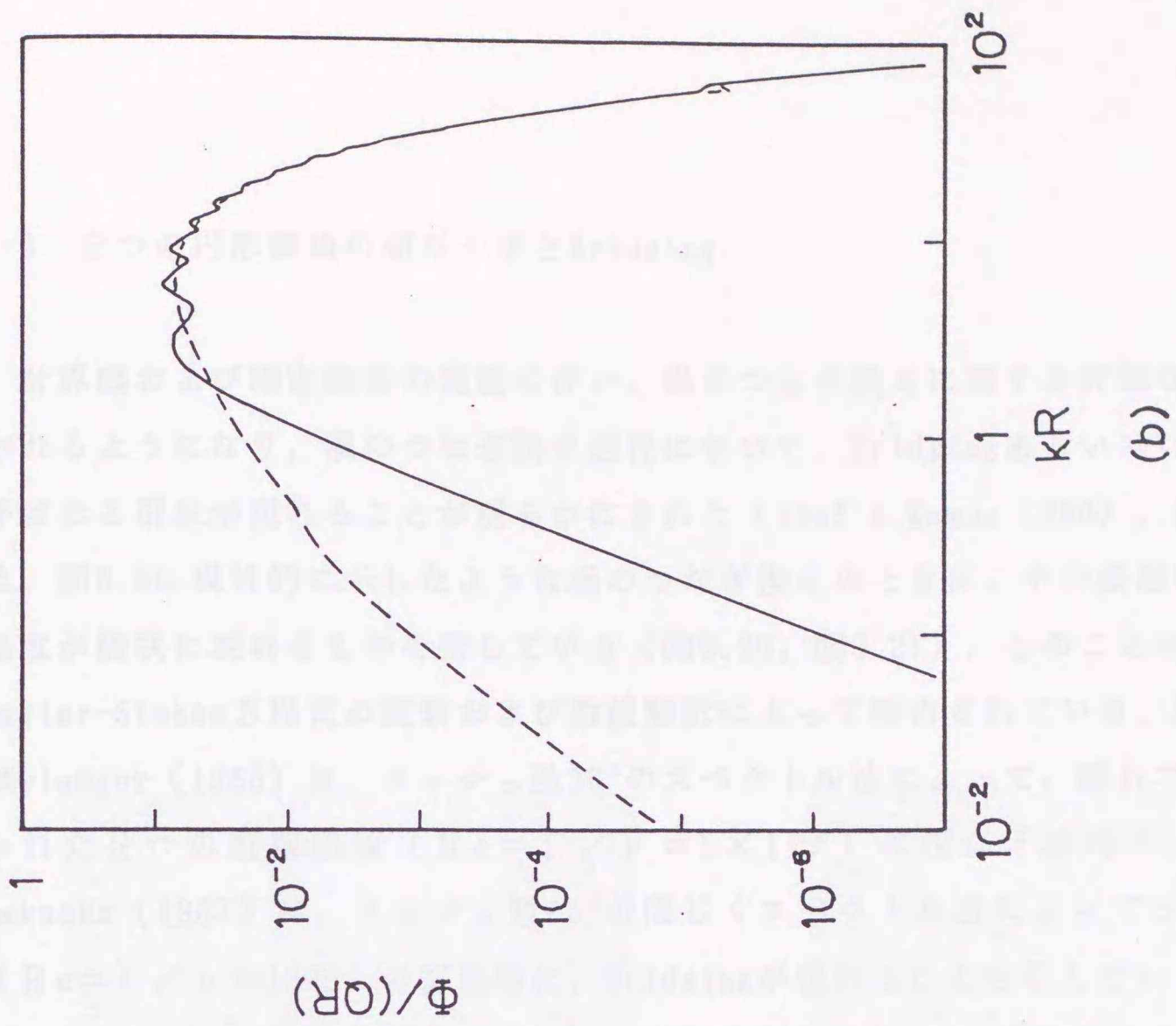
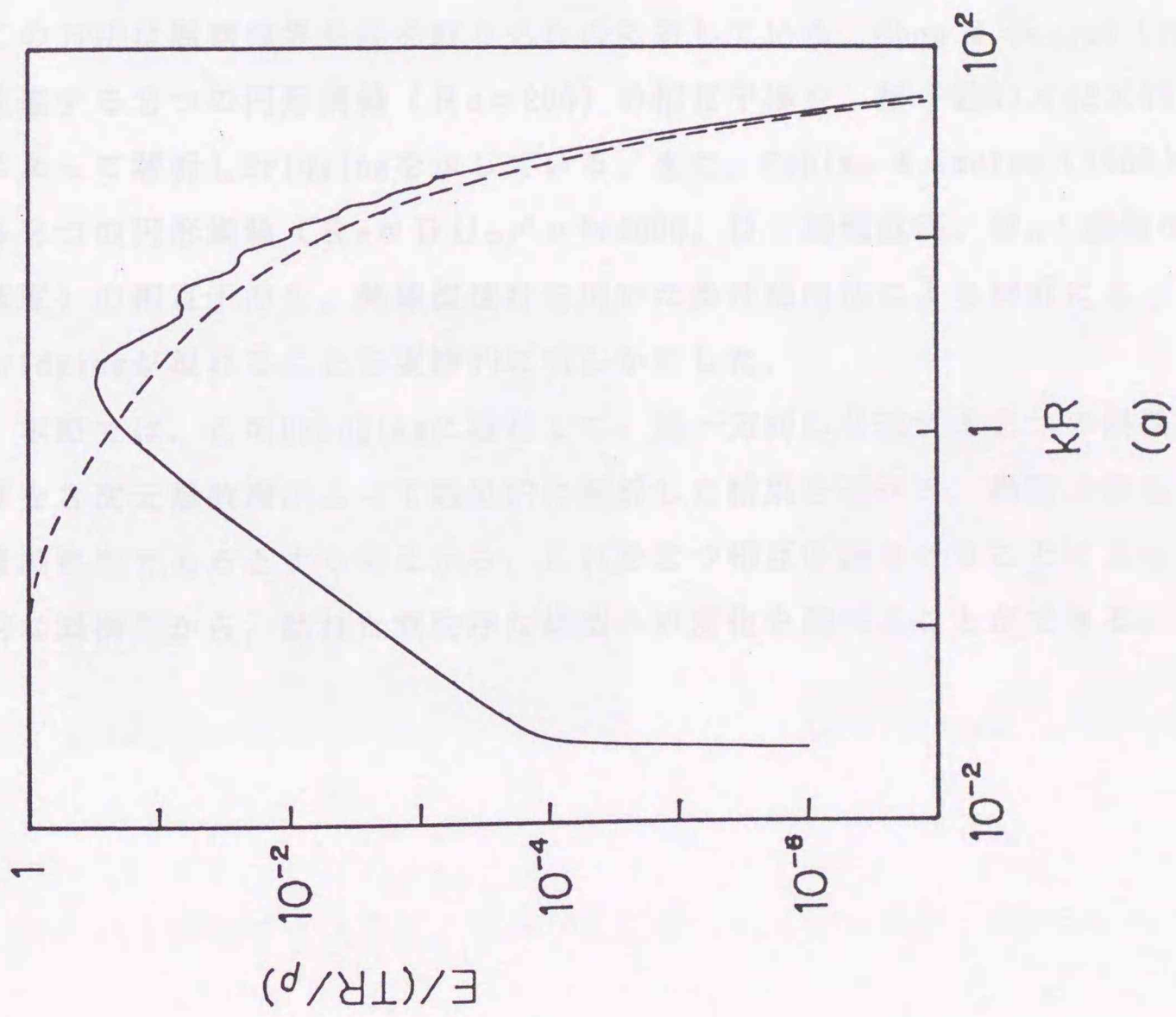


図3.19 (a)エネルギースペクトル, (b)エンストロフスペクトル  
 — : 円形渦輪, - - - : 直線渦糸, ( $\sigma_0/l_0=1.90$ )



### 3-3 2つの円形渦輪の相互干渉とBridging

計算機および測定機器の発達に伴い、渦のつなぎ換えに関する詳細な研究が行われるようになり、渦のつなぎ換え過程において、BridgingあるいはThreadingと呼ばれる現象が現れることが明らかにされた (Aref & Kambe 1988)。Bridgingとは、図3.6に模式的に示したような渦のつなぎ換えのときに、その接触部の外側に、渦度が橋状に現れるものを指している (図3.20, 図3.21)。このことは、以下のNavier-Stokes方程式の実験および数値解析によって報告されている。Zabusky & Melanger (1988) は、メッシュ数 $30^3$ のスペクトル法によって、離れて垂直に置かれた2つの直線渦管 ( $Re = \Gamma / \nu = 5 \times 10^4$ ) の相互干渉時に、Kida & Takaoka (1987) は、メッシュ数 $85^3$ の同じくスペクトル法によって三葉形渦輪 ( $Re = \Gamma / \nu = 1200$ ) の変形時に、Bridgingが現れることを示している。なお、スペクトル法とは差分法の一種で、速度場をフーリエ変換することによってNavier-Stokes方程式を波数空間における方程式に置き換えて計算する方法である。この方法は周期境界条件を取り込むのに適している。Chen & Oshima (1988) は、並進する2つの円形渦輪 ( $Re = 200$ ) の相互干渉を、格子数 $61 \times 42 \times 42$ の差分法によって解析しBridgingを示している。また、Oshima & Izutsu (1988) は並進する2つの円形渦輪 ( $Re = D U_0 / \nu = 4000$ ,  $D$ : 渦輪直径,  $U_0$ : 渦輪の初期移動速度) の相互干渉を、熱線流速計を用いた条件抽出法による解析によって研究し、Bridgingが現れることを実験的に明らかにした。

本節では、このBridgingに着目して、同一方向に並進する2つの渦輪の相互干渉を3次元離散渦法によって数値的に解析した結果を述べる。渦輪は最も単純な乱流渦要素であるとする考えから、これを2つ相互干渉させることによって、組織的な渦構造から、乱れた無秩序な構造への変化を調べることができる。



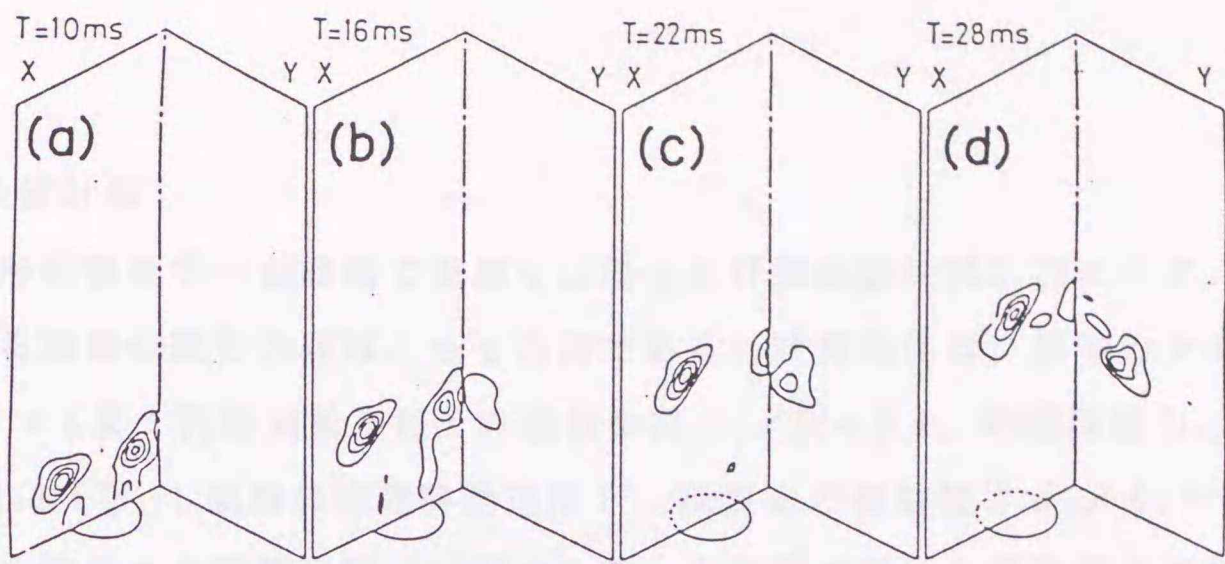
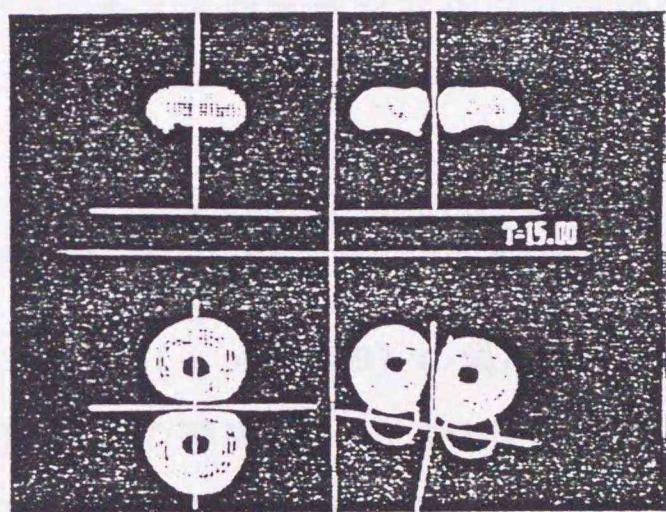
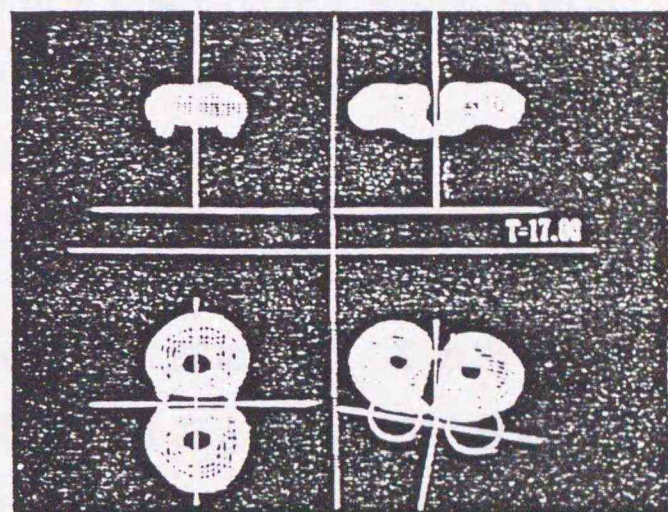


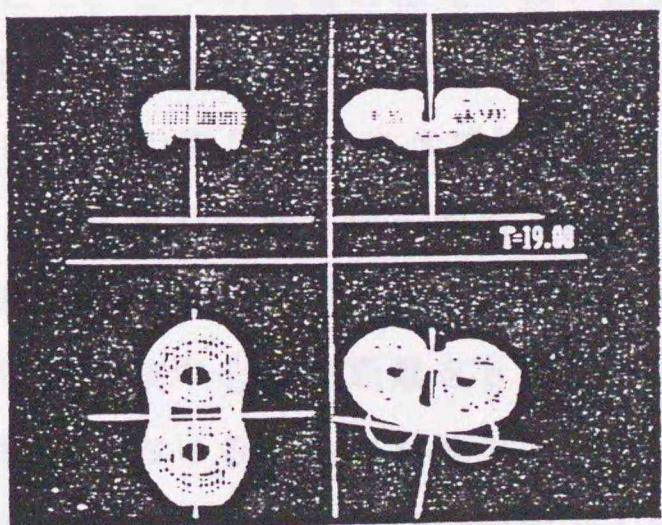
図3.20 渦輪のつなぎ換えにおけるBridging (実験, Oshima & Izutsu 1988)



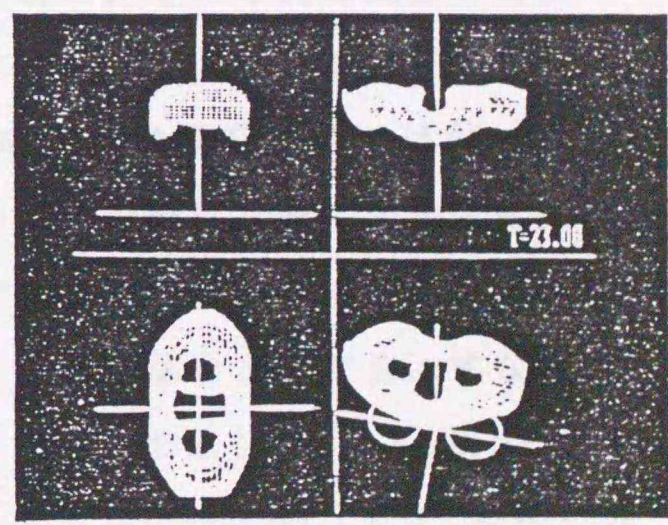
(a)



(b)



(c)



(d)

図3.21 渦輪のつなぎ換えにおけるBridging (数値解析, Chen & Oshima 1988)



### 3-3-1 数値計算

まず，円形渦輪を単一の渦輪で表現した場合の計算結果を図3.22に示す．初期状態における渦輪の進行方向は， $+z$ 方向である．計算条件は，渦輪の中心間距離 $\xi/R=2.4$ （ $R$ ：円形渦輪半径），渦核半径 $\sigma_0/R=0.2$ ，時間間隔 $U_0\Delta t/R=0.00113$ （ $U_0$ ：渦輪の初期移動速度），渦要素の初期長さ $\sigma_0/l_0=2.86$ ，一つの渦輪を構成する渦要素数は90個である．本計算で用いた離散渦法では，第2章2-1で述べたように，渦要素に核構造を持たせているので，渦度は渦要素のまわりに連続的に分布している．したがって，渦要素の配列が複雑になった場合，図3.22のような渦要素の長さの分布から渦度の分布を正確に把握することは困難である．本計算方法では任意の点における渦度を，次式によって計算することができる．

$$\omega^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_\alpha^3} p\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) \gamma^a$$

$y-z$ 平面（ $x/R=0$ ）の渦度 $|\omega|R/U_0$ の分布を図3.23に示す．この図のような渦度分布の等高線から Bridging過程が表現されていることがわかる．離散渦法は渦度の存在する領域を渦要素で近似するものであるから，本来であれば，この渦度が存在する領域に渦要素が存在するべきである．Bridgingが渦要素の分布そのもので表現されるためには，さらに多くの渦要素数が必要である．

そこで，2つの渦輪の相互干渉の詳細をみるために，それぞれの渦輪を複数の要素的渦輪の集合によって表し，シミュレーションを行うこととした（図3.24）．要素的渦輪の循環 $\Gamma$ はすべて同一である．2つの渦輪は初期状態では同一平面（ $x-y$ 面に平行な面）内に配列し，両者の中心の二等分線は $z$ 軸に一致させた．初期状態において，中央にある要素的渦輪の核中心と，その周囲に配列された要素的渦輪の核中心との距離を $b$ ，2つの渦輪の中心間距離を $\xi$ とする．すなわち，初期状態における2つの渦輪の中心座標は $(0, \xi/2, 0)$  および  $(0, -\xi/2, 0)$  である．渦要素を移動させる時間間隔 $\Delta t$ は  $U_0\Delta t/R=0.000967$ （ $U_0$ ：渦輪の初期移動速度）である．

要素的渦輪の配列状態を次の（A）および（B）とした．

（A）全ての渦要素の初期体積を同一とする．



(B) 渦要素の渦核半径を全て同一とする。

いずれにおいても要素的渦輪の渦核は重なり合うようにした。図3.25は円形渦輪と直線渦糸を、渦核の重複がないことを除いて、本節と同様の方法で計算した結果である。要素的渦輪の配列状態は(B)，要素的渦輪数および渦糸数は5としている。両者が直接干渉する以前に渦度が発散してしまうことがわかる。渦核が重複するように配置することによって、重複がない場合に比べて渦度の発散を遅らせることができた。

しかし、渦輪の相互干渉が進むと渦要素の伸張による渦度の発散が起きて、渦要素数が爆発的に増加してしまう。この急激な渦要素数の増加を避けて、長時間にわたるシミュレーションを行うために、本節の計算では渦核半径 $\sigma_\alpha$ が $\sigma_\alpha/\sigma_0 \leq c_K$ にまで減少した渦要素を除去することとした。ここに $c_K\sigma_0$ は、Kolmogorovの長さスケールに対応している。すなわち、現実の流れでは、Kolmogorovの長さスケールよりも小さな渦は粘性により消散され存在し得ない。等方性乱流理論によるとKolmogorovの長さスケール $\eta$ は

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \sim LRe^{-3/4}$$

で決定される(Tennekes & Lumley 1972, Hinze 1975)。ここで、 $\varepsilon$ はエネルギーの消散率、 $\nu$ は動粘性係数、 $L$ は流れの巨視的長さスケール、 $Re = UL/\nu$  ( $U$ : 流れの巨視的速度スケール)である。 $L$ として渦輪の直径 $2R$ 、 $U$ として渦輪の初期移動速度 $U_0$ 、 $\nu$ として空気の値( $1.512 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ )を採用すると

$$\eta/R = 2Re^{-3/4} \equiv c_K$$

であるから、これにより $c_K$ を見積もることができる。渦要素の消去は、粘性による運動エネルギーの消散を近似するものと解釈できる。数値計算は上記のパラメータを

$$c_K = 0.06, 0.12, 0.2835$$

$$\xi/R = 2.7, 2.8, 2.85, 2.9, 3.0$$

$$\sigma_0/R = 0.15, 0.20$$

に設定して行った。また、要素的渦輪の個数が7および5の2通りについて計算した。要素的渦輪を構成する渦要素数は、要素的渦輪数が7個のとき $N_R = 60$ 、5個のとき $N_R = 90$ とした。



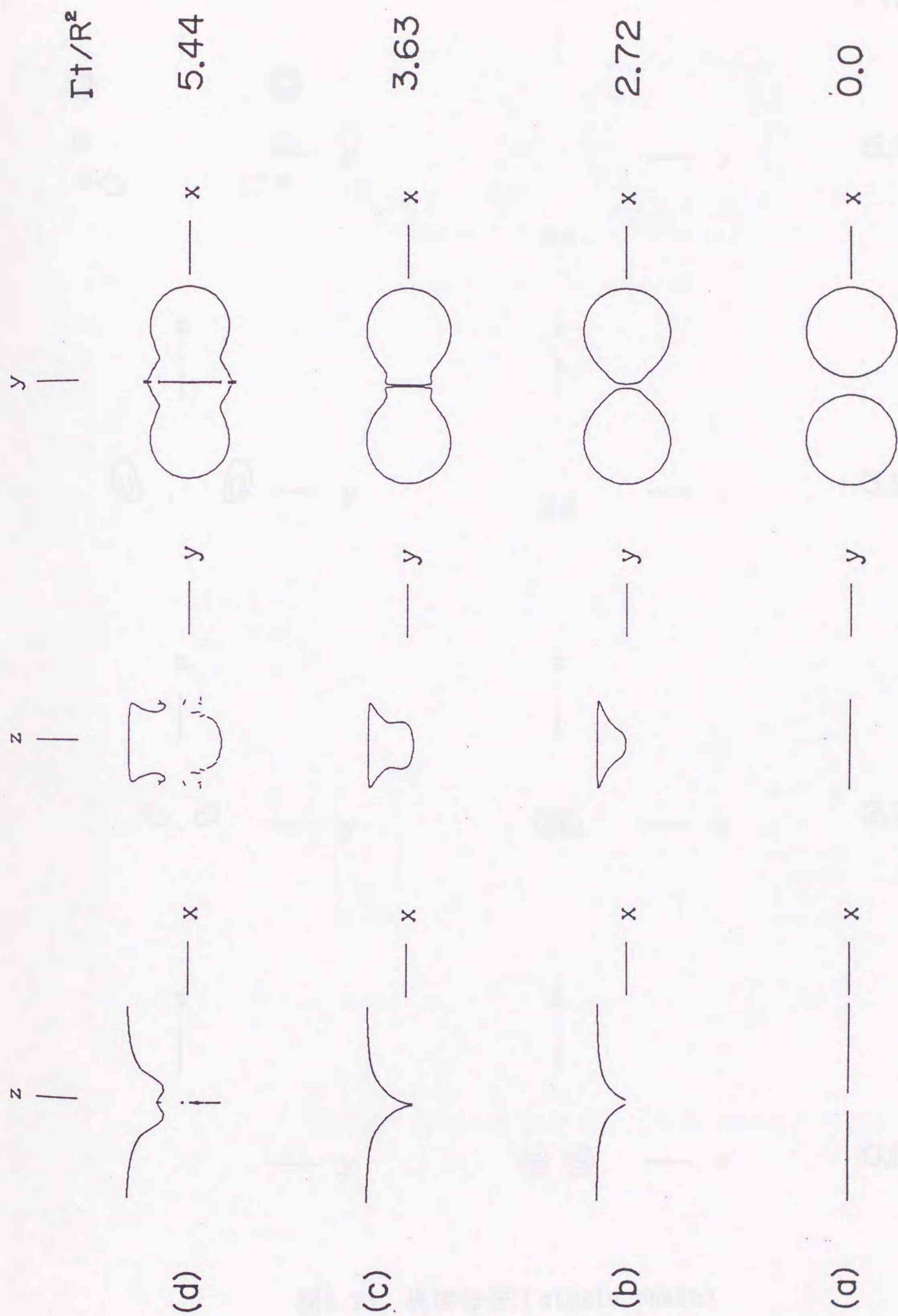


図3.22 単一 (single chain) の渦輪の相互干渉



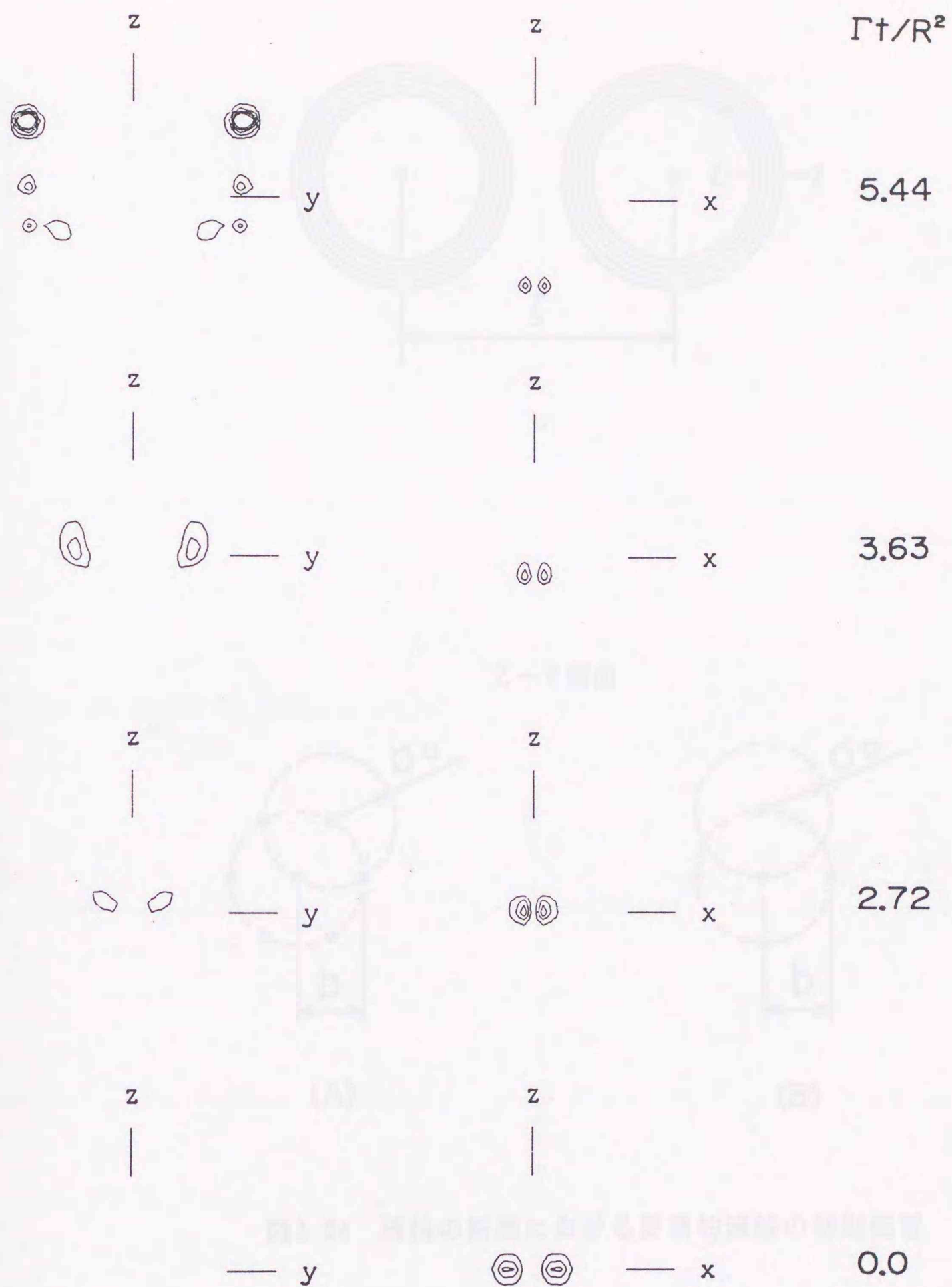
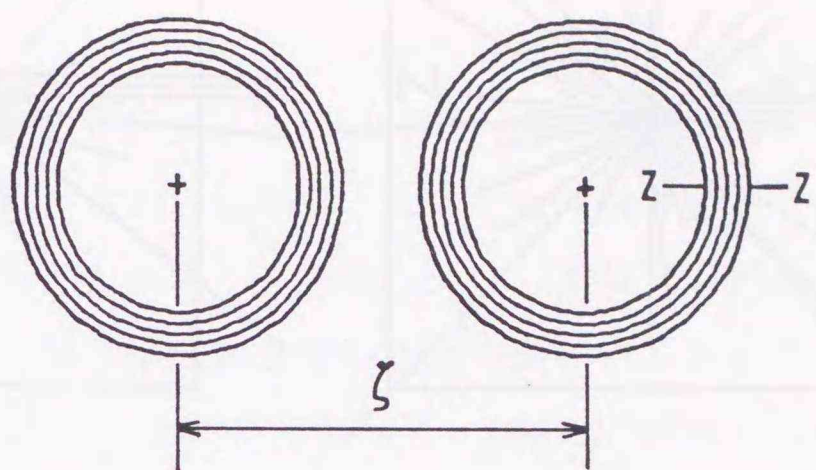
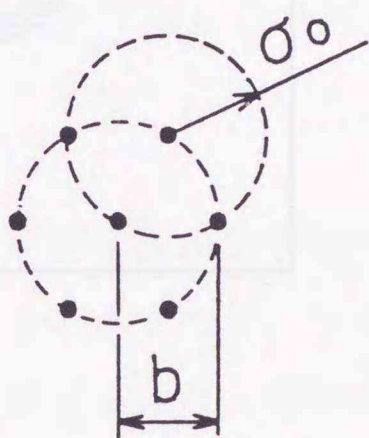


図3.23 渦度分布 (single chain)

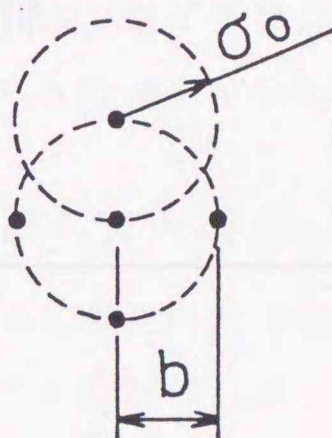




Z - Z 断面



(A)



(B)

図3.24 渦輪の断面における要素的渦輪の初期配置



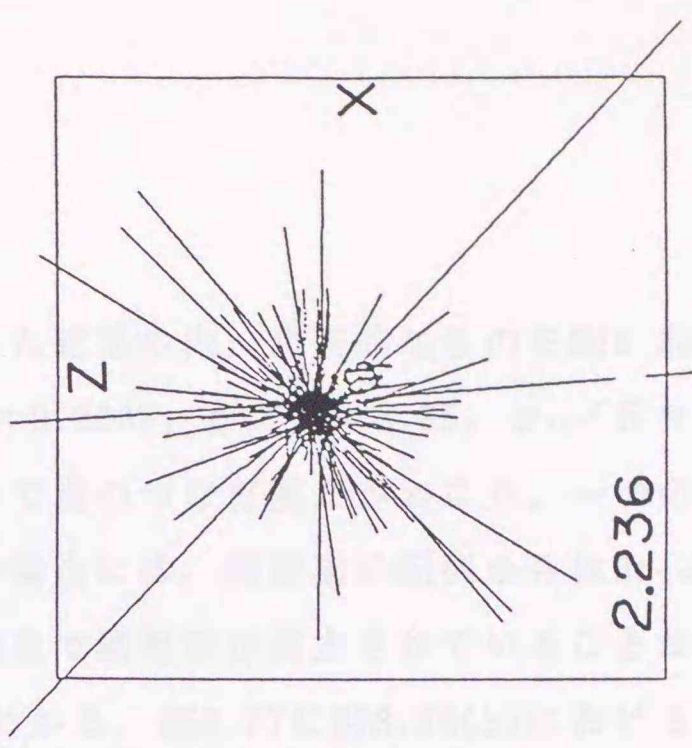
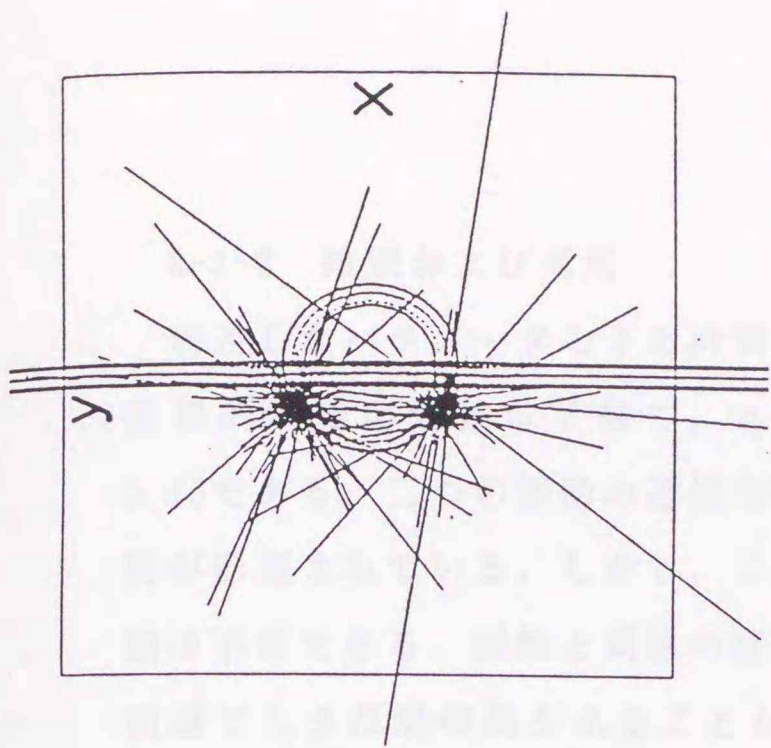
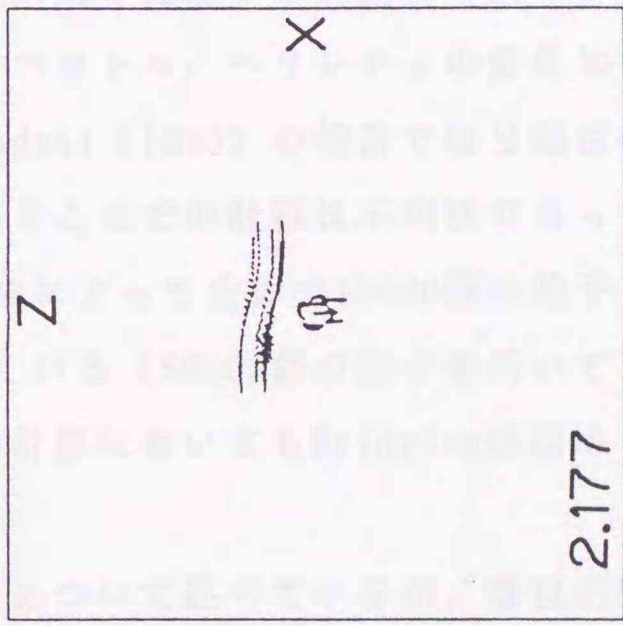
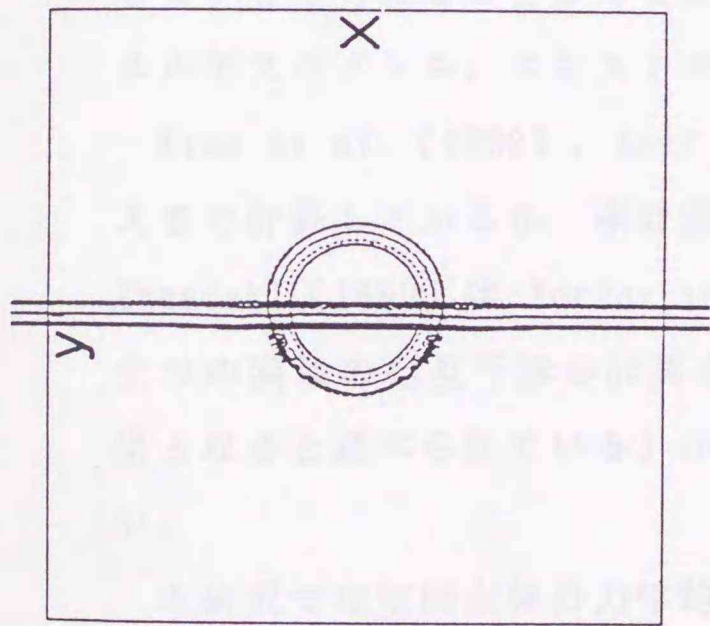
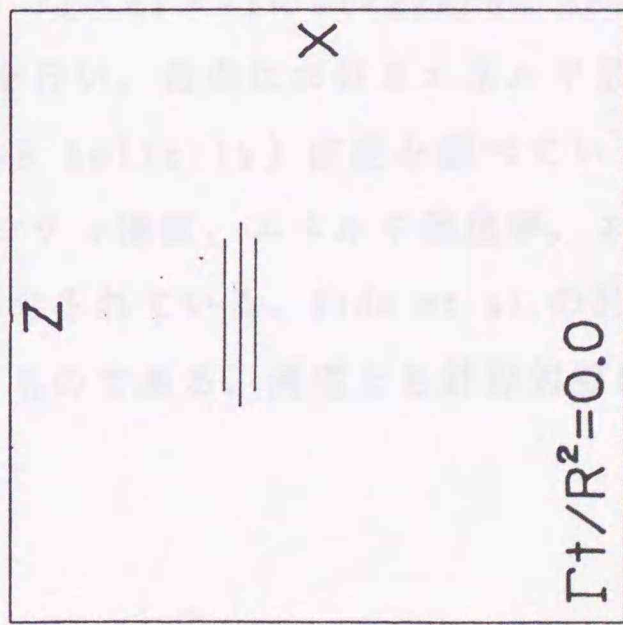
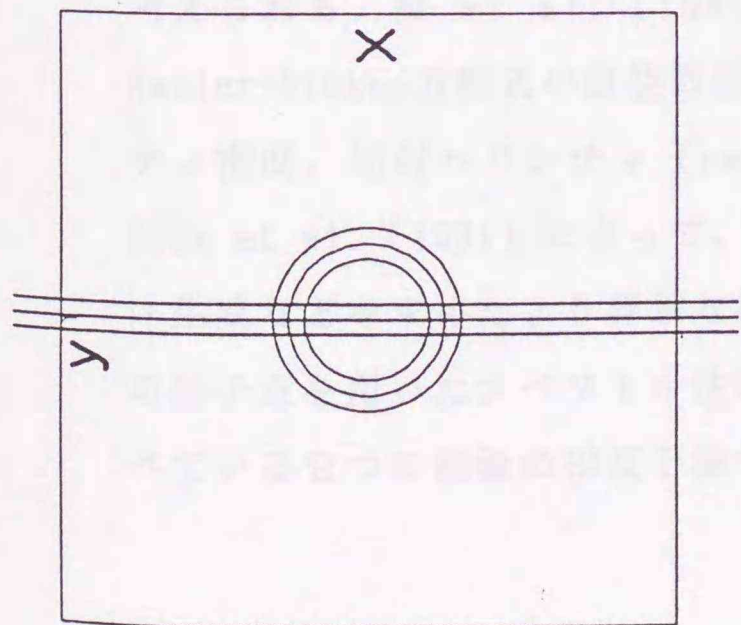


図3.25 渦輪と渦糸の相互干渉 (multi chainの渦度の発散例)



### 3-3-2 結果および考察

前述したパラメータの下に計算した結果の内、代表的なものを図3.26に示す。要素的渦輪の個数は7個で、 $c_k=0.2835$ 、 $\xi/R=2.85$ 、 $\sigma_o/R=b/R=0.15$ である。二つの渦輪の近接部分で渦のつなぎ換えがおこり、一つの大きな渦輪が形成されている。しかし、この場合には、渦要素の配列からはBridgingの有無は不明である。渦輪と渦輪の接触点で渦要素が消去されていることから、この領域で大きな渦伸長があることがわかる。図3.27に図3.26(b)における  $y-z$  平面 ( $x/R=0$ ) の渦度  $|\omega|R/U_o$  の分布を示した。この分布は同一平面内の  $x$  方向の渦度  $\omega_x R/U_o$  の分布と一致していたので、図3.27はBridgingの発生を示唆していると考えることができる。Bridgingの発生する前後の時刻においては、エネルギースペクトル、エントロフィスペクトル、ヘリシティの変化はなかった。

Kida et al. (1989), Aref & Zawadzki (1990) の報告では2回目のつなぎ換えまで計算しているが、本計算法ではそこまでの計算は不可能であった。Aref & Zawadzki (1990) は Vortex-in-cell法によって全体で15000個の粒子で構成した2つの渦輪の相互干渉の計算を行っている(50000個の粒子を用いても同様の結果となると述べられている)が、この計算においてもBridgingは認められていない。

本研究では空間全体の力学的特性量について述べているが、微視的観点に立てば、異なる時刻においては、空間全体の値が等しくても局所的な物理量の分布は全く異なる可能性がある。例えば、Bridgingが起こる前後でヘリシティの大きさは変化しないが、ヘリシティ密度(helicity density)の空間的分布は異なると考えられる。陳 et al. (1990) は、 $71 \times 41 \times 41$ のstaggered meshを用いて Navier-Stokes方程式の直接数値解析を行い、各点におけるエネルギー散逸、ヘリシティ密度、相対ヘリシティ(relative helicity)密度を調べている。さらに Kida et al. (1991) によって、ヘリシティ密度、エネルギー散逸率、エントロフィ生成などを求めたより詳細な計算がなされている。Kida et al.の計算は、 $64^3$ の格子点を用いたスペクトル法によるものである。両者とも計算対象は本節で述べている2つの渦輪の相互干渉である。



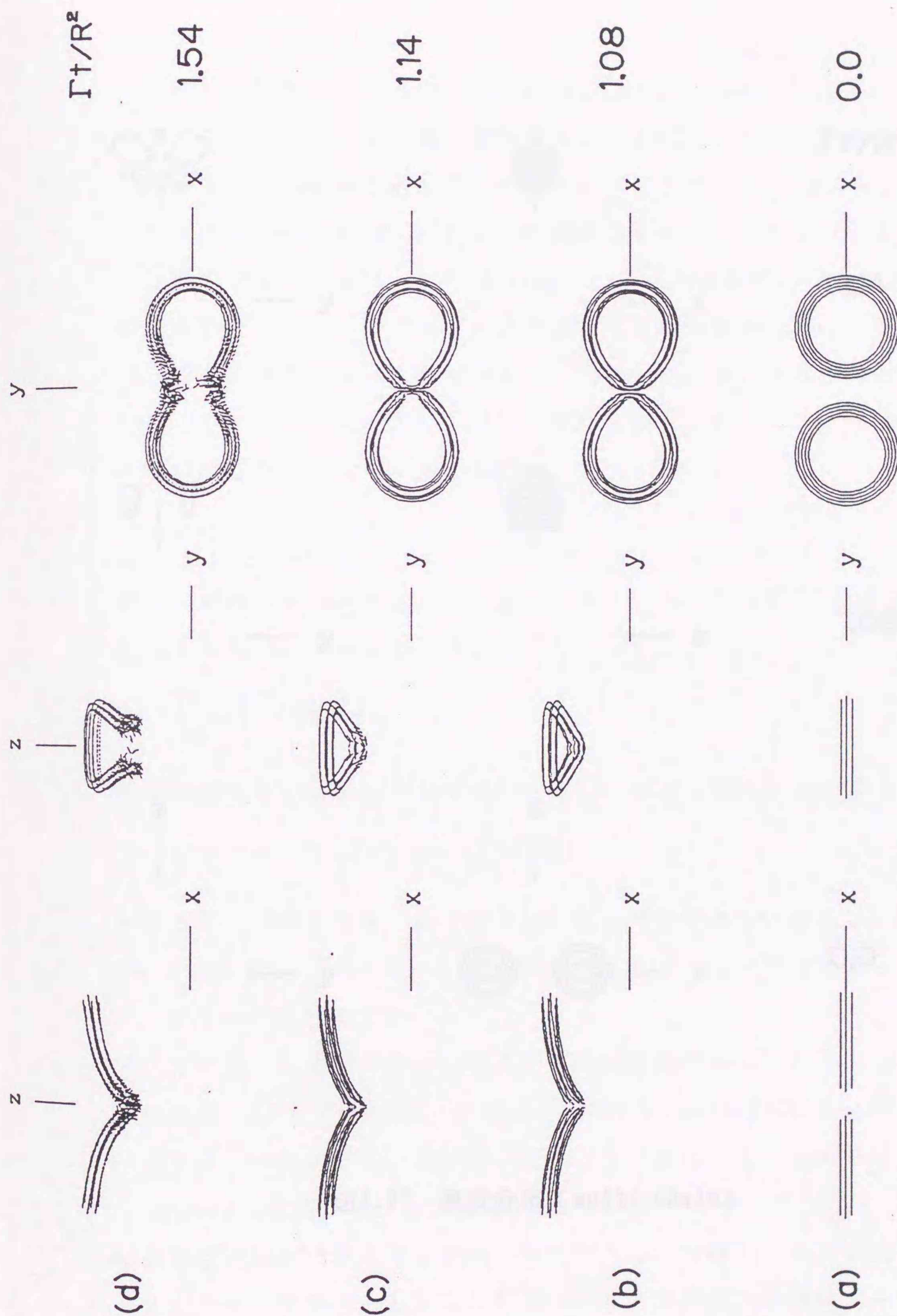
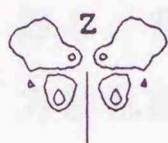


図3.26 渦輪の相互干渉 (multi chain)



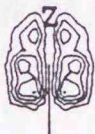
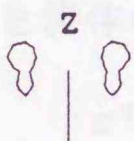


$\Gamma t/R^2$

— y

— x

1.14



— y

— x

1.08

z

z

— y



— x

0.0

図3.27 渦度分布 (multi chain)



### 3-4 複数の円形渦輪の相互干渉とスペクトル

本節は、少数（4～8個）の円形渦輪の相互干渉を3次元離散渦法によって計算し、乱流の基本的な性質を表現することを試みたものである。円形渦輪は、等方性乱流の基本構造を成す要素と考えることができる。Adrian (1979) は、等方性乱流中の conditional eddy が円形渦輪であることを示しているからである。

乱流の普遍的な性質として Kolmogorov の  $-5/3$  乗則があげられる。この法則は、速度変動のエネルギー Spektral が高波数領域（慣性小領域）において波数  $k$  の  $-5/3$  乗に比例するというものである。Kolmogorov は、乱流における単位体積当たりのエネルギー Spektral  $E^*(k)$  が、慣性小領域においては局所等方性を仮定すると流体の粘性  $\nu$  とエネルギー散逸率  $\epsilon^*$

$$\epsilon^* = -\frac{d}{dt} \left( \frac{T^*}{\rho} \right)$$

の2つのパラメータによって決定されるとした。ここで  $T^*$  は単位体積あたりの運動エネルギーで、エネルギー Spektral  $E^*(k)$  と

$$\frac{T^*}{\rho} = \int_0^\infty E^*(k) dk$$

の関係がある。エネルギー Spektral  $E^*(k)$  は次元解析によって

$$E^*(k) = \epsilon^{*1/4} \nu^{5/4} f \left( \frac{k}{\epsilon^{*1/4} \nu^{-3/4}} \right)$$

となることが導かれる。ここで  $f$  は任意の関数である。さらに、非粘性の極限  $Re \rightarrow \infty$  ( $\nu \rightarrow 0$ ) においてエネルギー Spektral が不変であるとする

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.4)$$

のように書くことができる。ここで  $C$  は実験的に求められる Kolmogorov の定数で、その値は 1.2～2.0 である。(3.4) 式を Kolmogorov の  $-5/3$  乗則と呼ぶ。この法則は、高レイノルズ数の噴流、境界層、後流などの乱流に広く観察される（図 3.28）。

Leonard (1985) は、初期位置および向きをランダムに設定した5個の楕円形渦輪の相互干渉におけるエネルギー Spektral が、一様乱流の実験結果とよく一致することを示している。しかし、初期状態からの渦輪の変形のプロセス、スペクト



ルの時間発展等には触れられていない。また, Aksman et al. (1985) によって, 二つの渦輪の相互干渉時のエネルギースペクトルについて $-5/3$ 乗則が得られたことが報告されている。Aksman et al. が用いた方法では自己誘起エネルギースペクトル $E_0$ は波数によらず一定の値をとることから

$$\int_0^\infty E_0(k) dk \rightarrow \infty$$

となる。Aksman et al. が議論の対象としているのは, 相互作用エネルギースペクトル $E_{int}$ のみである。Shariff et al. (1989) は, 2つの同一の循環と半径を持つ円形渦輪が正面衝突するときに $-5/3$ 乗則が現れることを述べている。これは, 軸対称性を仮定したcontour dynamicsによる解析である。また, Donnelly (1988) は超流動流体中の乱流発生の例として, 超流動He中において正6面体上に配置した6個の円形渦輪の相互干渉に関するSchwarzのシミュレーション結果を引用している。また, 正6面体上の6個の円形渦輪をランダムに平行移動した配置を初期状態とするシミュレーション結果も報告されている (Schwarz 1988)。Schwarzの計算方法は, 任意の渦糸上に誘起される速度を, Biot-Savartの法則による成分と, 境界の影響, さらに実験に基づいた超流動He特有のmutual frictionの影響も考慮し, これらの総和として求めている。そして渦糸と渦糸がある距離に近接した場合, 強制的に渦のつなぎ換えを行っている。これらのシミュレーションは, 流体中の渦糸が渦のつなぎ換えを何回も行い複雑に絡み合う状態まで実行されてるが, そのスペクトルは求められていない。

本節では, 円形渦輪を初期状態において正多面体上に配置し, それらの相互作用時におけるエネルギースペクトルとエントロフィスペクトルの時間発展を求めた。



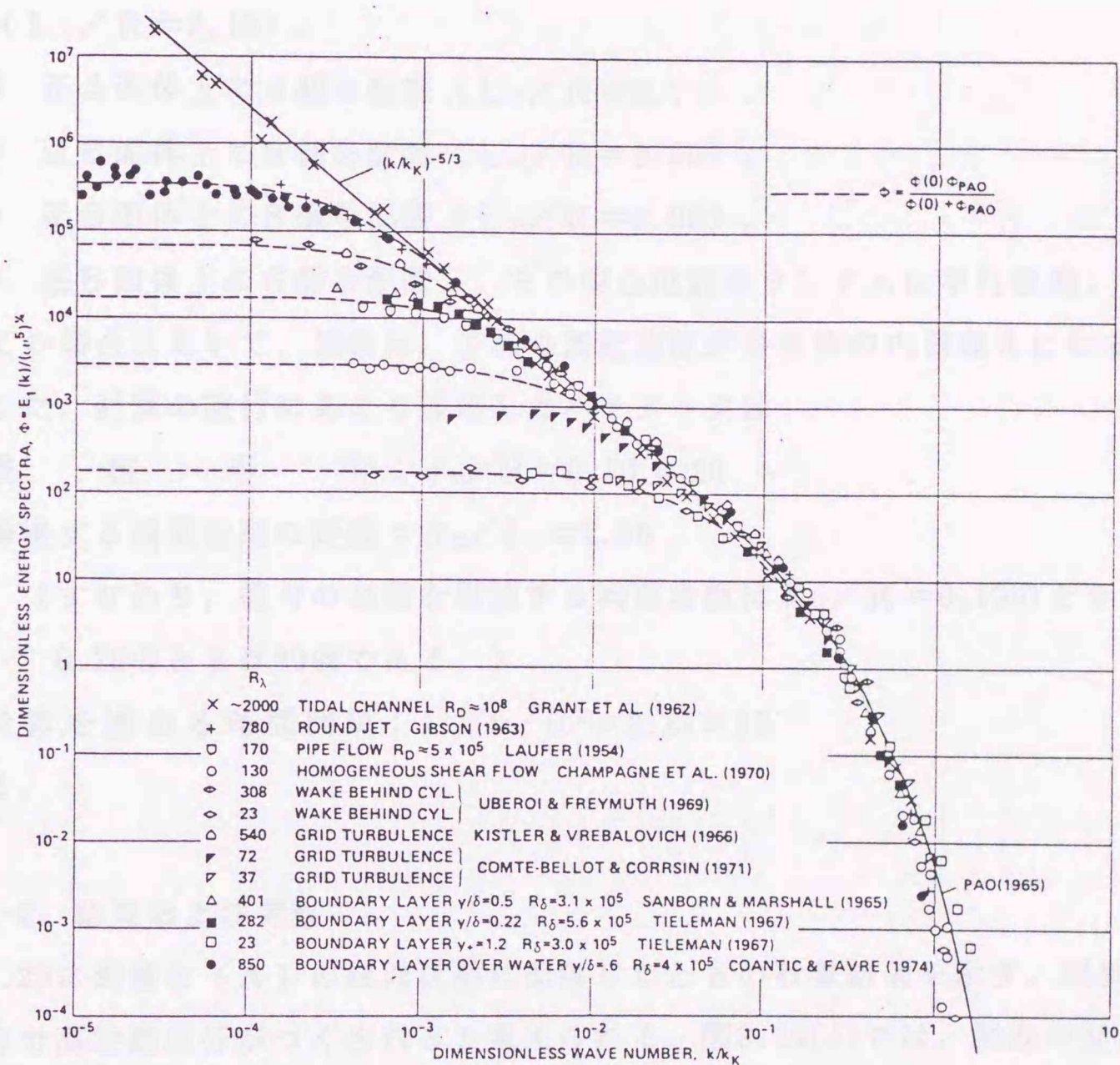


図3.28 様々な乱流における Kolmogorov の-5/3乗則 (Chapman 1979)



### 3-4-1 計算条件

初期状態での円形渦輪の配置は、次の5種類とした。 $L_P$ は多面体の一辺の長さである。

(A) 正6面体上に向かい合う2面を除き、他の面に1個ずつ合計4個の渦輪を配置 ( $L_P/R = 2.40$ ) .

(B) 正4面体上に4個を配置 ( $L_P/R = 3.71$ ) .

(C) 正6面体上に6個を配置 ( $L_P/R = 2.40$ ) .

(D) 正8面体上に8個を配置 ( $L_P/R = 3.96$ ) .

