



Title	非ニュートン流体の流動解析とその応用に関する研究
Author(s)	寒河江, 勝彦
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第4582号
Issue Date	1994-06-30
DOI	<a href="https://doi.org/10.11501/3076902">https://doi.org/10.11501/3076902</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/50119">https://hdl.handle.net/2115/50119</a>
Type	doctoral thesis
File Information	000000272980.pdf



非ニュートン流体の流動解析と  
その応用に関する研究

平成8年6月

尾河 正彦



①

非ニュートン流体の流動解析と  
その応用に関する研究

平成6年6月

寒河江 勝彦

目 次

第1章 緒 言 .....	1
1.1 研究の背景 .....	1
1.2 従来の研究 .....	2
1.2.1 非ニュートン流体の構成方程式 .....	2
1.2.2 非ニュートン流体の数値解法 .....	6
1.2.3 射出成形シミュレーション .....	7
1.3 本研究の目的 .....	13
1.4 本論文の構成 .....	14
第2章 非定常三次元の流動解析手法 .....	16
2.1 緒 言 .....	16
2.2 数値解法 .....	17
2.2.1 基礎方程式 .....	17
2.2.2 離散化 .....	20
2.2.2.1 時間に関する離散化 .....	20
2.2.2.2 圧力補正 .....	21
2.2.2.3 空間に関する離散化 .....	22
2.2.2.4 エネルギー式の解法 .....	24
2.2.3 安定性の検討 .....	25
2.2.4 擬似3次元セルの面接合モデル .....	28
2.3 解析結果 .....	32
2.3.1 平行平板間一様流 .....	32
2.3.2 圧力補正の計算結果 .....	32
2.3.3 二次元流れの解析例 .....	35
2.3.4 混合型解法の精度評価 .....	35
2.3.4.1 粘性係数が一定の場合 .....	35
2.3.4.2 粘性係数が変化する場合 .....	42
2.3.5 流跡積分法による解析結果 .....	46

2.4 結 言 .....	46
第3章 移動自由境界の解析手法 .....	50
3.1 結 言 .....	50
3.2 数値解法 .....	51
3.2.1 速度の計算 .....	51
3.2.2 自由表面の解法 .....	51
3.2.2.1 マーカー粒子法 .....	54
3.2.2.2 部分メッシュ生成法 .....	57
3.2.3 移動自由境界に伴う温度の内挿法 .....	57
3.2.4 ランナー解析手法 .....	59
3.2.4.1 計算モデルと基礎式 .....	61
3.2.4.2 解析手法と離散化 .....	65
3.2.4.3 擬似3次元解析との接続 .....	68
3.3 離散化誤差の検討 .....	70
3.4 計算例 .....	71
3.4.1 L型流路の計算例 .....	71
3.4.2 温度の移流計算 .....	76
3.4.3 ランナーの計算結果 .....	78
3.4.4 成形シミュレーションへの適用 .....	81
3.4.5 三次元計算の例 .....	85
3.5 結 言 .....	85
第4章 流動解析手法の実験による検証 .....	89
4.1 結 言 .....	89
4.2 検証結果と検討 .....	89
4.2.1 定常の流速分布の検証 .....	89
4.2.1.1 実験装置及び方法 .....	89
4.2.1.2 実験結果との比較 .....	91
4.2.2 移動自由境界の検証 .....	91

4.2.2.1 箱形流路を用いた検証 .....	91
4.2.2.2 実成形品を用いた検証 .....	95
4.3 結 言 .....	99
第5章 溶融樹脂中に混入した強化繊維の流動配向の解析 .....	103
5.1 結 言 .....	103
5.2 配向解析手法 .....	103
5.2.1 配向解析モデル .....	104
5.2.2 繊維配向の解析手法 .....	108
5.3 解析結果の検討 .....	109
5.3.1 解析誤差の検討 .....	109
5.3.2 正方形キャビティの解析 .....	112
5.3.3 偏心矩形キャビティの非定常解析 .....	115
5.4 結 言 .....	115
第6章 繊維配向の異方性を考慮した変形解析 .....	119
6.1 結 言 .....	119
6.2 そり変形要因 .....	119
6.3 数値解法 .....	120
6.3.1 基礎方程式 .....	121
6.3.2 キャビティ部の数値解法 .....	123
6.3.3 ランナー部の数値解法 .....	129
6.4 解析結果と検討 .....	131
6.4.1 理論解との比較 .....	131
6.4.2 ランナーとの組み合わせ .....	131
6.4.3 熱膨張率の異方性を考慮した熱変形 .....	135
6.4.4 実製品への適用 .....	137
6.5 結 言 .....	137
第7章 結 言 .....	140

7.1 結 論 .....	140
7.2 今後の課題 .....	142
謝 辞 .....	144
参考文献 .....	145
付 録 .....	150

主 な 記 号 ・ 略 号

A	: 速度勾配テンソル [s <sup>-1</sup> ]
a	: 変位ベクトル [m]
B	: 変位と歪みを結びつけるマトリックス [m <sup>-1</sup> ]
b	: ギャップの半幅
C <sub>0</sub>	: クーラン数 [-]
C <sub>p</sub>	: 比熱 [J/kgK]
D	: 剛性マトリックス [Pa]
E	: 縦弾性係数 (ヤング率) [Pa]
e	: 異方性のヤング率の比 (=E <sub>2</sub> /E <sub>1</sub> ) [-]
e <sub>ij</sub>	: 歪速度テンソル [s <sup>-1</sup> ]
F	: 外力 [Pa]
f	: 繊維の充填率 [-]
G	: 横弾性係数 [Pa]
G(t-t')	: 緩和関数
g <sup>1</sup> <sub>i</sub> , g <sup>2</sup> <sub>i</sub> , g <sup>3</sup> <sub>i</sub>	: RRK法で計算される中間値
k	: 熱伝導率 [W/(m·K)]
L	: 流路長 [m]
Δl <sub>ji</sub>	: 要素間の重心の距離 [m]
M(t-t')	: 記憶関数 (=∂G(t-t')/∂t')
n	: 指数則流体の指数 [-]
n <sub>j</sub>	: 単位法線方向ベクトル [m]
O <sub>ik</sub>	: 渦度テンソル [s <sup>-1</sup> ]
Pe	: ペクレ数 [-]
P	: 圧力 [Pa]
Q	: 流量 [m <sup>3</sup> /s]
q <sub>i</sub>	: 流速を z 方向に渡り積分した量 [m <sup>2</sup> /s]
Re	: レイノルズ数 [-]
S <sub>ji</sub>	: 要素間の断面積 [m <sup>2</sup> ]

$T$  : 温度 [K]  
 $t$  : 時間 [s]  
 $\Delta t$  : 時間ステップ [s]  
 $\Delta t^*$ ,  $\Delta t^{**}$  : 無次元時間ステップ (拡散数)  
 $u$  : 変位 [m]  
 $V_e$  : 要素体積 [m<sup>3</sup>]  
 $v_i$  : 速度ベクトル [m/s]  
 $w_i, w_j$  : 平均化の際の重み [-]  
 $x, y$  : 座標 [m]  
 $\Delta x$  : 要素の代表長さ [m]  
 $\alpha$  : 体膨張係数 [°C<sup>-1</sup>]  
 $\alpha_i, \beta_i$  : 歪みの回転成分 [-]  
 $\dot{\gamma}$  : 歪み速度 [s<sup>-1</sup>]  
 $\delta$  : 平板間の厚さ [m]  
 $\delta_{ij}$  : Kronecker の  $\delta$  記号  
 $\epsilon$  : 歪みテンソル [-]  
 $\eta$  : 粘度 [Pa·s]  
 $\eta_0$  : 粘度係数 [Pa·s<sup>n</sup>]  
 $\theta$  : 繊維の配向角 [°]  
 $\Delta\theta$  : 配向角変位 [°]  
 $\lambda_1$  : 緩和時間 [s]  
 $\lambda_2$  : 遅延時間 [s]  
 $\mu$  : 粘度 (ニュートン流体) [Pa·s]  
 $\mu$  : 等価ニュートン粘度 [Pa·s]  
 $\nu$  : ポアソン比 [-]  
 $\rho$  : 密度 [kg/m<sup>3</sup>]  
 $\sigma_i$  : 平均配向角からの分散 [-]  
 $\sigma_{ij}$  : 応力テンソル [Pa]  
 $\tau$  : 剪断応力 [Pa]  
 $\phi$  : 1 次の内挿関数

$\Pi$  : 歪速度テンソルの第 2 不変量 [s<sup>-1</sup>]

#### 添 字

$e$  : 要素内で一定値を取ることを表わす  
 $i$  : 初期値を示す  
 $i, j$  : テンソル量を表す  
 $, j$  : 偏微分を表す  
 $L, N$  : 各々線形項、非線形項を示す  
 $m, m+1$  : 各々時刻  $m, m+1$  ステップを示す  
 $D/Dt$  : 実質微分を表す  
 $\delta/\delta t$  : Oldroyd の対流微分を表す  
 $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$  : Jaumann 微分を表わす  
 $-$  : 平均を表す  
 $*$  : 増分 (修正子) を表わす  
 $\sim, \wedge$  : 中間値 (予測子) を表わす  
 $'$  :  $\eta$  を座標系基準を表わす  
 $[ ]$  : マトリックスを表す

## 1.1 研究の背景

非ニュートン流体は、水、空気等の一般のニュートン流体の流れと著しく異なる非線形なレオロジー的流動挙動を示す。非ニュートン流体を用いる工業分野には、溶融樹脂を用いた射出成形や化学プラント等がある。特に射出成形の分野では、高分子材料の進歩により従来の欠点であった強度や寸法精度が大幅に改善され、元々プラスチック成形品の持つ軽量・成形性の良さという特徴と相まって、家電・情報通信機器、自動車、玩具など適用分野が飛躍的に増大してきている。この種の流れの熱流動的特性を正確に把握し、さらに、高精度で予測することは、工業分野における製品の信頼性・生産性向上、開発期間の短縮、及びコストの低減の上で極めて有意義なことである。

この様な非ニュートン流体の流れを数値シミュレーションで解析する場合、非ニュートン流体の非線形なレオロジー的挙動のために、従来のニュートン流体の解法をそのまま適用することは出来ない。非ニュートン流体の非線形なレオロジー的挙動を記述する構成方程式には、指数則型、Maxwell型、Oldroyd型、積分型等の各種モデルが提案されており、各々を対象とした数値解析の研究<sup>(1)~(4)</sup>が報告されている。その多くは対象が2次元の定常解析である。非定常解析に対しては、Newton-Raphson法等の収束解法が用いられ、陽的な手法は見当らない。通常、陰解法はタイムステップが大きくとれ非定常解析に有利とされている。しかし、非ニュートン流体は強い非線形性を持つため、解析精度を考えれば陽解法と同様にタイムステップは制約される。また、成形シミュレーションに適用する場合には、複雑な計算対象のため計算容量の増大が免れない。従って、陰解法が陽解法に対して必ずしも有利とは言えない。非圧縮性のニュートン流体に対しては、準陰的な手法であるMAC (Marker And Cell) 法<sup>(5)</sup>等の広義のFractional Step 法<sup>(6)</sup>が主流になりつつあるが、非ニュートン流体への適用例はない。また、工学的応用分野として重要な成形シミュレーションを対象とした擬似三次元解析手法としては、工業的に良く用いられ、物性データ数も多い指数則流体を対象としたHieber & Shen<sup>(7)</sup>の薄肉平板流れ(Hele-Shaw 流れ)に対する有限要素法による解析が代表的である。この手法は、対象が高粘性であることから加速度項を無視して、定常状態における圧力のPoisson 方程式を解く手法であり、射出成形シミュレーション手法として広く用いられている。しかし、この手法は定常の薄

肉流れに限定され、Hele-Shaw 近似が成立しない狭路や肉厚部等に対しては圧力損失を過小評価することになる。以上のことから、工業製品特に射出成形品の合理的設計や信頼性・生産性の向上を図る上で、溶融樹脂に代表される非ニュートン流体の流れの解析技術の開発が強く望まれている。

## 1.2 従来の研究

本節では、非ニュートン流体特有の非線形なレオロジー的挙動を記述する構成方程式の特徴と、従来の非ニュートン流体の数値解析手法の研究状況を示すと共に、工学的な応用分野として主対象としている射出成形の数値解析手法について、その現状と問題点を摘出し、合わせて本研究の意義と方針を明確にする。

### 1.2.1 非ニュートン流体の構成方程式<sup>(8)</sup>

ニュートンの粘性法則に従わない流体を総称して非ニュートン流体と呼ぶが、その定義から明らかな様にニュートン流体との違いは応力を記述する構成方程式にある。非ニュートン流体の解析に当たっては構成方程式の選択（すなわち粘弾性的挙動のモデル化）が重要な問題となる。以下に、提案されている各構成方程式について記す。

#### (1) 純粘性流体

純粘性流体は弾性的挙動を示さず、応力が歪み速度のみの関数となる流体の総称である。当然ながら、ニュートン流体はここに含まれ、その構成方程式は次式で示される。

$$\tau = -\mu \dot{\gamma} \quad \dots \dots \dots (1.1)$$

ニュートン流体の粘度  $\mu(T)$  を  $\eta(T, \dot{\gamma})$  に置き換えたものが、一般化ニュートン流体と呼ばれる流体で、 $\eta(T, \dot{\gamma})$  の関数形により種々のモデルがある。この種のモデルは基本的に弾性的挙動が記述できないため、射出成形で用いる溶融樹脂の場合は近似モデルとなる。また、メルトフロント部の伸張流動の解析に必要な法線応力効果、緩和現象も記述できない。この様に限界は多いが、そのシンプルさゆえ工業的に広く用いられており、公開樹脂データの大部分がこの形で整理されている。各種モデルを以下に列記する。

#### a. 指数則モデル(Ostwald and de Waele) :

$$\eta = \eta_0 \dot{\gamma}^{n-1} \quad \dots \dots \dots (1.2)$$

#### b. 指数則モデル(Spriggs) :

$$\eta = \begin{cases} \eta_0 & , \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \\ \eta_0 (\dot{\gamma} / \dot{\gamma}_0)^{n-1} & , \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots (1.3)$$

#### c. Eyringモデル：希薄溶液

$$\eta = t_0 \tau_0 (\sinh^{-1} t_0 \dot{\gamma} / t_0 \dot{\gamma}) \quad \dots \dots \dots (1.4)$$

#### d. Carreau モデル :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2} \quad \dots \dots \dots (1.5)$$

ただし、 $\eta_0$  : zero shear rate 粘度

$\eta_\infty$  : infinite shear rate 粘度

#### e. Ellis モデル :

$$\eta_0 / \eta = 1 + (\tau / \tau_{1/2})^{\alpha-1} \quad \dots \dots \dots (1.6)$$

### (2) 一般化線形粘弾性モデル

粘弾性的挙動を粘性と弾性の線形結合で記述しようとしたモデルで、古典的には力学のアナロジーから粘性要素をダッシュポット、弾性要素をスプリングに置き換えた力学モデルで記述する。図1-1に粘弾性体の力学モデルを示す。力学モデルで最も簡単なものは、ダッシュポットとスプリングを直列に接続した Maxwellモデルや並列に接続した Voigtモデルであり、これらの組合せで種々のモデルが考えられる。Maxwellモデルの一般形は次式で表される。

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = -\eta_0 \dot{\gamma}_{ij} \quad \dots \dots \dots (1.7)$$

$\lambda_1$  は緩和時間である。剪断応力テンソルは他に変形速度テンソルを用いた表記もあるが、本報ではこれ以降  $\tau_{ij}$  vs  $\dot{\gamma}_{ij}$  の関係に基づいた表記で説明していく。Maxwellモデルに粘性要素を1つ追加したものが、Jeffreysの線形モデルと言われ、

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = -\eta_0 \left( \dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right) \quad \dots \dots \dots (1.8)$$

で示される。 $\lambda_2$  は遅延時間と呼ばれる。また、図1-1(c)に示した一般化 Maxwellモデルは次式で表すことができる。

$$\tau_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\partial^n \tau_{ij}}{\partial t^n} = -\eta_0 \dot{\gamma}_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \frac{\partial^n \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t^n} \quad \dots \dots (1.9)$$

ただし、 $\tau_{ij} = \sum \tau_{ij}^{(k)}$ 、 $\dot{\gamma}_{ij} = \sum \dot{\gamma}_{ij}^{(k)}$  である。(1.7) ~ (1.9) 式は積分形にするると全て同一の表記ができ、歪み速度テンソル  $\dot{\gamma}_{ij}$ 、歪みテンソル  $\gamma_{ij}$  を用いて、以下のよう書ける。

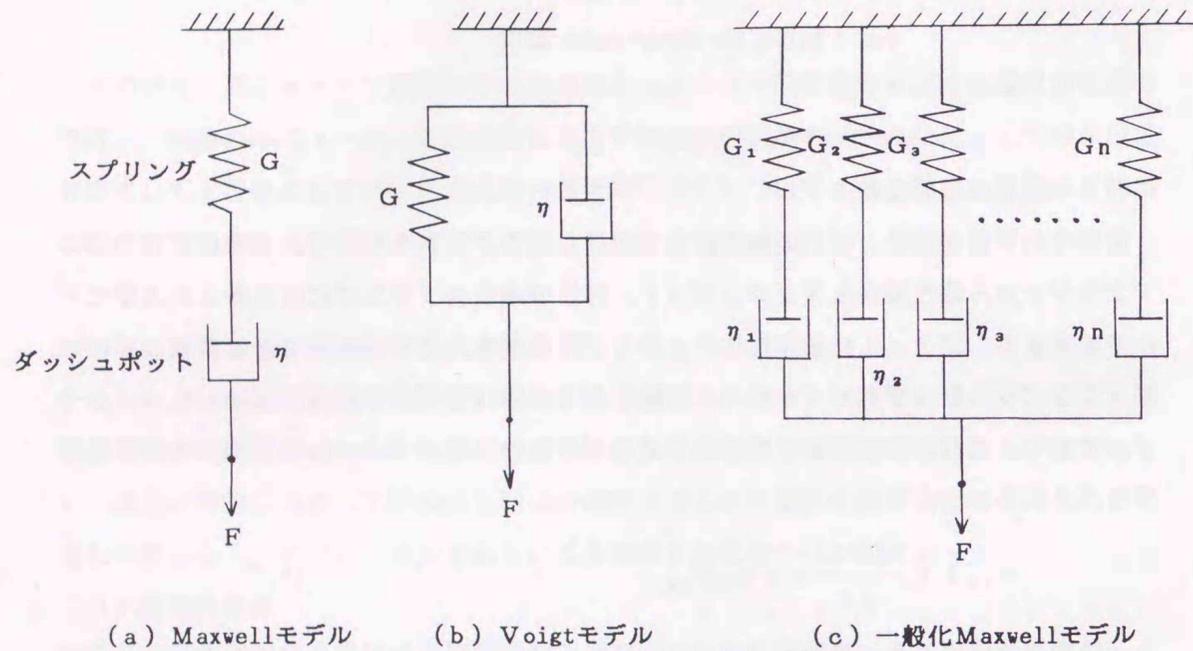


図1-1 粘弾性体の力学モデル

$$\tau_{ij} = - \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}_{ij}(t') dt' \quad \dots \dots \dots (1.10)$$

$$\tau_{ij} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \gamma_{ij}(t') dt' \quad \dots \dots \dots (1.11)$$

ここで、 $G(t-t')$ 、 $M(t-t')$ は各々緩和関数、記憶関数である。(1.10)式は線形領域での非圧縮性の粘弾性流体のレオロジー的挙動を記述する正確な基礎式とみなせ、剪断流、伸張流等の解析に有用である。しかし、2次効果である法線応力は記述できず、基本的には小変形の解析に限定される。また、(1.10)式はさらに一般的な積分型構成方程式の第1項(一重積分項)の近似モデルとすることができる。

(3) 準線形共回転モデル

一般化線形粘弾性モデルをさらに一般化する。外的作用に対する物体のレオロジー的応答はその物体固有のものであるから、その構成方程式は座標系によらず同形である必要があり、テンソル方程式でなければならない。次に、構成方程式を誘導するのに適した座標系を考えると、構成方程式は応力と変形の関係であるから、物体と共に変形するような対流座標系が最も自然であろう。この様な座標系で表した構成方程式を、流れの問題や実測結果との比較という観点において非常に有利な空間系の座標に変換したものが準線形共回転(quasi-linear corotational)モデルと呼ばれている。すなわち、対流系でのテンソル量の実質微分を空間系に変換したモデルで、変換の仕方により Oldroydの提唱した対流微分や Jaumann微分がある。

(a) Oldroyd 対流微分 : 
$$\frac{\delta A_{ij}}{\delta t} = \frac{D A_{ij}}{D t} + A_{ik} v_{k,j} + A_{kj} v_{k,i} \quad \dots \dots \dots (1.12)$$

(b) Jaumann 微分 : 
$$\frac{D A_{ij}}{D t} = \frac{D A_{ij}}{D t} + \frac{1}{2} (O_{ik} A_{kj} - A_{ik} O_{kj}) \quad \dots \dots \dots (1.13)$$

ただし、 $O_{ik} = v_{k,i} - v_{i,k}$  : 渦度テンソル

また、(1.12)、(1.13)式には次式の関係がある。

$$\frac{\delta A_{ij}}{\delta t} = \frac{D A_{ij}}{D t} - \frac{1}{2} (A_{ik} \dot{\gamma}_{kj} + A_{jk} \dot{\gamma}_{ki}) \quad \dots \dots \dots (1.14)$$

これらのモデルとして共回転 Maxwellモデル、共回転Jeffreysモデル等がある。

(4) 非線形共回転モデル

基本的な考え方は準線形共回転モデルと同じで、非線形性を考慮している。その代表的なものが Oldroydの8定数モデルである。Oldroydは一般化Jeffreysモデルを出発点として、 $\tau_{ij}$ 、 $\dot{\gamma}_{ij}$ の生成する可能性のある項を全て付加して次の様なモデルを提案した。<sup>(9)</sup>

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} + \mu_0 \tau_{kk} \dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{2} \mu_1 (\tau_{ik} \dot{\gamma}_{kj} + \tau_{jk} \dot{\gamma}_{ki}) + \frac{1}{2} \nu_1 \tau_{kl} \dot{\gamma}_{lk} \delta_{ij} \\ = -\eta_0 [\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{D\dot{\gamma}_{ij}}{Dt} - \mu_2 \dot{\gamma}_{ik} \dot{\gamma}_{kj} + \frac{1}{2} \nu_2 \dot{\gamma}_{kl} \dot{\gamma}_{lk} \delta_{ij}] \quad \dots (1.15)$$

(1.15)式は定数が多く、その値の決定が困難であるため、定数の数を減らしたOldroydの3定数や4定数モデルがある。例えばOldroydの3定数モデルでは、 $\mu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0$ 、 $\mu_1 = \lambda_1$ 、 $\mu_2 = \lambda_2$ と置いて次式を得る。

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \left[ \frac{D\tau_{ij}}{Dt} - \frac{1}{2} (\tau_{ik} \dot{\gamma}_{kj} + \tau_{jk} \dot{\gamma}_{ki}) \right] \\ = -\eta_0 [\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \left\{ \frac{D\dot{\gamma}_{ij}}{Dt} - \dot{\gamma}_{ik} \dot{\gamma}_{kj} \right\}] \quad \dots (1.16)$$

(1.14)式の関係を考えれば、この式はJeffreysモデルにおいて $\partial/\partial t \rightarrow \delta/\delta t$ に変換したものに他ならない。この形のモデルには、他に2次流体モデル(Coleman-Nollモデル)があり、これはRivlin-Ericksonモデルの係数項を物質定数で置き換えたもので次式で表せる。

$$\tau_{ij} = 2\eta_0 \dot{\gamma}_{ij} + 4\beta \dot{\gamma}_{ik} \dot{\gamma}_{kj} + 2\gamma \frac{\delta \dot{\gamma}_{ij}}{\delta t} \quad \dots (1.17)$$

この形のモデルにはさらに多くのモデルがあるが、最も一般化された式は次の様な積分形で表せる。

$$\tau_{ij} = - \int G_1(t-t') \dot{\Gamma}' dt' \\ - 0.5 \int \int G_2(t-t', t-t'') \{ \dot{\Gamma}' \dot{\Gamma}'' + \dot{\Gamma}'' \dot{\Gamma}' \} dt'' dt' \\ - 0.5 \int \int \int [2G_3(t-t', t-t'', t-t''')] (\dot{\Gamma}' : \dot{\Gamma}''') \dot{\Gamma}'''' \\ + G_4(t-t', t-t'', t-t''') \{ \dot{\Gamma}' \dot{\Gamma}'' \dot{\Gamma}'''' + \dot{\Gamma}'''' \dot{\Gamma}' \dot{\Gamma}'' \} dt'''' dt'' dt' \\ - \dots \dots \dots (1.18)$$

(1.18)式は多重積分形で、 $(\dot{\Gamma}' : \dot{\Gamma}''') = \dot{\Gamma}'_{ij} \dot{\Gamma}'''_{ji}$ 、 $\dot{\Gamma}' \equiv \dot{\Gamma}(t, t')$ は時刻tで受けた変形速度テンソルを示す。また、(1.10)式を非線形化したものがLodgeの網目モデルである。

以上述べたモデルの他に変形速度テンソルを用いたK-BKZモデル等異なった観点から多くのモデルが提案されているが、どのモデルが適当かの一般的な見解は得られていない。従って、数値解析の難易、解析対象、注目する現象等によって選択する必要がある。

### 1.2.2 非ニュートン流体の数値解法

非ニュートン流体の数値解析の現状を表1-1に示す。表1-1は1975~1986の期間に

渡り、JICST理工学文献ファイルの関係項目について調べ抜き出したものを、使用している構成方程式毎に分類整理したものである。

使用している構成方程式は微分型のモデルがほとんどで、積分型のモデルは少ない。また、指数則、Maxwell型、Oldroyd型の3種が多勢を占め、特にMaxwell型が多い。この理由は研究段階では粘弾性モデルに興味の中心が移ってきており、Maxwell型は粘弾性モデルの中では最も簡単なもので、比較的取り扱い易いことによると思われる。Maxwell型にはこの表以外にも差分で解いているものはいくつかある。

基礎式は圧縮性を考慮したものは皆無で、非圧縮の2次元定常問題に関するものが大部分である。指数則流体を除いてはエネルギー式を考慮している解析はなく、流動のみが取り扱われている。Hele-Shaw型を用いた解析もいくつか散見される。

解法はFEMと差分に大別され、FEMの定式化にはGalerkin法が使われている。FEMを用いた解析の中ではペナルティ法を用いた解析<sup>(15)</sup>、混合型の解法<sup>(1)</sup>が注目される。興味のある点として、Oldroyd型の構成方程式を使用した解析の中にはFEMの解析例がない。この理由は明らかではないが、定式化の難易、計算時間等の理由によると思われる。他にHele-Shaw型の基礎式について、FEMと境界要素法(BEM)で解いてその結果を比較した例<sup>(24)</sup>があり、簡易型の解法という点から注目すべきことである。また、非定常問題の解法に関しては、Newton-Raphson法やSOR(Successive Over Relaxiation)法のような収束解法を用いた陰解法が用いられており、陽解法を用いた例はない。

解析対象は平板内の流れが主で急縮小、急拡大、噴流といった非ニュートン流体とニュートン流体との流れの差が、明瞭になる流れ場を対象としているものが多い。なお、この中で移動境界を取り扱っているのは、E.Broyer, et.al.<sup>(10)</sup>とC.A.Hieber, et.al.<sup>(7)</sup>の2編のみである。

### 1.2.3 射出成形シミュレーション

射出成形シミュレーションについて述べる前に、本研究が対象としている射出成形についてその概要および現状について概説する。

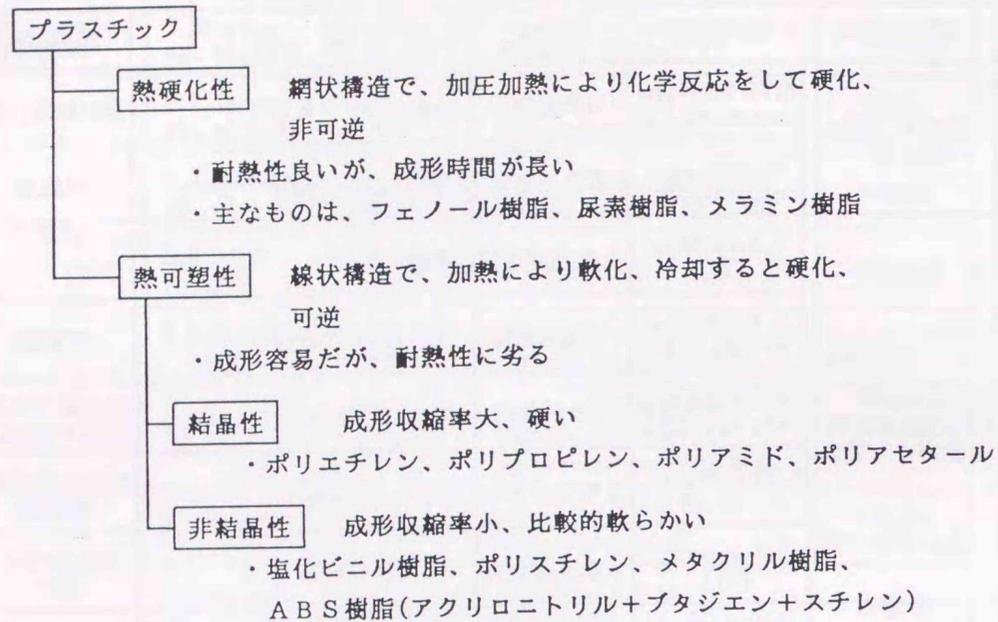
射出成形で用いられるプラスチックは周知の様に有機高分子化合物を主体とし、通常、常温では固体であるが、それに到る途中に熱・圧力等の作用で流動化し、自由に成形できる一群の材料の総称と定義づけられている。すなわち、有機高分子化合物で自由に成形できる材料と考えれば良い。プラスチックの種類は図1-2の様に、その硬化特性の違いに

表1-1 非ニュートン流体の数値解法 (その1)

構成方程式	参考文献	基礎式	解法	解析対象
等価ニュートン 粘度の導入	E.Broyer, et. al.[10]	Hele-Shaw型 (2次元定常)	FAN法( Flow Analysis Network Method )	平板流
指数則	R.I.Tanner, et. al.[13]	2次元定常	Galerkin/FEM, Newton-Raphson法	平板流, 急拡大平板流
	C.A.Hieber, et. al.[7]	Hele-Shaw型 非定常熱伝導	ギャップ方向,時間は差分 空間は, Galerkin/FEM	平板流
	B.P.Huynh, [14]	2次元定常 非等温	Galerkin/FEM	平板噴流
	V.D.Murty, [15]	2次元定常 非等温	Galerkin/ペナルティ-FEM Newton法 or Picard法	Uチャンネル 内の流れ
Maxwell型	M.Kawahara, et. al.[1]	2次元非定常	Galerkin/混合FEM, 摂動法(非定常流), Newton-Raphson法(定常流)	平板流, 急拡大平板流
	M.J.Crochet, et. al.[17]	2次元定常	Galerkin/FEM, Newton-Raphson法	平板流, 軸対称管内流
	M.F.Malone, et. al.[18]	2次元定常	Galerkin/FEM, 応力は近似	平板流
	金 信行,[19]	2次元定常	風上差分	平板流
	C.J.Coleman, [20],[21]	2次元定常 Poiseuille流	Galerkin/FEM, Newton-Raphson法	平板噴流
	M.A.Mendelson, et. al.[22]	2次元定常	Galerkin/FEM, Newton-Raphson法	急収縮平板流
	P.W.Yeh, et. al.[2]	Hele-Shaw型	Galerkin/FEM, Newton-Raphson法	急収縮平板流
	M.B.Bush, et. al.[24]	Hele-Shaw型 + $\alpha$	FEM, BEM	平板噴流

表1-1 非ニュートン流体の数値解法 (その2)

構成方程式	参考文献	基礎式	解法	解析対象
Maxwell型 (積分形)	M.Viriyayutha- korn,et.al.[25]	2次元定常	Galerkin/FEM	急収縮管内流
	H.Court, et. al.[26]	2次元定常	差分,応力は近似	平板流
Oldroyd型 (3定数, 4定数)	T.B.Gatski, [27]	1次元非定常	差分	-
	A.R.Davies, et. al. [28]	2次元定常	差分,応力は近似	平板流
	M.G.N.Perera, et. al. [29]	2次元定常	差分, SOR法	急収縮平板流 急拡大平板流
	R.K.Bhatnager, et. al.[3]	2次元非定常	差分, SOR法	急収縮流路の 移動壁
2次流体モデル	P.Townsend, [31]	2次元非定常	差分, SOR法	円柱回りの 流れ
	堀川ら [32]	2次元定常	差分	二重円管内流
	M.A.Mendelson, et. al.[22]	2次元定常	Galerkin/FEM, Newton法	急収縮平板流
White-Metzner モデル	P.W.Chang, et. al.[33]	2次元定常	Galerkin/FEM, 応力は近似	急拡大平板流
Leonovモデル	A.I.Isayev, et. al. [8]	Hele-Shaw型 非定常熱伝導	Galerkin/FEM	平板流
一重積分形	E.G.Thompson, et. al. [4]	2次元定常	Galerkin/FEM	滑らかな 縮小流



他、繊維強化プラスチック～プラスチック中にガラス繊維を配合して、強度を増したもの ( ex. FRP )

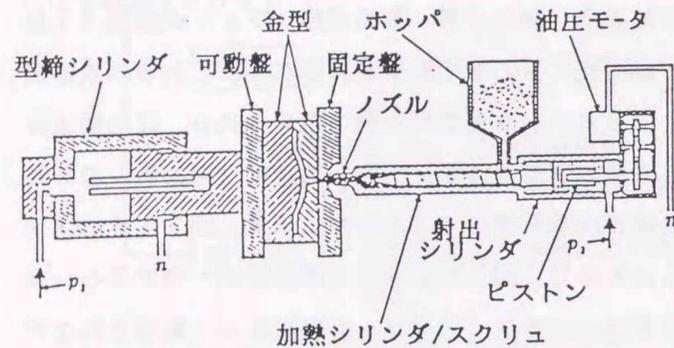
図1-2 プラスチックの種類

より熱硬化性と熱可塑性の2種に大別できる。熱硬化性は分子構造が網状で加圧・加熱により化学反応して硬化し、非可逆であるのに対して、熱可塑性は線状の分子構造を持ち、加熱により軟化、冷却により硬化する。従って、成形性は後者の方が良く、プラスチック生産量の80%近くを占める。熱可塑性プラスチックは硬化に伴う分子配向の有無により、さらに結晶性と非結晶性の2つに分けられる。他にプラスチック中にガラス繊維を配合して強度を増した繊維強化プラスチック(例えば、FRP)がある。

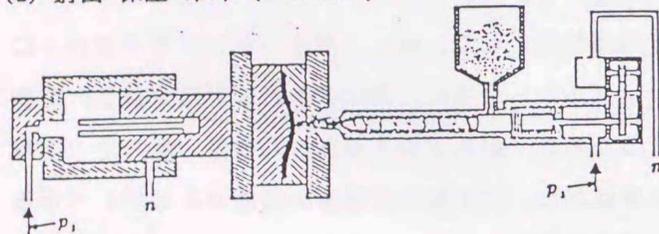
プラスチック成形加工法<sup>(1)</sup>には圧縮成形、射出成形、押出成形、ブロー成形等、10種ほどの成形法があり、その適用性、経済性に合わせて取捨選択される。これらの成形法のうち射出成形と押出成形の2つが、プラスチック消費量の約7割を占める。成形加工は原理的には可塑化の段階(溶かす)、賦形の段階(流す)、冷却の段階(固める)の3段階を経過することになる。この過程を射出成形を例にとり具体的に示す。図1-3はスクリュ式射出装置による成形工程を示したもので、図中の諸元は成形条件の一例である。ホップ内の樹脂は自重により加熱シリンダ内に落下し、スクリュの回転により混練されながらシリンダ先端に送られる。その際、加熱シリンダ外周のヒータにより加熱されるとともに、混練作用による摩擦熱も加わって溶融状態となる。次に、射出シリンダでスクリュに射出圧力がかけられ、先端部の樹脂はノズルから金型内に高圧のもとに射出される。射出後は冷却後の収縮によるひけを防止するために、射出圧力より20~30%低い圧力で一定時間保持される。この過程が保圧過程と呼ばれる。保圧後、成形品の温度がある値に下がるまで冷却し成形品を取り出す。この一連の過程を1サイクルとして、成形工程が繰り返される。これらの過程を特徴づけるものが、図中に示した樹脂圧力と時間のグラフであり、このグラフは成形中の樹脂の圧力変化を示している。

近年、プラスチック製品の伸びは著しいものがあり、その要因はプラスチックの軽量、廉価、成形のし易さ等にある。とくに、成形加工技術の向上により、複雑な形状のものや従来では考えられなかった様な分野にまでプラスチックの用途は広がってきている。プラスチック成形の分野では試行錯誤的に試作品を製作する方法が従来より採られてきたが、プラスチックの適用範囲の拡大、製品形状の複雑化及び製品生産量の増大に対応して、コスト低減をはかるためには金型試作工数の低減や成形条件(射出圧力、冷却時間等)の最適化による大量生産のハイサイクル化、不良低減が必要となる。そのためには、現状の試行錯誤のやり方では限界があり、成形過程の数値シミュレーションが不可欠となってきた。この動きに呼応して、1974年頃からプラスチック流動シミュレーションの研究が進められ、

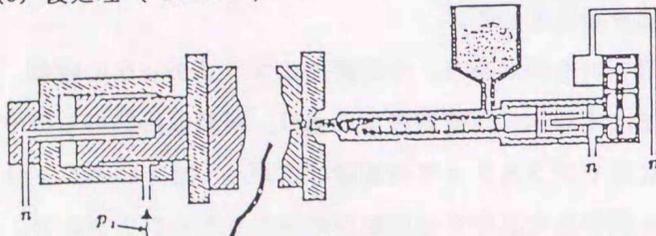
(1) 前処理 (6 sec)



(2) 射出・保圧・冷却 (29 sec)



(3) 後処理 (10 sec)



- ・射出圧 : 1050 kg/cm<sup>2</sup>
- ・射出時の樹脂圧力 : 350 kg/cm<sup>2</sup>
- ・保圧 : 740~840 kg/cm<sup>2</sup>
- ・樹脂温度 : 270 °C
- ・金型温度 : 40 °C
- ・取出温度 : ~50 °C