(E) 正6面体上に6個を配置し、その中心位置をランダムに平行移動。

全ての場合において、渦輪は、これの誘起速度が多面体の内側向きになる様に配置した。計算の実行にあたり採用したパラメータは

渦 核 半 径 :  $\sigma_o/R = 0.10, 0.20$

隣接する渦要素間の距離 :  $\sigma_o/l_o = 2.86$

(すなわち、個々の渦輪を構成する渦要素数は $\sigma_o/R = 0.10$ のとき180個、 $0.20$ のときは90個である。)

計算を進める時間間隔 :  $\Gamma \Delta t / R^2 = 2.27 \times 10^{-3}$

である。

### 3-4-2 結果および考察

図3.29に渦輪を(A)の初期状態に配置したときの計算結果を示す。渦輪の接触部分で高波数成分がつくられると考えられる。図3.29(d)では、渦度の発散による渦要素数の急激な増加が起きている。図3.30にそれぞれの時刻に対応するエネルギースペクトル $E(k)$ と波数 $k$ の関係を示す。図3.30(a)の初期状態では、 $-5/3$ 乗則の現れる波数範囲は極めて狭いが、渦輪の相互干渉が進行すると $kR = 10^1$ の付近において、 $-5/3$ 乗則に近くなる波数範囲のあることがわかる。図3.29(d)に対応する図3.30(d)のスペクトルの分布形状を見てもわかるように、渦要素の増殖が発生すると高波数領域のエネルギーが急速に大きくなる。このことによるスペクトルの $kR \approx 10^2$ のピークは、物理的には意味のないものとする。図3.31にはエンストロフィスペクトル $\Phi(k)$ の時間発展を示す。エンストロフィスペクトルは等方



性乱流では、エネルギー散逸スペクトル  $k^2 E(k)$  に一致する。この計算では等方性乱流を仮定していないが、エネルギースペクトルで  $-5/3$  乗則に近くなる波数範囲では、エンストロフィスペクトルは  $1/3$  に近い傾きとなる。とくに、図3.31(a)~(b)では  $\Phi(k)$  と  $k^2 E(k)$  は、同一のものとなった。

エネルギースペクトルの最大値を与える波数  $(k_E)_{max}$  は、流れ場の中で最も大きいエネルギーを持つ渦の波数と見なすことができる。したがって、この渦のスケール  $L$  は  $L=1/(k_E)_{max}$  によって求められる。同様に、エンストロフィスペクトルの最大値を与える  $(k_Q)_{max}$  によって、Kolmogorov のスケール  $\eta$  を  $\eta=1/(k_Q)_{max}$  と規定できる。等方性乱流では Taylor のマイクロスケール  $\lambda$  とエネルギーの散逸率  $\varepsilon$  の関係は

$$\varepsilon = 15\nu \frac{q^2}{\lambda^2}$$

である (Tennekes & Lumley 1972, Hinze 1975)。また

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk = 2\nu Q$$

とも書くことができる。よって  $\lambda$  は (3.5)

$$\lambda = \frac{5(T/\rho)}{Q}$$

と見積もることができる。しかし、この  $\lambda$  の定義では  $L < \lambda < \eta$  の関係を満足しない場合があった。本計算における  $\lambda$  の適当な定義を見いだすことができなかった。

図3.32は初期条件を (B)、図3.33は (C)、図3.34は (D) とした場合の渦輪の相互干渉の様子である。図3.35は初期条件 (A) の計算結果であるが、渦核半径を  $\sigma_0/R=0.20$  とした場合である。なお、図3.32~図3.35で、(c)は(b)と同一時刻における、渦度が初期状態の2倍以上になった渦要素の分布である。近似的に渦度の高い領域を示している。 $\sigma_0/R=0.10$  の対応するエネルギースペクトルを図3.36に、エンストロフィスペクトルを図3.37に示す。いずれの図においても (a)が初期状態、(b)が相互干渉がある程度進んだ状態である。先に述べた場合と同様に、ある程度渦の相互干渉が進むとKolmogorovの  $-5/3$  乗則の現れる傾向があることがわかる。



図3.38, 図3.39は, 正6面体上に配置した個々の渦輪をランダムに平行移動した状態を初期条件として計算した結果である。渦核半径が, 図3.38においては  $\sigma_0/R=0.10$ , 図3.39では  $\sigma_0/R=0.20$  である。この平行移動は,  $0\sim 1$  の範囲で発生する乱数を  $N_{ran}$  とするとき, 渦輪中心の座標に, 座標値が正の場合は  $0.5RN_{ran}$  を, 負の場合には  $-0.5RN_{ran}$  を加えることによって行っている。図3.40と図3.41はそれぞれ図3.38および図3.39に対応する(a)エネルギースペクトルと(b)エントロフィスペクトルの時間発展である。このときは $-5/3$ 乗則あるいは $1/3$ 乗則はみられない。渦度の大きい領域が図3.32~図3.35で示した分布に比して, 狭い領域に集中している。渦輪が相互に接触する部分が少なく, 波長の短い渦の変形が広い領域にわたって生じないことが $-5/3$ 乗則が現れない原因と思われる。

非粘性流体の理論では, 渦核半径  $\sigma_0 \rightarrow 0$  である。よって, 渦核半径  $\sigma_0 \rightarrow 0$  では, レイノルズ数が無限大であると考えられることもできる。円形渦輪のエネルギースペクトルは  $\sigma_0/R \rightarrow 0$  の場合, 低波数側は  $E(k) \propto k^2$ , 高波数側は  $E(k) \propto k^{-1}$  となることが示されている (Leonard 1985)。本計算方法においても, 渦核半径を小さくするとスペクトルの形状がこの傾向を示すことが確認される (図3.42)。先に述べた結果では, 渦輪の相互干渉によって高波数側の成分が大きくなり,  $-5/3$ 乗則が現れる傾向があった。したがって, 非粘性の極限では初期状態において, 両対数グラフで表示したエネルギースペクトルの高波数側では, すでに傾きが $-5/3$ よりも小さな $-1$ に比例する波数領域が存在するので, 複数の同一半径の渦輪を相互干渉させても $-5/3$ 乗則には成り得ないと思われる。このことより, Kolmogorovの理論ではレイノルズ数が無限大の極限では  $E(k) \propto k^{-5/3}$  となることを考慮すると,  $Re \rightarrow \infty$  では  $\sigma_0/R \rightarrow 0$  とはならないことを示唆するものと考えられる。また, それぞれ異なる半径, 太さの渦輪を適当に配置することによって, より広い波数範囲において $-5/3$ 乗則が得られる可能性がある。これらのことは今後の課題である。



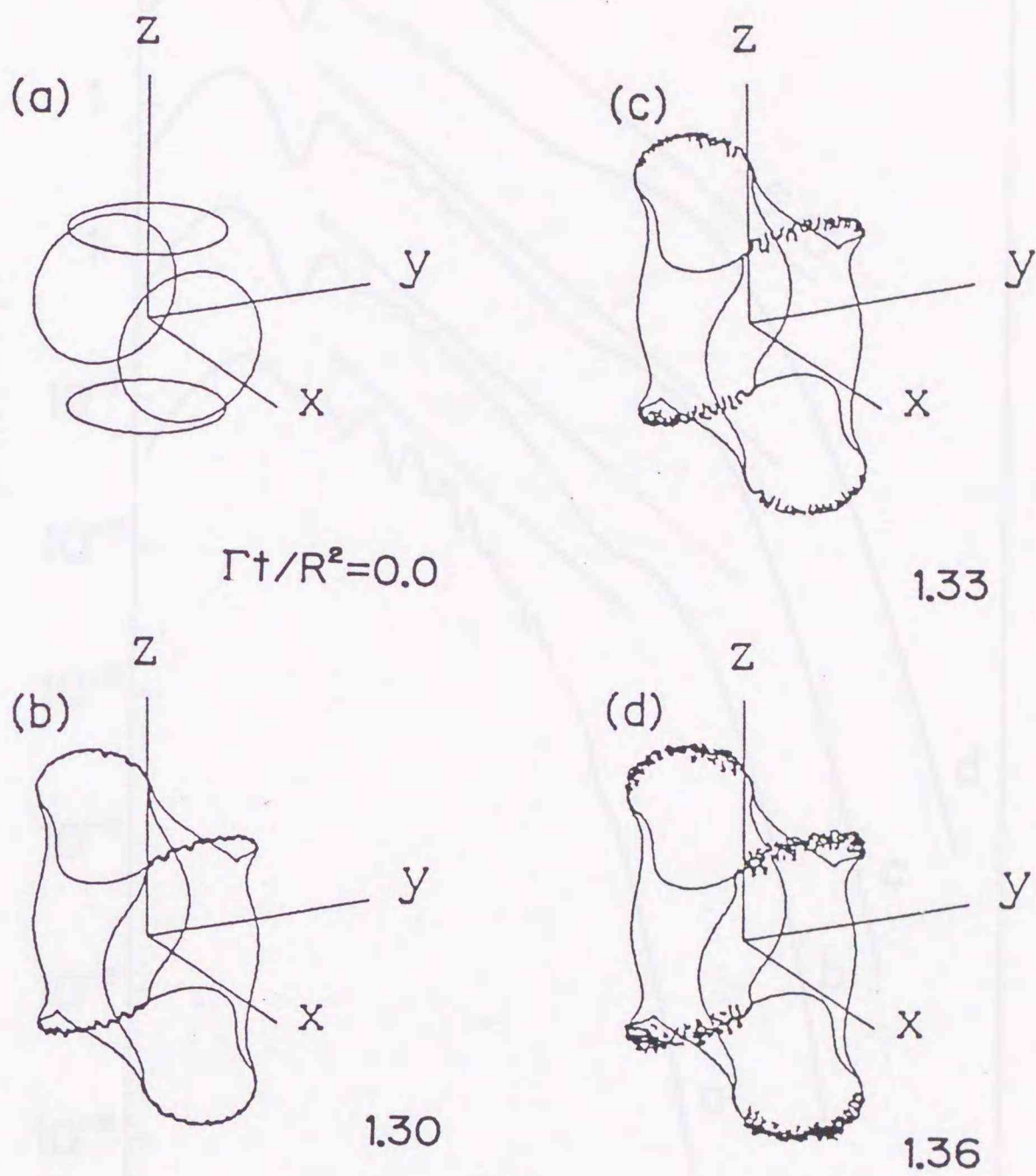


図3.29 配置 (A) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0 / R = 0.10$ )



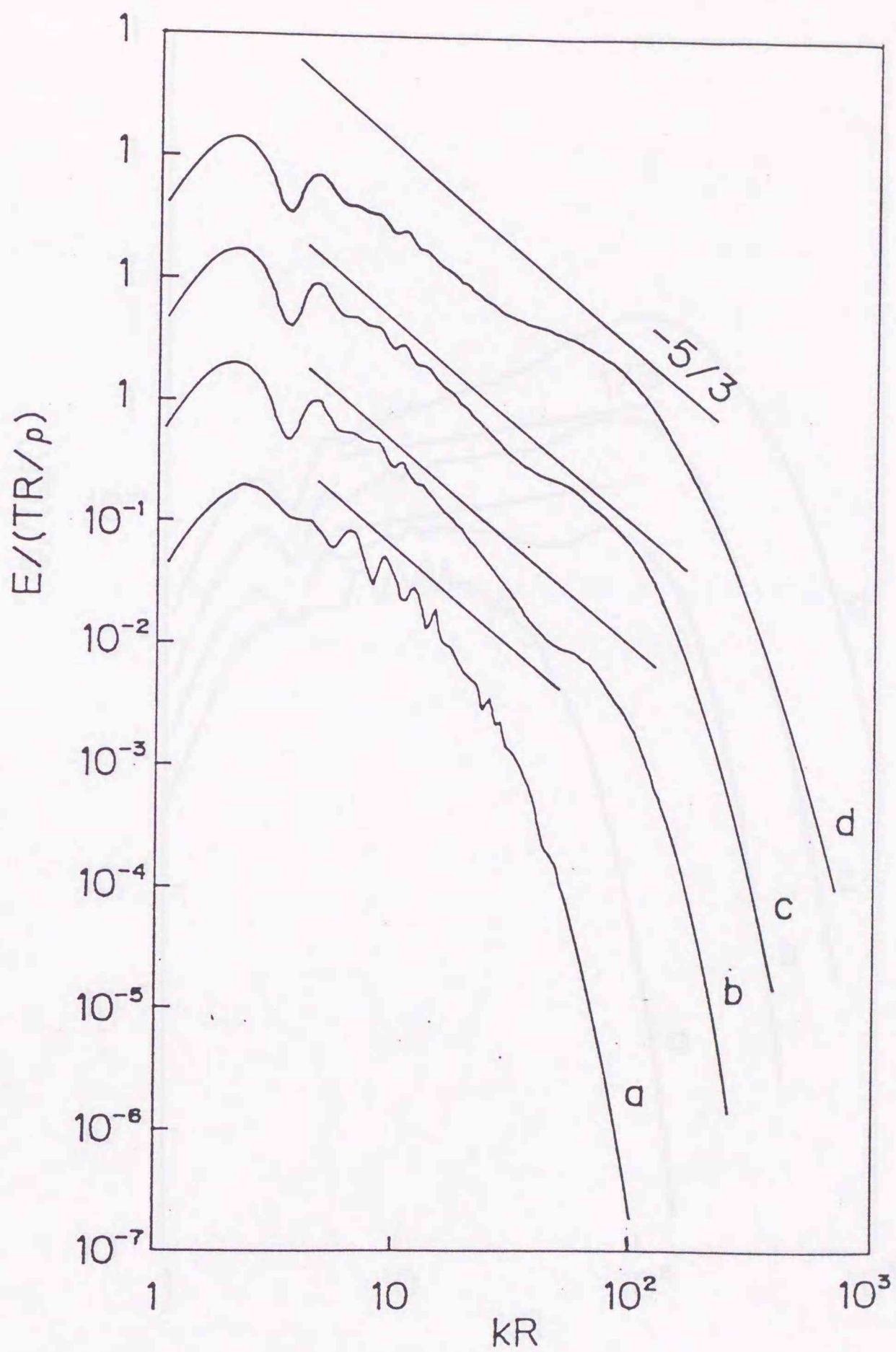


図3.30 配置 (A) のエネルギースペクトルの時間発展 ( $\sigma_0/R = 0.10$ )

(a)  $\Gamma t/R^2 = 0.0$ , (b)  $1.33$ , (c)  $1.35$ , (d)  $1.36$



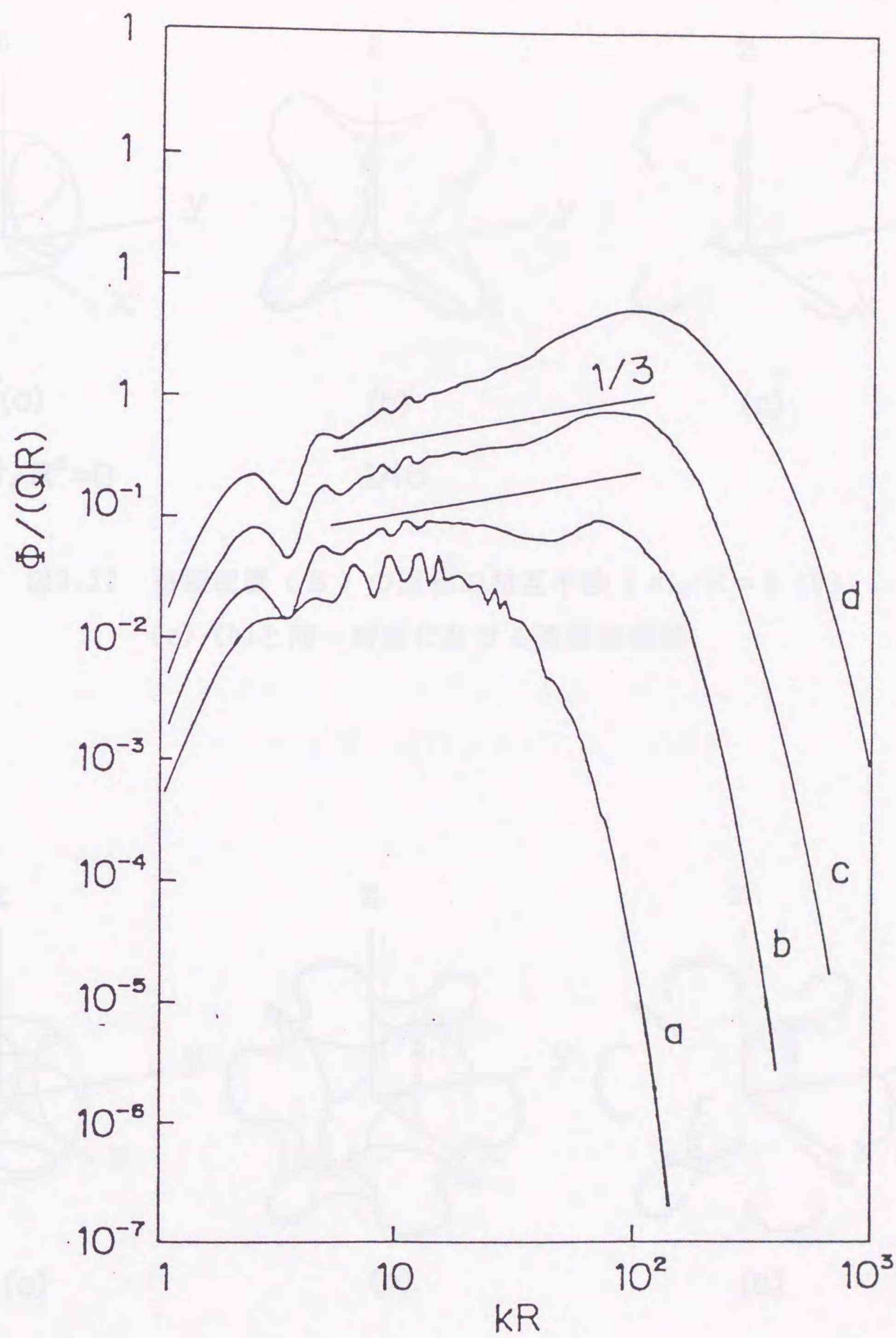


図3.31 配置 (A) のエントロフィスペクトルの時間発展 ( $\sigma_0/R=0.10$ )  
 (a)  $\Gamma t/R^2=0.0$ , (b)  $1.33$ , (c)  $1.35$ , (d)  $1.36$



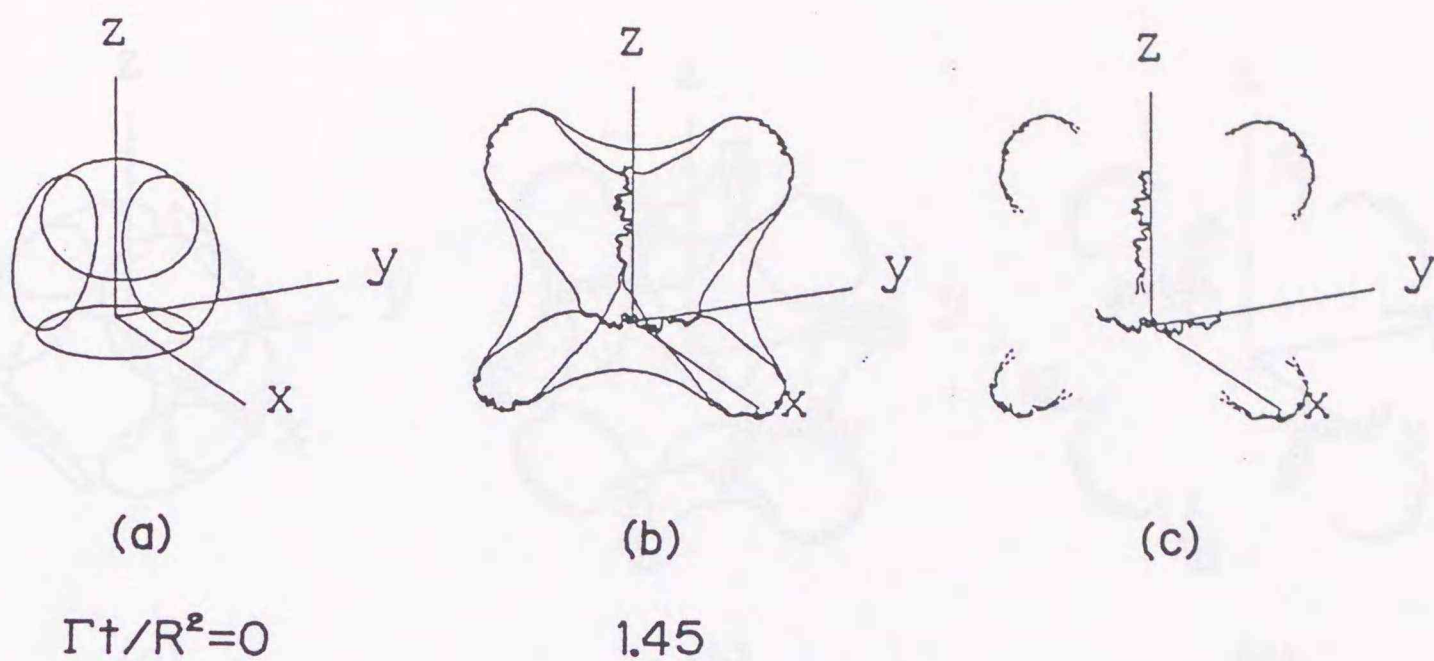


図3.32 初期配置 (B) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0/R = 0.10$ )

(c) (b)と同一時刻における高渦度領域

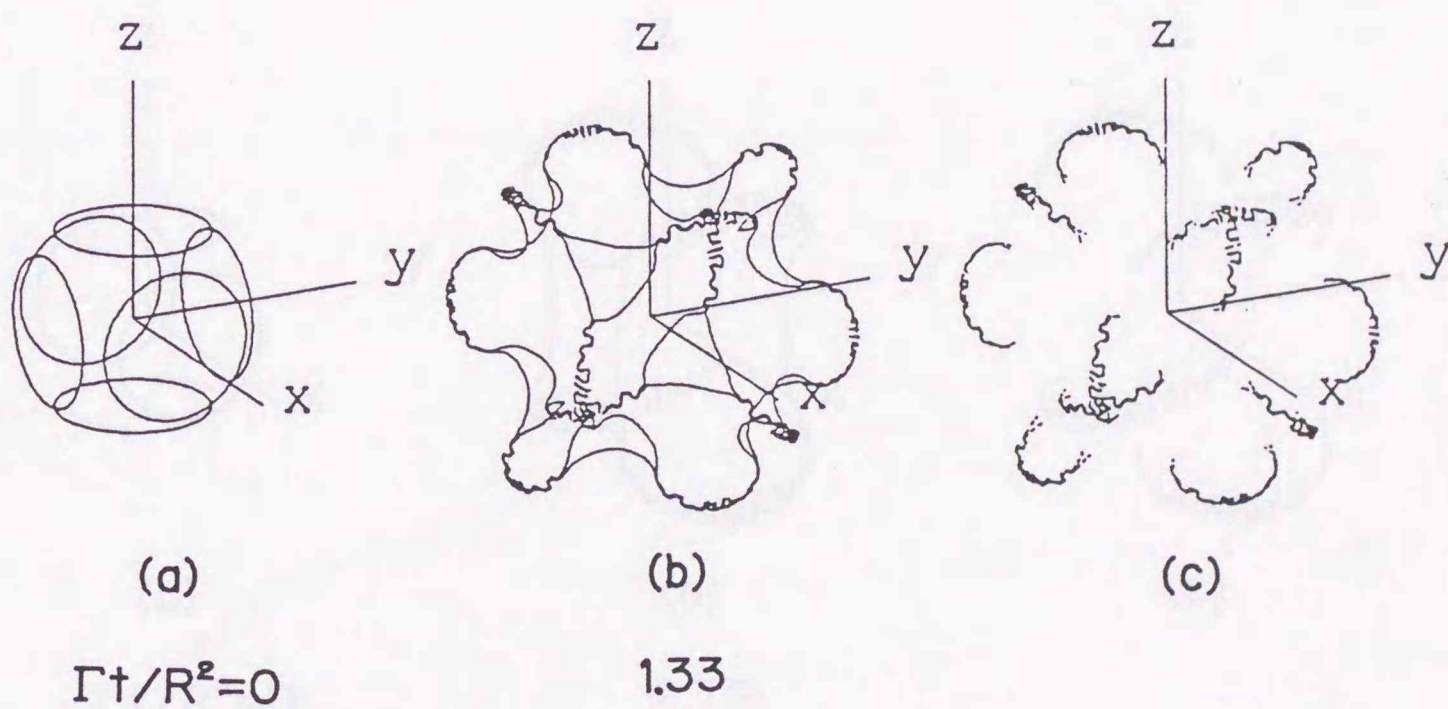


図3.33 初期配置 (C) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0/R = 0.10$ )

(c) (b)と同一時刻における高渦度領域



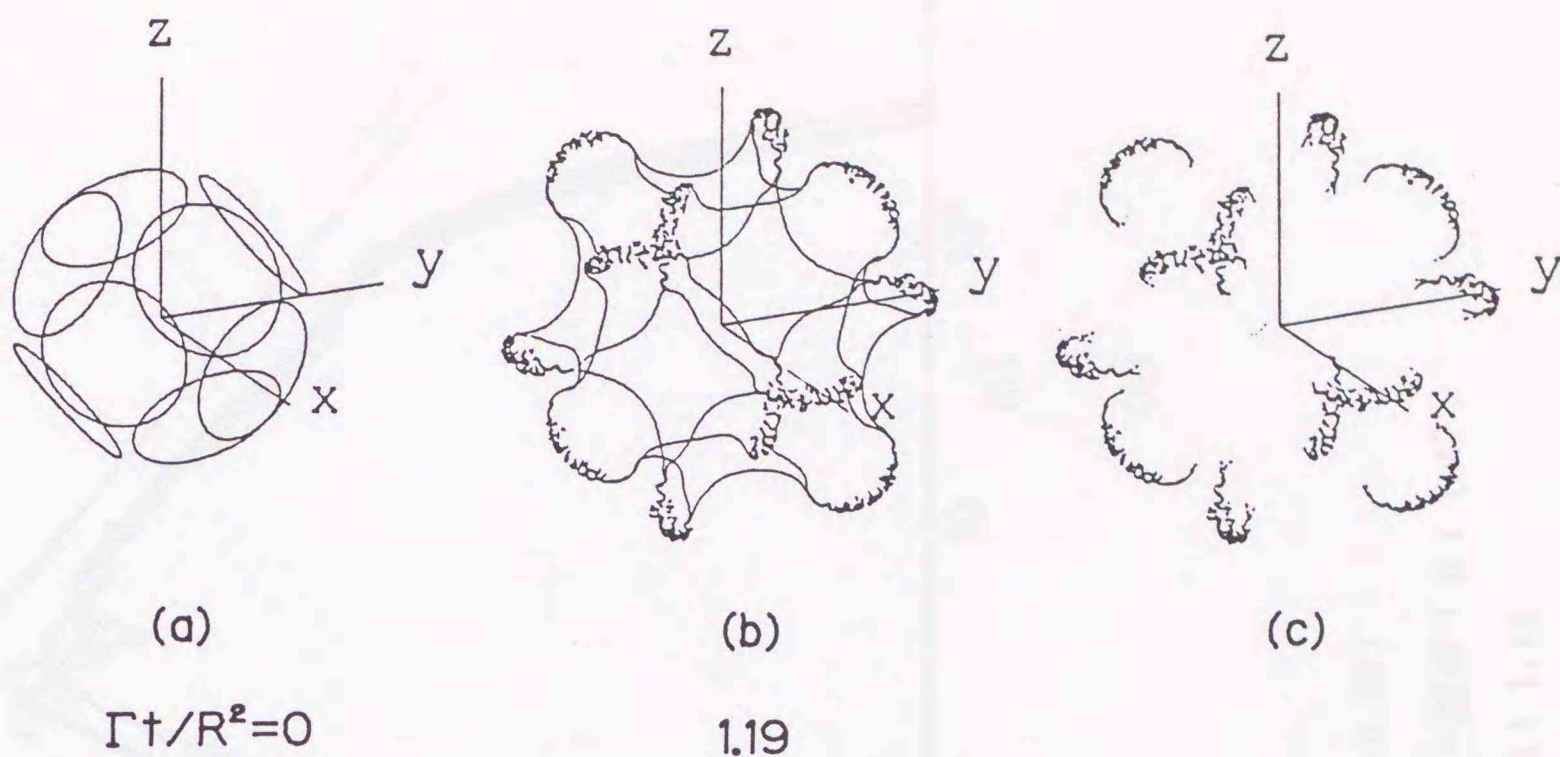


図3.34 初期配置 (D) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0/R=0.10$ )  
(c) (b)と同一時刻における高渦度領域

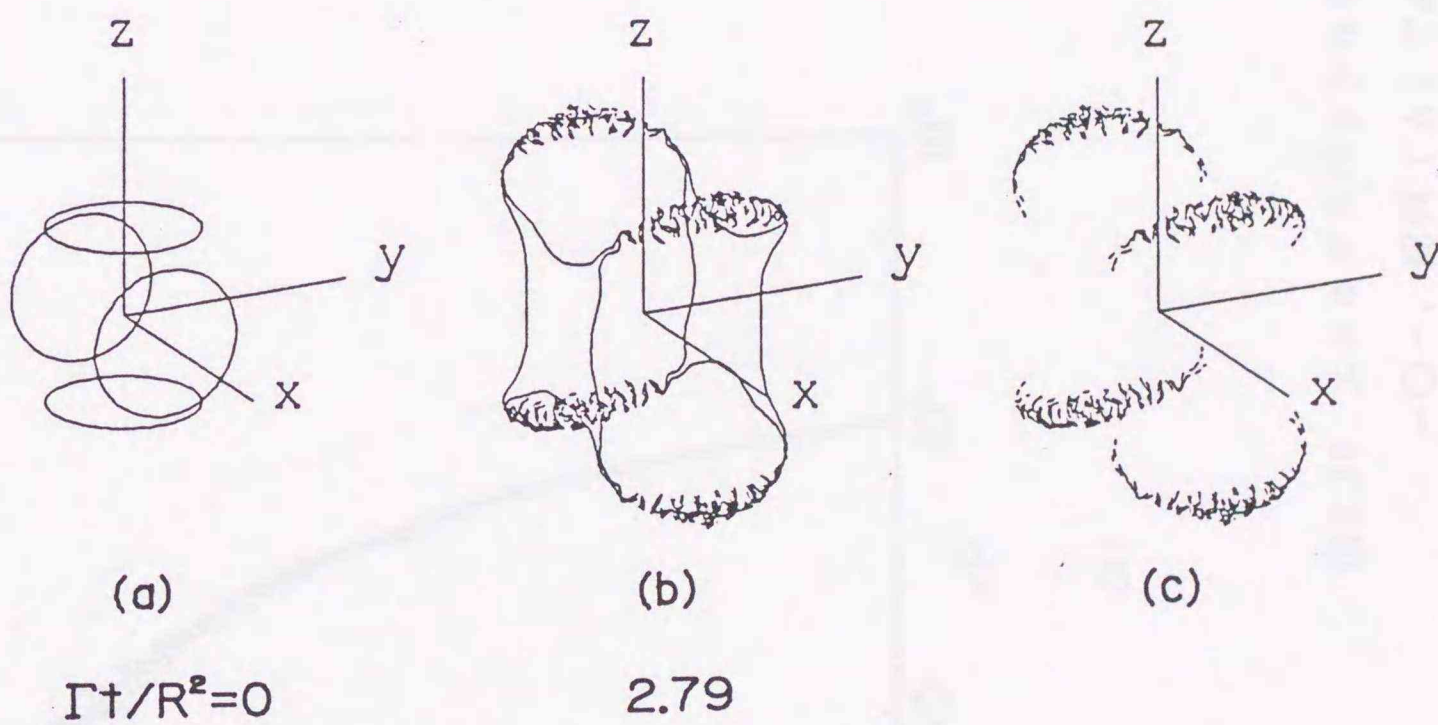
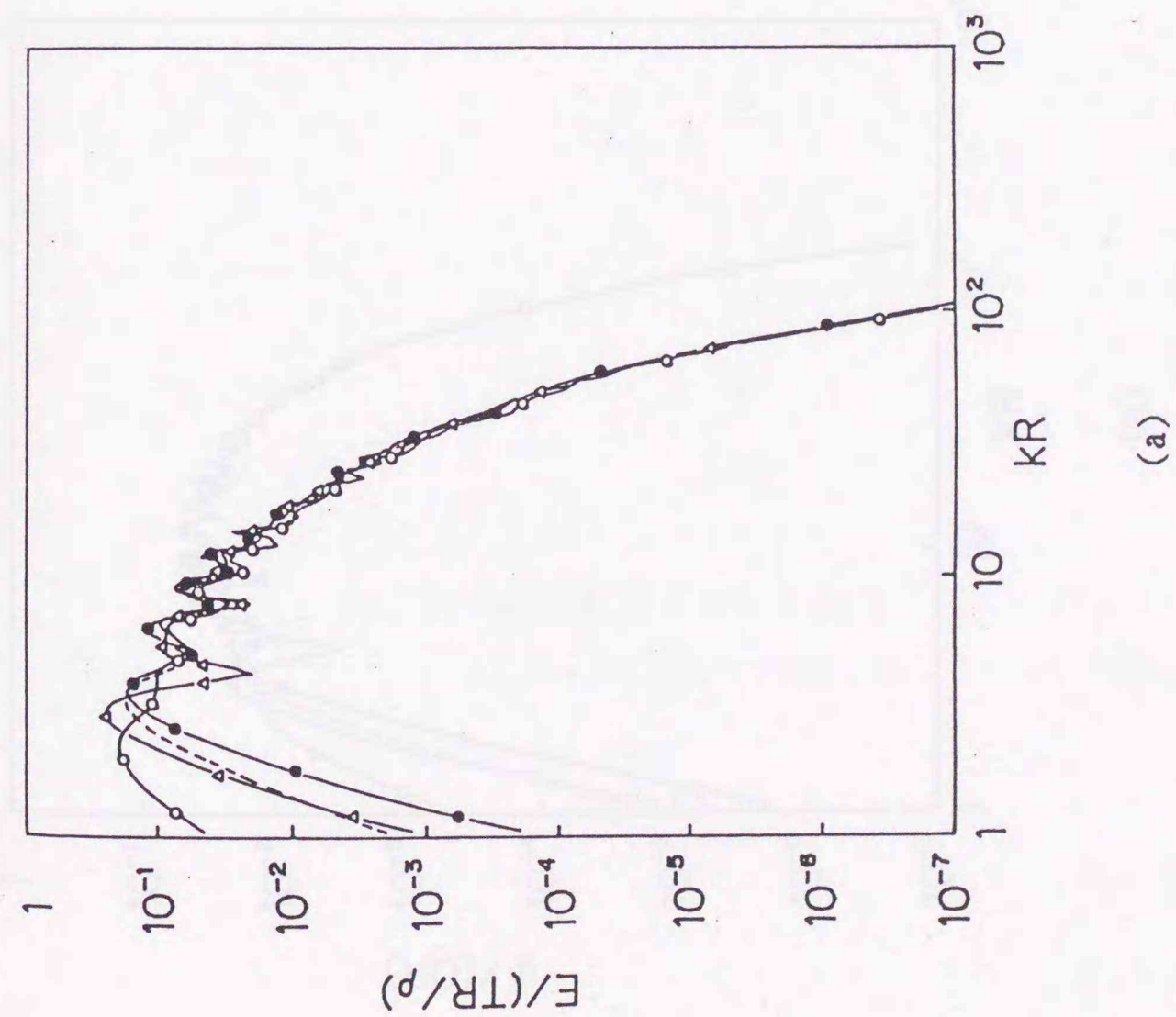
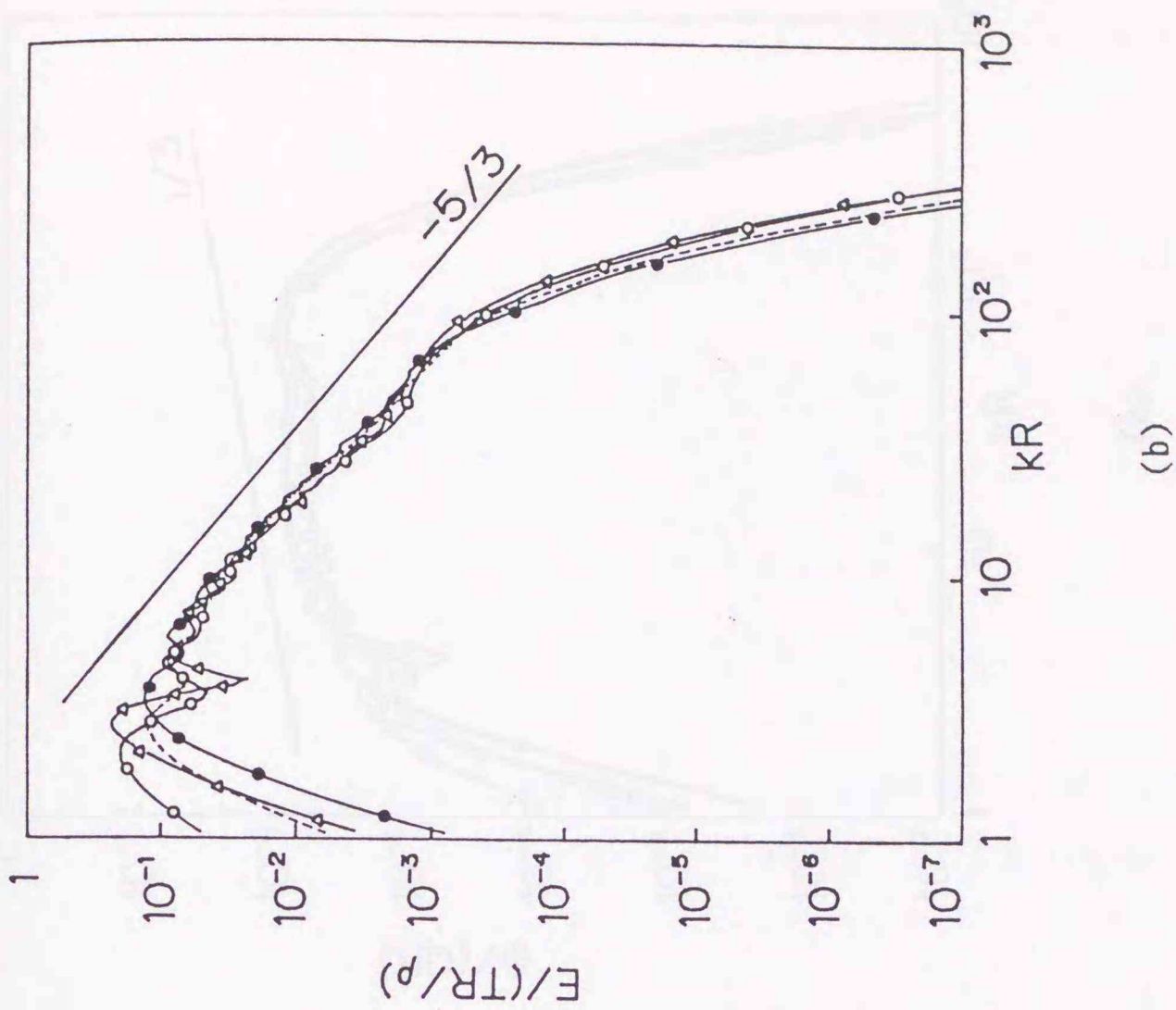


図3.35 初期配置 (A) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0/R=0.20$ )  
(c) (b)と同一時刻における高渦度領域





(a)



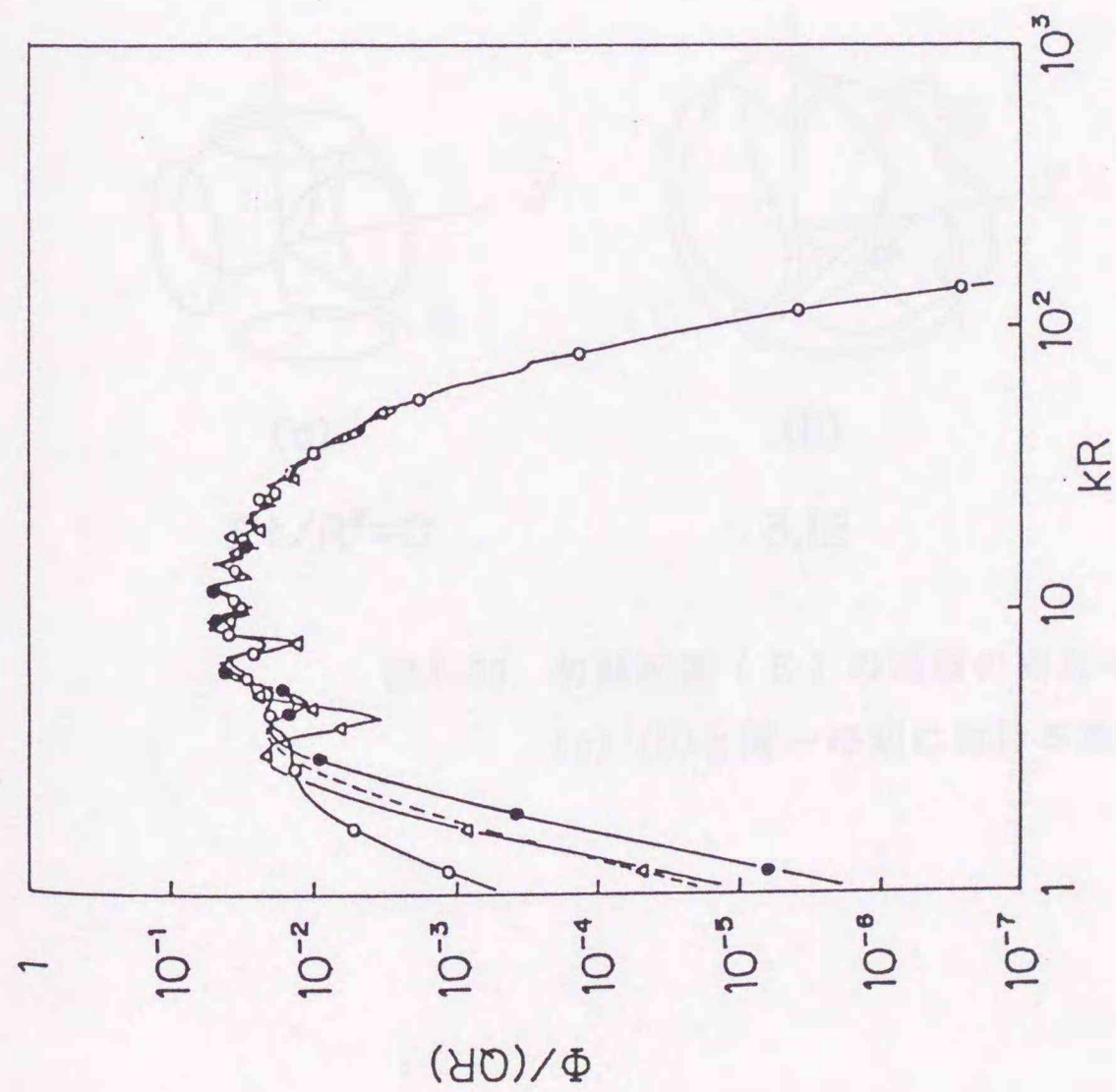
(b)

図3.36 エネルギースペクトルの時間発展 ( $\sigma_0/R=0.10$ )

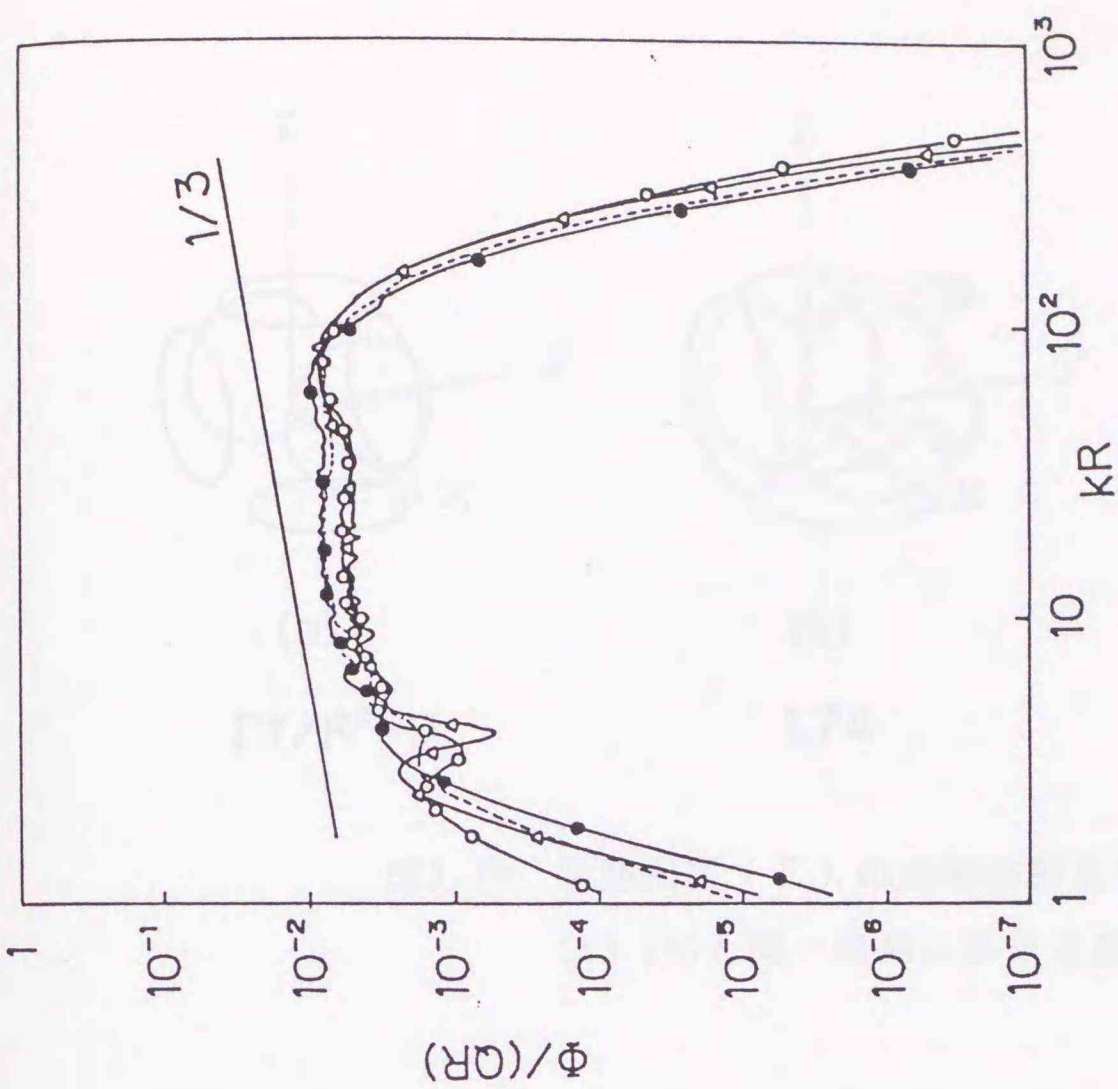
—○—, 配列 (A)  $\Gamma \Delta t/R^2=1.34$ ; — — — 配列 (B) 1.47;

—△—, 配列 (C) 1.33; —●—, 配列 (D) 1.19





(a)



(b)

図3.37 エンストロフスペクトルの時間発展 ( $\sigma_0/R = 0.10$ )

-○-, 配列 (A)  $\Gamma \Delta t / R^2 = 1.34$ ; - - - 配列 (B) 1.47;

-△-, 配列 (C) 1.33; -●-, 配列 (D) 1.19



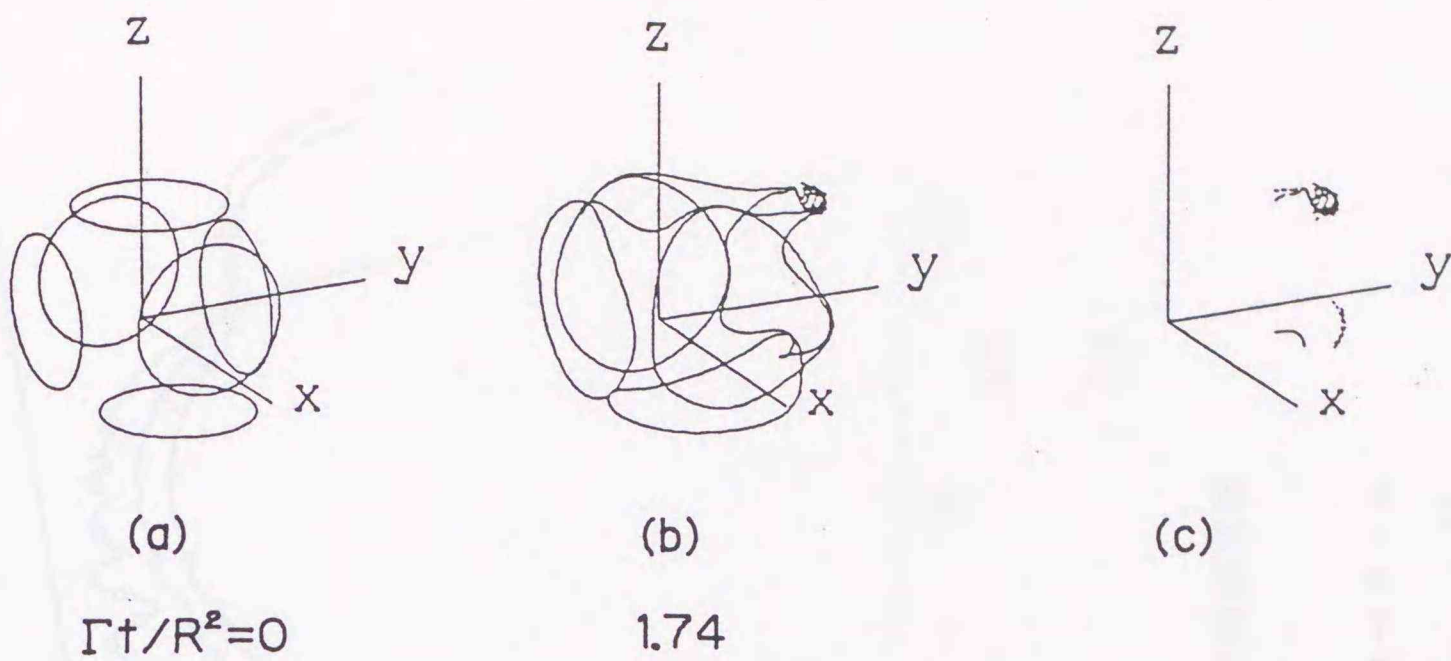


図3.38 初期配置 (E) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0/R = 0.10$ )

(c) (b)と同一時刻における高渦度領域

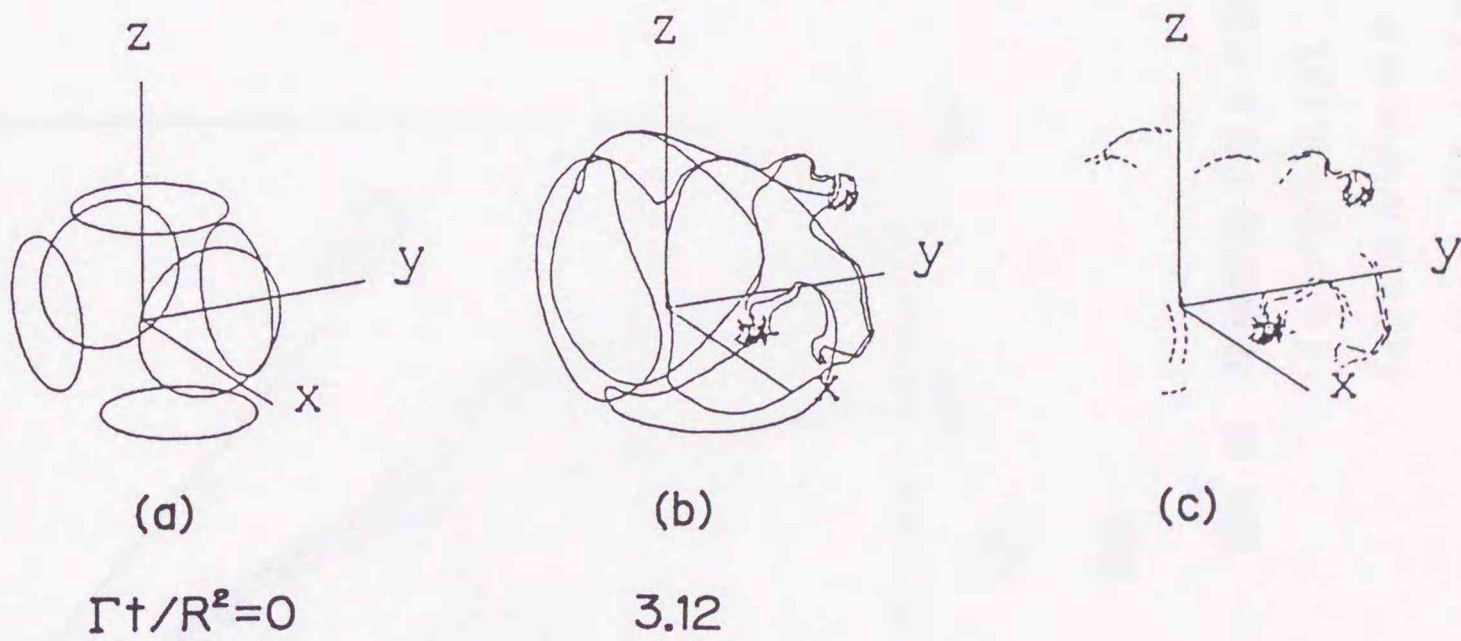


図3.39 初期配置 (E) の渦輪の相互干渉 ( $\sigma_0/R = 0.20$ )

(c) (b)と同一時刻における高渦度領域



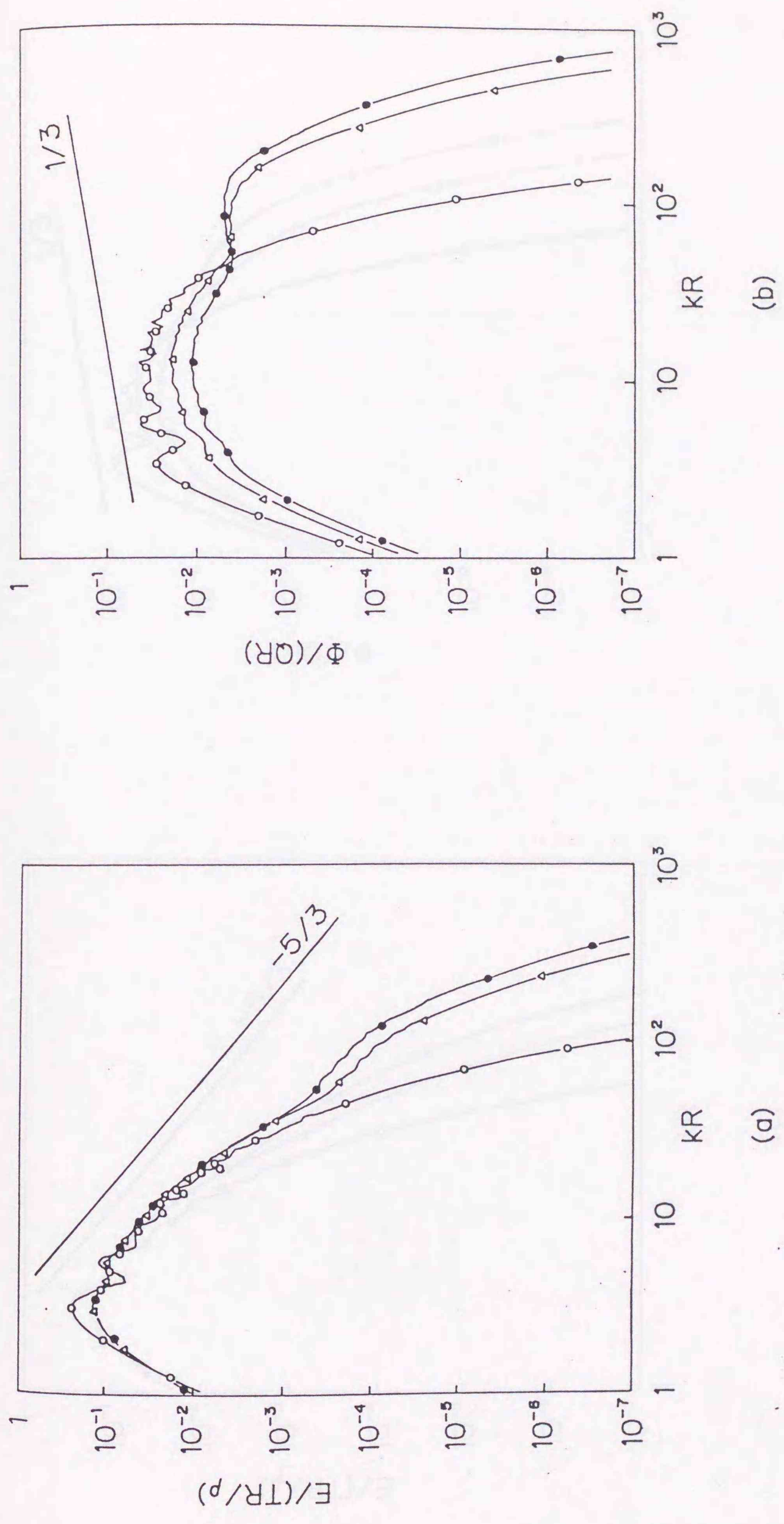


図3.40 初期配置 (E) の渦輪の相互干渉スペクトルの時間発展

( $\sigma_0/R = 0.10$ )

(a) エネルギースペクトル, (b) エンストロフィスペクトル  
 $-O-$ ,  $\Gamma t/R^2 = 0.0$ ;  $-\Delta-$ ,  $1.74$ ;  $-\bullet-$ ,  $1.75$



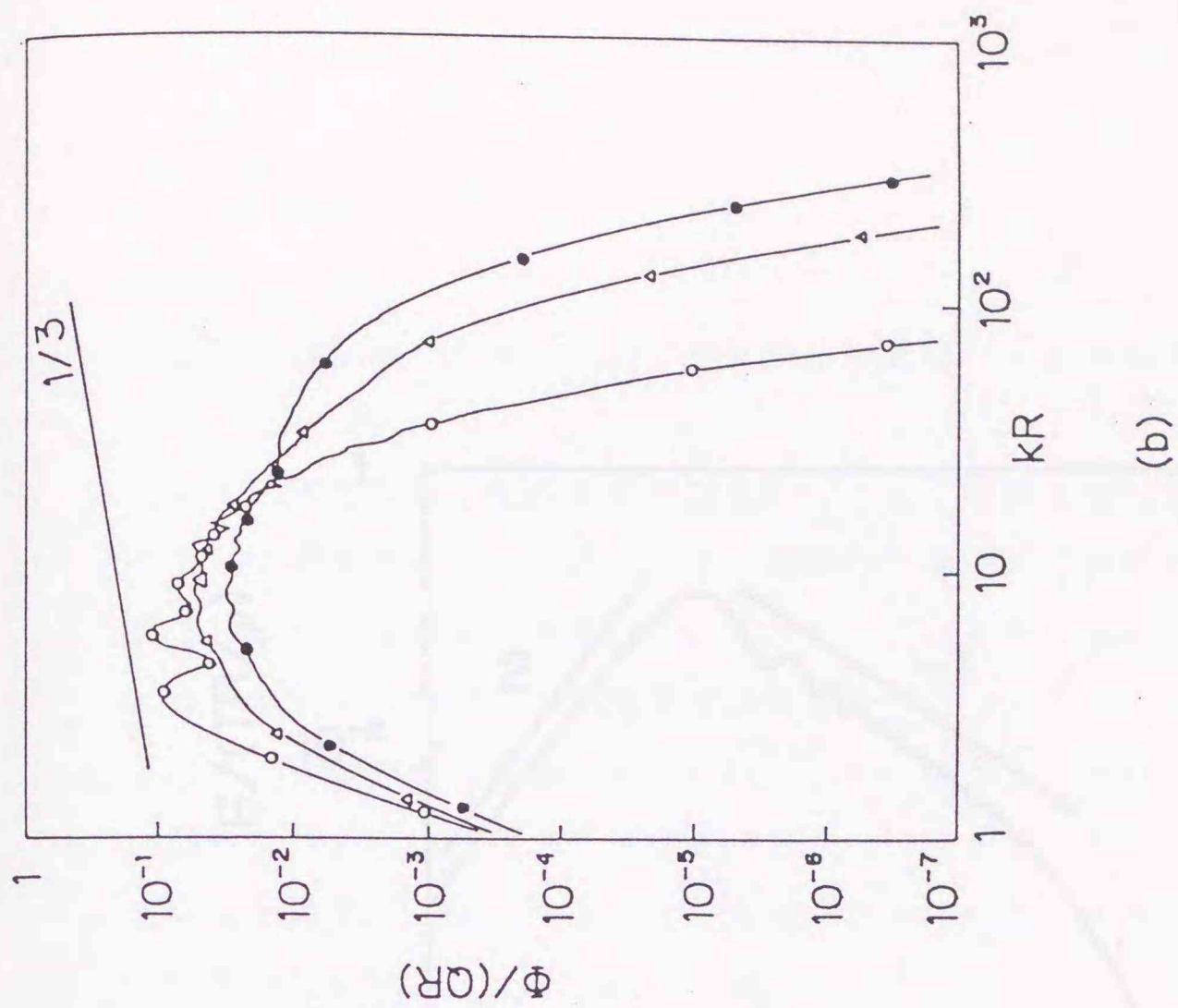
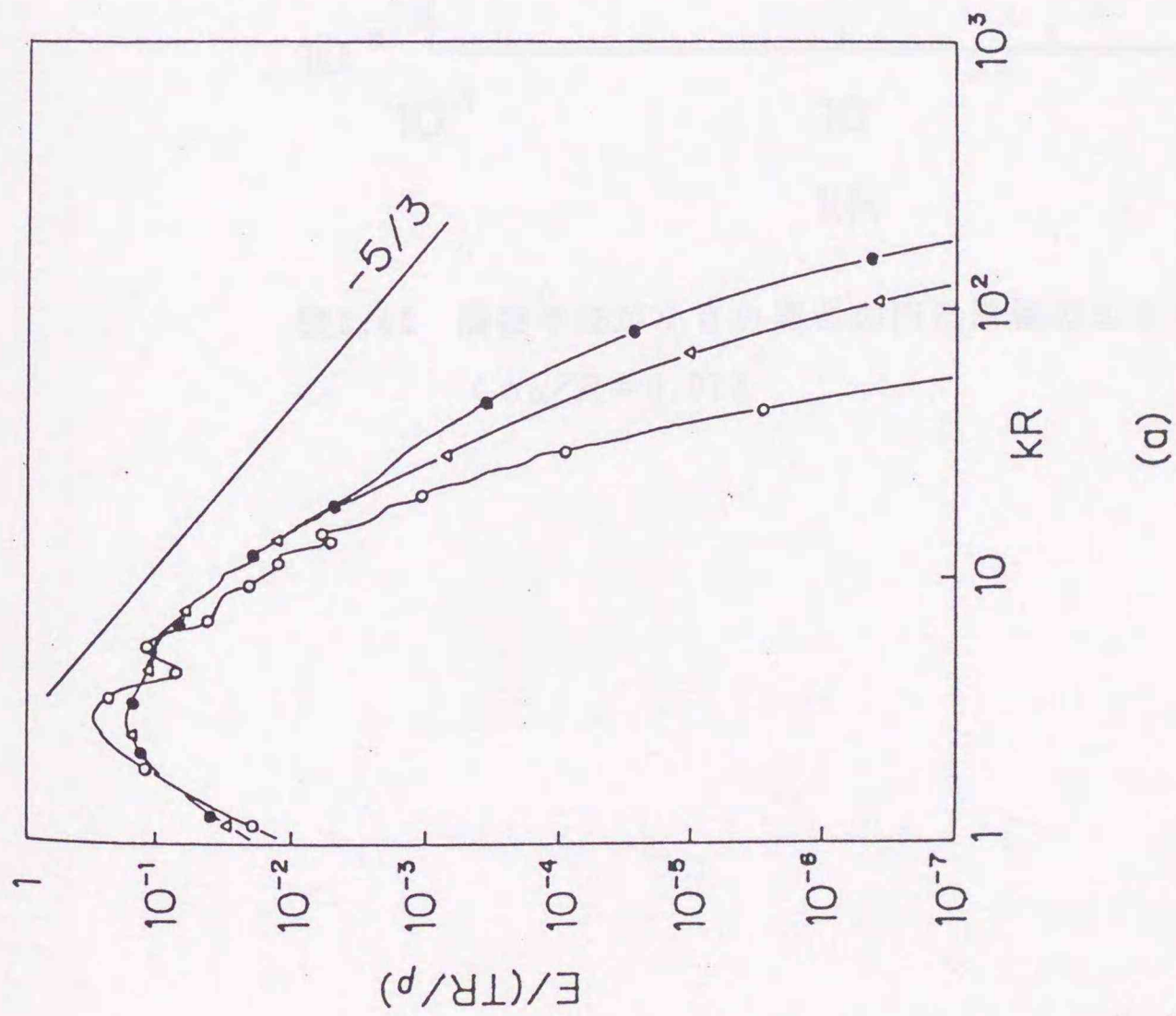


図3.41 初期配置 (E) の渦輪の相互干渉スペクトルの時間発展

( $\sigma_0/R = 0.20$ )

(a) エネルギースペクトル, (b) エンストロフィスペクトル  
 $-\circ-$ ,  $\Gamma t/R^2 = 0.0$ ;  $-\triangle-$ ,  $3.13$ ;  $-\bullet-$ ,  $3.19$



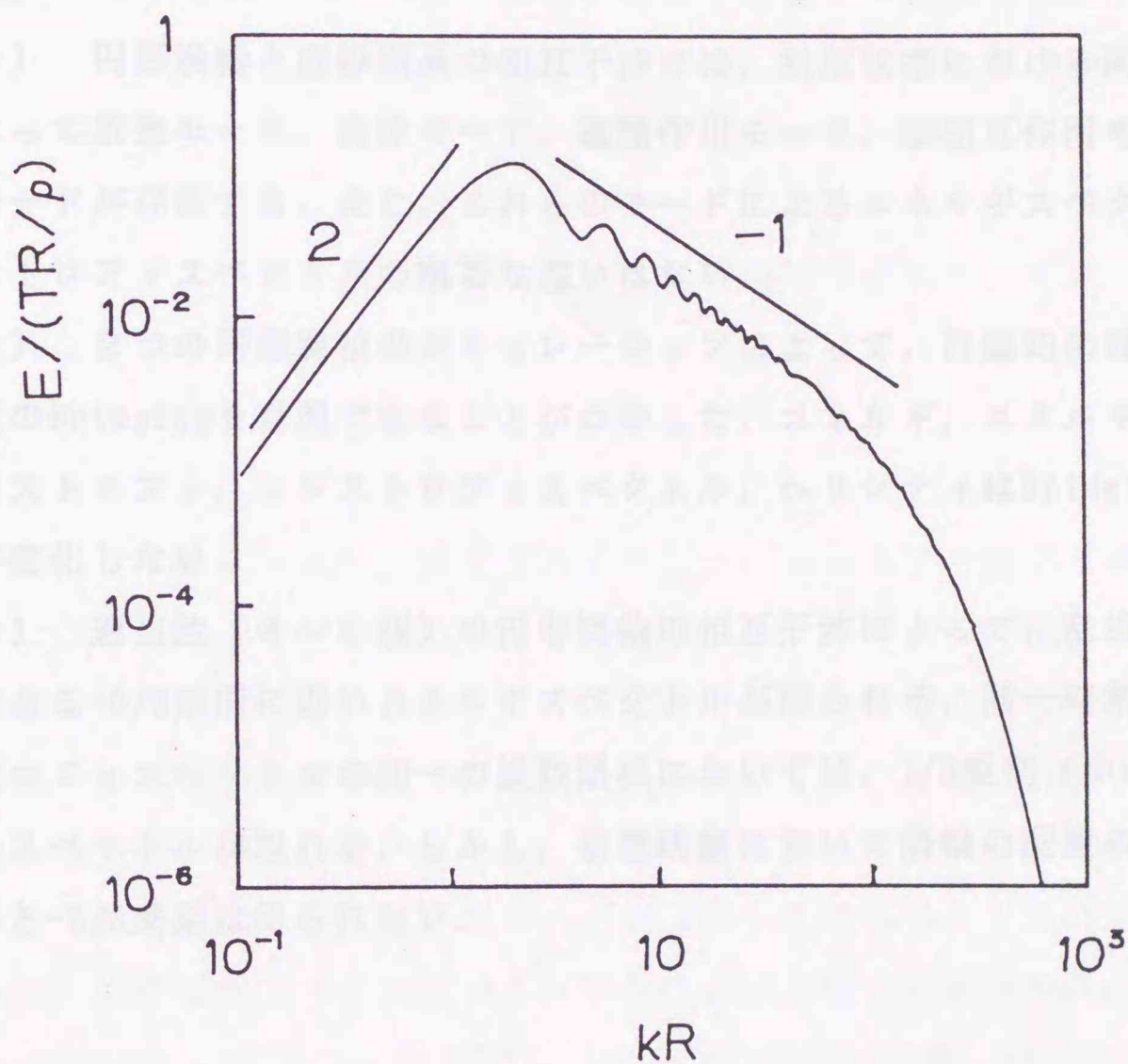


図3.42 渦核半径が小さい場合の円形渦輪のエネルギースペクトル  
( $\sigma_0/R = 0.01$ )