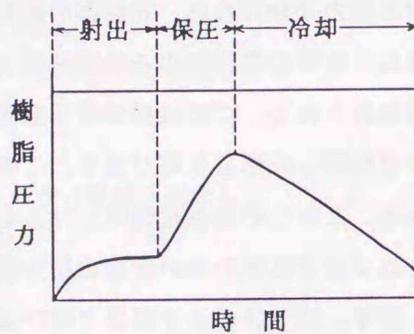


図1-3 射出成形サイクル

商用プログラムの代表的なものにMOLDFLOW ASSOCIATION社のC.Austinが開発したMOLDFLOW<sup>(12)</sup>、コーネル大学で開発されたSimuflow(OPTIMOLD)<sup>(16)</sup>がある。これらの商用プログラムは最近、樹脂メーカ、金型メーカ等で使われ始め、実績を挙げつつある。

溶融樹脂の流動解析手法としては、工業的に良く用いられ、物性データ数も多い指数則流体を対象としたHieber&Shen<sup>(7)</sup>の薄肉平板流れ(Hele-Shaw流れ)に対する有限要素法による解析が代表的である。この手法に基づき作られたプログラムが上述のSimuflowであり、コーネル大学のK.K.Wang、C.A.Hieberらが中心となって作成した。このプログラムは完全に公開されており、MOLDFLOW等の商用プログラムのほとんどはこのプログラムの解法をベースとしている<sup>(23)</sup>。Simuflowでは非圧縮性のHele-Shaw流れ(薄肉平板内の流れ)を基礎式としている。すなわち、

$$(1) \text{ 連続の式: } \frac{\partial (bu)}{\partial x} + \frac{\partial (bv)}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (1.19)$$

$$(2) \text{ 運動方程式: } -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (1.20)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (1.21)$$

$$(3) \text{ エネルギー式: } \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \eta \dot{\gamma}^2 \quad \dots \dots (1.22)$$

$$\text{ただし、} \quad \eta(T, \dot{\gamma}) = \eta_0 e^{cT} \dot{\gamma}^{n-1} \quad \dots \dots \dots (1.23)$$

エネルギー式の時間項とz方向に関しては差分法を用いており、他はFEMで解いている。特徴的なのは対象が高粘性であることから加速度項を無視して、(1.20)、(1.21)式を2回積分してu、vを圧力の関数で置き換え、定常状態における圧力のポアソン方程式を解いていることである。この方法は計算時間が短く、求めた圧力からu、vを計算し、タイムステップ毎の移動距離を求めれば容易にメルトフロントの移動が計算できるという利点を持つ。しかし、この手法は定常の薄肉流れに限定され、Hele-Shaw近似が成立しない狭路や肉厚部等に対しては圧力損失を過小評価することになる。

### 1.3 本研究の目的

前節では溶融樹脂に代表される非ニュートン流体の流れを解析する場合の問題点と研究課題を検討した。その結果、本研究の工学的な応用対象として、溶融樹脂を用いた射出成

形シミュレーションへの適用を前提として考えた場合、以下に示す点から新たに解析技術を開発する必要があることがわかった。

- (1) 従来の薄肉平板近似 (Hele-Shaw 近似) に基づく溶融樹脂の解析は、定常のシェル内の薄肉平板流れに限定され、厚肉部品の解析に必要な3次元へ拡張出来ない。
- (2) 溶融樹脂の様な強い非線形性を持つ高粘性の非ニュートン流体の非定常流れを解く場合、安定条件による制約が大きく通常の陽解法では解けない。そのため、時間ステップが大きく取れる陰解法が従来の主流であった。しかし、計算対象を2次元解析から3次元の複雑な構造物内の流れの解析に拡張する場合、陰解法を採用する従来の方法では計算容量の増大が免れない。
- (3) 工学的な応用面を考えると、流動する自由境界の位置を精度良く、かつ計算容量・計算時間の負担を低減して解析する必要がある。
- (4) 射出成形を念頭におけば、強度を増すために溶融樹脂中に混入する強化繊維入りの材料も多く、流動中の強化繊維の挙動を解析する必要がある。また、流動後の変形予測も必要となる。

また、非ニュートンの挙動を表す構成方程式には、各種モデルが提案されているが、どのモデルが適当であるかの一般的な見解は得られていないため、本研究では解析するための樹脂データの取得が比較的容易で、豊富なデータがただちに利用できる指数則モデルを用いる。

従って、本研究では溶融樹脂のような高粘性の非ニュートン流体を対象として、移動自由境界を持った非定常3次元流れの数値解析手法の開発を目的とする。

#### 1.4 本論文の構成

本論文の第2章では、指数則モデルで表わされる高粘性の溶融樹脂の非定常3次元流れの解析手法を提案する。また、温度場を計算するためのエネルギー式の解法として拡散項と移流項を分離して解く分離型の解法を提唱する。この際、提案した解析手法を3次元及び樹脂成形品に多いシェル構造物用の三次元シェル(以下、擬似3次元と呼ぶ)の2種に適用した。さらに、矩形平板の流れに適用し、解析解と比較検討して、その妥当性を明らかにする。

第3章では、射出成形シミュレーションを実現する上で重要な移動自由境界の解析手法としてメッシュを空間に固定したオイラー型のSOLA-VOF法に基づいて改良したマーカー粒子法と、メッシュが流体と共に移動するラグランジュ型の解法を改良した部分メッシュ生成法を提案する。さらに、本手法をL型流路内の自由表面をもつ流れに適用し、両手法を比較検討すると共に、凹レンズ形状の流路内の流れに適用して第2章で提案した手法と組合せた計算結果の妥当性、有効性を示す。

第4章では、第2、3章で示した流動解析手法の検証として、指数則モデルで表される模擬流体を用いた可視化実験と、箱型流路内の溶融樹脂の流れおよび実成形品の流れに対するショートショット実験を実施し、各々流速分布、自由境界の位置に関して実験結果と解析結果を比較検討した結果を示す。

第5章では、溶融樹脂中に混入した強化繊維の流動配向を、局所的な速度勾配により剛体繊維の回転を計算し、上流の配向の影響を考慮した繊維充填率の輸送方程式を風上有限要素法で計算する手法を提案する。提案した解析手法を正方形板の非定常流れに適用し、特徴的な繊維配向挙動の計算性能を確認する。

第6章では、第5章で求めた繊維配向による異方性を考慮した成形品の変形を、直交異方性の弾性マトリックスを用いて解析する手法を提案する。また、本手法を平行平板の曲げ問題に適用し、その妥当性を明らかにする。

第7章では、各章で得られた知見をまとめて示す。

## 2.1 緒言

非ニュートン流体は、その非線形なレオロジー的挙動のために、非定常解析に対してはNewton-Raphson法等の収束解法が用いられてる。しかし、非ニュートン流体は強い非線形性を持つため、解析精度を考えれば陽解法と同様にタイムステップは制約されると共に、成形シミュレーションへの適用の際には、複雑な計算対象のため計算容量の増大が免れないため、陰解法が陽解法に対して必ずしも有利とはならない。非圧縮性のニュートン流体に対しては、準陰的な手法であるMAC (Marker And Cell) 法<sup>(5)</sup>等の広義のFractional Step法<sup>(6)</sup>が主流になりつつあるが、非ニュートン流体への適用例はない。また、成形シミュレーションを対象とした擬似三次元解析手法としては、工業的に良く用いられ、物性データ数も多い指数則流体を対象としたHieber & Shen<sup>(7)</sup>の薄肉平板流れ(Hele-Shaw流れ)に対する有限要素法による解析が代表的である。この手法は、対象が高粘性であることから加速度項を無視して、定常状態における圧力のPoisson方程式を解く手法であり、射出成形シミュレーション手法として広く用いられている。しかし、この手法は定常の薄肉流れに限定され、Hele-Shaw近似が成立しない狭路や肉厚部等に対しては圧力損失を過小評価することになる。

本章では射出成形等への適用を念頭に置き、高粘性指数則流体の三次元流れを対象とする。本章で述べる解析手法は空間離散化に有限要素法を用い、時間離散化にFractional Step法<sup>(6)</sup>の一種である流速修正法と有理ルンゲクッタ法<sup>(34)</sup>(Rational Runge-Kutta Method, 以下RRK法と略す)を組合せた準陽解法である。このスキームは流速を陽解法で解く。通常の陽解法では安定条件の制約から時間ステップを大きく取れないため、線形問題では無条件安定となることが知られているRRK法を適用し、擬塑性流体に対しても無条件安定となることを示す<sup>(35)</sup>。また、シェル構造物(薄肉平板)内の流れを効率よく解析できる様に、シェルの厚さ方向を流速分布の層流解を用いてモデル化した擬似三次元解析手法について三次元解析手法と共に述べる。三次元解析手法では計算精度向上の観点から歪み速度も変数とする混合形有限要素法で定式化する<sup>(36)</sup>。さらに、温度場を計算するためのエネルギー式の解法には、拡散項と移流項を各々分離して、前者にRRK法、後者に著者らが特性曲線法を拡張して開発した流跡積分法<sup>(37)</sup>を適用する。本章ではスキ-

Δの詳細及び、混合形解法での時間ステップと精度の関係を歪み速度の内挿関数が0次と1次の場合について検討した結果と、定常の解析解と比較検討した結果を報告する。

## 2.2 数値解法

### 2.2.1 基礎方程式

非圧縮性の高粘性指数則流体の低レイノルズ数流れ ( $Re \leq 1$ ) の場合、運動方程式の移流項は粘性項と比較して十分小さく無視できる。従って、流れ場を記述する基礎式は次式で与えられる。

$$(1) \text{ 連続の式} : v_{j,j} = 0 \quad \dots \dots (2.1)$$

$$(2) \text{ 運動方程式} : \rho v_{i,t} - \sigma_{ij,j} = 0 \quad \dots \dots (2.2)$$

$$(3) \text{ 構成方程式} : \sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad \dots \dots (2.3)$$

$$\text{ただし、} \eta = \eta_0 e^{-cT} [4\Pi]^{(n-1)/2} \quad \dots \dots (2.4)$$

$$e_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}) / 2 \quad \dots \dots (2.5)$$

$$\Pi = -e_{ij} e_{ji} / 2 \quad \dots \dots (2.6)$$

ここで、コンマ付添字は偏微分を表し、一つの項で同一の添字が現われる場合にはその和をとるものとする。また、添字*i, j* は *x, y, z* に対応して1~3の値をとる。温度場については、移流による熱輸送が支配的になり、また通常の流体では無視できる流体内部の剪断による発熱が無視できない。従って、温度場の支配方程式は次式となる。

$$(4) \text{ エネルギー式} : \rho C_p (T_{,t} + v_j T_{,j}) = (k T_{,j})_{,j} + e_{ij} \sigma_{ij} \quad \dots (2.7)$$

流れ場に対する境界条件は、以下の通りである。

$$a(\sigma_{ij} + p \delta_{ij}) n_j + b v_i = 0 \quad \dots \dots (2.8)$$

(a)  $a = 0$  ; 壁面と流体間にすべりが無い(non-slip)。

(b)  $b = 0$  ; 壁面と流体間にすべりがある(slip)。

(c)  $a \neq 0, b \neq 0$  ; 壁面と流体間にすべりがあり、すべり速度に依存した摩擦力が働く。

また、温度場に対しても同様に示せる。

$$a T_{,j} n_j + b T + c = 0 \quad \dots \dots (2.9)$$

(a)  $a = 0$  ; 壁面で温度が一定。

(b)  $b = 0$  ; 壁面で熱流束が一定。

(c)  $a \neq 0, b \neq 0$  ; 壁面とそれに接する流体間に温度差に比例した熱輸送がある。

次に射出成形等の実用問題へ適用する際、重要な薄肉平板内の流れを考える。薄肉平板内では主流に対して垂直な厚さ方向の剪断力が支配的となる。この様な流れに対して3次元解析は計算時間・計算容量の点で必ずしも有効ではないため、擬似3次元でモデル化する。図2-1の平行平板間の2次元流れを考える。主流方向を *x, y* の2方向とし、*z* 方向の速度成分を零としてモデル化する。対象が高粘性のため助走区間は無視でき、発達した層流として取り扱える。平板間の距離方向を *z* に取れば、速度分布は次式で表わせる。

$$u = \frac{1+2n}{1+n} \bar{u} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{\delta} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad \dots \dots (2.10)$$

ここで、*u* は平均流速である。*x-z* 平面の粘性力  $X_{vi}$  は  $X_{vi} = (\eta u_{,z})_{,z}$  で表わせるから、(2.10)式を代入し *z* 方向に積分して平均化すると、

$$X = -\frac{4(1+2n)}{n\delta^2} \eta \bar{u} = c \eta \bar{u} \quad \dots \dots (2.11)$$

$$\text{ただし、} \eta = \eta_0 [4(u_{,z})^2]^{(n-1)/2}$$

となる。*y-z* 平面に対しても(2.11)式を用いて同様に平均化すれば、(2.2)式は2次元の式に書き換えられる。

$$\rho v_{i,t} = \sigma_{ij,j} + c \eta v_i \quad \dots \dots (2.12)$$

ここで、添字*i, j* は1~2の値をとる(以下同様)。また、(2.6)式も同様の平均化により、次式を得る。

$$\Pi = -\frac{1}{2} \{ e_{ij} \cdot e_{ji} + \frac{4(1+2n)}{n(n+2)\delta} (u^2 + v^2) \} \quad \dots \dots (2.13)$$

次に、平板間距離の空間分布を考慮して一般化する。質量流量の釣り合いを考えると、密度が一定なので流速を平板間距離の方向に渡って積分した量  $q_i$  が保存されることになり、連続の式として次式を得る。

$$(\delta v_i)_{,i} = q_{i,i} = 0 \quad \dots \dots (2.14)$$

$q_i$  を用いて(2.12)式を書き換える。

$$\frac{\rho}{\delta} q_{i,t} = -P_{,i} + \left[ \eta \left\{ \left( \frac{q_i}{\delta} \right)_{,j} + \left( \frac{q_j}{\delta} \right)_{,i} \right\} \right] + c \eta \frac{q_i}{\delta} \quad \dots \dots (2.15)$$

$\delta \rightarrow \infty$  では、 $\delta$  の空間分布が無視できるため  $q_i / \delta$  は  $v_i$  に置き換えられ、かつ(2.15)式の右辺第4項は0になるから、2次元の式と等価になる。基礎式(2.14)、(2.15)式の境界条件は以下の通りである。

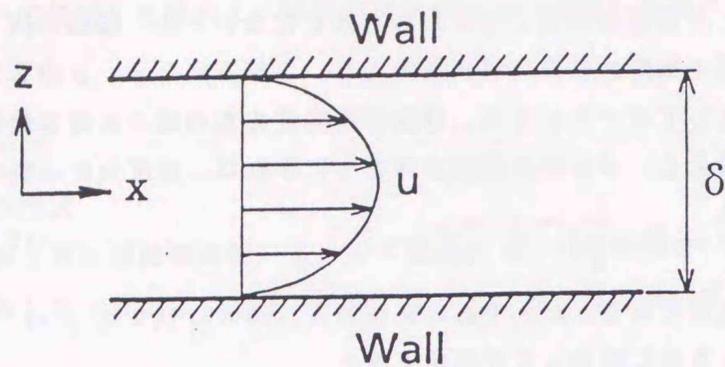


図2-1 平行平板内の2次元流れ

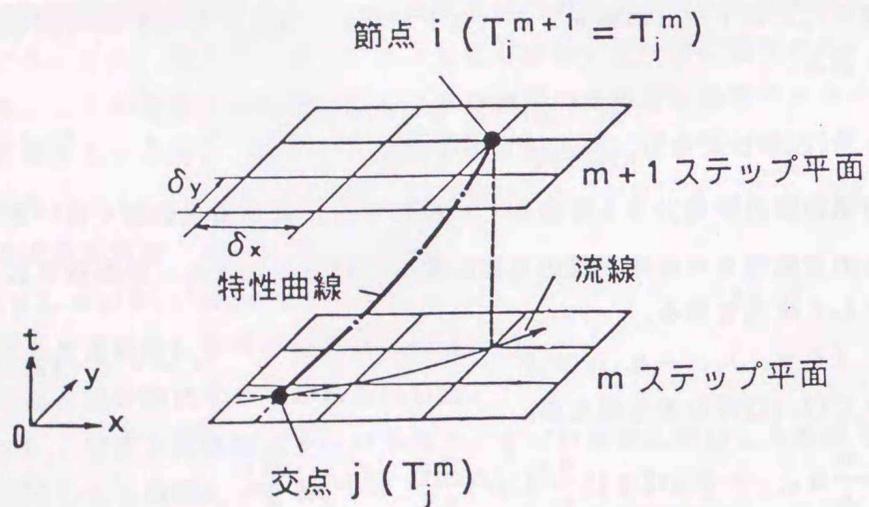


図2-2 流跡積分法による移流計算

$$a \left[ \eta \left\{ \left( \frac{q_i}{\delta} \right)_{,j} + \left( \frac{q_j}{\delta} \right)_{,i} \right\} \right] + b \frac{q_i}{\delta} = 0 \quad \dots \dots (2.16)$$

エネルギー式においてz方向の厚さの影響が考えられるのは、z方向の熱伝導項と剪断発熱項である。従って、上記の手順と同様にして次式を得る。

$$\rho C_p \left( T_{,t} + \frac{q_j}{\delta} T_{,j} \right) = (k T_{,j})_{,j} + e_{ij} \sigma_{ij} + X_{T1} + X_{T2} \quad \dots \dots (2.17)$$

ただし、

$$X_{T1} = \begin{cases} -\frac{4k}{\delta \delta_t (1 - 2\delta_t / 3\delta)} (T - T_w) & \text{: 助走領域} \\ -\frac{12k}{\delta^2} (T - T_w) & \text{: 発達領域} \end{cases} \quad \dots \dots (2.18)$$

$$X_{T2} = \frac{(n+1)^2 (n+2)}{n \delta^2} \eta (u^2 + v^2) \quad \dots \dots (2.19)$$

### 2.2.2 離散化

#### 2.2.2.1 時間に関する離散化

3次元及び擬似3次元共に、時間の離散化にはFractional Step法の一環である流速修正法を用い、時間積分にはRRK法を適用する。3次元に対しては、計算精度向上の観点から歪み速度も変数とする混合形を用いるため、中間段階で求まる流速に対応して、歪み速度の中間値も計算する必要がある。計算手順は以下の様になる。

(1) 流速の予測計算:

$$\rho g_i^1 - \sigma_{ij,j} = 0 \quad \dots \dots (2.20)$$

$$\hat{e}_{ij} = (\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_{j,i}) / 2 \quad \dots \dots (2.21)$$

$$\rho g_i^2 - \hat{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad \dots \dots (2.22)$$

$$\tilde{v}_i = v_i^m + \Delta t \frac{2g_1(g_1, g_3) - g_3(g_1, g_1)}{(g_3, g_3)} \quad \dots \dots (2.23)$$

ただし、  $g_i^3 = b_1 g_i^1 + b_2 g_i^2$

$$\hat{v}_i = f(v_i^m, g_i^1)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = f(p^m, \eta^m, \hat{e}_{ij})$$

(g, g) は内積を示す

(2) 圧力補正:

$$P_{,ii}^* = \rho \tilde{v}_{i,i} / \Delta t \quad \dots \dots (2.24)$$

(3) 流速補正:

$$v_i^{m+1} = \tilde{v}_i - \Delta t / \rho P_{,i}^* \quad \dots \dots (2.25)$$

$$P^{m+1} = P^m + P^* \quad \dots \dots (2.26)$$

(4) 歪み速度算出:

$$e_{ij}^{m+1} = (v_{i,j}^{m+1} + v_{j,i}^{m+1}) / 2 \quad \dots \dots (2.27)$$

定数  $b_1, b_2, c_2$  には里深ら<sup>(38)</sup>の推奨値を用いた。 $b_1 + b_2 = 1, b_2 c_2 \leq -0.5$  の時、線形領域では無条件安定となることが知られているが、上記スキームは 2.2.3 節に示すように擬塑性流体 ( $0 < n \leq 1$ ) に対しても無条件安定となる。また、(2.24) 式は wave front 法で陰的に解く。

擬似 3 次元に対しては、シェルの厚さ方向の制限のために歪み速度の精度は 3 次元解析ほど要求されない。したがって、実用性を考えると混合型にする必要はなく、通常の流速、圧力のみを変数とする。上記と同様に離散化すれば次の 3 ステップで解が求まる。

(1)  $m$  時刻の値より予測子  $\tilde{q}_i$  を陽的に求める。

$$\tilde{q}_i = q_i^m + \frac{\delta \Delta t}{\rho} f(P^m, q_i^m, \eta^m) \quad \dots \dots (2.28)$$

(2) 予測子  $\tilde{q}_i$  から、時刻  $m+1$  で連続の式を満たす様に圧力増分  $P^*$  を求める。

$$P_{,ii}^* = \rho \tilde{q}_{i,i} / (\delta \Delta t) \quad \dots \dots (2.29)$$

(3) 圧力増分  $P^*$  から、時刻  $m+1$  の解を求める。

$$P^{m+1} = P^m + P^* \quad \dots \dots (2.30)$$

$$q_i^{m+1} = \tilde{q}_i - \delta \Delta t / \rho P_{,i}^* \quad \dots \dots (2.31)$$

ここで、 $f$  は (2.12) 式の右辺をまとめたもので、 $P$  の境界条件は圧力固定境界で 0 となる。(2.28)~(2.31) 式は差分と組合せた Hirt ら<sup>(39)</sup>、有限要素法と組合せた金井-棚橋<sup>(40)</sup>と類似の定式化である。

### 2.2.2.2 圧力補正

前項で示した解法は水等の低粘性流体に適用した場合、安定性及び解の収束性も良いが、溶融樹脂のような高粘性流体の場合はタイムステップを大きくすると圧力上昇が遅れてく

る。これは運動方程式中の粘性項が圧力項より著しく大きいために、予測子  $q_i$  が粘性だけで決まり、 $q_i \approx q_i^{m+1}$  となって圧力増分による修正量が非常に小さくなるためである。この事は (2.29) 式からも明らかで、圧力増分は  $q_i$  の未収支分を補正することにより求まるため、タイムステップを大きくすると  $P^*$  の上昇は遅れてくることになる。したがって、初期値の影響が強くなる。このことは特に擬似 3 次元解析で顕著となるため、擬似 3 次元解析においては以下の方法で圧力を補正する。(2.12) 式に  $\delta$  を乗じて辺々を加え合わせた式の発散を求め、(2.11) 式を考慮して整理すれば次式を得る。

$$(\delta P_{,i})_{,i} = \left\{ \delta \eta \left[ \left( \frac{q_i}{\delta} \right)_{,j} + \left( \frac{q_j}{\delta} \right)_{,i} \right]_{,j} \right\}_{,i} + (c \eta q_i)_{,i} \quad \dots \dots (2.32)$$

(2.32) 式は圧力の Poisson 方程式であり、(2.28)~(2.31) 式の解より  $P^{m+1}$  が計算でき、これが真の圧力となる。実際には定常及び準定常的な流れ (速度場の変動が小さい流れ) に対しては (2.32) 式を毎回計算することは、計算時間の点で得策ではない。そこで、流れが定常もしくは準定常に達した時点で (2.32) 式による圧力補正を止め、前項のスキームに戻す方法が実用的である。

### 2.2.2.3 空間に関する離散化

3 次元解析での空間に関する離散化には、直方体及び三角柱要素を用いた Galerkin 有限要素法を適用し、流速に対しては 1 次、歪み速度、圧力に対しては比較のため 1 次 (要素内で線形) 及び 0 次 (要素内で一定) の内挿関数で近似する。粘性係数の強い非線形性に対応して、粘性係数  $\eta$  も歪み速度と同次数の内挿関数で近似する。要素内積分は 2 次もしくは 3 次の Gauss-Legendre 積分で求める。上式において、(2.23)、(2.26) 式は代入計算だけであり、(2.20) と (2.22) 式、(2.21) と (2.27) 式は同一の離散化式となる。従って、ここでは (2.20)、(2.21)、(2.24)、(2.25) 式について離散化式を示す。

(1) 歪み速度、圧力、粘性係数が 1 次の場合:

$$[M] \{g_{\alpha i}\} = ([\Gamma_i] - [\Omega_i]) \{ \sigma_{\alpha i}^m \} / \rho \quad \dots \dots (2.33)$$

$$[M] \{ \hat{e}_{\alpha i j} \} = ([\Gamma_i] - [\Omega_i]) \{ (\hat{v}_{\alpha i}) + \{ \hat{v}_{\alpha i} \} \} / 2 \quad \dots \dots (2.34)$$

$$[K] \{ p_{\alpha}^* \} = -\rho [\Omega_i] \{ \tilde{v}_{\alpha i} \} / \Delta t \quad \dots \dots (2.35)$$

$$[M] \{ v_{\alpha i}^* \} = -\Delta t [\Omega_i] \{ p_{\alpha}^* \} / \rho \quad \dots \dots (2.36)$$

ただし、 $[M] = \int \phi_{\alpha} \phi_{\beta} de$

$$[\Gamma_1] = \int_s \phi_\alpha \phi_\beta \cdot n_j ds$$

$$[\Omega_1] = \int_e \phi_{\alpha,j} \phi_\beta de$$

$$[K] = \int_e \phi_{\alpha,i} \phi_{\beta,i} de$$

なお、[M] は各行の係数を対角項に足し合わせた後、質量保存を満たす様に規格化した集中質量行列である。

(2) 歪み速度、圧力、粘性係数が0次の場合：

$$[M]\{g_{\alpha i}^1\} = ([\Gamma_2] - [\Omega_2])\{\sigma_{ij}^m\}_e / \rho \quad \dots \dots (2.37)$$

$$\{\hat{e}_{ij}\}_e Ve = \{\hat{G}_{ij}\} / 2 \quad \dots \dots (2.38)$$

$$\sum_\alpha - (p_0 - p_\alpha^*) S_\alpha \left( \sum_{j=1}^3 \frac{n_j}{x_0 - x_j} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \sum_\alpha \bar{v}_{\alpha i} \cdot n_\alpha \cdot S_\alpha \quad \dots \dots (2.39)$$

$$[M]\{v_{\alpha i}^*\} = \Delta t ([\Omega_2] - [\Gamma_2])\{p^*\}_e / \rho \quad \dots \dots (2.40)$$

ただし、 $[\Gamma_2] = \int_s \phi_\beta \cdot n_j ds$

$$[\Omega_2] = \int_e \phi_{\beta,j} de$$

$$\{G_{ij}\} = \int_s \hat{v}_{\alpha i} \cdot n_j ds + \int_s \hat{v}_{\alpha i} \cdot n_i ds$$

ここで、Veは要素体積、添字<sub>0</sub>は要素の重心位置、<sub>e</sub>は要素内で一定であることを表わす。

次に擬似3次元に対する空間離散化には、同様にGalerkin有限要素法を適用し、 $q_i$ に對し1次、圧力に對し0次の三角形要素を用いる。また、粘度は非線形性を考慮して、1次の形状関数で近似する。平板間距離の空間分布は要素毎に考慮し、要素内で $\delta$ 一定とする。要素内の積分は面積座標系を用いて解析的に求め、数値積分はしない。(2.28)はRRK法を用いて次式で表せる。

$$\{\tilde{q}_\beta\} = \{q_\beta^m\} + \frac{\delta \Delta t}{\rho} \frac{2g_1(g_1, g_3) - g_3(g_1, g_1)}{(g_3, g_3)} \quad \dots \dots (2.41)$$

ただし、 $g_1 = f(p^m, q^m)$

$$g_2 = f(p^m, q^m + c_2 \Delta t)$$

$$g_3 = b_1 g_1 + b_2 g_2$$

ここで、 $(g, g)$ は内積を表す。 $b_1, b_2, c_2$ はRRK法の定数である。(2.29)~(2.32)式を離散化して示せば、以下の様になる。

$$[K]\{P_j^*\} = \rho [D_k]\{\tilde{q}_j\} / (\delta \Delta t) \quad \dots \dots (2.42)$$

$$\{q_\beta^{m+1}\} = \{\tilde{q}_\beta\} - \delta \Delta t [M]^{-1} [G_2]\{P_j^*\} / \rho \quad \dots \dots (2.43)$$

$$\delta [K]\{P_\beta^{m+1}\} = [B_i]\{q_\beta^{m+1}\} + [B_j]\{q_\alpha^{m+1}\} \quad \dots \dots (2.44)$$

ただし、[ ]は係数マトリックスを表す。なお、厚さ一定の要素間の内部境界では、境界から受ける力は相隣り合う要素で打ち消しあい重ね合わせると零となる。しかし、厚さの異なる要素間では零とはならないため、全要素境界について境界積分する。

#### 2.2.2.4 エネルギー式の解法

2.2.1節で述べた通りエネルギー式は移流支配となる。従って、高Reynolds数の流れ場を解く場合と同様に、数値拡散の増大が問題となる。この数値拡散は移流項を離散化する時の打ち切り誤差に起因するもので、見掛け上拡散力を過大評価する作用がある。そこで、本手法ではエネルギー式を移流方程式と拡散方程式の二つに分離して解く。移流方程式の解法には流跡積分法<sup>(37)</sup>を、拡散方程式の解法にはRRK法を用いる。流跡積分法は、特性曲線法を拡張して、筆者らが開発した無条件安定な手法であり、図2-2にその概念を示す。流跡積分法に従った解法手順は次の通りである。

- (1) 時刻 $m+1$ ステップ平面上の節点 $i$ を通る特性曲線に沿って時間を逆行し、時刻 $m$ ステップ平面上の交点 $j$ を求める。
- (2) 交点 $j$ を含む要素の内挿関数を用いて、交点 $j$ の温度 $T_j^m$ を求める。
- (3) 温度 $T_j^m$ を時刻 $m+1$ の節点 $i$ の温度 $T_i^{m+1}$ とする。
- (4) (3)で求めた温度を初期値として拡散方程式を解き、改めて温度を求める。

実際には、(1)の手順を必要な回数だけ繰り返して交点 $j$ を求める。この手法は3次元、擬似3次元の両解析にそのまま適用できる。

拡散項は前節の空間離散化に対応して、3次元解析、擬似3次元解析で異なり、3次元解析の場合は次の様に離散化できる。

- (1) 歪み速度、圧力、粘性係数が1次の場合：

$$[M]\{T_\alpha^{m+1} - T_\alpha^m\} = k ([\Gamma_3] - [K])\{T_\alpha^m\} + [D]\{\tilde{e}_{\alpha ij}\}\{\tilde{\sigma}_{\alpha ij}\} \quad \dots (2.45)$$

ただし、 $[\Gamma_3] = \int_s \phi_{\alpha,j} \phi_\beta ds$

$$[D] = \int_e \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma de$$

- (2) 歪み速度、圧力、粘性係数が0次の場合：

$$[M]\{T_{\alpha}^{m+1}-T_{\alpha}^m\}=k([\Gamma_3]-[K])\{T_{\alpha}^m\}+[E]\{\tilde{e}_{ij}\}_e\{\tilde{\sigma}_{ij}\}_e \quad (2.46)$$

$$\text{ただし、 } [E]=\int_e \phi_{\beta} de$$

擬似3次元の場合は、以下の通りとなる。

$$[Ms]\{T_{\beta}^{m+1}-T_{\beta}^m\}=\Delta t\left[\frac{k}{\rho C_p}([\Gamma_2]-[A_2])\{a_{ij}\}^T\{T_{\beta}^m\}+C'[Ms]\{T_{\beta}^m-T_w\}+\frac{Q_s}{\rho C_p}[E]\right] \quad (2.47)$$

$$\text{ここで、 } [Ms]=\int \phi^* \phi dv, [A_2]=\int \phi^* \cdot_j \phi dv, [\Gamma_2]=\int \phi^* \phi n_j ds,$$

$$[E]=\int \phi^* dv, \{a_{ij}\}: \text{形状関数の微分値, } C': (2.18) \text{式の係数}$$

### 2.2.3 安定性の検討

本解法の場合、圧力は陰解法で解いているため常に安定である。従って、本解法は  $q_i$  の計算に用いている R R K 法の安定性だけに依存する。指数則流体へ R R K 法を適用した例は見当たらないので、その安定性についてここで論じておく。擬似3次元解析を例に採れば、離散化された運動方程式は、固有ベクトル  $q_{\alpha}$ 、係数行列  $A$  及び固有値  $\lambda$  を用いて次のように表わせる。

$$\{q_{\alpha,t}\}=A\{q_{\alpha}\}=\lambda\{q_{\alpha}\} \quad (2.48)$$

簡単のため、隣接した節点  $\alpha$ 、 $\beta$  を通過する流体が純粋せん断の状態になるように座標系を選べば、係数行列  $A$  は(4)~(6)式の関係より次式で表わせる。

$$A=A_{\alpha\beta} \eta_0 |q_{\alpha}-q_{\beta}|^{n-1} \quad (2.49)$$

ここで、 $A_{\alpha\beta}$  は要素積分の結果をまとめて書いたものである。(2.48)式を R R K 法に従って時間積分すると、 $m+1$  ステップ目の固有ベクトル  $q_{\alpha}$  は、 $m$  ステップ目の固有ベクトル  $q_{\alpha}$  を用いて次の様に見える。

$$\{q_{\alpha}^{m+1}\}=\left[1+\frac{\Delta\lambda^2\Delta t}{b_1\lambda+b_2(\lambda+\Delta\lambda)(1+c_2\lambda\Delta t)}\right]\{q_{\alpha}^m\} \quad (2.50)$$

ここで、 $\Delta\lambda$  は  $q_{\alpha}$  の中間値を取った時の固有値の増分である。この増分は(2.49)式の Taylor 展開の第2項まで取ることにより、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} (\lambda+\Delta\lambda)\{q_{\alpha}^{m+1}\} &= (A+\Delta A)\{q_{\alpha}^m\} \\ &\doteq \left[A+\frac{\partial A}{\partial(q_{\alpha}-q_{\beta})}|q_{\alpha}-q_{\beta}|^{n-1}\right]\{q_{\alpha}^m\} \end{aligned}$$

$$= [A_{\alpha\beta} \eta_0 |q_{\alpha}-q_{\beta}|^{n-1} \{1+(n-1)\frac{|q_{\alpha}-q_{\beta}|}{|q_{\alpha}-q_{\beta}|}\}]\{q_{\alpha}^m\} \quad (2.51)$$

上式の  $|q_{\alpha}-q_{\beta}|$  は(2.41)式で示される  $g_1$  ベクトルと同一であるから、

$$|q_{\alpha}-q_{\beta}|=c_2|g_{1\alpha}-g_{1\beta}|\cdot\Delta t=c_2\lambda|q_{\alpha}-q_{\beta}|\cdot\Delta t \quad (2.52)$$

となる。従って、(2.51)式に(2.52)式を代入すると次式を得る。

$$\Delta\lambda=(n-1)\lambda^2c_2\Delta t \quad (2.53)$$

定数  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $c_2$  に対し、線形問題では無条件安定となる 2、-1、0.5 の各々の値を用い、(2.53)式を(2.50)式に代入すると次式が求まる。

$$\{q_{\alpha}^{m+1}\}=\left[\frac{1+C}{1-C\cdot\left\{\frac{1+C(n-1)}{1-C(n-1)}\right\}}\right]\{q_{\alpha}^m\} \quad (2.54)$$

$$\text{ただし、 } C=\lambda\Delta t/2$$

安定条件は時間ステップの繰り返しに対して、固有ベクトルが発散しないことゆえ、

$$|q_{\alpha}^{m+1}/q_{\alpha}^m|<1 \quad (2.55)$$

を得る。従って、次式が求まる。

$$|\lambda'| \equiv \left|\frac{1+C}{1-C\cdot\left\{\frac{1+C(n-1)}{1-C(n-1)}\right\}}\right|<1 \quad (2.56)$$

(2.56)式を図示したのが図2-3である。(2.22)式の右辺第4項のない拡散方程式型の場合、固有値は常に負であることが知られている。また、第4項の係数の符号も負であるから、結局(2.22)式の固有値は常に負になる。従って、図2-3では  $C<0$  の領域について示した。図から判る様に(2.56)式は  $0<n\leq 1$  の範囲で常に成立し、擬塑性流体に対しては、本解法は無条件安定となる。

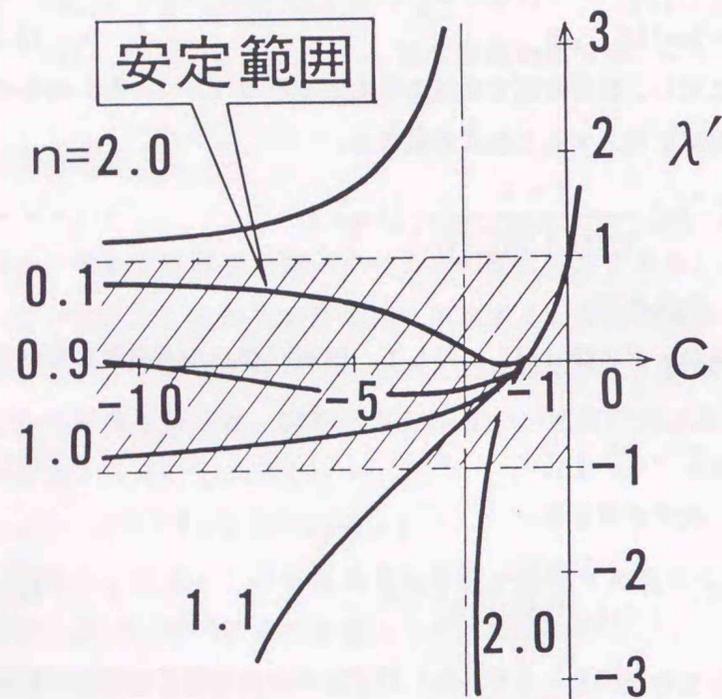


図2-3 指数則流体に対するRRK法の適用条件

#### 2.2.4 擬似3次元シェル面の面接合モデル

局所的に板厚が変化する平面の接続によって構成される3次元シェル形状を擬似3次元で解析するために、各平面の接合モデルが必要となる。この時に問題となるのは、各面間での物理量のやりとりをどのようにモデル化するかという点であり、特に流速のような座標に依存するベクトル量が問題となる。擬似3次元の場合、板厚方向は平均化されており、座標系は各面に固有な2次元の局所座標系となる。従って、各面間の接合部では、一般的に異なる局所座標系で記述された物理量が連続となるように接合する必要がある。最も単純なモデルは接合部の節点を共有節点とする方法である。しかし、この方法は各面の座標系に対応したベクトル情報が必要となり、面の数に比例してベクトル変数が増加していく。すなわち、2面の接合の場合は4つ、3面の接合の場合は6つとなり、アルゴリズムが煩雑で、接合面の数、接合の仕方によらずに整合性を保てる保証がない。そこで、本研究では座標系に依らないポテンシャル量である圧力に着目した接合モデルを考案した。

本モデルでは仮要素、仮節点を用いて各面間を接合する。仮要素の導入は対応する各面の節点間に仮想的なコントロールボリュームを考えたことに等しく、この仮想コントロールボリューム内で保存則を満足するように圧力を決定する。仮要素を図2-4に示す。仮要素は以下の特徴を持つ。

- (1) 仮要素は流動抵抗のない一種の流管とみなし、1次元で近似する。
- (2) 仮要素内の仮節点の変数として圧力のみを持つ。
- (3) 仮要素内の流量変化はない。すなわち、仮要素内では常に流量の連続性が保たれる。

さて、一般的には境界における連続性は、着目している物理量そのものとその物理量の勾配 (flux) の両者の連続性を満足する必要がある。通常の2次元や3次元解析では物理量は変数として取り扱うから離散化したときに問題となるのはfluxの連続性であり、fluxを変数としたり、平均化したりして連続性を満足させることになる。一方、本節の対象は3次元形状を擬似3次元で解くための手法であり、2次元x、y方向の連続性は常に成立するが、板厚方向に対しては要素間で段差を考えると板厚方向を平均化したことにより、fluxの連続性が成立しなくなる。すなわち、連続的なfluxを離散的に近似したことに等しいが、本解析で用いている有限要素法による空間離散化の場合、各要素毎に質量、運動量、エネルギーの諸量の保存が成立しており、fluxの不連続により全体の保存則が崩れること

はない。従って、接合モデルの場合も物理量の連続性が保たれば良く、結局上記で定義した仮要素の場合も、前節で説明した板厚可変の考え方を拡張すれば良い。

前節のアルゴリズムに従えば、仮要素内で解くべき式は次式となる。

$$\begin{aligned} \text{(a) 流量の予測子: } & \rho \tilde{q}_n / \delta = -\Delta t P_{,n} \\ \text{(b) 圧力増分: } & \delta P^*_{,nn} = \rho \tilde{q}_{n,n} / \Delta t \quad \dots \dots (2.57) \\ \text{(c) 流量の修正子: } & q_n^* = -\Delta t \delta P^*_{,n} / \rho \end{aligned}$$

ここで、添字の n は法線方向を示す。図 2-5 に示す形状関数を用いて (2.57) 式を離散化すると、各仮要素毎に次式が成立する。

$$\begin{aligned} [M] \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix} &= [G] \begin{Bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \end{Bmatrix} \\ [K] \begin{Bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \end{Bmatrix} &= [D] \begin{Bmatrix} q_A \\ q_B \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (2.58) \\ [M^*] \begin{Bmatrix} q_A^* \\ q_B^* \end{Bmatrix} &= [L] \begin{Bmatrix} P_A^* \\ P_B^* \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

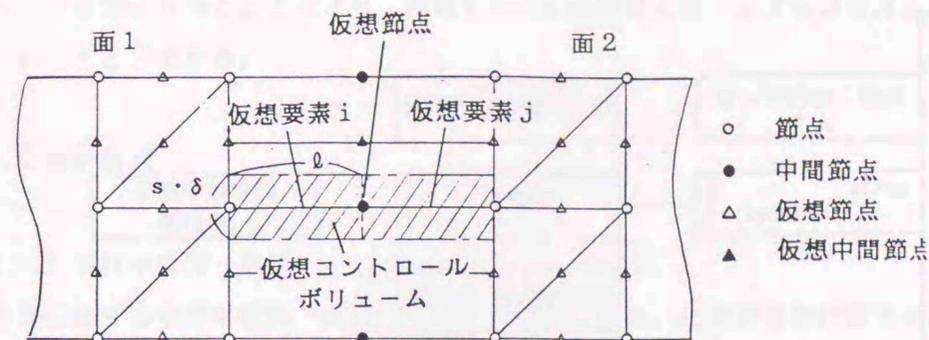
$$\begin{aligned} \text{ただし、} [M] &= \frac{\rho l S}{2 \delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & [G] &= \frac{S \Delta t}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [K] &= \frac{S \delta}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & [D] &= \frac{\rho S}{2 \Delta t} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ [M^*] &= \frac{\rho l S}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & [L] &= \frac{S \delta \Delta t}{2 \rho} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、マトリックス [D] の取り扱いには注意を要する。仮要素の節点 A 側は前節と同様の考え方であるが、仮節点 B 側は境界積分せず、仮コントロールボリューム内での保存則を満足するように圧力増分を求める。また、仮要素内の流量変化はないから  $q_B \equiv q_A$  となり、マトリックス [D] は次式で表せる。

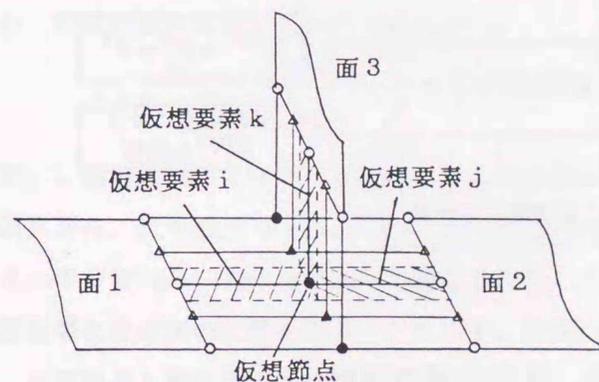
$$[D] = \frac{\rho S}{2 \Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \dots (2.59)$$

境界では流体が要素外の壁または流体に加える力の反作用として反力を受けるため、運動方程式の境界項は符号を変えて足し合わせる。(2.58) 式を全体マトリックスに加え合わせて解けば良い。

全体の計算手順を図 2-6 に示す。特徴的であるのは流量を解く際には全て面が基準となり、各面を独立に解いているのに対し、圧力を解く際には全体を解いていることである。



(1) 2面の接合



(2) 3面の接合

図 2-4 擬似 3 次元の面の接合モデル

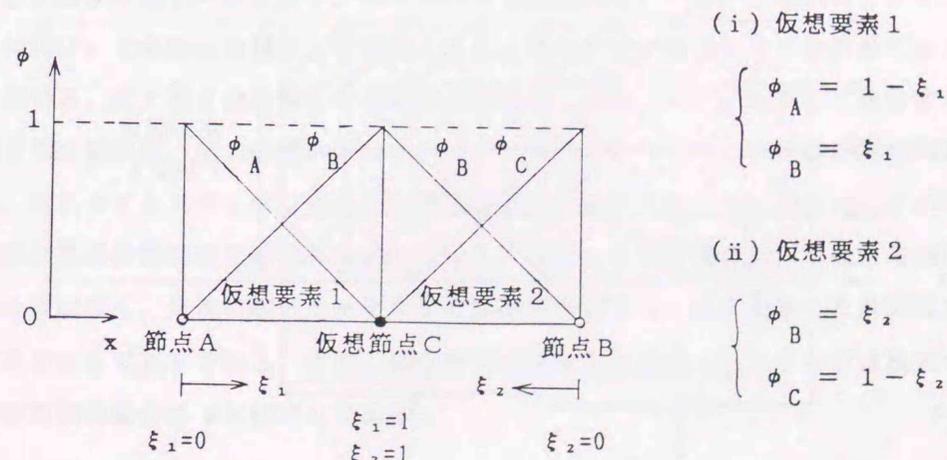


図 2-5 仮要素の形状関数

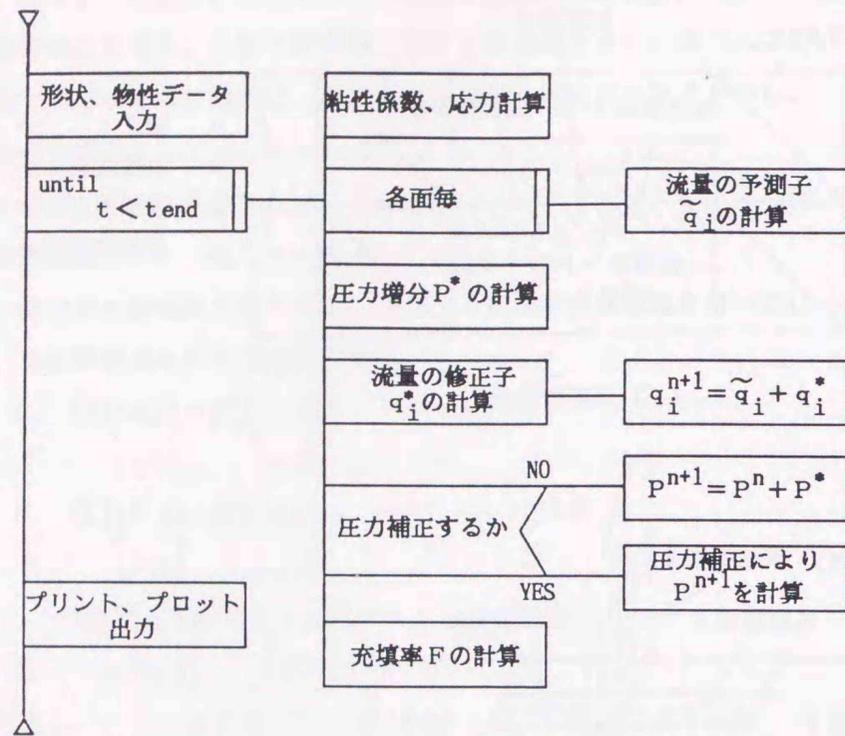


図2-6 計算手順の概略

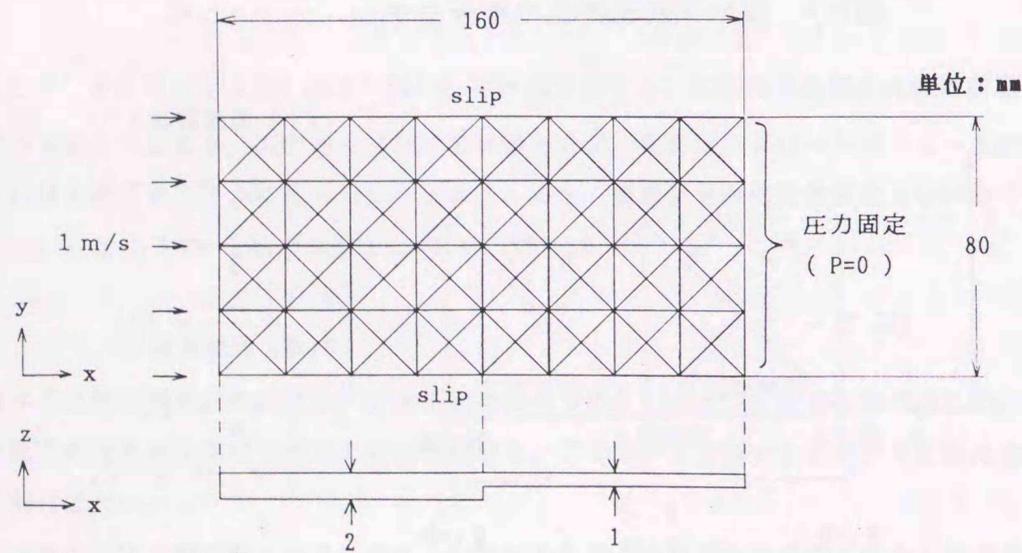


図2-7 計算体系

このような解法を採ることにより、接合する面に関係なく同一のアルゴリズムで計算を進めていくことが出来る。

## 2.3 解析結果

### 2.3.1 平行平板間一様流

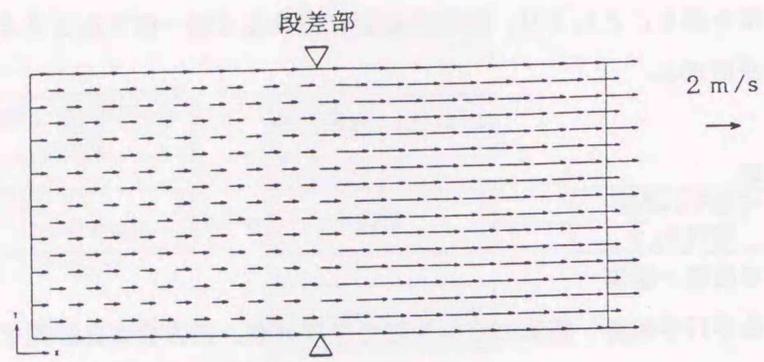
$\delta$  が変化する平行平板間一様流の定常状態の速度分布、圧力分布を計算する。計算体系は図2-7に示した通りで、 $\delta$  の比が  $1/2$ 、出口は圧力固定の自由流出境界とし、側壁はslip条件である。平行平板間層流に対しては、圧力損失と平均流速との関係が解析的に求まり、指数則流体に対して次式で表わせる。

$$\Delta P = \frac{2L}{\delta} \eta_0 \left\{ \frac{2(1+2n)}{n\delta} u \right\}^n \quad \dots \dots (2.60)$$

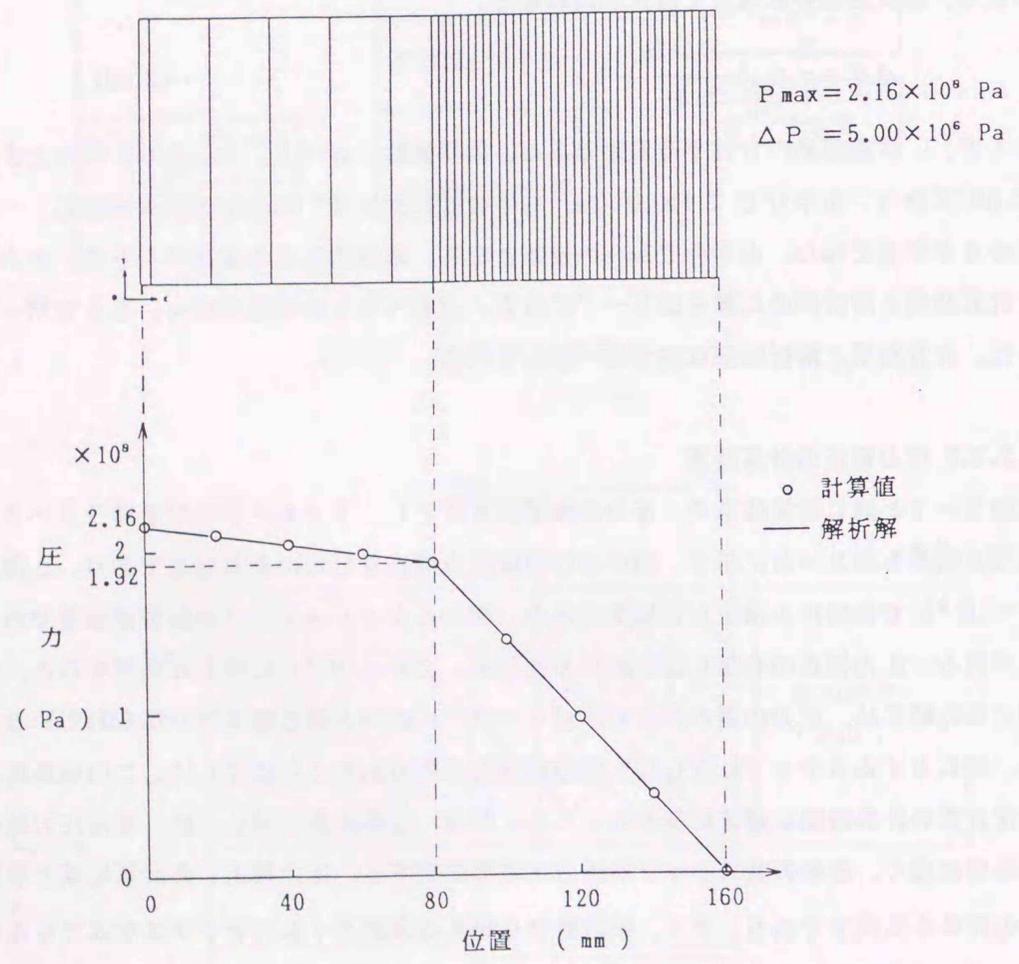
ここで、 $L$  は流路長、 $u$  は平均流速である。物性値は、 $n=1$ 、 $\eta_0=100 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  とする。(2.60)式から、左半分で  $2.4 \times 10^7 \text{ Pa}$ 、右半分で  $1.92 \times 10^8 \text{ Pa}$  の圧力損失が生じ、一様流入ゆえ左半分で  $1 \text{ m/s}$ 、右半分で  $2 \text{ m/s}$  の流速となる。本解法による速度ベクトル、圧力分布の計算結果と解析解の比較を図2-7に示す。速度ベクトルの結果は  $q_i$  を  $\delta$  で割って示した。計算結果と解析結果は完全に一致している。

### 2.3.2 圧力補正の計算結果

図2-7と同じ計算体系で、圧力の初期値を零とし、タイムステップをパラメータに計算した結果を図2-8に示す。図中の○印は圧力補正をしない計算結果であり、△印は  $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$  で毎回圧力補正した結果である。図からタイムステップの影響が顕著であることが判る。圧力補正の有無による結果の差異を、 $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$  に対して比較すると、圧力補正した結果は、圧力の遅れがなく、 $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$  の時と同じ収束性が得られている。即ち、同じタイムステップに対し  $10^4$  倍の高速化が得られたことに等しい。この効果は、非定常計算の計算時間に顕著に現われてくる。なお、定常問題に対しては、毎回圧力補正する必要はなく、最初の数ステップで圧力は定常に達する。圧力補正した計算結果と解析解との差は4%以下である。また、拡散数から決まる最適タイムステップは次式で与えられ、本計算例の場合は  $8 \times 10^{-5} \text{ s}$  である。



(1) 速度ベクトル



(2) 圧力分布

図2-7' 板厚の異なる平板内の2次元流れの計算例

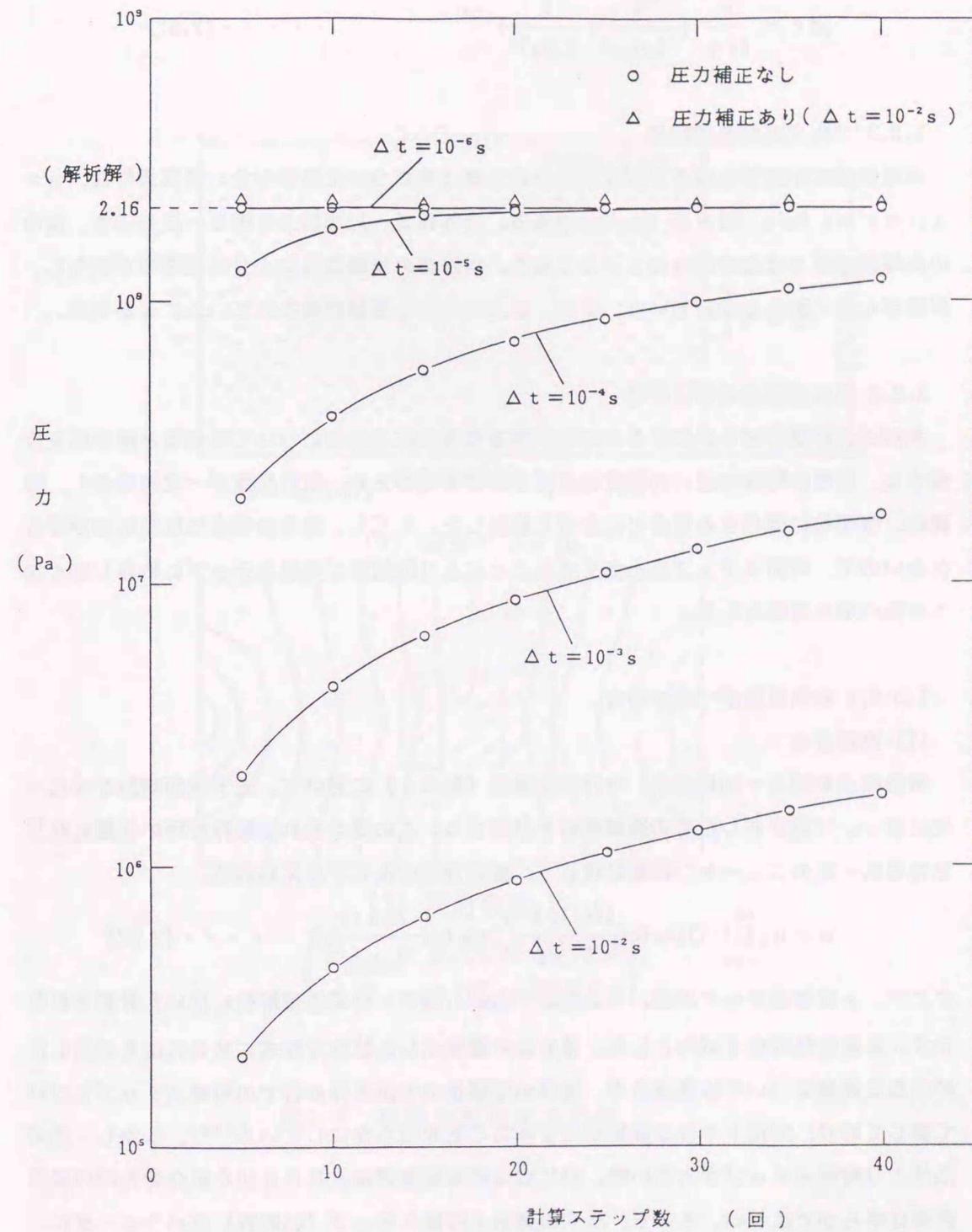


図2-8 圧力と計算ステップの関係

$$\Delta t = \frac{\rho}{12\eta} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right\}^{-1} \dots \dots (2.61)$$

### 2.3.3 二次元流れの解析例

矩形領域の中央部の厚さが異なる場合の二次元流について解析した。計算条件は、 $n = 1$ 、 $\eta_0 = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、厚さが  $2\text{mm}/1\text{mm}$  である。計算体系、計算結果を図2-9に示す。図中の斜線部の厚さは他の部分の  $1/2$  である。斜線部の流動抵抗により流速分布が変化し、斜線部を巻く流れとなっている。また、圧力分布にも影響が現われていることが判る。

### 2.3.4 混合型解法の精度評価

本解法の計算精度を評価するために、流速分布と圧力分布について数値解と解析解を比較する。粘性の特性の違いが精度に及ぼす影響を見るため、粘性係数が一定の場合と、時間的、空間的に変化する場合とに分けて検討した。ただし、後者の場合には解析解が得られないので、時間ステップを小さくすることにより数値解が時間ステップに依存しなくなる極限の解を基準とした。

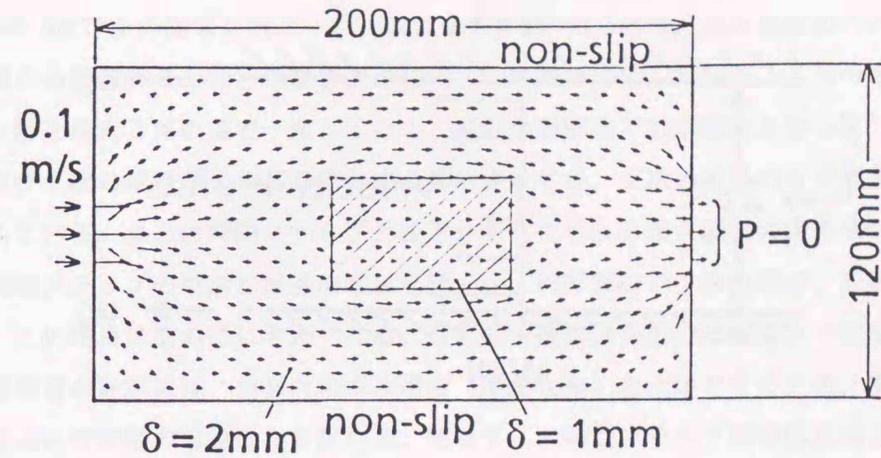
#### 2.3.4.1 粘性係数が一定の場合

##### (1) 流速分布

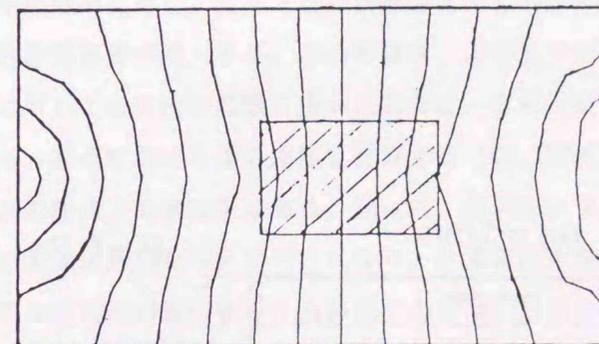
解析体系を図2-10に示す。平行平板流路（幅  $2\delta$ ）において、上下壁が時刻  $t=0$  に一定速度  $u_0$  で動きだした時の過渡変化を計算する。この場合流れは純粋剪断の状態になり、粘性係数一定のニュートン流体に対して、流速分布は次式で与えられる。

$$u = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \text{erfc} \left\{ \frac{2(n+1)\delta - y}{2\sqrt{\nu t}} \right\} + \text{erfc} \left\{ \frac{2n\delta + y}{2\sqrt{\nu t}} \right\} \right] \dots \dots (2.62)$$

ここで、 $y$  は壁面からの距離、 $u$  は流速である。図2-11に数値解析に用いた計算条件を示す。動粘性係数は  $1 \text{ m}^2/\text{s}$  とした。差分法で離散化した拡散方程式にRRK法を適用した時の誤差評価については里深らが、通常の陽解法の安定条件近傍での時間ステップについて論じており、実用上十分な計算精度であることを明らかにしている<sup>(38)</sup>。しかし、安定条件より時間ステップが大きい時、特に混合形有限要素法とRRK法を組合せた時の誤差評価は明らかではない。そこで、次式の無次元時間ステップ（拡散数）をパラメータに、歪み速度、圧力の内挿関数が1次（要素内で線形）と0次（要素内で一定）の場合について解析精度を評価する。



(1) 流速ベクトル



(2) 圧力分布

$$\begin{cases} P_{\max} = 3.16 \times 10^5 \text{ Pa} \\ \Delta P = 2.00 \times 10^4 \text{ Pa} \end{cases}$$

図2-9 板厚の変化する平板

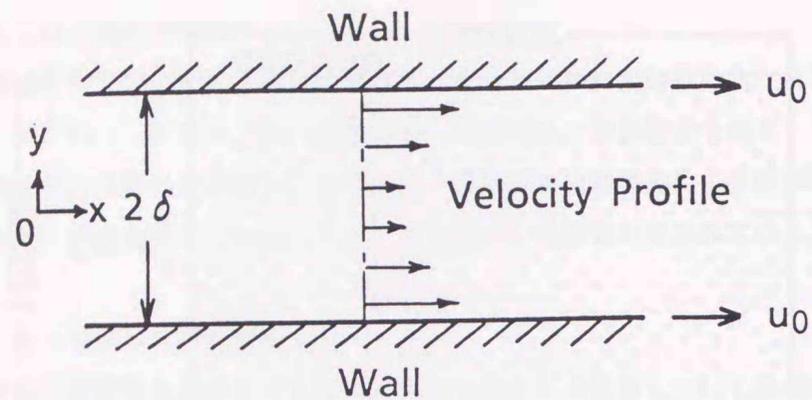


図2-10 可動壁に挟まれた流体

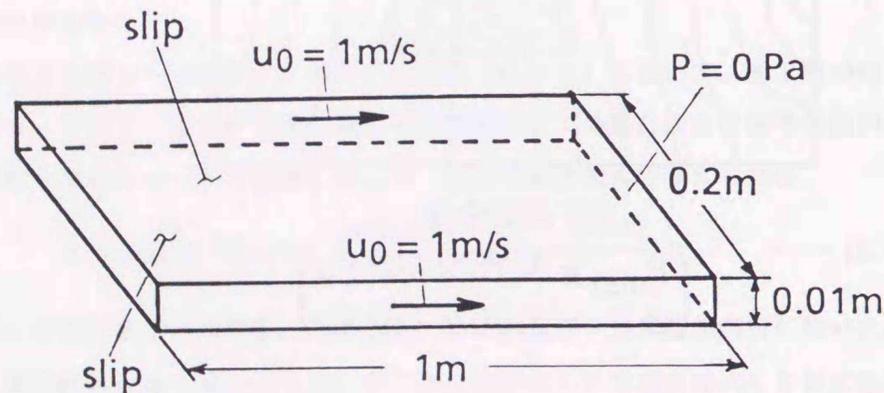


図2-11 計算条件

$$\Delta t^* = \nu \Delta t / \Delta x^2 \quad \dots \dots (2.63)$$

(2.63)式は粘性を基準とした無次元時間であり、 $\Delta x$ は要素の代表長さである。通常の陽解法の安定条件は、拡散方程式に対して $\Delta t^* \leq 0.5$ となる。

$\Delta t^* = 0.5$ 及び1の結果を図2-12、13に示す。 $\Delta t^* = 0.5$ の時、歪み速度の内挿関数が0次の場合の数値解(△印)は解析解と最大2%の差で一致している。1次の場合(○印)も解析解と最大3%の差で一致している。通常の陽解法では不安定となる $\Delta t^* = 1$ の時は、0次及び1次の結果共に誤差が増大する傾向を示すが、1次の結果の方が誤差の増加は抑制されている。以上の時間ステップと流速分布に見られる最大誤差の関係を図2-14に示す。時間ステップの増加は誤差の増加を招くが、内挿関数が1次の場合、その増加率は小さい。この理由は次の様に考えられる。0次の内挿関数を用いる場合、一時間ステップ間の節点流速の計算には、要素内の歪み速度(速度勾配)を一定とするため、節点自身及び隣接節点の前段階の流速のみを用いる。従って、一時間ステップ間の節点流速は隣接節点の影響しか受けない。このため、時間ステップが1を越える場合、物理的には隣接節点を越えて現象が進むのに対し、計算上は隣接節点までしか影響が進まないために、粘性が低く見積もられ計算誤差が増大する。この事情は、差分法で空間を離散化した場合も同様である。これに対し1次の内挿関数を用いた場合は、まず対象としている節点とその隣接節点の流速から、節点における歪み速度を計算する((2.27)式)。次に、求めた歪み速度から次ステップの節点上の流速を求める。従って、前ステップの流速が次ステップでは、二つ隣の節点の流速に影響を与えることになり、計算精度を維持することができる。以上の理由から、歪み速度の内挿関数が1次の場合の方が、0次の場合より精度が良い。換言すると、同一計算精度に対し、1次の方が時間ステップを大きく取れる。図2-14のケースでは、許容誤差を5%とすると、0次の場合には $\Delta t^* = 0.7$ であるのに対して、1次の場合は $\Delta t^* = 2.0$ と約3倍の時間ステップを取れ、10%とすれば約4倍となる。

(2) 圧力分布

長方形ダクト内の流れについて、定常状態の圧力分布に対する1次の場合の数値解と解析解とを比較する。又、入口圧力が定常に達するまでの時間変化と時間ステップとの関係について検討する。計算条件は図2-15に示した通りで、 $\nu = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $\rho = 1 \text{ kg}/\text{m}^3$ である。流れが定常に達した時の流路中心の流れ方向の圧力分布を図2-16に示す。数値解は入口近傍を除いて2%以内で解析解と一致している。入口近傍の不一致の原因は、解析解では流速分布が流れに沿って変化しないとしているのに対して、数値計算では流速分布が変化していることに依る。

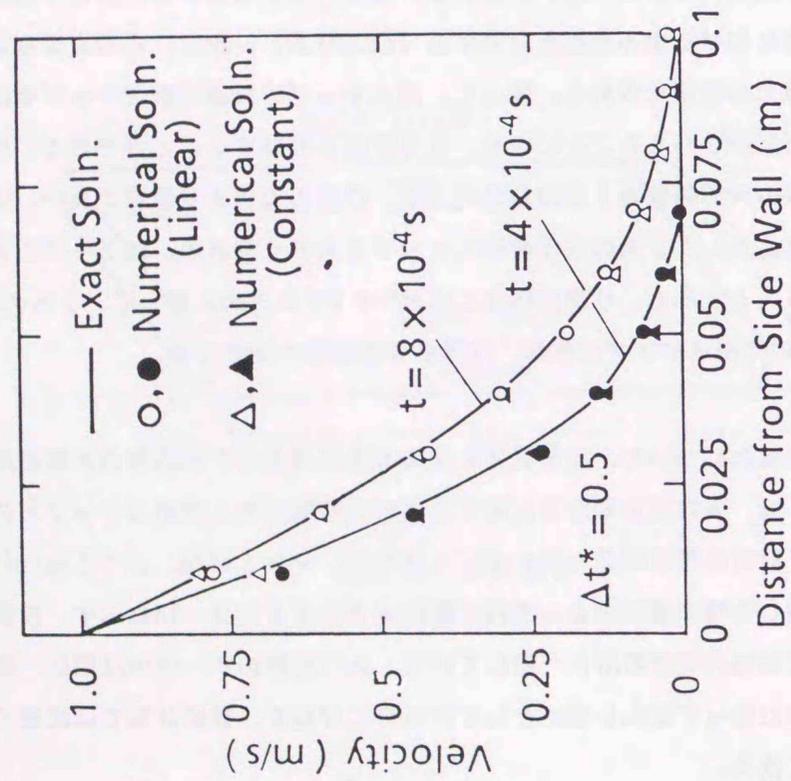


図2-12 流速分布の非定常解(1)  
(粘性係数が一定の場合)

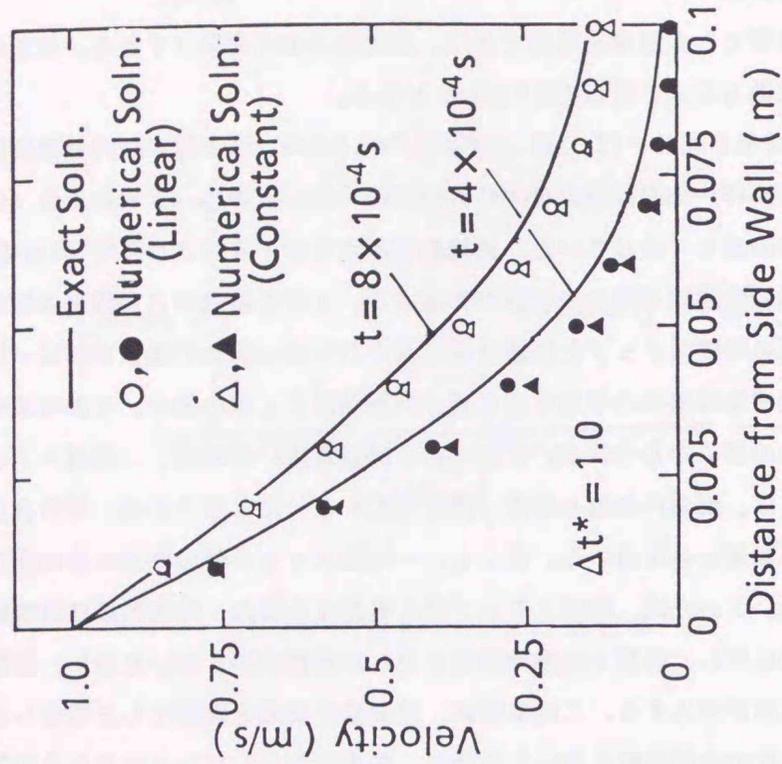


図2-13 流速分布の非定常解(2)  
(粘性係数が一定の場合)

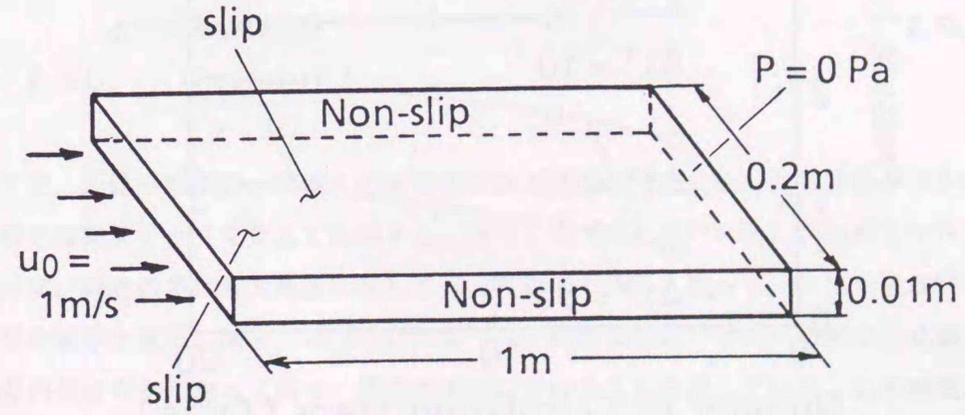


図2-15 長方形ダクトの計算条件

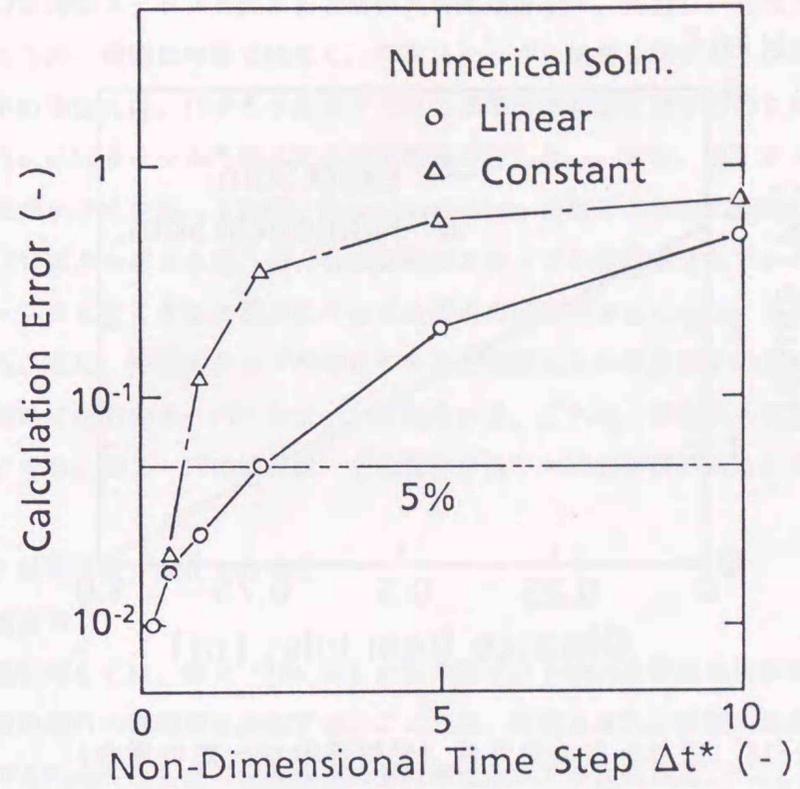


図2-14 時間ステップと計算誤差の関係

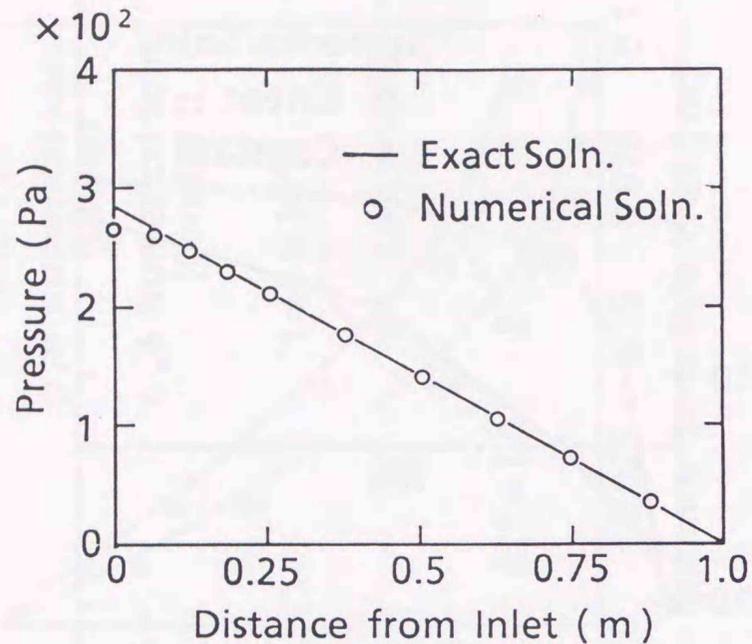


図2-16 圧力分布の定常解 (粘性係数が一定の場合)