### 3-5 第3章の総括

3次元離散渦法によって渦の相互作用を計算した結果以下のことが明らかになった。

(1) 円形渦輪と直線渦糸の相互干渉には、初期状態における両者の相対位置によって置換モード、合体モード、遠隔作用モード、弱相互作用モードの4種類のモードが存在する。また、これらのモードによるエネルギースペクトルおよびエントロフィスペクトルの顕著な違いはない。

(2) 2つの円形渦輪のシミュレーションによって、自動的に渦のつなぎ換えの際のBridgingを表現できることがわかった。エネルギー、エネルギースペクトル、エントロフィ、エントロフィスペクトル、ヘリシティはBridgingの発生によって変化しない。

(3) 適当数(4~8個)の円形渦輪の相互干渉によって、乱流の普遍的な性質である $-5/3$ 乗則に近いエネルギースペクトルが得られる。同一時刻におけるエントロフィスペクトルの同一の波数領域においては、 $1/3$ 乗則( $\Phi(k) \propto k^{1/3}$ )に近いスペクトルが現れる。しかし、初期状態において渦輪の配置の対称性がなくなると $-5/3$ 乗則は得られない。



## 第4章 非円形渦輪の変形と分裂

噴流，後流，混合層，境界層のせん断乱流中には，組織的渦構造が存在することは前に触れたとおりである．噴流を考えると，噴流中の組織的渦構造の形状は，ノズル近傍ではノズルの形と一致する．噴流中の組織的渦構造のモデルとして渦輪があげられ，したがって，渦輪の変形を調べることは組織的渦構造の挙動を定性的に調べることに対応する．

非円形噴流は，円形噴流あるいは2次元噴流に比較して，下流への拡大率，周囲流体との混合が大きい．例えば，長径・短径比（アスペクト比と呼ぶ）が2:1の楕円噴流の混合は円形噴流のその数倍であること，特にノズルの短軸方向の物質混合効果が大きいことが報告されている（Ho & Gutmark 1987）．

ノズルやオリフィスから放出され，ポテンシャルコアを有する噴流の出口近傍では，出口と同一形状の渦輪が形成されている．これらの渦輪は下流に移動する過程で前後の渦輪と相互作用をして，複雑な渦構造を形成する．このような非円形噴流の特性を理解する上で，噴流の出口形状と同一形状の渦輪の変形過程から定性的な知識を得ることができる．例えば，適当な周波数（せん断層の自由振動数の1/8）で励起された正方形および正三角形の噴流は，下流への距離の増加とともに，辺が回転（スイッチング）することが実験的に明らかにされている（豊田 & Hussain 1989）．これに対応して単一の正方形渦輪，正三角形渦輪も辺の回転を示す（Kambe & Takao 1971, 豊田 & Hussain 1989, Koshigoe et al. 1989）．さらに，アスペクト比が4:1の楕円噴流の分岐と，楕円形渦輪が2個の渦輪に分裂することは互いに定性的に対応した挙動である（Hussain & Husain 1989）．

楕円形噴流，長方形噴流などの細長い噴流は，アスペクト比の大小によって非円形噴流の特徴である軸の切り替わりあるいは分岐を引き起こす（土屋 et al. 1985）．したがって，細長い形状の渦輪をアスペクト比を変化させて，系統的に調べることは工学的に重要である．過去にアスペクト比が1.25～5.0の楕円渦輪に対する計算と実験が行われているが（Dhanak & De Bernardinis 1989），さらに広範囲のアスペクト比について解析する必要がある．

第4章では，このような観点にたって，図4.1のに示す長方形の2つの短辺をそ



の長さに等しい直径をもつ半円で置き換えた細長い形状の渦輪（擬楕円渦輪と呼ぶ）の変形と分裂を，3次元離散渦法を用いた数値解析によって明らかにする．4-1 では渦輪の断面を一つの渦要素，すなわちsingle chainで表現した計算結果を，4-2 では渦核構造を表すsmoothing functionをより高次のものに変え，その断面を，渦核の変形も表現することができるように，多数の（25個）渦要素（multi chain）で表した場合の計算結果を述べる．

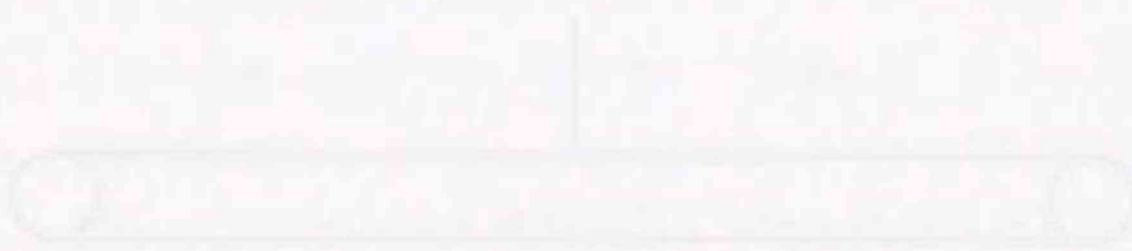
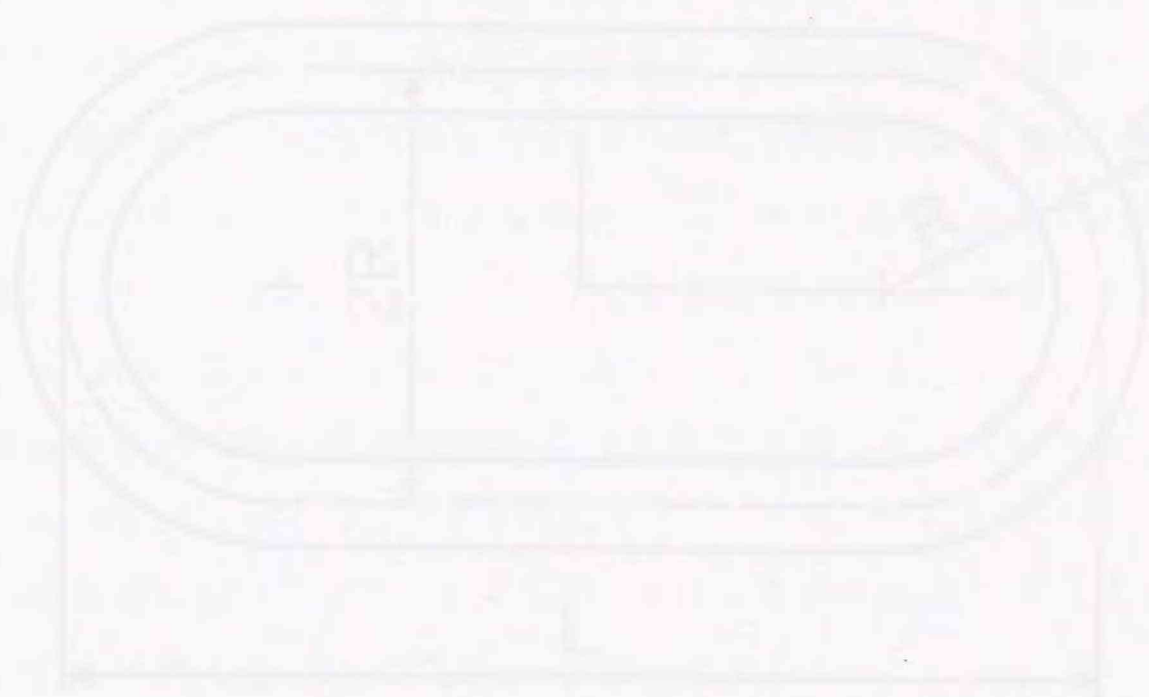


図4-1 擬楕円渦輪



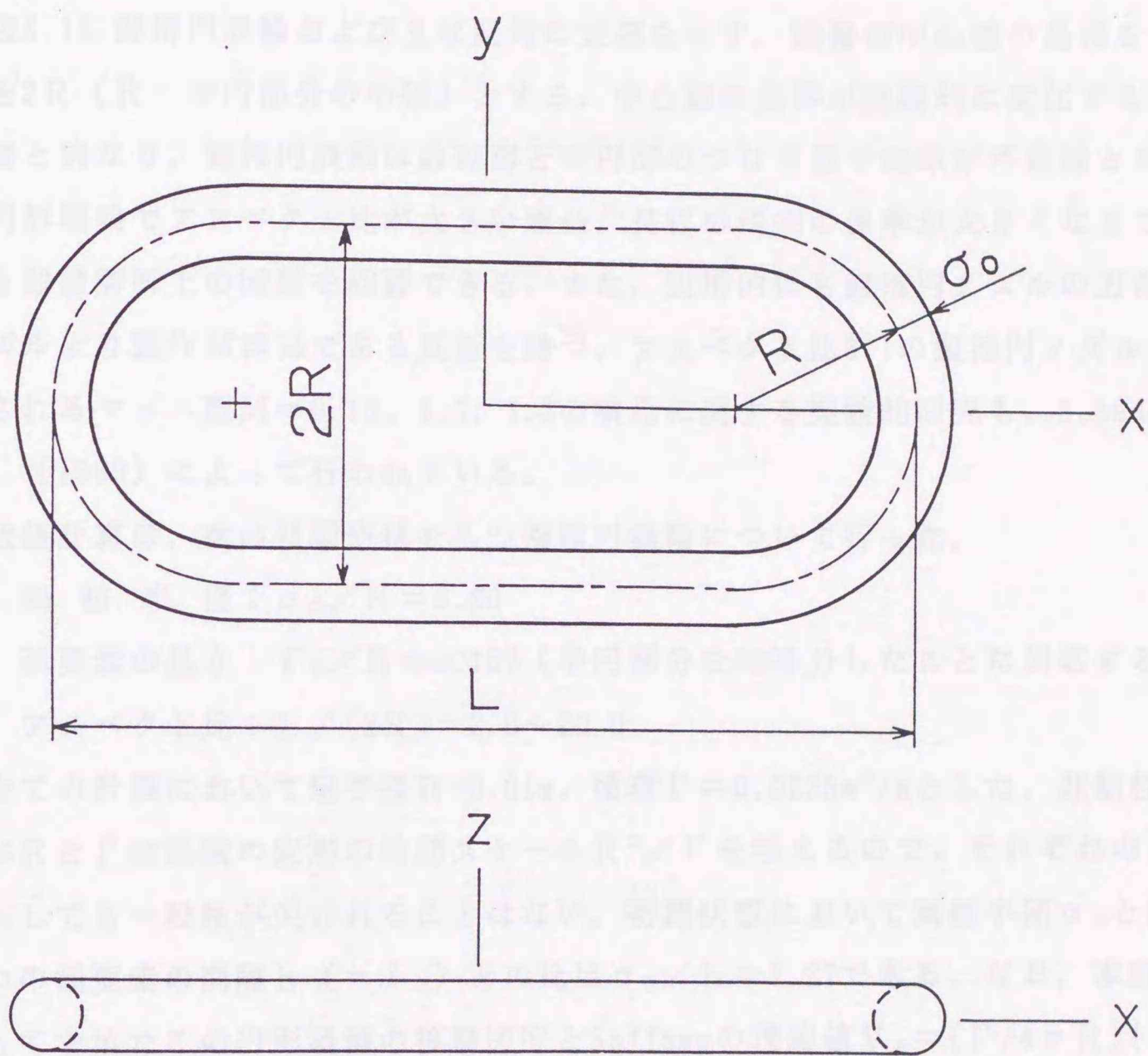


図4.1 擬楕円渦輪



#### 4-1 擬楕円渦輪の変形 (single chain)

##### 4-1-1 計算条件

図4.1に擬楕円渦輪および主な記号の定義を示す。渦輪の中心線の長径を $L$ ，短径を $2R$ （ $R$ ：半円部分の半径）とする。中心線の曲率が連続的に変化する楕円形渦輪と異なり，擬楕円渦輪は直線部と半円部のつなぎ目で曲率が不連続となるが，楕円形渦輪でアスペクト比が大きい場合，長径の両端の曲率が大きくなることに伴う数値解析上の困難を回避できる。また，実用的にも擬楕円ノズルの方が楕円ノズルより製作が容易である長所を持つ。アスペクト比3:1の擬楕円ノズルから放出されるマッハ数 $M=0.15, 1.0, 1.3$ の噴流に関する実験的研究も，Schadow et al. (1989) によって行われている。

数値計算は，次の初期形状をもつ擬楕円渦輪について行った。

渦核半径： $\sigma_0/R=0.20$

渦要素の長さ： $l_0/R=0.157$ （半円部分を20等分したことに対応する）

アスペクト比： $L/(2R)=2.0\sim 20.0$

全ての計算において短半径 $R=0.01\text{m}$ ，循環 $\Gamma=0.0225\text{m}^2/\text{s}$ とした。非粘性流体では $R$ と $\Gamma$ は渦輪の変形の時間スケール $R^2/\Gamma$ を与えるので，それぞれの値を一定にしても一般性が失われることはない。初期状態において渦核半径 $\sigma_0$ と隣合う2つの渦要素の間隔 $h(=l_0)$ との比は $\sigma_0/h=1.27$ である。なお，本計算によって求めたこの円形渦輪の移動速度とSaffmanの理論値 $V_R=(\Gamma/4\pi R)\{\ln(8R/\sigma_0)-0.558\}$  (Leonard 1985) との差は2%以内であった。渦要素を移動させる時間間隔は $\Gamma\Delta t/R^2=0.0050$ とした。この値を1/2にしても，後に示す分裂時間などの計算結果に有意な差はなかった。なお，この時間間隔を同じ渦核半径 $\sigma_0/R=0.20$ をもつ円形渦輪の移動速度 $U_0$ を使って無次元化すると $U_0\Delta t/R=0.00126$ となる。この $\Delta t$ の値は円形渦輪がその半径 $R$ に等しい距離を進む時間の1/500以下であり，十分に小さいと考えてよい。

後に述べるように，アスペクト比の大きい擬楕円渦輪では二つの部分が接触し，その後で分裂する変形モードがある。このとき接触部分を構成する渦要素の渦度が急激に増加し，計算を続けることができなくなる。これを避けるために，渦度



ベクトルの向きが反対の2つの渦要素が、ある距離まで接近して次の条件を満たした場合、これらの渦要素を消去した。

$$\frac{\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta}{|\gamma^\alpha| |\gamma^\beta|} \leq c_1, \quad \frac{r_{\alpha\beta}}{\sigma_0} \leq c_2 \quad (4.1)$$

本計算では、 $c_1 = -0.995$ 、 $c_2 = 4.0$ としている。すなわち、消去する条件(4.1)の第一式は渦要素間の渦度ベクトルの角度 $\theta$ が $5.73^\circ$ 以内であること、第二式は渦要素中心間の距離が初期渦核半径の4倍以内であることを表す(図4.2)。この後さらに渦度の発散が生じたときはその段階で計算を打ち切った。 $c_2 = 2.0$ 、 $1.0$ に対しても計算を行ったが、 $c_2 = 4.0$ が最も長時間にわたって計算を継続することができた。

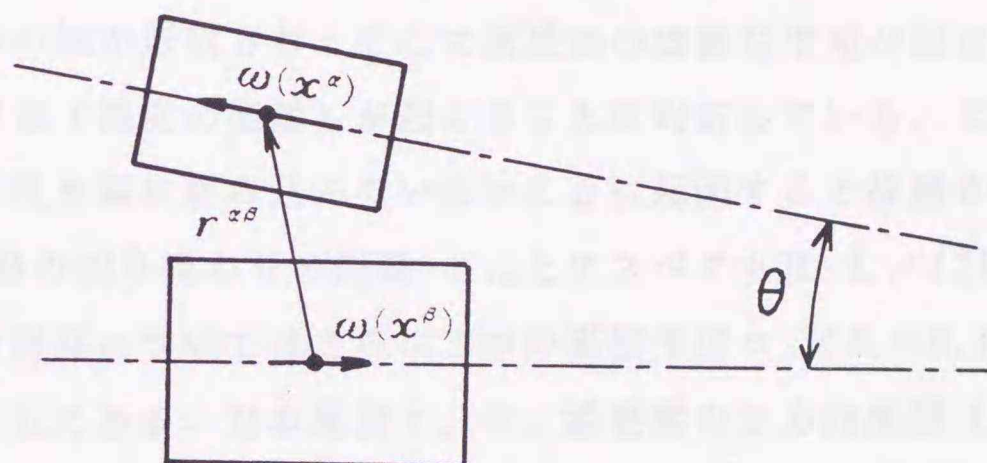


図4.2 渦要素の相対位置

渦要素の位置および強さの時間発展はAdams-Bashforth法によって計算する。

3次元離散渦法においては、初期状態において隣接する渦要素の連結性が強制されていないので、渦度ベクトル $\omega$ はソレノイダル条件 $\nabla \cdot \omega = 0$ を厳密には満足していない。そのため、図4.1の渦輪のように、静止した非粘性流体中を有限の大きさをもつ渦領域が運動するときに、一定に保たれるべき運動エネルギー、ヘリシティ、全渦度、運動量、および角運動量は必ずしも一定にならない可能性がある(Sarpkaya 1989)。本計算ではこれらの物理量の時間変化を求め、計算結果の物理的妥当性を判断する一つの基準とした。



#### 4-1-2 変形の様式

アスペクト比  $L/(2R)$  の値によって、擬楕円渦輪は以下に述べる 4 種類の基本的な変形を示す。

(a) モード I (図4.3) : 渦輪の長軸と短軸が切り換わるモード  
( $2 < L/(2R) < 4$ )

渦輪は全体として回転しているのではなく、単に長軸と短軸が入れ換わるような変形をしている。図4.3には4回の切り換わりが示されているが、切り換わりごとに変形の非線型効果が残るために、変形は擬周期的である。無次元時間  $t^* (= \Gamma t / R^2) = 72.0$  においては、渦要素の配列が不規則になる。このあとすぐに局所的な渦要素の塊が形成され、そこで渦要素の急激な増殖が起こる。これは、渦度の急激な増加（渦度の発散）が起こることに対応している。この渦度の発散は計算方法に粘性を陽に組み込んでいないことに起因すると推測される。

図4.4に軸の切り換わりの周期  $\tau_{sw}$  とアスペクト比  $L/(2R)$  の関係を示す；切り換わり周期についてはさらに二つの渦核半径  $\sigma_0/R = 0.10, 0.15$  に対する計算結果も示してある。なお周期  $\tau_{sw}$  は、渦要素の  $z$  方向座標（図4.1参照）の偏差

$$\Delta z = \sum_{\alpha} \left( z_{\alpha} - \frac{1}{N} \sum_{\beta} z_{\beta} \right)^2 \quad (4.2)$$

が極小値をとる時間とした。ここに  $N$  はその時刻における渦要素数、 $z_{\alpha}$  は渦要素  $\alpha$  の  $z$  座標である。厳密には  $x, y$  方向の変位による偏差も考慮に入れるべきであるが、ここでは無視することとした。本計算の時間範囲では、周期  $\tau_{sw}$  は切り換わりの回数が2回、3回と増加しても一定であった。図4.4より周期はほぼアスペクト比の増加とともに直線的に増加することがわかる。これは、擬楕円渦輪の変形が主として半円形の部分から始まるために、アスペクト比が大きいほどこの変形が平行部分に伝播するまでに長い時間を要するからである。また、周期  $\tau_{sw}$  は渦核半径  $\sigma_0$  の小さいほど短くなる。この理由は、 $\sigma_0$  の小さいほど渦要素による誘起速度が大きくなり、より変形が早く進行するからである。



(b) モードⅡ (図4.5) : 長軸と短軸が1回切り換わってから2個の渦輪に分裂するモード ( $5 < L/(2R) < 8$ )

分裂した直後には, 2つの渦輪はわずかではあるが互いに近づく方向の移動速度をもっている。したがって, 十分に長い時間後では, 第3章で述べた2つの渦輪の相互干渉が生ずる可能性がある。しかし, 本計算では  $t^* (= U_0 t / R) = 84.0$  のすぐ後で, 渦度の発散が生じるためその段階まで計算を進めることができなかった。初期状態の擬楕円渦輪が2つに分裂する時刻  $\tau_{sp}$  とアスペクト比の関係を図4.6に示す。このモードⅡにおける分裂時間  $\tau_{sp}$  は, アスペクト比とともにほぼ直線的に増加する。

(c) モードⅢ (図4.7) : 軸の切り換わりをしないで2個の渦輪に分裂し, これらがさらに再結合して一つの渦輪になるモード ( $9 < L/(2R) < 11$ )

分裂の直後に形成された2つの渦輪は, 互いに斜めに衝突する方向の移動速度をもっている。そのため, 2つの渦輪は再結合して, 長軸と短軸が切り換わった一つの渦輪を形成する。この傾向は実験においても認められる (豊田 1990)。図4.6に第1回目の分裂が発生する時刻  $\tau_{sp}$  を示してある。モードⅢの範囲でも  $\tau_{sp}$  は直線的に増加しているが, その値はモードⅡの場合よりも小さい。

(d) モードⅣ (図4.8) : 軸の切り換わりをしないで3個の渦輪に分裂するモード ( $12 < L/(2R) < 20$ )

$L/(2R) = 20.0$  は本計算で採用したアスペクト比の上限である。分裂するとき ( $t^* = 60.0$ ) に形成される中央部分の渦輪は,  $L/(2R)$  が12よりやや大きいときには著しく  $x$  方向に扁平になるので, 対向する渦要素の核が重なり合ってしまう。この状況ではこれらの渦要素の渦度は粘性のために相殺されてしまうものと考えられる。したがって, このときの変形はモードⅢに分類すべきかもしれないが, 本計算では渦度の相殺の程度が明らかでないので, モードⅣに属するものとした。モードⅢとモードⅣの境界をなすアスペクト比の値を正確に求めることは困難である。

図4.6に渦輪が3個に分裂するまでの時間を示す。モードⅣの分裂時間は, アスペクト比にかかわらずほぼ一定であることがわかる。



図4.8の $t^* = 60.0$ における3個の渦輪の配列をみると、中央部の小さな渦輪はその両側の大きな渦輪よりも移動速度が大きく、後者よりも先行するようである。両側の渦輪の移動速度は、さらに時間が経過したとき両者が衝突する方向を向いている。この衝突によってこれら二つの渦輪は再結合のあと再分裂をして、初期状態の長軸と垂直な方向に移動すると推測される (Aref & Zawadzki 1990)。  $t^* = 60.0$ のすぐ後で渦度の発散が生じたので、再結合・再分裂の過程まで計算を進められなかった。しかし、可視化実験の結果 (豊田 1990) は上の推測と矛盾しないように見える。

擬楕円渦輪が (第1回目の) 分裂を行うまでの間に移動する距離  $x_{sp}$  は、たとえば、 $L/(2R) = 4.93$  (モードⅡ) のとき  $x_{sp}/2R \approx 3.0$ ;  $L/(2R) = 9.95$  (モードⅢ) のとき  $x_{sp}/2R \approx 2.0$ ;  $L/(2R) \approx 14.98$  のとき  $x_{sp}/2R \approx 2.5$  である。すなわち、分裂はノズルのすぐ下流 (2~3)( $2R$ ) の位置で起こる。

分裂時間  $\tau_{sp}$  はモードⅡとモードⅢを分けるアスペクト比 (約8) において不連続的な変化を示す。モードⅡで分裂までの時間が、モードⅢ、Ⅳに比して長いのは、長軸と短軸の切り換わりに要する時間が含まれるからである。

本計算で導入した渦要素を除去する操作のみで、自動的に2つあるいは3つの渦輪に分裂する過程を表現できている。しかし、本計算の方法は計算時間を要するアルゴリズムなので、渦輪のように単純な流れの場合には適用可能であるが、複雑な流れのシミュレーションには不向きであると思われる。Chorin (1990) によって、複雑な流れにも対応し得る方法が提案されているが、個々の渦要素について消去するか否かを判定する点では類似している。また、本計算方法による結果が数学的にNavier-Stokes方程式の解と一致する証明はなされていないので、今後、この点に対する検討も必要である。



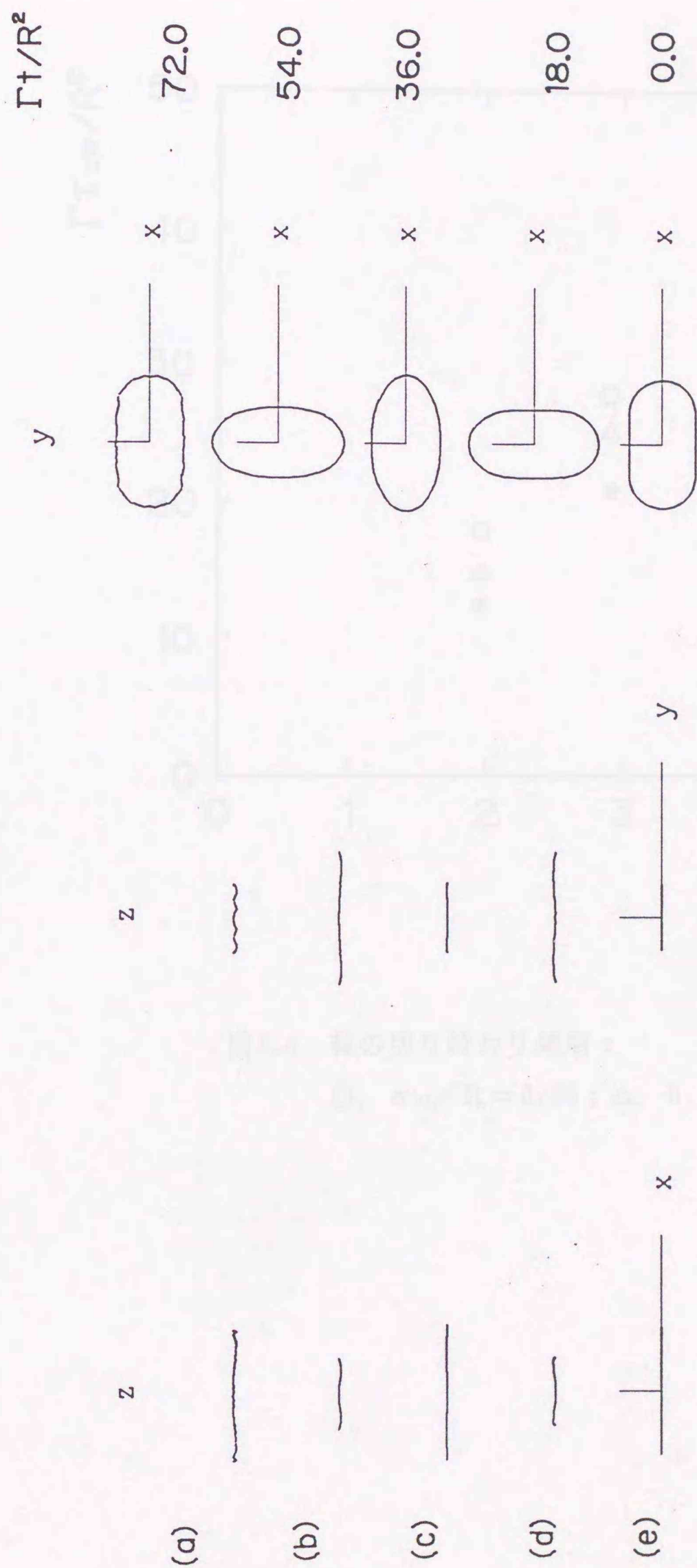


図4.3 モード I ( $L/(2R) = 1.94$ )



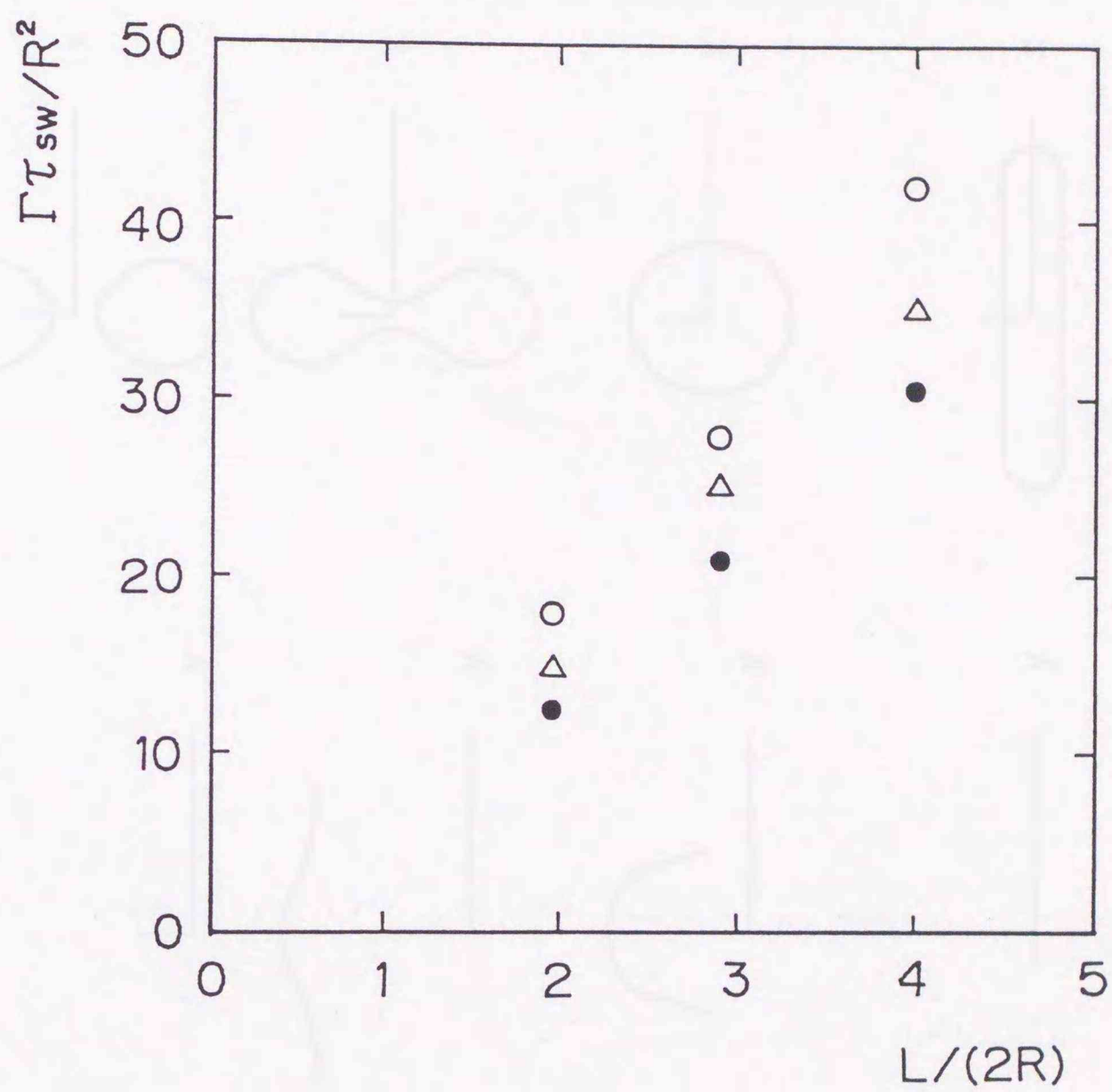


図4.4 軸の切り替わり周期：

○,  $\sigma_o/R = 0.20$  ;  $\Delta$ ,  $0.15$  ;  $\bullet$ ,  $0.10$



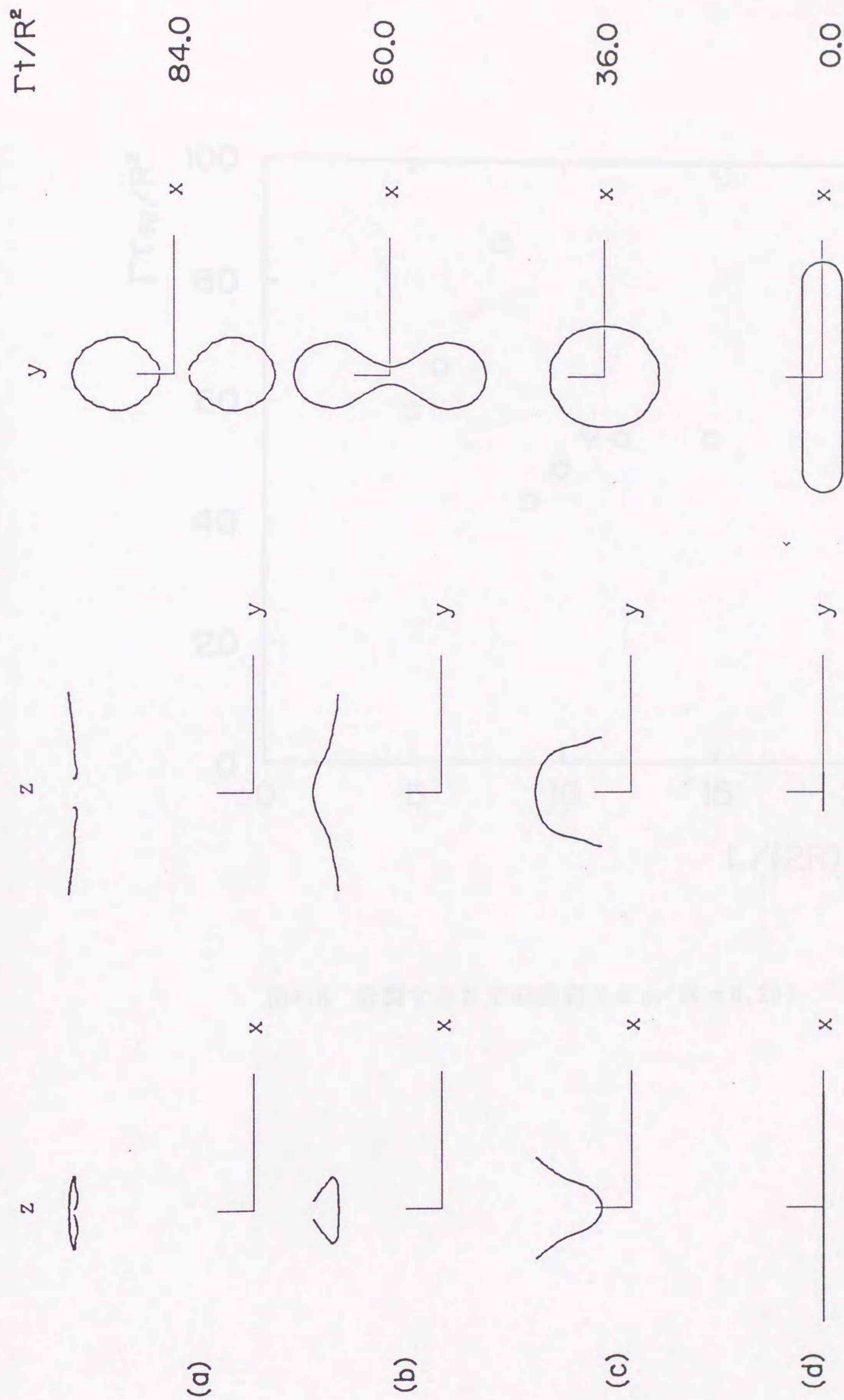


図4.5 モードII ( $L/(2R) = 6.0$ )



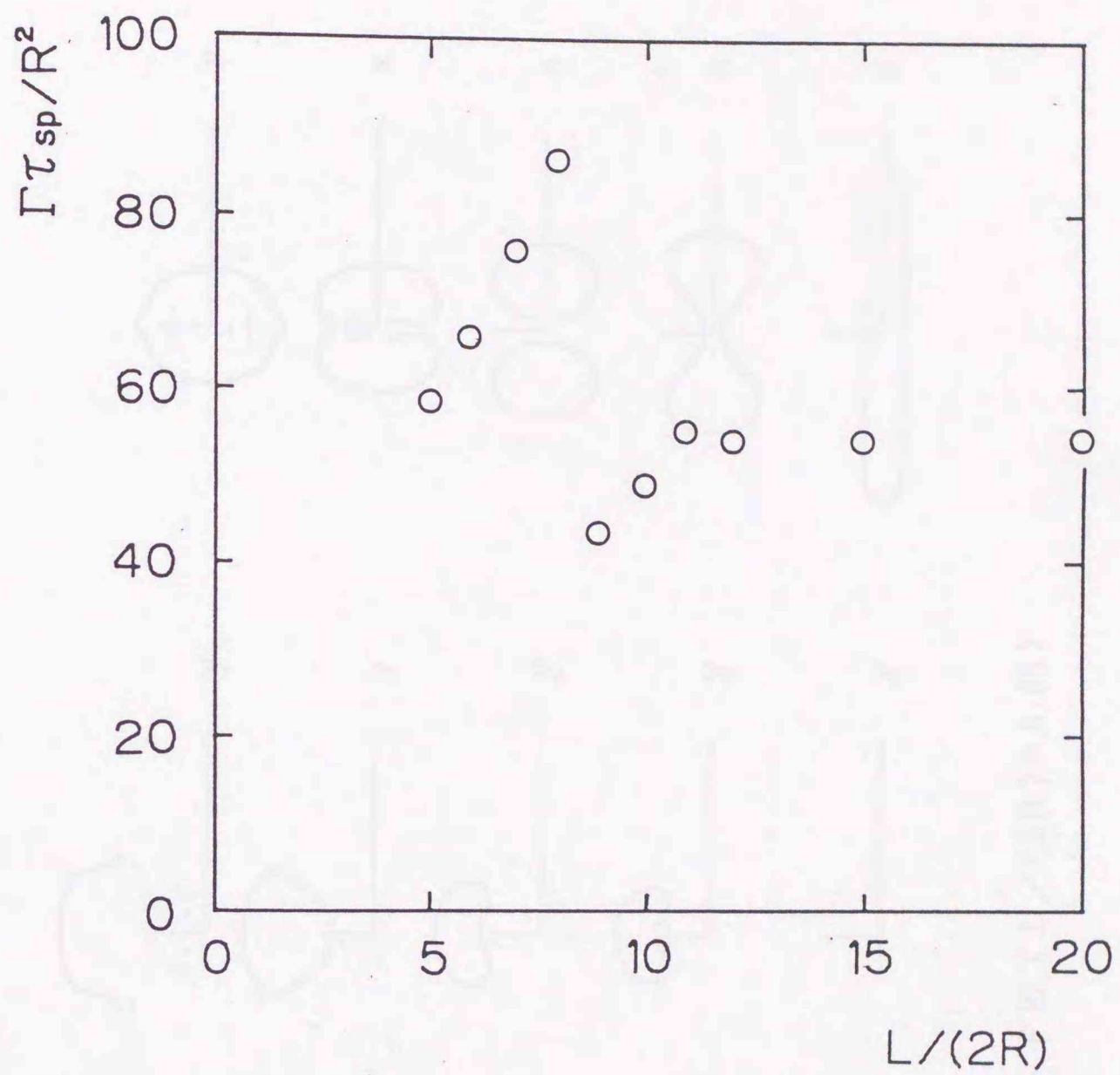


図4.6 分裂するまでの時刻 ( $\sigma_o/R = 0.20$ )



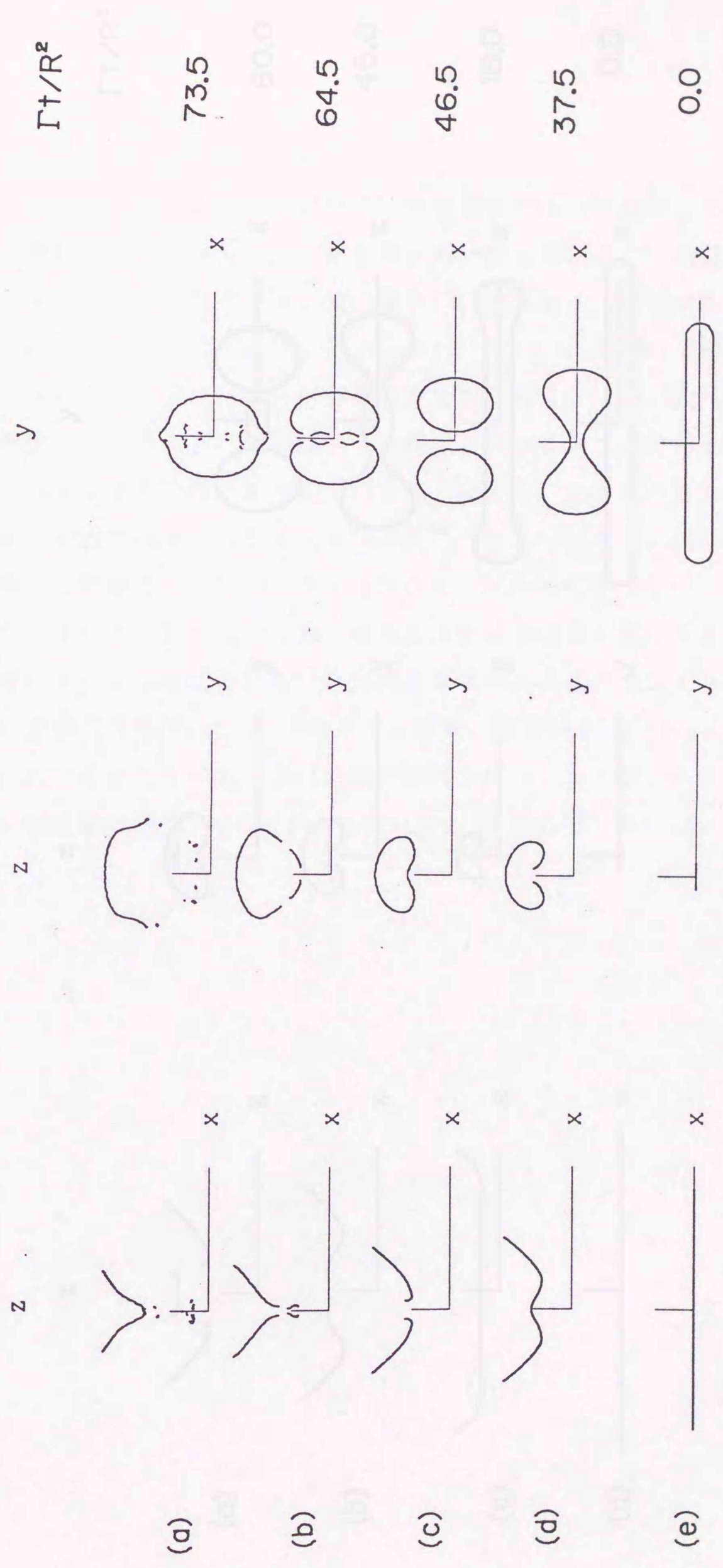


図4.7 モードⅢ ( $L/(2R) = 8.85$ )



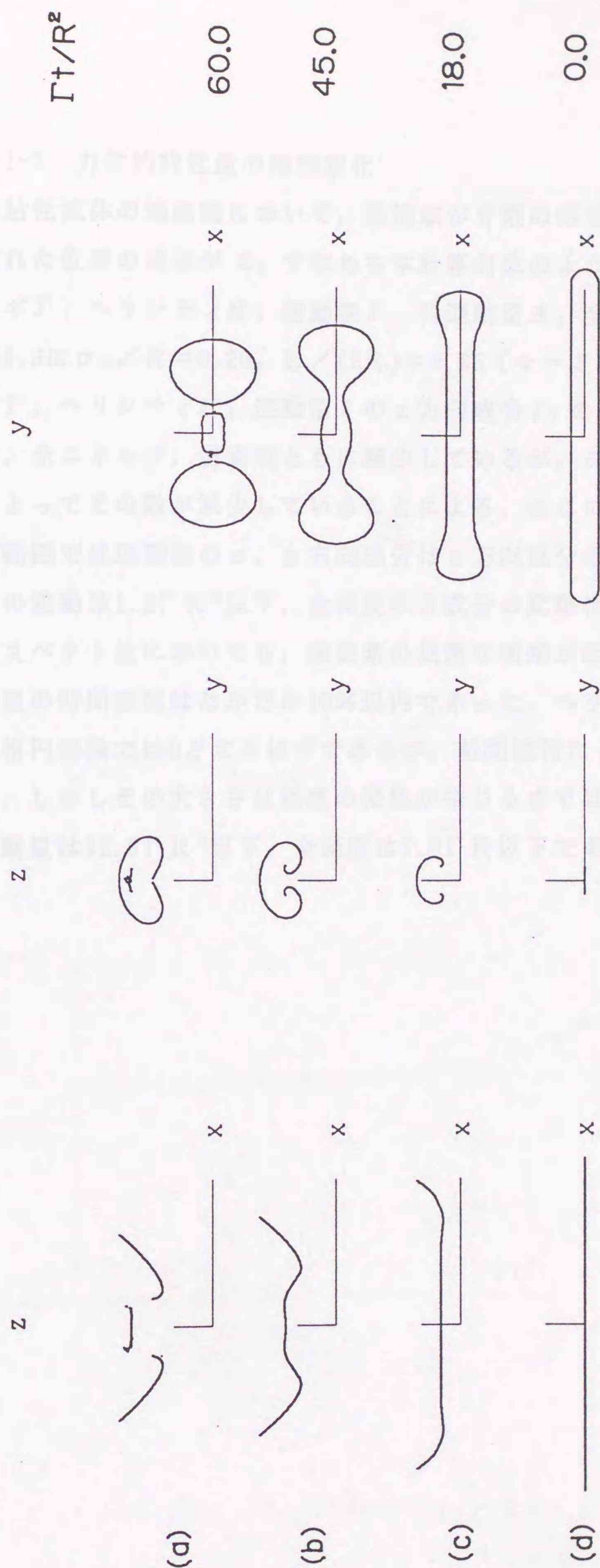


図4.8  $\Gamma^\dagger/R^2$  (  $L/(2R) = 12.0$  )



#### 4-1-3 力学的特性量の時間変化

非粘性流体の渦運動において、渦領域が有限の領域を占めており、ここから十分離れた位置の流速が 0，すなわち本計算対象のような渦輪のときには、運動エネルギー  $T$ ，ヘリシティ  $H$ ，運動量  $I$ ，角運動量  $A$ ，全渦度  $\Omega$  は保存される。

図4.9に  $\sigma_0/R=0.20$ ， $L/(2R)=8.85$ （モードⅢ，図4.7）に対する全エネルギー  $T$ ，ヘリシティ  $H$ ，運動量  $I$  の  $z$  方向成分  $I_z$  の時間発展を示す。  $t^*=60.0$  以降は、全エネルギー、運動量ともに減少しているが、これは先に述べた渦要素の消去によってその数が減少していることによる。ここには示していないが、図4.9の時間範囲では運動量の  $x$ ， $y$  方向成分は  $z$  方向成分の  $1/100$  以下、角運動量の 3 成分の変動は  $1.2\Gamma R^3$  以下、全渦度の 3 成分の変動は  $0.45\Gamma R$  以下であった。他のアスペクト比においても、渦要素の急激な増殖が起こるまでは、全エネルギー、運動量の時間変化はたかだか 10% 以内であった。ヘリシティ、角運動量、全渦度は擬楕円渦輪では 0 となるはずであるが、時間進行にともない変化する傾向がみられた。しかしその大きさは渦度の発散が生じるまでは、ヘリシティは  $2.0\Gamma^2$  以下、角運動量は  $12.5\Gamma R^3$  以下、全渦度は  $1.0\Gamma R$  以下であった。



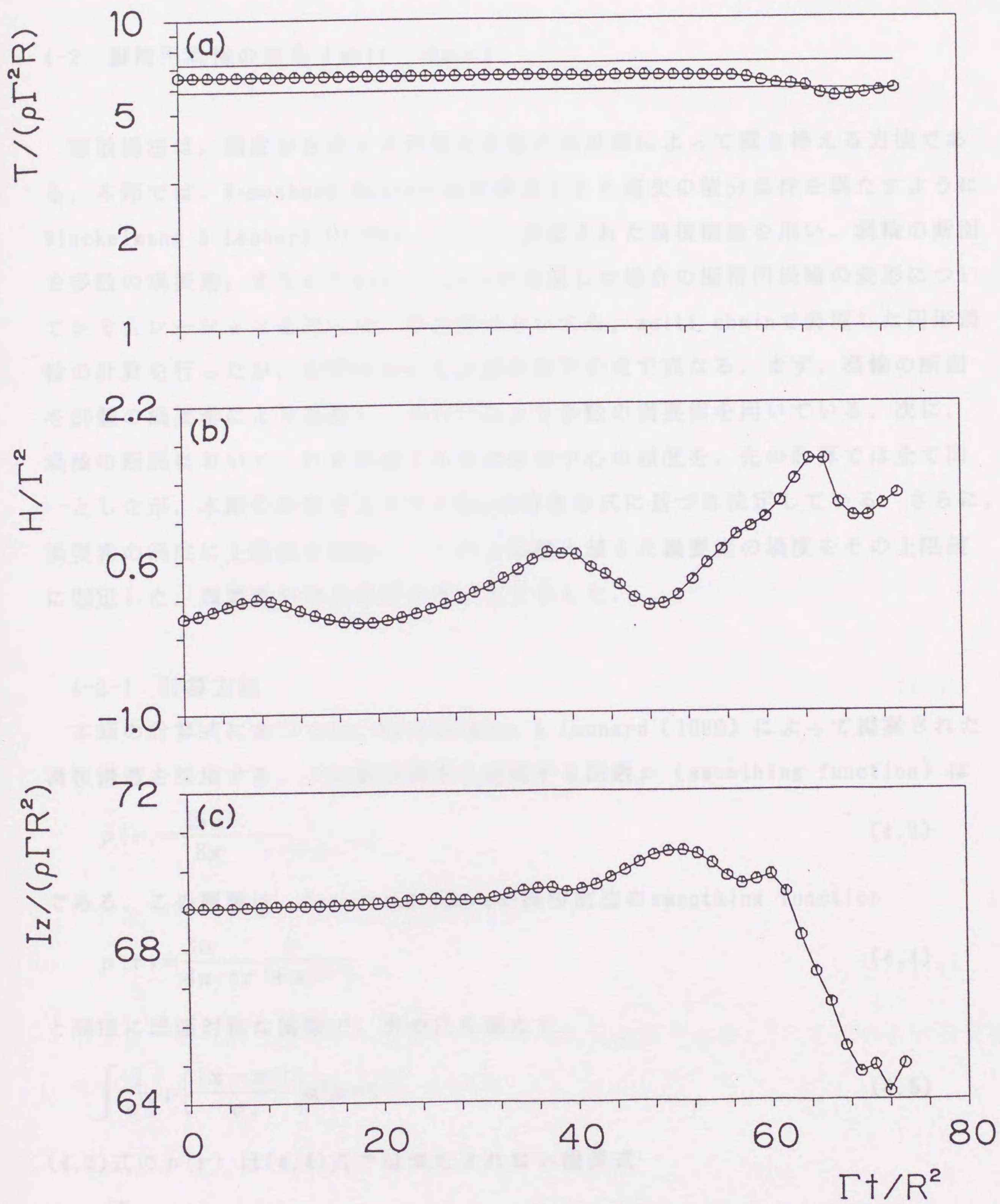


図4.9 力学的特性量の時間変化 ( $\sigma_0 / R = 0.20$ ,  $L / (2R) = 8.85$ )

(a)エネルギー, (b)ヘリシティ, (c)運動量 z 成分



## 4-2 擬楕円渦輪の変形 (multi chain)

離散渦法は、渦度が存在する領域を多数の渦要素によって置き換える方法である。本節では、Rosenhead-Mooreの渦核構造よりも高次の積分条件を満たすようにWinckelmans & Leonard (1989) によって提案された渦核構造を用い、渦輪の断面を多数の渦要素、すなわちmulti chainで表現した場合の擬楕円渦輪の変形についてシミュレーションを行った。第3章においても、multi chainで表現した円形渦輪の計算を行ったが、本節における計算は以下の点で異なる。まず、渦輪の断面を25個の渦要素により表現し、先の計算より多数の渦要素を用いている。次に、渦輪の断面においてこれを形成する各渦要素中心の渦度を、先の計算では全て同一としたが、本節の計算では2次のGauss分布の式に基づき決定している。さらに、渦要素の渦度に上限値を設定し、この上限値を越えた渦要素の渦度をその上限値に固定した。渦要素の消去は行わないこととした。

### 4-2-1 計算方法

本節の計算式においては、Winckelmans & Leonard (1989) によって提案された渦核構造を採用する。この渦核構造を表現する関数  $p$  (smoothing function) は

$$p(r) = \frac{15a^2}{8\pi} \frac{1}{(r^2+a)^{7/2}} \quad (4.3)$$

である。この関数は、Rosenhead-Mooreの渦核構造のsmoothing function

$$p(r) = \frac{3a}{4\pi} \frac{1}{(r^2+a)^{5/2}} \quad (4.4)$$

と同様に球対称な関数で、次の式を満たす。

$$\int \frac{1}{\sigma_\alpha^3} p\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) d^3\mathbf{x} = 1 \quad (4.5)$$

(4.3)式の  $p(r)$  は(4.4)式では満たされない関係式

$$\int_0^\infty r^4 |p(r)| dr < \infty \quad (4.6)$$

も満足している。したがって、(4.3)式の渦核構造を用いて計算した方が数値誤差



が小さい (Winckelmans & Leonard 1989) . なお, (4.3)式の中の定数  $a$  を本節における計算では  $a = 1$  とおいた.

以下に (4.3) 式の渦核構造を用いた場合の Biot-Savart の法則, 渦度方程式, 力学的特性量を表す式を示す. 式の導出方法は, 第 2 章と同様であるので省略する.

### (1) Biot-Savart の法則

Winckelmans & Leonard (1989) の渦核構造を導入した場合の Biot-Savart の法則は次に示すとおりである.

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha) \times \boldsymbol{\gamma}^\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|^3} q\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right) \quad (4.7)$$

ここで関数  $q$  は

$$q(y) = 4\pi \int_0^y p(r) r^2 dr = \frac{y^3(y^2 + 5a/2)}{(y^2 + a)^{5/2}}$$

である. 渦要素  $\alpha$  の速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha)$  は, 各渦要素が  $\mathbf{x}^\alpha$  に誘起する速度の総和をとればよいから

$$\frac{D\mathbf{x}^\alpha}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \sum_\beta \frac{\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta}{r_{\alpha\beta}^3} q\left(\frac{r_{\alpha\beta}}{\sigma_\beta}\right) \quad (4.8)$$

となる. ここに  $\mathbf{r}^{\alpha\beta} = \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta$ ,  $r_{\alpha\beta} = |\mathbf{r}^{\alpha\beta}|$  である.

### (2) 渦度方程式

渦度方程式は第 2 章でも述べたように

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (4.9)$$

である. Winckelmans & Leonard の渦核構造を採用すると, (4.9) 式の右辺第 2 項を省略した Helmholtz の渦度方程式は

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\gamma}^\alpha}{Dt} &= \frac{1}{4\pi} \sum_\beta \left\{ \frac{\boldsymbol{\gamma}^\beta \times \boldsymbol{\gamma}^\alpha (r_{\alpha\beta}^2 + 5a\sigma_\beta^2/2)}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{5/2}} - \frac{3(\boldsymbol{\gamma}^\beta \times \mathbf{r}^{\alpha\beta})(\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \mathbf{r}^{\alpha\beta})(r_{\alpha\beta}^2 + 7a\sigma_\beta^2/2)}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{7/2}} \right\} \\ & \quad (4.10) \end{aligned}$$



で表される。

Winckelmans & Leonard (1989) は, (4.9)式の渦度方程式の右辺第2項の粘性項も次の式によって近似している。

$$\Delta \omega = \frac{2}{\sigma^2} \int \eta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \{ \omega(\mathbf{y}) - \omega(\mathbf{x}) \} d^3 y \quad (4.11)$$

ここで  $\eta$  は

$$\eta(y) = -\frac{1}{y} \frac{d p(y)}{d y}$$

によって定義される関数である。(4.3)式で表される関数  $p$  に対しては

$$\eta(y) = \frac{105 a^2}{16 \pi} \frac{1}{(y^2 + a)^{9/2}}$$

となる。この式を(4.11)式に代入することによって

$$\Delta \gamma^\alpha = \frac{2}{\sigma_\alpha^2} \sum_\beta \frac{1}{\sigma_\beta^2} \eta \left( \frac{|\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta|}{\sigma_\beta} \right) (\gamma^\beta d^3 \mathbf{x}^\alpha - \gamma^\alpha d^3 \mathbf{x}^\beta) \quad (4.12)$$

を得ることができる。(4.10)式の右辺に(4.12)式を加え合わせることによって、渦度の時間変化を計算することができる。

時間進行は二次精度のAdams-Bashforth法によって行う。

その他の渦要素の太さおよび、長さの決定、渦要素の分割の計算手順は、第2章に述べたものと同様である。

### (3) 運動エネルギー

速度のフーリエ変換は

$$\hat{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{k}) = \frac{i}{2} a \sigma_\alpha^2 K_2(a^{1/2} \sigma_\alpha \mathbf{k}) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^\alpha) (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \quad (4.13)$$

と求められる。ただし、 $K_2$  は2次の第2種変形ベッセル関数である。

Winckelmans & Leonardの渦核構造を採用した場合、エネルギースペクトル  $E_0(\mathbf{k})$ ,  $E_{\text{int}}(\mathbf{k})$  は次式のようにになる。

$$E_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{24 \pi^2} \sum_\alpha a^2 \sigma_\alpha^4 k^4 \{ K_2(a^{1/2} \sigma_\alpha \mathbf{k}) \}^2 (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\alpha) \quad (4.14)$$



$$E_{\text{int}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\alpha, \beta}' a^2 \sigma_\alpha^2 \sigma_\beta^2 k^4 K_2(a^{1/2} \sigma_\alpha k) K_2(a^{1/2} \sigma_\beta k) \\ \times \{ (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\beta) \phi_1(k r_{\alpha\beta}) + (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\alpha\beta}) (\boldsymbol{\gamma}^\beta \cdot \mathbf{n}^{\alpha\beta}) \phi_2(k r_{\alpha\beta}) \} \quad (4.15)$$

ただし,  $\mathbf{n}^{\alpha\beta} = \mathbf{r}^{\alpha\beta} / |\mathbf{r}^{\alpha\beta}|$  および

$$\phi_1(y) = \frac{1}{y^3} \{ (y^2 - 1) \sin y + y \cos y \}$$

$$\phi_2(y) = \frac{1}{y^3} \{ (3 - y^2) \sin y - 3y \cos y \}$$

である.

#### (4) エンストロフィ

渦度のフーリエ変換は

$$\hat{\omega}^\alpha(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} a \sigma_\alpha^2 k^2 K_2(a^{1/2} \sigma_\alpha k) \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}^\alpha) \boldsymbol{\gamma}^\alpha \quad (4.16)$$

と求められるので, エンストロフィスペクトルは次ようになる.

$$\Phi_0(\mathbf{k}) = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\alpha} a^2 \sigma_\alpha^4 k^6 \{ K_2(a^{1/2} \sigma_\alpha k) \}^2 (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\alpha)$$

$$\Phi_{\text{int}}(\mathbf{k})$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \sum_{\alpha, \beta}' a^2 \sigma_\alpha^2 \sigma_\beta^2 K_2(a^{1/2} \sigma_\alpha k) K_2(a^{1/2} \sigma_\beta k) \frac{k^5 \sin(k r_{\alpha\beta})}{r_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\beta)$$

なお,

$$Q_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \int \omega^\alpha(\mathbf{x}) \cdot \omega^\alpha(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{4725}{65536} \frac{(\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\alpha)}{(a^{1/2} \sigma_\alpha)^3}$$

である.