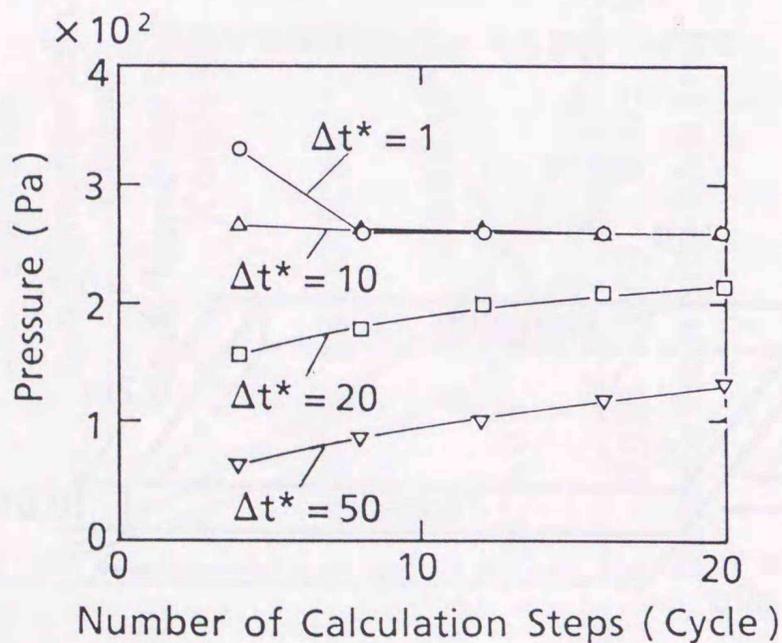


図2-17 時間ステップを変えた時の入口圧力変化 (粘性係数が一定の場合)

図2-17に時間ステップを変えたときの入口変化を示す。ただし、時間ステップの影響を比較するため、横軸は時間ではなく、時間ステップを進める際のサイクル数にした。 $\Delta t^*$  が10以下の場合には、10サイクル以下で圧力が準定常状態に達するのに対し、 $\Delta t^*$  が10以上の場合には10サイクルを越えても定常状態に達しない。また、 $\Delta t^*$  を大きく取ると圧力上昇勾配が小さくなる。これは、Fractional Step 法の圧力解法に起因している。圧力増分は(2.24)式から求まるが、(2.24)式は時間ステップの逆数を含んでいる。すなわち、時間ステップを大きくすると残差による圧力補正の効果が小さくなり、前ステップの影響が強くなる。逆に、時間ステップが小さすぎると残差による圧力補正の効果が強くなりすぎて、過渡時に圧力のオーバーシュートが見られる。これは、粘性が大きくなるほど顕著に現われてくる。図2-17の場合は、その境界が $\Delta t^* = 10$ の近傍にあると考えられる。

#### 2.3.4.2 粘性係数が増加する場合

##### (1) 流速分布

定常状態に対しては、図2-15に示した長方形ダクト内の定常流の解析解と、歪み速度、圧力が1次の場合の数値解を比較する。ここでは、指数 $n$ を0.5、擬塑性粘度は一般性を失わないので $1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ とした。定常状態の解析解は次式で与えられる。

$$u = \frac{Q}{\delta^{2+1/n}} \frac{1+2n}{2(1+n)} [\delta^{1+1/n} - (\delta-y)^{1+1/n}] \quad \dots \dots (2.64)$$

計算結果を図2-18に示す。数値解は最大2.4%の差で解析解と一致している。

次に非定常状態の流速分布について検討する。指数則流体を取り扱うために、(2.63)式で定義した無次元時間の代わりに次式で無次元時間を定義する。

$$\Delta t^{**} = \nu_e \Delta t / \Delta x^2 \quad \dots \dots (2.65)$$

ただし、
$$\nu_e = \frac{\eta_0 (\Delta \bar{u})^{n-1}}{\rho (\Delta x)}$$

ここで、 $\Delta \bar{u}$ は平均流速と壁面との速度差である。図2-15に示した長方形ダクト内の流速分布を時間ステップを変えて比較する。図2-19 (1)に $\Delta t^{**} = 0.1, 0.25$ の2ケースについて示す。両者の差は最大流速に対して1.2%以下である。従って、ここでは $\Delta t^{**} = 0.1$ の結果を基準とする。図2-19 (2)には $\Delta t^{**} = 1$ の結果を $\Delta t^{**} = 0.1$ の結果と比較して示す。両者の差は大きくなっており、誤差が増大していることを示している。この誤差の増加を $\Delta t^{**}$ をパラメータとして調べたのが図2-20である。図では時刻 $t = 4 \times 10^{-3}$ 秒後の $\Delta t^{**} = 0.1$ の結果を基準とした時の、基準値との差を縦軸にしている。前節同様、許容誤差を

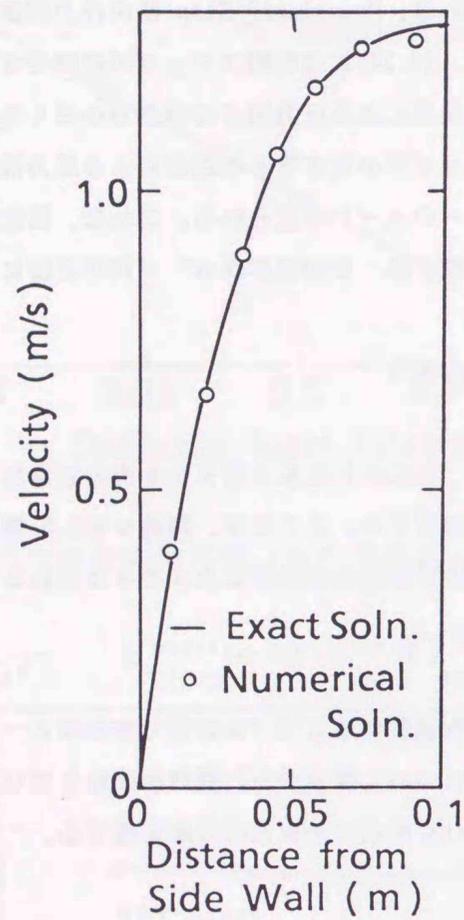


図2-18 流速分布の定常解 (粘性係数が変化する場合)

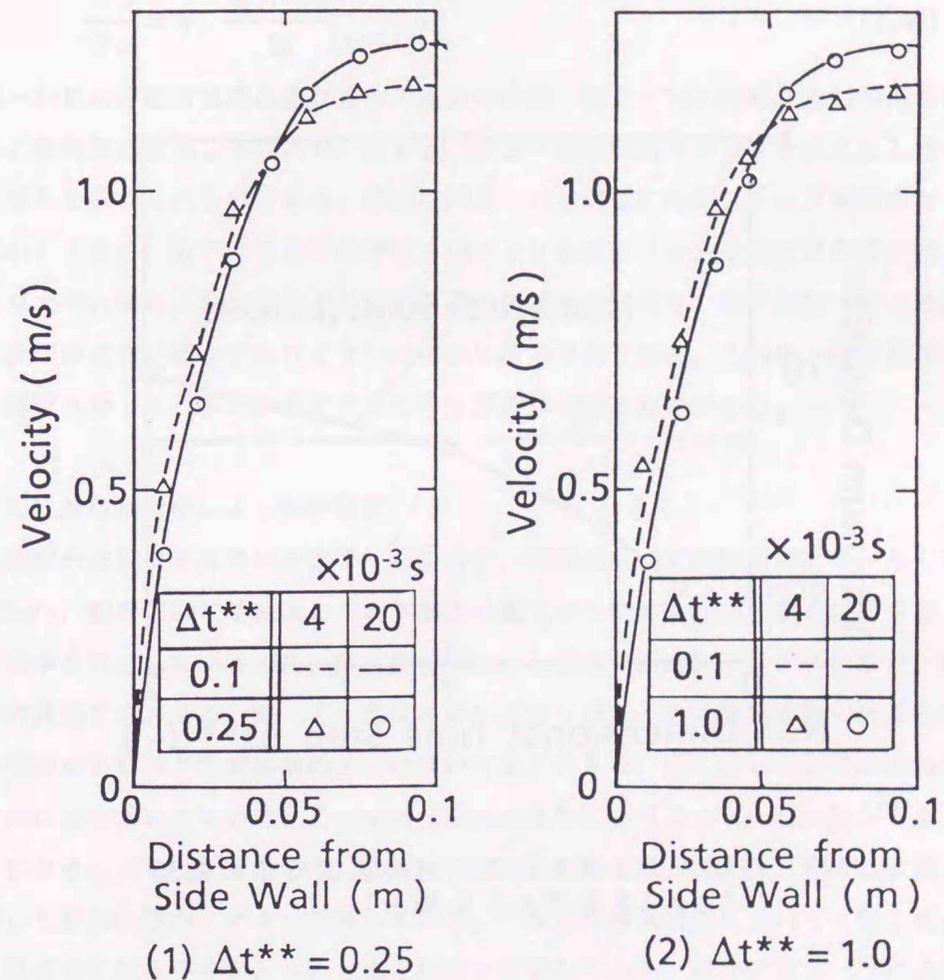


図2-19 流速分布の非定常解 (粘性係数が変化する場合)

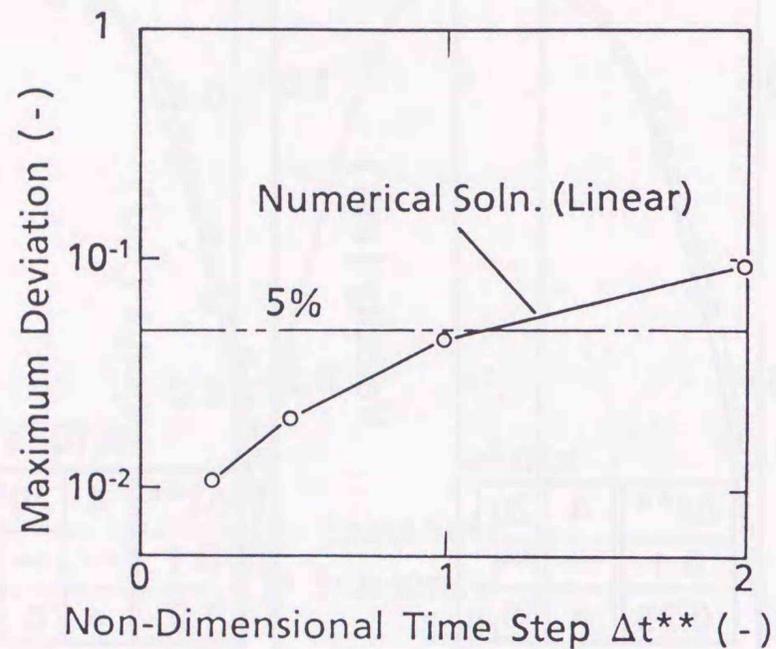


図2-20 時間ステップを変えた時の流速分布の偏差 ( $\Delta t^{**}=0.1$ を基準とした場合)

を5%とすれば $\Delta t^{**}$ は1.2以下、10%とすれば2以下にする必要がある。

(2) 圧力分布

前節と同様、定常状態に対しては解析解と、非定常状態に対しては定常値に達するまでの圧力変化をそれぞれ比較する。定常時の流れ方向の圧力分布は次式で与えられる。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta_0 \frac{Q(1+2n)}{2n} \left( \frac{1}{\delta^{2+1/n}} \right)^n \dots \dots (2.66)$$

図2-21に示す定常状態の流れ方向の圧力分布は、図2-16と同様に入口付近を除いて数値解と解析解は誤差2%以内で一致する。図2-22は時間ステップを変えたときの入口圧力の変化を表わしたものである。横軸は図2-17と同様に時間ステップ更新のサイクル数で表わしてある。 $\Delta t^{**}$ が5以下の時は、16サイクル前後で圧力は準定常状態に達するが、5より大きい場合には定常値よりも低い値に収束する。また、粘性係数一定の場合と異なり、 $\Delta t^{**}$ が大きい場合でもサイクルの初期に圧力が高くなる。これは、速度勾配が小さく、かつ指数  $n$  が1より小さいので大きな粘性が計算されるためである。

2.3.5 流跡積分法による解析結果

流跡積分法による計算例を図2-23に示す。初期温度 0℃の矩形領域に、左上部より流速2.5m/s、温度 100℃で流入し、右下部より流出する時の温度の移動を計算する。流体の熱伝導率を0としているため、解析解を求めると温度界面はステップ状になり、図上では一本の曲線で表わせる。従って、温度界面に広がりがあるのは数値拡散に依るものであり、その幅が小さいほど数値拡散の少ない良い方法と言える。図に示した従来法はEuler Explicit法により求めたもので、この場合 Courant条件により最大 Courant数が1以下となるようにタイムステップを定めた。流跡積分法による結果は、従来法と比較して最大拡散幅に対して数値拡散が1/4に低減している。一次元の移流問題について、風上法とRRK法を組合せて無条件安定とした方法と精度を比較してみる。結果は図2-24に示した通り、風上法+RRK法は Courant数が大きくなるにつれて温度の伝播が遅れるのに対し、流跡積分法の場合は Courant数の増大に対しても温度伝播の遅延は生じない。

2.4 結 言

本論文では、非定常3次元の高粘性指数則流体の流れを解析する準陽解法を提案した。本手法の特徴は次の通りである。

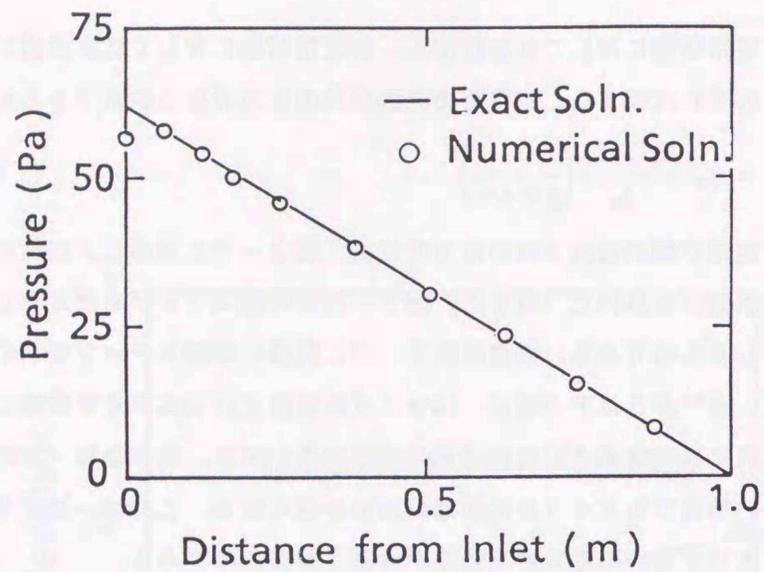


図2-21 圧力分布の定常解 (粘性係数が増加する場合)

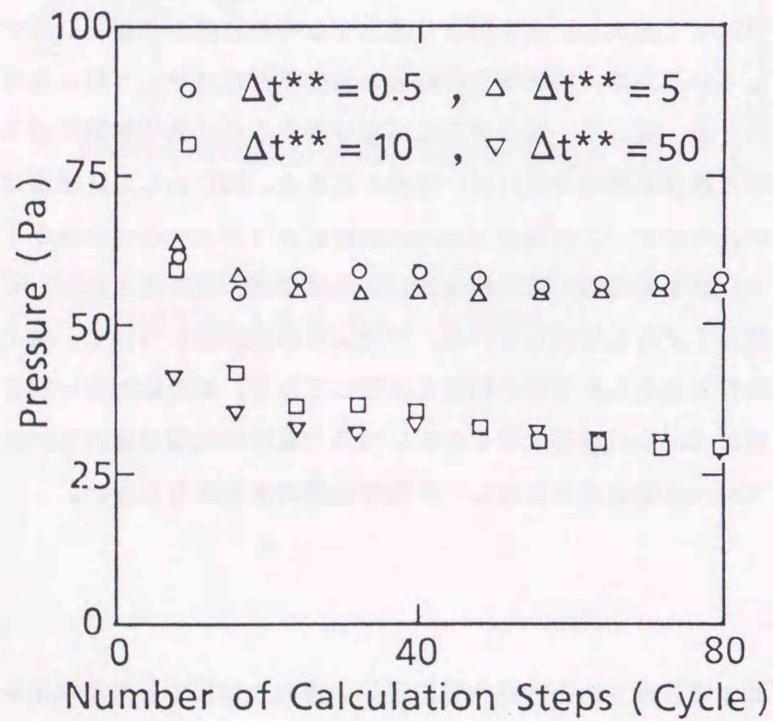
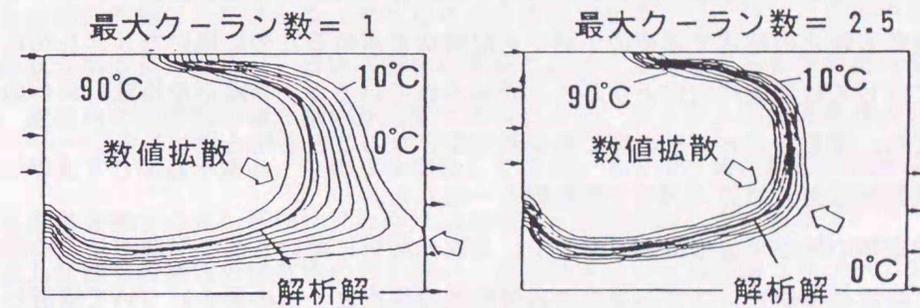


図2-22 時間ステップを変えた時の入口圧力変化 (粘性係数が増加する場合)



(1) 計算条件 (熱伝導率 = 0 W/m°C)



(2) Euler Explicit法

(3) 本手法

図2-23 流跡積分法による誤差の低減効果

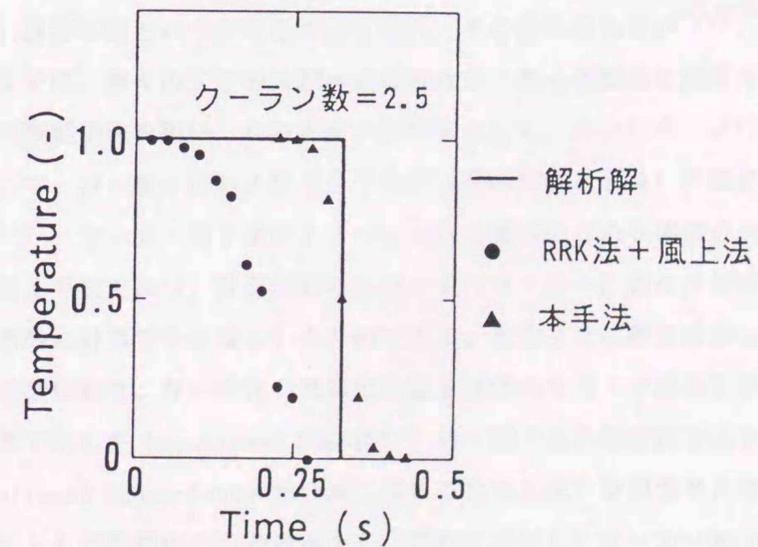


図2-24 1次元移流問題の計算例

- (1) Fractional Step 法と R R K 法を組合せて無条件安定な準陽解法とした。
- (2) 詳細解析用の 3 次元解析では歪み速度も変数とする混合形の有限要素法を用いて空間を離散化した。
- (3) パラメータサーベイ用に平板間距離  $\delta$  の空間分布を考慮した擬似 3 次元で定式化し、 $\delta$  の異なる薄肉平板内の流れを解析可能にした。
- (4) エネルギー式の解法については、移流項に流跡積分法を、拡散項に R R K 法を適用する分離解法により無条件安定な陽解法とした。  
提案した解法を矩形平板の流れに適用し、解析解および指数則モデルで表される模擬流体を用いて実施した実験結果と比較検討した。得られた主な知見は以下の通りである。
- (5) 運動方程式の解法で流速の予測子を陽解法で求めるために用いた R R K 法は、線形問題に対しては無条件安定となることが知られているが、非線形な指数則流体の流れに対しても、指数  $n$  が  $n < 1$  の時に無条件安定となることを明らかにした。
- (6) 定常解は最大誤差 2.4% で解析解と一致した。
- (7) 非定常の矩形平板の流れに対して、3 次元解析に用いた混合型解法による時間ステップと精度の関係を、ひずみ速度の内挿関数が零次と一次の場合について検討し、内挿関数が一次の場合、零次と比較して許容誤差 5% の時に 3 倍、10% の時に 4 倍時間ステップを大きくとれることがわかった。
- (8) エネルギー式の移流項の計算に用いた流跡積分法の数値解は、無条件安定な風上法と R R K 法を組合せた手法で求めた結果と比較して、温度伝播の遅れもなく、数値拡散も小さいことがわかった。

### 3.1 緒 言

自由表面を持つ非定常現象は、射出成形、波の運動、ダムが決壊、インクジェットなど種々の状況で現れ、工学的にも重要な問題となっている。これら自由表面を持つ流れの解法として、有限要素法及び差分法を用いた種々の方法が提案されているが、流体の運動を規定する座標系の選び方により 2 種に大別できる。その 1 つがラグランジュ座標系を用いて、自由表面の移動と共にメッシュを変形させる方法である<sup>(42)・(43)</sup>。この手法は自由表面の形状が精度良く求まり、自由表面の境界条件の設定が容易である等の利点を持つ。しかし、流路内の構造物の取り扱いが困難であることと、メッシュの変形量が大きくなると誤差が増大する欠点がある。この点を改良したのが、メッシュの変形量が大きくなるとメッシュを再分割する A L E (Arbitrary Lagrangian Eulerian) 法である<sup>(44)・(45)</sup>。しかし、A L E 法も流路内の構造物の取り扱い、およびメッシュ再分割 (リゾーニング) の手間と計算時間の増加が問題となる。

他方、空間に固定されたオイラー座標系を用いた手法に、差分法で開発された M A C (Marker And Cell) 法がある<sup>(5)</sup>。この方法は、質量を持たない仮想的なマーカー粒子を導入し、マーカー粒子の有無により自由表面を表現する手法である。この M A C 法系統の方法は、自由表面の位置の計算精度は前者に劣るものの、固定メッシュのまま任意の自由表面問題に適用可能という大きな利点を持ち、その適用例も多い<sup>(46)</sup>。

本論文では、種々の工学的問題への応用及び三次元の複雑な流路内の流れへの適用を考えて、有限要素法を用い、自由表面の計算法として、S O L A - V O F 法<sup>(47)</sup>に基づいて改良したマーカー粒子法およびラグランジュ型の解法を改良した部分メッシュ生成法を提案する<sup>(48)</sup>。マーカー粒子法は 1 メッシュ内の流体の占める体積分率の輸送方程式をマーカーで解く手法であり、計算領域の区分によりマーカー計算の計算容量、計算時間を減らして効率的に計算できる様にしたものである。本論文では射出成形シミュレーションへの適用を念頭に置き、非圧縮性の高粘性指数則流体のクリープ流れを対象とし、速度の計算には前章で示した Fractional Step 法<sup>(6)</sup> の一種である流速修正法と有理ルンゲクッタ法<sup>(34)</sup> (Rational Runge-Kutta Method, 略して R R K 法) を組合せた準陽解法を用いる。上記の手法を L 型流路内の自由表面をもつ流れに適用し、マーカー粒子法と部分メッシュ生

成法とを比較検討する。また、実成形品への適用結果および凹レンズ形状に対する三次元計算の実施により、本手法の有効性を確認する。なお、本論文で述べる手法では自由表面の表面張力は考慮しない。従って、自由表面への液滴落下や液滴同士の衝突等は対象外とする。本章ではさらに、射出成形シミュレーションで必要となるランナー（射出成形機と金型内キャビティ間を結ぶ流路）の解析手法について述べる。

### 3.2 数値解法

#### 3.2.1 速度の計算

対象とする非圧縮性の高粘性指数則流体のクリープ流れ (Reynolds数 $\leq 1$ )の速度の計算は前章に詳述した手法を用いることとし、ここでは概要のみを記す。計算手順は以下の様になる。

(1) 流速の予測子 $\tilde{v}_i$ を陽的に求める。

$$\tilde{v}_i = v_i^m + \Delta t / \rho \cdot f(P^m, v_i^m, \eta^m) \quad \dots \dots (3.1)$$

ただし、 $f$  : (2.12)式の右辺

(2) 予測子 $\tilde{v}_i$ から、時刻 $m+1$ で連続の式を満たす様に圧力増分 $P^*$ を求める。

$$P_{,ii}^* = \rho \tilde{v}_{i,i} / \Delta t \quad \dots \dots (3.2)$$

(3) 圧力増分 $P^*$ から時刻 $m+1$ の解を求める。

$$v_i^{m+1} = \tilde{v}_i - \Delta t / \rho P_{,i}^* \quad \dots \dots (3.3)$$

$$P^{m+1} = P^m + P^* \quad \dots \dots (3.4)$$

(3.1)式はRRK法を用いて解く。RRK法の定数には里深ら<sup>(38)</sup>の推奨値を用いた。上記スキームは擬塑性流体( $0 < n \leq 1$ )に対しても無条件安定となる<sup>(35)</sup>。また、(3.2)式はwave front法で陰的に解く。

#### 3.2.2 自由表面の解法

自由境界の移動量 $l_s$ は、自由境界における速度ベクトル $v_s$ を用いて $l_s = \int v_s \cdot dt$ で表せ、この式を時間、空間に対して離散化して解くことになる。従って、自由境界の移動に伴い変化する計算領域の離散化が重要な問題となり、離散化手法の違いにより、次の3種に大別できる。

- (1) Lagrange座標系で流体の運動を記述する方法
- (2) 固定(Euler)座標系で流体の運動を考え、自由境界を何らかの関数で表現する方法

#### (3) 自由境界近傍のみをLagrange座標系で取扱う方法

(1)の方法は自由境界の追跡が容易で、メッシュを流線に沿って分割するため精度も良い。しかし、全メッシュが変形するため、アルゴリズムが複雑で、計算時間が増大する欠点を持つ。また、自由境界の移動量が大きい場合、メッシュの変形量が大きくなって精度が低下する。そこで、メッシュの変形量が大きくなったら、メッシュを分割し直すALE法<sup>(4)</sup>が提案されている。

(2)の方法はメッシュの再計算、再分割は不要であるが、各時刻の自由境界の位置を決定する必要がある。自由境界の位置決めの違いにより各種の方法があり、代表的なものがMAC法<sup>(5)</sup>である。MAC法は流体中に質量を持たない仮想的なマーカー粒子を考え、マーカー粒子の追跡により自由境界の形状を解析する方法である。この方法は任意形状の自由境界を追跡でき、自由境界の合体・分岐も取り扱える。自由液面への液滴落下<sup>(60)</sup>、波、ノズルからの滴生成<sup>(46)</sup>等その適用例は多い。しかし、マーカー粒子の位置計算、記憶といった手続きが必要で、記憶容量、計算時間共に増大すること、および自由境界の位置が正確に求まらないことの2点が欠点となる。上記の欠点を補うため、1メッシュ内で流体のしめる体積分率 $F$ から自由境界の位置を決定する方法が考えられ、SOLA-VOF法<sup>(47)</sup>、FAN (Flow Analysis Network)法<sup>(61)</sup>に採用されている。SOLA-VOF法では非圧縮性を仮定して、流体の体積分率 $F$  ( $0 \leq F \leq 1$ )の保存式を満たすように運動方程式を解く。

$$F_{,t} + (v_j F)_{,j} = 0 \quad \dots \dots (3.5)$$

この方法はMAC法と同様の利点を持ち、計算容量は減少するが、やはり自由境界の位置は正確に求まらない。また(3.5)式は移流方程式であり、タイムステップがクーラン条件 ( $u \cdot \Delta l / \Delta t < 1$ )により大きくできず、数値拡散が問題となる。

(3)の方法は(1)と(2)の折衷的な方法で、任意形状の自由境界が正確に求まり、合体・分岐も取り扱える。また、メッシュ再分割、変形が一部の領域に限定できるため、計算量の増加も少なく精度も良い。しかし、メッシュの大変形の防止策が必要なこと、および幾何学的形状を認識する必要があり、3次元への拡張が難しいことが短所となる。この方法は次の3種に区別できる。

- (a) 自由境界が移動する毎にメッシュを生成・追加する方法
- (b) 自由境界近傍のみメッシュを再分割する方法
- (c) 自由境界近傍のみメッシュを変形させる方法

(a)はポテンシャルフローに対して有効であるが、複雑形状には適用困難で、自由境界の振動には追従できない。(b)、(c)は基本的な考え方は両者変わらず、(c)の方法は最近、波の間

表3-1 自由境界の解法

解	法	特徴	長所	短所	適用例
固定メッシュ	MAC法 (FDM, FEM)	・マーカーの存在と隣接セルとの関係から自由境界を定義 ・ $F, t + (V_j \cdot F), j=0$ を満たす様に自由境界を決定, $F$ : 体積割合	・境界の取り扱い容易 ・アルゴリズム容易で適用例多 ・3次元可	・境界形状が正確には求まらない ・精度向上の為には, メッシュ小 ・計算量大	・自由表面への液滴落下 ・波 ・ノズルからの液滴生成 ・樹脂の流れ
	SOLA-VOF (FDM)			・3次元不可 ・複雑形状に適用困難 ・自由境界の振動に追従困難	・樹脂の流れ
メッシュ生成	全メッシュ生成 (FEM)	・移動する毎にメッシュを生成していく	・ポテンシャル流れに有効		
	部分メッシュ生成 (FEM)	・固定メッシュ+境界領域のメッシュ生成	・形状変化に対処容易 ・一部領域のみのメッシュ生成, 変形計算量小	・メッシュ生成, 変形する境界領域でのメッシュ形状, サイズの変形防止策が必要 ・3次元化が困難	・樹脂の流れ ・波
メッシュ切直し	ALE法 (FEM, BEM)	・流れに沿ったメッシュ分割 ・ポテンシャル場に対しては, BEM適用可	・境界形状に沿う滑らかなメッシュ ・精度高 ・3次元可	・毎回, 全メッシュを切り直す ・計算量大	・アスファルトの流れ し込み ・波 (BEM)

題に対してその適用例<sup>(51)</sup>が報告されている。

以上をまとめて表3-1に示す。どの方法も一長一短があり、解く問題により取捨選択が必要となる。本研究の対象となる流れは形状が複雑かつ自由境界の移動量も大きく、合体・分岐を取扱う必要がある。また、自由境界の位置を正確に求めたいことと、計算時間を可能なかぎり小さくしたいこと等の理由から、次の2つの手法を用いる。

### 3.2.2.1 マーカー粒子法

ここではSOLA-VOF法<sup>(47)</sup>同様に1メッシュ中の流体の体積分率 $F$ を導入する。体積分率 $F$ の変化は、自由表面の移動に他ならないから、(3.5)式に示す体積分率 $F$ の輸送方程式を解けば自由表面の移動が求まる。(3.5)式をマーカー粒子を用いて解く。質量を持たない仮想的なマーカー粒子は、流体の移動と共に輸送され、マーカー粒子の存在割合から体積分率 $F$ が求まる。各要素毎の体積分率の計算法を二次元の三角形要素を例に取り、図3-1に基づいて説明する。三角形の一边を $n$ 等分して、相似の小要素に分割した後、マーカー粒子の存在する小要素の個数から体積分率 $F$ を計算する。マーカーは辺を分割して、辺上から発生させる。辺上の発生位置は、分割数に合わせたガウス積分点からとする。通常のマーカー法の場合、マーカー粒子は入口から常に発生させており、時間と共にマーカー粒子数が増大し、マーカー計算の記憶容量、時間の増加をもたらす。これは三次元の計算の場合特に顕著になる。そこで、マーカー粒子の増加を抑え、効率的に計算する手法がいくつか提案されている<sup>(49), (50)</sup>。ここでは、図3-2に示す様に計算領域を要素全体が流体1又は2に属する領域と、要素内で流体1と2が混在している境界領域に区分して、マーカー粒子の発生を内部境界(流体1の占有領域と境界領域の境界)からとし、要素の体積分率 $F$ が1となった時点で、その要素内のマーカー粒子を消去することによりマーカー粒子の増加を抑制する。境界要素が内部要素として認識される過程を図3-3に示す。また、流れが停滞している死水域等で、マーカー粒子の個数が増加する場合に備えて、一定個数を超えたらマーカーを間引きする。

計算の際は自由表面をはさんだ2領域を二流体として解く。従って、自由表面の境界条件の設定は不要となる。ここで体積分率 $F$ を流体1の占有率とし、体積分率 $F=0.5$ のラインを自由表面と定義する。尚、物性値は流体1と2で異なることを考慮して、次の様に $F$ を用いて表す。

$$\rho = \rho_1 F + \rho_2 (1 - F)$$

$$C_p = C_{p1} F + C_{p2} (1 - F)$$

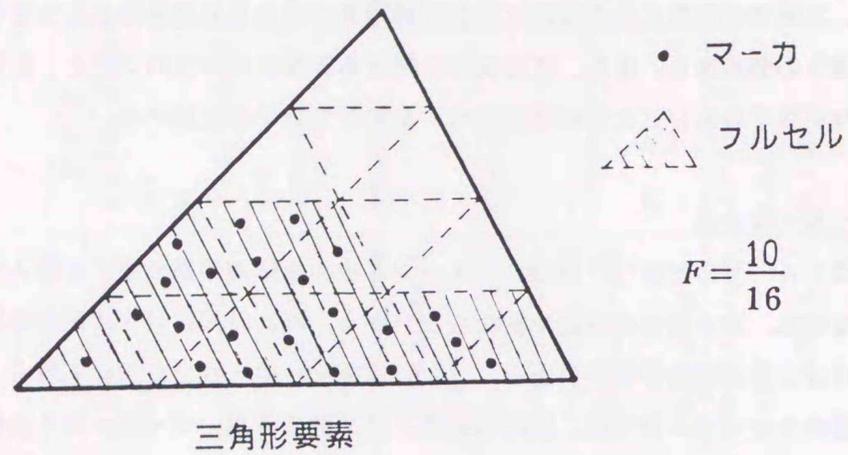


図3-1 体積分率 F の計算方法

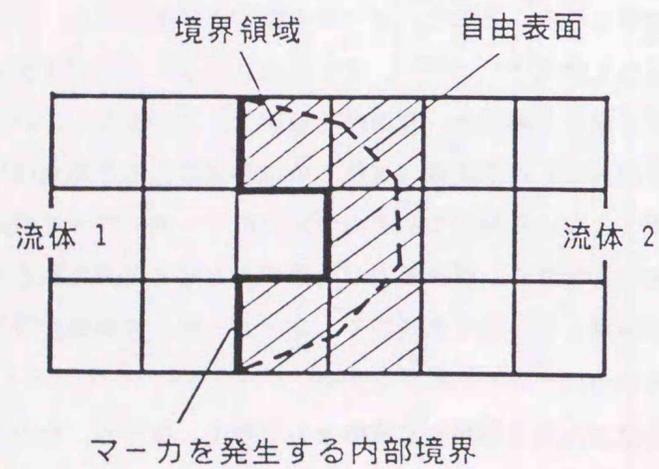


図3-2 二流体モデル

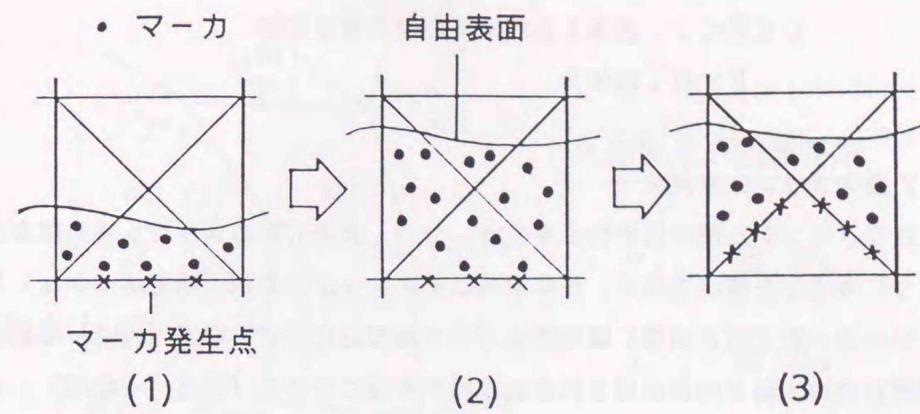


図3-3 境界要素が内部要素として認識される過程

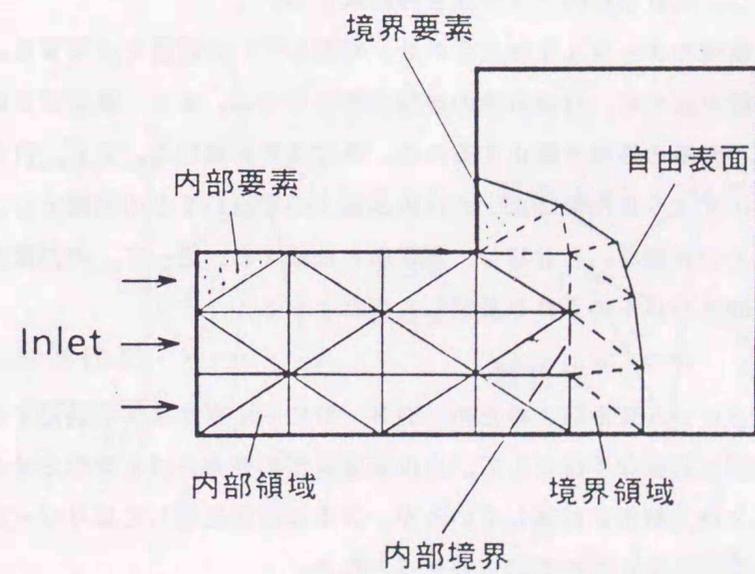


図3-4 計算領域の分割

$$\lambda = \lambda_1 F + \lambda_2 (1 - F) \quad \dots \dots \dots (3.6)$$

$$\eta = \eta_1 F + \eta_2 (1 - F)$$

ただし、  $F = 1$  ; 流体 1

$0 < F < 1$  ; 流体 1 と 流体 2 の間の境界領域

$F = 0$  ; 流体 2

### 3.2.2.2 部分メッシュ生成法

本手法はラグランジュ的手法の利点を生かしつつ、欠点であるメッシュ再分割が最小限になるように考慮した解法である。対象領域は予めメッシュ分割（固定メッシュ）し、計算領域をマーカー粒子法と同様に構成節点が全て流体側に属する節点（内点）で構成される内部領域と自由表面と内部領域で囲まれた境界領域に分ける（図3-4参照）。この様に領域を区分すれば、自由表面の移動に伴って作成するメッシュは境界領域に限定できる。計算手順は以下の様になる。

- (1) 時刻  $t^{m+1}$  の自由表面の位置を時刻  $t^m$  の自由表面の速度ベクトルに従い決定する。
- (2) 固定メッシュの各節点に対し、流体側か否かを判定し、内部境界及び内部領域を設定する。
- (3) 境界領域を設定し、境界領域のメッシュを再作成する。
- (4) 内部領域と境界領域のメッシュを加え合わせ、時刻  $t^{m+1}$  の速度を計算する。

(1)~(4) の手順を繰り返せば、自由表面の移動が解析できる。また、数値誤差の原因となる微小要素及び偏平要素の作成を防止するため、判定条件を設ける。まず、内点判定の際には、図3-5に示すように内部節点  $i$  と自由表面上の節点  $D_j^n$  との距離  $r_{ij}$ 、及び自由表面の構成辺  $l_j^n$  との距離  $d_{ij}$  を計算し、基準値と比較する。従って、内部節点のうち、内点として登録するのは、以下の条件を満たした場合となる。

$$r_{ij} \geq r_0 \quad \text{かつ} \quad d_{ij} \geq d_0 \quad \dots \dots \dots (3.7)$$

また、内点登録後のメッシュ変形防止のため、図3-6に示す判定条件を満足するとき更に2分割する。本手法と同様な手法として、自由表面近傍の要素だけを変形させる方法<sup>(51)</sup>があるが、共に2次元解析には適しているが、3次元解析に対してはリゾーニング領域の判定、メッシュ変形の防止等の煩雑さが欠点となる。

### 3.2.3 移動自由境界に伴う温度の内挿法

自由境界の移動に伴い、自由境界の近傍の領域では節点の物理量及び物性値が急激に変

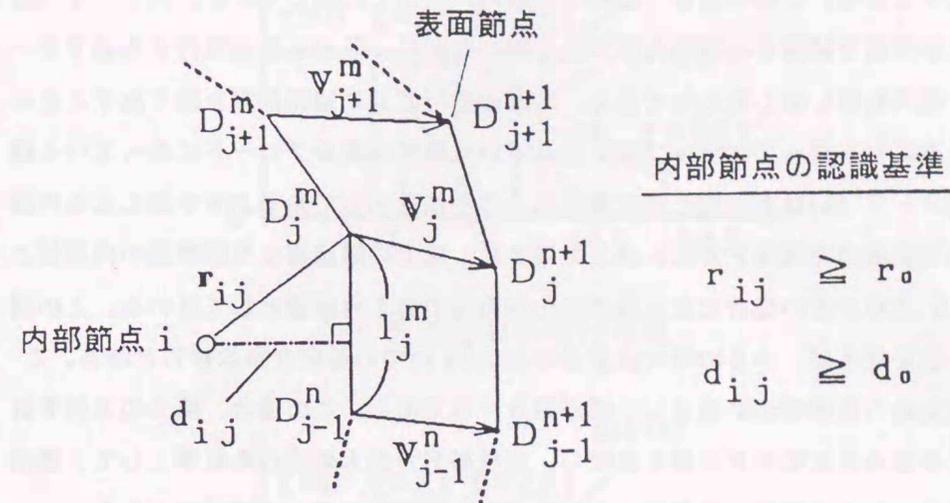


図3-5 内部節点の判定条件

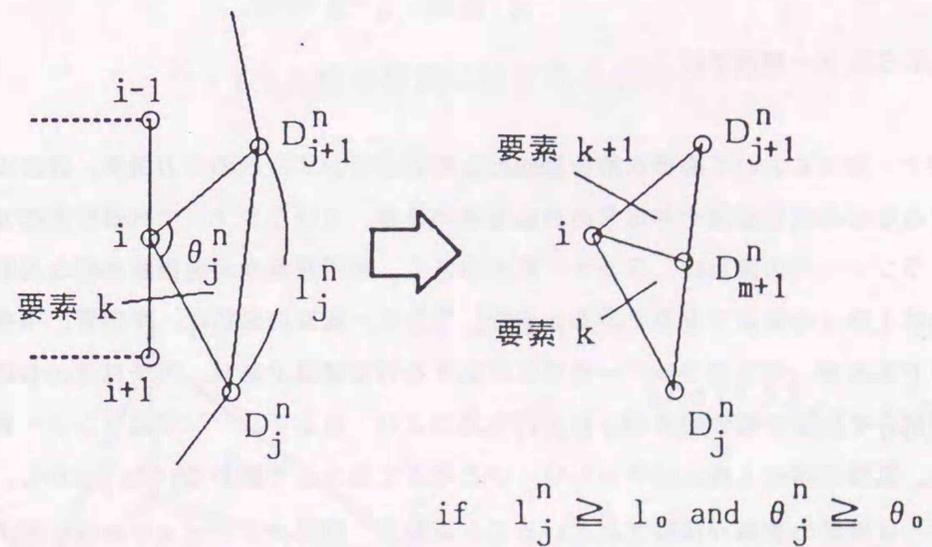


図3-6 要素の変形防止

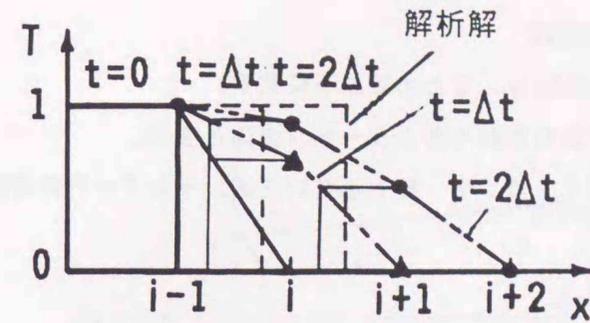
化するため、温度の輸送方程式を解く時に大きな数値拡散が生じる。この自由境界近傍の数値拡散は節点値を用いた内挿計算の際に生じるため、内挿計算に風上的な手法を用いて数値拡散を減少させる。この手法を一般的な線形内挿手法と比較して示す。図3-7 (a)は要素内を線形関数で補間する線形内挿手法を用いた際に、数値拡散が進行する様子を一次元の移流方程式に対し示したものである。時間の進行と共に補間計算を繰り返すことにより、本来流速にしたがってステップ状に進んでいく温度伝播がブロードになっていく様子が判る。図3-7 (b)は本研究で提案する風上的手法を示してある。本手法による内挿計算では、該当要素の充填率 $F$ が0.5 以上の場合に、風上の節点値を当該要素の内挿値として用い、0.5 より小さい場合には当該要素の前時刻の値を内挿値として用いる。この図の例では本手法を使えば、 $t=\Delta t$ の時の温度分布と $t=2\Delta t$ の時の温度分布は同じとなる。この手法を2次元の三角形要素に適用した例が図3-8である。この場合、風上の方向を決定するために各節点の充填率 $F$ の値を比較し、充填率 $F$ が最大の節点を基準として、要素内の点Aの充填率 $F$ の内挿値は充填率 $F$ と三角形の面積座標を用いて次式で与える。

$$F_A = F_1 \xi_1 + \frac{F_2 + F_3}{2} (1 - \xi_1) \quad \dots \dots (3.8)$$

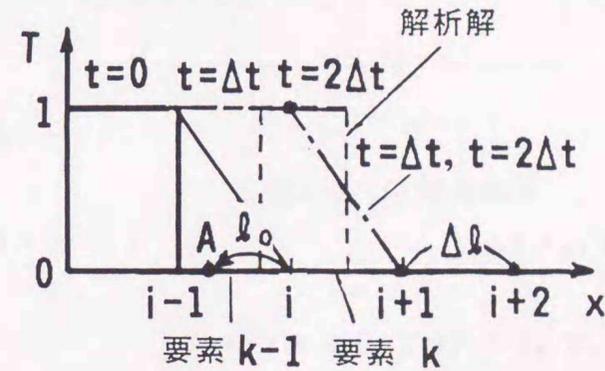
後は $F_A$ の値により内挿値を決定すれば良く、この場合は $F_A$ が0.5以上であれば点Aの温度の内挿値は節点1の値を代入することになる。

### 3.2.4 ランナー解析手法

ランナー解析において必要な解析機能としては、ランナー内の圧力損失、流路が複数に分離する場合の流量配分や非定常の自由境界の移動、及びランナーでの温度変化が挙げられる。ランナー内の流れは、ランナー径が小さく、解析対象が溶融樹脂の様な高粘性流体の場合は1次元の層流で近似できる。また、ランナー流路の形状は、半円管、平板、台形等様々であるが、全てのランナー形状に対応するのは煩雑であり、円管以外のものは等価直径を用いて円管に置き換える。以上の考え方より、従来手法<sup>(23)</sup>ではランナーを円管と仮定し、流路全体を1次元のネットワークと考えて差分法で解いている。しかし、実際のランナーは異径の流路が接続されていることに加え、流路がレデューサの様に拡大・縮小するため、従来法では計算精度の低下が予想される。そこで、本手法では拡大管・縮小管を含んだランナー内の分岐・合流する流れを、1次元のネットワーク法で解く。空間及び時間離散化に関しては、キャビティ解析との接続を考慮し、有限要素法及び Fractional



(a) 数値拡散の進行過程



(b) 1次元線形要素に対する本手法

図3-7 内挿手法の概念

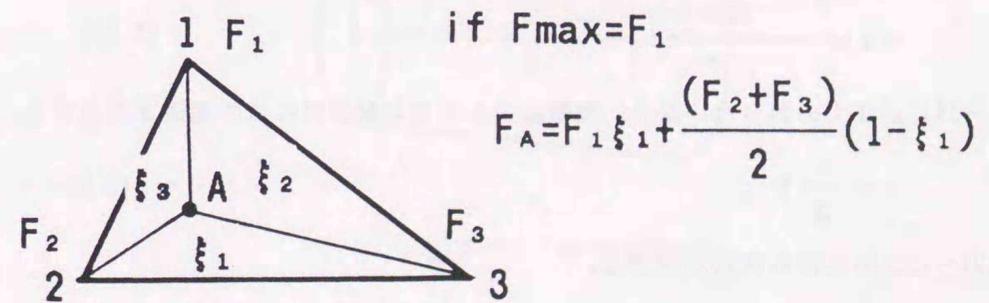


図3-8 三角形要素での充填率の内挿計算法

Step法<sup>(6)</sup>を用いる。

### 3.2.4.1 計算モデルと基礎式

計算モデルを導く上での仮定を、まとめて以下に記す。

- (1) 対象流体は指数則で表わされる非ニュートン流体とする。
- (2) 対象流体は粘性が高く、ランナー径も小さいため、ランナー内の速度分布は層流として扱う。
- (3) 壁面での剥離はない。
- (4) ランナー断面形状は円とし、他の形状は全て等価直径を用いて円で置き換える。
- (5) 助走区間は短く無視できる。

以上の仮定のもとに、図3-9、図3-10に示した円筒及び流線座標系を用いると、基礎式は次のように表わせる。

(a) 連続の式

$$Q_{,z} = 0 \quad \dots \dots \dots (3.9)$$

(b) 運動方程式

$$\rho u_{x,t} = -P_{,z} + \tau_{,x} \quad \dots \dots \dots (3.10)$$

(c) エネルギー式

$$\rho C_p (T_{,t} + u_x T_{,x}) = (k T_{,y})_{,y} + \tau \cdot \dot{\gamma} / 2 \quad \dots \dots (3.11)$$

(d) 構成方程式

$$\tau = \eta \dot{\gamma} = \eta_0 |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma} \quad \dots \dots \dots (3.12)$$

ただし、 $\dot{\gamma} = u_{x,y} = u_{x,r} \cos \theta - u_{x,z} \sin \theta \quad \dots \dots \dots (3.13)$

上記仮定より  $u_y = 0$  となる。また、放熱として  $y$  方向のみを考える。連続の式の流量保存の条件から、次式を得る。

$$u_{x,z} = - \frac{2 \tan \theta}{r} u_x \quad \dots \dots \dots (3.14)$$

図3-11に示す力の釣り合いから、剪断応力と圧力勾配の間に次の関係が成立する。

$$\tau = \frac{r}{2} P_{,z} \quad \dots \dots \dots (3.15)$$

(3.12)~(3.15)式から次式が求まる。

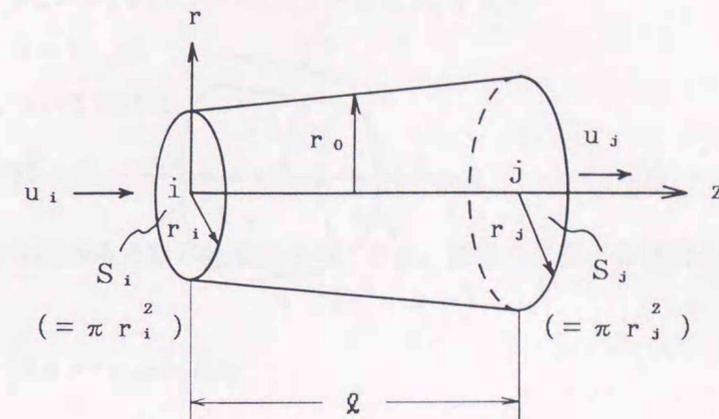


図3-9 円筒座標系

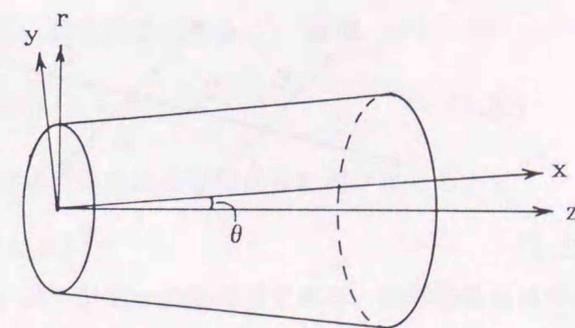


図3-10 流線座標系

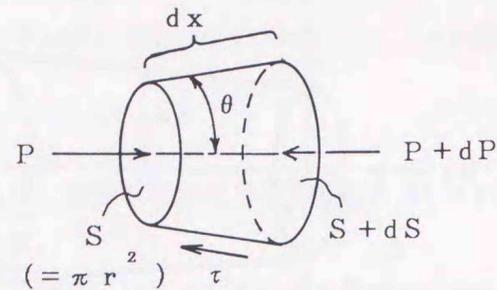


図3-11 微小要素の力の釣り合い

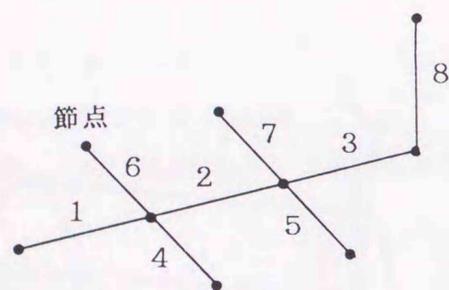


図3-12 ランナーのネットワーク

$$u_{x,r} + 2a^2 r u_x = \left(\frac{K}{\eta_0}\right) r^{\frac{1}{n}} (1 + a^2 r^2)^{\frac{1}{2}} \dots (3.16)$$

ただし、 $a = \frac{r_j - r_i}{Q} \frac{1}{r_0} \quad (\because \tan \theta = a r)$

$$r_0 = r_i + (r_j - r_i) \cdot z / Q \equiv r_i + k z$$

$$K = P_{,z} / 2$$

(3.16)式を  $u_x$  について解けば、

$$u_x = \left(\frac{K}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}} e^{-a^2 r^2} \int_0^r r^{\frac{1}{n}} (1 + a^2 r^2)^{\frac{1}{2}} dr \dots (3.17)$$

となり、 $z$  方向の勾配から流速が計算できる。また、任意の位置  $z$  を横切る流量  $Q$  は次式で表わせる。

$$Q = \int_0^r 2\pi r \cdot u_x \cos \theta dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{K}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}} \int_0^r r \cdot f(r) \left\{ \int_0^r r^{\frac{1}{n}} \cdot f(r)^{-1} dr \right\} dr \dots (3.18)$$

ただし、 $f(r) = (1 + a^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-a^2 r^2}$

(3.18)式から、

$$P_{,z} = 2\eta_0 (Q / 2\pi \phi)^n \dots (3.19)$$

ただし、 $\phi = \int_0^r r \cdot f(r) \left\{ \int_0^r r^{\frac{1}{n}} \cdot f(r)^{-1} dr \right\} dr$

従って、(3.9)~(3.12)式を離散化して、(3.17)~(3.19)式を用いれば解が求まる。さらに、各要素内での充填距離  $z_1$  は次式で示せる。

$$z_1 = \frac{1}{k} \left[ \left\{ 3k \int_0^{z_1} Q dt / \pi + r_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - r_i \right] \dots (3.20)$$

また、円管以外の形状は、次式で示される等価直径に置き換える。

$$d = 2r = 2(A_t / \pi)^{\frac{1}{2}} \dots (3.21)$$

ここで、 $d$  は等価直径、 $A_t$  はランナーの断面積である。境界条件は以下の通りとなる。

1) 流入条件:  $P = P_{in}$  又は  $Q = Q_{in}$   
 $T = T_{in} \dots (3.22)$

2) 流出条件:  $P = P_{out} \dots (3.23)$

3) 壁面条件:  $u_x = 0$

$$P_{,y} = 0 \quad \dots (3.24)$$

$$T = T_w \quad \text{又は} \quad -\lambda T_{,y} = h(T - T_w)$$

### 3.2.4.2 解析手法と離散化

本手法では、分岐・合流を繰り返す複雑なランナー構造を、図3-12に示す様なネットワークで表わす。2つの節点で結ばれた一要素を1つのランナーと見做し、各ランナーは自由に接続可能とする。また、各ランナーは拡大・縮小が可能である。ランナーは図3-13に示すはり要素で表わす。各節点で流量が保存されるから、次式となる。

$$\sum_{j=k}^{k+3} Q_{j,i+1} = 0 \quad \dots (3.25)$$

要素kにおける圧力分布は(3.19)式から与えられるが、(3.20)式を考慮して、一要素内において未充填時と充填終了時の2つに分けて考える。

(a) 未充填時:

$$P_i = \frac{2Q_k}{r_i^2} \int_0^z \eta_0 \{2\pi\phi\}^{-n} (r_i + kz)^2 dz \quad \dots (3.26)$$

(b) 充填終了時:

$$P_i r_i^2 - P_{i+1} r_{i+1}^2 = 2Q_k \int_0^z \eta_0 \{2\pi\phi\}^{-n} (r_i + kz)^2 dz \quad \dots (3.27)$$

(3.27)式は定常状態を記述する式となる。

次に非定常問題に対しては、前節に示した基礎式をFractional Step法<sup>(6)</sup>に従い離散化する。Fractional Step法による離散化については前節で詳述しているので、ここでは結果のみを記す。計算手順は以下の通りとなる。

(1) 予測子 $\tilde{Q}_k$ を求める。

$$\tilde{Q}_k = Q_k^{m-1} + \frac{\Delta t}{\rho} \cdot \{-(S_k P^{m-1})_{,z} + S_k \tau_{,x}^{m-1}\} \quad \dots (3.28)$$

ただし、 $S_k \tau_{,x}^{m-1} = -2\pi / \ell_k \{Q_k^{m-1}\}^n \int_0^1 \eta_0 \{2\pi\phi\}^{-n} (r_i + kz)^2 dz$

$S_k$  : 流路断面積

(2) 予測子 $\tilde{Q}_k$ から圧力増分 $P^*$ を求める。

$$S_k P^*_{,zz} = \rho \tilde{Q}_{k,z} / \Delta t \quad \dots (3.29)$$

(3) 圧力増分 $P^*$ を用いて、流量及び圧力を補正する。

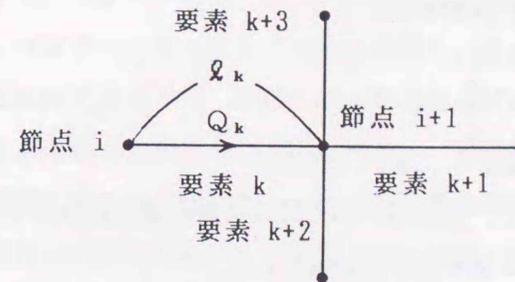


図3-13 ランナー要素

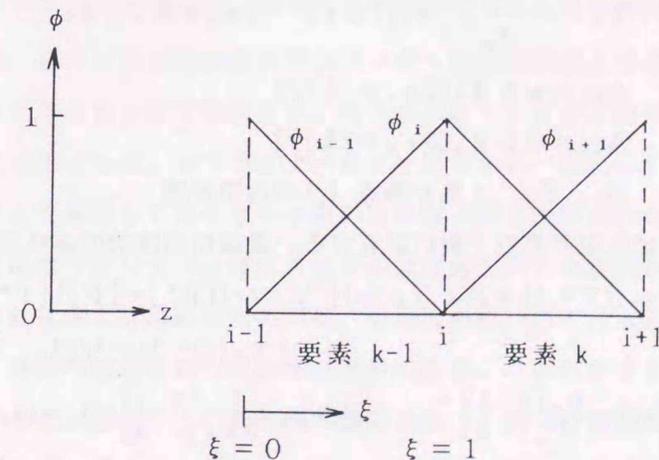


図3-14 ランナー要素の形状関数

$$Q_k^m = \tilde{Q}_k - \Delta t S_k P^*_{,z} / \rho \quad \dots \dots (3.30)$$

上記(3.28)~(3.30)式を解いた後、(3.26)、(3.27)式から時刻mの圧力を求める。予測子 $\tilde{Q}_k$ は、(3.28)式をそのまま陽解法で解く。また、(3.29)式はGaussの消去法で解く。

空間の離散化にはGalerkin有限要素法を用いる。形状関数は1次で近似し、図3-14より要素kについて以下の様に表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= 1 - \xi \\ \phi_{i+1} &= \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (3.31)$$

ただし、 $\xi = z / \Delta_k$  ,  $\Delta_k$  : 要素長

(3.31)式の形状関数を用いて、(3.28)~(3.30)式は次の様に離散化できる。

$$\{\tilde{Q}_k\} = \{Q^{m-1}\} + \Delta t / (\rho \Delta_k) [ \{[\Lambda_1]\} \{P^{m-1}\} + f_1 \Delta_k \{Q^{m-1}\}^n ] \quad \dots (3.32)$$

$$\{P^*\} = \rho [K]^{-1} [\Lambda_2] \{\tilde{Q}_k\} / \Delta t \quad \dots \dots (3.33)$$

$$\{Q_k^m\} = \{\tilde{Q}_k\} - \Delta t [\Lambda_3] \{P^*\} / (\rho \Delta_k) \quad \dots \dots (3.34)$$

ここで、 $[\Lambda_1] = [ S_i + A_{11} \quad -S_{i+1} + A_{12} ]$  ,

$[\Lambda_2]^T = [ -1 \quad 1 ]$  ,  $[\Lambda_3] = [ -S_i \quad S_{i+1} ]$  ,

$$[K] = \frac{1}{\Delta_k} \begin{bmatrix} S_i & -S_{i+1} \\ -S_i & S_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$f_1 = - \frac{2\pi}{\Delta_k} \int_0^1 \eta_0 \{2\pi\phi\}^{-n} \cdot (r_i + k z)^2 dz$$

$$A_{11} = \pi k \Delta_k (3r_i + k) / 3$$

$$A_{12} = \pi k \Delta_k (3r_i + 2k) / 3$$

$S_i, S_{i+1}$  : 各々節点  $i, i+1$  の断面積

また、(3.11)式は流動計算終了後に計算する。離散化式は次の通りである。

$$\{T^m\} = \{T^{m-1}\} + \Delta t / (\rho C_p) [ \{[M]^{-1}\} \cdot \{[K']\} - \{[F]\} ] \{T^{m-1}\} + f_2 \{Q^{m-1}\}^{n+1} / 2 ] \quad \dots (3.35)$$

ここで、 $[M] = \frac{\Delta_k}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  ,  $[F] = \frac{1}{6\Delta_k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} (Q_k - Q_{k-1})$  ,

$$[K'] = \int_0^1 2\pi r \cdot h (T - T_w) dz ,$$

$$f_2 = \eta_0 \{2\pi\phi\}^{-(n+1)} \cdot r_0^{2+1/n}$$

$h$  : 熱伝達率、 $T_w$  : 壁温

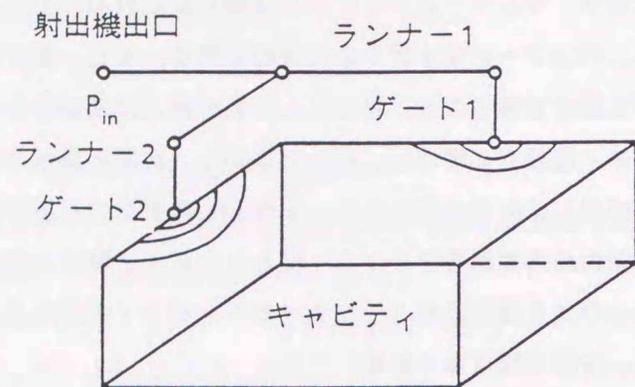
式中出现する積分は解析的には解けないので、Gauss積分法を用いて数値積分する。

### 3.2.4.3 擬似三次元解析との接続

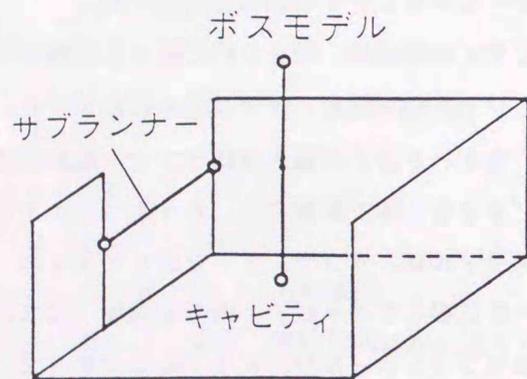
ランナーとキャビティでは計算モデルは異なるが、両者を一体で解析することを念頭におき、解析手法として共に空間の離散化には有限要素法、時間の離散化には Fractional Step法を用いている。従って、流速の予測子は前時刻の物理量(流速、圧力、物性値)を基に陽解法で求まり、ランナーとキャビティは独立に解ける。それに対して、圧力は陰解法で求めるため、ランナーとキャビティは同時に解く。また、温度に関しては、両者共に金型への放熱が支配的であること、移流による熱の流入は流跡積分法で解くことから、ランナーとキャビティは独立に解ける。以上の事から、前節の擬似三次元モデルの各面間の接続の考え方を拡張して圧力で接続する。すなわち離散化に有限要素法を用いているから、圧力に対する要素内の内挿関数をランナー側とキャビティ側で一致させ、両者で独立に作成されるマトリックスを接続条件(ランナーとキャビティの接合点の圧力が等しい)の下に重ね合わせる。計算手順は以下の様になる。

- (1) 流速の予測子をランナーとキャビティでそれぞれ独立に計算する。
- (2) 予測子を用いてランナーとキャビティ全体の圧力増分を計算する。
- (3) 圧力増分からランナーとキャビティの流速をそれぞれ補正する。
- (4) 温度をランナーとキャビティで独立に計算する。

ランナーとキャビティの接続は、図3-15に示す2種類が考えられる。1つは構築されたランナーのネットワークの末端を、キャビティ側のゲートとなる節点と接続するモデルである。この場合、各ゲートからの流入量はランナー解析の結果より与え、圧力に関してはランナーとキャビティを一体で解析する。もう1つはキャビティ間を結ぶサブランナーモデルである。このモデルは、サブランナーをキャビティの一種として解くことになる。また、サブランナーを拡張してキャビティ内の突起物(ボスと呼ばれる)をモデル化することが出来る。このサブランナー及びボスモデルは実用上大きな意義を持つ。すなわち、実製品の形状の中には例えば冷蔵庫内の網棚、空冷用の開口部と言ったスリット状の構造物を持つものや、多数の突起を持つ構造物が数多くある。これらを全て通常のキャビティとしてモデル化すると、計算モデルの作成が煩雑になり、かつ要素数が飛躍的に増えるため計算容量、計算時間の増大が免れない。従って、スリット部をサブランナーで、突起物をボスモデルで表わす事により、入力工数及び計算時間を大幅に低減することが出来る。



(1) ランナーとキャビティの接続



(2) キャビティ間の接続

図3-15 ランナーとキャビティの一体モデル

### 3.3 離散化誤差の検討

本節では自由境界の移動量 $l_s$ を離散化することにより生じる自由境界の位置のずれを検討する。これには、(a)連続的な移動量を離散化することによる誤差、(b)曲面を線分で近似することによる誤差、の2つが考えられる。このうち、(b)の方は数値解析に常に付きまとうメッシュ分割の粗さの問題であり、十分に細かくすれば(各種条件により決定される)良いことが知られているので、ここでは(a)について重点的に検討する。

自由境界の移動量の式  $l_s = \int v_s dt$  から判るように、移動速度  $v_s$  が一定であれば、ある時刻  $t$  後の移動量はタイムステップに依らず一定となり誤差は生じない。誤差が生じるのは、移動速度が時間と共に変化する場合と、移動方向が時間と共に変化する場合である。実製品を対象とする場合、両者が混在する場合が多々あるが、ここでは両者の影響を個々に検討する。

#### (1) 自由境界の移動速度が変化する場合

移動方向の影響を除去するため、1次元の流れで自由境界の移動速度が  $t_0$  秒間で  $v_0$  から0に、直線的に減速する場合を考えてみる。任意時刻  $t$  における速度  $v$  は次式で与えられる。

$$v = v_0 (1 - t/t_0) \quad \dots \dots (3.36)$$

従って、 $t_0$  秒後の移動距離は次のようになる。

$$l_0 = \int v dt = v_0 t_0 / 2 \quad \dots \dots (3.37)$$

次に離散化した場合は、タイムステップを  $\Delta t$  とすると、 $n$  ステップ目の移動速度は(3.36)式と同様に、

$$v^n = v_0 (1 - n \Delta t / t_0) \quad \dots \dots (3.38)$$

で表せ、 $t_0$  秒後の移動距離は次のようになる。

$$\begin{aligned} l_0^m &= \sum_{n=0}^m v^n \cdot \Delta t = \sum_{n=0}^m v_0 (1 - n \Delta t / t_0) \Delta t \\ &= v_0 \Delta t (m+1) \{1 - m \Delta t / 2 t_0\} \\ &= v_0 t_0 (1 + \Delta t / t_0) / 2 \quad \dots \dots (3.39) \end{aligned}$$

ただし、  $m = t_0 / \Delta t$

従って、離散化による誤差は  $\epsilon_1 = |(l_0 - l_0^m) / l_0| = \Delta t / t_0$  となる。同様にして、速度変化を2次式と仮定すると、次式を得る。

$$\epsilon_2 = (3/2 + \Delta t / 2 t_0) \cdot \Delta t / t_0 \quad \dots \dots (3.40)$$

$\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$  を  $\Delta t/t_0$  の関数として示したのが図3-16である。速度変化が大きい程誤差は大きくなるが、 $\Delta t/t_0 < 10^{-2}$  に設定すれば、誤差は十分に小さく  $\epsilon_1 < 1\%$ 、 $\epsilon_2 < 2\%$  となる。

(2) 自由境界の移動方向が変化する場合

流線が曲率を持つ流れを考えた場合、接線方向の速度ベクトルで自由境界を移動させるために、あたかも遠心力を受けたかのように自由境界が変形する可能性がある。そこで、この影響を図3-17に示す環状流路内の流れを例にとって検討する。計算にあたっては遠心力は無視し、到る所で角速度が一定と仮定する。上記仮定により、任意の位置  $r$  の接線方向の速度（周速度）は  $r$  のみの関数で角度  $\beta$  に依らず一定となり、 $v=2\pi r/t_0$  ( $t_0$ : 一周に要する時間) で表せる。図から判るようにA点の粒子は  $\Delta t$  後に  $A'$  点に移動するが、離散化するとB点に移動することになる。そのずれを  $\Delta r$  とすると、 $\Delta r$  は以下のように表せる。

$$\Delta r = \{(v \cdot \Delta t \cdot \sin \alpha)^2 + (v \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha - l_{AA'})^2\}^{1/2} \quad \dots (3.41)$$

ただし、 $l_{AA'} = 2r \cdot \sin(\theta/2)$  ; AA'間距離

$\alpha = \theta/2$  ; 辺AA', ABのなす角

$\theta = 2\pi \Delta t/t_0$  ; 1タイムステップでの回転角度

(3.41)式に  $v=2\pi r/t_0$  を代入して整理すれば次式を得る。

$$\Delta r/r = 2\{(\pi \Delta t/t_0)^2 - \pi \cdot \sin \theta \cdot \Delta t/t_0 + (1 - \cos \theta)/2\}^{1/2} \quad \dots (3.42)$$

(3.42)式を図3-18に示す。図3-16と比較して判るように移動方向の変化の方が誤差は小さく、 $\Delta t/t_0 < 2 \times 10^{-2}$  に設定すれば誤差は1%以内となる。

3.4 計算例

3.4.1 L型流路の計算例

前節で述べた2種の手法を、図3-19に示す2次元のL型流路を用いて比較検討する。流体はニュートン流体とした。主な計算条件を表3-2に示す。部分メッシュ生成法による結果を図3-20(a)に示す。図には0.2秒間隔のメッシュ生成図と、0.8秒後の流速分布を示した。図3-19の固定メッシュ分割と比較すると、メッシュの生成が自由表面近傍の境界領域に限定されているのが判る。図3-20(a)の結果は、入口流速から計算できる平均移動距離と3%以内の差で一致している。なお、3.2.2.2節で述べた様に、本手法はメッシュリゾーニングタイプの手法であるから、メッシュの変形防止のため種々の判定条

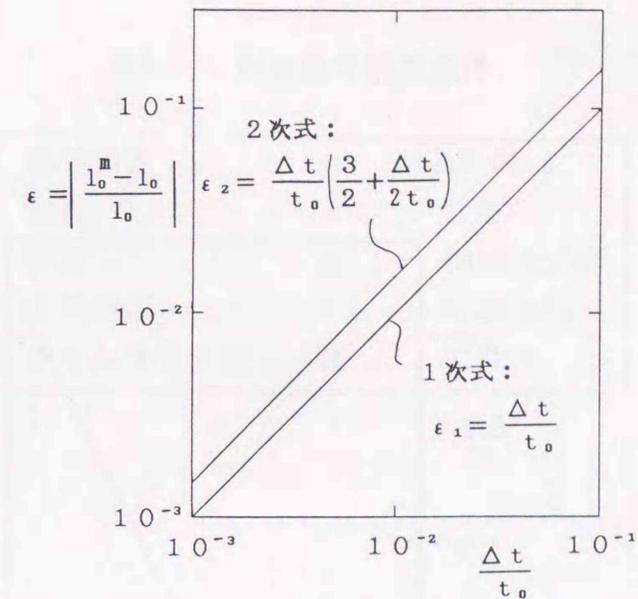


図3-16 自由境界の移動速度変化による誤差

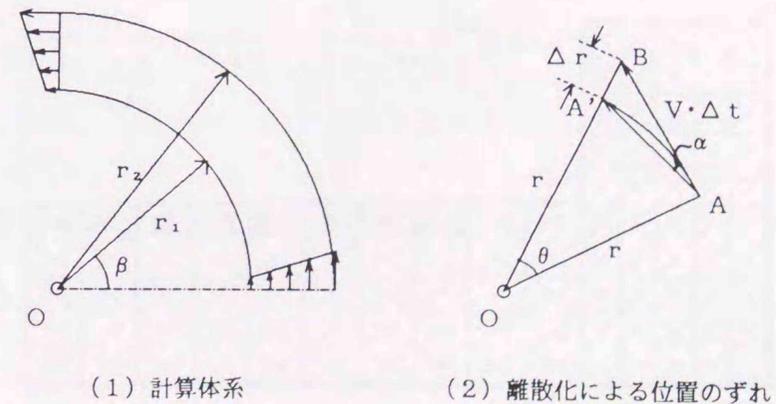


図3-17 環状流路内の流れの誤差要因

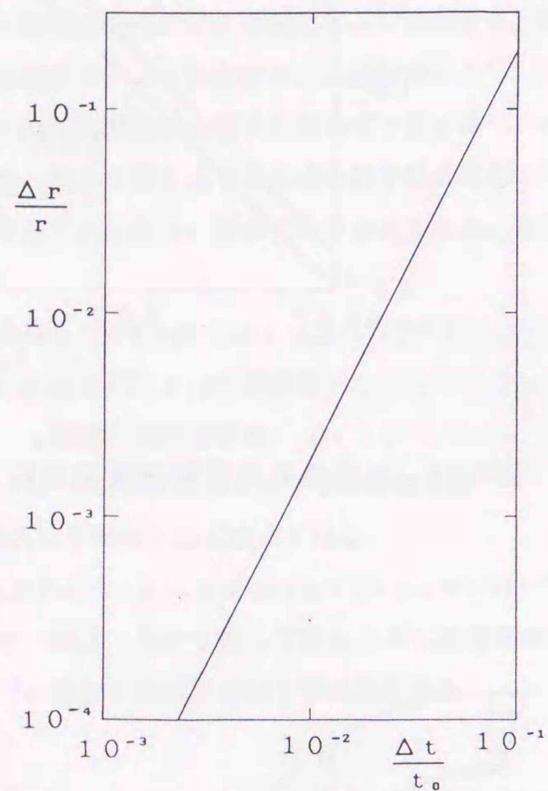


図3-18 自由境界の移動方向変化による誤差

表3-2 L形流路の計算条件

粘性係数	$\eta$	10 Pa·s
指数	$n$	1.0
密度	$\rho$	1000 kg/m <sup>3</sup>
入口流速	$v_0$	0.25 m/s
タイムステップ	$\Delta t$	0.01 s