#### (5) 全渦度

全渦度は次式で表される.



$$\Omega = \sum_a \gamma^a \quad (4.17)$$

#### (6) 運動量

運動量は

$$\frac{I}{\rho} = \frac{1}{2} \sum_a \mathbf{x}^a \times \gamma^a \quad (4.18)$$

で表される。全渦度と運動量に対する表示式は、smoothing function: (4.3)式が(4.5)式を満たすことから、第2章に述べた式と同様になる。

#### (7) 角運動量

角運動量は

$$\frac{A}{\rho} = \frac{1}{3} \sum_a \mathbf{x}^a \times (\mathbf{x}^a \times \gamma^a) - \frac{8}{9} \pi \int_0^\infty r^4 p(r) dr \sum_a \sigma_a^2 \gamma^a$$

と求められる。上式の角運動量の第2項は、Rosenhead-Mooreの渦核構造については対数的に発散したが、Winckelmans & Leonardの渦核構造を表す(4.3)式の渦度分布関数  $p(r)$  については、(4.6)式の条件式も満たすことからわかるように、発散しない。したがって、結局

$$\frac{A}{\rho} = \frac{1}{3} \sum_a \mathbf{x}^a \times (\mathbf{x}^a \times \gamma^a) - \frac{1}{3} a \sum_a \sigma_a^2 \gamma^a \quad (4.19)$$

を導くことができる。

#### 4-2-2 渦輪断面の渦要素配置

本節における計算は、多数の渦要素によって渦輪の断面を表現している。渦要素の配列方法は以下に述べるとおりである。中心線に垂直な断面を図4.10のように、第1層1領域、第2層8領域、第3層16領域の合計3層25領域に分割する。すなわち、3つの層は半径の異なる3つの同心円によって、中心から半径  $2\sigma_{cs}$  の範囲を分けることにより作られる。第1層は  $r = r_1 = 0.4\sigma_{cs}$  までの円形の領域である。第2層は  $r = r_1 \sim 3r_1$  のドーナツ状の領域で、この領域を円周方向に8等分



する。また第3層は  $r = 3r_1 \sim 5r_1$  の領域で、この領域を円周方向に16等分する。渦要素は、各領域の重心に配置する。つまり、第1層の渦要素は中心に、第2層および第3層の渦要素はそれぞれ  $r = 1.9507r_1$ ,  $3.9792r_1$  上に配置することになる。渦要素の断面積は各領域の面積と同一とする。

次に渦要素の初期渦度を計算する。渦要素の初期渦度は、各層の平均渦度を割り当てる。渦輪の断面の渦度分布は2次のGauss分布とする。すなわち、 $\omega_0 = \omega(0)$  とすると

$$\omega(r) = \omega_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_{cs}^2}\right)$$

である。各層の循環は、第1層  $\Gamma_1$ 、第2層  $\Gamma_2$ 、第3層  $\Gamma_3$  とすると

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \int_0^{r_1} \omega_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma_{cs}^2}\right) dS \\ &= \omega_0 \pi \sigma_{cs}^2 \left\{1 - \exp\left(-\frac{r_1^2}{\sigma_{cs}^2}\right)\right\}\end{aligned}$$

$r_1 = 0.4\sigma_{cs}$  であることから

$$\Gamma_1 = 0.1479\omega_0\pi\sigma_{cs}^2$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \omega_0 \pi \sigma_{cs}^2 \left\{ \exp\left(-\frac{r_1^2}{\sigma_{cs}^2}\right) - \exp\left(-\frac{9r_1^2}{\sigma_{cs}^2}\right) \right\} \\ &= 0.6152\omega_0\pi\sigma_{cs}^2 \\ \Gamma_3 &= \omega_0 \pi \sigma_{cs}^2 \left\{ \exp\left(-\frac{9r_1^2}{\sigma_{cs}^2}\right) - \exp\left(-\frac{25r_1^2}{\sigma_{cs}^2}\right) \right\} \\ &= 0.2186\omega_0\pi\sigma_{cs}^2\end{aligned}$$

と計算できることから

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \Gamma_1 / (\pi r_1^2) = 0.9241\omega_0 \\ \omega_2 &= \Gamma_2 / \{\pi(9r_1^2 - r_1^2)\} = 0.4806\omega_0 \\ \omega_3 &= \Gamma_3 / \{\pi(25r_1^2 - 9r_1^2)\} = 0.08540\omega_0\end{aligned}$$

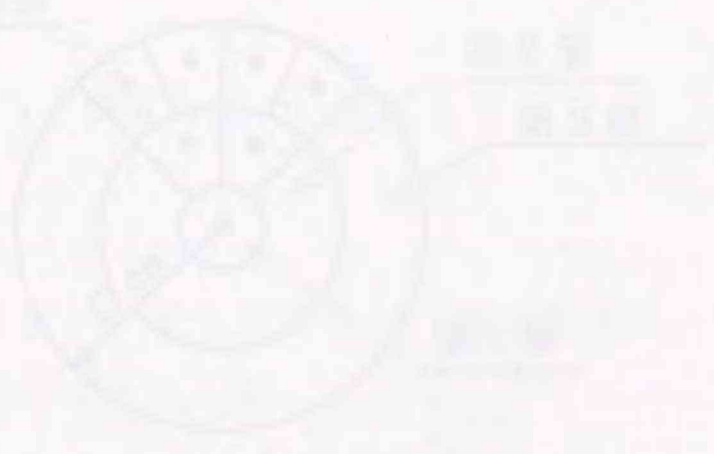
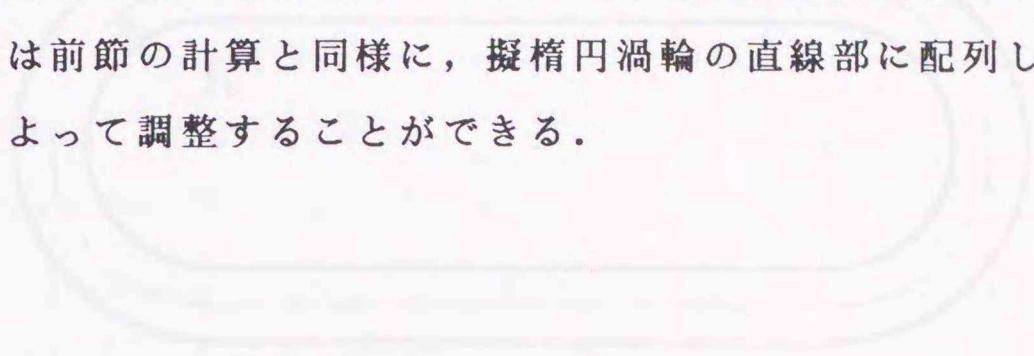
と求めることができる。

以上の方法によって初期状態における渦要素の強さを決定するするときには、渦輪の循環を  $\Gamma' = 2.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  とした。しかし、近接する渦要素間の渦核はオ



バーラップしているので、真の循環 $\Gamma$ を求めるためには渦要素を配列した状態で計算しなければならない。初期状態で、 $z=0$ の $x-y$ 面における循環を計算したところ $\Gamma=1.67 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ であった。したがって、以下に示す計算結果において、時間等を無次元化する際に循環を用いるときにはこの値を採用している。

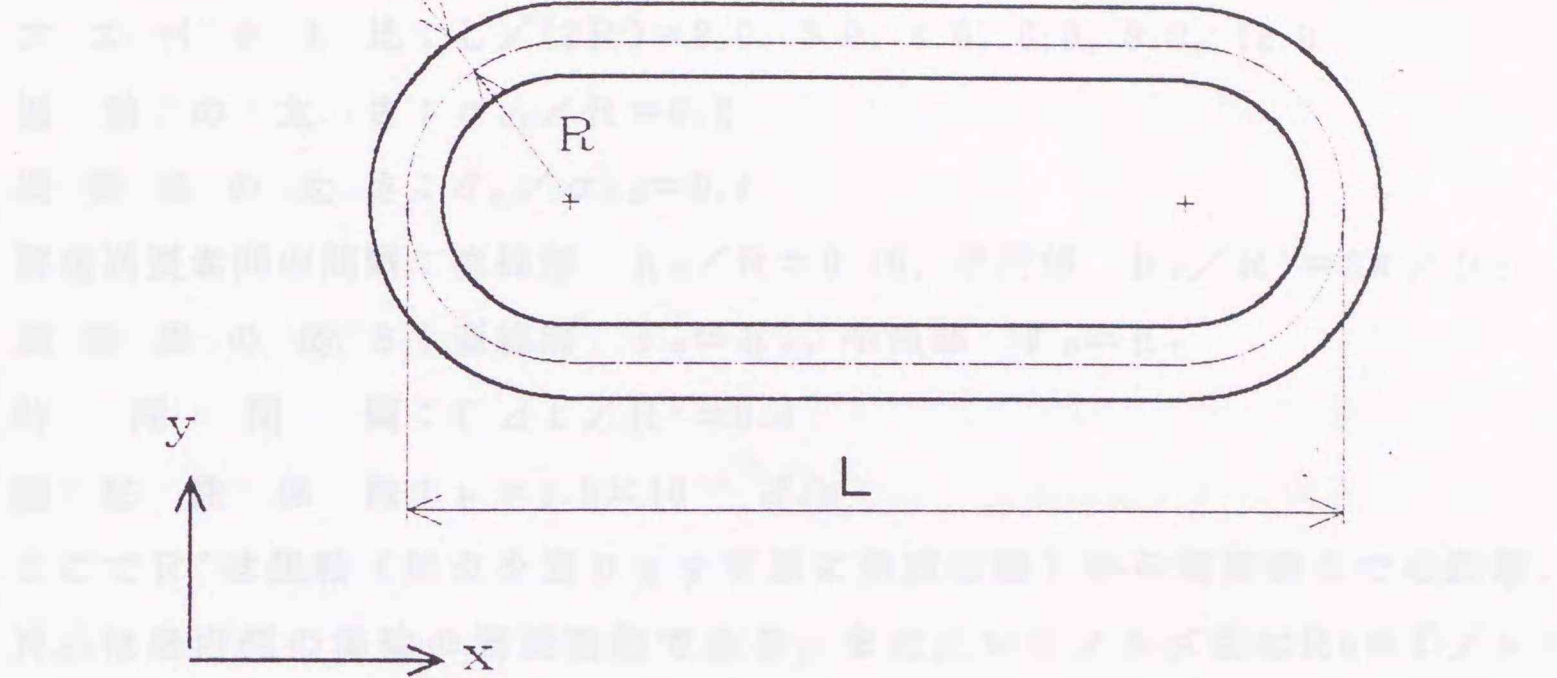
アスペクト比は前節の計算と同様に、擬楕円渦輪の直線部に配列した渦要素数を変えることによって調整することができる。





# 4.2.2 計算条件

本計算は、歯根の応力  $\sigma_{cs}$  を求めるための条件である。



渦輪断面図

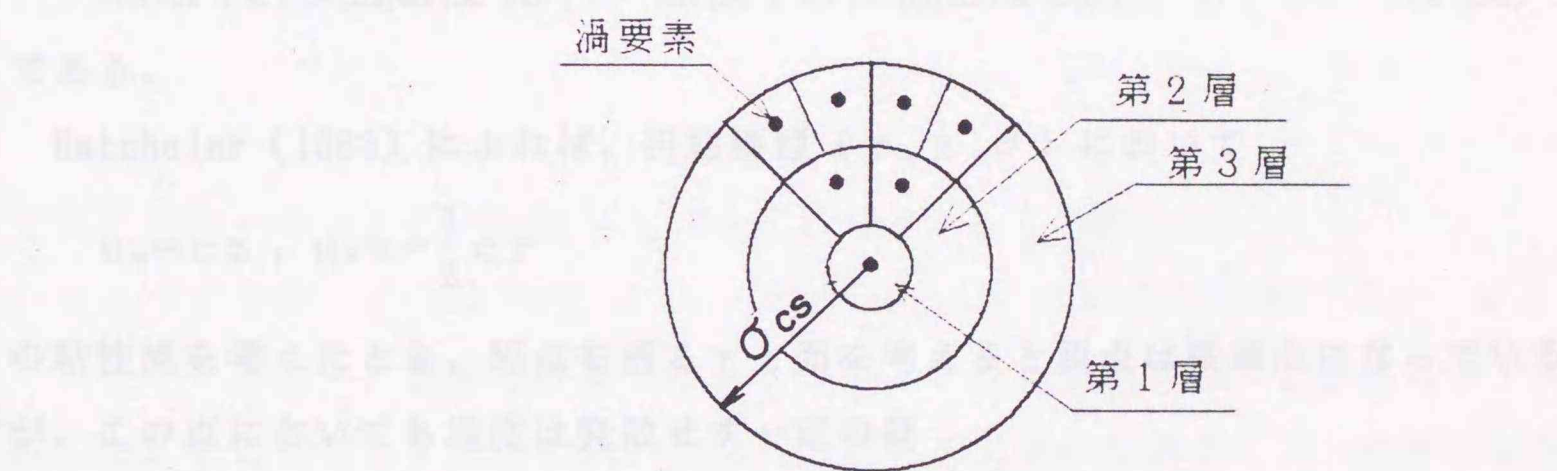


図4.10 擬楕円渦輪 (multi chain)



#### 4-2-3 計算条件

本計算における計算条件は以下に示すとおりである。

アスペクト比： $L/(2R)=2.0, 3.0, 4.0, 6.0, 9.0, 12.0$

渦輪の太さ： $\sigma_{cs}/R=0.2$

渦要素の太さ： $\delta_a/\sigma_{cs}=0.4$

隣接渦要素間の間隔：直線部  $h_s/R=0.16$ ，半円部  $h_c/R'=2\pi/N_{c1}$

渦要素の長さ：直線部  $l_s=h_s$ ，半円部  $l_c=h_c$

時間間隔： $\Gamma \Delta t/R^2=0.4$

動粘性係数： $\nu=1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

ここで  $R'$  は焦軸（焦点を通り  $x y$  平面に垂直な軸）から渦要素までの距離， $N_{c1}$  は最内側の渦輪の渦要素数である。また，レイノルズ数は  $Re=\Gamma/\nu=1100$  となる。

本計算では，渦要素の渦度に上限値を設定し，この値に達した渦要素の渦度はこの上限値に固定した。すなわち

$$|\omega(x^a, t)| > 16|\omega(x^a, 0)| \rightarrow |\omega(x^a, t)| = 16|\omega(x^a, 0)| \quad (4.20)$$

である。

Batchelor (1969) によれば，円柱極座標  $(r, z, \theta)$  において

$$u_z = cz, \quad u_r = -\frac{1}{2}cr$$

の粘性流を考えたとき，原点を通る  $r z$  面を考えると原点は鞍部点になっているが，この点においても渦度は発散せず一定の値

$$\omega(r) = \omega_0 \exp\left(\frac{c\sigma_0^2}{4\nu}\right)$$

になる。ここで  $c$  は定数， $\omega_0$  は初期状態における渦度である。(4.20)式による渦度の上限値の設定は，このことをモデル化し，本計算方法に組み込んだものとみなすことができる。



#### 4-2-4 結果および考察

$L/(2R)=4.0$ を除いては、定性的にはsingle chainによる計算結果と一致した。以下に計算結果を、single chainによる計算で分類した4つのモードに対応させて述べる。計算したアスペクト比は先に述べた6個のみなので、4種類のモードが現れる範囲を正確に決定することはできない。

##### (a) モードⅠ： $L/(2R)=2.0$ (図4.11), 3.0

図4.11は $L/(2R)=2.0$ の計算結果である。スイッチングを2回繰り返す。2回目のスイッチング後、 $\Gamma t/R^2=28.46$ では、渦輪の周方向に擾乱をうけている。そして、渦要素が不規則に配列するようになり、渦輪が崩壊する。渦要素が不規則に配列するようになると、渦輪の進行速度が遅くなる。同様の傾向がアスペクト比3.0の計算でも観察された。single chainで計算した場合に比べてスイッチングの回数が少ないのは、渦輪の断面を多数の渦要素で表し計算したので、single chainによる計算では不可能であった渦核の変形を表現できたことと、渦度方程式の粘性項も計算式に組み込んだことを、その理由としてあげることができる。

##### (b) モードⅡ： $L/(2R)=4.0$ (図4.12), 6.0 (図4.13)

アスペクト比 $L/(2R)=4.0$ においては、single chainの計算ではスイッチングを繰り返したが、本節の計算ではスイッチング後、初期状態における長軸と垂直方向に渦輪が分裂する。single chainの場合と局所的な曲率によって誘起される速度が異なるために、渦輪の挙動の差が生じたと思われる。 $L/(2R)=6.0$ の場合は、single chainの計算同様にスイッチング後2個に分裂する。multi chainによる計算では、分裂後の2つの渦輪は乱れているので、2つの円形渦輪が相互干渉して1個の渦輪となる再結合は行われないと考えられる。

##### (c) モードⅢ： $L/(2R)=9.0$ (図4.14)

スイッチングしないで2個に分裂する。分裂した2つの渦輪は互いに衝突する方向に進行して、2つの円形渦輪の相互干渉のように、1個の渦輪となる。渦輪



はかなり乱れているので、この後再び2個の渦輪に分裂する過程までは進まないと予想される。single chainの計算で一回目の分裂後の再結合の過程まで計算するためには、(4.1)式による人為的な操作を必要とした。これに対してmulti chainによる計算では、人為的な渦要素の消去を行うことなくこの過程まで計算できる。

(d) モードIV： $L/(2R)=12.0$  (図4.15)

定性的にはsingle chainで計算した場合と同様である。スイッチングをしないで3個に分裂する。中央の渦輪は誘起速度が大きく他の2つの渦輪よりも先行している。実験では3個に分裂する過程は確認されない(豊田 1990)。この計算と実験結果の相違は、実験においては実際に放出される擬楕円渦輪のアスペクト比は、計算条件に合わせた渦輪を放出するオリフィスのアスペクト比よりも小さくなること、渦輪の渦核半径が計算のそれと異なることに原因があると考えられる。

スイッチングに要する時間は図4.16に示すとおりである。multi chainによる計算の方がsingle chainのそれに比して大きくなる傾向があるが、アスペクト比に比例している点では両者とも同様の傾向を示している。豊田(1990)による実験結果も図中に掲載しているが、single chainによる計算の方が実験値に近い。

初期配列(b)～(d)の分裂時間を図4.17に示す。豊田(1990)による実験結果も図4.16と同様に示してある。 $L/(2R)=4.0$ と6.0の値を見ると、アスペクト比に比例する傾向を持つことがわかる。スイッチング周期と同様に、single chainによる計算の方が実験値に近い。しかし、先にも述べたように、例えば渦核半径など実験条件と計算条件は一致しているとは限らないので、single chainでの計算の方が必ずしも精度がよいとは言えない。実験においては、

(1) 製作したオリフィスによって放出される渦輪のアスペクト比は、オリフィスの形状のアスペクト比と一致しない。また、どのようなアスペクト比の渦輪が放出されるかを、オリフィスの設計時に予測することは困難である。

(2) 渦核半径を測定によって求めると、擬楕円渦輪のような渦輪は特にアスペクト比が大きくなると、放出口近傍でその形状が瞬時に変化するため、測定値の誤差が非常に大きくなる。

などの理由により実験条件を計算条件に一致させることは困難である。したがっ



て、今後、計算条件を実験条件に一致させた解析が必要と思われる。

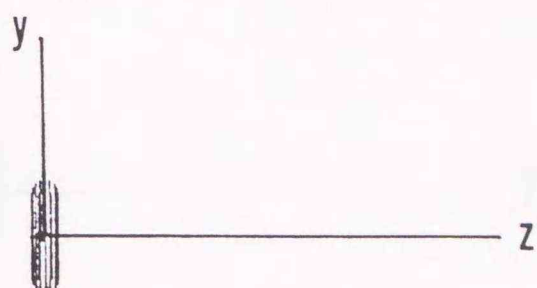
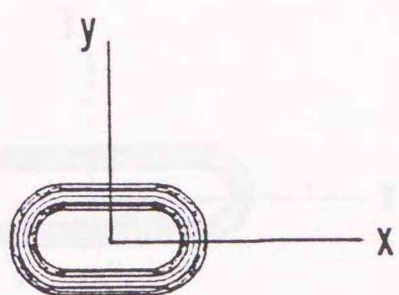
力学的特性量の時間変化は、軸に切り換えおよび分裂の両方の現象を示す  $L/(2R)=6.0$  についてのものを示す。まず、エネルギースペクトルの時間発展は図4.18に示すとおりである。渦輪が変形してその形状が乱れると、高波数側が大きくなり、 $kR \approx 1$ でピークを持つようになる。このことは、 $R$ の大きさの渦スケールが、他のスケールに比べて、大きなエネルギーを保有するようになることを示している。エネルギー  $T$  およびエントロピー  $Q$  の時間変化を図4.19に示す。本計算では粘性を陽に考慮しているので、これらの力学的特性量は時間の経過とともに減少している。しかし、Navier-Stokes方程式から導くことができる両者の関係式（導出方法は第2章2-2-1を参照）

$$\frac{dT}{dt} = -2\nu Q$$

を必ずしも満たしていない。これは本計算における粘性項の計算方法に問題があるためと考えられる。

図4.20は同じく  $L/(2R)=6.0$  の場合の、全渦度、運動量、角運動量の時間変化である。運動量はエネルギーと同様に時間の経過とともに減少している。全渦度、運動量、角運動量とも、特に、渦輪が分裂前後の時刻にそれまでより大きな変化を示す傾向がある。本計算条件（渦度が有限の領域に有限の大きさで存在する）の場合には、常に0になるべき全渦度と角運動量は、渦要素の配列が不規則になると0でない値をとるようになる。

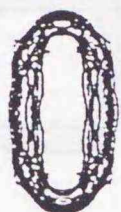




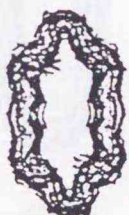
$$\Gamma t / R^2 = 0.0$$



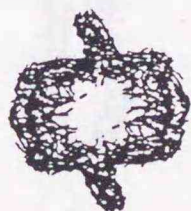
9.49



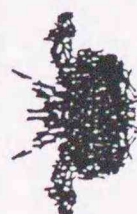
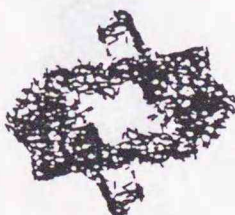
18.97



28.46



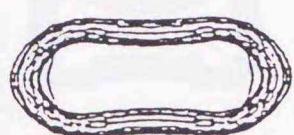
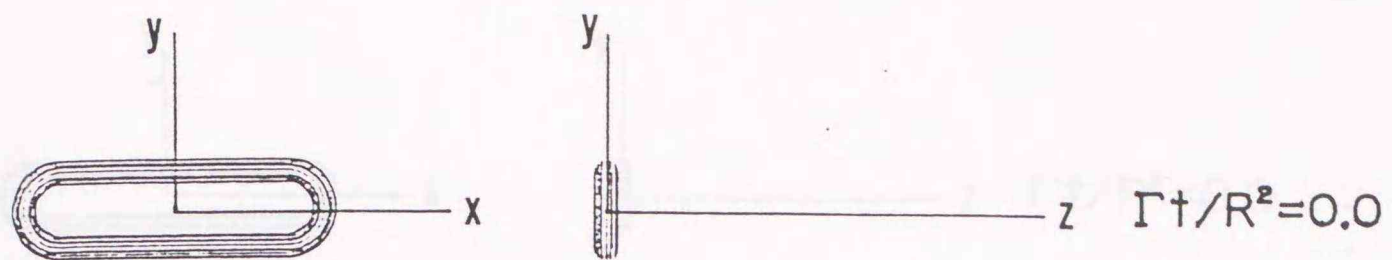
37.94



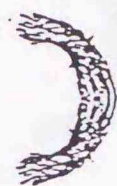
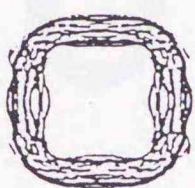
47.43

図4.11 モード I ( $L / (2R) = 2.0$ )

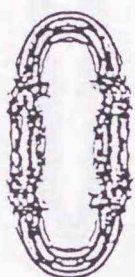




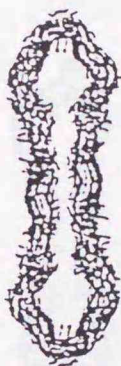
9.49



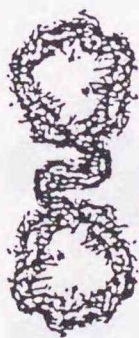
18.97



28.46



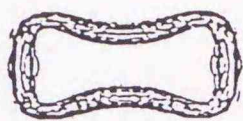
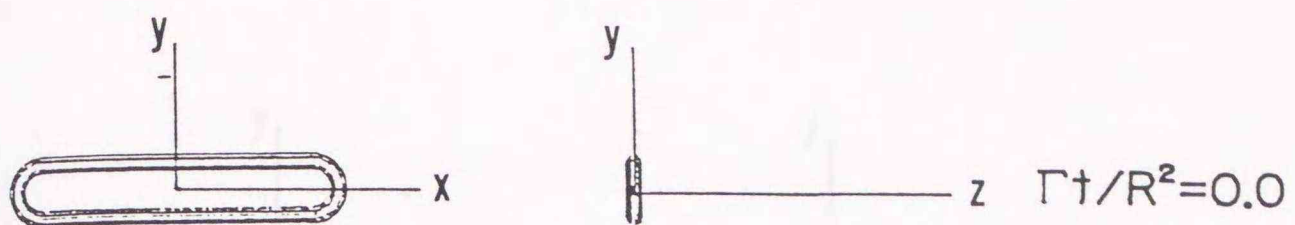
47.43



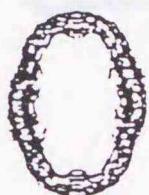
56.91

図4.12 モードII ( $L/(2R)=4.0$ )





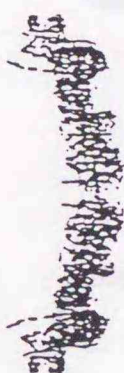
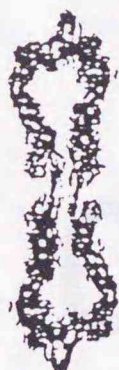
18.97



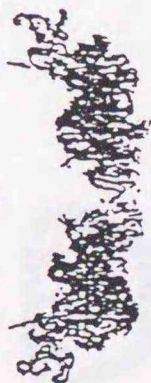
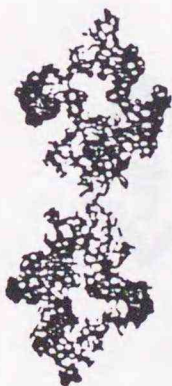
37.94



56.91



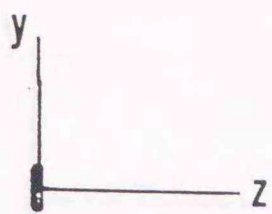
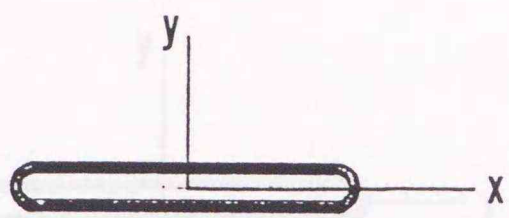
75.88



94.86

図4.13 モードII ( $L/(2R)=6.0$ )

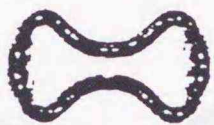




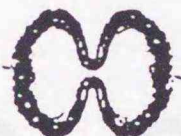
$$\Gamma \dagger / R^2 = 0.0$$



18.97



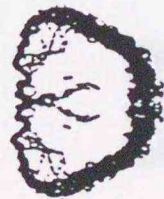
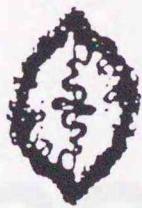
37.94



52.17



61.66



71.14

図4.14 モードⅢ ( $L/(2R)=9.0$ )



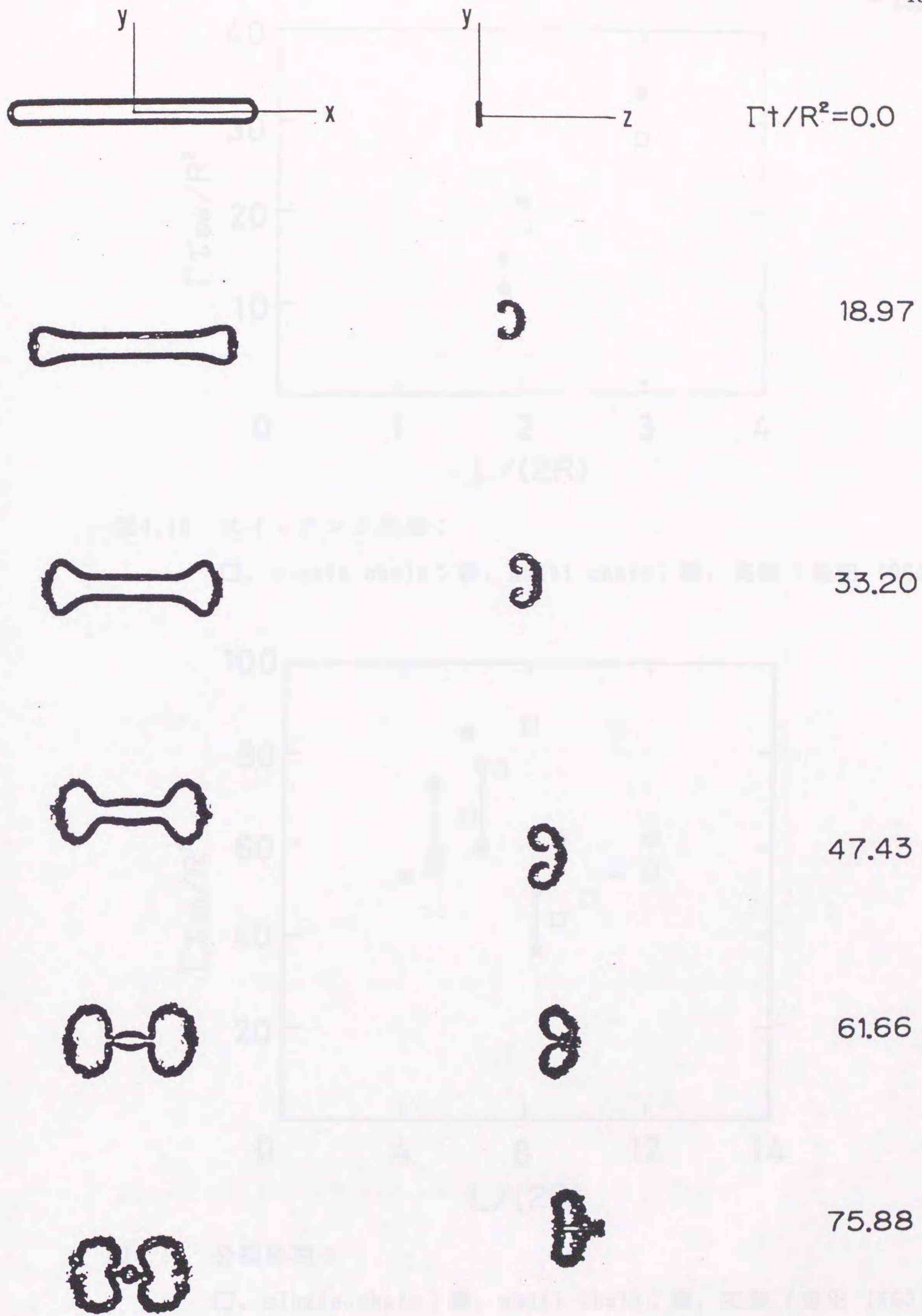


図4.15 モードⅣ ( $L/(2R)=12.0$ )



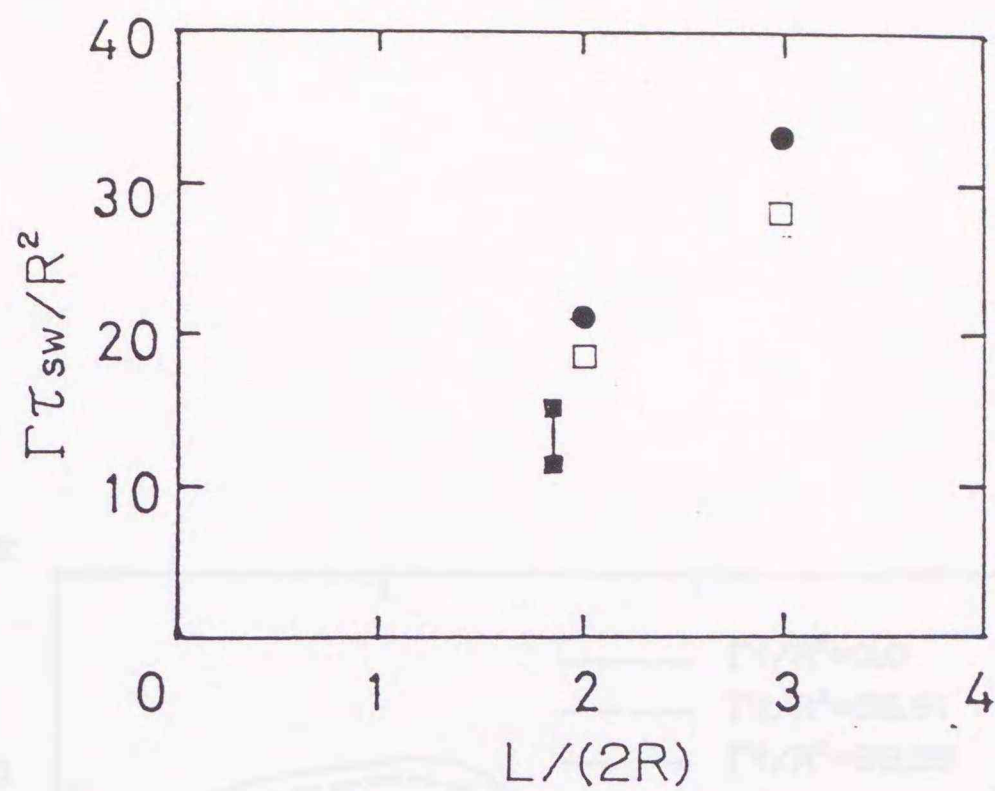


図4.16 スイッチング周期：

□, single chain; ●, multi chain; ■, 実験 (豊田 1990)

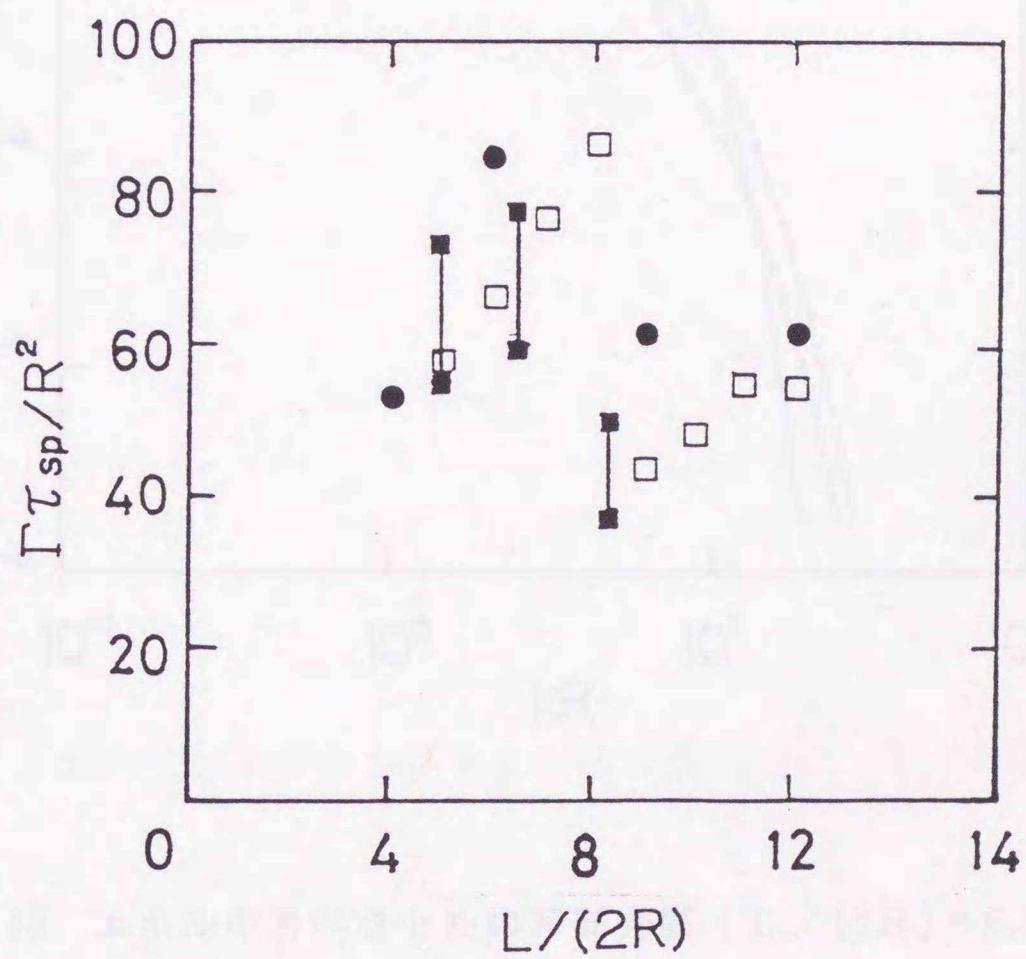


図4.17 分裂時間：

□, single chain; ●, multi chain; ■, 実験 (豊田 1990)



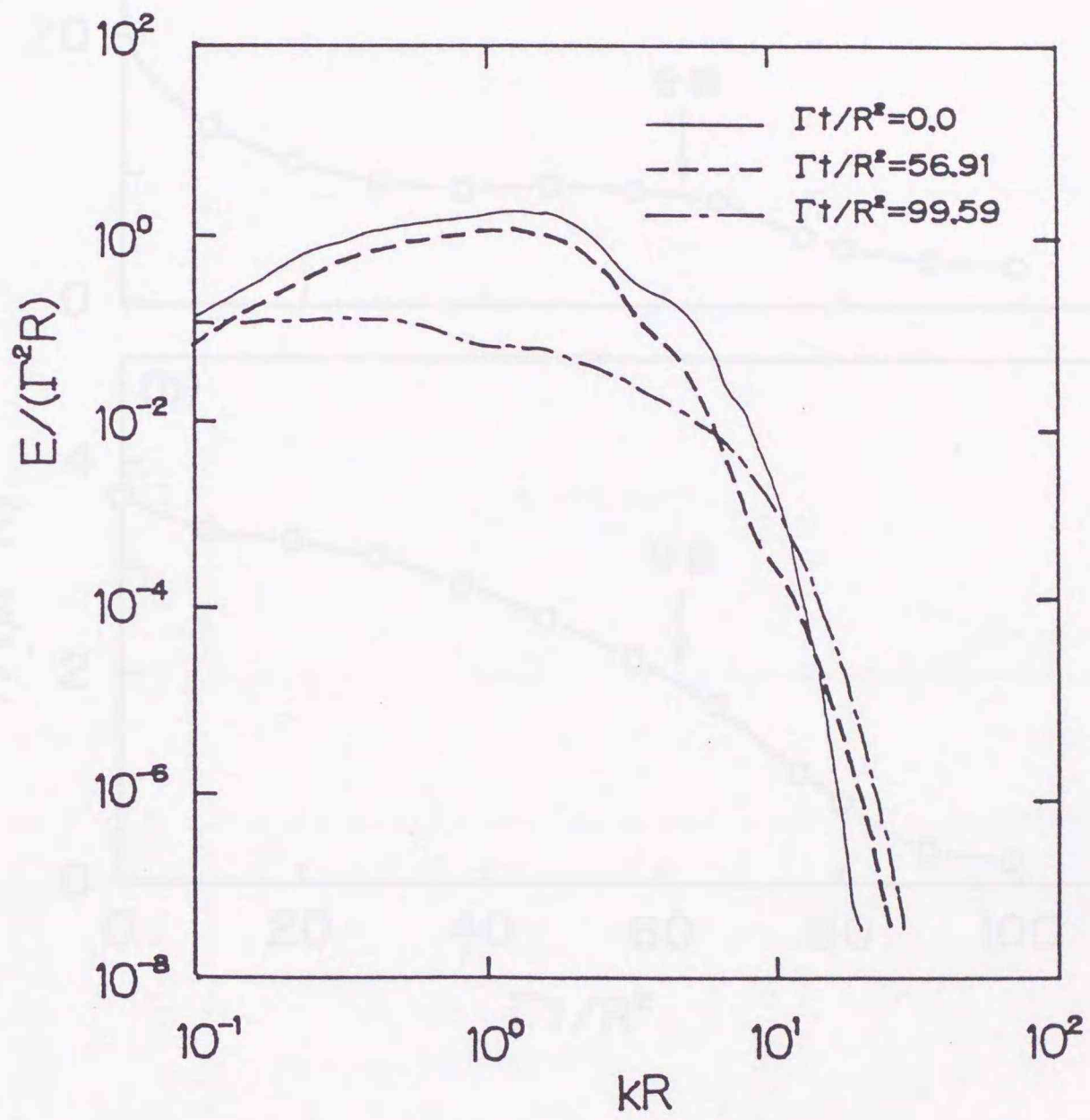


図4.18 エネルギスペクトルの時間発展 ( $L/(2R) = 6.0$ )



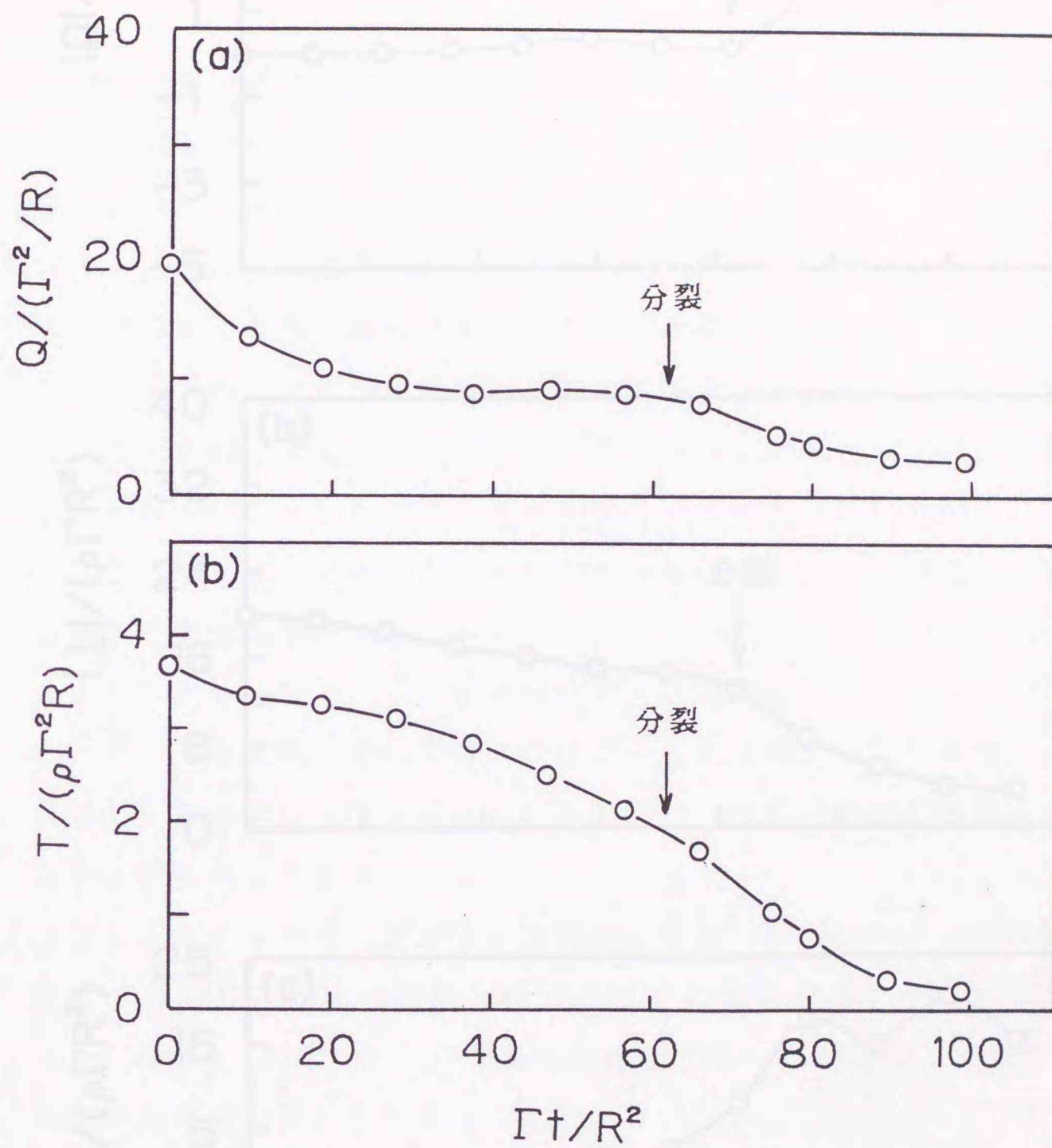


図4.19 エネルギーおよびエントロピーの時間変化 ( $L / (2R) = 6.0$ )



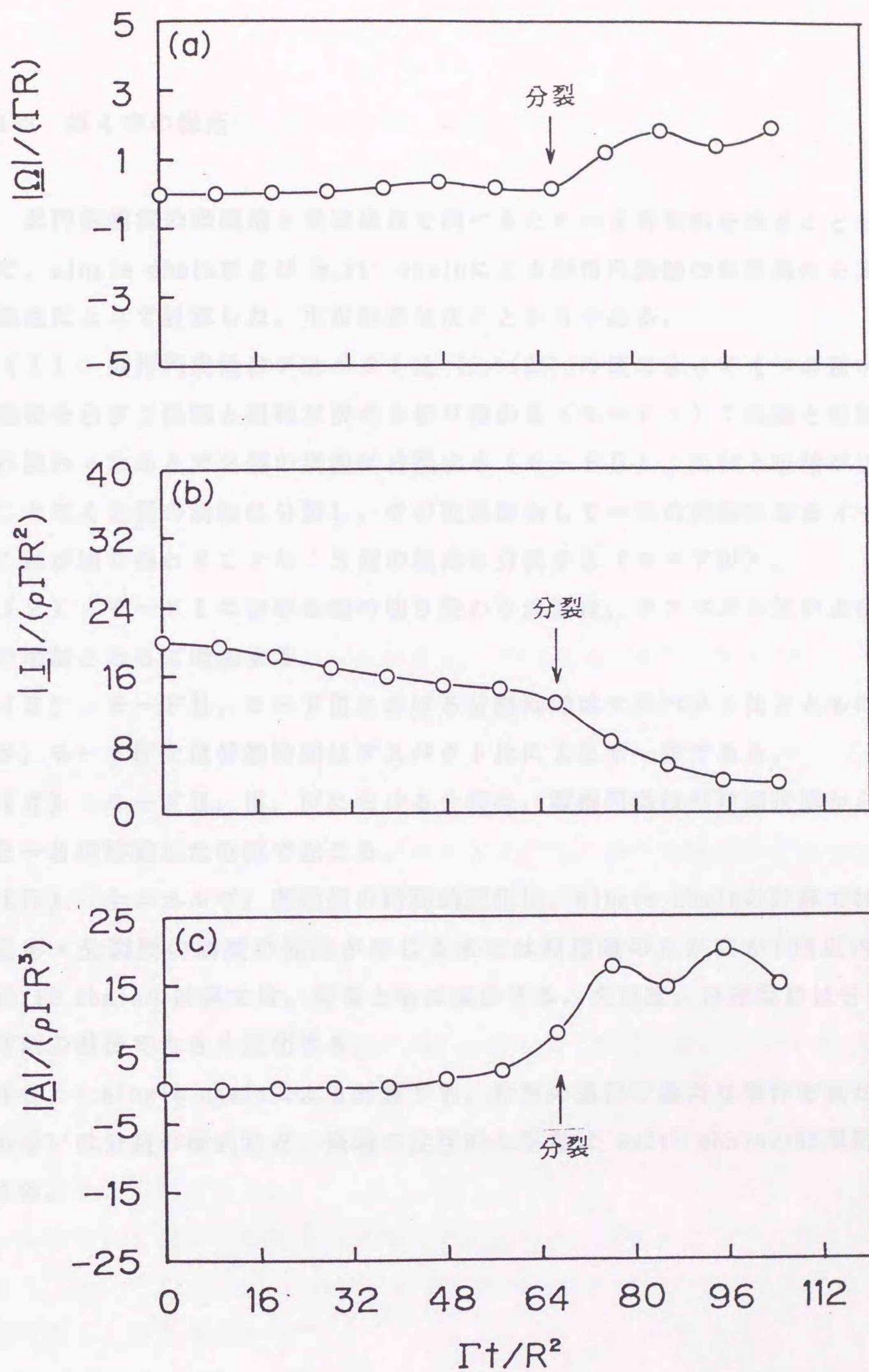


図4.20 全渦度，運動量，角運動量の時間変化 ( $L / (2R) = 6.0$ )



#### 4-3 第4章の総括

非円形噴流の渦構造と発達過程を調べるための基礎資料を得ることを目的として、single chainおよび multi chainによる擬楕円渦輪の変形過程を3次元離散渦法によって計算した。主な結果は次のとおりである。

(1) 擬楕円渦輪はアスペクト比  $L/(2R)$  の値によって4つの基本的な変形過程を示す：長軸と短軸が次々と切り換わる（モードⅠ）；長軸と短軸が1回入れ換わったあとで2個の渦輪に分裂する（モードⅡ）；長軸と短軸が切り換わることなく2個の渦輪に分裂し、その後再結合して一つの渦輪になる（モードⅢ）；軸が切り換わることなく3個の渦輪に分裂する（モードⅣ）。

(2) モードⅠにおける軸の切り換わり周期は、アスペクト比および渦核半径の増加とともに増加する。

(3) モードⅡ、モードⅢにおける分裂時間はアスペクト比とともに増加するが、モードⅣでは分裂時間はアスペクト比によらず一定である。

(4) モードⅡ、Ⅲ、Ⅳにおける分裂は、擬楕円渦輪が初期状態から短直径の2～3倍移動した位置で起こる。

(5) 全エネルギー、運動量の時間的变化は、single chainの計算では、渦輪の変形・分裂後の渦度の発散が生じるまでは初期値のたかだか10%以内である。multi chainの計算では、両者ともに減少する。全渦度、角運動量は分裂を起こす時刻の前後で大きく変化する。

(6) single chainによる計算でも、計算の過程で適当な操作を施せば、変形あるいは分裂の様式など、渦輪の定性的な挙動は multi chainの計算結果と一致する。



## 第5章 3次元物体の後流

第3章および第4章では、渦輪を基本要素とする簡単な渦構造について解析した。そこで第5章では複雑で一般的な乱流の例として、物体まわりの流れについて解析する。一様流中の円柱、角柱、翼、球などの物体まわりの流れは、工学的に基本的な流れであるので、多くの実験および数値解析がなされてきた。球、円板などの3次元物体のまわりの流れを調べる風洞実験では、実験結果に物体を支持している棒あるいはワイヤー等が影響を与えている可能性もある。数値解析ではこの点は問題ない。先にも述べたように、Navier-Stokes方程式の差分法による数値解析の場合には、レイノルズ数が大きくなると特に物体近傍において多くの格子点を必要とし、高レイノルズ数の計算が困難である。例えば、Shirayama (1990) による $200 \times 100 \times 80$ の格子点を用いた球のまわりの流れのシミュレーションでは、球の直径に基づくレイノルズ数は500にすぎない。これに対して本研究で採用した3次元離散渦法では、高レイノルズ数流れのシミュレーション実現の可能性がある。

3次元離散渦法による一様流中の物体まわりの流れの解析例は、Shirayama et al. (1985) による迎え角 $90^\circ$ の円板まわりの流れ、中田・亀本 (1990) による半球形の先端部を有するロケット状物体および球のまわりの流れ、木田 et al. (1990) によるACV (Air Cushion Vehicle) まわりの流れについて報告されているのみである。また、渦糸法では、Leonard (1976) による球のまわりの流れが報告されている。この他、自由混合層の計算 (Inoue 1987, Ashurst & Meiburg 1988, Meiburg & Lasheras 1988) を除いては全て2次元計算、あるいは軸対称性を仮定した計算である。

本章では、簡単な物体まわりの3次元流れとして、一様流中におかれた円板周りの流れ (図5.1) をとりあげ、その迎角を変化させて、3次元離散渦法により数値解析した結果を示す。

代表的な3次元物体として球および円板が考えられるが、計算対象として円板を選んだ理由は次の通りである。

- (1) 形状が幾何学的に単純である。 —— 本計算方法では、計算対象とす



る物体を渦要素の配列によって表現する。よって、円板あるいは球のように曲率が一定の曲線および曲面で構成される単純な形状である方が便利である。

(2) はく離点が明確である。—— はく離位置およびはく離線の曲率が時間によらず一定である。したがって、計算時においては、渦放出位置を時間によらず固定できる。

(3) はく離した流れが再付着しない。—— 例えば、鈍頭円柱のように流れ方向にある程度の長さをもつ物体では、一度はく離した流れが再付着する。流れが再付着すると、再付着点近傍からも渦要素を放出しなければならないため、膨大な計算時間、計算容量が必要となる。再付着点から放出する渦要素の強さ、渦度ベクトルの方向の決定も難しい。現在のところ、3次元離散渦法によるこのようなはく離再付着流れのシミュレーションは、計算時間が膨大となるため困難である。

一様流中に迎え角 $90^\circ$ で設置された円板まわりの流れについては、Berger et al. (1990), 笠 (1990) による実験がある。Berger et al. は、レイノルズ数  $Re = U_0 D / \nu = 1.5 \times 10^4 \sim 3.0 \times 10^5$  ( $U_0$ : 主流速度,  $D$ : 円板直径) の範囲の円板後流を調べている。そして、円板の後流は図5.2のように bubble pumping と helical vortex structure が混在していることを報告している。前者は後流が流れ方向に振動する運動で、後者は円板後流が螺旋状になるパターンである。本論文では、それぞれを pumping 構造と spiral 構造と呼ぶことにする。また、笠 (1990) は、 $Re = 120 \sim 480$  の水路における流れの可視化 (図5.3(a)~(e)) を行い、さらに風洞実験によって  $Re = 2.96 \times 10^4$  の後流渦構造を条件抽出法を用いて解析し、スプーン状の渦構造が形成されることを示している (図5.3(f))。



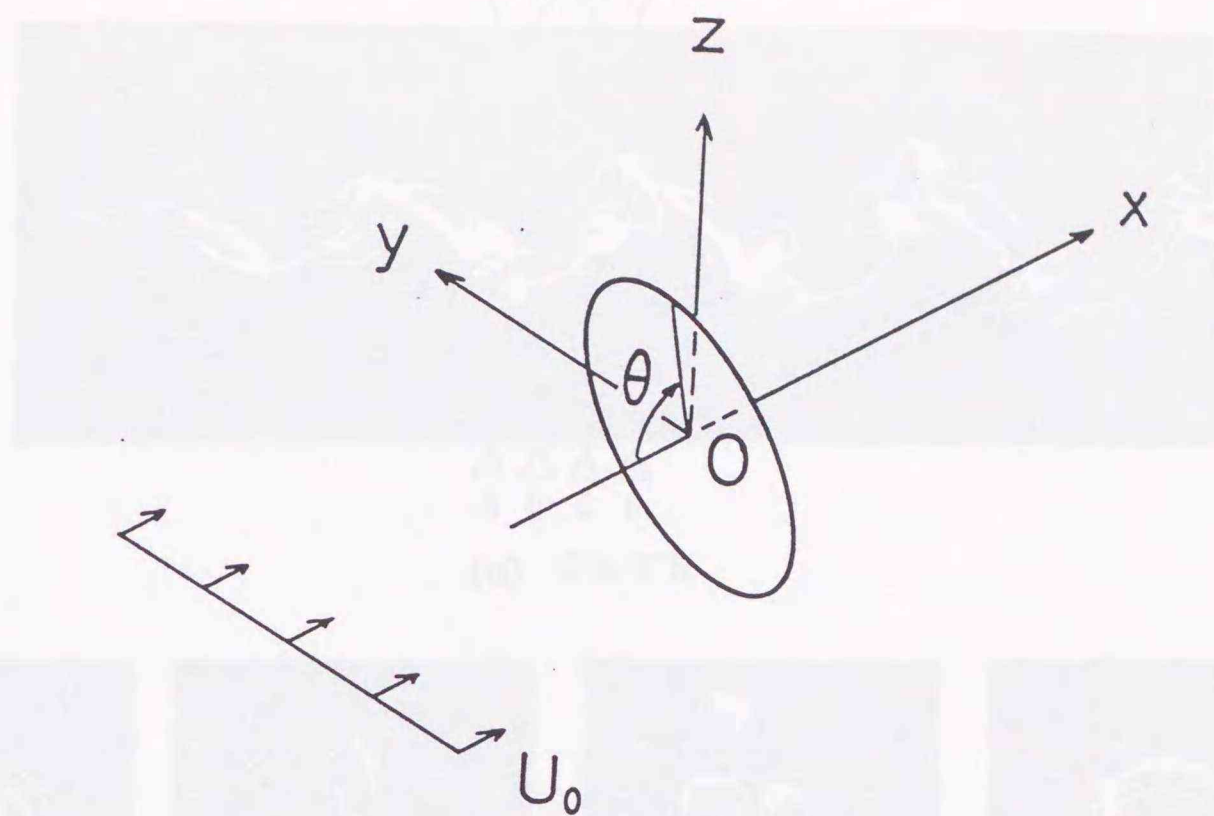


図5.1 座標系

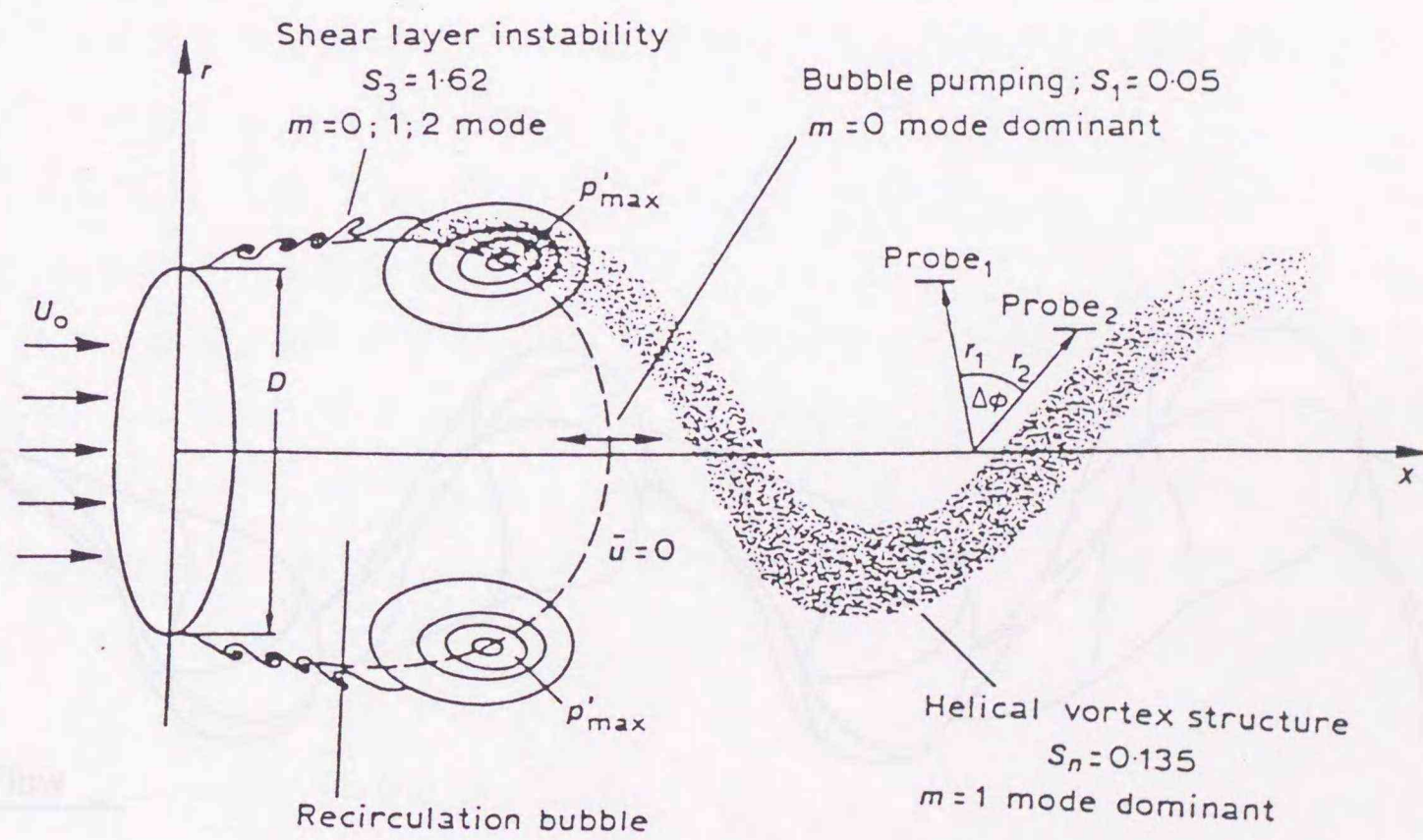
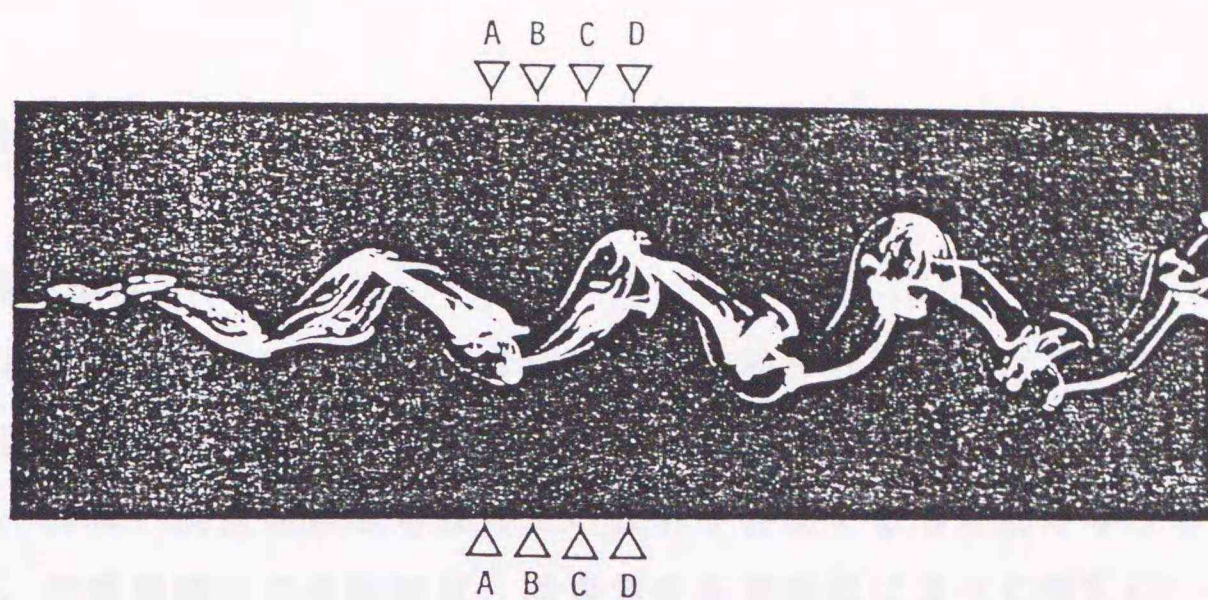
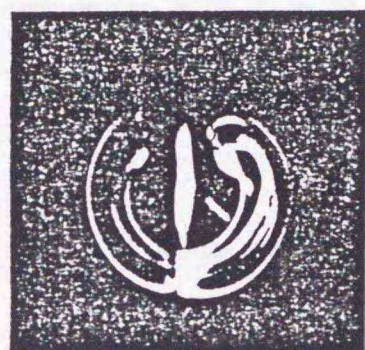


図5.2 円板の後流構造 (Berger et al. 1990)