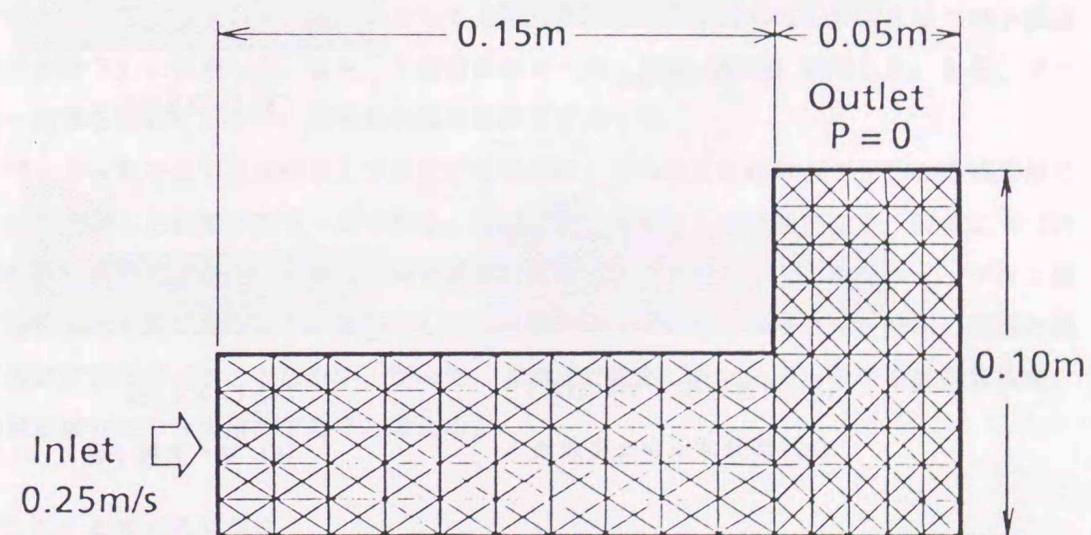


図3-19 L形流路の計算体系

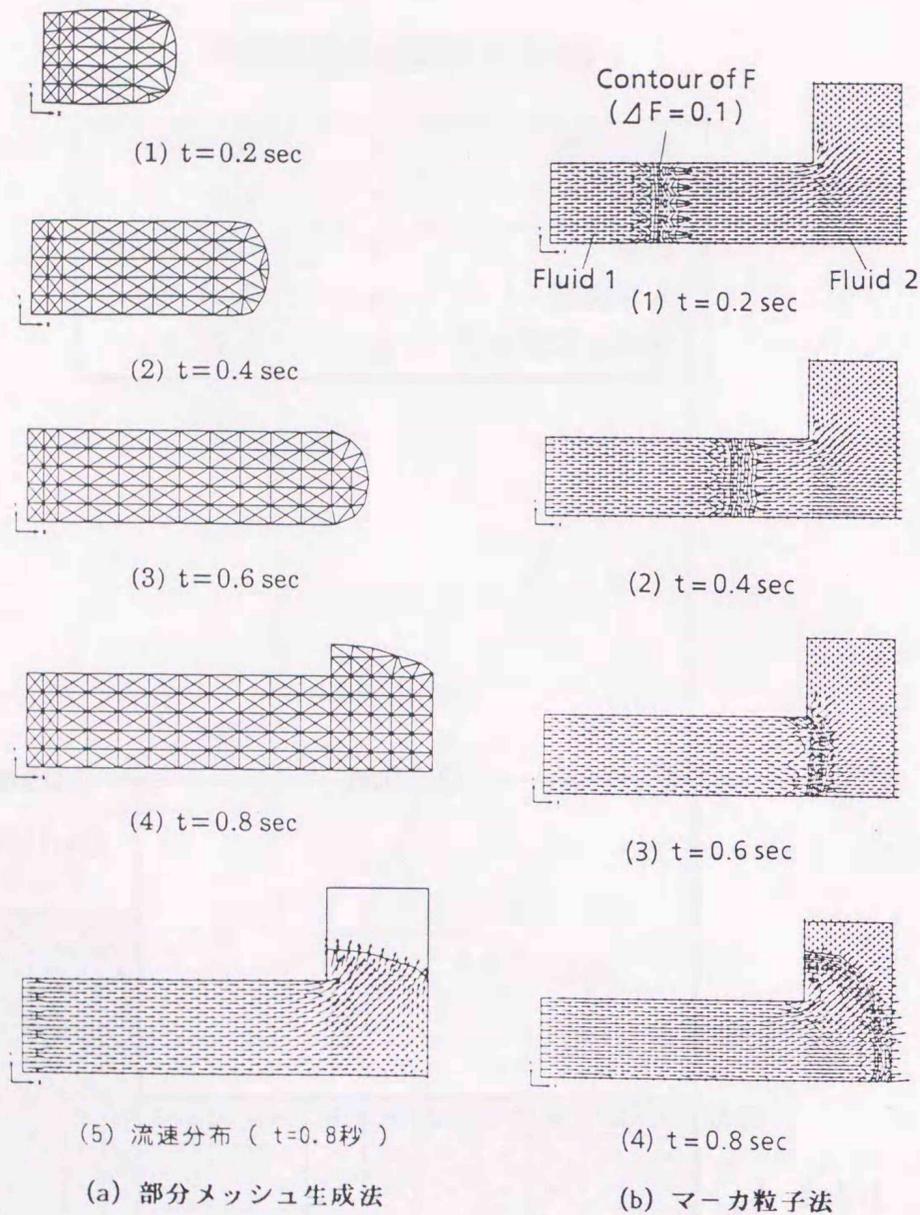


図3-20 部分メッシュ生成法とマーカー粒子法による計算例

件が必要になる。本例の場合は以下の条件下で計算した。

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.004\text{m}, \quad d_0 = 0.004\text{m} \\ l_0 &= 0.005\text{m}, \quad \theta_0 = \pi/2 \end{aligned} \quad \dots \dots (3.43)$$

次にマーカー粒子法を用いた計算結果を図3-20 (b)に示す。図には境界面の数値拡散の様子を知るために、流体1の占有率 $F$ を0.1刻みで表示しており、このコンター幅が数値拡散幅を表わす。 $F = 0.5$ の位置を境界とした場合、移動距離に関する計算結果は部分メッシュ生成法の結果と2%以内の差で一致した。マーカー粒子法は固定メッシュのまま二流体として計算しており、流体2の粘性係数は1/100で計算した。二流体として計算する場合、当然ながら流体2の流れの影響も現れ、特に本例の様な流路が曲がる場合に顕著となる。そこで、この影響を軽減するために特殊な境界条件を導入する。すなわち、ある節点の境界条件を設定する際、その節点が流体1で充たされているか流体2で充たされているかを判定して、流体1の場合には壁の境界条件を与え、流体2の場合は自由流出境界とする。判定には占有率 $F$ を用いる。図3-20 (b)の場合、L型流路の右側の壁の境界条件にこの特殊な境界条件を用いた。次節以降の計算も出口はすべてこの境界条件を用いている。マーカー粒子法の場合、計算精度、記憶容量、計算時間を考慮して、マーカーをコントロールする必要がある。ここでは、マーカー計算を1時間ステップの間に20回行ない、一辺から発生するマーカー数は5として、占有率 $F$ の計算のために1要素を9つの小要素(分割数3)に分割した。また、1要素中のマーカー数は480個に制限した。なお、マーカー計算を30回にしても、得られた結果は同じであった。

マーカー粒子法で二流体として計算する場合に、二つの流体の界面で生じる数値拡散について検討した結果が図3-21である。横軸に計算開始からの経過時間を、縦軸に0.2秒後の数値拡散幅を1とした時の相対数値拡散幅を示す。比較として、時間ステップを2倍にした時の結果(●印)も一緒に示した。時間ステップの影響は小さく、時間の経過と共に数値拡散が広がることはない。従って、本論文で提案したマーカー粒子法は計算精度、数値拡散共に十分実用的であると考えられる。

### 3.4.2 温度の移流計算

矩形領域の移動自由境界を伴う2次元ストークス流れに適用した例を示す。温度の移流計算の数値拡散を評価するために、熱伝導率を0として計算した。計算結果を図3-22に示す。本例では初期温度38℃の矩形領域へ、入口温度271℃の流体が流速0.5m/sで流入す

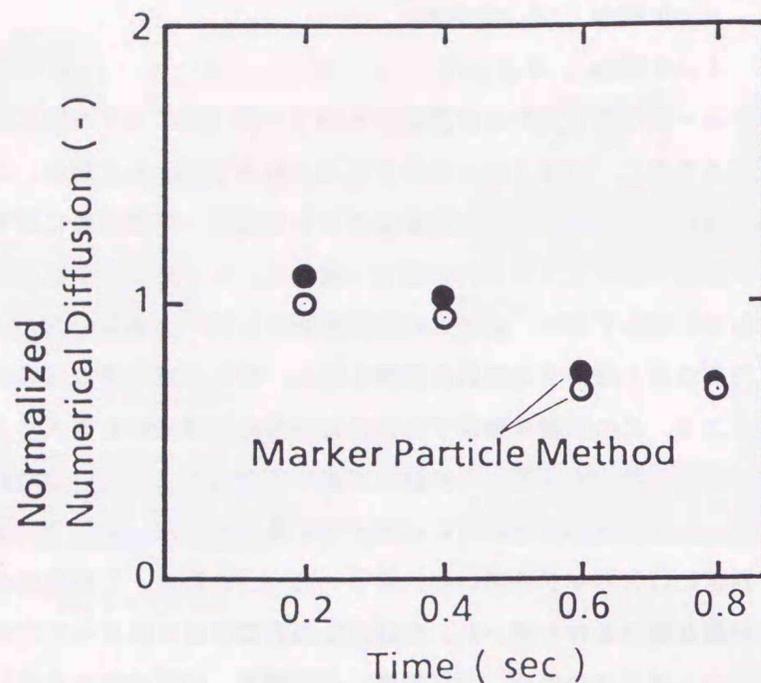


図3-21 数値拡散の比較

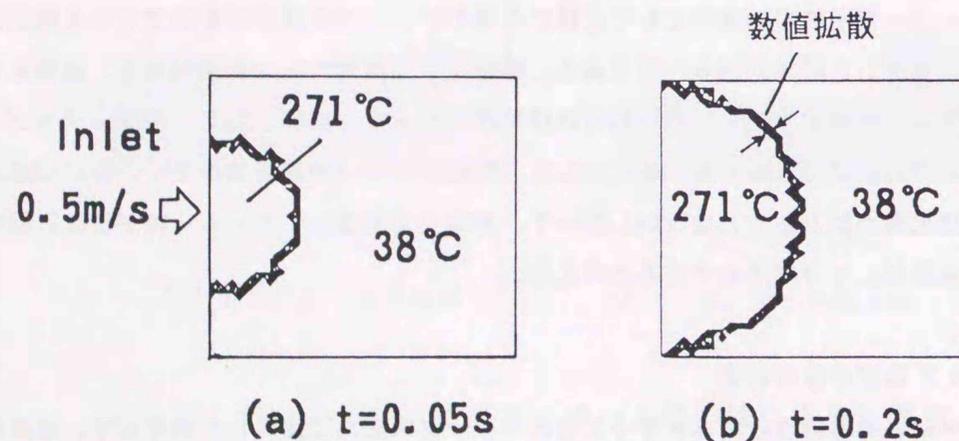


図3-22 矩形平板内における温度の移流計算結果

る場合を計算した。図3-22には各々0.05s、2.0sの温度分布を示した。自由境界近傍の数値拡散は小さく、自由境界近傍の一要素内に納まっている。

### 3.4.3 ランナーの計算結果

#### (1) 縮小管路の精度評価

ランナーの解法は流路の縮小・拡大を考慮した点に特徴がある。そこで、縮小管路を例に取り、円管でランナー系を構成する従来手法と本手法とを比較する。試験流路を図3-23に示す。試計算は定常状態について4ケース行なった。各々の試験パラメータは表3-3に示した通りであり、流路長と入口流路径が一定の条件下で、出口流路径をパラメータとした。表中の  $\tan \theta$  は流路の傾きを示している。境界条件は入口流量一定 ( $Q=10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ ) 及び出口圧力固定 ( $P=0 \text{ Pa}$ ) である。計算は流路を10分割して行なった。また、従来法の場合は縮小管路を多数の円管の組み合わせで近似する必要があり、ここでは分割数を合わせるため、流路の全体積が等しくなるように、図3-23 (2)に示す10個の円管の組み合わせとした。本手法による計算の結果を従来法と比較して図3-24及び表3-4に示した。図3-24中の○印が本手法による計算結果、△印が円管モデルによる計算結果を表わしている。両者の違いを定量的に比較するために、相対差  $\epsilon$  を次式で定義する。

$$\epsilon = \frac{\Delta P_1 - \Delta P_2}{\Delta P_1} \times 100 \quad \dots \dots (3.44)$$

ただし、 $\Delta P_1$  : 本手法により計算した圧力損失

$\Delta P_2$  : 円管モデルにより計算した圧力損失

図から判るように、ケース1の場合両手法の結果は1.5%以内で一致するが、流路断面の縮小率が大きくなるに従ってその差が顕著となり、ケース4では25.4%の差となる。この差の原因は流路内の圧力損失が断面に逆比例する事に依るものである。すなわち、縮小率の増大と共に、モデル化した円管の流路断面と縮小管路の流路断面との差が大きくなり、圧力損失の差が顕著になってくる。また、流路の体積を等しくしても表面積は等しくならぬため、粘性抵抗に影響を及ぼすことも考えられるが、最も異なるケース4の場合でさえ表面積の差は0.01%程度でありその影響は小さい。なお、この圧力損失の差を

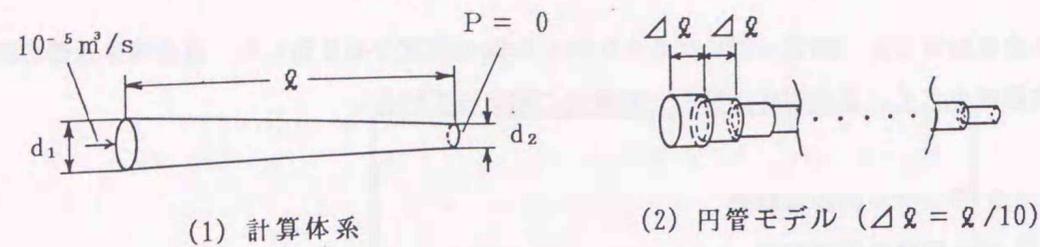
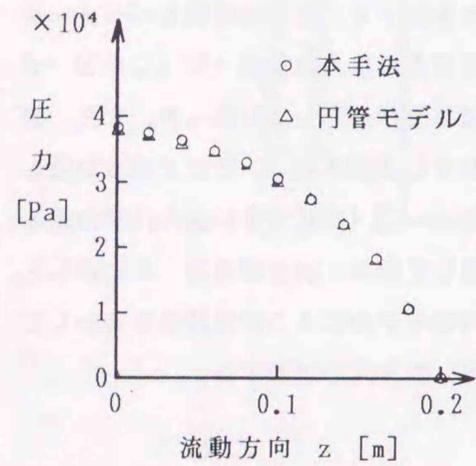
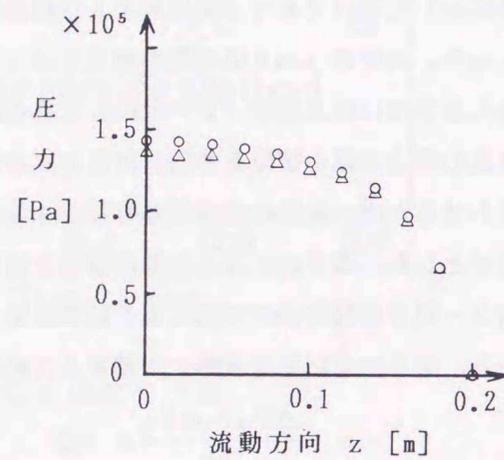


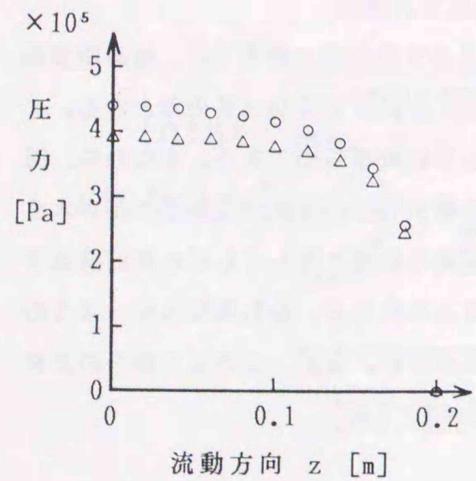
図3-23 縮小管の計算体系



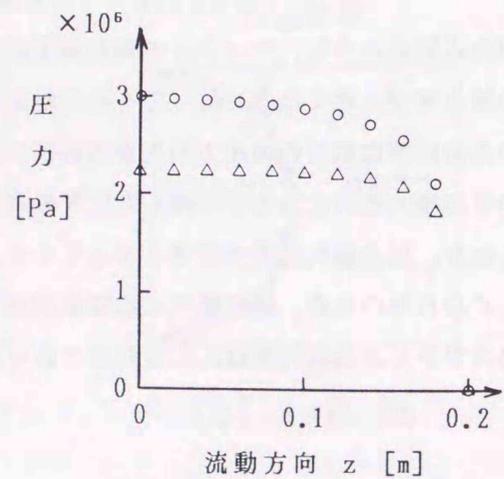
(1)  $d_1 = 10\text{mm}, d_2 = 5\text{mm}$  の場合



(2)  $d_1 = 10\text{mm}, d_2 = 3\text{mm}$  の場合



(3)  $d_1 = 10\text{mm}, d_2 = 2\text{mm}$  の場合



(4)  $d_1 = 10\text{mm}, d_2 = 1\text{mm}$  の場合

図3-24 本手法と円管モデルによる計算結果の比較

表3-3 試験パラメータ

No	項目	$l$ [mm]	$d_1$ [mm]	$d_2$ [mm]	* $\tan \theta$
1	ケース1	200	10	5	-0.0125
2	ケース2	200	10	3	-0.0175
3	ケース3	200	10	2	-0.02
4	ケース4	200	10	1	-0.0225

\*  $\tan \theta = (d_2 - d_1) / 2l$

表3-4 計算結果

No	項目	圧力損失 [Pa]		*相対差 $\epsilon$ [%]
		本手法	円管モデル	
1	ケース1	$3.84 \times 10^4$	$3.78 \times 10^4$	1.5
2	ケース2	$1.44 \times 10^5$	$1.36 \times 10^5$	5.4
3	ケース3	$4.38 \times 10^5$	$3.91 \times 10^5$	10.8
4	ケース4	$2.99 \times 10^6$	$2.24 \times 10^6$	25.4

\* 相対差  $\epsilon = (\Delta P_1 - \Delta P_2) / \Delta P_1 \times 100$

ただし、 $\Delta P_1$ : 本手法により計算した圧力損失

$\Delta P_2$ : 円管モデルにより計算した圧力損失

是正するために、流路の圧力損失が等しくなるように等価的な直径を設定することが考えられる。しかし、この場合は入口条件として圧力を一定とすると各流路の流量が異なってくる。また、入口条件として流量を与えた場合でも、流路系に分岐点が多い時には流量配分が異なってくるため、結局誤差の要因となる。従って、従来法と比較して本手法の方が計算精度の点で優れていると言える。

## (2) 分岐流路の計算例

本節では、実際のランナー系で常に遭遇する分岐流路の解析機能確認のために、図3-25に示した分岐流路について計算する。ここでは各分岐点における流量配分、圧力損失、非定常の自由境界（フロント）の移動を確認する。計算体系は図3-25に示す様にx軸に対して対称であり、主流路の1部が縮小流路となっている。境界条件は入口が流量固定（ $=1.27 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ ）、出口が圧力固定（ $=0 \text{ Pa}$ ）である。計算結果はx軸に対して対称性が保たれ、各分岐点における流量配分、圧力損失についてその解析機能を確認した。非定常のフロントの移動計算の結果を図3-26に示す。図中の(1)~(7)は充填初期の0.2秒から、充填終了の1.4秒までを、0.2秒置きに示したもので、その時刻までに充填された位置を表示している。図に示したように、時間の経過と共に流体が各分岐流路に枝分かれしながら充填して行く様子が確認できた。

### 3.4.4 成形シミュレーションへの適用

成形シミュレーションへの適用例としてランナーとの一体解析となる31型カラーテレビ枠の計算例を図3-27に示す。本計算例ではゲートを上部の1点とした場合と、上下の2点にした場合の充填状況の相違を確認した。図では各位置の充填時間の分布を表示している。分布からも両者の充填の様子が異なることが良く判る。家電品の金型設計では、外観不良の観点からウェルドラインが目に見える位置に現われない様に工夫している。本解析対象も同様でウェルドラインが底以外の箇所には発生しない様に金型及びゲートが設計される。そこで、本対象品の基本設計としては1点ゲートを採用している。2点ゲートの場合、上下から流入してきた樹脂は上から3/4の側面部で一旦合流する。しかし、流速ベクトルの分布を見ると、合流後の樹脂全体の流れは下方に向くため、充填時間や温度条件によってはウェルドラインは側面に生じない可能性があり、充填の容易さ、充填圧力の低減の観点からさらに検討する価値がある。この様にメルトフロントの移動状況、流速ベクトル、温度分布等の解析結果を多角的に検討することにより、本解析をより有効に活用する

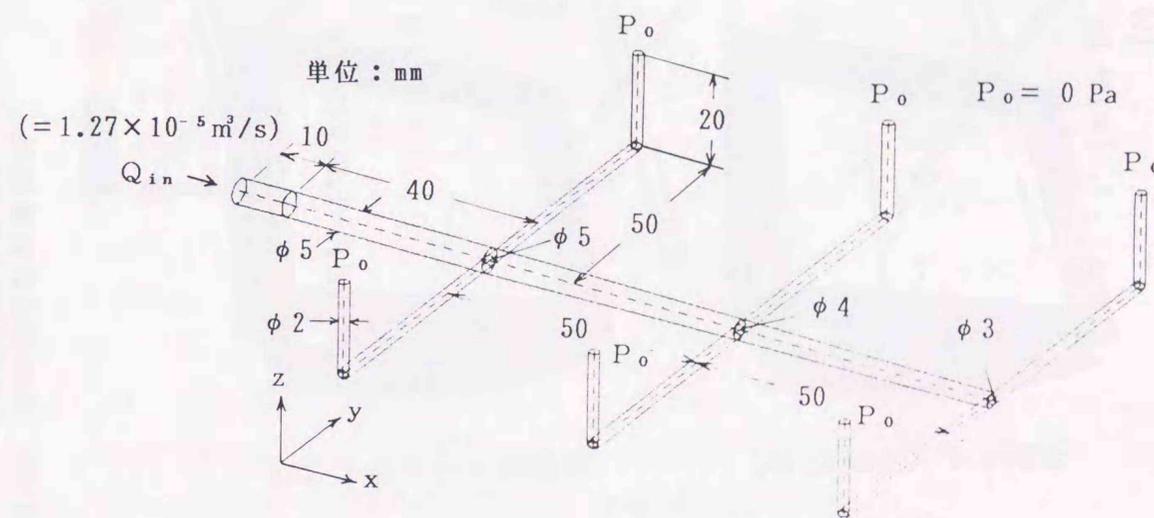
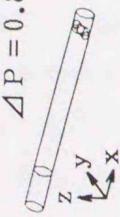
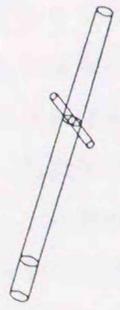


図3-25 分岐流路の計算モデル

(1)  $t = 0.2$  秒  
 $\Delta P = 0.84 \times 10^3$  Pa

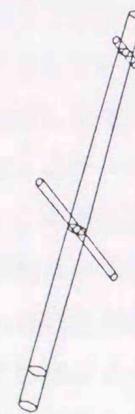


(2)  $t = 0.4$  秒



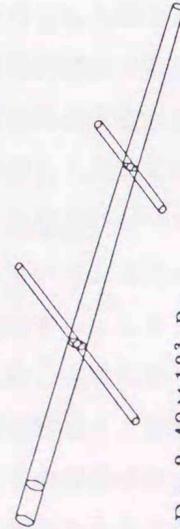
$\Delta P = 1.19 \times 10^3$  Pa

(3)  $t = 0.6$  秒



$\Delta P = 1.74 \times 10^3$  Pa

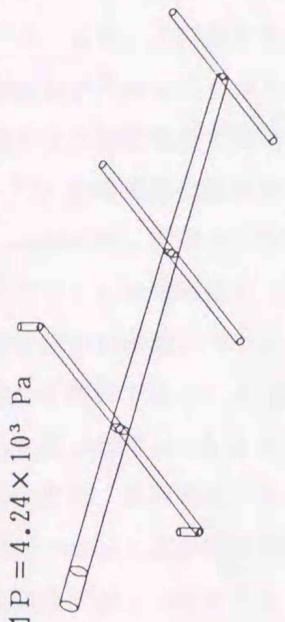
(4)  $t = 0.8$  秒



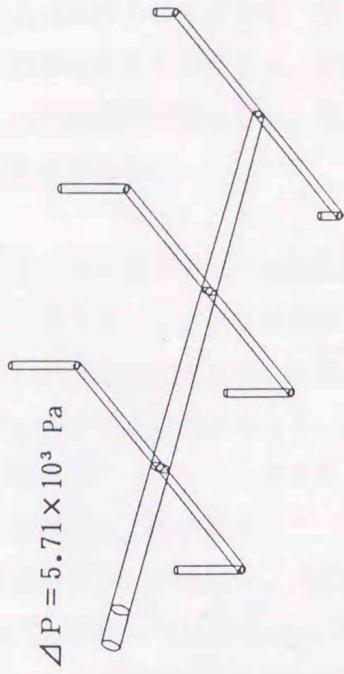
$\Delta P = 2.49 \times 10^3$  Pa

$\Delta P$  : 流路の圧力損失

(5)  $t = 1.0$  秒  
 $\Delta P = 4.24 \times 10^3$  Pa

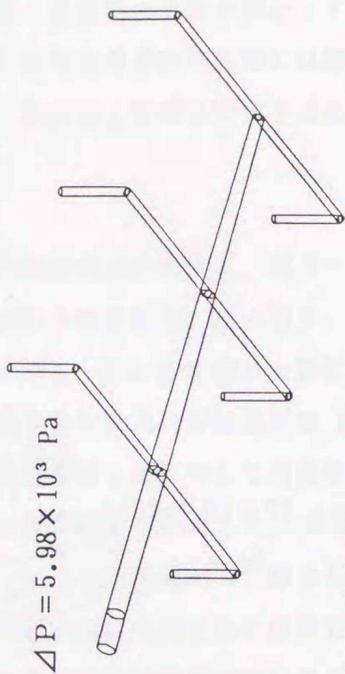


(6)  $t = 1.2$  秒



$\Delta P = 5.71 \times 10^3$  Pa

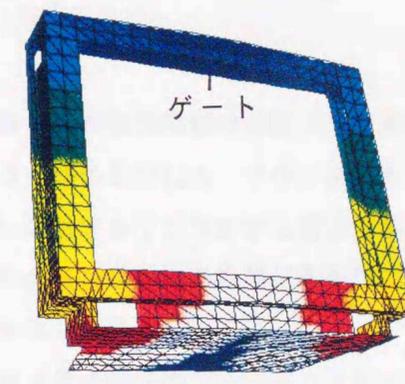
(7)  $t = 1.4$  秒 (充填終了)



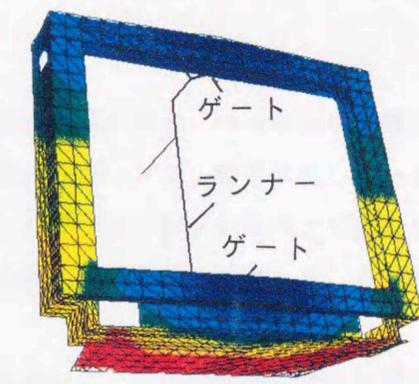
$\Delta P = 5.98 \times 10^3$  Pa

図3-26 分岐流路の計算結果 (充填領域の表示)

充填時間 (s)  
 6.00  
 4.50  
 3.00  
 1.50  
 0.00



(1) 1点ゲートの場合



(2) 2点ゲートの場合

図3-27 31型カラーテレビ枠の流動計算例

ことができる。

#### 3.4.5 三次元計算の例

計算体系は図3-28に示した通りの中央部が薄い凹レンズである。計算条件は表3-5に示す。本例の場合、マーカーのコントロールデータは、小要素分割次数2、マーカー発生次数4、マーカー計算2回/ステップである。図3-29に示した計算結果は各々0.1s, 0.3s時の流速分布と圧力分布を示している。時間の経過と共に流動抵抗の小さい周辺部が周り込むように流れていく様子が判る。

#### 3.5 結 言

自由表面をもつ高粘性指数則流体の非定常流れを解析するために、メッシュを空間に固定したオイラー型のSOLA-VOF法に基づいて改良したマーカー粒子法と、メッシュが流体と共に移動するラグランジュ型の解法を改良した部分メッシュ生成法とを提案した。また、温度の移流計算の際の数値拡散を抑制する風上内挿計算法を提案した。各手法の特徴は以下の通りである。

- (1) 自由表面近傍の内部境界から発生するマーカーを用いて、流体の体積分率を計算し、自由表面を定義するマーカー粒子法を提案した。また、計算領域の区分によりマーカー計算の計算容量、計算時間を減らして効率的に計算できる様にした。
- (2) 部分メッシュ生成法では、予め分割しておいた固定メッシュと境界の移動に伴い再分割する境界メッシュを組合せて、ラグランジュ的手法の利点をいかしつつ、欠点であるメッシュ再分割が最小限になるように考慮した。

上記の手法をL型流路内の自由表面をもつ流れに適用し、両手法を比較検討した。また、箱型流路内の溶融樹脂の流れと実成形品の流れに適用し、擬似三次元計算結果と実験結果とを比較検証すると共に、凹レンズ形状に対する三次元計算を実施した。得られた主な知見は以下の通りである。

- (3) 入口流速から計算できる平均移動距離と両手法で求めた数値解は共に3%以内で一致した。マーカー粒子法の境界面の数値拡散幅は、時間の経過及びタイムステップによって増加はしない。従って、本質的に複雑流路に対しての適用性に優れたマーカー粒子法は、計算精度、数値拡散共に充分実用的であることがわかった。

- (4) 実成形品に対する計算結果から、擬似三次元手法の実用性を確認した。  
 (5) 三次元の凹レンズに対する計算結果から、本手法の三次元計算への有効性を確認した。

表3-5 凹レンズの計算条件

係数	$\eta_0$	1000 Pa·s <sup>n</sup>
指数	n	0.41
密度	$\rho$	1000 kg/m <sup>3</sup>
入口流速	$v_0$	0.20 m/s
タイムステップ	$\Delta t$	0.001 s

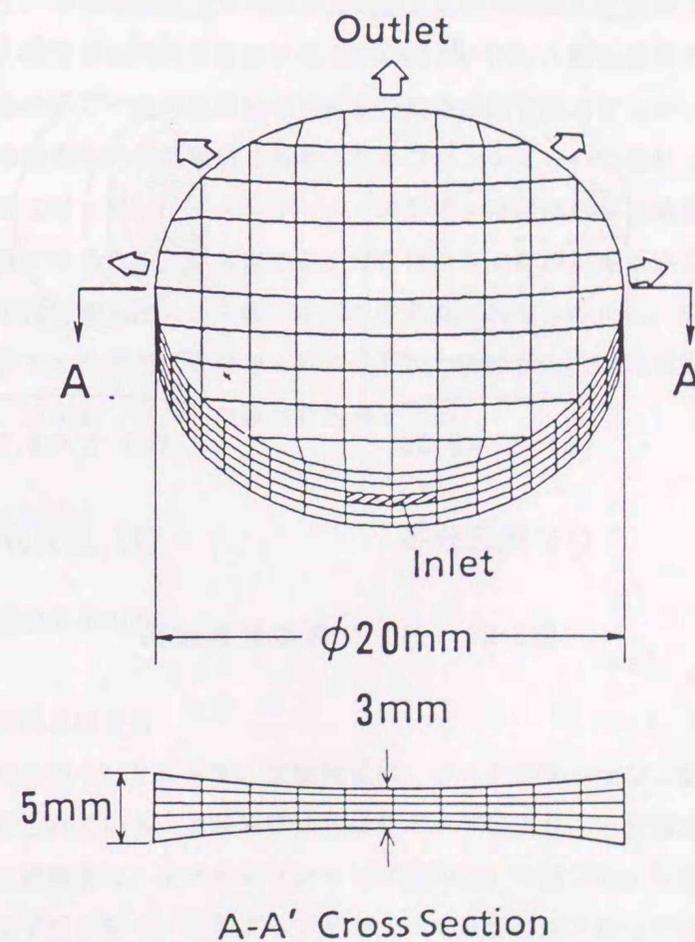


図3-28 凹レンズの計算体系

4.1 緒言

前章までに示した流動解析手法に基づく計算結果は、定性的に妥当な結果を示し、理論解とは良く一致している。しかし、理想状態では有り得ず、複雑形状の流路となる実成形品への適用に当たっては、実験による検証が必要になってくる。射出成形時の溶融樹脂は高圧、高温であり、物性のコントロール等、精密な実験は困難である。また、その非ニュートン性により、プローブなどの挿入型の計測器は、挿入により物性そのものが変化して流れに影響を与えるために使用できない。

そこで、溶融樹脂と同様な指数則を示す模擬流体を用いて、流れに影響を及ぼさない可視化実験を実施し、非接触型の三次元流速分布測定装置で測定した流速分布と、計算結果を比較検討して、流速分布の計算精度を明らかにする。次に、溶融樹脂を用いた検証として、射出成形機を用いて一定時間間隔で一定量の溶融樹脂を注入するショートショット成形実験により、溶融樹脂の流動先端であるメルトフロントについて疑似三次元計算結果と実験結果とを比較検討する。ショートショット成形は、溶融樹脂が高粘度であり流動に際しては慣性が無視できるため、注入圧力を加えなければ流動が出来ないことを利用したもので、一定量の溶融樹脂を注入した後、加圧をやめれば流動が停止し、樹脂はその場で固化する。したがって、冷却後に金型から取り出したものはある時間の充填状況を表しているものと見做せ、メルトフロントの移動を追跡できる。

4.2 検証結果と検討

4.2.1 定常の流速分布の検証

4.2.1.1 実験装置及び方法

実験装置の概略を図4-1に示す。実験装置は、テストセクション、循環ポンプ、流量計、圧力計で構成されている。試験流体は容積型ポンプにより、一定流量(1.6~6.7 l/min)でループ内を循環する。テストセクション(縦200mm × 横100mm × 厚さ4.5mm)はアクリル製の透明な平行平板で、上部よりTVカメラで撮影可能となっている。流速分布の

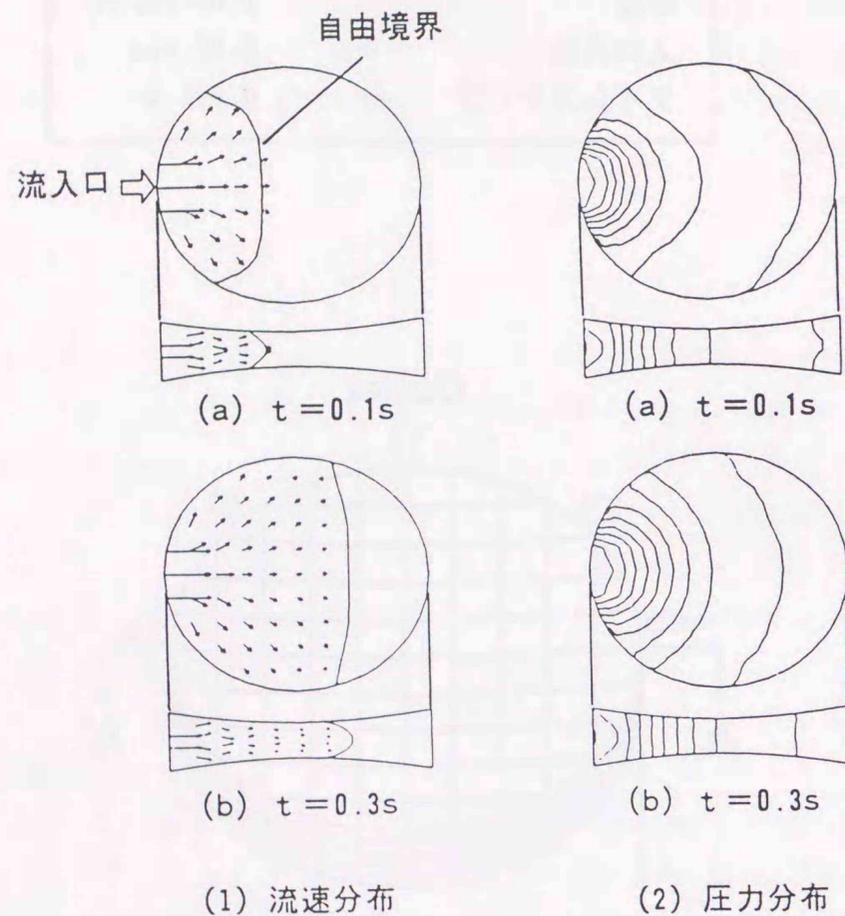


図3-29 凹レンズの計算結果

実験条件

使用流体：澱粉糊水溶液  
 流量：1.8 l/min  
 粘度： $\eta = 1.0 \dot{\gamma}^{-0.51} \text{Pa}\cdot\text{s}$   
 (回転粘度計による実測値)