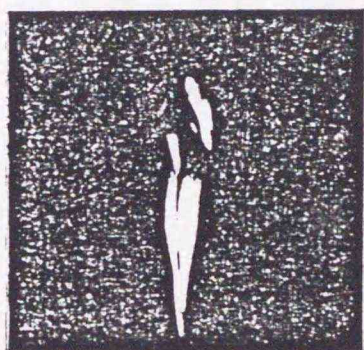




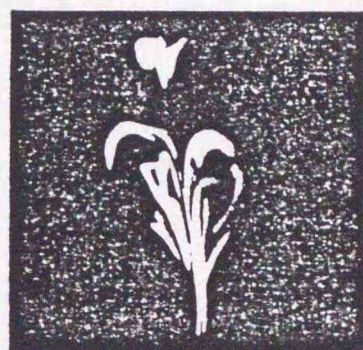
(a) 全体写真



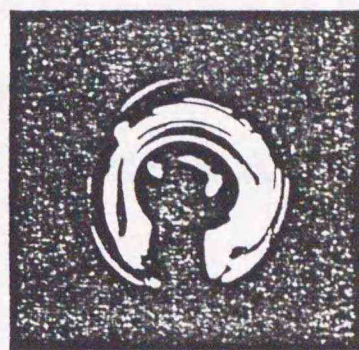
(b)



(c)

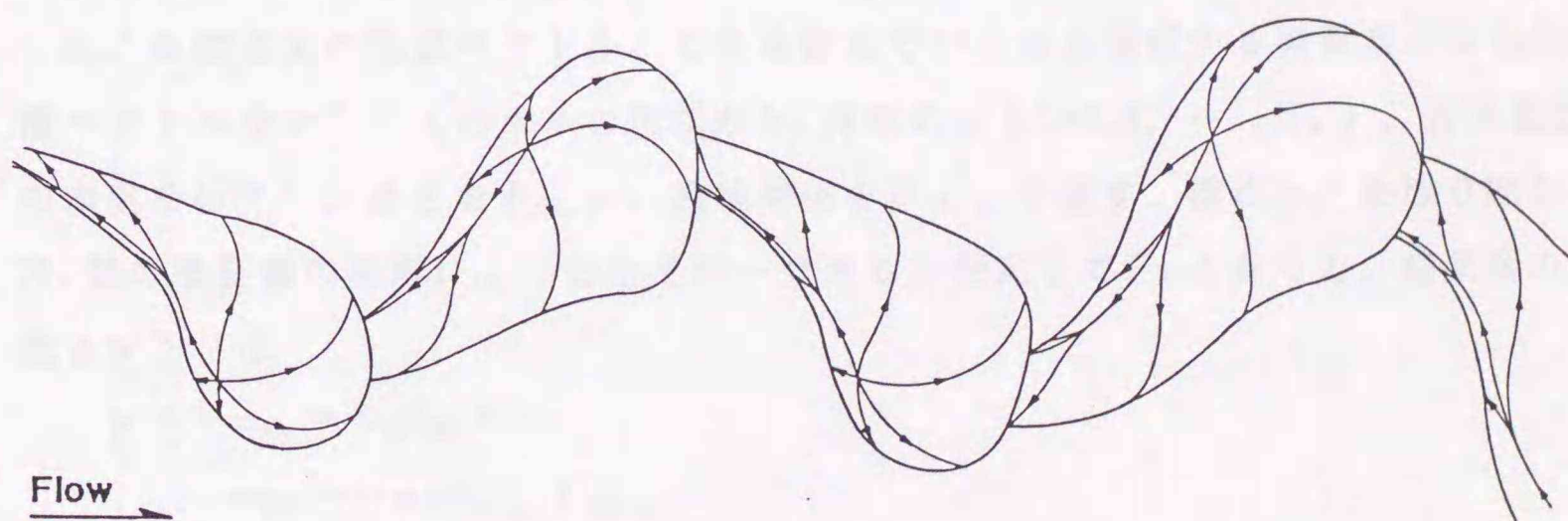


(d)



(e)

垂直断面写真 ( $x/d=20$ )



(f) 全体図

図5.3 円板の渦構造 (笠 1990)



## 5-1 数値計算

### 5-1-1 境界条件

本章における計算は、第3章、第4章における渦の計算と異なり、物体が計算対象とする領域に存在するために、境界条件を考慮しなければならない。離散渦法の利点の一つに、渦要素による固体壁の表現が容易であることが挙げられる。本計算では、計算領域中の固体壁は、渦要素を多角形状に並べた図5.4に示すようなパネルを隙間の無いように配列することによって表すこととした。なお、本計算ではパネルの各辺に一個の渦要素を配置する。さらに、各パネルの重心を標点（参照点, control point, reference point）として、この点において境界条件を満たすようにする。境界条件は、各標点における物体壁に垂直な速度成分を  $u_{np}$  とすると

$$u_{np}=0$$

である。

標点  $k$  における速度  $u_c^k$  は、物体を構成する渦要素による誘起速度を  $u_p^k$ 、物体から放出された渦要素による速度を  $u_s^k$ 、物体周囲の主流速度を  $u_0$  すると次式のようになる。

$$u_c^k = u_p^k + u_s^k + u_0$$

以下にこの求め方を示す。

$x_c^k$  を標点  $k$  の位置ベクトル、それを囲んでパネルを構成する渦要素の中心位置ベクトルを  $x^{(k,i)}$ （パネルの形状が  $N_k$  角形するとき  $i=1, 2, \dots, N_k$ ）、各渦要素の渦度を  $\omega^{(k,i)}$ 、長さを  $l_{(k,i)}$ 、渦核半径を  $\delta_{(k,i)}$  で表す。標点  $x_c^k$  を取り囲む  $N_k$  個の渦要素の循環  $\Gamma_{(k,i)}$  は全て同一であると仮定して  $\Gamma_k$  とおくと、渦要素の強さ  $\gamma^{(k,i)}$  は

$$\begin{aligned} \gamma^{(k,i)} &= \omega^{(k,i)} d^3 x^{(k,i)} \\ &= \omega^{(k,i)} \pi \sigma_{(k,i)}^2 l_{(k,i)} \end{aligned}$$

で表される。ここで

$$l^{(k,i)} = l_{(k,i)} \frac{\omega^{(k,i)}}{|\omega^{(k,i)}|}$$



なるベクトル  $l^{(k, i)}$  を導入すると渦要素の強さ  $\gamma^{(k, i)}$  は

$$\gamma^{(k, i)} = \Gamma_k l^{(k, i)} \quad (5.1)$$

となる。

次に、標点  $x_c^j$  をとり囲む  $N_j$  個の渦要素が標点  $x_c^k$  に誘起する速度  $u_p^{k(j, i)}$  は、Rosenhead-Mooreの渦核構造を採用すると、Biot-Savartの法則によって

$$u_p^{k(j, i)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_i^{N_j} \frac{(x_c^k - x^{(j, i)}) \times \gamma^{(j, i)}}{(|x_c^k - x^{(j, i)}|^2 + a \sigma_{(j, i)}^2)^{3/2}}$$

と表されるから、物体を形成する全渦要素が標点  $x_c^k$  に誘起する速度  $u_c^k$  は、物体を形成するパネルの総数を  $M_P$  個とすると

$$u_p^k = \sum_j^{M_C} u_p^{k(j, i)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_j^{M_C} \sum_i^{N_j} \frac{(x_c^k - x^{(j, i)}) \times \gamma^{(j, i)}}{(|x_c^k - x^{(j, i)}|^2 + a \sigma_{(j, i)}^2)^{3/2}}$$

と表される。この式は(5.1)式を考慮すると

$$u_p^k = -\frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \sum_i \frac{(x_c^k - x^{(j, i)}) \times l^{(j, i)}}{(|x_c^k - x^{(j, i)}|^2 + a \sigma_{(j, i)}^2)^{3/2}} \quad (5.2)$$

に変形することができる。ここで

$$G^{kj} = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{(x_c^k - x^{(j, i)}) \times l^{(j, i)}}{(|x_c^k - x^{(j, i)}|^2 + a \sigma_{(j, i)}^2)^{3/2}} \quad (5.3)$$

と書くことにする。  $G^{kj}$  は、物体表面を形成する渦要素および標点の位置が決定していれば、計算の時間進行に関わりなく幾何学的に決まってしまう量である。

(5.3)式を用いると(5.2)式は

$$u_p^k = \sum_j \Gamma_j G^{kj}$$

と表される。

各標点  $x_c^k$  において、物体表面に垂直な法線ベクトルを  $n_c^k$  と書くことにすると境界条件は

$$u_c^k \cdot n_c^k = 0 \quad (5.4)$$

で表現できる。(5.4)式は標点の個数  $M_P$  (=パネル数) と等しい  $M_P$  元の連立方程式となっている。(5.4)式の連立方程式を時間間隔  $\Delta t$  ごとに解くと、物体を形成



する渦要素の強さを決定することができる。

円板の法線ベクトル  $n_D$  は、一様流に対する円板の迎え角を  $\theta$  とすると

$$n_D = (-\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

本計算においては、円板を構成する全パネルの法線ベクトルは上記のベクトルに一致するので、境界条件は

$$u_c^k \cdot n_D = 0 \quad (5.5)$$

と書くことができる。



### 5-1-2 円板

計算対象が円板なので，これを図5.5のように，二等辺三角形と等脚台形のパネルの配列によって表現することとした．これらのパネルによって表された円板の全体図は図5.6に示す．図5.5および図5.6の中の  $\times$  印は標点を表す．標点の位置は，それぞれのパネルの重心と一致させた．パネルの面積は全て同一とする．このようにすることによって，円板の端部ほど半径方向に細かくパネルを配列することができる．パネルを密に配列させると，単位面積当たりの標点数も多くなるので物体壁（境界条件）をより精度良く表現することができる．

円板を構成するパネル数は，Shirayama et al. (1985) では円周方向24個，半径方向16個であったが，本計算では円周方向36個，半径方向16個とした．また，Shirayama et al. (1985) は迎え角 $90^\circ$  のみの計算であるので，半径方向の渦度ベクトルをもつ渦要素を軸対称性を仮定して省略している．しかし，流れが発達した段階での軸対称性は一般には成り立たないので，本計算では省略しないこととした．

円板を構成する渦要素の半径 $\delta_p$ と渦核半径 $\sigma_p$ は，常に同一とする． $\delta_p$ および $\sigma_p$ の大きさは円板近傍の速度分布を調べて決定した．これらの半径を小さく設定すると，渦核の重なり合い（オーバーラップ）も小さくなる．したがって，例えば図5.7(a)のように $\sigma_p/R=0.01$ とした場合には，円板上で速度が著しく大きくなる点が存在する．図5.7は，図5.6の中のAA断面内の速度ベクトル図である．円板近傍の速度分布は，円板の淀み点からこの半径方向に円板の面と平行な成分のみを有するはずであるが，図5.7(a)ではこのようにはなっていない．図5.7(b)のように $\sigma_p/R=0.03$ でも円板近傍では，円板表面と平行な流れにならない．図5.7(c)に示すように， $\sigma_p/R=0.05$ として，渦要素の渦核が十分に重なり合うようによようにすると，円板近傍においても，本来得られるべき円板に平行な流れとなる．



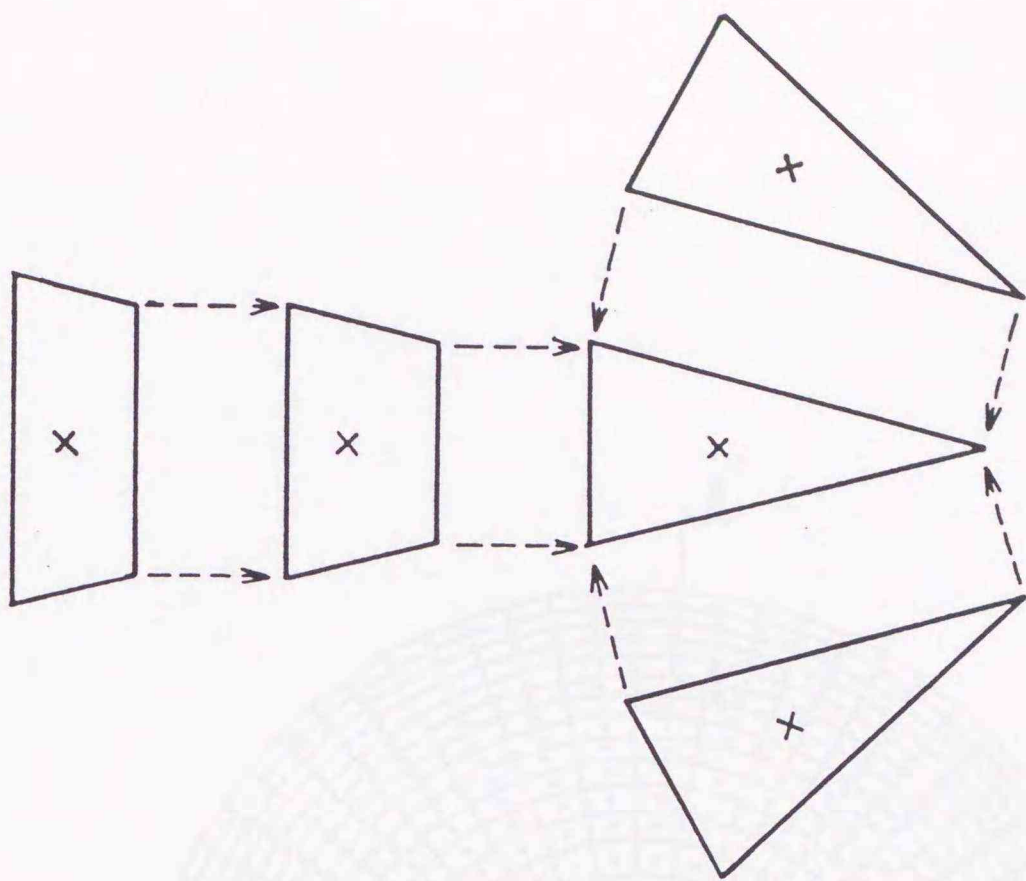


図5.5 円板におけるパネルの配置

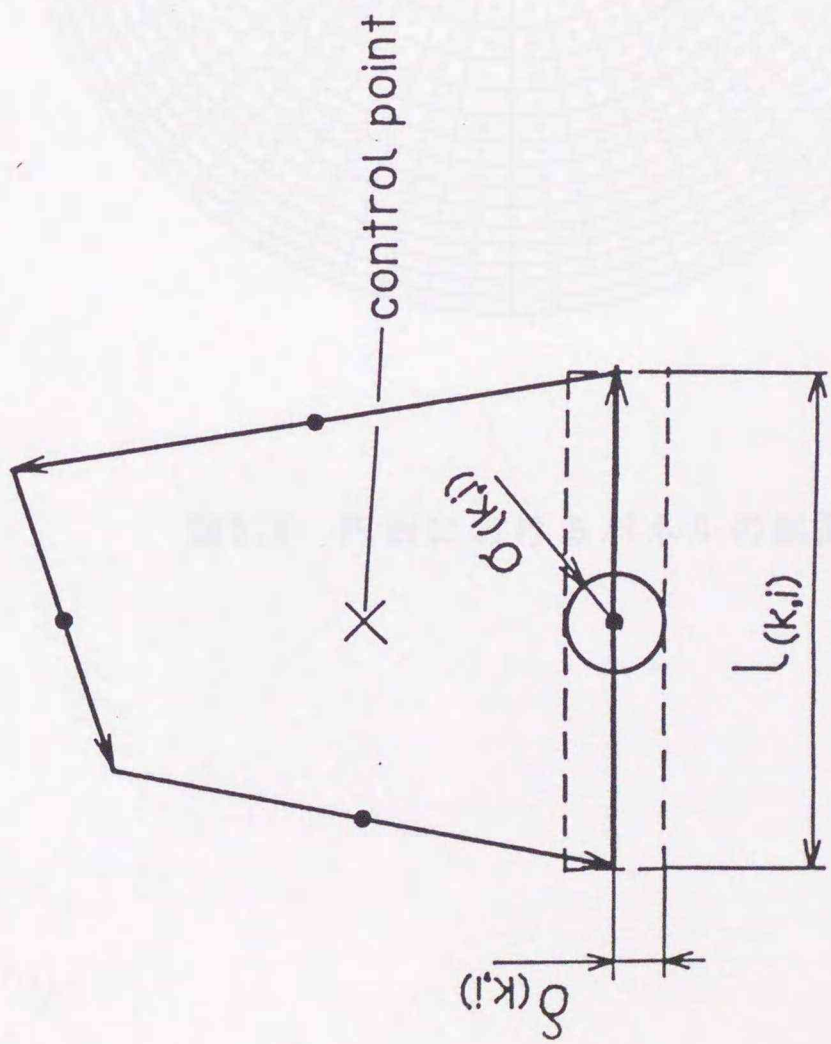


図5.4 パネル



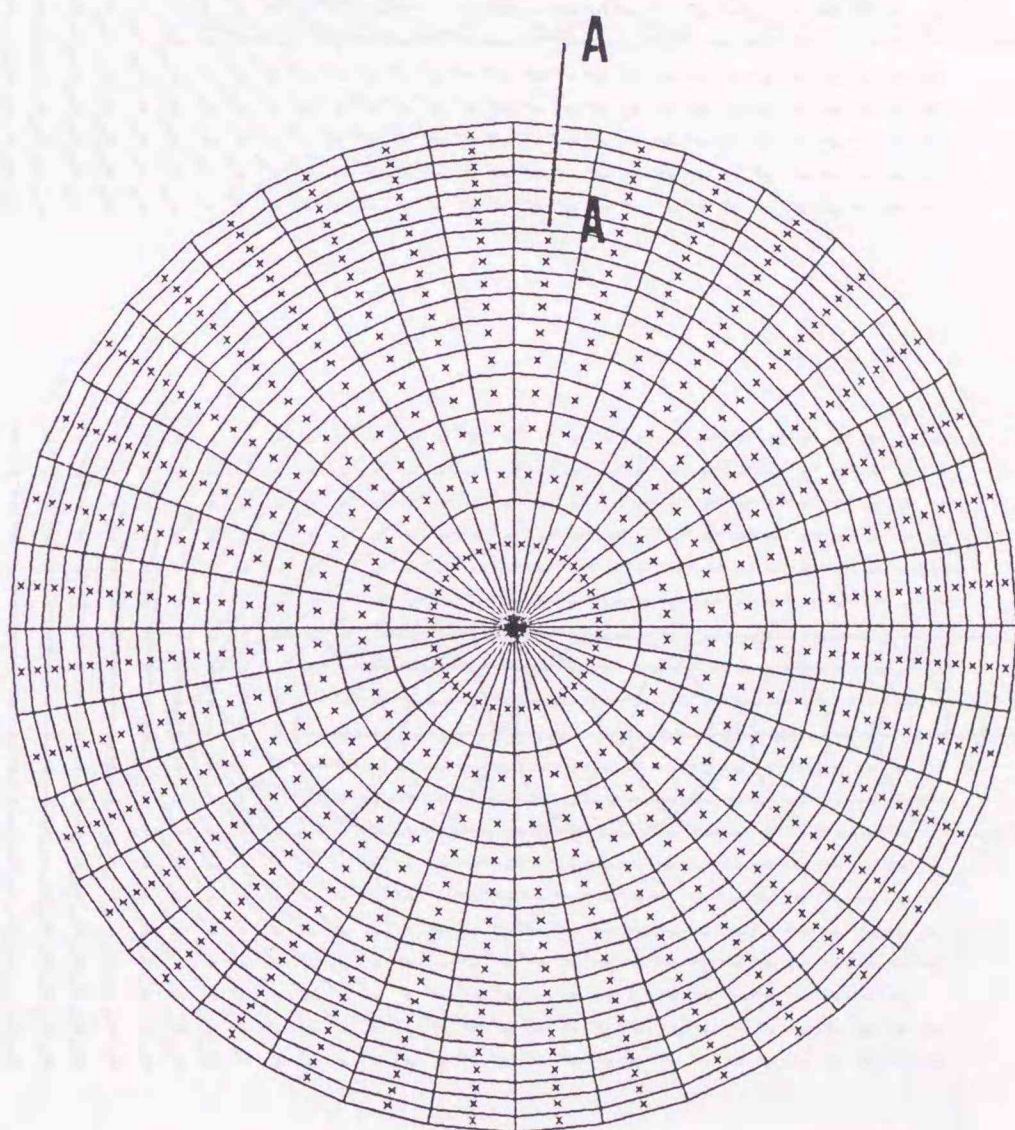
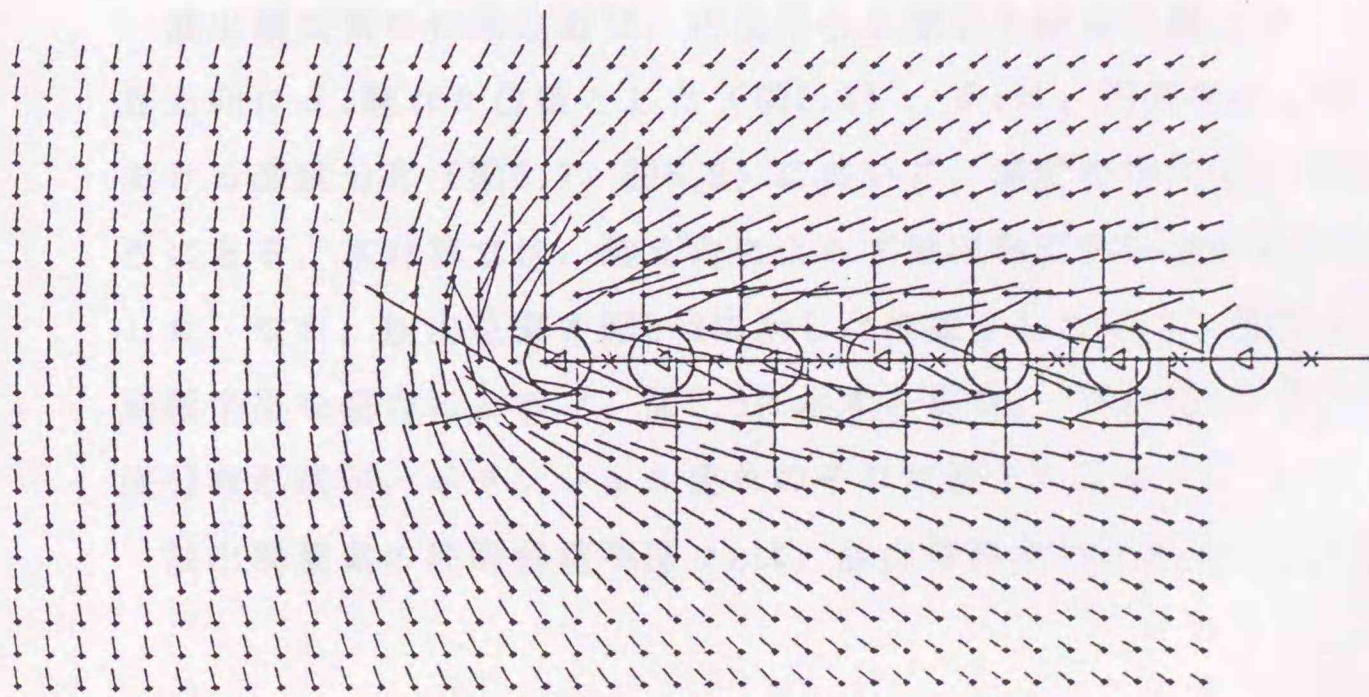
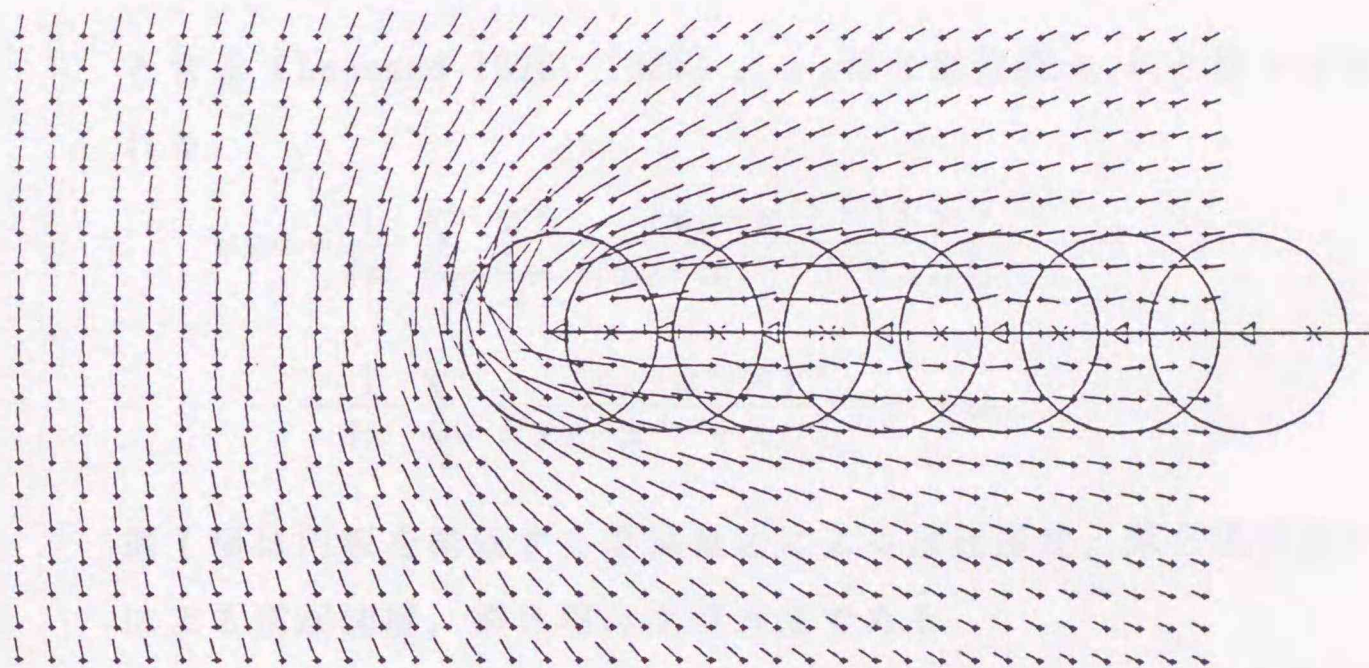


図5.6 円板におけるパネルの配置（全体図）

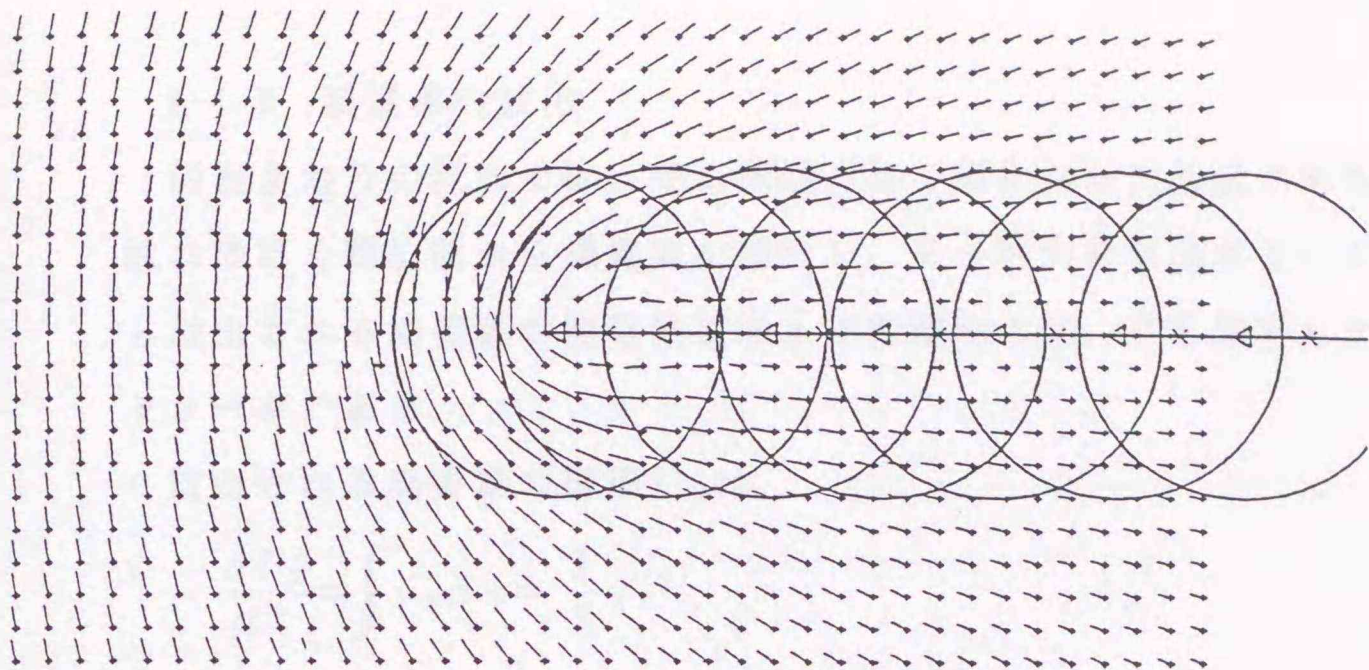




$\sigma_p/R=0.01$   
(a)



0.03  
(b)



0.05  
(c)

0.1R  
150

図5.7 図5.6のA-A断面内の速度ベクトル図（放出渦のない場合）



### 5-1-3 渦要素の放出

円板まわりの流れでは，せん断層のはく離位置は円板端である．離散渦法では流れのはく離位置から渦要素を放出し，せん断層を表現する．このとき，円板から放出される渦要素の初期位置および初期強さは，計算結果を大きく左右するパラメータである．

放出される渦要素の循環  $\Gamma_s$  は

$$\frac{d\Gamma_s}{dt} = \int v_s ds = \frac{1}{2} v_s^2$$

より

$$\Gamma_s = \frac{1}{2} v_s^2 \Delta t$$

とする (Leonard 1976, 1980)． $v_s$  は放出位置  $x_s$  における速度で，次式で表される．

$$v_s = -\frac{1}{4\pi} \sum_j \sum_i \frac{(x_s - x^{(j,i)}) \times \gamma^{(j,i)}}{(|x_s - x^{(j,i)}|^2 + a \sigma_{(j,i)}^2)^{3/2}} \\ - \frac{1}{4\pi} \sum_a \frac{(x_s - x^a) \times \gamma^a}{(|x_s - x^a|^2 + a \sigma_a^2)^{3/2}} + u_0$$

第1項は円板を構成する全渦要素による誘起速度，第2項は放出された全渦要素による誘起速度，第3項は主流速度である．

1回に放出する渦要素数は，円周方向に36個にパネルが配列されていることから36個とした．

放出渦要素の初期位置は，円板中心と標点を結ぶ直線上で，円板端から円板半径方向に  $\delta_R$  離れた位置とした (図5.8)． $\delta_R$  は，円板中心と標点を結ぶ直線上における速度分布 (図5.7, 図5.9) において，速度の極大値が位置が  $2\delta_R$  になるようにとる．本計算では，迎え角によらず放出渦要素の初生位置を  $\delta_R/R = 0.01$  とした．なお，放出位置を図5.8に示した位置としたのは，円板を形成する渦要素の渦核半径を適当にとると，図5.9に示すとおり，円板中心と標点を結ぶ直線上の速度分布形状が，ポテンシャル流れのそれに近くなるからである．

放出渦要素の初期渦核半径  $\sigma_0$  は，放出位置が円板端から  $0.01R$  であることから



$\sigma_o/R=0.01$ とするのが合理的である。しかし、放出される渦要素は円形渦輪状に配列されていることを考慮すると、第3章3-1で検討したように $\sigma_o/h \geq 1$  ( $h$ : 渦要素間距離) の条件を満たすためには、必要な渦要素数が $N_s \geq 628$ となり、このように多数の渦要素を放出させることは計算時間、容量の点から困難である。また、放出渦要素の渦核半径 $\sigma_o/R=0.01$ で放出渦要素数 $N_s=36$ として計算を実行れば、計算結果にもとづいて時間平均速度変動を求めると、図5.10のように非現実的な値になる。放出時に $\sigma_o/h \geq 1$ の条件を満たすためには、 $N_s=36$ では $\sigma_o/R \geq 0.174$ でなければならない。したがって、本計算では $\sigma_o/R=0.2$ とすることにした。

放出時間間隔は、渦要素の移動時間間隔 $\Delta t$ とすることが理想的であるが計算時間および計算容量を節約するために、Shirayama et al. (1985) の例に倣い $4\Delta t$ とし、4時間間隔毎に渦要素を放出することとする。

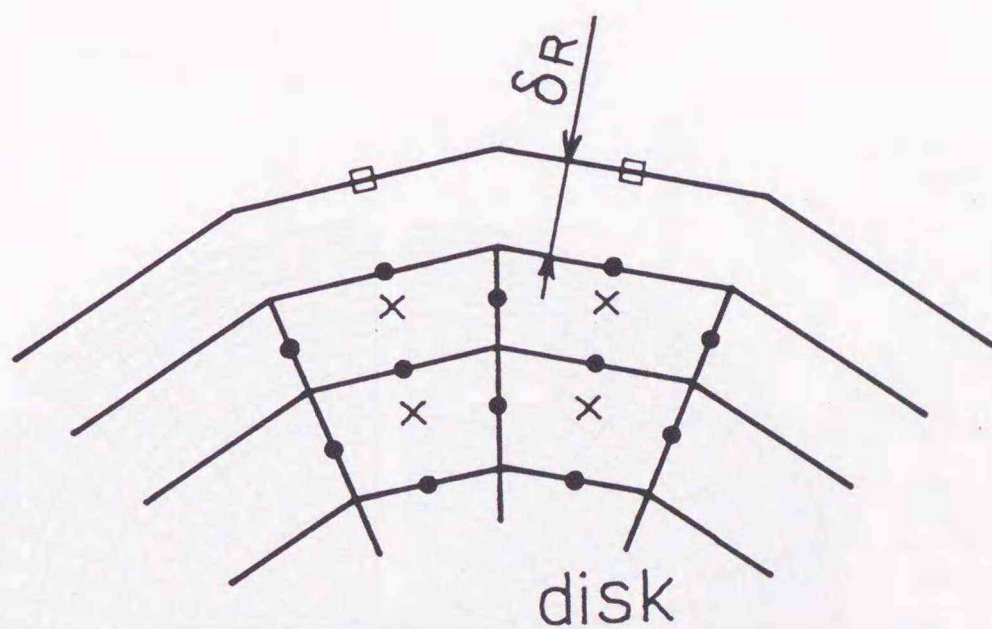


図5.8 円板端部拡大図：□，放出渦初期位置；  
●，円板を構成する渦要素中心；×，標点



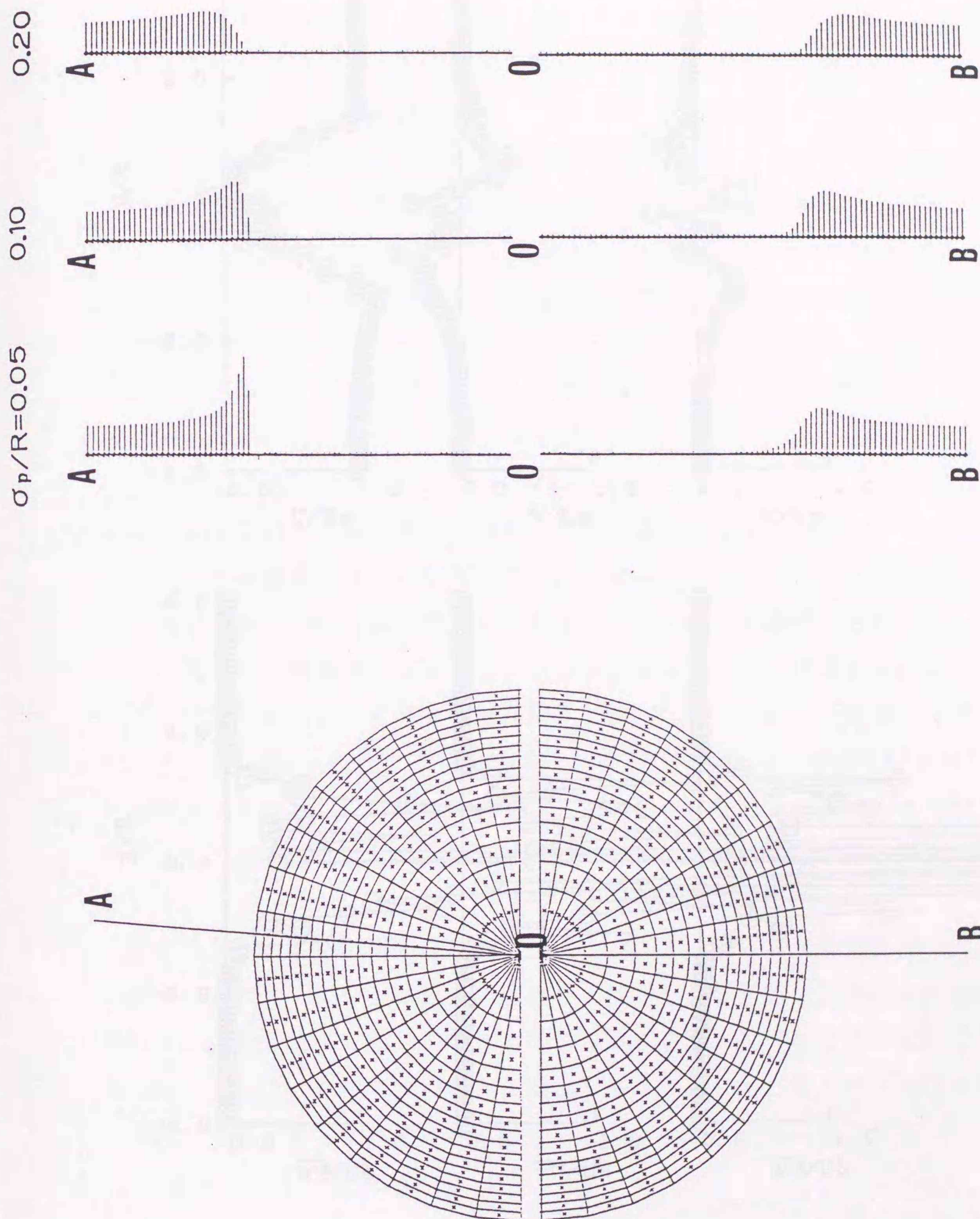


図5.9 円板の近くの速度分布



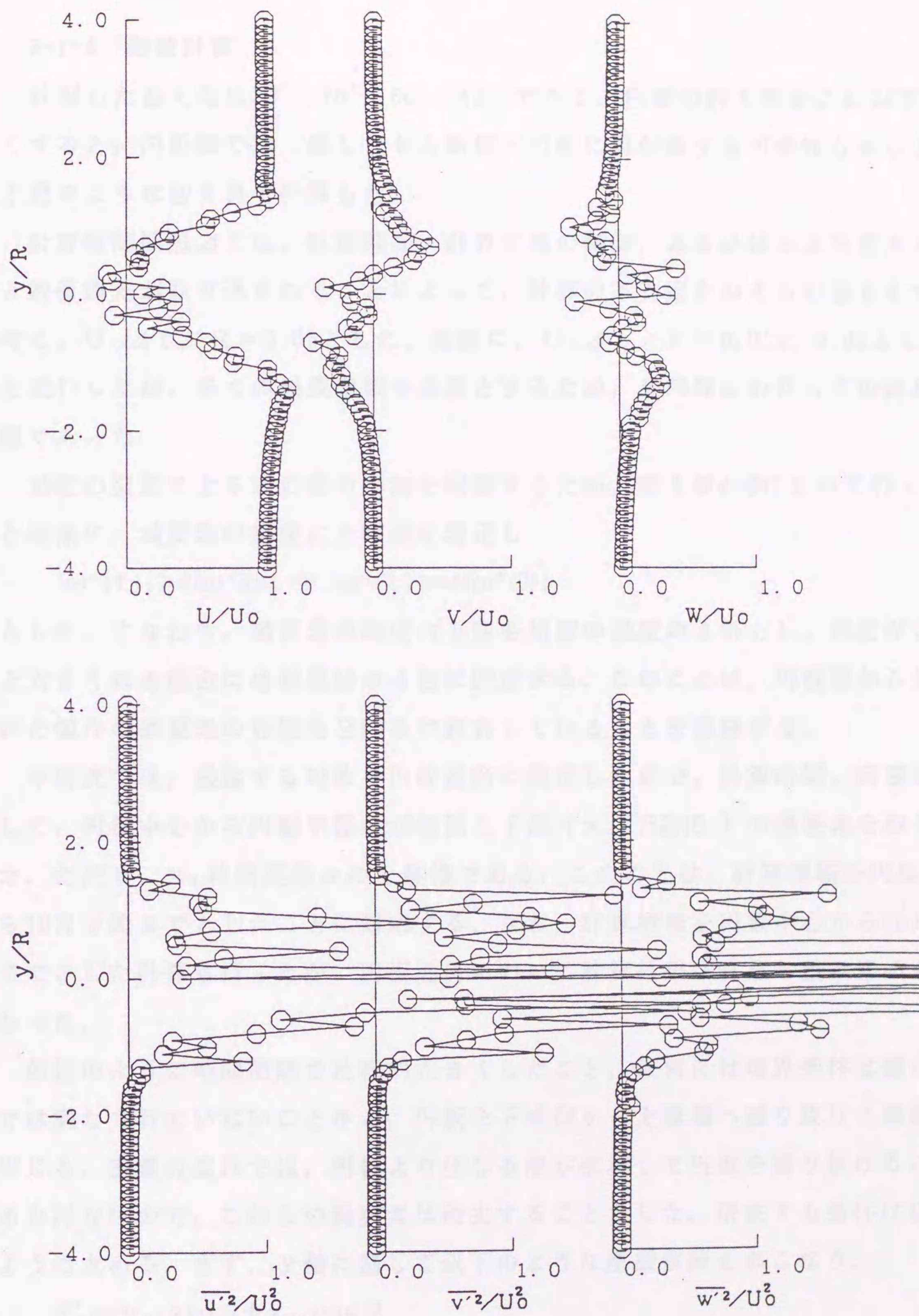


図5.10 時間平均速度と変動速度エネルギー ( $x/R = 1.0$ , 放出渦要素の渦核半径  $\sigma_0/R = 0.01$ , 放出渦要素数  $N_s = 36$ )



#### 5-1-4 数値計算

計算した迎え角は $90^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ である。円板の迎え角をこれ以下に小さくすると、円板端ではく離れたせん断層が円板に再付着する可能性もあると考え、上記のような迎え角で計算した。

計算時間間隔 $\Delta t$ は、計算時間、計算容量の制限、あるいはある程度大きすると数値誤差が取り込まれることによって、計算の不安定を抑えるの働きをすることを考え、 $U_0 \Delta t / R = 0.06$ とした。実際に、 $U_0 \Delta t / R = 0.015, 0.03$ として計算を実行したが、多くの渦要素数を必要とするため、長時間にわたっての計算は困難であった。

渦度の発散による渦要素の増加を回避するため、第4章4-2において行った計算と同様に、渦要素の渦度に上限値を設定し

$$|\omega^\alpha(t)| > 4|\omega^\alpha(0)| \Rightarrow |\omega^\alpha(t)| = 4|\omega^\alpha(0)|$$

とした。すなわち、渦要素の渦度の上限を初期の渦度の4倍とし、渦度がこれ以上大きくなる場合には初期値の4倍に固定する。このことは、円板端から放出された個々の渦要素の分裂を2回まで許容していることを意味する。

本研究では、議論する対象を円板近傍に限定したので、計算時間、容量を考慮して、円板中心から円板半径の10倍以上下流 ( $x_\alpha / R \geq 10$ ) の渦要素を取り除いた。ただし、 $x_\alpha$ は渦要素 $\alpha$ の $x$ 座標である。このことは、計算領域を円板中心から $10R$ 下流までとしたことに対応する。なお、計算領域を円板中心から $20R$ 下流までとした計算も行ったが、円板近傍において計算結果に有意な差は認められなかった。

前述のように時間間隔を比較的大きくしたこと、厳密には境界条件は標点以外では満たされていないことから、円板を下流側から上流側へ通り抜ける渦要素が生じる。実際の流れでは、円板より生じる渦が逆流して円板を通り抜けることはあり得ないので、これらの渦要素は消去することとした。消去する条件は以下のよう求める。まず、 $y$ 軸に関して以下のような座標変換をおこなう。

$$x'_{\alpha 1} = x_{\alpha 1} \sin \theta + z_{\alpha 1} \cos \theta$$

$$y'_{\alpha 1} = y_{\alpha 1}$$

$$z'_{\alpha 1} = -x_{\alpha 1} \cos \theta + z_{\alpha 1} \sin \theta$$



ここで  $x_{\alpha i}, y_{\alpha i}, z_{\alpha i}$  はそれぞれ渦要素  $\alpha$  の両端の  $x, y, z$  座標,  $x'_{\alpha i}, y'_{\alpha i}, z'_{\alpha i}$  は座標変換後の渦要素  $\alpha$  の両端の  $x, y, z$  座標,  $\theta$  は円板の迎え角である。これらを用いると, 円板を通り抜ける渦要素を計算領域から除去する条件は

$$y'^2_{\alpha i} + z'^2_{\alpha i} \leq R^2, \quad x'_{\alpha i} \leq 0$$

である。



## 5-2 結果および考察

### 5-2-1 流れの様式

結果を示す前に、計算を実行した時間範囲について説明する。先に述べたように、本計算では渦要素の渦度に上限値を設定し、さらに、ある地点より下流の渦要素は消去している。計算を開始した初期段階においては、出発渦 (starting vortex) を表現するために多くの渦要素を必要とするが、計算を開始してからある時間が経過すると、渦要素数の増減が小さくなると予想される。後で述べる時間平均値は、渦要素数の変化がある程度小さくなった時刻を  $U_0 t / R = 0$  とし、 $U_0 t / R = T$  までの速度等の積分値を時間  $T$  で除することによって求める。

図5.11は全渦要素数の時間変化である。計算を始めた時刻を  $U_0 \tau / R = 0$  とする。図5.11より  $U_0 t / R = 0$  とする時刻  $U_0 \tau_i / R$  を決定することができる。 $\theta = 90^\circ$  のときの出発渦には多くの渦要素を必要とし、迎え角を小さくするにしたがってこれを表現するのに必要な渦要素数が少なくなる傾向がある。図5.11から、 $\theta = 90^\circ$  のとき  $U_0 \tau_i / R = 24$ 、 $\theta = 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  のとき  $U_0 \tau_i / R = 18$  とした。

迎え角  $\theta = 90^\circ$  の計算結果を図5.12に示す。 $U_0 \tau / R = 24 \sim 30$ 、すなわち  $U_0 t / R = 0 \sim 6$  の  $x y$  面および  $x z$  面の渦要素分布を  $U_0 t / R = 1.2 (= 20 U_0 \Delta t / R)$  おきに示してある。渦要素の渦度ベクトルの方向は不規則なので、渦要素の連続的な配列によって笠 (1990) の可視化実験に見られる (図5.3) 明確な渦構造を形成していない。しかし、全体として渦要素の分布は、円板後流が周期的に蛇行していることを示している。円板下流近傍に着目すると、例えば図5.12(a-2)  $\sim$  (f-2) の一連の図からわかるように、図5.12(a-2) ( $U_0 t / R = 0.0$ ) では円板の  $+z$  側、図5.12(d-2) ( $U_0 t / R = 6$ ) では  $-z$  側から渦塊が放出されている。これらの渦塊の放出は疑似周期的である。 $x y$  面のパターンでも同様に円板後流の蛇行および渦塊の放出が見られる。図5.12はpumping構造とspiral構造の両方のモードが混在しているとみなすことができる。

円板端から仮想的な粒子を放出し、放出位置を同一とする粒子を線分で結ぶことによって流脈線を得ることができる。図5.13にこのようにして得られた流脈線



を示す。粒子の放出時間間隔は $4\Delta t$ ，放出位置は $+z$ 軸から円板の円周方向に $40^\circ$ 毎に4点，円板端から円板の半径方向に $0.02R$ 離れた点である。最初に粒子を放出した時刻は $U_0\tau/R=24$ であり，図5.13は $200\Delta t$ 後の $U_0\tau/R=36$ におけるものである。笠（1990）の可視化実験では図5.3に示したようにスプーン状の渦構造が見られるが，本計算における流脈線はカオス的挙動をしており，これらより明確な渦構造の存在は確認することはできない。この原因として，笠の可視化実験が $Re=250$ であるのに対して，本計算が高レイノルズ数における流れを表現していることがあげられる。あるいは，計算における空間分解能および時間分解能が不足していることを示唆していると解釈することもできる。

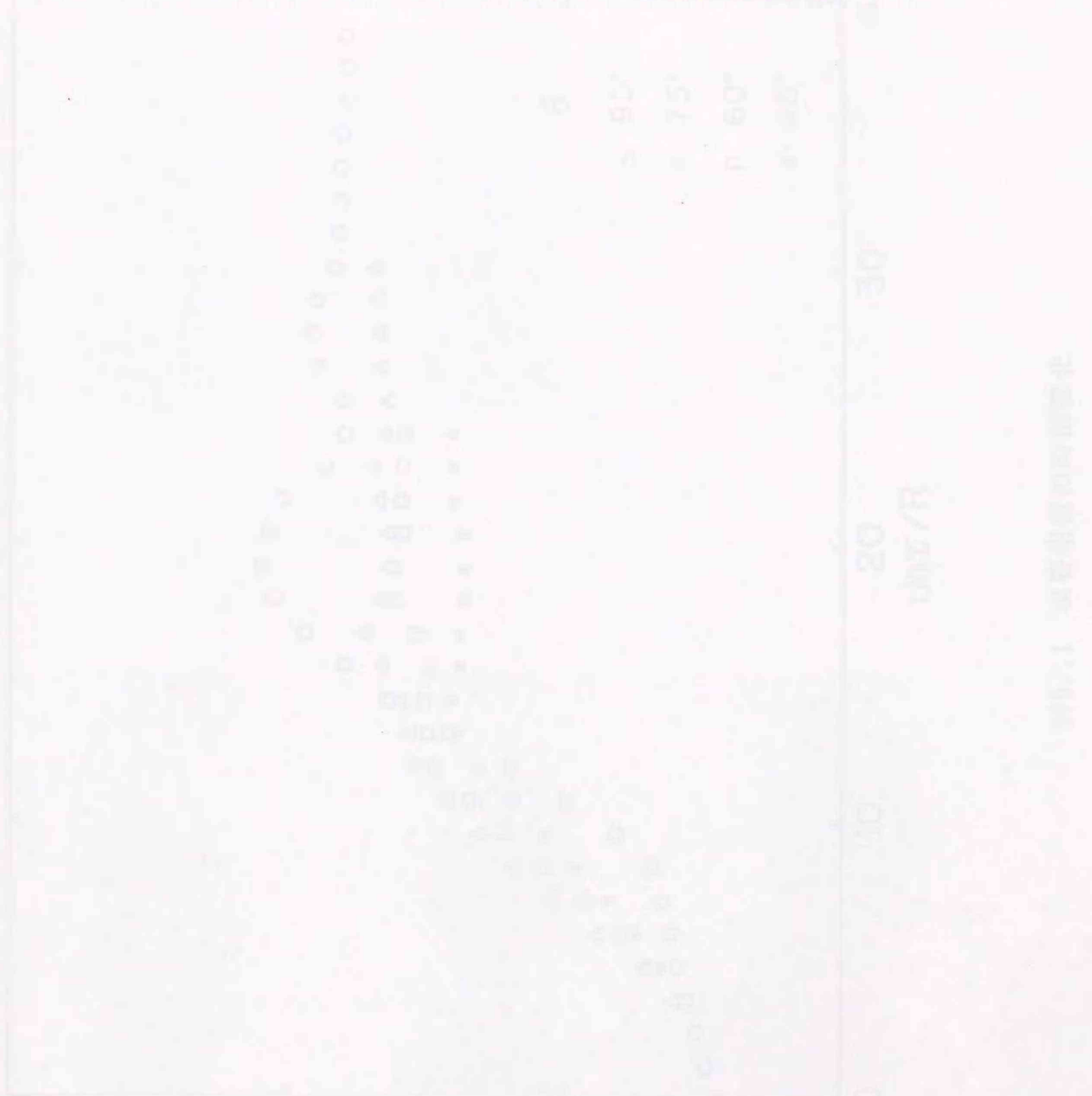
図5.14は， $yz$ 断面における $x$ 方向の渦度（ $\omega_x R/U_0$ ）の等高線図である。図に向かって垂直な軸が $x$ 軸となる。なお，この等渦度線図の作成時には，渦度のデータを格子点状に与えるが，その際，前後左右の格子点の平均値をもってその格子点の値とするsmoothingをかけている。図5.14の $x/R=1.0$ では等渦度線の形状は円形であるが， $x/R=2.0$ では渦度は $y$ 方向に長く $z$ 方向に短い扁平な領域に分布している。 $x/R=3.0$ においてはこれを $x$ 軸に関して $90^\circ$ 回転させた分布領域となっている。このことはspiral構造の存在を示唆しているものと考えられる。以上のことから $\theta=90^\circ$ においてはpumping構造とspiral構造が混在していると見なすことができる。

図5.15，図5.16，図5.17にそれぞれ $\theta=75^\circ$ ， $60^\circ$ ， $45^\circ$ のときの渦要素分布を示す。迎え角 $\theta=90^\circ$ 以外では，円板から迎え角に応じて，主流に対して傾いた円形渦輪が次々に放出される。円板の後流は，これらの渦輪の相互干渉によって形成される。 $\theta=45^\circ$ ではほとんどの時刻において後流に縦渦対が存在する。 $\theta=60^\circ$ では図5.16(f-1)において，縦渦対が認められる。 $\theta=75^\circ$ では， $\theta=90^\circ$ における流れに近くなる。

$\theta=60^\circ$ および $45^\circ$ のときの $yz$ 面における渦度の $x$ 成分（ $\omega_x R/U_0$ ）の等高線図をそれぞれ図5.18と図5.19に示す。 $\theta=60^\circ$ においては縦渦対の存在は不明確であるが， $\theta=45^\circ$ の $x/R=1.0, 2.0$ における渦度分布は縦渦対の存在を示唆している。図5.20は， $\theta=45^\circ$ のときの $x/R=1.0, 2.0, 3.0$ の $yz$ 断面の速度ベクトル図である。この図より，どのような2次流れが存在するかを知ることができる。 $y/R=0.0$ の $z$ 軸上近傍において，速度ベクトルは $-z$ 方向を向いて



いる。これは縦渦対の渦構造の誘起速度によるものである。したがって、 $\theta = 45^\circ$  では、図5.21に模式的に示した縦渦対が存在すると考えられる。





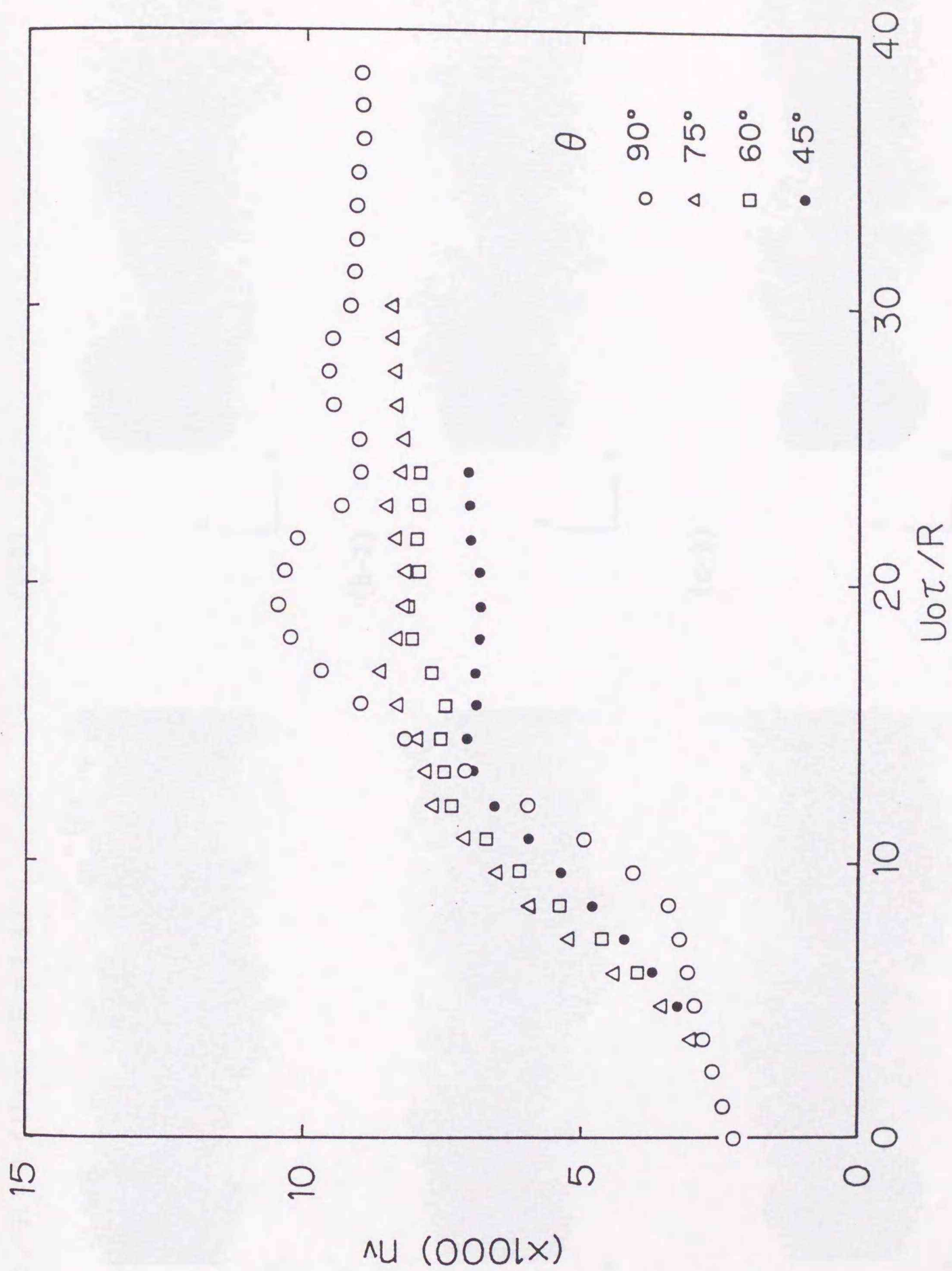
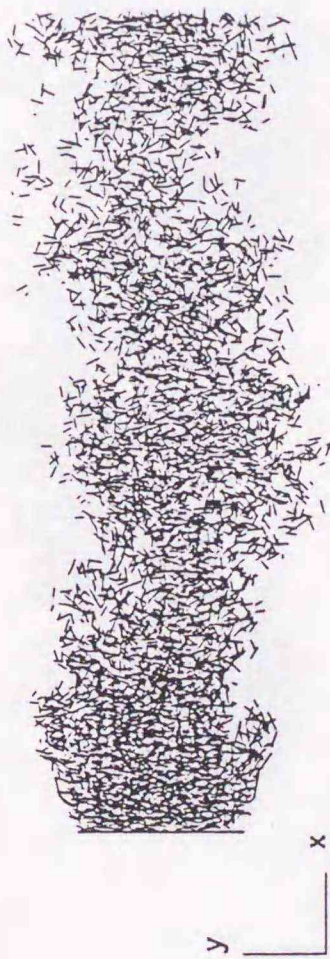


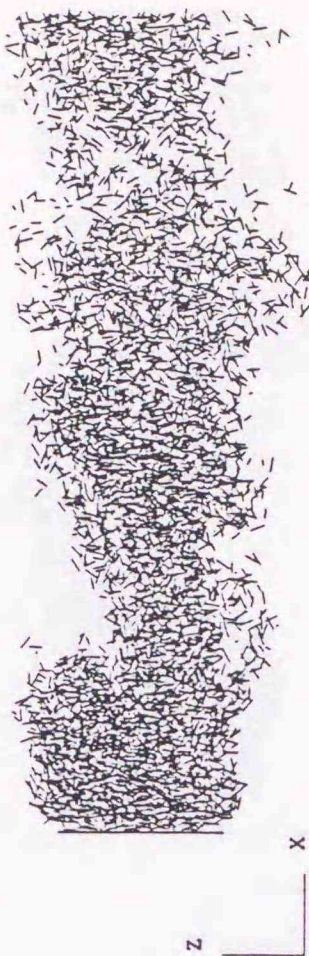
図5.11 渦要素数の時間変化



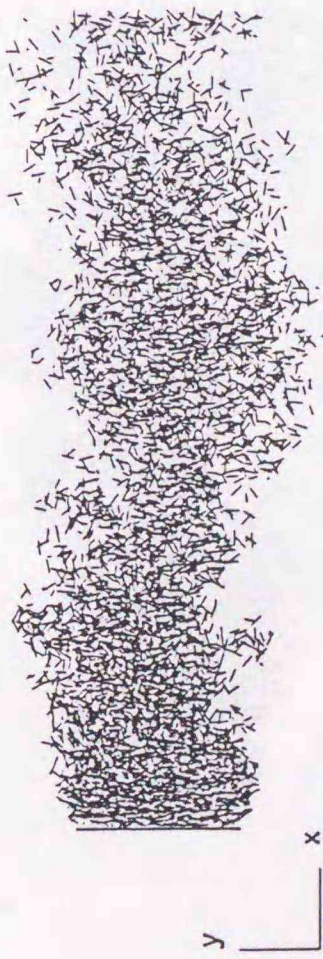
(a-1)  $U_0 t / R = 0$  ( $U_0 \tau / R = 2.4$ )