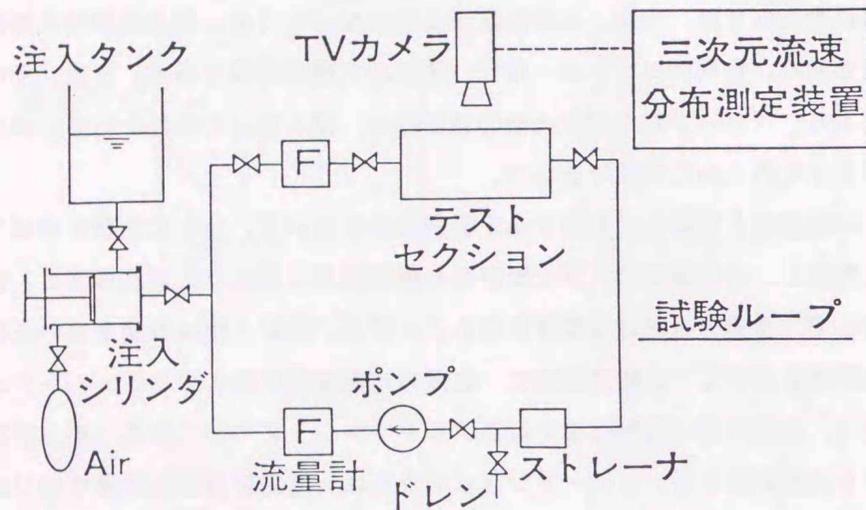


図4-1 実験装置の概要

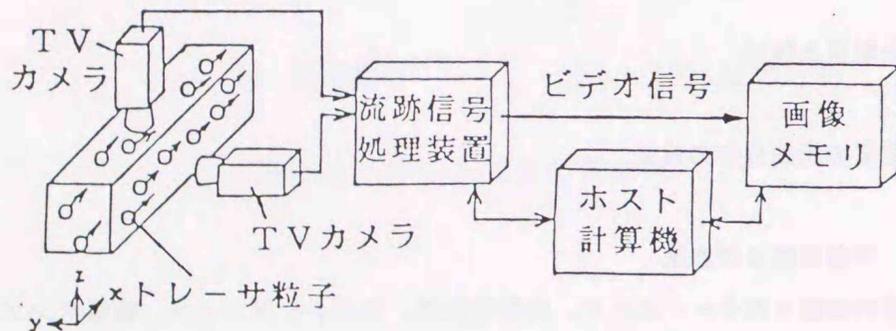


図4-2 流速分布測定システムの構成

測定は、非接触型の三次元流速分布測定システム<sup>(41)</sup>を用いた。システム構成を図4-2に示す。このシステムでは、トレーサ粒子を用いて流れ場を可視化し、TVカメラで撮影した映像を流跡信号処理装置へ入力する。流跡信号処理装置では、その映像をリアルタイムで処理し、流跡画像を作成してホスト計算機(HP9816)に転送する。ホスト計算機はシステム全体を制御すると共に、流跡画像を解析して流速分布を求める。試験流体には、非ニュートン性を示す澱粉水溶液を用いた。試験は試験流体にトレーサ粒子として直径1mmのポリスチレン粒子を混入し、常温状態でポンプにより一定流量で循環させて行なった。試験終了後直ちに試験流体をドレンラインから取り出して、B型回転粘度計により粘度を測定した。

4.2.1.2 実験結果との比較

試験流体の粘度の測定結果を図4-3に示す。測定結果は水に重量比で各々3%、4%、5%の澱粉を溶かした水溶液を常温で測定したもので、その傾きから指数nが求まる。実験結果の一例を図4-4に示す。この時の試験条件は、流量が1.8 l/min、3%水溶液でその粘度は次式で表わせる。

$$\eta = 1.0 \dot{\gamma}^{-0.51} \text{ [Pa}\cdot\text{s]} \quad \dots \dots (4.1)$$

図4-5に速度ベクトルの計算結果及びy方向の速度分布に関する実験値と計算値との比較を示す。実験値との比較は変化の激しい入口近傍のA-A'とB-B'断面について示したもので、7%以内の差で両者は一致している。なお、三次元流速分布測定システムの測定誤差は5%である。

4.2.2 移動自由境界の検証

4.2.2.1 箱形流路を用いた検証

箱型流路内の自由境界の移動について実験結果と計算結果とを比較検証する。実験に用いた箱型モデルの形状を図4-6に示す。このモデルは底板に比べ側壁の流路幅が厚く、また側壁上部にいくほど流路幅が広がるところに特徴がある。従って、入口から流入した溶融樹脂は充填が進むに連れて、側壁の流れが先に進んでいく。実験に使用した樹脂はポリアセタール樹脂(ジュラコンM90-02)である。実験では自由境界の時間的な移動を模擬するために、射出成形機を用いて一定時間間隔で一定量の溶融樹脂(樹脂温度185℃)を

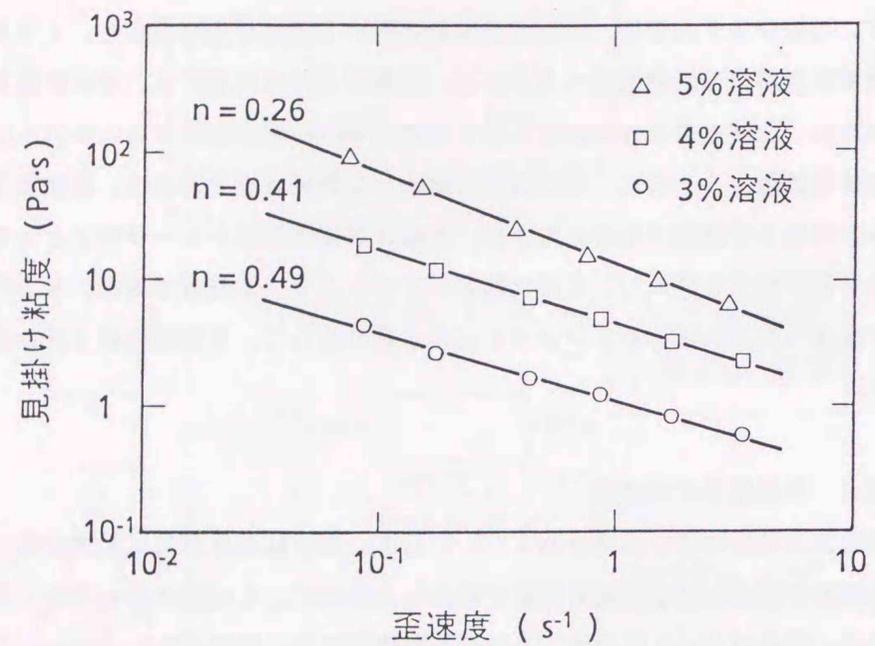


図4-3 澱粉水溶液の粘度特性

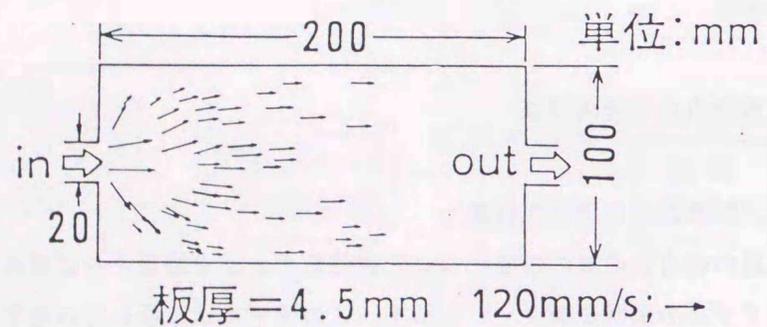
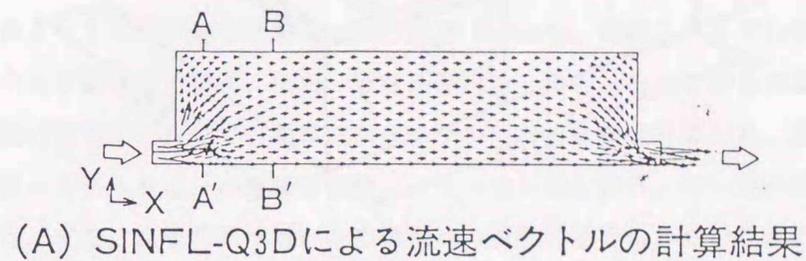
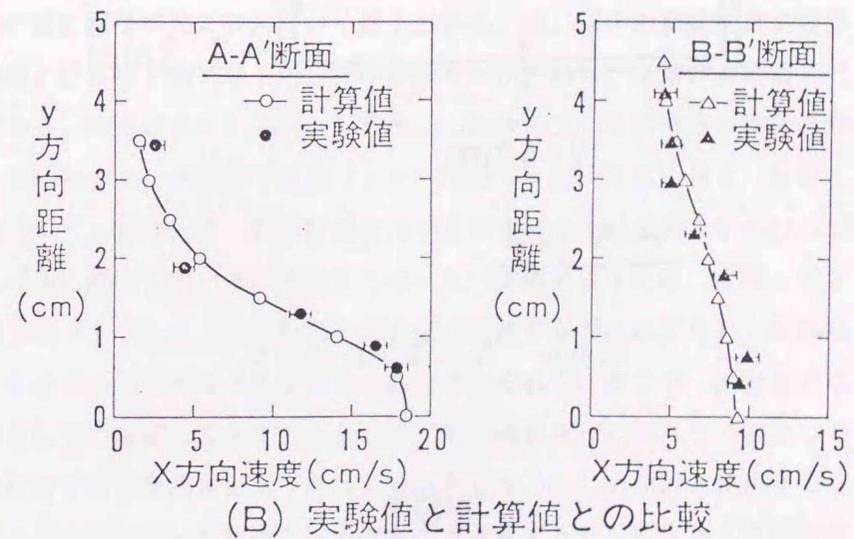


図4-4 流速分布の測定例



(A) SINFL-Q3Dによる流速ベクトルの計算結果



(B) 実験値と計算値との比較

図4-5 実験値と計算値との比較

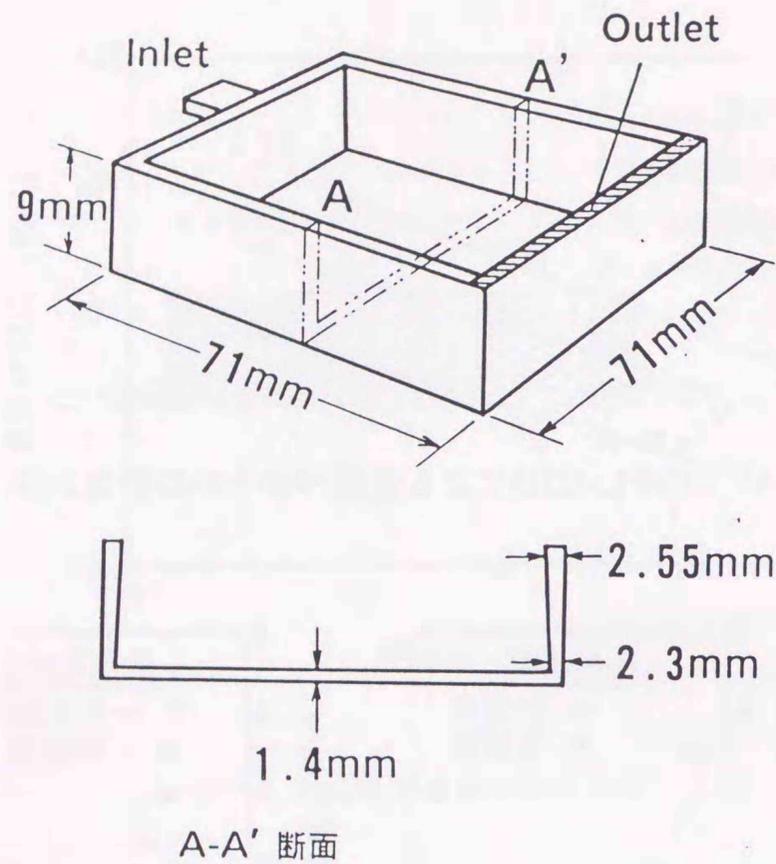
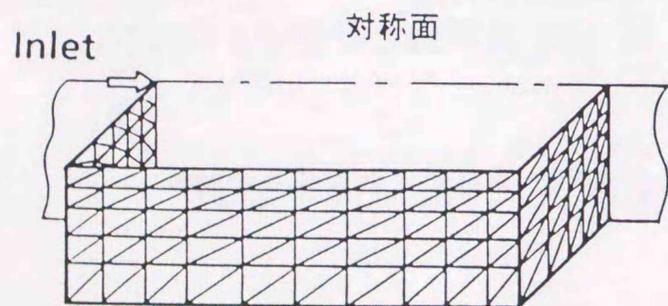


図4-6 箱形モデルの形状



節点 = 769  
要素 = 430

図4-7 箱形モデルの計算体系

注入するショートショット成形を行なった。その結果を図4-8に示す。このショートショット成形を繰り返すことにより、型から取り出したショートショット成形品の充填の様子から、自由境界の移動を測定できる。図4-8から判る様に、時間の経過と共に側壁の流れの方が先に進むことが実験的にも明らかとなった。

計算体系を図4-7に示す。計算は対称条件により1/2領域について行なった。主な計算条件は表4-1に示す通りであり、入口流速 0.31m/s、時間ステップ0.025s、全節点数 769、全要素数 430である。なお、形状が薄肉シェル of 三次元であるので、流路幅方向を層流の解析解でモデル化する擬似三次元モデル<sup>(35)</sup>で2次元計算した。また、マーカーのコントロールデータは、小要素分割数2、マーカー発生数5、マーカー計算20回/ステップである。また、充填時間が短いため金型への放熱の影響は小さいことと、剪断発熱による温度上昇は高々2~3℃であることから、等温(185℃)として計算した。計算結果の一例として各々0.5秒、1.25秒の時の流速分布を図4-9に示す。実験結果と同様に時間の経過と共に側壁が先に進んでいく様子が判る。尚、図中の実線は自由境界を表わす。

実験値と計算値との比較を示したのが図4-10である。左側が実験結果で、右側が計算結果である。結果は各々0.25秒、0.75秒、1.25秒及び1.75秒の自由境界の位置を示したものである。両者は、充填終了直前(t=1.75秒)を除いては、良く一致している。充填終了直前(t=1.75秒)で、計算結果の方が自由境界の進行が若干早くなっているのは、二流体モデルに起因している。本論文で述べた二流体モデルでは、流体1と2の密度比を大きく取ると(1:2以上)移動境界面近傍の流速分布が乱れてくる。これは密度比によりマトリックスの条件数が大きくなるためと考えられる。そこで、本計算では流体2側は仮想流体として、密度は流体1と一定とし、粘性係数を1/1000以下に設定している。そのため出口近傍では仮想流体に引っ張られる流れとなる。この原因を排除するため、(3.2)式の連続の式の取り扱いを界面での密度変化を考慮する形に改良すると、密度比1:5まで改善することができた。

#### 4.2.2.2 実成形品を用いた検証

成形シミュレーションへの適用として、自動車用クーラーユニットケースに適用した例を示す。この例でも前節同様擬似三次元モデルで計算した。計算体系を図4-11に示す。主な計算条件は、入口流速 0.33m/s、時間ステップ 0.1sである。使用樹脂は昭和電工㈱のタルク20%入りのポリプロピレン(KF 2070TW)である。本解析対象の中央部は波形状

表4-1 箱形モデルの計算条件

係数	$\eta_0$	$3.37 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{s}^n$
指数	$n$	0.41
温度定数	$c$	$-0.0183 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
密度	$\rho$	$1200 \text{ kg/m}^3$
入口流速	$v_0$	$0.05 \text{ m/s}$
タイムステップ	$\Delta t$	$0.005 \text{ s}$
メッシュ	$\Delta l$	$0.003 \text{ m}$

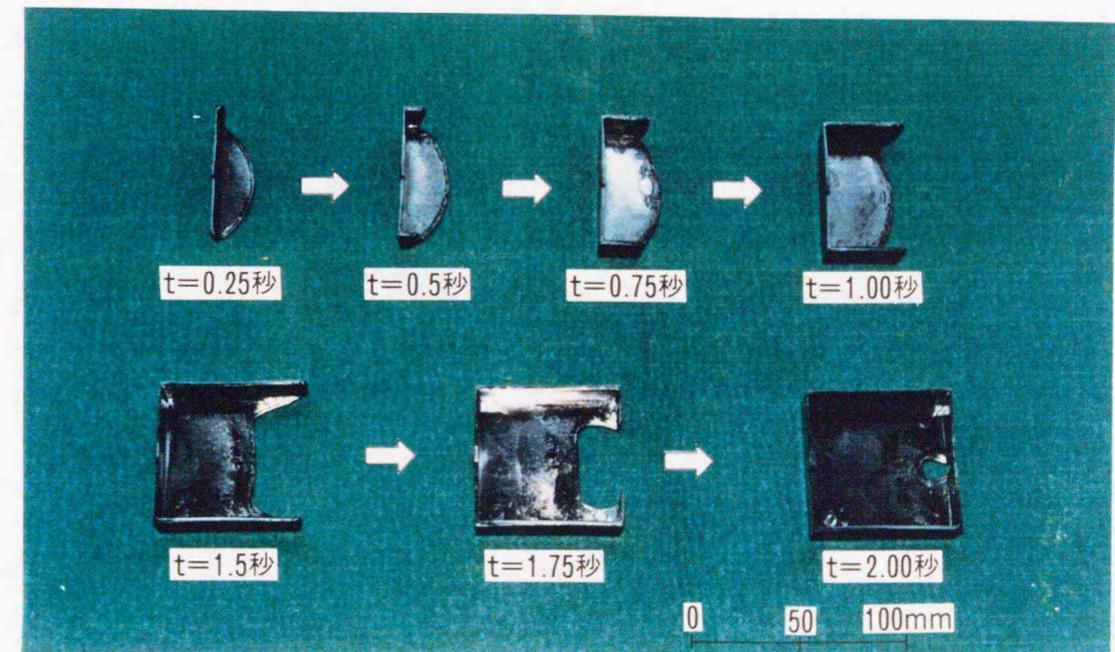
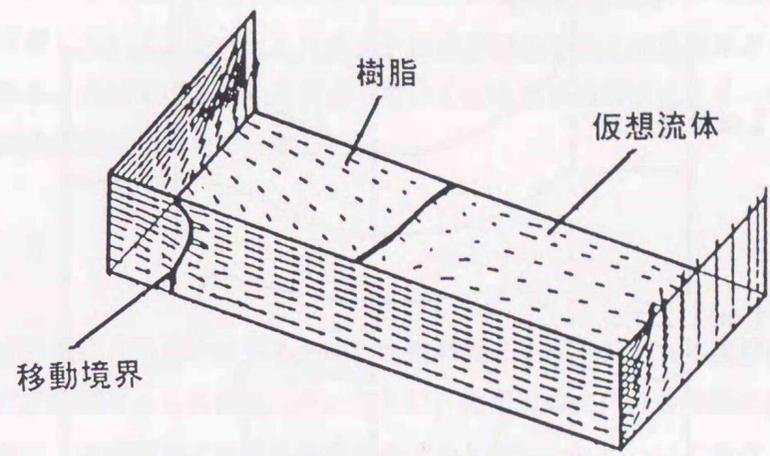
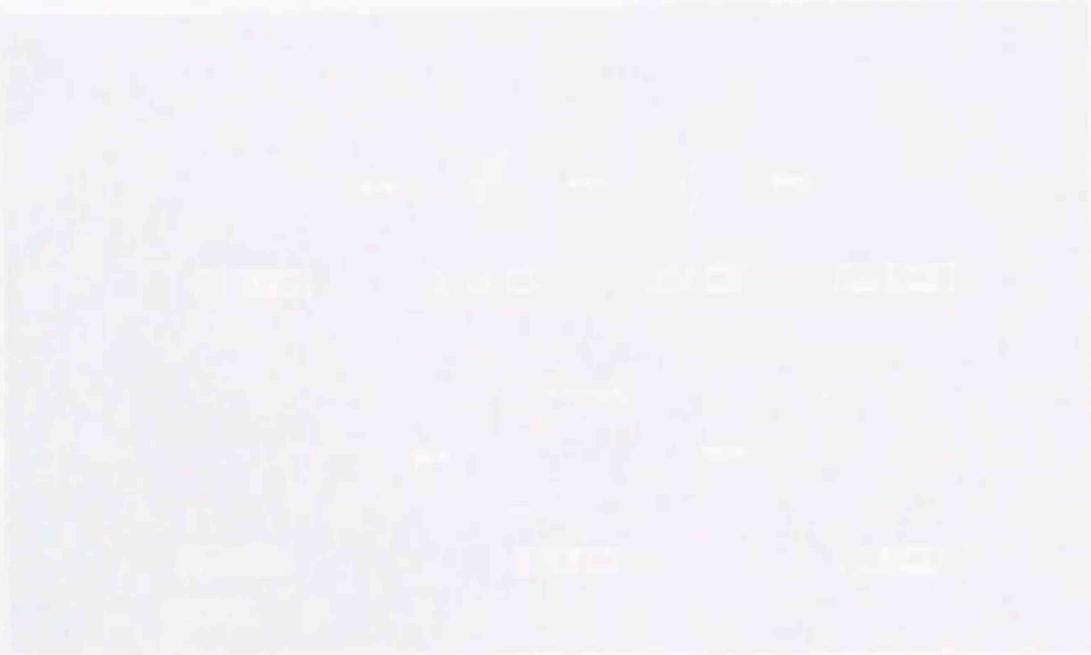
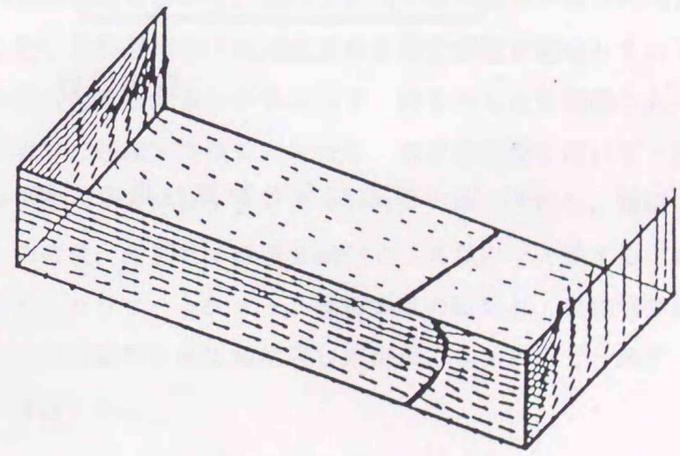


図4-8 ショートショット実験結果



(a)  $t = 0.5 \text{ s}$



(b)  $t = 1.25 \text{ s}$

図4-9 箱形モデルの計算結果

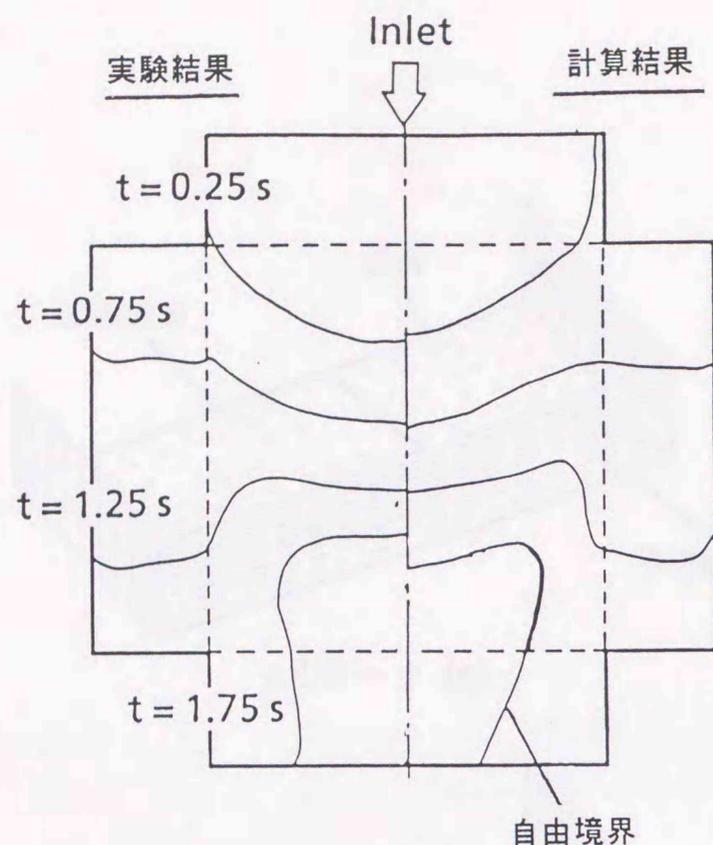


図4-10 実験結果と計算結果の比較

の曲面部であるが、解析モデルではこの部分を体積一定の条件の下に平面で近似した。また、前節と同様の理由から等温（250℃）として計算した。マーカのコントロールデータは前節と同様である。各時刻毎の移動境界の位置及び3秒後の圧力分布の計算結果を図4-12に示す。入口から流入した溶融樹脂が等方的に流れていく様子が判る。流入3秒後の自由境界の位置について、ショートショット成形実験の結果と計算結果とを比較したのが図4-13である。入口を中心にして広がっていく自由境界の形状はよく一致しており、入口からの移動距離は5%以内で一致した。

#### 4.3 結 言

流速分布の計算精度を明らかにするために、指数則モデルで表される模擬流体を用いて実施した可視化実験結果と比較検討した。さらに、箱型流路内の溶融樹脂の流れと実成形品の流れに適用し、溶融樹脂の流動先端であるメルトフロントについて擬似三次元計算結果と実験結果とを比較検討した。主な知見は以下の通りである。

- (1) 指数則で表せる澱粉溶液を用いて、透明アクリル製の矩形平板内の流れに対する可視化実験を実施した。非接触型の三次元流速分布測定装置で測定した定常の流速分布と、擬似三次元の解析結果を比較し7%以内で一致することを確認した。
- (2) 箱型流路で自由境界の移動を模擬するために、射出成形機を用いて一定時間間隔で一定量の溶融樹脂を注入するショートショット成形実験を実施し、擬似三次元の計算結果と比較検討した結果、充填終了直前を除いて5%以内で一致することを確認した。
- (3) 実成形品を対象としたショートショット成形実験の結果と、自由境界の移動距離に関する擬似三次元の計算結果とを比較検討した結果、5%以内で一致することを確認し、その実用性を確認した。

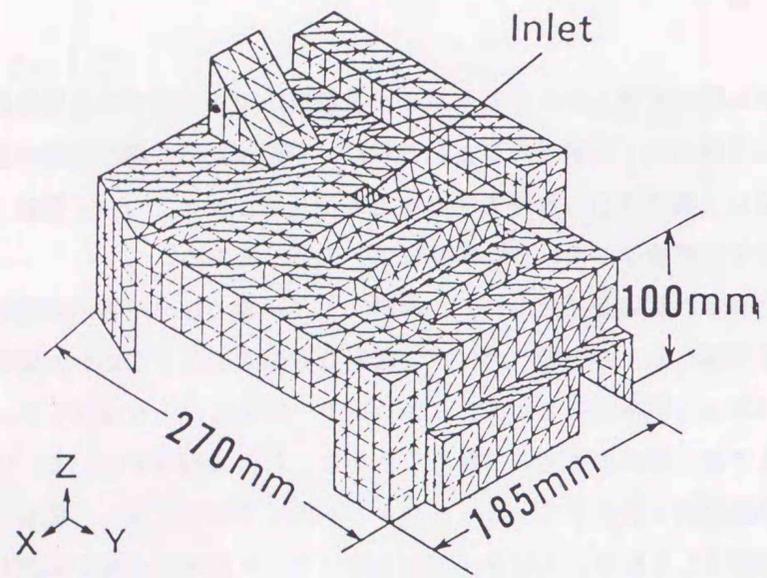


図4-11 自動車用クーラーユニットケースの計算体系

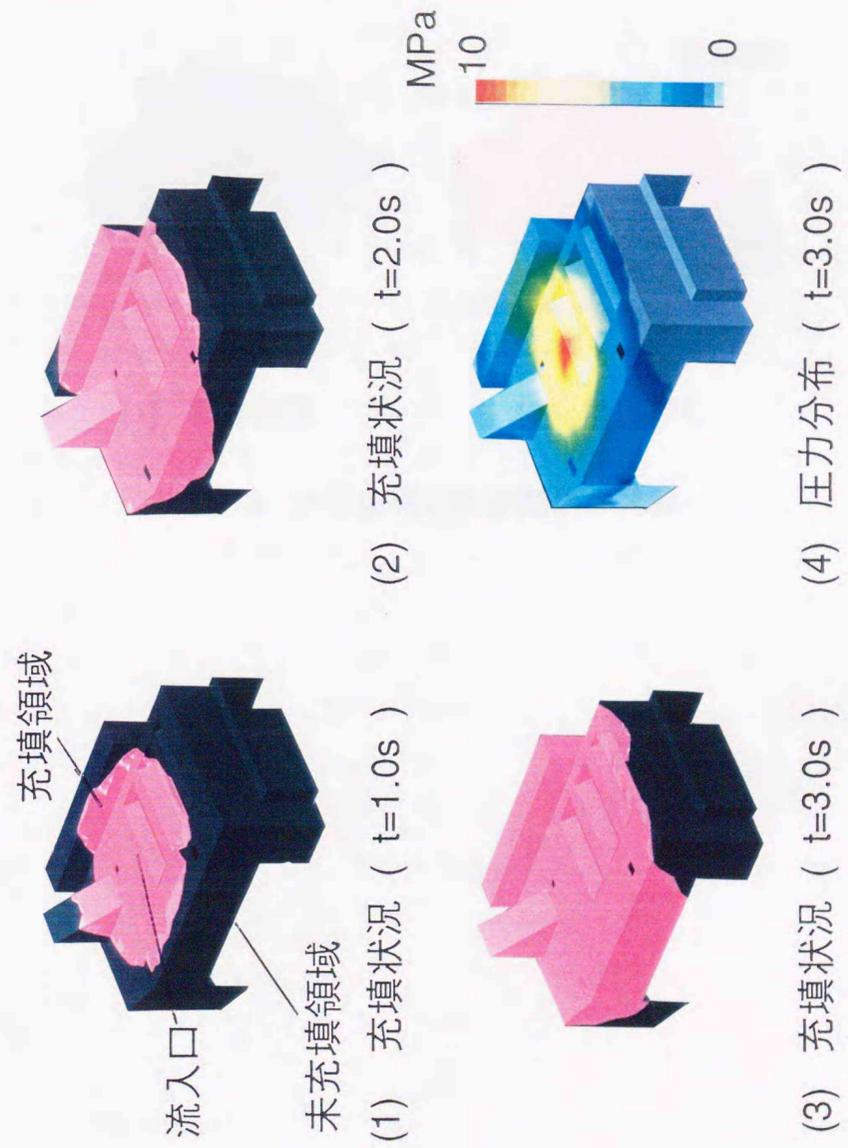


図4-12 自動車用クーラーユニットケースの計算結果



(1) 実験結果

(2) 計算結果

図4-13 実験結果と計算結果の比較

## 5.1 緒言

射出成形の分野では、成形品の開発期間の短縮、コスト低減および信頼性向上の観点から、計算機による成形シミュレーションが重要課題となっており、樹脂流動に関しては種々の解析手法が提案されている<sup>(7)</sup>。しかし、射出成形材料の機械的性質を改善させる繊維強化樹脂を用いた場合には、樹脂流動解析に加え、成形品の変形に影響を与える繊維配向の予測が必要となってきた。繊維配向の予測に関しては、繊維を剛体とみなして配向を計算する手法が、J.W.Gillespie<sup>(52)</sup>や平井ら<sup>(53)</sup>により研究されている。これらの手法は各繊維の相互作用による弾性的な挙動は表現できないため、長繊維に対しては誤差が大きくなるが、短繊維の場合には有効である。J.W.Gillespie はポアゾユ流れの中で、剛体繊維の配向をせん断速度の関数で扱った Jeffery の配向式を用いた手法を、平井らは分割した各要素毎の速度勾配テンソルから、繊維の回転角の変位を計算する手法を各々提案している。両者ともに単純体形について実験し、その実験結果と計算結果は良い一致を示したと報告している。

本研究では前章に示した指数則で表される高粘性非ニュートン流体の自由表面を持つ非定常2次元および3次元流れの解析手法をベースとして、短繊維含有樹脂を対象とした繊維配向の解析技術を開発することを目的とする。本研究で提案する手法<sup>(54)</sup>は、平井らと同様に速度勾配により剛体繊維の回転を計算し、さらに平井らの考慮していない上流の配向の影響を計算に取り入れるため、流れに輸送される繊維の量を風上法で計算するものである。

## 5.2 配向解析手法

### 5.2.1 配向解析モデル

強化繊維配合樹脂の流動時に生じる繊維配向は、樹脂中にランダムに配合された繊維が流動により方向性を生じる現象である。この繊維配向が生じると、繊維が配向する方向により局所的に収縮率が異なってくるため、異方性の変形特性を示す。繊維の配向は、流速分布により図5-1に示す3種の配向パターンを示す。いずれの場合も繊維に加わる力が

最小になる方向へ配向するため、壁近傍の単純剪断流では壁に平行な方向に、拡大流の場合は流線に直交する方向に、縮小流の場合は流線に沿った方向に配向することが判る。

繊維配向の解析モデルとしては、繊維を剛体とみなして配向を計算する手法が報告されており、その代表的なものが J.W.Gillespie<sup>(52)</sup>や平井ら<sup>(53)</sup>の研究である。これらの手法は繊維同士の相互作用による弾性的な挙動は表現できないため、長繊維に対しては誤差が大きくなるが、短繊維の場合には有効である。本研究でも解析の難易度、計算時間を考慮して、短繊維含有樹脂を対象とし、平井らと同様に速度勾配により剛体繊維の回転を計算する。速度および自由境界の計算は2、3章に示した手法を用いる。また、平井らの考慮していない上流の配向の影響をモデルに取り入れるため、繊維の量(本数)を表す繊維充填率  $f$  を定義し、風上法で計算する。モデル化に際して次の仮定をおく。

- (1) 短繊維を対象とし、流体中の繊維による流動抵抗の影響は無視する。
- (2) 繊維のアスペクト比は50~80であり、繊維径の影響は無視する。
- (3) 繊維間の相互作用及び繊維の慣性は考慮しない。
- (4) 1要素内で流路の厚さ方向の配向は一様とする。
- (5) 要素内で繊維の配向状況(配向量、配向角)は一様とする。

短繊維であっても樹脂中の繊維の含有率が增大すると、繊維の相互作用および繊維から流体に働く力が無視できなくなるため、繊維の含有率にも上限が存在する。現在のところ明確な基準はないため、実験的に含有率の上限値を決定する必要がある。平井らの研究<sup>(53)</sup>では繊維の含有率が20wt%までは、配向に対する繊維の含有率の影響はないと報告されている。

また、厚さ方向の繊維の分布の特徴は上下の表面近傍の層(スキン層と呼ぶ)と内部の層(コア層と呼ぶ)の3層の分布となることである。スキン層では上下面近傍の厚さ方向の急峻な速度勾配により、上下面に沿った繊維配向を示し、流動方向の速度勾配の影響が小さいために初期の配向状態が保持される。一方、コア層では厚さ方向の速度勾配の影響が無視でき、流動方向の速度勾配により繊維配向が生じる。従って、厚さ方向を一様とした本モデルはコア層の配向方向を計算対象としている。

以下に繊維配向を表す配向量及び配向角の計算モデルについて述べる。配向量のパラメータとして、要素内の繊維の充填率  $f$  を用いる。 $f$  は次式で定義する。

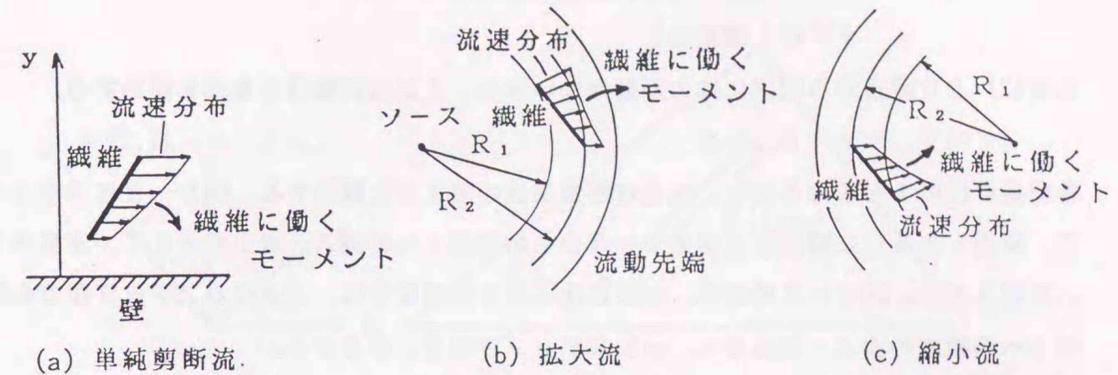


図5-1 流動様式による繊維配向

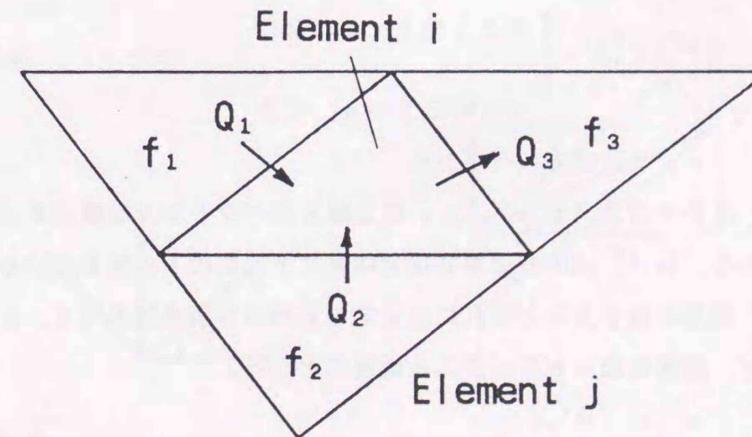


図5-2 配向量の計算

$$f = \frac{\text{要素内の単位体積当たりの繊維量}}{\text{金型流入時の単位体積当たりの繊維量}} \quad \dots \dots (5.1)$$

ただし、 $f = 1$  ; 流入時と同じ繊維含有量

$f = 0$  ; 繊維なし

仮定(2) より繊維から流体には力が働かないから、 $f$  は次の輸送方程式を満足する。

$$f_{,t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{,x} = 0 \quad \dots \dots (5.2)$$

各要素単位の  $f$  を求めるのに、風上有限要素法の考え方を採用する。図5-2に示すように、要素  $i$  の3辺に隣接する要素1~3からの要素  $i$  への流入・流出を考えて、充填率  $f_i$  を計算する。図5-2の場合、(2)式は次の形に離散化され、1タイムステップ間での要素  $i$  への繊維の流入・流出から、 $n+1$  ステップでの  $f_i$  が求まる。

$$f_i^{n+1} = f_i^n \left(1 - \frac{Q_3 \cdot \Delta t}{V_e}\right) + \frac{\Delta t}{V_e} (f_1^n Q_1 + f_2^n Q_2) \quad \dots (5.3)$$

ただし、 $\Delta t$  : タイムステップ、 $V_e$  : 要素体積、 $Q$  : 辺をよぎる流量

ここで、 $n, n+1$  は各々計算ステップを表わす。(5.3) 式は要素の各辺から、流入するか、流出するかを判定して、上流側の  $f$  の値を用いていく。(5.3) 式を一般的に書くと次式となる。

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{\Delta t}{V_e} \sum_{j=1}^3 Q_j^n \cdot [f_i^n, f_j^n] \quad \dots \dots (5.4)$$

$$\text{ただし、} [f_i^n, f_j^n] = \begin{cases} f_j^n ; Q_j^n \cdot n_j \geq 0 \\ f_i^n ; Q_j^n \cdot n_j < 0 \end{cases} \quad \dots \dots (5.5)$$