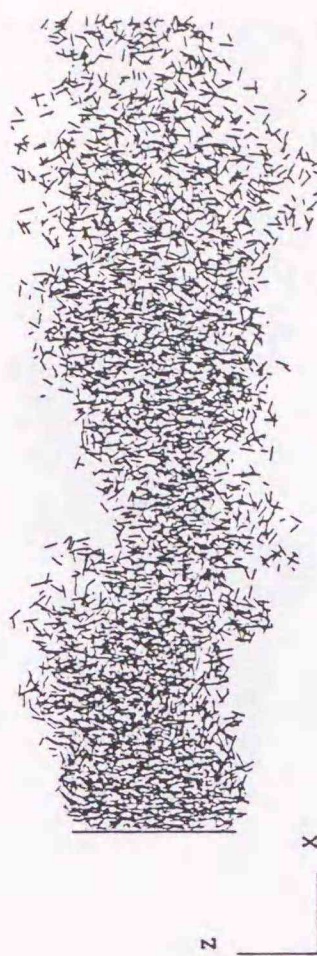
(a-2)



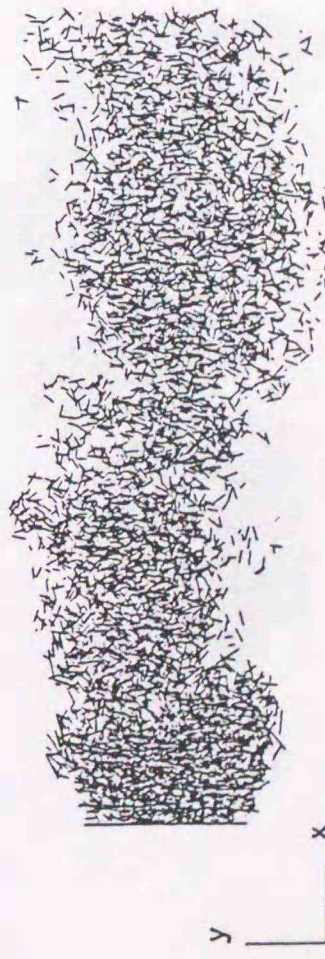
(b-1) 1.2



(b-2)



(c-1) 2.4



(c-2)

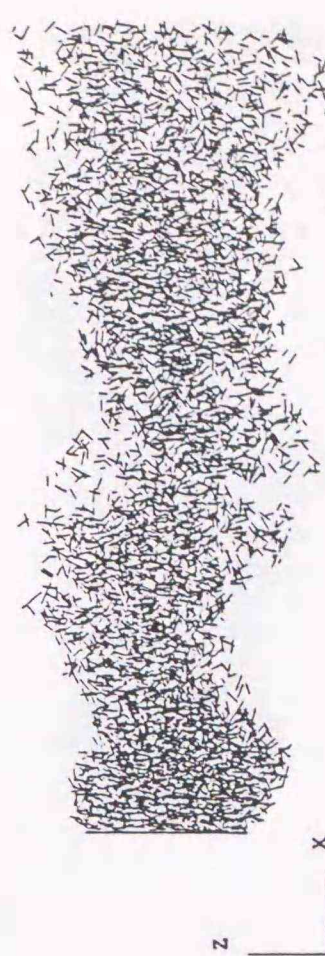
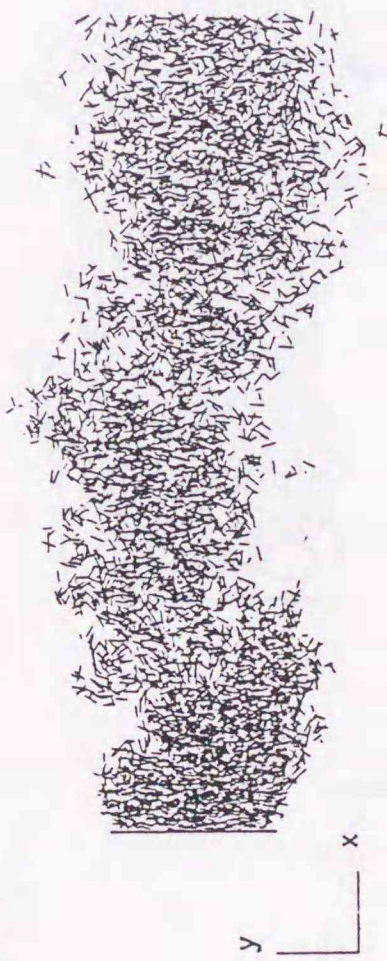


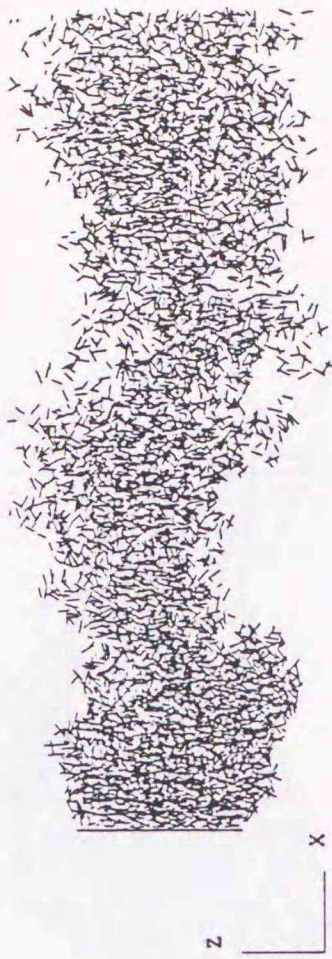
图5.12 涡要素分布 ( $\theta = 90^\circ$ )



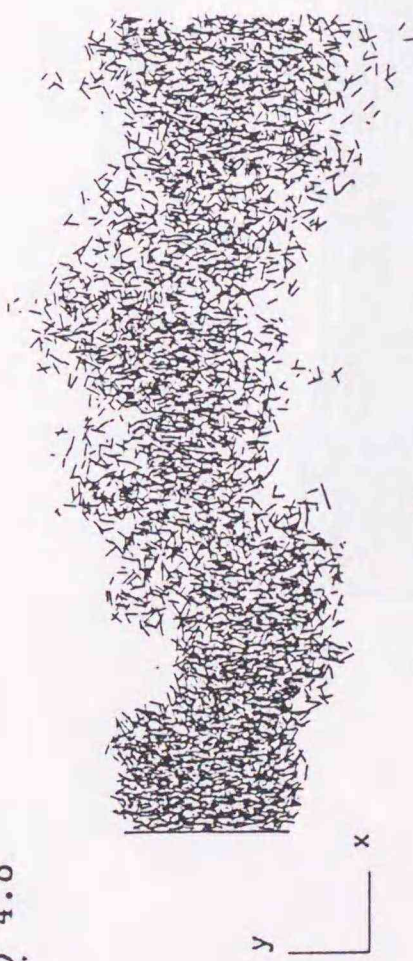
(d-1) 3.6



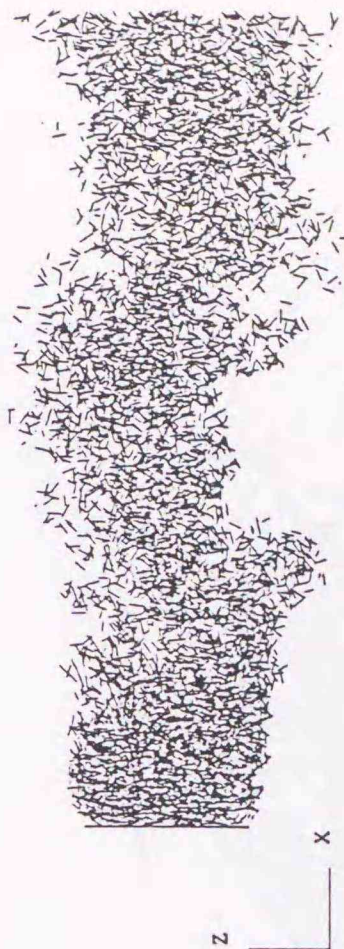
(d-2)



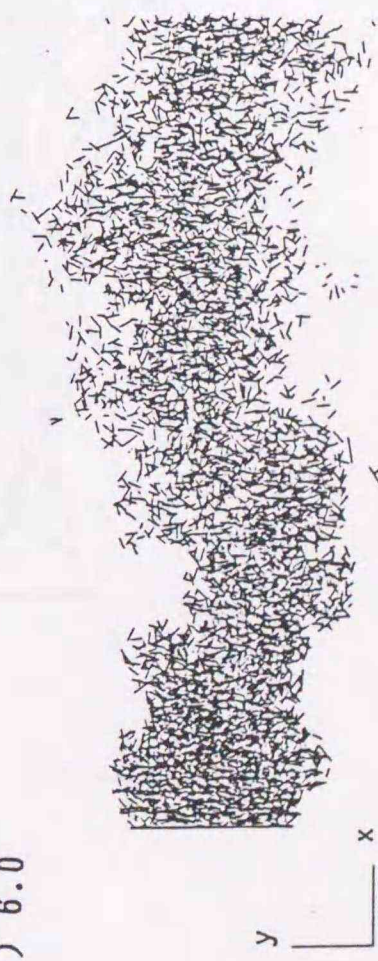
(e-1) 4.8



(e-2)



(f-1) 6.0



(f-2)

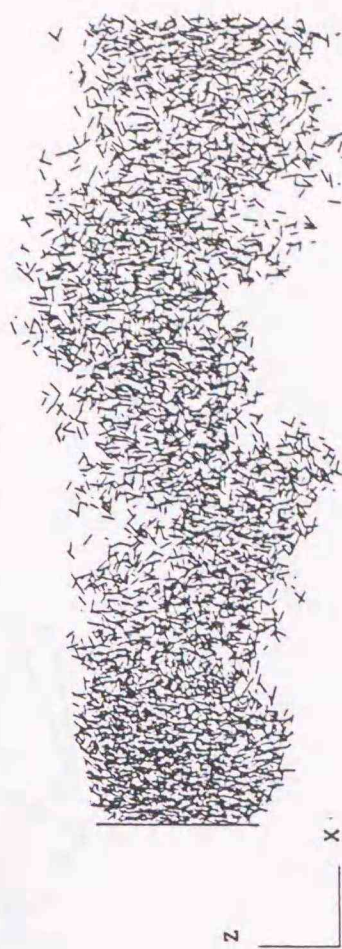


図5.12 渦要素分布 ( $\theta = 90^\circ$ , 続き)



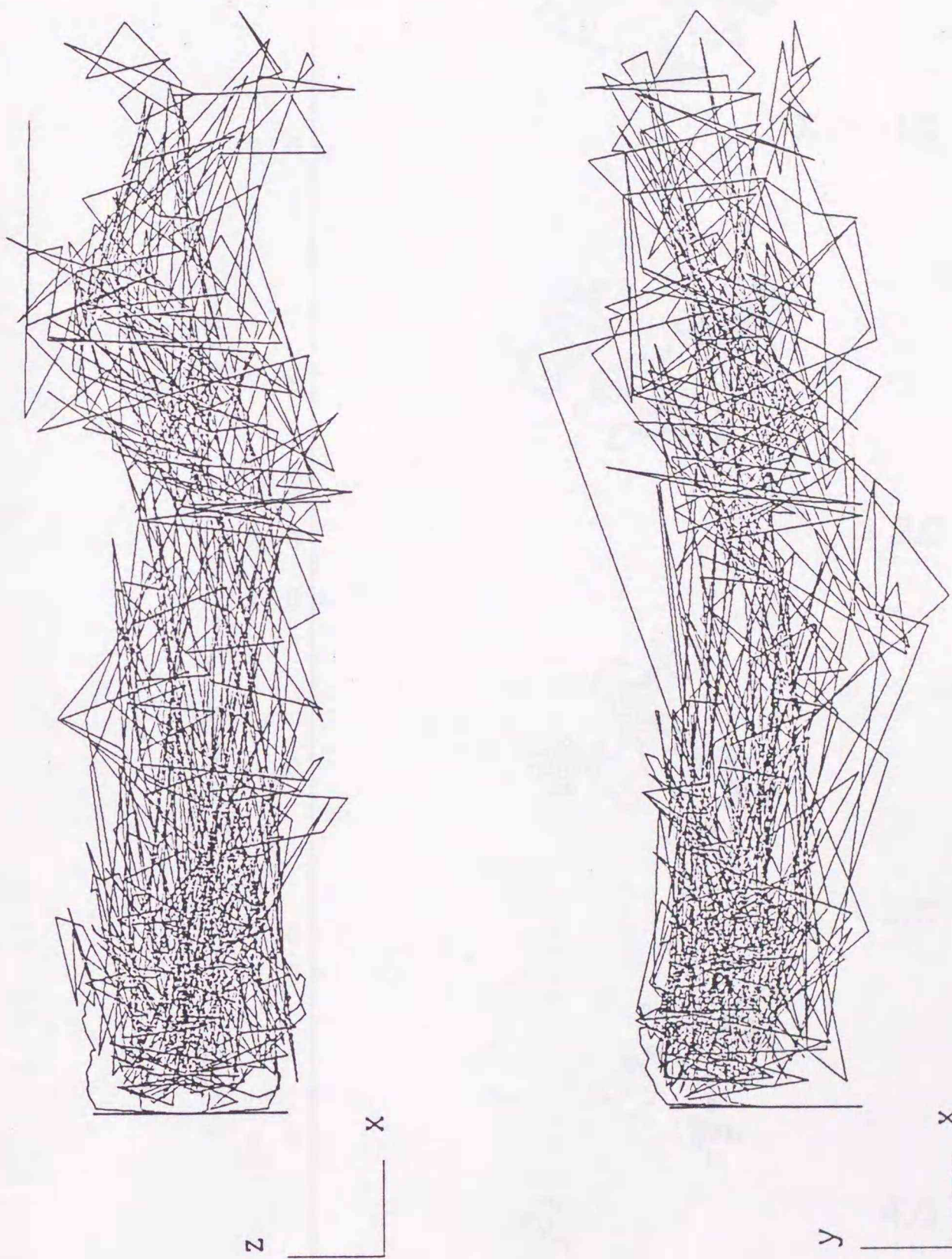


図5.13 流脈線 ( $\theta = 90^\circ$ )



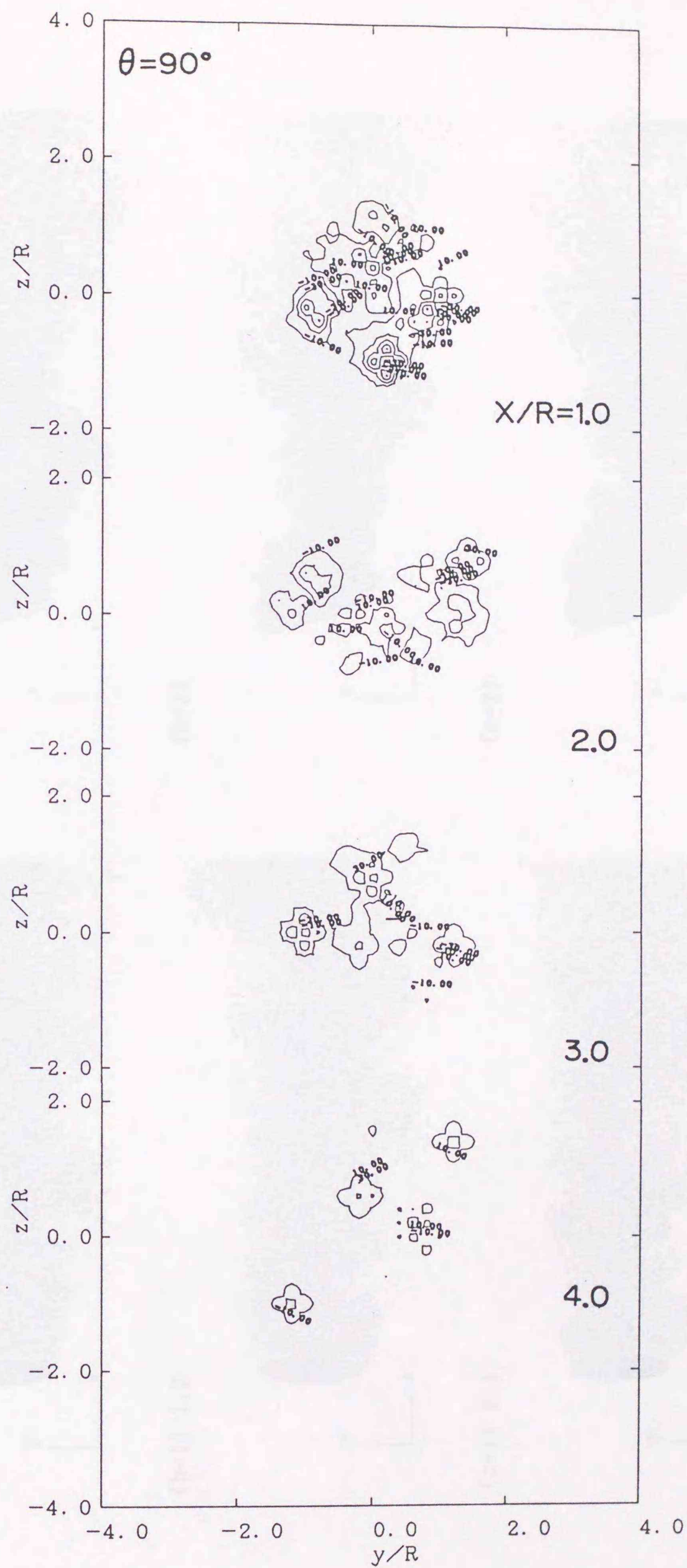
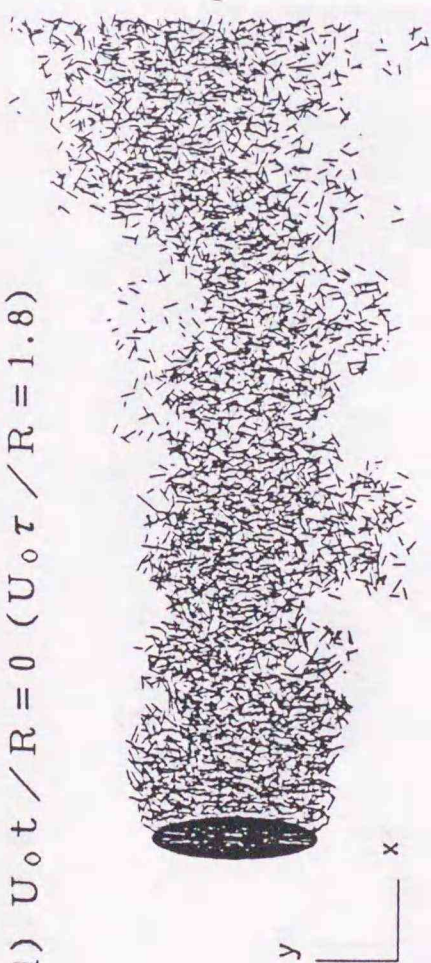


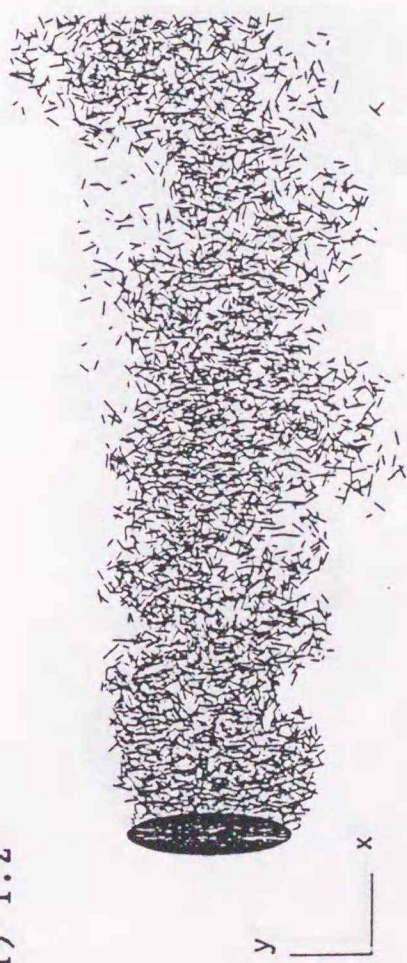
図5.14 等渦度線 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $U_{ot}/R = 4.8$ )



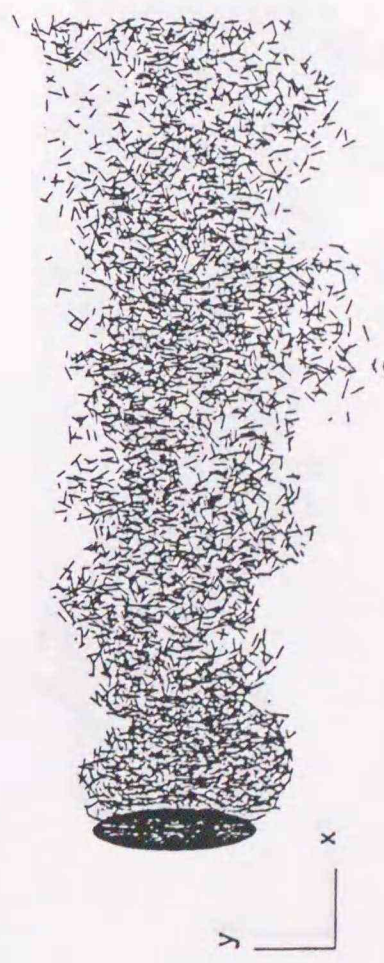
(a-1)  $U_0 t / R = 0$  ( $U_0 \tau / R = 1.8$ )



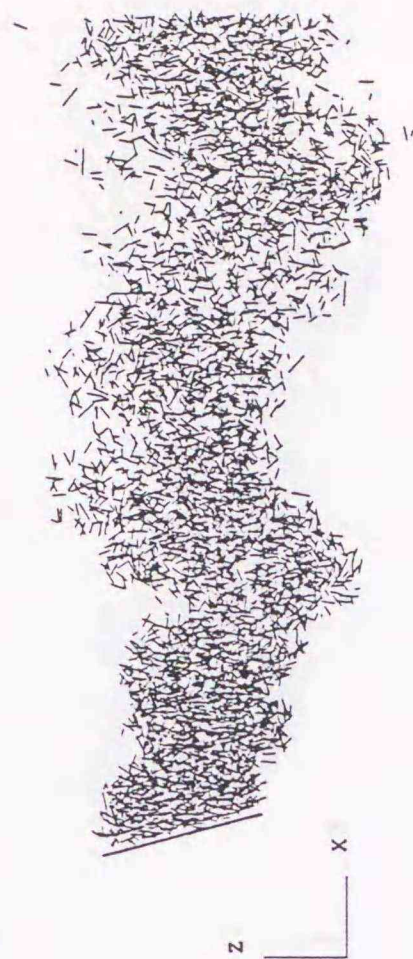
(b-1) 1.2



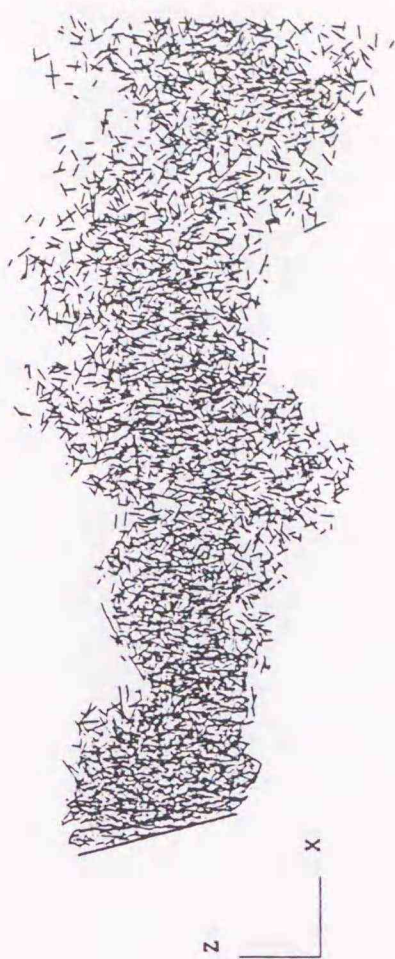
(c-1) 2.4



(a-2)



(b-2)



(c-2)

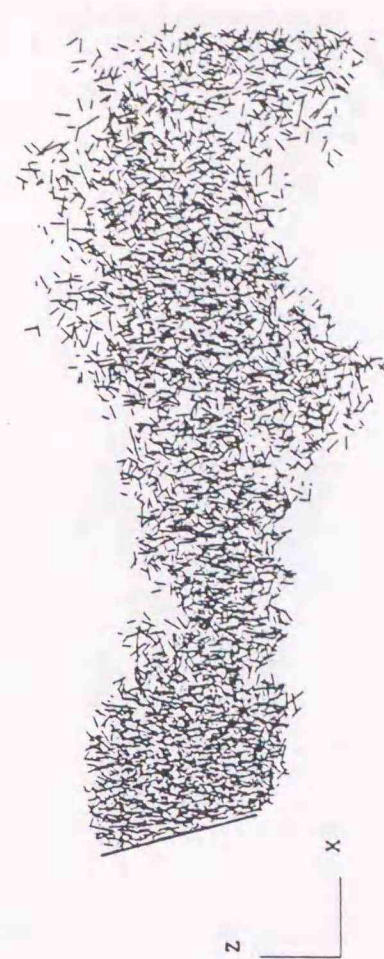
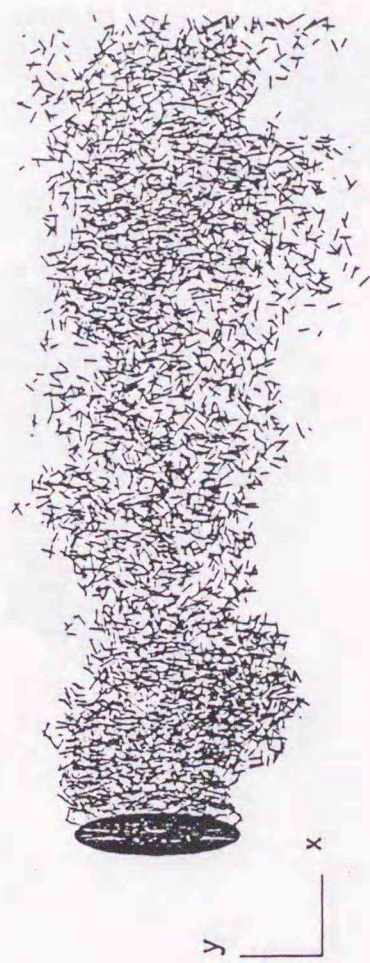


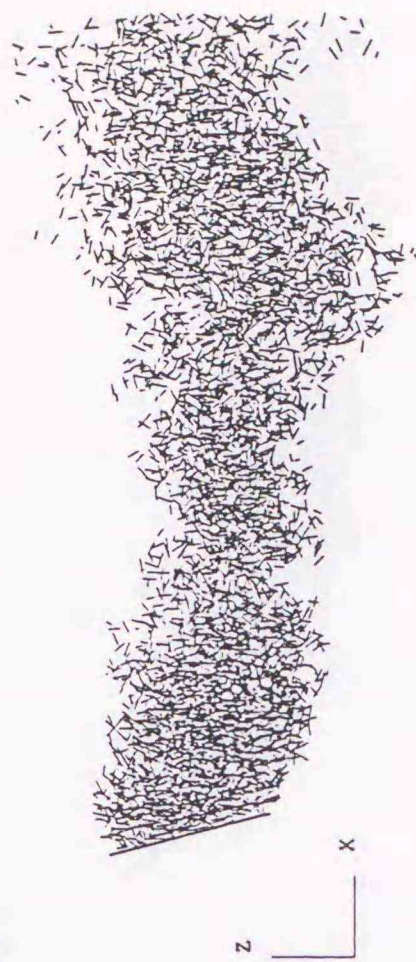
图5.15 涡要素分布 ( $\theta = 75^\circ$ )



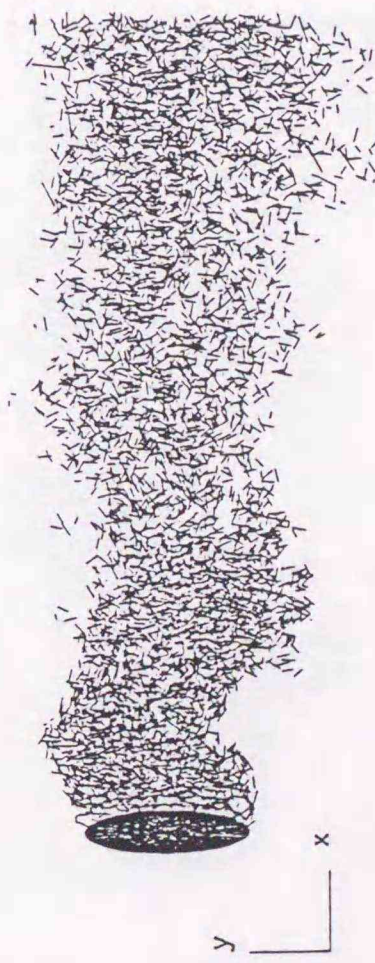
(d-1) 3.6



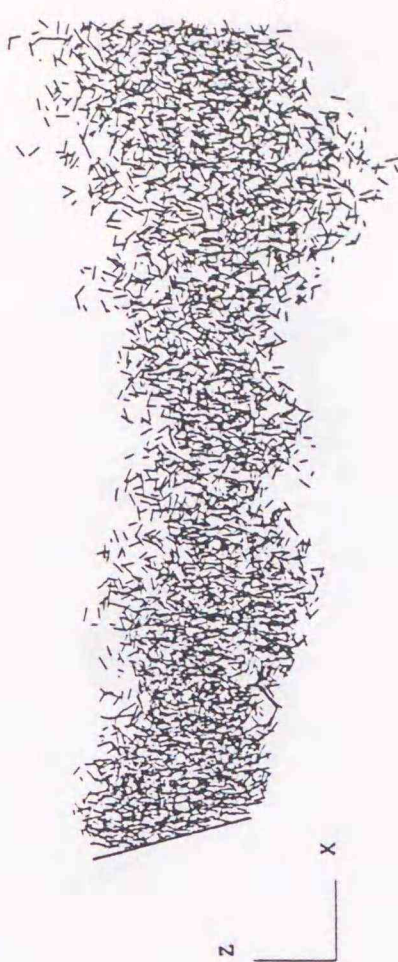
(d-2)



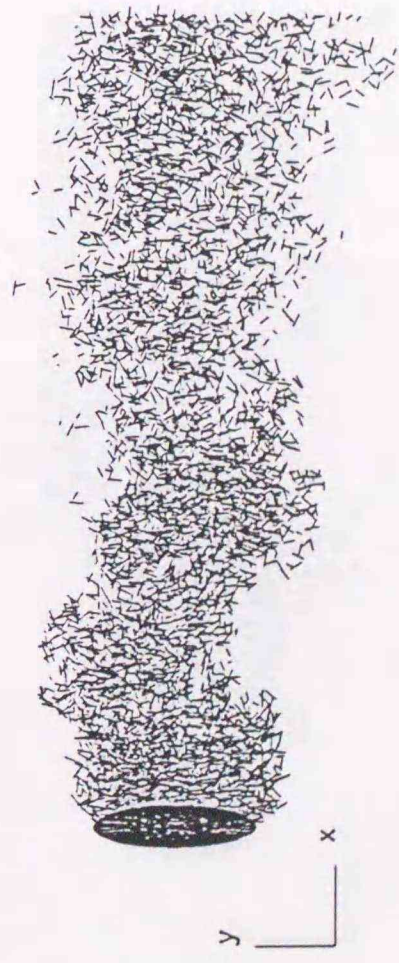
(e-1) 4.8



(e-2)



(f-1) 6.0



(f-2)

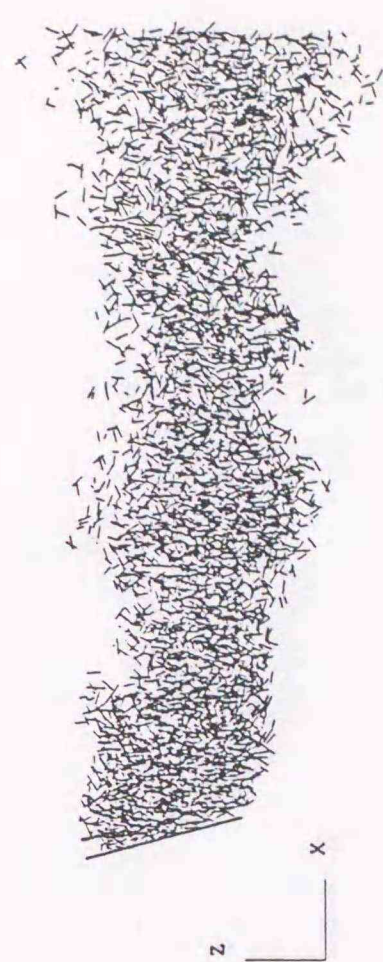
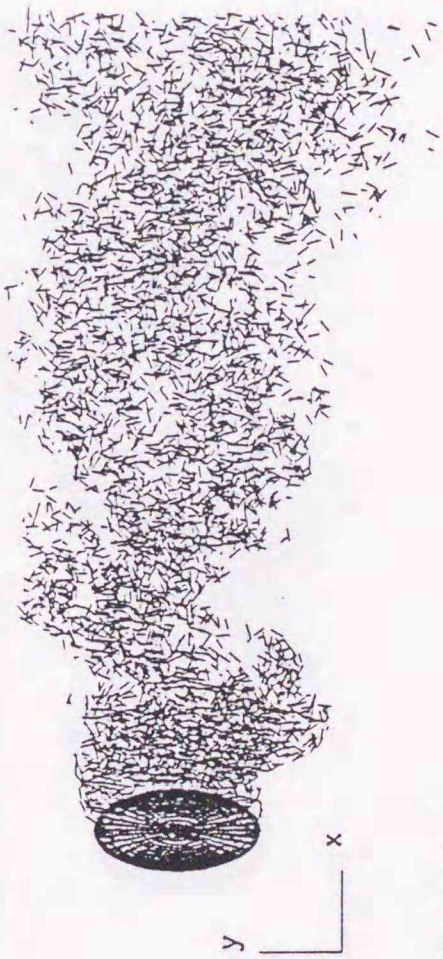


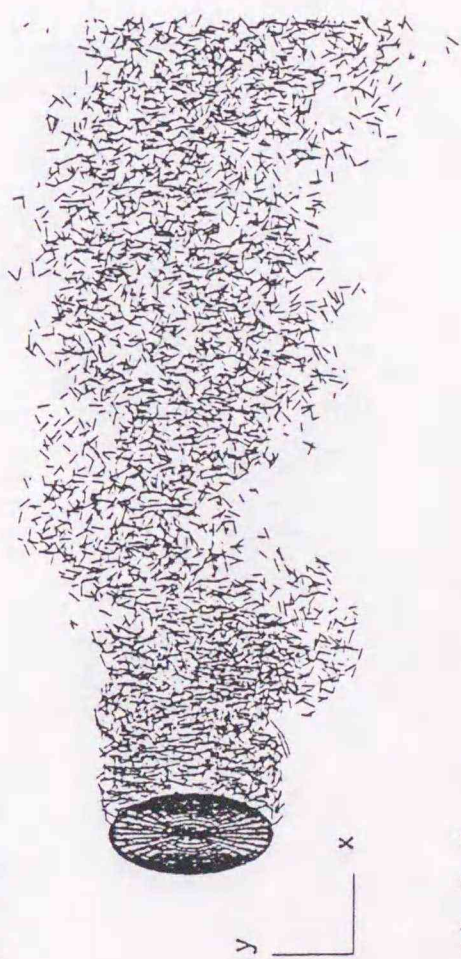
図5.15 渦要素分布 ( $\theta = 75^\circ$ , 続き)



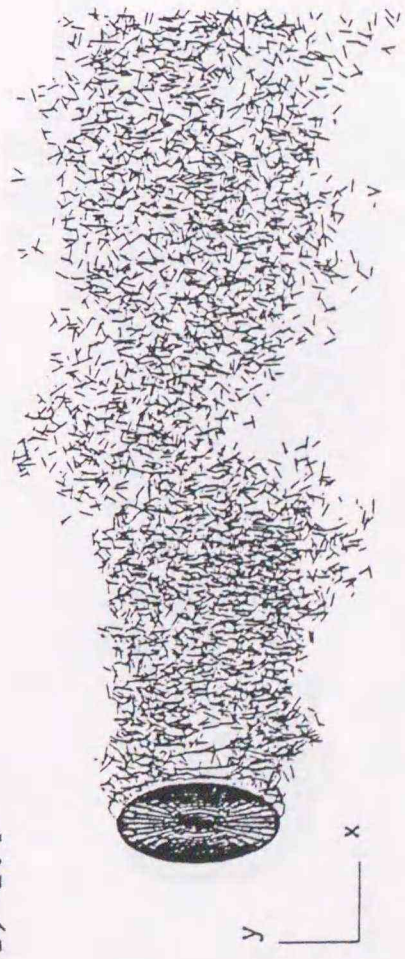
(a-1)  $U_0 t / R = 0$  ( $U_0 \tau / R = 1.8$ )



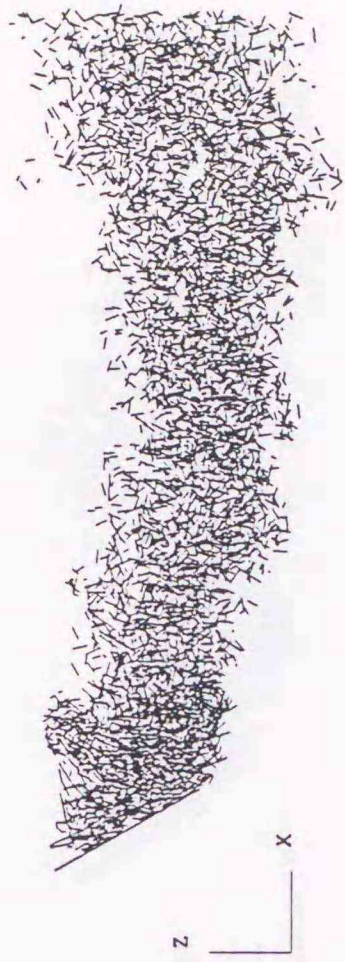
(b-1) 1.2



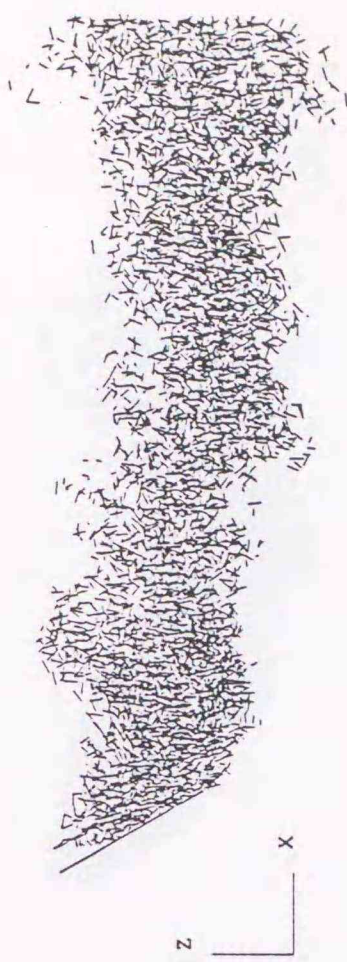
(c-1) 2.4



(a-2)



(b-2)



(c-2)

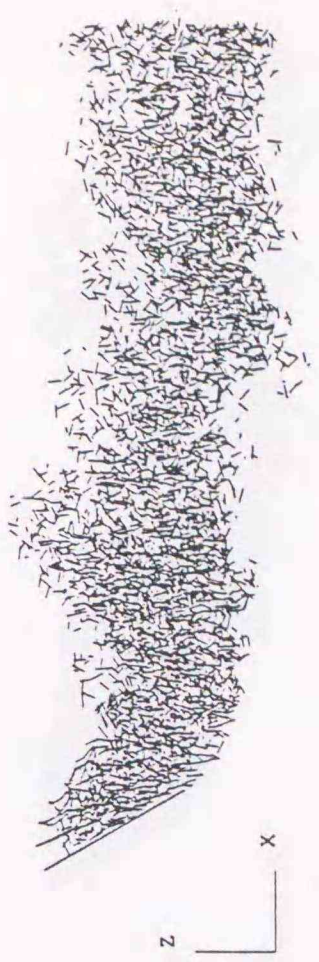
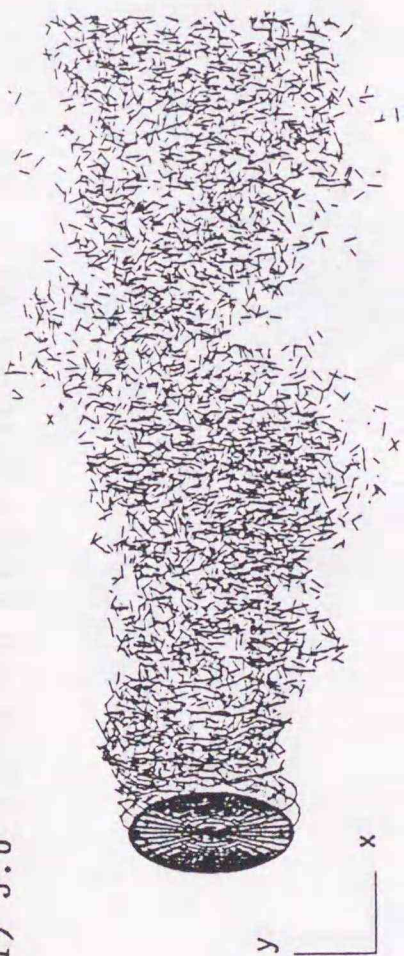


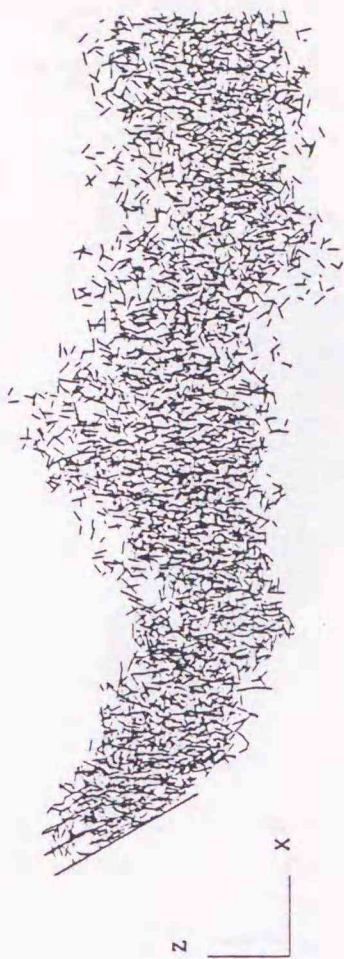
图5.16 涡要素分布 ( $\theta = 60^\circ$ )



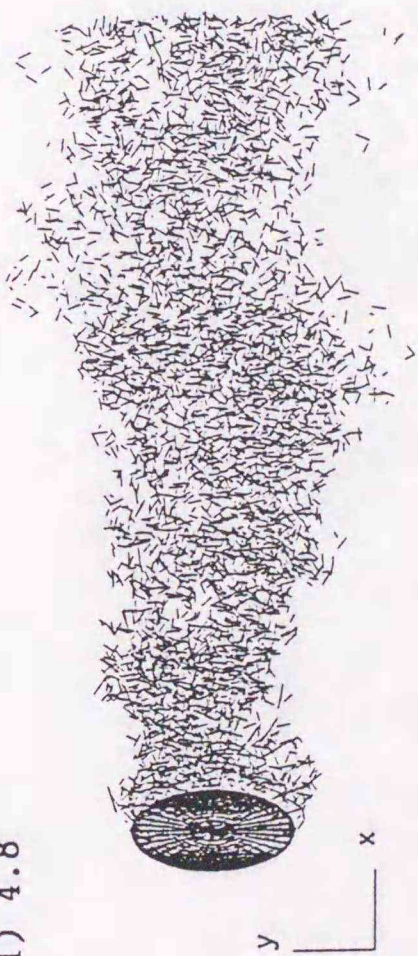
(d-1) 3.6



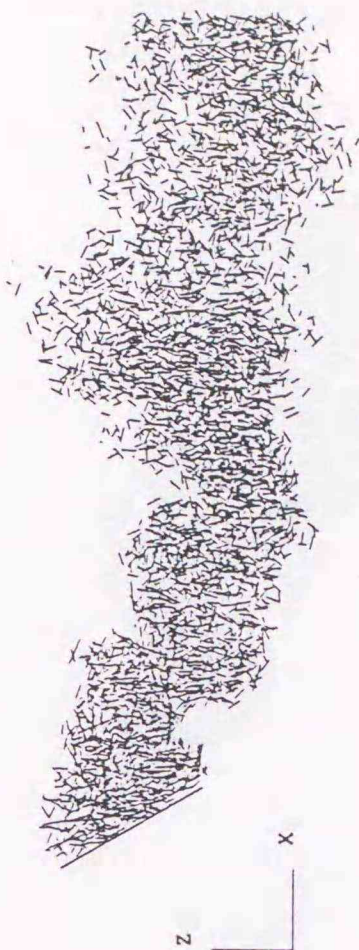
(d-2)



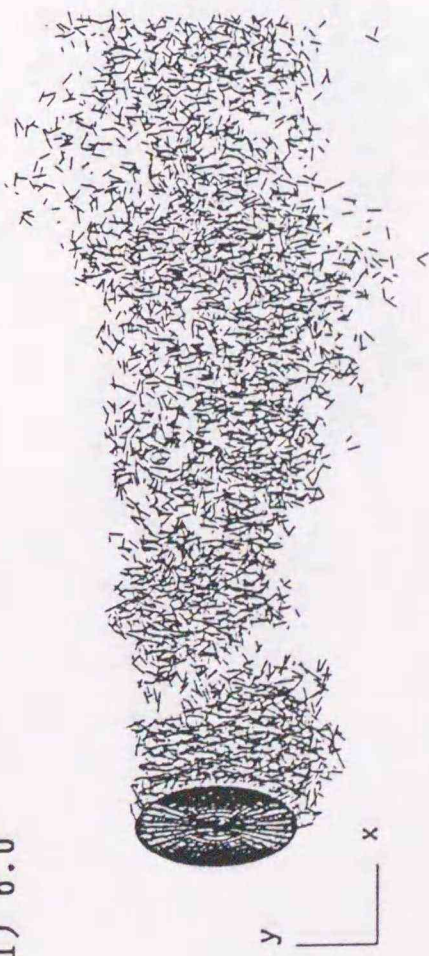
(e-1) 4.8



(e-2)



(f-1) 6.0



(f-2)

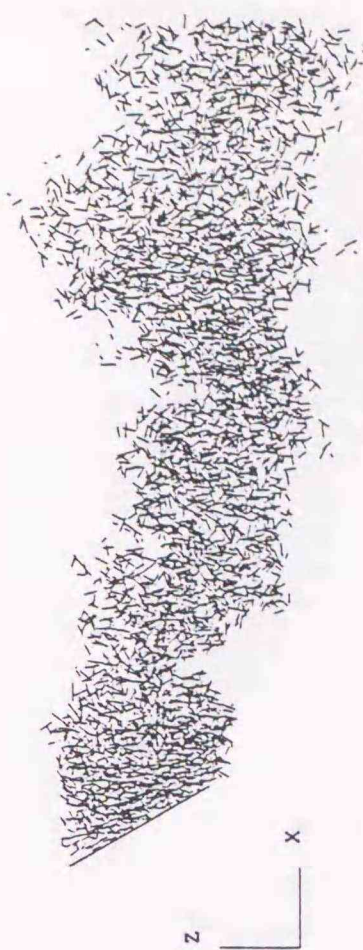
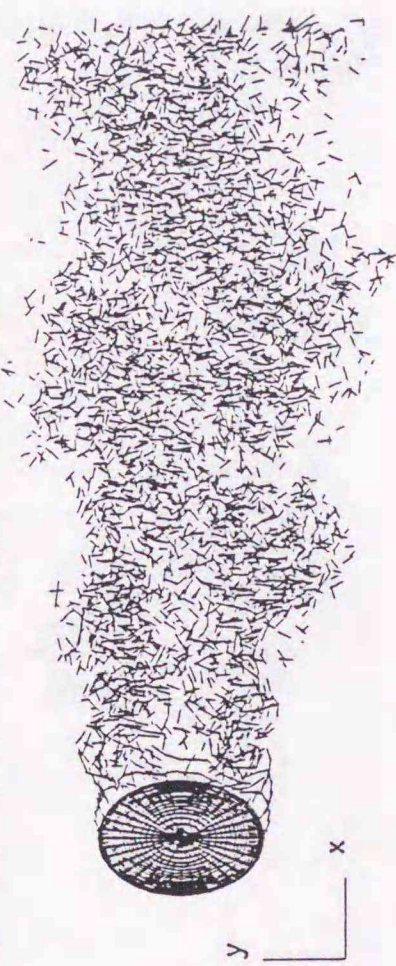


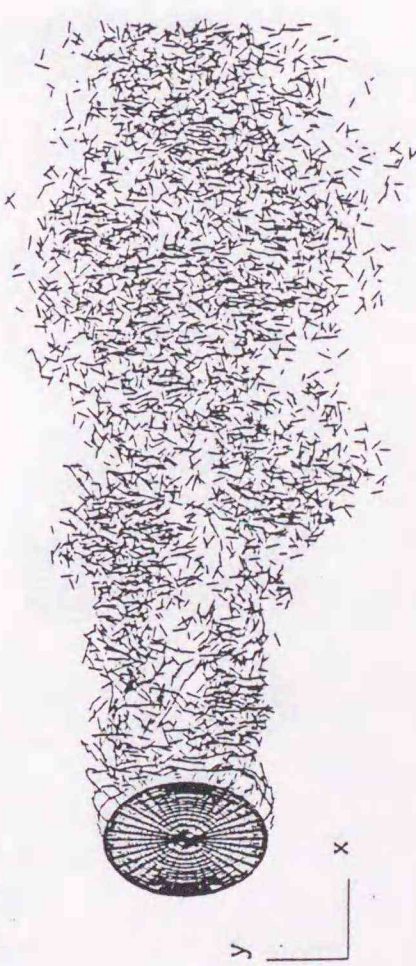
図5.16 渦要素分布 ( $\theta = 60^\circ$ , 続き)



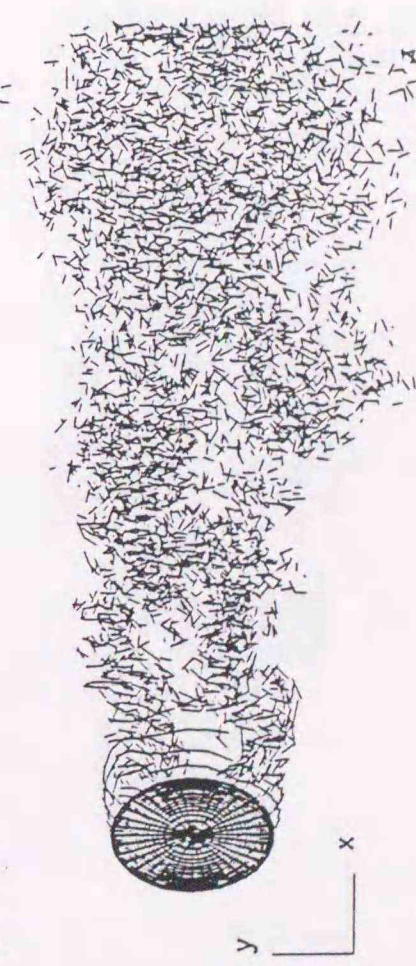
(a-1)  $U_0 t / R = 0$  ( $U_0 \tau / R = 1.8$ )



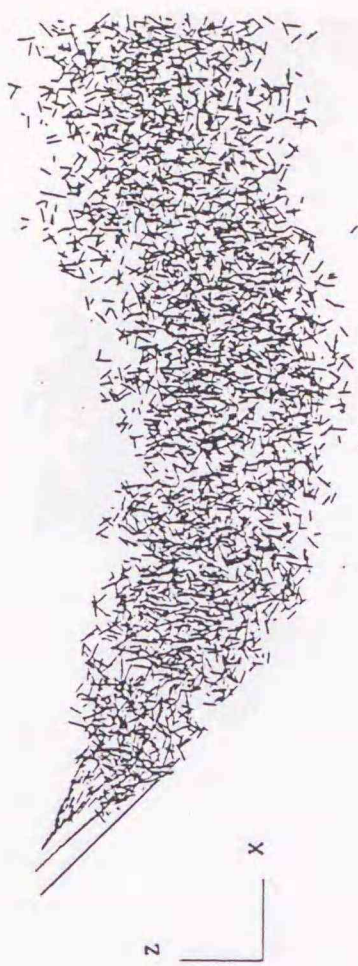
(b-1) 1.2



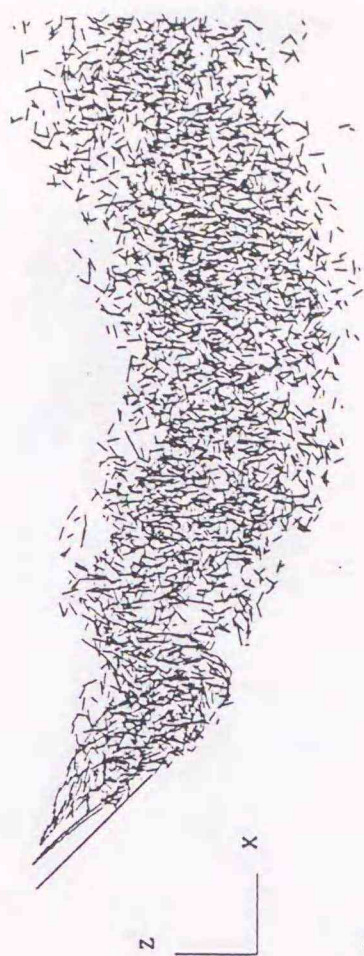
(c-1) 2.4



(a-2)



(b-2)



(c-2)

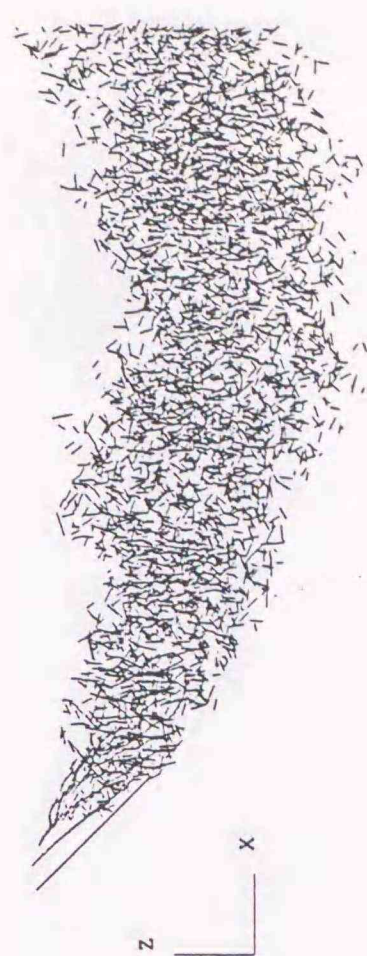
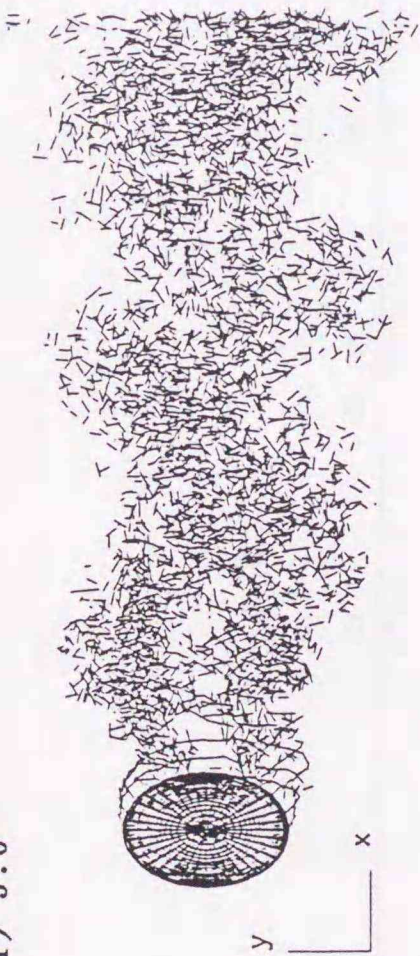


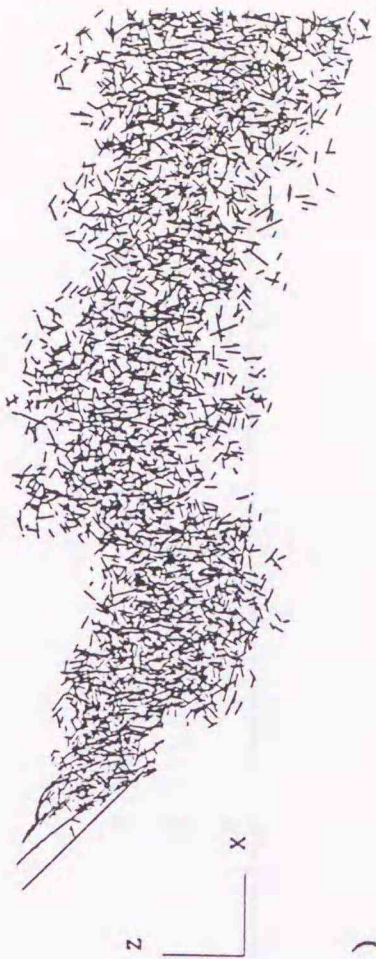
图5.17 涡要素分布 ( $\theta = 45^\circ$ )



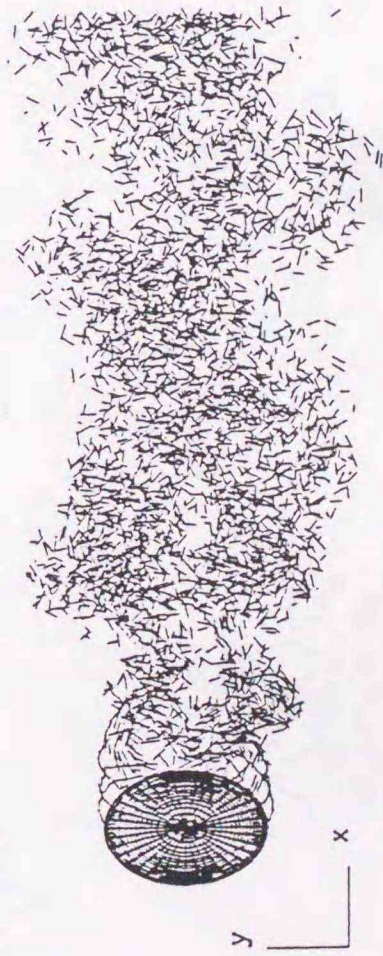
(d-1) 3.6



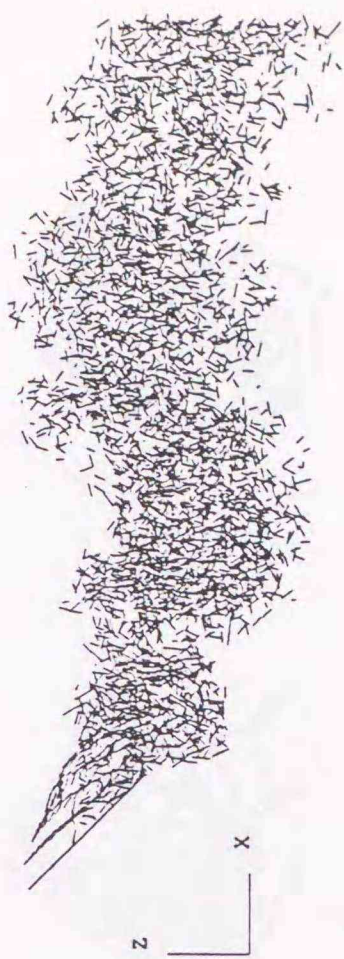
(d-2)



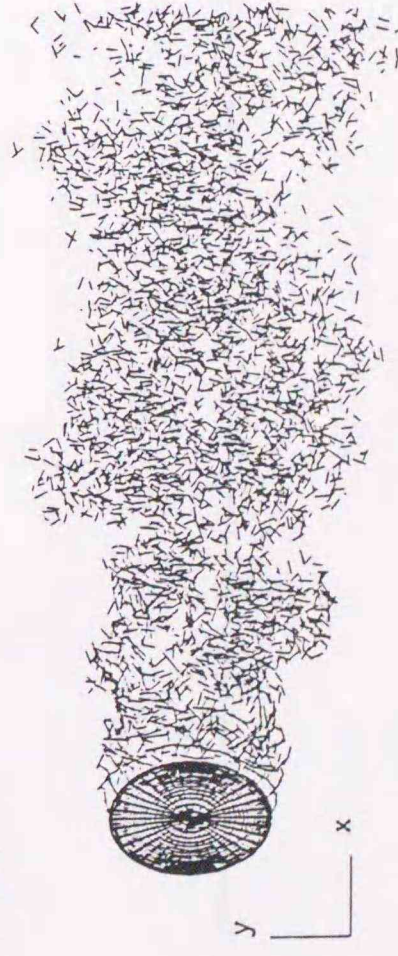
(e-1) 4.8



(e-2)



(f-1) 6.0



(f-2)

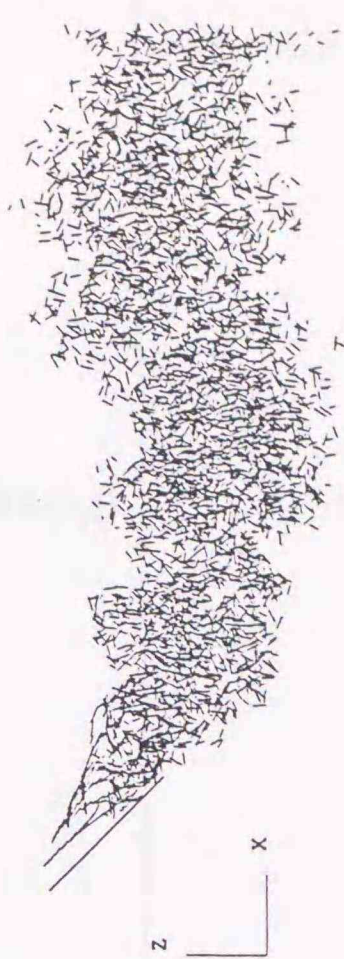


図5.17 渦要素分布 ( $\theta = 45^\circ$ , 続き)



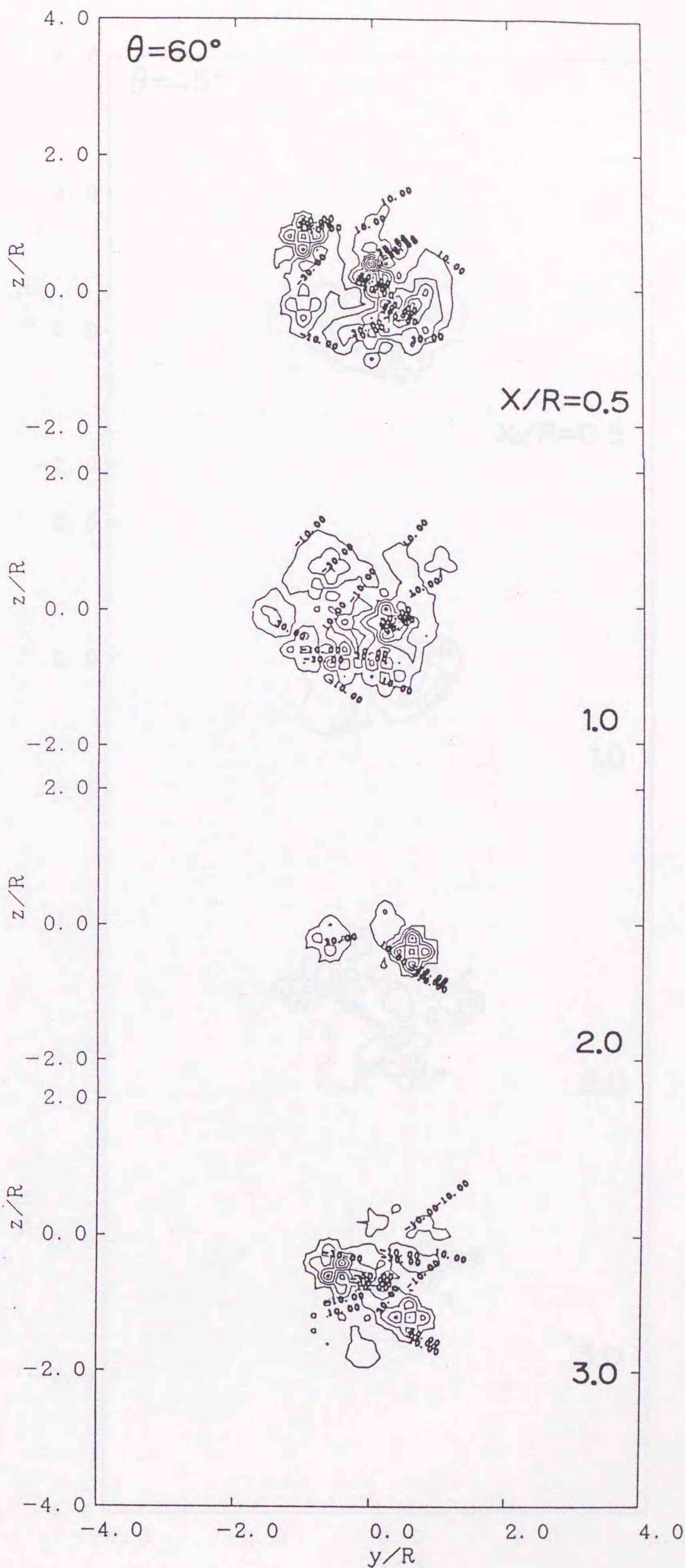


図5.18 等渦度線 ( $\theta = 60^\circ$ ,  $U_0 t / R = 6.0$ )



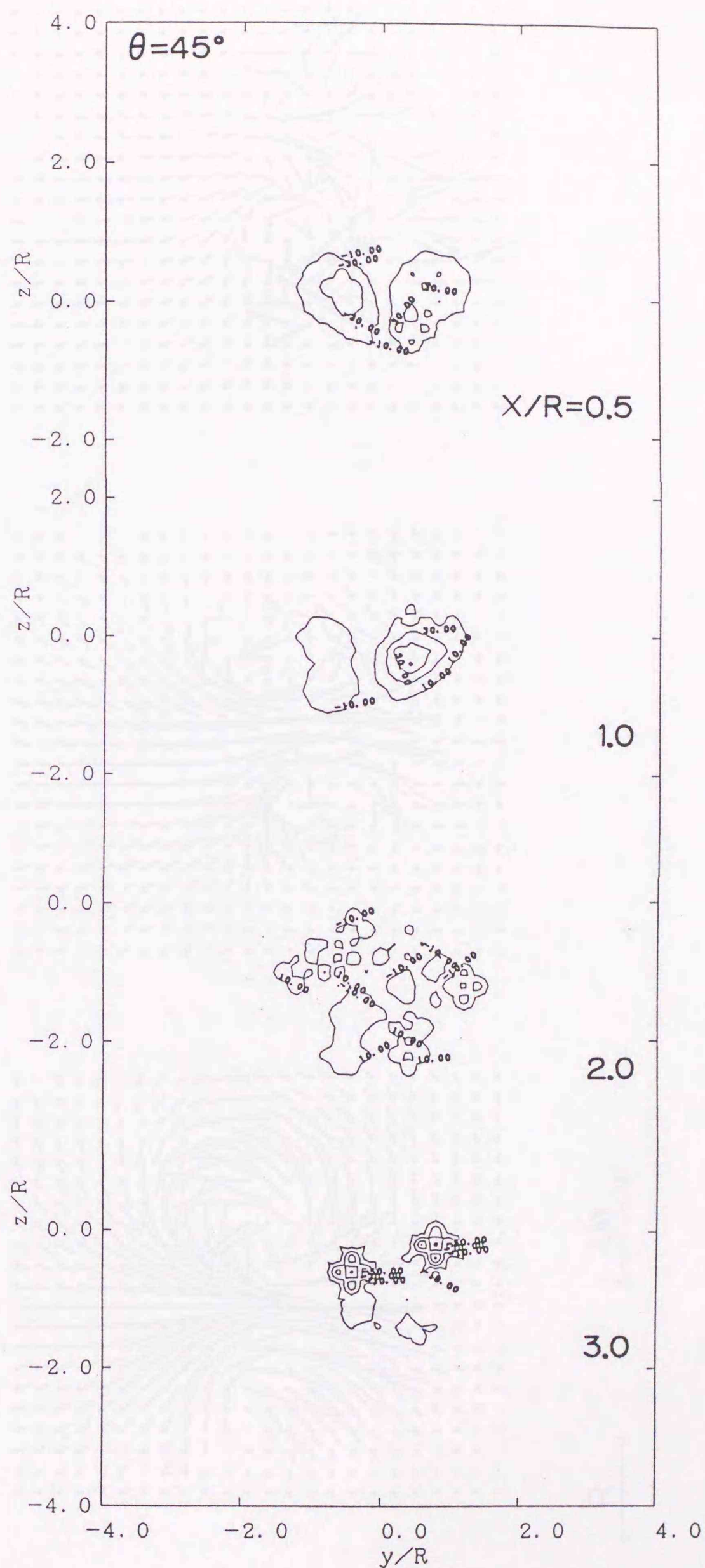
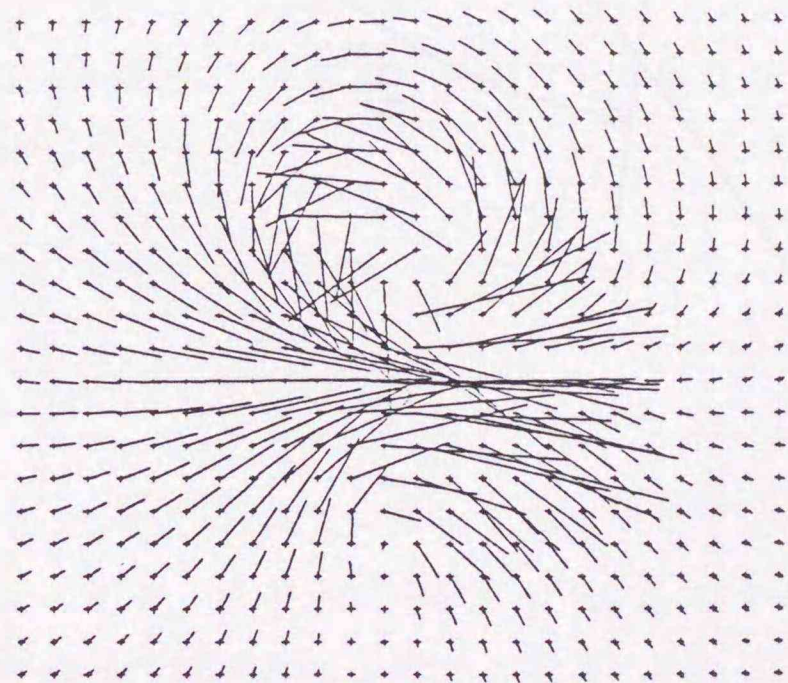


図5.19 等渦度線 ( $\theta = 45^\circ$ ,  $U_0 t / R = 6.0$ )

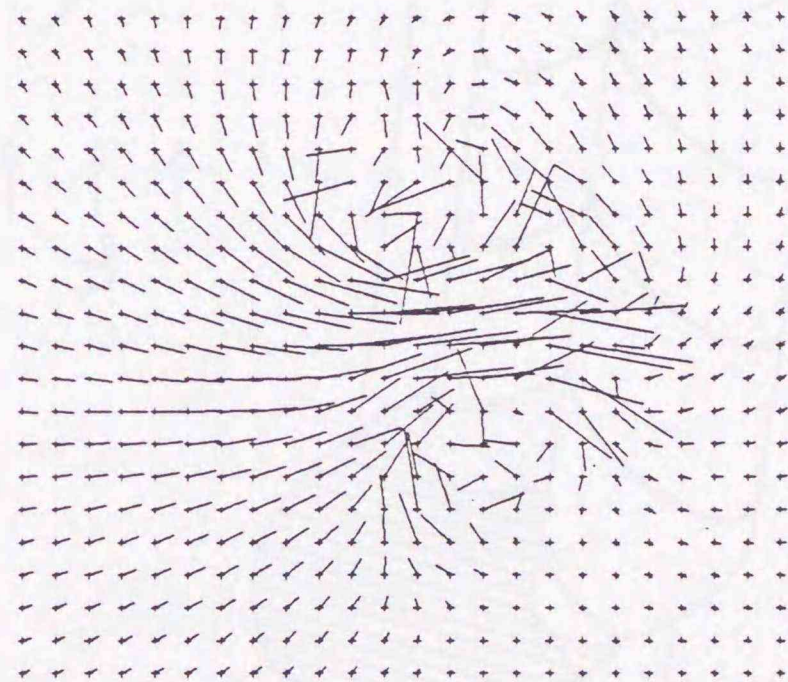


$\theta = 45^\circ$

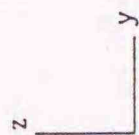
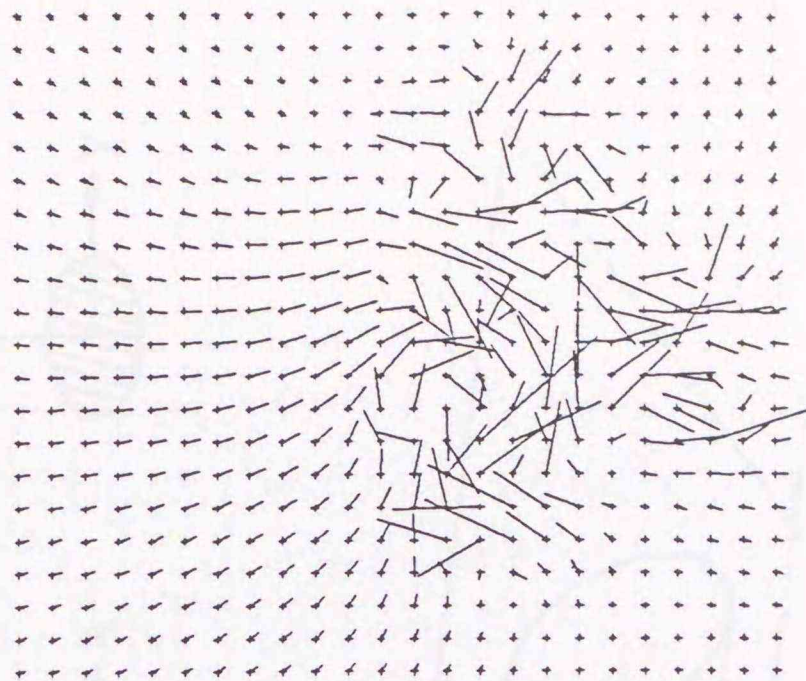
(a)  $X/R=1.0$



(b) 2.0



(c) 3.0



$R$   $U_0$

図5.20  $yz$ 断面内の速度ベクトル図 ( $\theta = 45^\circ$ ,  $U_0 t / R = 6.0$ )



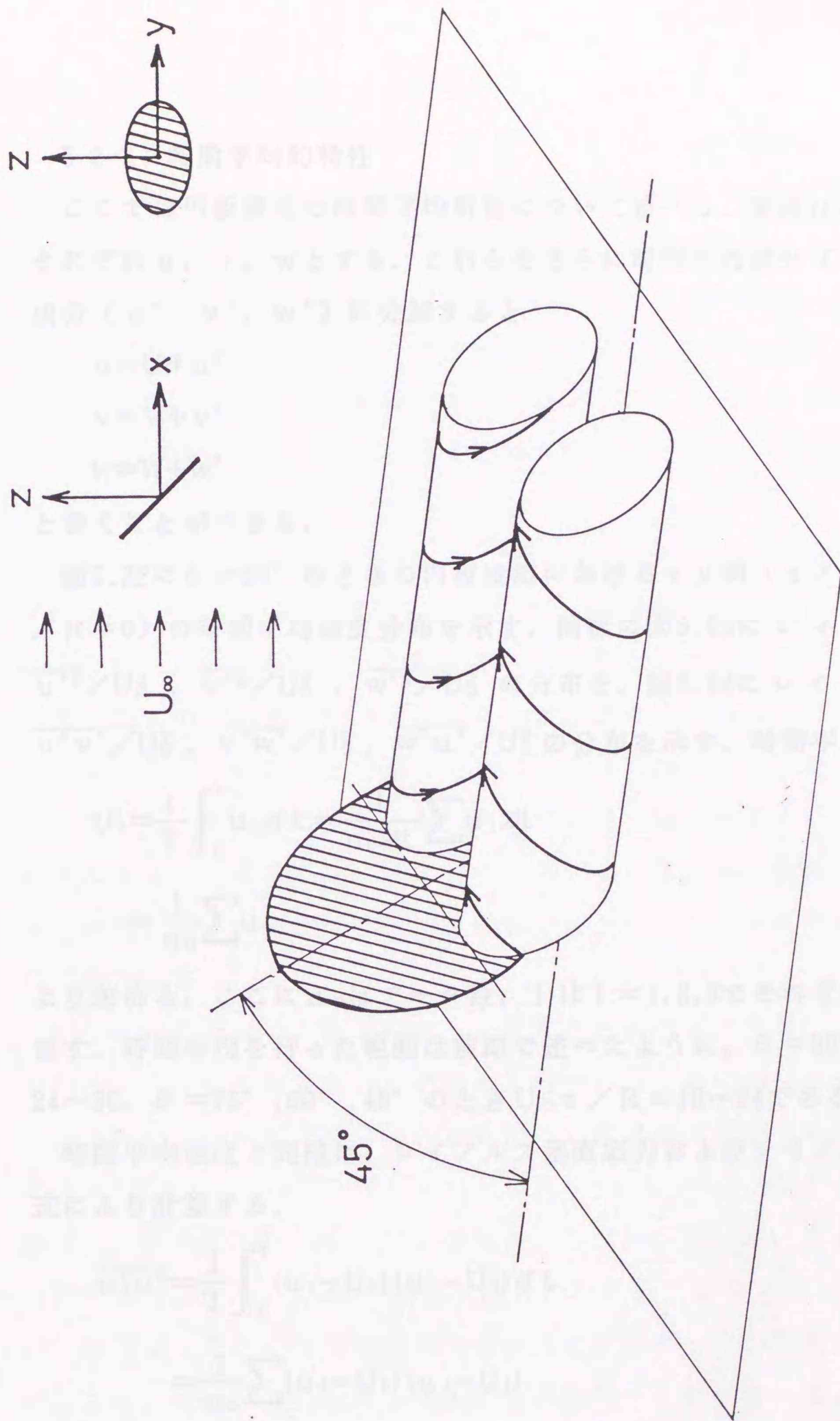


図5.21  $\theta = 45^\circ$  における後流渦構造の模式図



### 5-2-2 時間平均的特性

ここでは円板後流の時間平均特性について述べる．速度  $\mathbf{u}$  の  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分をそれぞれ  $u$ ,  $v$ ,  $w$  とする．これらをさらに時間平均成分 ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) と変動成分 ( $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ) に分解すると

$$u = U + u'$$

$$v = V + v'$$

$$w = W + w'$$

と書くことができる．

図5.22に  $\theta = 90^\circ$  のときの円板後流における  $x$   $y$  面 ( $z/R = 0$ ) と  $x$   $z$  面 ( $y/R = 0$ ) の時間平均速度分布を示す．同様に図5.23にレイノルズ垂直応力  $\overline{u'^2}/U_0^2$ ,  $\overline{v'^2}/U_0^2$ ,  $\overline{w'^2}/U_0^2$  の分布を, 図5.24にレイノルズせん断応力  $\overline{u'v'}/U_0^2$ ,  $\overline{v'w'}/U_0^2$ ,  $\overline{w'u'}/U_0^2$  の分布を示す．時間平均速度は

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{T} \int_0^T u_i dt = \frac{1}{n_D \Delta t} \sum u_i \Delta t \\ &= \frac{1}{n_D} \sum u_i \end{aligned}$$

より求める．ここに  $n_D$  はデータ数,  $i$  は  $i = 1, 2, 3$  でそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  成分を表す．時間平均を行った範囲は前節で述べたように,  $\theta = 90^\circ$  のとき  $U_0 \tau / R = 24 \sim 30$ ,  $\theta = 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  のとき  $U_0 \tau / R = 16 \sim 24$  である．

時間平均速度と同様に, レイノルズ垂直応力およびレイノルズせん断応力は次式により計算する．

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} &= \frac{1}{T} \int_0^T (u_i - U_i)(u_j - U_j) dt \\ &= \frac{1}{n_D} \sum (u_i - U_i)(u_j - U_j) \end{aligned}$$

ここで  $i, j = 1, 2, 3$  で,  $i = j$  のときレイノルズ垂直応力,  $i \neq j$  のときレイノルズせん断応力を表す．本計算では  $n_D = 100$  とした．すなわち, 図5.22は  $U_0 \tau / R = 0 \sim 6$  の間の時間平均速度である． $\theta = 90^\circ$  のときは軸対称流になるから, 速度分布も軸対称になるはずである．平均速度分布が  $x$  軸に対して対称とならない



のは、データ数の不足によるものと考えられる。渦法による計算で精度の良い統計量を得るためには、 $10^4$ 程度のサンプル数を必要とすることが報告されている（井上 1990）。また、Inoue (1987) の3次元計算では1080個のサンプル数が用いられており、1080個では不十分であることを指摘している。

$U_0 t / R = 6 \sim 12$ のときの時間平均速度分布を図5.25に示す。これもデータ数  $n_D = 100$ であるが、図5.22とその分布形状は定性的には一致するといつてよい。このことは、レイノルズ垂直応力およびレイノルズせん断応力についても同様であった。したがって、以下に示す時間平均特性量は  $U_0 t / R = 0 \sim 6$ の間の平均値とする。

図5.22の時間平均速度分布より、速度の  $x$  成分が負となる逆流域が、概ね  $-1.0 < y / R < 1.0$ ,  $-1.0 < z / R < 1.0$ の範囲で存在することがわかる。逆流域の存在は、実際の流れと定性的に一致することである。

図5.23、図5.24は、レイノルズせん断応力の値がレイノルズ垂直応力のそれに比べて著しく小さいことを示している。笠 (1990) の実験でも同様の傾向が指摘されている。この傾向は他の迎え角においても同様であった。さらに下流の  $yz$  断面になるほど両者の値、特にレイノルズせん断応力は無視できるほど小さくなる。なお、図5.23および図5.24の横軸のスケールは、それぞれの値の大きさに応じて変えてある。

図5.26は  $\theta = 60^\circ$ 、図5.27は  $\theta = 45^\circ$  のときの  $x / R = 1.0$ における水平面内と垂直面内の時間平均速度分布である。両者とも、水平面内の  $x$  成分の分布は  $y / R = \pm 0.5 \sim 1.0$ に計2つの極小値を持つ。垂直面では時間平均速度の  $y$  成分は  $y / R > 0$ において  $V > 0$ のピーク、 $y / R < 0$ において  $V < 0$ のピーク、同じく  $z$  成分は  $y / R = 0$ で  $W < 0$ のピークを持つ。これらの傾向は、後流に存在する縦渦対の渦構造（図5.21）のために生ずるものである。また、 $\theta = 60^\circ$ に比して  $\theta = 45^\circ$ の方が、それぞれの時間平均特性量の正のピークが大きく負のピークが小さいことは、 $\theta = 45^\circ$ における縦渦対の渦構造が、 $\theta = 60^\circ$ のそれに比べて強化されていることを示している。



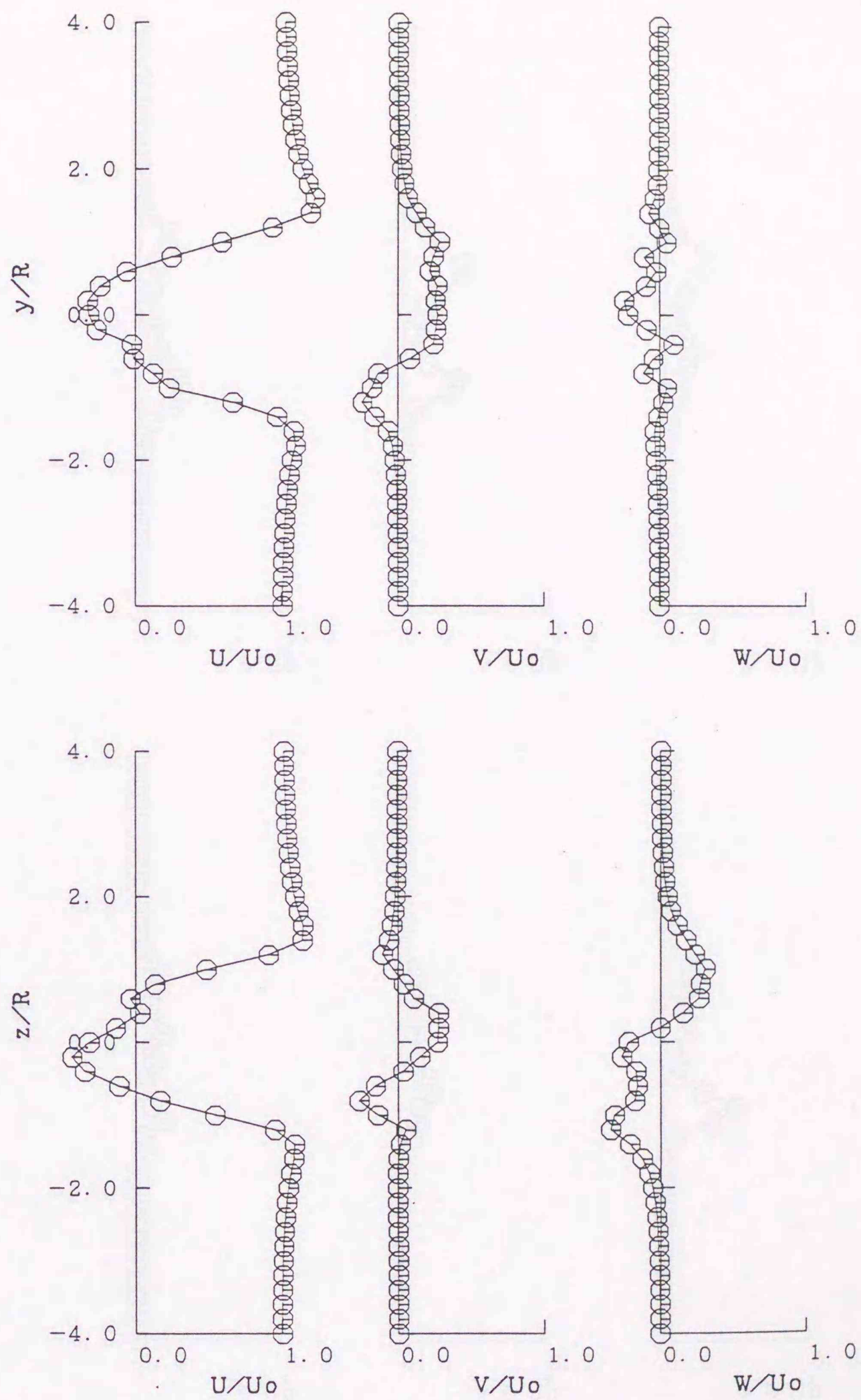


図5.22 時間平均速度分布 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $x/R = 1.0$ ,  $U_0 t/R = 0 \sim 6$ )



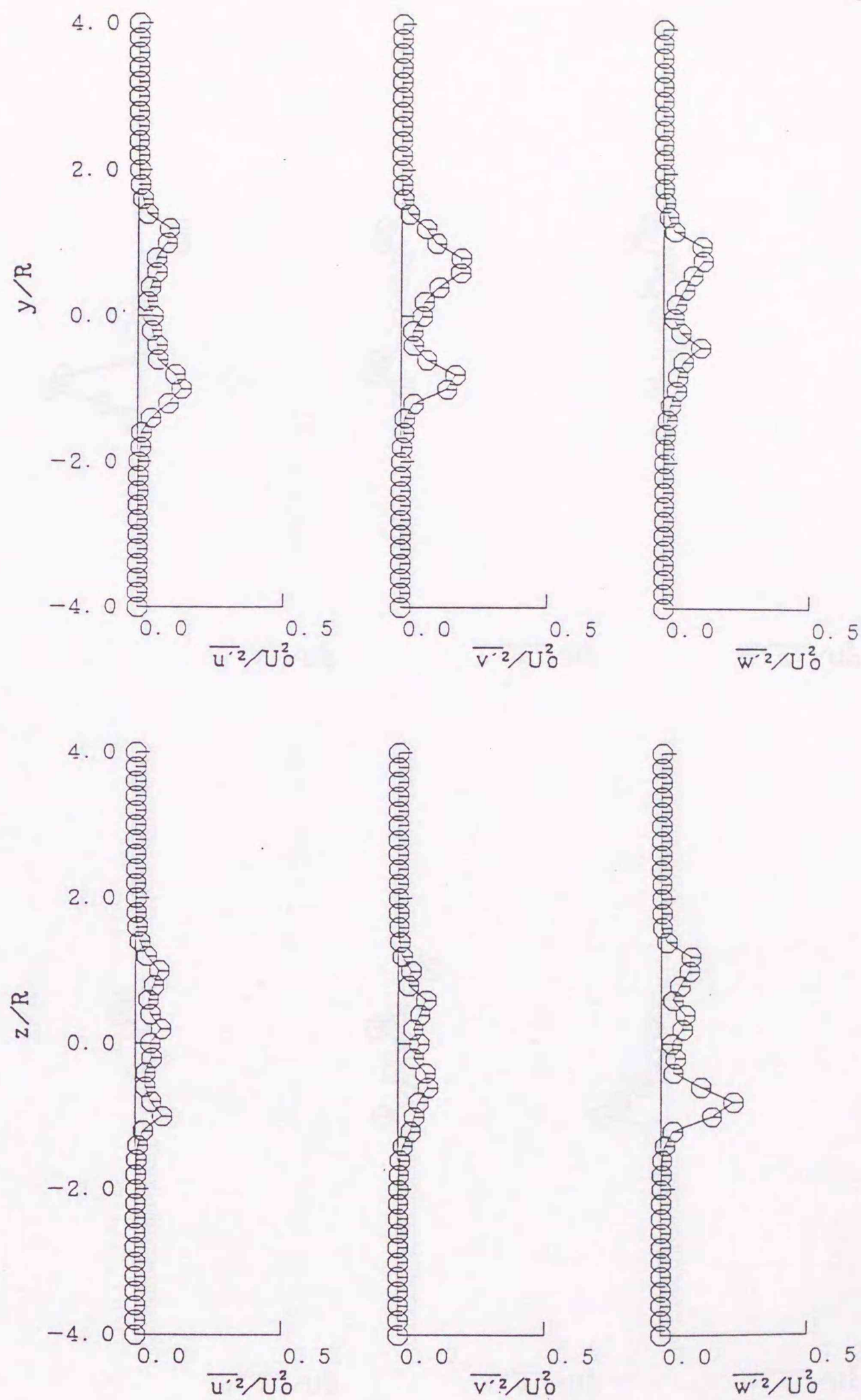


図5.23 レイノルズ垂直応力分布 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $x/R = 1.0$ ,  $U_0 t/R = 0 \sim 6$ )



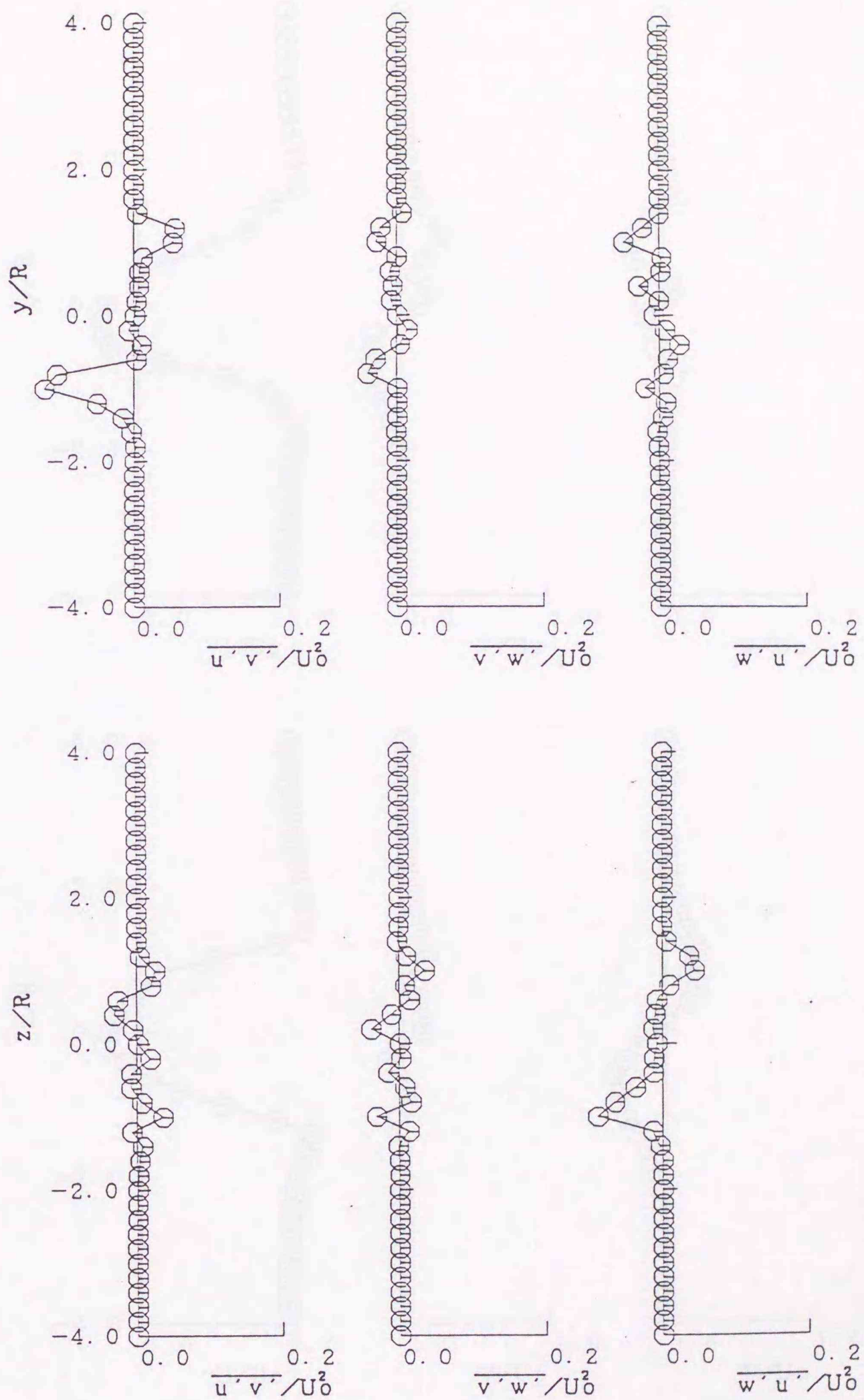


図5.24 レイノルズせん断応力分布 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $x/R = 1.0$ ,  $U_0 t/R = 0 \sim 6$ )



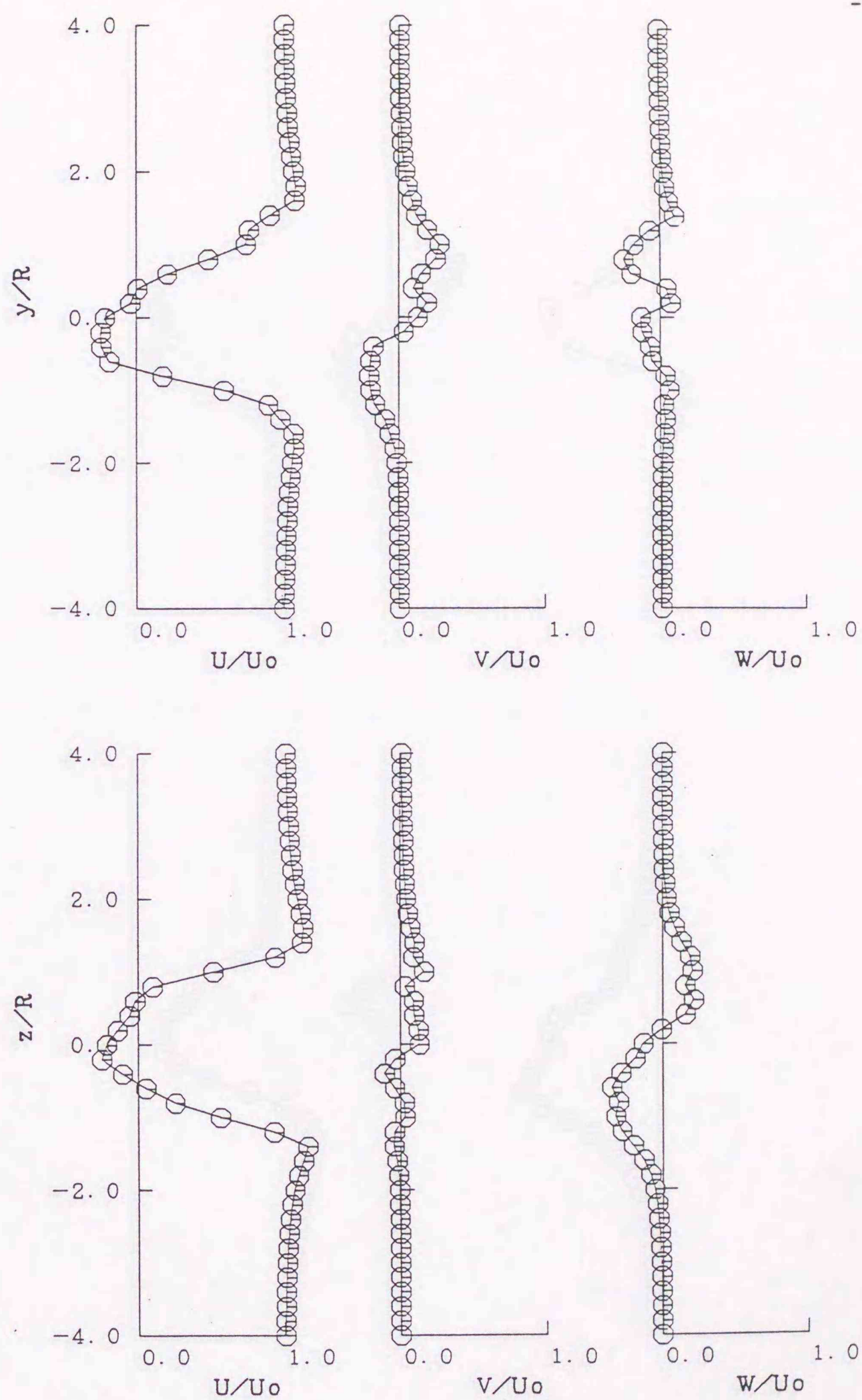


図5.25 時間平均速度分布 ( $\theta = 90^\circ$ ,  $x/R = 1.0$ ,  $U_0 t/R = 6 \sim 12$ )



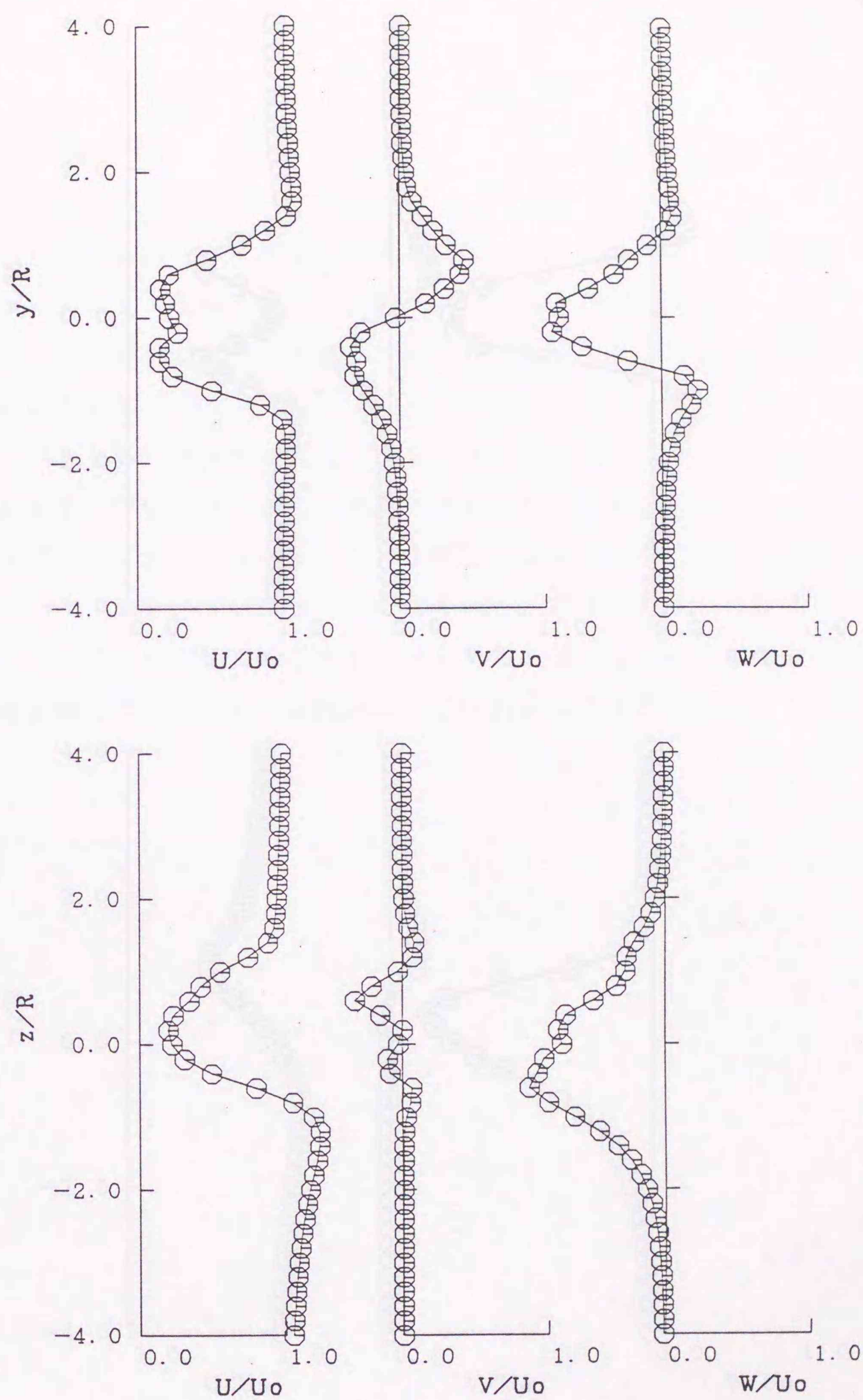


図5.26 時間平均速度分布 ( $\theta = 60^\circ$ ,  $x/R = 1.0$ )



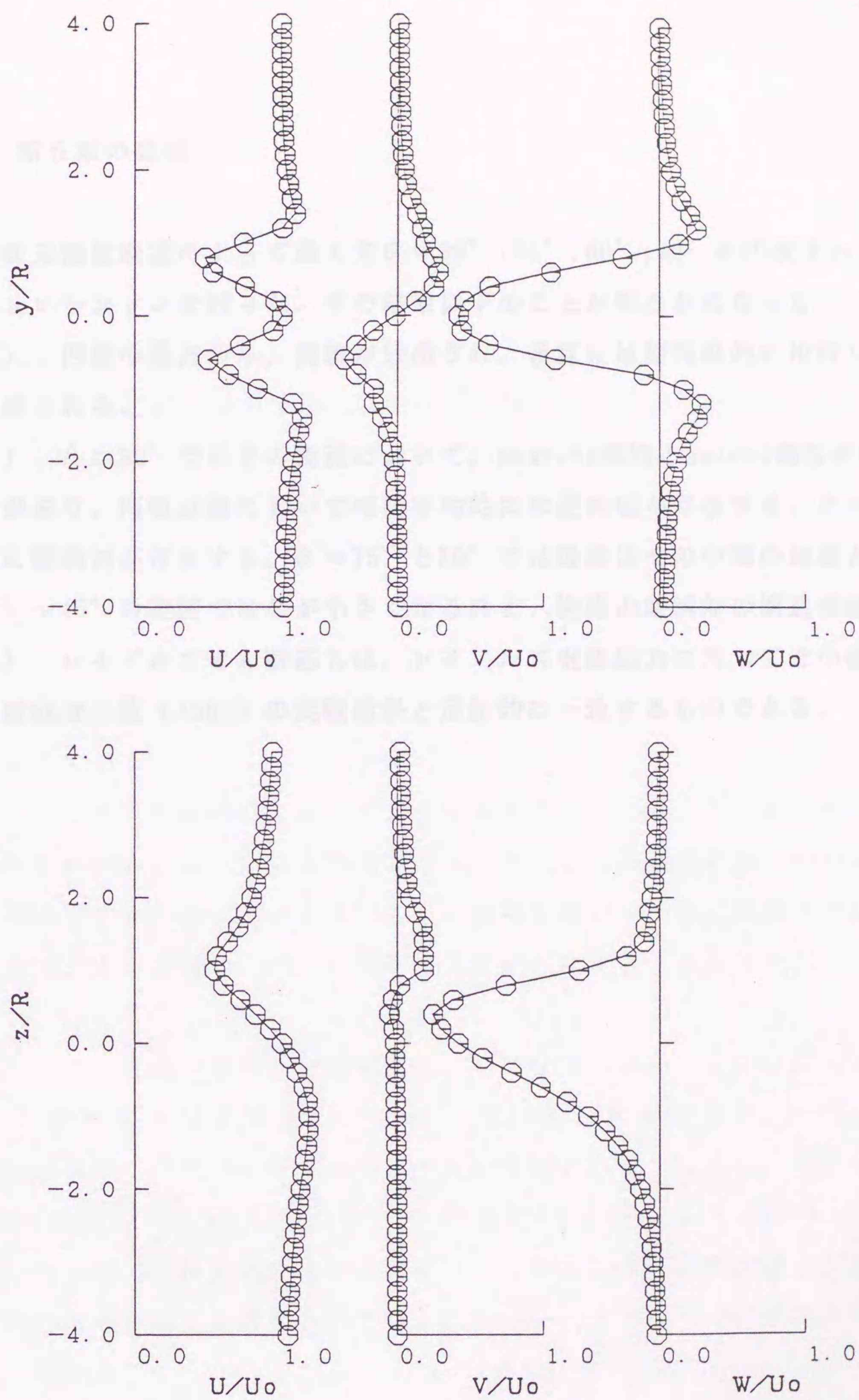


図5.27 時間平均速度分布 ( $\theta = 45^\circ$ ,  $x/R = 1.0$ )



### 5-3 第5章の総括

3次元離散渦法によって迎え角 $\theta = 90^\circ, 75^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ の円板まわりの流れのシミュレーションを行った。その結果以下のことが明らかになった。

- (1) 円板の後方から、渦塊が放出され、後流には擬周期的に蛇行した渦構造が形成される。
- (2)  $\theta = 90^\circ$ ではその後流において、pumping構造とspiral構造が混在する渦構造があり、円板近傍において時間平均的には逆流域が存在する。 $\theta = 45^\circ$ では後流に縦渦対が存在する。 $\theta = 75^\circ$ と $60^\circ$ では後流はその中間の構造となる。 $\theta = 90^\circ \sim 45^\circ$ の範囲では $\theta$ が小さくなるほど、後流の縦渦対の構造が強化される。
- (3) レイノルズせん断応力は、レイノルズ垂直応力に比してその値が小さい。この傾向は、笠(1990)の実験結果と定性的に一致するものである。



## 第6章 結 論

本論文は、乱流を少数の渦の相互干渉によって表現することを目的とし、乱流を渦の集合体として捕らえ、その基本要素を円形渦輪と直線渦糸とみなし、3次元離散渦法によってこれらの渦の相互干渉をシミュレーションしたものである。また、3次元離散渦法の複雑な乱流への応用の可能性を検討するために、円板まわりの非定常はく離流れの乱流構造に対する数値解析を行った。これらの数値解析の結果、以下に述べることが明らかになった。

(1) 円形渦輪と直線渦糸の相互干渉には、両者の相対位置によって4つの基本的パターン、すなわち合体モード、置換モード、遠隔作用モード、弱相互作用モードが存在する。

(2) 3次元離散渦法によって、並進する2つの渦輪のつなぎ換えにおける渦度のBridgingを表現することができる。Bridgingは渦要素の渦度の分布を調べることによって知ることができる。また、渦輪の断面を多数の渦要素で表現しても、渦要素そのものがBridgingを表現するように配列することはない。

(3) 4～8個の少数の円形渦輪を、初期状態において正多面体上に配置してこれらを相互干渉させることによって、乱流現象の普遍的な性質であるKolmogorovの $-5/3$ 乗エネルギースペクトルが実現される。しかし、初期状態において渦輪を非対称に配列すると、その相互干渉時のエネルギースペクトルはKolmogorovの $-5/3$ 乗則に従うことはない。このことは、高渦度領域がある大きさの空間内に等方的に分布するときに、Kolmogorovスペクトルが実現されることを示唆している。

(4) その断面を、単一あるいは多数の渦要素で表わした擬楕円渦輪の変形には、初期状態における長軸と短軸の比によって、4つのモードがあることがわかった。ただし、前者の擬楕円渦輪の計算時には、反対方向の渦度ベクトルを持ち、



ある程度接近する2つの渦要素を計算領域から除去する、という操作を施している。4つのモードとは、スイッチングモード；スイッチング後2個の渦輪に分裂するモード；そのまま2個の渦輪に分裂し、分裂後は並進する2つの渦輪と類似の相互干渉をするモード；そのまま3個に分裂し、分裂後は並進する2つの渦輪と類似の相互干渉をするモード、である。

また、渦輪の断面を多数の渦要素で表すことによって、渦核の変形および前述の4つのモードにおける渦輪の変形の微細構造が表現できる。

(5) 数値計算によって、迎え角を $90^\circ$ 、 $75^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $45^\circ$ とした一様流中の円板の後流には、pumping構造とspiral構造が混在していることが確認された。また、迎角がこの範囲にあるときは、迎角の減少とともにその後流における縦渦対構造が強化される。

離散渦法が、工学的にターボ機械などの流体機器・装置の設計等に使用されるまでには、渦度の発散の回避、粘性効果の導入法、レイノルズ数の評価方法、再付着点において固体表面から流れ場に供給される渦要素の方向および強さ、計算時に施すいくつかの操作の数学的裏付けなどを検討する必要があると考えられる。本論文が3次元離散渦法の工学的実用化に寄与することができれば幸いである。



## 参 考 文 献

Adrian, R. J., (1985): Conditional Eddies in Isotropic Turbulence, Phys. Fluids, 22, 2065-2070.

Aksman, M. J., Novikov, E. A., and Orszag, S. A., (1985): Vorton Method in Three-Dimensional Hdrodynamics, Phys. Rev. Let., 54, 2410-2413.

Alkemade, F., (1989): Vortons, Ph. D. thesis, Delft University of Technology.

Anderson, C. and Greengard, C., (1985): On Vortex Methods, SIAM J. Num. Anal., 22, 413-440.

Aref, H. and Kambe, T., (1988): Report on the IUTAM Symposium: Fundamental Aspects of Vortex Motion, J. Fluid Mech., 190, 571-595.

Aref, H. and Zawadzki, I., (1990): Comment on Vortex Ring Reconnections Topological Fluid Dynamics (eds. H. K. Moffat and A. Tsinober), 535-539, Camb. Univ. Press.

Ashurst, W. T. and Meiburg, E., (1988): Three-dimensional Shear Layers via Vortex Dynamics, J. Fluid Mech., 189, 87-116.

Ashurst, W. T. and Meiron, D. I., (1987): Numerical Study of Vortex Reconnection, Phys. Rev. Lett., 58, 1632-1635.

Batchelor, G. K., (1967): An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press.



Beale, J. T. and Majda, A., (1982a): Vortex Methods I: Convergence in Three Dimensions, Math. Comput., 39, 1-27.

Beale, J. T. and Majda, A., (1982b): Vortex Methods II: Higher Order Accuracy in Two and Three Dimensions, Math. Comput., 39, 29-52.

Berger, E., Scholz, D., and Schumm, M., (1990): Coherent Vortex Structures in the Wake of a Sphere and a Circular Disk at Rest and under Forced Vibrations, J. Fluids & Struct., 4, 231-257.

Brown, G. L. and Roshko, A., (1974): On Density Effects and Large Structure in a Turbulent Boundary Layers, J. Fluid Mech., 64, 775-816.

Calfish, R. E., (1989): Mathematical Analysis of Vortex Dynamics, Mathematical Aspects of Vortex Dynamics (ed. R. E. Caflisch), SIAM Philadelphia, 1-24.

Chapman, D. R., (1979): Computational Aerodynamics Development and Outlook, AIAA J., 17, 1293-1313.

Chen, H. L. and Oshima, K., (1988): Numerical Analysis of Reconnection of Vortex Rings, The Institute of Space and Astronautical Science Report SP No.6, 3-12.

Chorin, A. J., (1973): Numerical Study of Slightly Viscous Flow, J. Fluid Mech., 57, 785-796.

Dhanak, M. R. and De Bernardinis, B., (1981): The Evolution of an Elliptic Vortex Ring, J. Fluid Mech., 109, 189-216.



Donnelly, R. J., (1988): Superfluid Turbulence, Sci. Am., 259, 66-74.

福西 祐・日野 幹雄・小川 隆申, (1988): グループ処方による3次元離散渦法の計算, 第2回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 311-314.

Greengard, C., (1985): The Core Spreading Method Approximates the Wrong Equation, J. Comp. Phys., 61, 345-348.

Greengard, C. and Thomann, E., (1988): Singular Vortex Systems and Weak Solutions of the Euler Equations, Phys. Fluids, 31, 2810-2813.

橋本 英典, (1985): 渦運動の力学, 乱流現象の科学 (編集 巽 友正), 223-265, 東京大学出版会.

Hinze, J. O., (1975): Turbulence (second edition), McGraw-Hill Inc.

Ho, C. M. and Huerre, P., (1984): Perturbed Free Shear Layers, Ann. Rev. Fluid Mech., 16, 365-424.

Ho, C. M. and Gutmark, E., (1987): Vortex Induction and Mass Entrainment in a Small-Aspect-Ratio Elliptic Jet, J. Fluid Mech., 179, 383-405.

Hussain, F. and Husain, S., (1989): Elliptic Jets. Part 1. Characteristics of Unexcited and Exited Jets, J. Fluid Mech., 208, 257-320.

Inoue, O., (1989): Vortex Simulation of Spatially Growing Three-Dimensional Mixing Layers, AIAA J., 17, 1517-1523.



井上 督, (1990): 渦法による乱流混合層の解析, 境界積分法による流れの数値解析 (Part 2), 63-72, 日本機械学会セミナー&シンポジウム.

Kambe, T. and Takao, T., (1971): Motion of Distorted Vortex Rings, J. Phys. Soc., 31-2, 591-599.

笠 充彦, (1990): 円板後流の三次元構造に関する研究, 北見工業大学平成元年度修士論文.

Kida, S. and Takaoka, M., (1987): Bridging in Vortex Reconnection, Phys. Fluids, 30, 2911-2914.

Kida, S., Takaoka, M., and Hussain, F., (1989): Reconnection of Two Vortex Rings, Phys. Fluids A, 1, 630-632.

Kida, S., Takaoka, M., and Hussain, F., (1991): Collision of Two Vortex Rings, J. Fluid Mech., 230, 583-646.

木田 輝彦・林 隆一・安富 善三郎, (1990): ACV(Air Cushion Vehicle)の外部流れ(渦糸近似法による数値解析), 流体力学における特異点法に関する研究分科会成果報告書, 88-100, 日本機械学会.

Kiya, M. and Sato, T., (1986): A Vortex Ring Interaction with a Vortex Filament and Its Deformation Near the Two-Dimensional Stagnation Point, Lecture Notes in Engineering, 24, 52-61, Springer-Verlag.

Knio, O. M. and Ghoniem, A. F., (1990): Numerical Study of a Three-Dimensional Vortex Method, J. Comp. Phys., 86, 75-106.



Koshigoe, S., Gutmark, E., Schadow, K. C., and Tubis, A., (1989): Initial Development of Noncircular Jets Leading to Axis Switching, AIAA J., 27, 411-419.

Kuwabara, S., (1988): Pseudo-Canonical Formulartion of 3-Dimensional Vortex Motion and Vorton Model Analysis, Fluid Dyn. Res., 3, 163-178.

Leonard, A., (1976): Simulation of Three-Dimensional Sparated Flows with Vortex Filaments, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 59, 280-284.

Leonard, A., (1980): Vortex Methods for Flow Simulation, J. Comput. Phys., 37, 289-335.

Leonard, A., (1985): Computing Three-Dimensional Incompressible Flows With Vortex Elements, Ann. Rev. Fluid Mech., 17, 523-559.

Lugt, H. J., (1983): Vortex Flow in Nature and Technology, John Wiley & Sons Inc.

Melander, M. V. and Hussain, F., (1989): Cross-linking of Two Antiparallel Vortex Tubes, Phys. Fluids A, 1, 633-635.

Moffatt, H. K., (1969): The Degree of Knottedness of Tangled Vortex Lines, J. Fluid Mech., 35, 117-129.

明神 昭紀・加藤 真一・上野 登, (1990a): スーパーコンピュータHITACS-820 利用の手引き, 北海道大学大型計算機センター・ニュース, 22-5, 4-55.



明神 昭紀・加藤 真一・上野 登, (1990b): スーパーコンピュータHITACS-820 利用の手引き, 北海道大学大型計算機センター・ニュース, 22-6, 3-43.

明神 昭紀・加藤 真一・上野 登, (1991): スーパーコンピュータHITACS-820 利用の手引き, 北海道大学大型計算機センター・ニュース, 23-1, 86-122.

中西 裕二・亀本 蕎司, (1990): 3次元渦法による剝離流れ解析, 境界積分法による流れの数値解析 (Part 2) シンポジウム講演論文集, 57-60.

Norbury, J., (1973): A Family of Steady Vortex Rings, J. Fluid Mech., 57, 417-431.

Oshima, Y. and Izutsu, N., (1988): Cross-Linking of Two Vortex Rings, Phys. Fluids, 31, 2401-2403.

Sarpkaya, T., (1989): Computational Methods With Vortices—The 1988 Freeman Scholar Lecture, J. Fluids Eng, 111, 5-52.

Schwarz, K. W., (1985): Three-Dimensional Vortex Dynamics in Superfluid  $^4\text{He}$ : Line-Line and Line-Boundary Interaction, Phys. Rev. B, 31, 5782-5804.

Schwarz, K. W., (1988): Three-Dimensional Vortex Dynamics in Superfluid  $^4\text{He}$ : Homogeneous Superfluid Turbulence, Phys. Rev. B, 38, 2398-2417.

Schadow, K. C., Gutmark, E., Koshigoe, S., and Wilson, K. J., (1989): Combustion-Related Shear-Flow Dynamics in Elliptic Supersonic Jets, AIAA J., 27, 1347-1353.



Shariff, K., Leonard, A., and Ferziger, J. H., (1989): Dynamics of a Class of Vortex Rings, NASA Technical Memorandum 102257.

Shirayama, S., (1990): Numerical Analysis of Flow Past a Sphere, Proc. 2nd KSME-JSME Fluids Eng. Conf., vol. 1, 160-165.

Shirayama, S., Kuwahara, K., and Mendez, R., (1985): A New Three-Dimensional Vortex Method, AIAA Paper, 85-1488.

曾根 良夫, (1987): 不連続面を含む流れとEuler方程式の弱い解, ながれ 6, 182-186.

Stanaway, S. K., Cantwell, B. J., and Spalart, P. R., (1986): A Full Simulation of a Vortex Ring, 9th AUSTRALASIAN FLUID MECH. CONF. AUCKLAND, 362-366.

巽 友正, (1985): 序論, 乱流現象の科学 (編集 巽 友正), 1-13, 東京大学出版会.

谷 一郎, (1980): 流体力学の進歩 - 乱流, 丸善.

Tennekes, H. and Lumley, J. L., (1972): A First Course in Turbulence, The MIT Press.

Thorpe, S. A., (1971): Experiments on Stratified Shear Instability, J. Fluid Mech., 46, 300-320.

豊田 国昭・Hussain, F., (1989): 非円形噴流中の渦構造に関する研究, 日本機械学会論文集 B, 55-514, 1542-1545.



豊田 国昭 (1990): 私信.

Tsinober, A. and Levich, E., (1983): On the Helical Nature of Three-dimensional Coherent Structures in Turbulent Flows, Phys. Lett., 99A, 321-324.

土屋 良明・羽田 喜昭・堀越 長次・佐藤 俊, (1985): 長方形噴流の拡散に関する研究 (第2報, 平均速度拡散におよぼす噴流出口形状の影響), 日本機械学会論文集 B, 51-461, 85-94.

Winckelmans, G. and Leonard, A., (1989): Improved Vortex Methods for Three-Dimensional Flows, Mathematical Aspects of Vortex Dynamics (ed. R. E. Caflisch), SIAM Philadelphia, 25-35.

Yamamoto, K. and Hosokawa, I., (1988): A Decaying Isotropic Turbulence Pursued by the Spectral Method, J. Phys. Soc. Japan, 57, 1532-1535.

Yamashita, A. and Oshima, Y., (1988): Vortex Filament Simulation for the Crosslinking Rings, The Institute of Space and Astronautical Science Report SP No.6, 13-18.

Zabusky, M. J. and Melanger, M. V., (1988): Interaction and "Apparent" Reconnection of 3D Vortex Tubes Via Direct Numerical Simulations, Fluid Dyn. Res., 3, 247-250.



## 謝 辞

本研究は、北海道大学工学部機械工学科流体力学第一講座 木谷勝教授の御指導のもとに遂行されたものである。研究を進めるにあたり、計算式の導出、結果の検討、論文の執筆に終始適切で丁寧な御助言をいただきました。心より感謝します。

研究の進行上機会あるごとに御激励くださった流体力学第一講座 望月修助教授、山保敏幸技官に謝意を表します。平成2年4月から一年間の短い間でしたが北海道工業大学 白浜芳朗講師と流体力学第一講座の秘書の筒渕洋子さん、また、平成2年3月で退職されました田村尚敬元助手（現 一関商工高等学校）と山崎輝夫元技官にも在職中はお世話になりました。ありがとうございます。

さらに、論文の執筆にあたり文章の校正・図面の作成を手伝って下さった流体力学第一講座の大学院生ならびに学部生の皆さん、特に非円形渦輪の変形について共同研究をした平成3年3月修士過程修了の北村方誉君（現 三菱重工業）、平成2年3月学部卒業の鈴木隆志君（現 足利銀行）に心からお礼を申し上げます。

本研究に関する有益な討論と、擬楕円渦輪の変形の可視化実験結果の提供をして下さった北海道工業大学 豊田国昭教授、円板後流に関する実験の論文の提供をいただいた北見工業大学 谷口清一助教授と松村昌典助教授に謝意を表します。

他にも多くの方々の御指導と御激励で本論文を完成することができました。本当にありがとうございました。



付録 I 渦度方程式の導出

Helmholtzの渦度方程式は次式で表される.

$$\frac{D\omega(x^\alpha)}{Dt} = \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} u(x^\alpha) \quad (\text{付1.1})$$

ここで,  $\nabla^\alpha$  は  $x^\alpha$  に対する演算子である. 渦要素  $\beta$  が渦要素  $\alpha$  に誘起する速度を  $u^{\alpha\beta}$  とすると

$$u(x^\alpha) = \sum_{\beta} u^{\alpha\beta}$$

である. したがって渦度方程式は

$$\frac{D\omega(x^\alpha)}{Dt} = \sum_{\beta} \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} u^{\alpha\beta}$$

となる.  $u^{\alpha\beta}$  は次のように表される.

$$u^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(x^\alpha - x^\beta) \times \gamma^\beta}{|x^\alpha - x^\beta|^3} q \left( \frac{|x^\alpha - x^\beta|}{\sigma_\beta} \right) \quad (\text{付1.2})$$

ここで簡単のために

$$r^{\alpha\beta} = x^\alpha - x^\beta, \quad r_{\alpha\beta} = |r^{\alpha\beta}|, \quad f(r_{\alpha\beta}) = -(4\pi)^{-1} (r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{-3/2}$$

とおくと(付1.2)式は

$$u^{\alpha\beta} = f(r_{\alpha\beta}) (r^{\alpha\beta} \times \gamma^\beta)$$

と書くことができる. これを(付1.1)式の渦度方程式の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} u^{\alpha\beta} &= \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} f(r_{\alpha\beta}) (r^{\alpha\beta} \times \gamma^\beta) \\ &= f(r_{\alpha\beta}) \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} (r^{\alpha\beta} \times \gamma^\beta) + \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha f(r_{\alpha\beta})\} (r^{\alpha\beta} \times \gamma^\beta) \end{aligned} \quad (\text{付1.3})$$

ここで(付1.3)式の第1項は

$$\begin{aligned} f(r_{\alpha\beta}) \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha\} (r^{\alpha\beta} \times \gamma^\beta) &= f(r_{\alpha\beta}) \{\omega(x^\alpha) \cdot \nabla^\alpha r^{\alpha\beta}\} \times \gamma^\beta \\ &= f(r_{\alpha\beta}) \omega(x^\alpha) \times \gamma^\beta \end{aligned} \quad (\text{付1.4})$$

また, (付1.3)式の第2項は



$$\{\omega(\mathbf{x}^\alpha) \cdot \nabla^\alpha f(\mathbf{r}_{\alpha\beta})\}(\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \omega(\mathbf{x}^\alpha) \cdot \frac{1}{r_{\alpha\beta}} \frac{\partial f(\mathbf{r}_{\alpha\beta})}{\partial r_{\alpha\beta}} \mathbf{r}^{\alpha\beta} \right\} (\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{3}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{5/2}} \{\omega(\mathbf{x}^\alpha) \cdot \mathbf{r}^{\alpha\beta}\} (\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta) \end{aligned} \quad (\text{付1.5})$$

であるから、渦度方程式は(付1.4)式、(付1.5)式により

$$\frac{D\omega(\mathbf{x}^\alpha)}{Dt} = -\frac{1}{4\pi} \sum_\beta \left[ \frac{\{\omega(\mathbf{x}^\alpha) \times \boldsymbol{\gamma}^\beta\}}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{3/2}} - \frac{3\{\omega(\mathbf{x}^\alpha) \cdot \mathbf{r}^{\alpha\beta}\}}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{5/2}} (\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta) \right]$$

と表される。両辺に渦要素 $\alpha$ の体積 $d^3\mathbf{x}^\alpha$ を掛けると

$$\frac{D\boldsymbol{\gamma}^\alpha}{Dt} = -\frac{1}{4\pi} \sum_\beta \left\{ \frac{(\boldsymbol{\gamma}^\alpha \times \boldsymbol{\gamma}^\beta)}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{3/2}} - \frac{3(\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \mathbf{r}^{\alpha\beta})}{(r_{\alpha\beta}^2 + a\sigma_\beta^2)^{5/2}} (\mathbf{r}^{\alpha\beta} \times \boldsymbol{\gamma}^\beta) \right\}$$

を求めることができる。



## 付録Ⅱ 速度のフーリエ変換

渦要素  $\alpha$  に関する速度のフーリエ変換は

$$\hat{u}^\alpha(k) = \mathcal{F}\{u^\alpha(x)\} = \int u^\alpha(x) e^{-ik \cdot x} d^3x \quad (\text{付2.1})$$

で表される.

$$u^\alpha(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(x-x^\alpha) \times \gamma^\alpha}{|x-x^\alpha|^3} q\left(\frac{|x-x^\alpha|}{\sigma_\alpha}\right)$$

ここで,  $r = x - x^\alpha$ ,  $r = |r|$ ,  $\lambda_\alpha = a^{1/2} \sigma_\alpha$  とすると

$$u^\alpha(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{r \times \gamma^\alpha}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} \quad (\text{付2.2})$$

の様に書くことができ, (付2.1)式に(付2.2)式を代入すると,

$$\hat{u}^\alpha(k) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{r \times \gamma^\alpha}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} e^{-ik \cdot x} d^3x$$

となる. この積分を  $x^\alpha$  を中心とするものに換えると

$$\begin{aligned} \hat{u}^\alpha(k) &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{r \times \gamma^\alpha}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} \exp(-ik \cdot x^\alpha) e^{-ik \cdot r} d^3(x - x^\alpha) \\ &= \frac{1}{4\pi} \gamma^\alpha \exp(-ik \cdot x^\alpha) \times \int \frac{r e^{-ik \cdot r}}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} d^3r \end{aligned} \quad (\text{付2.3})$$

(付2.3)式の積分部分を

$$J = \int \frac{r e^{-ik \cdot r}}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} d^3r \quad (\text{付2.4})$$

と置いてこれを求める. ここで,  $k$  方向を天頂とする球極座標  $(r, \theta, \psi)$  を導入する.  $\theta$  は天頂角である.

$$\begin{aligned} J &= \frac{k}{k} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \frac{r \cos \theta e^{-ikr \cos \theta}}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta \\ &= \frac{2\pi k}{k} \int_0^\infty dr \frac{r^3}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} \int_0^\pi \cos \theta e^{-ikr \cos \theta} d(-\cos \theta) \end{aligned}$$



$$= -\frac{4\pi i k}{k^2} \int_0^\infty \frac{\cos(kr)}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} dr \quad (\text{付2.5})$$

ここで、(付2.5)式の積分部分の計算に次の公式を適用する（数学公式Ⅲ p187, 岩波全書）.

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2+z^2)^{\nu+1/2}} dt$$

ただし、 $\Re \nu > -1/2$ ,  $\Re z > 0$ である.

よって、(付2.5)式の積分部分は

$$\int_0^\infty \frac{\cos(kr)}{(r^2 + \lambda_\alpha^2)^{3/2}} dr = \frac{k}{\lambda_\alpha} K_1(\lambda_\alpha k)$$

となる.

以上より(付2.4)式は

$$J = -4\pi i \lambda_\alpha \frac{k}{k} K_1(\lambda_\alpha k)$$

と求められる. これを、(付2.3)式に代入すると

$$\hat{u}^\alpha(k) = i \lambda_\alpha k^{-1} K_1(\lambda_\alpha k) \exp(-i k \cdot x^\alpha) (k \times \gamma^\alpha) \quad (\text{付2.6})$$

が得られる. ただし、 $K_1$ は1次の第2種変形ベッセル関数である.



### 付録Ⅲ エネルギスペクトル

自己誘起エネルギスペクトル  $E_o(k)$  と相互作用エネルギスペクトル  $E_{int}(k)$  は

$$E_o(k) = \sum_{\alpha} E_{\alpha\alpha}(k), \quad E_{int}(k) = \sum_{\alpha, \beta} E_{\alpha\beta}(k)$$

$$E_{\alpha\alpha}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{u}^{\alpha}(k) \cdot \hat{u}^{\alpha}(-k) \quad (\text{付3.1})$$

$$E_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{u}^{\alpha}(k) \cdot \hat{u}^{\beta}(-k) \quad (\text{付3.2})$$

で表される。(付2.6)式を(付3.2)式に代入すると

$$E_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}}{k^2} K_1(\lambda_{\alpha}k) K_1(\lambda_{\beta}k) \\ \times \int dS_k \exp\{-i k \cdot (x^{\alpha} - x^{\beta})\} (k \times \gamma^{\alpha}) \cdot (k \times \gamma^{\beta})$$

$r^{\alpha\beta} = x^{\alpha} - x^{\beta}$ ,  $n^k = k/|k|$  とすると

$$E_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}}{k^2} K_1(\lambda_{\alpha}k) K_1(\lambda_{\beta}k) \\ \times \int dS_k \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) (n^k \times \gamma^{\alpha}) \cdot (n^k \times \gamma^{\beta})$$

ここで

$$J = \int dS_k \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) (n^k \times \gamma^{\alpha}) \cdot (n^k \times \gamma^{\beta}) \quad (\text{付3.3})$$

とにおいてこの積分を計算する。 $n^k$  が単位ベクトルであることを考慮すると、ベクトル解析の公式より

$$(n^k \times \gamma^{\alpha}) \cdot (n^k \times \gamma^{\beta}) = (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\beta}) - (n^k \cdot \gamma^{\alpha})(n^k \cdot \gamma^{\beta})$$

となるので、(付3.3)式は次のように表すことができる。

$$J = J_A + J_B$$

$$J_A = \int dS_k (\gamma^{\alpha} \cdot \gamma^{\beta}) \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) \quad (\text{付3.4})$$



$$J_B = - \int dS_k (n^k \cdot \gamma^\alpha) (n^k \cdot \gamma^\beta) \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) \quad (\text{付3.5})$$

ここで,  $r^{\alpha\beta}$  方向を天頂とする球極座標  $(r, \theta, \psi)$  を導入すると, (付3.4)式は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} J_A &= (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \exp(-i k r_{\alpha\beta} \cos \theta) k^2 \sin \theta \\ &= 2\pi k^2 (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) \int_0^\pi \exp(-i k r_{\alpha\beta} \cos \theta) d(-\cos \theta) \\ &= 4\pi k^2 (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) \frac{\sin \zeta_{\alpha\beta}}{\zeta_{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (\text{付3.6})$$

ここで  $r_{\alpha\beta} = |r^{\alpha\beta}|$ ,  $\zeta_{\alpha\beta} = k r_{\alpha\beta}$  である.

また, (付3.5)式の計算方法も同様である.

$$\begin{aligned} J_B &= - \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\psi (n^k \cdot \gamma^\alpha) (n^k \cdot \gamma^\beta) \exp(-i k r_{\alpha\beta} \cos \theta) k^2 \sin \theta \\ &= -2\pi k^2 \int_0^\pi d\theta \{ (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) \sin^3 \theta \\ &\quad + (\gamma^\alpha \cdot n^{\alpha\beta}) (\gamma^\beta \cdot n^{\alpha\beta}) (2 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \} \exp(-i k r_{\alpha\beta} \cos \theta) \\ &= -\frac{4\pi k^2}{\zeta_{\alpha\beta}^3} (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) (\sin \zeta_{\alpha\beta} - \zeta_{\alpha\beta} \cos \zeta_{\alpha\beta}) \\ &\quad - \frac{4\pi k^2}{\zeta_{\alpha\beta}^3} (\gamma^\alpha \cdot n^{\alpha\beta}) (\gamma^\beta \cdot n^{\alpha\beta}) \{ (\zeta_{\alpha\beta}^2 - 3) \sin \zeta_{\alpha\beta} + 3 \zeta_{\alpha\beta} \cos \zeta_{\alpha\beta} \} \end{aligned} \quad (\text{付3.7})$$

となる. ここで,  $n^{\alpha\beta} = r^{\alpha\beta} / r_{\alpha\beta}$  とする. (付3.6)式と(付3.7)式より

$$J = \frac{4\pi k^2}{\zeta_{\alpha\beta}^3} \{ (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) \phi_1(\zeta_{\alpha\beta}) + (\gamma^\alpha \cdot n^{\alpha\beta}) (\gamma^\beta \cdot n^{\alpha\beta}) \phi_2(\zeta_{\alpha\beta}) \}$$

ただし

$$\phi_1(y) = \frac{1}{y^3} \{ (y^2 - 1) \sin y + y \cos y \}$$

$$\phi_2(y) = \frac{1}{y^3} \{ (3 - y^2) \sin y - 3y \cos y \}$$

である.



以上より,  $E_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  は次式のようになる.

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \lambda_\alpha \lambda_\beta k^2 K_1(\lambda_\alpha k) K_1(\lambda_\beta k) \\ \times \{ (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\beta) \phi_1(k r_{\alpha\beta}) + (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \mathbf{n}^{\alpha\beta}) (\boldsymbol{\gamma}^\beta \cdot \mathbf{n}^{\alpha\beta}) \phi_2(k r_{\alpha\beta}) \}$$

また, 同様に  $E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k})$  も

$$E_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) = \frac{1}{6\pi^2} \lambda_\alpha^2 k^2 \{ K_1(\lambda_\alpha k) \}^2 (\boldsymbol{\gamma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\gamma}^\alpha)$$

と求められる.



付録Ⅳ 渦度のフーリエ変換

渦要素  $\alpha$  に関する渦度のフーリエ変換は

$$\hat{\omega}^{\alpha}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\omega^{\alpha}(\mathbf{x})\} = \int \omega^{\alpha}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} \quad (\text{付4.1})$$

と表される。渦度分布は Rosenhead-Moore の渦核構造のときは

$$\omega^{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} p\left(\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\alpha}|}{\sigma_{\alpha}}\right) \gamma^{\alpha}$$

ここで,  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\alpha}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\lambda_{\alpha} = a^{1/2} \sigma_{\alpha}$  とすると

$$\omega^{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} \frac{\sigma_{\alpha}^5 \gamma^{\alpha}}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{5/2}} \quad (\text{付4.2})$$

となる。ここで(付4.2)式を(付4.1)式に代入する。

$$\hat{\omega}^{\alpha}(\mathbf{k}) = \int \frac{1}{\sigma_{\alpha}^3} \frac{\sigma_{\alpha}^5}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{5/2}} \gamma^{\alpha} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

この式を付録Ⅱと同様な球極座標を導入し変形すると

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{\alpha}(\mathbf{k}) &= \gamma^{\alpha} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^{\alpha}) \frac{3\lambda_{\alpha}^2}{4\pi} \int \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{5/2}} d^3\mathbf{r} \\ &= \gamma^{\alpha} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^{\alpha}) \frac{3\lambda_{\alpha}^2}{2} \int_0^{\infty} dr \frac{r^2}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{5/2}} \int_0^{\pi} e^{-ikr\cos\theta} \sin\theta d\theta \\ &= \gamma^{\alpha} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^{\alpha}) \frac{3\lambda_{\alpha}^2}{k} \int_0^{\infty} \frac{r \sin(kr)}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{5/2}} dr \end{aligned}$$

と書くことができる。  $r$  に関する積分を計算すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{r \sin(kr)}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{5/2}} dr &= \frac{k}{3} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kr)}{(r^2 + \lambda_{\alpha}^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{k^2}{3\lambda_{\alpha}} K_1(\lambda_{\alpha} k) \end{aligned}$$

を導くことができる。以上より渦度のフーリエ変換は次のようになる。

$$\hat{\omega}^{\alpha}(\mathbf{k}) = \gamma^{\alpha} \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}^{\alpha}) (\lambda_{\alpha} k) K_1(\lambda_{\alpha} k) \quad (\text{付4.3})$$



付録V エンストロフィスペクトル

計算の手順は、エネルギースペクトルを求めるときと同様である。

$$\Phi_{\alpha\alpha}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\omega}^\alpha(k) \cdot \hat{\omega}^\alpha(-k) \quad (\text{付5.1})$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{\omega}^\alpha(k) \cdot \hat{\omega}^\beta(-k) \quad (\text{付5.2})$$

(付5.2)式に(付4.3)式を代入する。

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}(k) = & \frac{1}{2(2\pi)^3} \lambda_\alpha^2 \lambda_\beta^2 k^2 K_1(\lambda_\alpha k) K_1(\lambda_\beta k) \\ & \times (\gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta) \int dS_k \exp\{-i k \cdot (x^\alpha - x^\beta)\} \end{aligned}$$

ここで  $r^{\alpha\beta} = x^\alpha - x^\beta$  ,  $r_{\alpha\beta} = |r^{\alpha\beta}|$  とおく。積分部分は(付3.4)式と同様であるから(付5.2)式は

$$\Phi_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \lambda_\alpha^2 \lambda_\beta^2 k^3 \frac{\sin(k r_{\alpha\beta})}{r_{\alpha\beta}} K_1(\lambda_\alpha k) K_1(\lambda_\beta k)$$

となる。

(付5.1)式についても同様の手順によって

$$\Phi_{\alpha\alpha}(k) = \frac{1}{4\pi^2} \lambda_\alpha^4 k^4 \{K_1(\lambda_\alpha k)\}^2$$

と求めることができる。



付録 VI ヘリシティ

計算方法は、エネルギースペクトルおよびエンストロフィスペクトルで述べた方法と同様である。

$$F_{\alpha\alpha}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{u}^\alpha(k) \cdot \hat{\omega}^\alpha(-k) \quad (\text{付6.1})$$

$$F_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dS_k \hat{u}^\alpha(k) \cdot \hat{\omega}^\beta(-k) \quad (\text{付6.2})$$

(付6.2)式に(付2.6)式および(付4.3)式を代入する。

$$F_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} i \lambda_\alpha \lambda_\beta k^2 K_1(\lambda_\alpha k) K_1(\lambda_\beta k) \\ \times \int dS_k \exp\{-i k \cdot (x^\alpha - x^\beta)\} (k \times \gamma^\alpha) \cdot \gamma^\beta$$

被積分関数のスカラー3重積を

$$(k \times \gamma^\alpha) \cdot \gamma^\beta = k \cdot (\gamma^\alpha \times \gamma^\beta)$$

と変形することにより

$$F_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} i \lambda_\alpha \lambda_\beta k^2 K_1(\lambda_\alpha k) K_1(\lambda_\beta k) \\ \times (\gamma^\alpha \times \gamma^\beta) \cdot \int dS_k \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) k$$

ここで積分部分を

$$J = \int dS_k \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) k$$

とおく。  $r^{\alpha\beta}$  方向を天頂とする球極座標を導入して計算する。

$$J = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \exp(-i k \cdot r^{\alpha\beta}) k k^2 \sin\theta \\ = 2\pi k^3 (\gamma^\alpha \times \gamma^\beta) \cdot \frac{r^{\alpha\beta}}{r^{\alpha\beta}} \int_0^\pi d\theta \exp(-i k r_{\alpha\beta} \cos\theta) \cos\theta \sin\theta$$



$$=4\pi i k^3 \frac{r^{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}} \left\{ \frac{\cos(k r_{\alpha\beta})}{k r_{\alpha\beta}} - \frac{\sin(k r_{\alpha\beta})}{k^2 r_{\alpha\beta}^2} \right\}$$

したがって、(付6.2)式は

$$F_{\alpha\beta}(k) = -\frac{1}{2\pi^2} \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{k^2}{r_{\alpha\beta}} K_1(\lambda_\alpha k) K_1(\lambda_\beta k) \\ \times \left\{ \cos(k r_{\alpha\beta}) - \frac{\sin(k r_{\alpha\beta})}{k r_{\alpha\beta}} \right\} (\gamma^\alpha \times \gamma^\beta) \cdot r^{\alpha\beta}$$

と求めることができる。

また、(付6.1)式は被積分関数中のスカラー3重積が

$$(k \times \gamma^\alpha) \cdot \gamma^\alpha = k \cdot (\gamma^\alpha \times \gamma^\alpha) = 0$$

となることから

$$F_{\alpha\alpha}(k) = 0$$

である。



付録Ⅶ 円板周辺の流れに対する計算プログラム



```

100070 *-----*
100100 *   D I S K 周辺の流れ
100200 *   MAIN PROGRAM
100250 *   渦核拡散
100260 *    $\sigma = \text{CONST}$ 
100270 *   逆流 VORTON 消去
100280 *   LIMITER 可
100300 *-----*
100400 *   PROGRAM MAINB
100500 *
100700 *   PARAMETER (IPAN=600)
100800 *   PARAMETER (MVOR=20000)
100900 *   DIMENSION IP(IPAN),WK(IPAN)
100910 *   INTEGER T,T2,T3,IELIM(MVOR)
101000 *   REAL TNORM(3),UINF(3),KAPPA,NU
101100 *   REAL YDUM(0:MVOR,3),TYDUM(0:MVOR,3)
101150 *   & ,GAMMA(IPAN)
101250 *   & ,GAMDISK(IPAN),AA(IPAN,IPAN),B(IPAN)
101350 *   & ,AADUM(IPAN,IPAN)
101400 *   & ,YC(IPAN,3)
101450 *   & ,L(MVOR,3)
101500 *   & ,DL(MVOR)
101700 *   & ,FFF(MVOR),RIJ(MVOR,3),DX(MVOR,3)
101800 *   & ,RKS(MVOR),RIJLS(MVOR)
101900 *   & ,UNW(MVOR,3),OMG(MVOR),DLO(MVOR)
101950 *   & ,UC(IPAN,3),UCN(IPAN),VS(IPAN,3)
101960 *   & ,DXDT(MVOR,3),DWDT(MVOR,3),DW(MVOR,3),GGG(MVOR)
101990 *   & ,GAM(MVOR),DV(MVOR),SIGCST(MVOR)
101991 *   & ,OMGO(MVOR),P1DASH(MVOR,3),P2DASH(MVOR,3)
101992 *   & ,P1DASHR(MVOR),P2DASHR(MVOR)
101995 *   REAL Y(MVOR,3),W(MVOR,3),SIG(MVOR),P1(MVOR,3),P2(MVOR,3)
102000 *
102050 *   COMMON /PARAO1/ PI,KAPPA,PCORE,RDISK,ALPHA,NR,NTH,UINF
102051 *   & ,DT,NSOTO,NUCHI,INTER,DELR,CORE,BETA,NU,C
102052 *   COMMON /PARAO2/ ALPH,NPAN,NTH3,NVDISK,TNORM
102055 *   COMMON /GAMMA1/ AA,YC,SIG,Y,L,GAMDISK
102060 *
102070 *   ***** 初期・境界条件
102100 *   CALL SHOKIA
102200 *
104120 *   RRING=RDISK+DELR
104130 *   NV=NVDISK
104140 *   OMGLIM=4.0
104150 *   SINDASH=SIN((90.-ALPHA)/180.*PI)
104160 *   CSDASH=COS((90.-ALPHA)/180.*PI)
104190 *
104200 *   ***** OUTPUT PARAMETERS
104300 *   WRITE(6,1) NR,NTH,RDISK,PCORE,ALPHA,UINF(1),NVDISK
104350 *   & ,DT,DELR,CORE,BETA,NU,C,NSOTO,NUCHI,OMGLIM
104500 *   1 FORMAT(1H1,' N-r',I3,3X,'N-theta',I3,
104600 *   & ,/, ' R-disk',F4.1,3X,'PANEL CORE',F5.3
104700 *   & ,/, ' ALPHA',F4.1,3X,' U-inf',F4.1
104750 *   & ,/, ' NVDISK',I4
104760 *   & ,/, ' DT',E12.5,3X,' DELR',F6.4
104770 *   & ,3X,' CORE',F6.4,3X,' BETA',F6.2
104775 *   & ,/, ' NU',E12.5,3X,' C',E12.5
104780 *   & ,/, ' NSOTO',I3,12X,' NUCHI',I3
104790 *   & ,/, ' LIM',F6.2)
104800 *
105000 *

105735 *   DO 51 I=1,NTH
105740 *   DO 51 M=1,3
105745 *   GAM((I-1)*3+M)=GAMDISK(I)
105770 *   51 CONTINUE
105775 *   DO 52 I=1,NPAN-NTH
105780 *   DO 52 M=1,4
105785 *   GAM(NTH3+(I-1)*4+M)=GAMDISK(NTH+I)
105810 *   52 CONTINUE
105813 *   DO 50 I=1,NVDISK
105814 *   SIGCST(I)=SIG(I)
105815 *   DL(I)=SQRT(L(I,1)**2+L(I,2)**2+L(I,3)**2)
105816 *   UNW(I,1)=GAM(I)/ABS(GAM(I))*L(I,1)/DL(I)
105817 *   UNW(I,2)=GAM(I)/ABS(GAM(I))*L(I,2)/DL(I)
105818 *   UNW(I,3)=GAM(I)/ABS(GAM(I))*L(I,3)/DL(I)
105822 *   50 CONTINUE
105823 *
105824 *
105825 *   DO 53 I=0,NTH
105826 *   YDUM(I,1)=RRING*COS(PI*REAL(2*I)/NTH)
105827 *   YDUM(I,2)=RRING*SIN(PI*REAL(2*I)/NTH)
105828 *   53 CONTINUE
105829 *
105830 *   DO 54 I=0,NTH
105831 *   TYDUM(I,1)=YDUM(I,1)*COS(ALPH)
105832 *   TYDUM(I,2)=YDUM(I,2)
105833 *   TYDUM(I,3)=-YDUM(I,1)*SIN(ALPH)
105834 *   54 CONTINUE
105835 *   DO 56 I=1,NTH
105836 *   VS(I,1)=0.0
105837 *   VS(I,2)=0.0
105838 *   VS(I,3)=0.0
105839 *   56 CONTINUE
105840 *
105841 *   DO 58 M=1,3
105842 *   DO 58 I=1,NTH
105843 *   Y(NV+I,M)=(TYDUM(I-1,M)+TYDUM(I,M))*0.5
105844 *   L(NV+I,M)=TYDUM(I-1,M)-TYDUM(I,M)
105845 *   58 CONTINUE
105846 *   DO 60 I=NV+1,NV+NTH
105847 *   DO 62 J=1,NV
105848 *   RIJ(J,1)=Y(I,1)-Y(J,1)
105849 *   RIJ(J,2)=Y(I,2)-Y(J,2)
105850 *   RIJ(J,3)=Y(I,3)-Y(J,3)
105851 *   RIJLS(J)=RIJ(J,1)**2+RIJ(J,2)**2+RIJ(J,3)**2
105852 *   RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIGCST(J)**2)
105853 *   FFF(J)=GAM(J)*DL(J)/(4.0*PI*RKS(J)**3)
105854 *   62 CONTINUE
105855 *   DO 64 J=1,NV
105856 *   DX(J,1)=FFF(J)
105857 *   & *(UNW(J,2)*RIJ(J,3)-UNW(J,3)*RIJ(J,2))
105858 *   DX(J,2)=FFF(J)
105859 *   & *(UNW(J,3)*RIJ(J,1)-UNW(J,1)*RIJ(J,3))
105860 *   DX(J,3)=FFF(J)
105861 *   & *(UNW(J,1)*RIJ(J,2)-UNW(J,2)*RIJ(J,1))
105862 *   64 CONTINUE
105863 *   DO 66 J=1,NV
105864 *   VS(I-NV,1)=VS(I-NV,1)+DX(J,1)
105865 *   VS(I-NV,2)=VS(I-NV,2)+DX(J,2)
105866 *   VS(I-NV,3)=VS(I-NV,3)+DX(J,3)
105867 *   66 CONTINUE
105868 *   60 CONTINUE
105870 *   DO 68 I=1,NTH
105871 *   VS(I,1)=VS(I,1)+UINF(1)
105872 *   VS(I,2)=VS(I,2)+UINF(2)
105873 *   VS(I,3)=VS(I,3)+UINF(3)
105874 *   GAMMA(I)=0.5*BETA*DT*(VS(I,1)**2+VS(I,2)**2+VS(I,3)**2)*INTER

```



```

105875 C      GAMMA(I)=ABS(GAMDISK(NPAN-NTH+I))
105876 C      68 CONTINUE
105878 C      DO 70 I=1,NTH
105879 C          SIG(NV+I)=CORE*RDISK
105880 C          SIGCST(NV+I)=CORE*RDISK
105881 C          OHG(NV+I)=GAMMA(I)/(PI*SIG(NV+I)**2)
105882 C          GAM(NV+I)=GAMMA(I)
105883 C      70 CONTINUE
105884 C          OMGLH=OHG(NV+1)*8.0
105885 *
106640 ***** 外LOOP
106650      DO 100 T=1,NSOTO
106657 *
106661 ***** 内LOOP
106662      DO 110 T2=1,NUCHI
106663 *
106701 ***** 渦要素の放出
106702 CCCCC
106703 C      DO 210 I=0,NTH
106704 C          YDUM(I,1)=RRING*COS(PI*REAL(2*I-1)/NTH)
106705 C          YDUM(I,2)=RRING*SIN(PI*REAL(2*I-1)/NTH)
106709 C      210 CONTINUE
106710 CCCCC 渦要素中心標点軸上
106711 C      DO 210 I=0,NTH
106712 C          YDUM(I,1)=RRING*COS(PI*REAL(2*I)/NTH)
106713 C          YDUM(I,2)=RRING*SIN(PI*REAL(2*I)/NTH)
106714 C      210 CONTINUE
106715 *
106716 C      DO 215 I=0,NTH
106717 C          TYDUM(I,1)=YDUM(I,1)*COS(ALPH)
106718 C          TYDUM(I,2)=YDUM(I,2)
106719 C          TYDUM(I,3)=-YDUM(I,1)*SIN(ALPH)
106720 C      215 CONTINUE
106721 C      DO 220 I=1,NTH
106722 C          VS(I,1)=0.0
106723 C          VS(I,2)=0.0
106724 C          VS(I,3)=0.0
106736 C      220 CONTINUE
106746 *
106800 C      DO 225 M=1,3
106900 C      DO 225 I=1,NTH
107100 C          Y(NV+I,M)=(TYDUM(I-1,M)+TYDUM(I,M))*0.5
107150 C          L(NV+I,M)=TYDUM(I-1,M)-TYDUM(I,M)
107300 C      225 CONTINUE
107301 *
107305 C      DO 230 I=NV+1,NV+NTH
107306 C      DO 240 J=1,NV
107308 C          RIJ(J,1)=Y(I,1)-Y(J,1)
107309 C          RIJ(J,2)=Y(I,2)-Y(J,2)
107310 C          RIJ(J,3)=Y(I,3)-Y(J,3)
107312 C          RIJLS(J)=RIJ(J,1)**2+RIJ(J,2)**2+RIJ(J,3)**2
107313 C          RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIGCST(J)**2)
107315 C          FFF(J)=GAM(J)*DL(J)/(4.0*PI*RKS(J)**3)
107316 C      240 CONTINUE
107317 *
107319 C      DO 250 J=1,NV
107321 C          DX(J,1)=FFF(J)
107322 C          &          *(UNW(J,2)*RIJ(J,3)-UNW(J,3)*RIJ(J,2))
107323 C          DX(J,2)=FFF(J)
107324 C          &          *(UNW(J,3)*RIJ(J,1)-UNW(J,1)*RIJ(J,3))
107325 C          DX(J,3)=FFF(J)
107326 C          &          *(UNW(J,1)*RIJ(J,2)-UNW(J,2)*RIJ(J,1))
107327 C      250 CONTINUE
107328 *
107329 C      DO 260 J=1,NV
107330 C          VS(I-NV,1)=VS(I-NV,1)+DX(J,1)
107331 C          VS(I-NV,2)=VS(I-NV,2)+DX(J,2)
107332 C          VS(I-NV,3)=VS(I-NV,3)+DX(J,3)
107335 C      260 CONTINUE
107343 C      230 CONTINUE
107344 C      DO 270 I=1,NTH
107345 C          VS(I,1)=VS(I,1)+UINF(1)
107346 C          VS(I,2)=VS(I,2)+UINF(2)
107347 C          VS(I,3)=VS(I,3)+UINF(3)
107348 C          GAMMA(I)=0.5*BETA*DT*(VS(I,1)**2+VS(I,2)**2+VS(I,3)**2)*INTER
107349 C          GAMMA(I)=ABS(GAMDISK(NPAN-NTH+I))
107350 C      270 CONTINUE
107353 *
107354 C      DO 280 I=1,NTH
107355 C          SIG(NV+I)=CORE*RDISK
107356 C          SIGCST(NV+I)=CORE*RDISK
107357 C          OHG(NV+I)=GAMMA(I)/(PI*SIG(NV+I)**2)
107358 C          OHGO(NV+I)=GAMMA(I)/(PI*SIG(NV+I)**2)
107359 C          GAM(NV+I)=GAMMA(I)
107360 C      280 CONTINUE
107361 C      DO 290 I=1,NTH
107362 C          DL(NV+I)=
107363 C          &          SQRT(L(NV+I,1)**2+L(NV+I,2)**2+L(NV+I,3)**2)
107365 C          UNW(NV+I,1)=L(NV+I,1)/DL(NV+I)
107366 C          UNW(NV+I,2)=L(NV+I,2)/DL(NV+I)
107367 C          UNW(NV+I,3)=L(NV+I,3)/DL(NV+I)
107377 C          W(NV+I,1)=OHG(NV+I)*UNW(NV+I,1)
107378 C          W(NV+I,2)=OHG(NV+I)*UNW(NV+I,2)
107379 C          W(NV+I,3)=OHG(NV+I)*UNW(NV+I,3)
107384 C          DLO(NV+I)=DL(NV+I)
107385 C          DV(NV+I)=PI*SIG(NV+I)**2*DL(NV+I)
107386 C      290 CONTINUE
107400 *
107410 C          NV=NV+NTH
107460 *
107465 ***** 座標・渦度の計算LOOP
107466 C      DO 510 T3=1,INTER
107467 C          NLOOP=NLOOP+1
107476 *
107500 ***** 放出渦による標点での誘起速度
107501 C      DO 295 K=1,NPAN
107502 C          UC(K,1)=0.0
107503 C          UC(K,2)=0.0
107504 C          UC(K,3)=0.0
107505 C      295 CONTINUE
107506 *
107507 C      DO 300 K=1,NPAN
107508 C      DO 310 J=NVDISK+1,NV
107509 C          RIJ(J,1)=YC(K,1)-Y(J,1)
107510 C          RIJ(J,2)=YC(K,2)-Y(J,2)
107511 C          RIJ(J,3)=YC(K,3)-Y(J,3)
107512 C          RIJLS(J)=RIJ(J,1)**2+RIJ(J,2)**2+RIJ(J,3)**2
107513 C          RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIGCST(J)**2)
107514 C          RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIG(J)**2)
107515 C          FFF(J)=GAM(J)*DL(J)/(4.0*PI*RKS(J)**3)
107516 C      310 CONTINUE
107517 C      DO 320 J=NVDISK+1,NV
107518 C          DX(J,1)=FFF(J)
107519 C          &          *(UNW(J,2)*RIJ(J,3)-UNW(J,3)*RIJ(J,2))
107520 C          DX(J,2)=FFF(J)
107521 C          &          *(UNW(J,3)*RIJ(J,1)-UNW(J,1)*RIJ(J,3))
107522 C          DX(J,3)=FFF(J)
107523 C          &          *(UNW(J,1)*RIJ(J,2)-UNW(J,2)*RIJ(J,1))
107524 C      320 CONTINUE
107526 C      DO 330 J=NVDISK+1,NV
107527 C          UC(K,1)=UC(K,1)+DX(J,1)
107528 C          UC(K,2)=UC(K,2)+DX(J,2)

```



```

107529      UC(K,3)=UC(K,3)+DX(J,3)
107530 330  CONTINUE
107539 300  CONTINUE
107540 *
107541      DO 340 K=1,NPAN
107542      UC(K,1)=UC(K,1)+UINF(1)
107543      UC(K,2)=UC(K,2)+UINF(2)
107544      UC(K,3)=UC(K,3)+UINF(3)
107545 340  CONTINUE
107558      DO 390 K=1,NPAN
107559      UCN(K)=UC(K,1)*TNORM(1)+UC(K,2)*TNORM(2)+UC(K,3)*TNORM(3)
107562 390  CONTINUE
107600 *
107700 ***** 循環「の計算〔境界条件〕
107705      DO 400 I=1,NPAN
107711      B(I)=-UCN(I)
107715 400  CONTINUE
107719 *
107720      DO 405 J=1,NPAN
107721      DO 405 I=1,NPAN
107722      AADUM(I,J)=AA(I,J)
107723 405  CONTINUE
107724      CALL %SLF1M(AADUM,NPAN,IPAN,B,EPS,1,IP,WK,IER)
107725      DO 410 I=1,NPAN
107730      GAMDISK(I)=B(I)
107735 410  CONTINUE
107736 *
107775      DO 430 I=1,NTH
107780      DO 430 M=1,3
107785      GAM((I-1)*3+M)=ABS(GAMDISK(I))
107790      OMG((I-1)*3+M)=GAM((I-1)*3+M)/(PI*SIG((I-1)*3+M)**2)
107791      W((I-1)*3+M,1)=OMG((I-1)*3+M)*UNW((I-1)*3+M,1)
107792      W((I-1)*3+M,2)=OMG((I-1)*3+M)*UNW((I-1)*3+M,2)
107793      W((I-1)*3+M,3)=OMG((I-1)*3+M)*UNW((I-1)*3+M,3)
107795 430  CONTINUE
107796      DO 440 I=1,NPAN-NTH
107797      DO 440 M=1,4
107798      GAM(NTH3+(I-1)*4+M)=ABS(GAMDISK(NTH+I))
107799      OMG(NTH3+(I-1)*4+M)=GAM(NTH3+(I-1)*4+M)/(PI*SIG(NTH3+(I-1)*4+M)**2)
107800      W(NTH3+(I-1)*4+M,1)=OMG(NTH3+(I-1)*4+M)*UNW(NTH3+(I-1)*4+M,1)
107801      W(NTH3+(I-1)*4+M,2)=OMG(NTH3+(I-1)*4+M)*UNW(NTH3+(I-1)*4+M,2)
107802      W(NTH3+(I-1)*4+M,3)=OMG(NTH3+(I-1)*4+M)*UNW(NTH3+(I-1)*4+M,3)
107803 440  CONTINUE
107811 *
107900 ***** 渦要素の誘起速度
108000 *
108050      DO 520 I=NVDISK+1,NV
108060      DXDT(I,1)=0.0
108070      DXDT(I,2)=0.0
108080      DXDT(I,3)=0.0
108090      DWDT(I,1)=0.0
108100      DWDT(I,2)=0.0
108110      DWDT(I,3)=0.0
108120 520  CONTINUE
108125 *
108127      DO 525 I=NVDISK+1,NV
108128      OMG(I)=SQRT(W(I,1)**2+W(I,2)**2+W(I,3)**2)
108129      UNW(I,1)=W(I,1)/OMG(I)
108130      UNW(I,2)=W(I,2)/OMG(I)
108131      UNW(I,3)=W(I,3)/OMG(I)
108132 525  CONTINUE
108140      DO 530 I=NVDISK+1,NV
108145      DO 540 J=1,NV
108150      RIJ(J,1)=Y(I,1)-Y(J,1)
108160      RIJ(J,2)=Y(I,2)-Y(J,2)
108170      RIJ(J,3)=Y(I,3)-Y(J,3)
108180      RIJLS(J)=RIJ(J,1)**2+RIJ(J,2)**2+RIJ(J,3)**2
108190      RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIGCST(J)**2)
108200 540  CONTINUE
108210 *
108225      DO 550 J=1,NV
108230      FFF(J)=GAM(J)*DL(J)/(4.0*PI*RKS(J)**3)
108240      GGG(J)=-3.0*GAM(J)*DL(J)/(4.0*PI*RKS(J)**5)
108250 550  CONTINUE
108260 *
108275      DO 560 J=1,NV
108280      DX(J,1)=FFF(J)
108290      &      *(UNW(J,2)*RIJ(J,3)-UNW(J,3)*RIJ(J,2))
108300      DX(J,2)=FFF(J)
108310      &      *(UNW(J,3)*RIJ(J,1)-UNW(J,1)*RIJ(J,3))
108320      DX(J,3)=FFF(J)
108330      &      *(UNW(J,1)*RIJ(J,2)-UNW(J,2)*RIJ(J,1))
108340      DW(J,1)=GGG(J)*
108350      &      (W(I,1)*RIJ(J,1)
108360      &      +W(I,2)*RIJ(J,2)
108370      &      +W(I,3)*RIJ(J,3))
108380      &      *(UNW(J,2)*RIJ(J,3)-UNW(J,3)*RIJ(J,2))
108390      &      -FFF(J)*(W(I,2)*UNW(J,3)-W(I,3)*UNW(J,2))
108400      DW(J,2)=GGG(J)*
108410      &      (W(I,1)*RIJ(J,1)
108420      &      +W(I,2)*RIJ(J,2)
108430      &      +W(I,3)*RIJ(J,3))
108440      &      *(UNW(J,3)*RIJ(J,1)-UNW(J,1)*RIJ(J,3))
108450      &      -FFF(J)*(W(I,3)*UNW(J,1)-W(I,1)*UNW(J,3))
108460      DW(J,3)=GGG(J)*
108470      &      (W(I,1)*RIJ(J,1)
108480      &      +W(I,2)*RIJ(J,2)
108490      &      +W(I,3)*RIJ(J,3))
108500      &      *(UNW(J,1)*RIJ(J,2)-UNW(J,2)*RIJ(J,1))
108510      &      -FFF(J)*(W(I,1)*UNW(J,2)-W(I,2)*UNW(J,1))
108520 560  CONTINUE
108530 *
108545      DO 570 J=1,NV
108550      DXDT(I,1)=DXDT(I,1)+DX(J,1)
108560      DXDT(I,2)=DXDT(I,2)+DX(J,2)
108570      DXDT(I,3)=DXDT(I,3)+DX(J,3)
108580      DWDT(I,1)=DWDT(I,1)+DW(J,1)
108590      DWDT(I,2)=DWDT(I,2)+DW(J,2)
108600      DWDT(I,3)=DWDT(I,3)+DW(J,3)
108610 570  CONTINUE
108620 530  CONTINUE
108630 *
108645      DO 580 I=NVDISK+1,NV
108650      Y(I,1)=Y(I,1)+(DXDT(I,1)+UINF(1))*DT
108651      Y(I,2)=Y(I,2)+(DXDT(I,2)+UINF(2))*DT
108652      Y(I,3)=Y(I,3)+(DXDT(I,3)+UINF(3))*DT
108680      W(I,1)=W(I,1)+DWDT(I,1)*DT
108690      W(I,2)=W(I,2)+DWDT(I,2)*DT
108700      W(I,3)=W(I,3)+DWDT(I,3)*DT
108710 580  CONTINUE
108821      DO 590 I=NVDISK+1,NV
108822      OMG(I)=SQRT(W(I,1)**2+W(I,2)**2+W(I,3)**2)
108823      UNW(I,1)=W(I,1)/OMG(I)
108824      UNW(I,2)=W(I,2)/OMG(I)
108825      UNW(I,3)=W(I,3)/OMG(I)
108826      SIG(I)=SQRT(GAM(I)/(PI*OMG(I)))
108827      SIG(I)=SIG(I)+0.5*C**2*NU*DT/SIG(I)
108828      DL(I)=DV(I)/(PI*SIG(I)**2)
108829      OMG(I)=GAM(I)/(PI*SIG(I)**2)
108830 590  CONTINUE
108831 *

```



```

108832      DO 605 I=NVDISK+1,NV
108833      IF (OMG(I).GT.OMGO(I)*OMGLIM) THEN
108834      OMGO(I)=OMGO(I)*OMGLIM
108835      END IF
108836      605 CONTINUE
108837      DO 600 I=NVDISK+1,NV
108838      SIG(I)=SQRT(GAM(I)/(PI*OMG(I)))
108839      DL(I)=DV(I)/(PI*SIG(I)**2)
108841      W(I,1)=OMG(I)*UNW(I,1)
108842      W(I,2)=OMG(I)*UNW(I,2)
108843      W(I,3)=OMG(I)*UNW(I,3)
108844      600 CONTINUE
108845      *
108848      ***** 渦要素の分割
108850      N=0
108870      *
108885      DO 610 I=NVDISK+1,NV
108890      *
108900      IF (DL(I)/DLO(I).GE.2.0) THEN
108910      N=N+1
108940      DL(I)=DL(I)*0.5
108950      DV(I)=DV(I)*0.5
108955      SIGCST(I)=SIGCST(I)*0.5**(1./3.)
108960      DL(NV+N)=DL(I)
108970      DV(NV+N)=DV(I)
108980      GAM(NV+N)=GAM(I)
108990      *
109000      NUM(NV+N)=NUM(I)
109005      SIG(NV+N)=SIG(I)
109005      SIGCST(NV+N)=SIGCST(I)
109010      OMGO(NV+N)=OMGO(I)
109015      DLO(NV+N)=DLO(I)
109020      Y(NV+N,1)=Y(I,1)+DL(I)*0.5*UNW(I,1)
109030      Y(NV+N,2)=Y(I,2)+DL(I)*0.5*UNW(I,2)
109040      Y(NV+N,3)=Y(I,3)+DL(I)*0.5*UNW(I,3)
109050      W(NV+N,1)=W(I,1)
109060      W(NV+N,2)=W(I,2)
109070      W(NV+N,3)=W(I,3)
109080      Y(I,1)=Y(I,1)-DL(I)*0.5*UNW(I,1)
109090      Y(I,2)=Y(I,2)-DL(I)*0.5*UNW(I,2)
109100      Y(I,3)=Y(I,3)-DL(I)*0.5*UNW(I,3)
109110      END IF
109120      610 CONTINUE
109130      *
109140      NV=NV+N
109150      *
109166      DO 620 I=1,NV
109170      OMG(I)=SQRT(W(I,1)**2+W(I,2)**2+W(I,3)**2)
109180      UNW(I,1)=W(I,1)/OMG(I)
109190      UNW(I,2)=W(I,2)/OMG(I)
109200      UNW(I,3)=W(I,3)/OMG(I)
109210      P1(I,1)=Y(I,1)-DL(I)*UNW(I,1)*0.5
109220      P1(I,2)=Y(I,2)-DL(I)*UNW(I,2)*0.5
109230      P1(I,3)=Y(I,3)-DL(I)*UNW(I,3)*0.5
109240      P2(I,1)=Y(I,1)+DL(I)*UNW(I,1)*0.5
109250      P2(I,2)=Y(I,2)+DL(I)*UNW(I,2)*0.5
109260      P2(I,3)=Y(I,3)+DL(I)*UNW(I,3)*0.5
109270      620 CONTINUE
109280      *
109285      DO 625 I=NVDISK+1,NV
109286      P1DASH(I,2)=P1(I,2)
109287      P1DASH(I,3)=P1(I,3)*CSDASH-P1(I,1)*SNDASH
109288      P1DASH(I,1)=P1(I,3)*SNDASH+P1(I,1)*CSDASH
109289      P2DASH(I,2)=P2(I,2)
109290      P2DASH(I,3)=P2(I,3)*CSDASH-P2(I,1)*SNDASH
109291      P2DASH(I,1)=P2(I,3)*SNDASH+P2(I,1)*CSDASH
109292      P1DASHR(I)=SQRT(P1DASH(I,2)**2+P1DASH(I,3)**2)
109293      P2DASHR(I)=SQRT(P2DASH(I,2)**2+P2DASH(I,3)**2)
109294      625 CONTINUE
109295      ** 逆流VORTONの消去
109330      N=0
109380      DO 630 I=NVDISK+1,NV
109490      IF ((P1DASH(I,1).LE.0.0).AND.(P1DASHR(I).LE.RDISK))
109495      & .OR.((P2DASH(I,1).LE.0.0).AND.(P2DASHR(I).LE.RDISK))
109500      & .OR.(Y(I,1).GT.10.*RDISK)) THEN
109580      N=N+1
109590      IELIM(N)=I
109600      END IF
109610      630 CONTINUE
109620      IELIM(N+1)=NV+1
109625      DO 640 J=1,N
109626      DO 650 I=IELIM(J)+1,IELIM(J+1)
109627      SIGCST(I-J)=SIGCST(I)
109628      DL(I-J)=DL(I)
109629      DV(I-J)=DV(I)
109630      GAM(I-J)=GAM(I)
109631      *
109632      NUM(I-J)=NUM(I)
109633      SIG(I-J)=SIG(I)
109634      DLO(I-J)=DLO(I)
109635      OMGO(I-J)=OMGO(I)
109636      Y(I-J,1)=Y(I,1)
109637      Y(I-J,2)=Y(I,2)
109638      Y(I-J,3)=Y(I,3)
109639      W(I-J,1)=W(I,1)
109640      W(I-J,2)=W(I,2)
109641      W(I-J,3)=W(I,3)
109642      P1(I-J,1)=P1(I,1)
109643      P1(I-J,2)=P1(I,2)
109644      P1(I-J,3)=P1(I,3)
109645      P2(I-J,1)=P2(I,1)
109646      P2(I-J,2)=P2(I,2)
109647      P2(I-J,3)=P2(I,3)
109648      OMG(I-J)=OMG(I)
109649      UNW(I-J,1)=UNW(I,1)
109650      UNW(I-J,2)=UNW(I,2)
109651      UNW(I-J,3)=UNW(I,3)
109652      650 CONTINUE
109653      640 CONTINUE
109654      NV=NV-N
109655      *
109656      IF (NV.GE.MVOR-200) GO TO 2222
109657      WRITE(6,*) T,T2,NLOOP,NV
109659      *
109660      510 CONTINUE
109661      *
109662      WRITE(6,*) '>>>>',T,T2,NLOOP,NV
109663      *
109664      110 CONTINUE
109665      ***** 内LOOP終了
109666      *
109667      WRITE(11) NLOOP,NV,Y,W,SIG,DL
109668      WRITE(12) NLOOP,NV,Y,W,SIG,DL,SIGCST,DLO,OMGO
109669      REWIND(12)
109670      WRITE(13) NLOOP,NV,P1,P2
109671      100 CONTINUE
109672      ***** 外LOOP終了
109673      *
109674      2222 CONTINUE
109675      LASSOTO=T-1
109676      IF (T.EQ.NSOTO+1) THEN
109677      LASSOTO=T-1
109678      ELSE
109679      LASSOTO=T

```



```

109680      WRITE(6,*) LASSOTO,NLOOP,NV
109682      WRITE(11) NLOOP,NV,Y,W,SIG,DL
109684 C     WRITE(12) NLOOP,NV,Y,W,SIG,DL,SIGCST,DLO,OMGO
109685 C     REWIND(12)
109686      WRITE(13) NLOOP,NV,P1,P2
109687      ENDIF
109688 *
109689      IF (T2.EQ.NUCHI+1) THEN
109690          LASUCHI=T2-1
109691      ELSE
109692          LASUCHI=T2
109693      ENDIF
109694 *
109695      WRITE(10) NR,NTH,RDISK,PCORE,ALPHA,NVDISK,DT,KAPPA
109696      &      ,DELR,CORE,BETA,NSOTO,NUCHI,LASSOTO,LASUCHI,UINF
109697      &      ,NU,C,INTER,OMGLIM,AA,YC
109698 *
123100 *
123700      END

```

```

100000 *-----*
100100 *   D I S K 周辺の流れ
100110 *   SUBROUTINE PROGRAM
100150 *   初期条件設定
100200 *-----*
100210      SUBROUTINE SHOKIA
100215 *
100220      PARAMETER (IDIM=50)
100230      PARAMETER (IPAN=600,MVOR=20000)
100250      DIMENSION IP(IPAN),WK(IPAN)
100255      REAL TNORM(3),UINF(3),KAPPA,NU
100260      REAL R(0:IDIM),RC(IDIM)
100265      &      ,DISKY(0:IDIM,0:IDIM,3),TDISKY(0:IDIM,0:IDIM,3)
100266      &      ,DISKYC(IDIM,IDIM,3)
100270      &      ,YC(IPAN,3)
100280      &      ,L(MVOR,3)
100295      &      ,FFF(MVOR),RIJ(MVOR,3),DX(MVOR,3)
100296      &      ,RKS(MVOR),RIJLS(MVOR)
100297      &      ,GAMDISK(IPAN),A(IPAN,IPAN,3),AA(IPAN,IPAN),B(IPAN)
100298      &      ,AADUM(IPAN,IPAN)
100299      &      ,Y(MVOR,3),SIG(MVOR)
100300 *
100301      COMMON /PARAO1/ PI,KAPPA,PCORE,RDISK,ALPHA,NR,NTH,UINF
100302      &      ,DT,NSOTO,NUCHI,INTER,DELR,CORE,BETA,NU,C
100306      COMMON /PARAO2/ ALPH,NPAN,NTH3,NVDISK,TNORM
100307      COMMON /GAMMA1/ AA,YC,SIG,Y,L,GAMDISK
100308 *
100309 **   円周率
100310      PI=3.141593
100320 **   DISK円周方向分割数
100350      NTH=36
100360 **   DISK半径方向分割数
100400      NR=16
100410 **   PANNEL VORTON CORE RADIUS
100450      PCORE=0.05
100460 **   DISK半径
100500      RDISK=1.0
100510 **   ATTACK ANGLE
100550      ALPHA=60.0
100551 **   主流速度
100553      UINF(1)=1.0
100554      KAPPA=0.413099
100555 **   時間間隔
100556      DT=0.06
100557 **   OUTER LOOP
100558      NSOTO=5
100559 **   INNER LOOP
100560      NUCHI=15
100561 **   放出間隔
100562      INTER=4
100563 **   放出渦位置
100564      DELR=0.010*RDISK
100565 **   放出渦要素 CORE RADIUS
100566      CORE=0.20
100567 **   放出渦要素強さ調整係数
100568      BETA=1.00
100569 **   VISCOUS coefficient
100570      NU=15.12E-06
100571      C=0.0
100572 C     C=2.242

```



```

100573 *      ALPH=ALPHA/180.0*PI
100574      NPAN=NTH*NR
100600      NTH3=NTH*3
100650      NVDISK=NTH3+NTH*(NR-1)*4
100700      TNORM(1)=SIN(ALPH)
100710      TNORM(3)=COS(ALPH)
100720      SPANEL=RDISK**2*SIN(2*PI/NTH)/(2*NR)
100770 C      RPANEL=SQRT(SPANEL/PI)
100780 C      RPANEL=RDISK
100830
100850 *
100860 ***** パネルの設定
100900      DO 100 I=1,NR
101000          R(I)=RDISK*SQRT(REAL(I)/NR)
101100      100 CONTINUE
101200      DO 110 J=1,NR
101300          DO 120 I=0,NTH
101400              DISKY(I,J,1)=R(J)*COS(2*PI*REAL(I)/NTH)
101500              DISKY(I,J,2)=R(J)*SIN(2*PI*REAL(I)/NTH)
101600      120 CONTINUE
101700      110 CONTINUE
101800 *
101900      DO 130 J=1,NR
102000      DO 140 I=0,NTH
102100          TDISKY(I,J,1)=DISKY(I,J,1)*COS(ALPH)
102200          TDISKY(I,J,2)=DISKY(I,J,2)
102300          TDISKY(I,J,3)=-DISKY(I,J,1)*SIN(ALPH)
102400      140 CONTINUE
102500      130 CONTINUE
102800 *
103500      DO 200 M=1,3
103560      DO 200 J=1,1
103570      DO 200 I=1,NTH
103810          Y(3*(I-1)+1,M)=(TDISKY(I-1,J,M)+TDISKY(I-1,J-1,M))*0.5
103820          Y(3*(I-1)+2,M)=(TDISKY(I,J,M)+TDISKY(I-1,J,M))*0.5
103830          Y(3*(I-1)+3,M)=(TDISKY(I-1,J-1,M)+TDISKY(I,J,M))*0.5
103900 *
103910      L(3*(I-1)+1,M)=TDISKY(I-1,J,M)-TDISKY(I-1,J-1,M)
103920      L(3*(I-1)+2,M)=TDISKY(I,J,M)-TDISKY(I-1,J,M)
103930      L(3*(I-1)+3,M)=TDISKY(I-1,J-1,M)-TDISKY(I,J,M)
104080      200 CONTINUE
104100 *
104101      DO 210 M=1,3
104103      DO 210 J=2,NR
104104      DO 210 I=1,NTH
104105          N3IJ=NTH3+(NTH*(J-2)+(I-1))*4
104110          Y(N3IJ+1,M)=(TDISKY(I-1,J,M)+TDISKY(I-1,J-1,M))*0.5
104111          Y(N3IJ+2,M)=(TDISKY(I,J,M)+TDISKY(I-1,J,M))*0.5
104112          Y(N3IJ+3,M)=(TDISKY(I,J-1,M)+TDISKY(I,J,M))*0.5
104113          Y(N3IJ+4,M)=(TDISKY(I-1,J-1,M)+TDISKY(I,J-1,M))*0.5
104114 *
104115      L(N3IJ+1,M)=TDISKY(I-1,J,M)-TDISKY(I-1,J-1,M)
104116      L(N3IJ+2,M)=TDISKY(I,J,M)-TDISKY(I-1,J,M)
104117      L(N3IJ+3,M)=TDISKY(I,J-1,M)-TDISKY(I,J,M)
104118      L(N3IJ+4,M)=TDISKY(I-1,J-1,M)-TDISKY(I,J-1,M)
104119      210 CONTINUE
104120 *
104121      N3IJ=N3IJ+4
104122 *      WRITE(6,2004) N3IJ
104123 *2004      FORMAT(1H,' disk arrows:',I4)
104129 *
104150 ***** 標点の座標 : YC
104160      DO 300 I=1,NR
104200          RC(I)=(R(I-1)+(R(I-1)+2*R(I))*(R(I)-R(I-1))
104300                      / (3*(R(I-1)+R(I))))*COS(PI/NTH)
104350      300 CONTINUE
104400      DO 310 J=1,NR
104450      DO 310 I=1,NTH
104500          DISKYC(I,J,1)=RC(J)*COS(PI*REAL(2*I-1)/NTH)
104600          DISKYC(I,J,2)=RC(J)*SIN(PI*REAL(2*I-1)/NTH)
104700 *
104900          YC((J-1)*NTH+I,1)=DISKYC(I,J,1)*COS(ALPH)
104910          YC((J-1)*NTH+I,2)=DISKYC(I,J,2)
104920          YC((J-1)*NTH+I,3)=-DISKYC(I,J,1)*SIN(ALPH)
105000      310 CONTINUE
105100 *
105150      DO 400 I=1,N3IJ
105160          SIG(I)=PCORE*RPANEL
105170 *      LS(I)=SQRT(L(I,1)**2+L(I,2)**2+L(I,3)**2)
105180 *      UNL(I,1)=L(I,1)/LS(I)
105181 *      UNL(I,2)=L(I,2)/LS(I)
105182 *      UNL(I,3)=L(I,3)/LS(I)
105192      400 CONTINUE
105197 *
105201 ***** 行列Aの計算
105309      DO 500 K=1,NPAN
105310      DO 505 I=1,NTH
105311          DO 510 J=(I-1)*3+1,(I-1)*3+3
105321              RIJ(J,1)=YC(K,1)-Y(J,1)
105331              RIJ(J,2)=YC(K,2)-Y(J,2)
105341              RIJ(J,3)=YC(K,3)-Y(J,3)
105351              RIJLS(J)=RIJ(J,1)**2+RIJ(J,2)**2+RIJ(J,3)**2
105361              RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIG(J)**2)
105401              FFF(J)=1.0/(4.0*PI*RKS(J)**3)
105421      510 CONTINUE
105431 *
105446      DO 520 J=(I-1)*3+1,(I-1)*3+3
105451          DX(J,1)=FFF(J)
105461          &      *(L(J,2)*RIJ(J,3)-L(J,3)*RIJ(J,2))
105471          DX(J,2)=FFF(J)
105481          &      *(L(J,3)*RIJ(J,1)-L(J,1)*RIJ(J,3))
105491          DX(J,3)=FFF(J)
105501          &      *(L(J,1)*RIJ(J,2)-L(J,2)*RIJ(J,1))
105691      520 CONTINUE
105701 *
105716      DO 530 J=(I-1)*3+1,(I-1)*3+3
105722          A(K,I,1)=A(K,I,1)+DX(J,1)
105723          A(K,I,2)=A(K,I,2)+DX(J,2)
105724          A(K,I,3)=A(K,I,3)+DX(J,3)
105781      530 CONTINUE
105841      505 CONTINUE
105851 *
105852      DO 550 I=1,NPAN-NTH
105855      DO 560 J=NTH3+(I-1)*4+1,NTH3+(I-1)*4+4
105856          RIJ(J,1)=YC(K,1)-Y(J,1)
105857          RIJ(J,2)=YC(K,2)-Y(J,2)
105858          RIJ(J,3)=YC(K,3)-Y(J,3)
105859          RIJLS(J)=RIJ(J,1)**2+RIJ(J,2)**2+RIJ(J,3)**2
105860          RKS(J)=SQRT(RIJLS(J)+KAPPA*SIG(J)**2)
105862          FFF(J)=1.0/(4.0*PI*RKS(J)**3)
105863      560 CONTINUE
105864 *
105866      DO 570 J=NTH3+(I-1)*4+1,NTH3+(I-1)*4+4
105867          DX(J,1)=FFF(J)
105868          &      *(L(J,2)*RIJ(J,3)-L(J,3)*RIJ(J,2))
105869          DX(J,2)=FFF(J)
105870          &      *(L(J,3)*RIJ(J,1)-L(J,1)*RIJ(J,3))
105871          DX(J,3)=FFF(J)
105872          &      *(L(J,1)*RIJ(J,2)-L(J,2)*RIJ(J,1))
105873      570 CONTINUE
105874 *
105875      DO 580 J=NTH3+(I-1)*4+1,NTH3+(I-1)*4+4

```



```

105876      A(K,I+NTN,1)=A(K,I+NTN,1)+DX(J,1)
105877      A(K,I+NTN,2)=A(K,I+NTN,2)+DX(J,2)
105878      A(K,I+NTN,3)=A(K,I+NTN,3)+DX(J,3)
105881      580 CONTINUE
105882      550 CONTINUE
105883 *
105890      DO 590 J=1,NPAN
105891      AA(K,J)=A(K,J,1)*TNORM(1)+A(K,J,2)*TNORM(2)+A(K,J,3)*TNORM(3)
105892 *      WRITE(10,2005) K,J,(A(K,J,M),M=1,3),AA(K,J)
105893 *2005      FORMAT(1H,3X,I2,3X,I2,4(3X,E15.7))
105894      590 CONTINUE
105895      500 CONTINUE
105896 *
105897 ***** 初期Γの計算
105898      DO 600 I=1,NPAN
105899      B(I)=-(UINF(1)*TNORM(1)+UINF(2)*TNORM(2)+UINF(3)*TNORM(3))
105900      600 CONTINUE
105901      DO 610 I=1,NPAN
105902      DO 610 J=1,NPAN
105903      AADUM(I,J)=AA(I,J)
105906      610 CONTINUE
105907      CALL *SLF1H(AADUM,NPAN,IPAN,B,EPS,1,IP,WK,IER)
105908      DO 620 I=1,NPAN
105909      GAMDISK(I)=B(I)
105910      620 CONTINUE
105966 *      WRITE(6,1001)
105967 *1001      FORMAT(1H1,/,/, ' GAMMA(K)')
105968 *      DO 630 I=1,NPAN,4
105969 *      WRITE(6,1002) I,GAMDISK(I),GAMDISK(I+1)
105970 *      & ,GAMDISK(I+2),GAMDISK(I+3)
105971 * 630 CONTINUE
105972 *1002      FORMAT(1H, I4,4(3X,E15.7))
105973 *
107325      END

```