$n_j$  : 法線方向ベクトル

ここで、 $n, n+1$  は各々計算ステップ、 $n_j$  は法線方向ベクトル、 $Q$  は辺をよぎる流量、 $V_e$  は要素体積である。(5.4) 式の右辺第2項では常に上流側の  $f$  の値を用いる。配向角を計算するために、繊維の長手方向とそれに直交する方向の局所座標系 ( $\eta, \xi$ ) を図5-3の様に定めると、速度勾配マトリックス  $A$  は次式となる。

$$A = \begin{vmatrix} u', \eta & u', \xi \\ v', \eta & v', \xi \end{vmatrix} \quad \dots \dots (5.6)$$

( $x, y$ ) 座標系と ( $\eta, \xi$ ) 座標系の変換関係は図5-3、4より次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \xi \\ \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad \dots \dots (5.7)$$

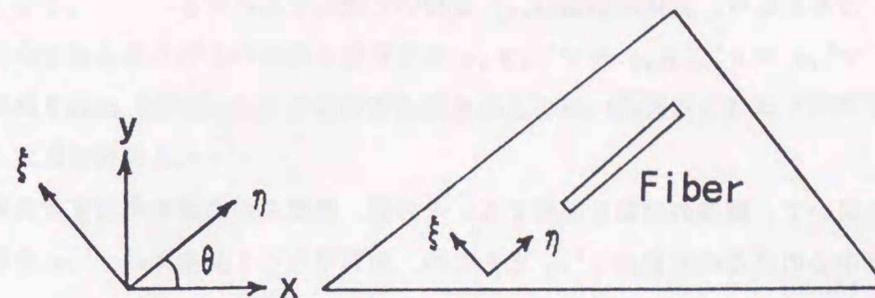


図5-3 要素内の局所座標

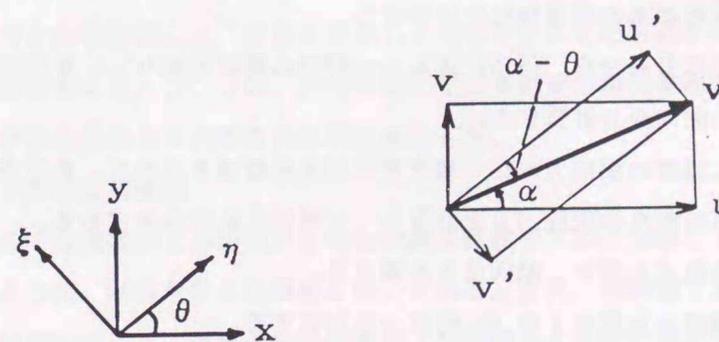


図5-4 速度ベクトルの変換関係

$$\begin{vmatrix} u' \\ v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} \quad \dots \dots (5.8)$$

繊維の配向方向に座標系を定めた場合には、繊維の回転に寄与する速度勾配テンソルの成分は  $v', \eta$  のみとなり、全体座標系  $(x, y)$  を用いて次式で表わせる。

$$\begin{aligned} v', \eta &= v', x x, \eta + v', y y, \eta \\ &= (u', x \sin \theta - v', x \cos \theta) \cos \theta + (-u', y \sin \theta + v', y \cos \theta) \sin \theta \end{aligned} \quad \dots \dots (5.9)$$

(5.9)式を用いて、繊維の回転を評価する。その際、繊維長の影響を考慮するため、繊維の両端及び中心の3点の位置の  $v', \eta$  をもとめ、加算平均して要素毎の  $v', \eta$  を計算する。従って、1タイムステップ  $\Delta t$  における回転角の変位  $\Delta \theta$  は次式となる。

$$\Delta \theta = \tan^{-1} (v', \eta \cdot \Delta t) \quad \dots \dots (5.10)$$

### 5.2.2 繊維配向の解析手法

前節の解析モデルに従った配向量、配向角の計算手順は以下の様になる。

(1) ゲートに初期の配向状態を設定する。

ゲート付近の配向はランダムであるので、配向状態を表わす仮想繊維として1要素に対して、各々  $-45, 0, 45, 90$  の配向角を持つ4本を1組として与える。この際、樹脂が未充填の領域は計算対象から外す。

(2) 要素の局所座標系の速度勾配を計算する。

$n$ 時刻の速度分布から、(5.9)式より  $n$ 時刻の速度勾配  $v', \eta$  を求める。

(3)  $v', \eta$  から配向角を計算する。

各要素毎に繊維の配向方向に一致させた局所座標系を求めて、各要素毎の  $v', \eta$  から(5.10)式より回転角の変位  $\Delta \theta$  を計算し、 $n$ 時刻の配向角を求める。

(4)  $f$  の輸送方程式を解き、配向量を計算する。

$n$ 時刻の繊維の充填率  $f$  を(5.4)式から計算する。

(5) 次時刻の代表繊維の配向角を決定する。

要素  $i$  に対して、各隣接要素から4組の配向角を持った繊維が流入もしくは流出する。隣接要素の配向状態を考慮して、次時刻の4組の代表繊維の配向角を求めるために、繊維の充填率  $f$  および流量  $Q_j$  を用いて次式で重み付けをする。

$$\begin{aligned} &\cdot \text{流入側 ; } Q_j \cdot n_j < 0 \\ \omega_j &= Q_j \cdot f_j \cdot \Delta t \quad \dots \dots (5.11) \end{aligned}$$

$\cdot$  流出側 ;  $Q_j \cdot n_j \geq 0$

$$\omega_i = f_i (V_e - Q_j \cdot \Delta t) \quad \dots \dots (5.12)$$

(5.11)、(5.12)式を用いれば、代表繊維の配向角の平均化の計算手順は、図5-5に示す通りとなる。

(6) 平均配向角およびその分散を計算する。

配向の度合い(強さ)を示す配向度を表わすために、各要素ごとに平均配向角及びその分散を次式で求める。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \sum_{k=1}^4 \theta_{ik} \\ \sigma_i &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 (\theta_{ik} - \theta_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (5.13)$$

### 5.3 解析結果の検討

本章では、数値解析誤差の検討結果と、本手法に基づいて作成したプログラムの解析機能を確認するために、定常状態と非定常状態の2つのケースについて解析した結果について述べる。

#### 5.3.1 解析誤差の検討

計算結果に含まれる誤差には、現象を近似した解析モデルそのものにかかわるものと離散化誤差の2種類がある。ここでは、前者に対してはその適用範囲を検討し、後者に対しては配向量及び配向角の各々の離散化誤差を検討した。

(1) 解析モデルの適用範囲

本解析モデルでは繊維同士の相互作用のない剛体繊維モデルを採用している。従って、前節で述べたように、解析対象は短繊維に限定される。また、短繊維であっても樹脂中の繊維の含有率が増大すると、繊維の相互作用および繊維から流体に働く力が無視できなくなるため、繊維の含有率にも上限が存在する。現在のところ明確な基準はないため、実験的に含有率の上限値を決定する必要がある。平井らの研究<sup>(53)</sup>では繊維の含有率が20wt%までは、配向に対する繊維の含有率の影響はないと報告されている。

本モデルでは流路の厚さ方向の分布を一様としている。厚さ方向の繊維の分布の特徴は上下の表面近傍の層(スキン層と呼ぶ)と内部の層(コア層と呼ぶ)の3層の分布となる

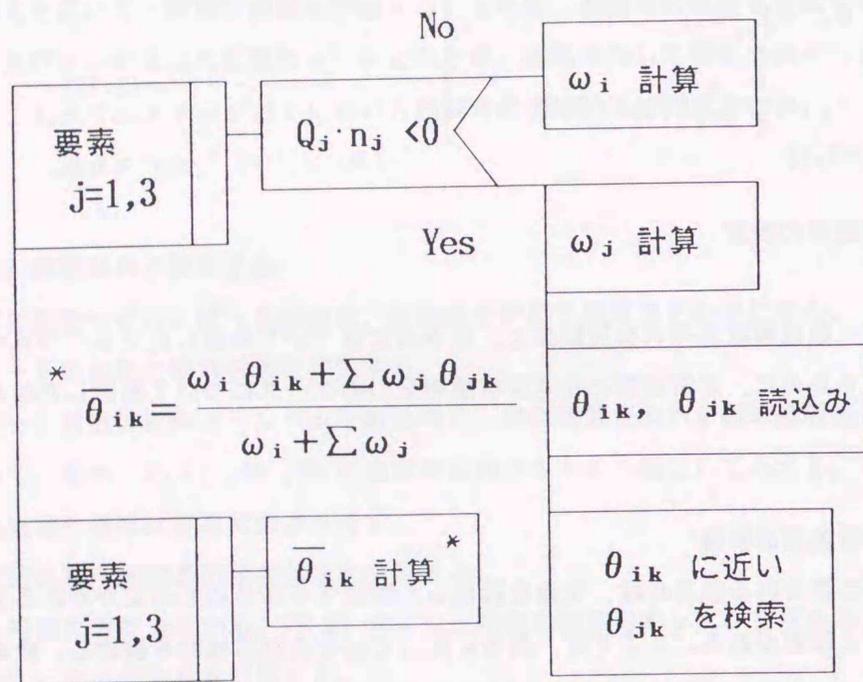


図5-5 繊維配向角の平均化手法

ことである。スキン層では上下面近傍の厚さ方向の急峻な速度勾配により、上下面に沿った繊維配向を示し、流動方向の速度勾配の影響が小さいために初期の配向状態が保持される。一方、コア層では厚さ方向の速度勾配の影響が無視でき、流動方向の速度勾配により繊維配向が生じる。従って、厚さ方向を一様とした本モデルはコア層の配向方向を計算していることになり、スキン層に関しては今後検討する必要がある。

(2) 離散化誤差

まず配向量の計算について考える。配向量の計算では、繊維の充填率  $f$  の輸送方程式を時間に関し前進差分で、移流項を一次の風上有限要素法で解いている。一次の風上法の精度に関しては差分法に対して既に求められている。それによると、Taylor展開による誤差解析によりメッシュ幅を  $\Delta l$  とすれば、 $O(\Delta l^2)$  の2次の精度を持ち、一次の風上有限要素法の場合でも同様である。また、時間積分にはオイラーの陽解法を用いているため、タイムステップ  $\Delta t$  はクーラン数  $Co (= v \Delta t / \Delta l)$  を基準として設定する必要がある。そこで、 $\Delta t$  が局所的にクーラン条件 ( $Co < 1$ ) を越えた場合、プログラム内で自動的にクーラン条件を満足するような  $\Delta t$  を設定している。

配向角は速度勾配により決定される。したがって、その精度は速度勾配の計算精度と、ある方向分布を持つ繊維群を各要素に対して4方向の繊維で代表させる平均的取り扱いによる誤差に依存する。速度勾配の計算精度を速度の計算精度と比較してみる。一般に真値  $x$  に誤差  $\Delta x$  が加わった場合の関数  $f(x)$  の誤差  $\Delta f$  は次式で表わせる。

$$\Delta f = \Delta x \cdot f'(x) + O(\Delta x^2) \quad \dots \dots (5.14)$$

(5.14)式において、 $x$ として速度を、関数  $f$ として速度勾配を代入すれば、

$$\Delta f = \Delta u \cdot \partial u' / \partial u + O(\Delta u^2) \quad \dots \dots (5.15)$$

ただし、 $u'$  :  $u$ の1階の空間微分

なお、(5.15)式は関数  $f$  が十分に滑らかで、かつ1階微分可能であることが前提となる。(5.15)式の右辺第1項は0になるから、結局、速度勾配の誤差は速度の計算誤差の2次のオーダーとなる。

次に、ある方向分布を持つ繊維群を各要素に対して4方向の繊維で代表させた場合の平均配向角の誤差を、定常の単純剪断流で評価する。流速を  $u$ 、壁に直交する方向を  $y$  とすれば、繊維の回転に寄与する速度勾配は次式となる。

$$\frac{\partial v'}{\partial \eta} = -\frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \quad \dots \dots (5.16)$$

従って、1タイムステップ当たりの回転角の変位は次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \cdot \sin^2 \theta\right) \\ &= \tan^{-1}(-C \cdot \sin^2 \theta) \quad \dots\dots (5.17) \end{aligned}$$

ここで、 $C = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \Delta t$

4本の繊維で代表させたことによる平均配向角の誤差を顕著に現わすため、初期のランダム状態として 0~90° の間で1°置きに90本の繊維を持つ系を考える。これを本モデルに適用すると、0°、30°、60°、90° の4本で繊維系を代表させることになる。繊維1本ごとに配向角を計算し、それを基にして平均配向角を求めた場合と本モデルを用いた場合の平均配向角の差についてCをパラメータとして計算した結果を図5-6に示す。図5-6はタイムステップΔt毎に非定常計算を進めた場合の、各時刻の平均配向角の差を、横軸に計算ステップを採り示してある。速度勾配が緩やかな(Cが小さい)ほど、その差は大きくなるが最大で1.3°である。

### 5.3.2 正方形キャビティの解析

解析プログラムの機能を確認するため、正方形キャビティを例にとり、初期状態から定常状態に至るまでの配向を解析した。解析体系を図5-7(1)に示す。左下部から流入し、右上部から流出する流れに対して、流体中の繊維の配向を計算した。解析体系の特徴は、図5-1に示した3種の配向パターンをこの体系1つで再現できることにある。すなわち、流入口近傍の拡大流の領域、壁近傍の単純剪断流の領域および流出口近傍の縮小流の領域の3つである。初期状態として流速が0で、一様にランダムに繊維を分布させた状態から計算を開始した。初期の繊維方向は前節で示したとおり90°、45°、0°、-45°の4種類である。図5-7(2)~(4)に各時刻の配向角の解析結果を示す。図中の線は、要素の配向角を代表する4本の繊維を重ねて表示したものである。従って、1本の線に見えるものは4本の繊維の方向が揃って強い配向があることを示し、逆に多重に見えるものは繊維の方向が揃わず弱い配向であることを示している。ランダム状態から時間の経過と共に速度勾配により繊維の方向が揃い、配向していく様子が判る。また、急峻な速度勾配が生じる流入部の拡大流及び流出口近傍の縮小流の領域が先に配向し、中央部が最も配向しにくいことが判る。図5-7(4)の定常時の配向角分布には、壁近傍の単純剪断流、拡大流及び縮小流の領域に特徴的な3種の配向パターン現われている。繊維は流体から繊維に加わる力が最小になる方向へ配向するため、壁際の単純剪断流では壁に平行な方向に、拡大流

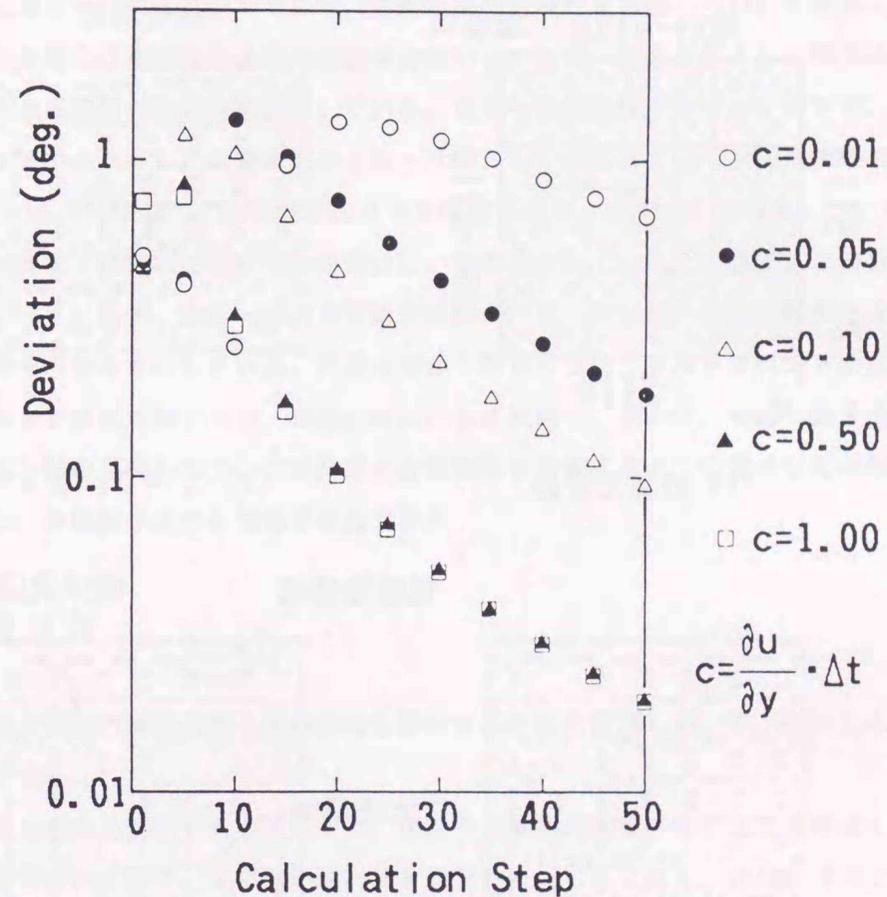


図5-6 平均配向角の誤差評価

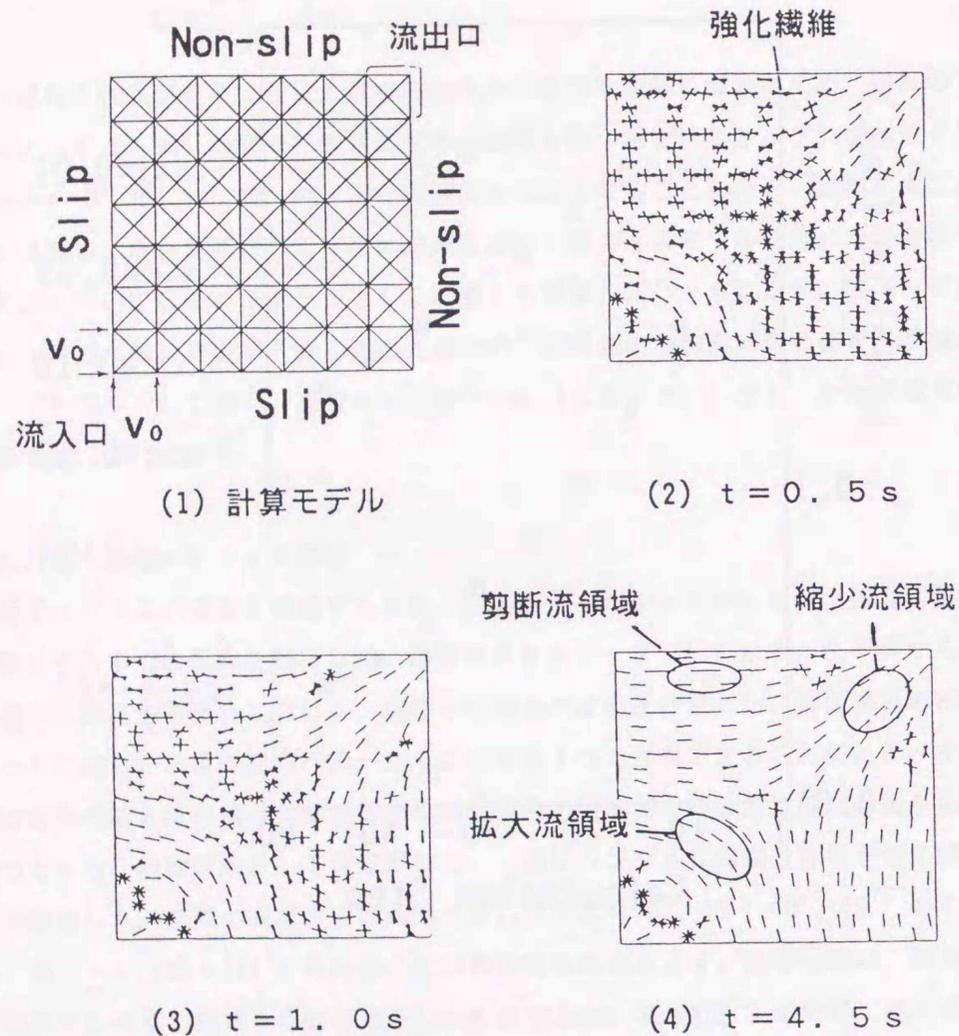


図5-7 正方キャビティの計算結果

の場合は流線に直交する方向に、縮小流の場合は流線に沿った方向に配向する。解析結果はこれらの特徴的な配向を再現できている。

### 5.3.3 偏心矩形キャビティの非定常解析

偏心矩形体系を用いた平井ら<sup>(53)</sup>の実験結果と本手法による計算結果とを比較する。解析体系は図5-8に示す通りであり、解析体系の対称性を考慮して1/2の領域について解析した。平井らは樹脂中にX線の透過率の低いトレーサー繊維を混入し、軟X線写真撮影した結果から繊維の配向角を測定している。使用した樹脂はポリプロピレンで、約0.1wt%のニッケルメッキした炭素繊維がトレーサーとして含まれている。炭素繊維の長さは0.5-0.8mmである。なお、この実験ではガラス繊維がゼロ及び20wt%の場合について実験し、20wt%程度までは繊維の含有率の影響はないと報告されている。実験結果と解析結果の比較を図5-9に示す。図5-9の解析結果は図5-7(2)~(4)の解析結果とは異なり、平均配向角の分布を示している。実験結果から判るように、メルトフロントが左側の壁に到達するまでは拡大流であり、繊維は同心円上に配向し、その後、壁面に沿う流れを生じ、壁面に沿う配向が現われる。実験結果と計算結果を比較すると、定性的な配向傾向は一致しており、本解析手法の有効性が確認できた。

### 5.4 結 言

繊維強化樹脂の流動に伴う繊維配向を解析する手法を開発した。本手法の主な特徴は次の通りである。

- (1) 上流の配向の影響を考慮するため、樹脂中の繊維の充填率  $f$  の輸送方程式を風上有限要素法を用いて解き、要素毎の配向量を計算した。これにより、繊維密度の分布を計算可能にした。
- (2) 要素の局所座標軸を繊維の方向と一致させ、局所座標における繊維回りの速度勾配を用いて繊維の回転を求め、各要素毎の配向角を計算した。これにより、繊維の配向角分布を計算可能にした。
- (3) 要素内の平均配向角を計算する際、要素毎に繊維の配向方向を基準とした局所座標系を設定し、隣接要素の繊維の充填率と流入量を考慮して重み付けすることにより計算精度を向上させた。

提案した解析手法を正方形板の非定常流れに適用し、特徴的な繊維配向挙動の計算性能を確認した。また、平井らの矩形平板に対する実験結果と計算結果を比較検討した。得ら

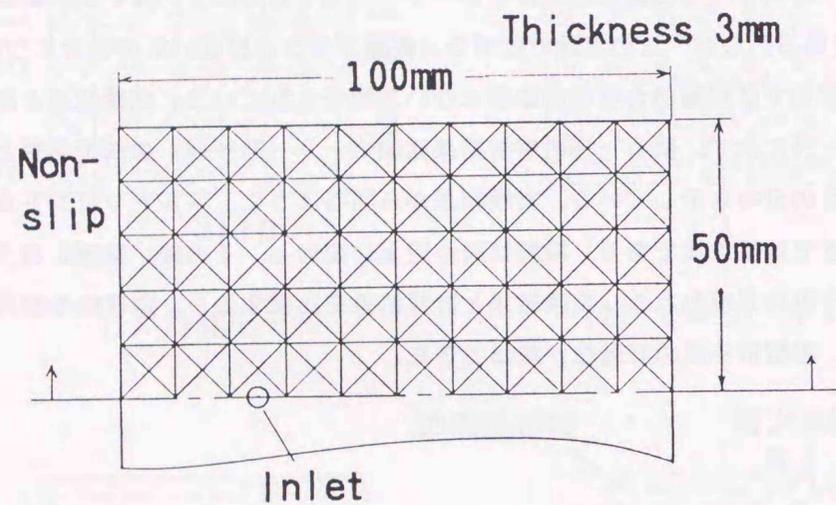
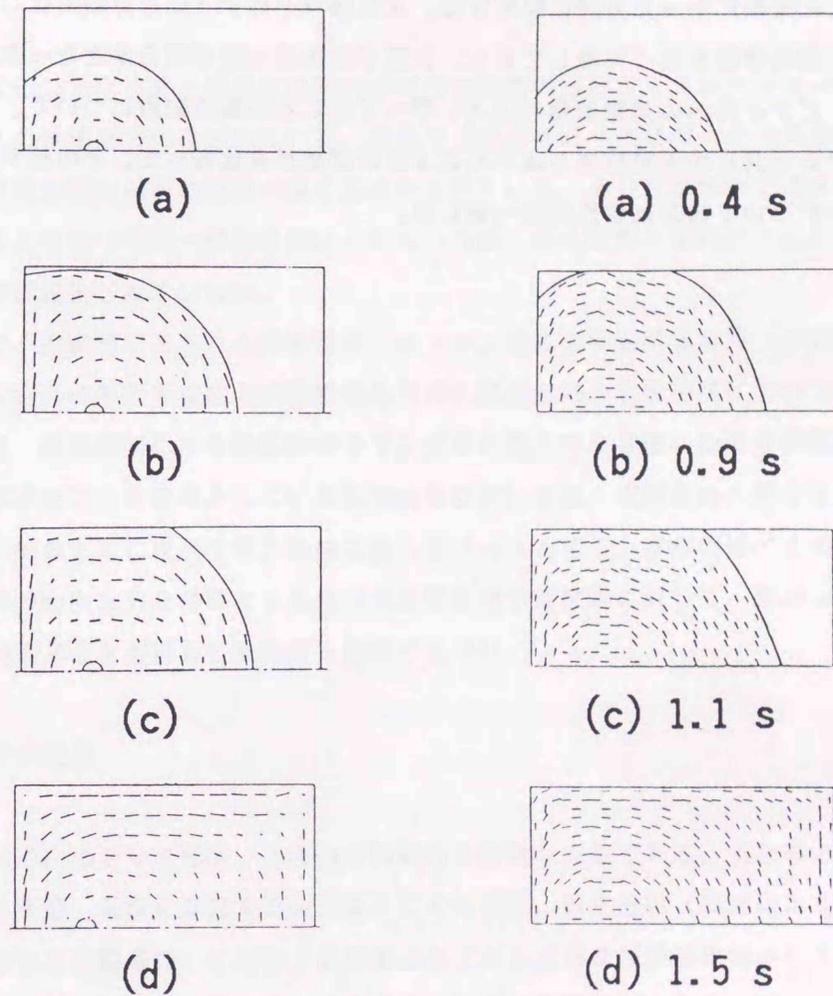


図5-8 矩形キャビティの計算体系



(1) 実験結果<sup>(3)</sup>

(2) 計算結果

図5-9 矩形キャビティの計算結果

れた主な知見は以下の通りである。

(4) 流体から繊維に加わる力が最小になる方向に繊維は配向する。したがって、壁近傍の単純剪断流領域では壁に平行な方向に、拡大流の場合は流線に直交する方向に、縮小流の場合は流線に沿った方向に配向する。正方形キャビティの計算結果はこれら3種の特徴的な配向挙動を良く再現しており、計算手法の妥当性が明らかとなった。

(5) キャビティ内への溶融樹脂の注入に伴って生じる繊維の配向について、偏心矩形体系に対する平井らの実験結果と本手法による計算結果を比較した。その結果、各時刻の配向分布について両者は定性的に一致した。

## 6.1 緒言

前章までに示したように、射出成形時の金型内の樹脂の流動シミュレーションに関してはすでに種々の手法が実用化されている。最近では成形品の寸法精度やそり変形を予測するため、そり変形解析技術の開発が強く望まれてきている。そり変形解析では成形収縮率を用いた熱応力解析<sup>(55)</sup>が一般的に用いられているが、強化繊維の配向による異方性を考慮した解析例は報告されていない。

前章までに、指数則で表される高粘性非ニュートン流体の移動境界を持つ非定常2次元および3次元流れの解析手法および繊維強化樹脂の繊維配向の解析手法について述べてきた。本章では、繊維配向による熱膨張率やヤング率の異方性を考慮したそり変形解析を目的とする。本研究で主な対象としている射出成形においては、成形品の大部分はシェル構造物であり、前章までに述べてきた擬似3次元をベースとする。本章で述べる手法では各要素毎に繊維の配向方向を基準とした直交異方性を持つ変位場に対して、厚肉シェル要素を用いた有限要素法を適用して熱変形を解析する<sup>(56)</sup>。

## 6.2 そり変形要因

成形後の成形品のそり変形は、各種の要因が絡む複雑な現象である。主なものとして、熱歪みによる変形、流動に起因する配向歪みによる変形、保圧過程（収縮によるひけを防止するための加圧圧縮過程）に起因する圧縮歪みによる変形及び結晶化歪みによる変形が挙げられる。熱歪みによる変形以外は射出成形に特有な変形要因である。以下に各要因について概説する。

### (1) 熱歪みによる変形

金型内の温度分布や成形品の構造（形状、厚さ等）に起因する冷却の不均一が原因で生じる局所的な収縮率の違いによる変形である。成形品の多くは薄肉のシェル構造であり、樹脂の流動方向だけでなく、シェルの厚さ方向の両面の温度差によっても変形が生じる。プラスチック固有の現象としては、温度条件（ガラス転移点 $T_g$ を境として）により、変形挙動を $T_g$ 以下の弾性挙動域と $T_g$ 以上の粘弾性挙動域に分離できる。両者の変形挙動の違い

は、変形時のずれ及び流動による応力緩和に現われる。

### (2) 配向歪みによる変形

配向歪みには、分子配向と配合繊維の流動配向の2種の原因がある。分子配向は、流動により高分子が一方方向に揃った状態で凍結されたもので、樹脂と金型との温度差を大きくして流れを急冷固化した場合や、薄肉部、細孔部を高速で樹脂を流動させた場合に生じる。繊維の流動配向は、樹脂中にランダムに配合された繊維が流動により、方向性を生じる現象である。共に、配向方向により収縮率が異なってくるため、異方性の変形特性を示す。繊維の流動配向は、流速分布により前節で述べた3種の配向を示す。いずれの場合も繊維に加わる力が最小になる方向へ配向するため、壁際では壁に平行な方向に、拡大流の場合は流線に直交する方向に、縮小流の場合は流線に沿った方向に配向することが判る。従って、2、3章で示した手法で計算された充填直前の流速分布から、要素毎に繊維の配向角を計算することにより繊維の配向が解析できる。

### (3) 圧縮歪みによる変形

圧縮歪みは圧縮力の不均一に起因し、圧力勾配の大きい箇所に顕著に現われる。特に、保圧過程でのゲートシール時（ゲートが冷却により固化し、それ以上樹脂が流入しない時点）のゲート近傍の変形に影響を及ぼす。圧縮歪みによる変形には、保圧時の樹脂の流れが影響し、状態方程式を考慮する必要がある。

### (4) 結晶化歪みによる変形

結晶性樹脂の徐冷時の結晶成長により生じる歪みである。金型温度が高い場合に、肉厚部で顕著に現われる。結晶の構造及び成長方向により、収縮率の分布に方向性が生じる。

本研究では上記の主要要因のうち、(1)及び(2)の熱及び配向歪みによる変形の解析手法について検討する。

## 6.3 数値解法

成形シミュレーションにおけるそり変形解析は、次の2つの段階に分けられる。

- (a) 金型に拘束された状態での残留応力解析
- (b) 金型から取り出した後の変形解析

(a)の場合、金型と接する表面上で、金型と垂直方向の変位が拘束される。(a)と(b)は境界条件が異なるだけで、同一の定式化が可能であるので、ここでは特に区別はしない。成形品

は薄肉のシェル構造物がほとんどであるので、計算時間、計算容量を考慮して、シェル要素を用いる。熱応力に対しては、ガラス転移点 $T_g$ 以上では応力が緩和され、残留応力は小さいため、応力の発生は $T_g$ 以下となった時点とする。主な仮定を以下に記す。

- (1) 時間の関数となるのは温度のみで、各時刻で準静的な応力状態が保持される。
- (2) 応力はガラス転移点 $T_g$ 以下で発生する。
- (3) 樹脂の変形は弾性変形範囲内とする。
- (4) 繊維配向による熱膨張率やヤング率の直交異方性を考慮する。
- (5) 要素上に立てた法線は変形後も直線を保つ。
- (6) 要素の中央面に垂直な応力に対応する歪みエネルギーを無視する。

上記(5)、(6)は厚肉シェル要素の仮定に相当する。以下に熱及び変形解析について示す。

### 6.3.1 基礎方程式

金型への充填後、流れが停止した状態では、温度変化に対しては厚さ方向の放熱が支配的となる。このため、厚さ方向をメッシュ分割して解く必要があるが、実際の成形品は薄肉の三次元構造物が大多数であるため、厚さを基準に3次元メッシュ分割した場合、計算時間、計算容量共に膨大となる。そこで、支配方程式には厚さ方向1次元の熱伝導方程式を用い、隣り合う要素間の熱輸送をモデル化して付加する形とする。

$$\rho C_p T_{,t} = (k T_{,z})_{,z} + Q_c \quad \dots \dots (6.1)$$

$$\text{ただし、} Q_{ci} = \frac{k}{V_e} \sum_{j=1}^k \frac{T_j - T_i}{\Delta z_{ji}} S_{ji} \quad \dots \dots (6.2)$$

要素 $i, j$ 及び $ik$ の関係は図6-1に示す通りである。上式において、コンマ付の添字は偏微分を表す。板厚方向の熱的条件が異なること（金型のコア側とキャビティ側の温度条件の相異）を考慮すれば、境界条件は次式となる。

#### 1) 固定境界

$$T_i = T_0 \quad \text{or} \\ T_{i, \text{top}} = T_{0, \text{top}}, \quad T_{i, \text{bottom}} = T_{0, \text{bottom}} \quad \dots \dots (6.3)$$

#### 2) 熱流束境界

$$-(k T_{,z})_{\text{top}} = q_{0, \text{top}}, \\ -(k T_{,z})_{\text{bottom}} = q_{0, \text{bottom}} \quad \dots \dots (6.4)$$

#### 3) 熱伝達境界

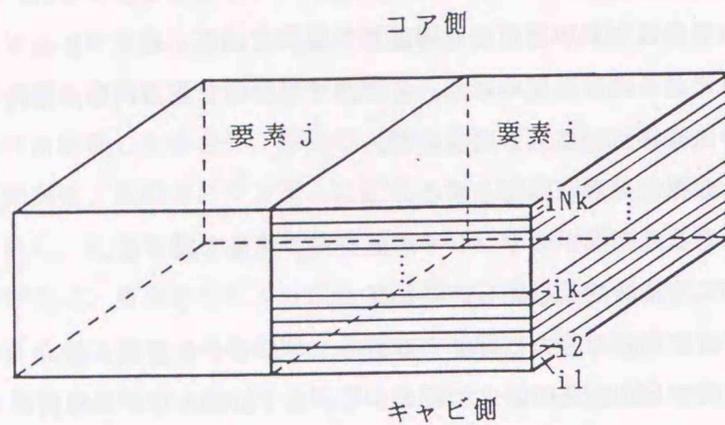


図6-1 要素の分割

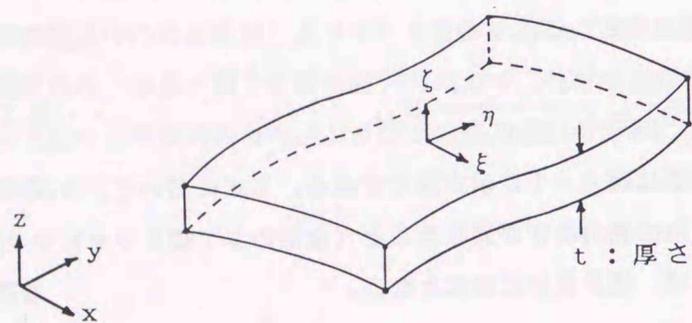


図6-2 要素の形状

$$q_{i, \text{top}} = h_1 \Delta T_1, \quad q_{i, \text{bottom}} = h_2 \Delta T_2 \quad \dots \dots (6.5)$$

ここで、 $h_1$ 、 $h_2$  は各々上面及び下面の熱伝達率、 $\Delta T_1$ 、 $\Delta T_2$  は上面及び下面の温度差を示す。初期条件として、充填時の樹脂の流動解析<sup>(36)・(48)</sup>により得られた充填終了時の温度の計算結果を用いる。

樹脂のそり変形解析では幾何学的に非線形な大変形を取り扱う場合が多い。さらに、繊維配向による異方性も考慮する必要がある。その異方性として、繊維の配向方向とそれに直交する方向で定義できる直交異方性を用いる。繊維の配向方向は、流動時の速度勾配による剛体繊維の回転と流動による繊維量の輸送を解くことにより得られる各要素毎の平均配向角で与える。直交異方性を考慮した変形解析の基礎式は次式で表わされる。

(a)平衡方程式；

$$\int B^T \sigma dV - F = 0 \quad \dots \dots (6.6)$$

(b)構成方程式；

$$\sigma = D (\epsilon - \epsilon_i) + \sigma_i \quad \dots \dots (6.7)$$

(c)変位-歪み式；

$$\epsilon = B a = \{B_L + B_N(a)\} a \quad \dots \dots (6.8)$$

ただし、

$$D = \frac{E_1}{1 - e \nu_{12}} \begin{bmatrix} 1 & e \nu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ e \nu_{12} & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix}$$

### 6.3.2 キャビティ部の数値解法

(6.1) 式は線形のはり要素を用いた有限要素法で空間を離散化し、時間積分には Euler の陽解法を用いる。(6.6)、(6.8) 式を厚肉シェルで2次の四辺形アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法で定式化する。変位、応力、歪み及び節点変位をベクトル表示すると、

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u_1, u_2, u_3\} = \{u_j\} \\ \{\sigma\} &= \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}\} = \{\sigma_i\} \\ \{\epsilon\} &= \{\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{12} \epsilon_{23} \epsilon_{31}\} = \{\epsilon_i\} \quad \dots \dots (6.9) \end{aligned}$$

$$i=1\sim 5, j=1\sim 3$$

となる。(6.9)式では厚肉シェルの変位を用いて、 $\sigma_{33}$ ,  $\epsilon_{33}$ を削除した。歪みを線形項と大変形に伴う非線形項に分離して表示する。

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^L\} + \{\epsilon^N\}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,1} + u_{1,2} \\ u_{3,2} + u_{2,3} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum (u_{j,1})^2 \\ \frac{1}{2} \sum (u_{j,2})^2 \\ \frac{1}{2} \sum u_{j,1} u_{j,2} \\ \frac{1}{2} \sum u_{j,2} u_{j,3} \\ \frac{1}{2} \sum u_{j,3} u_{j,1} \end{bmatrix} \dots \dots (6.10)$$

歪みを変位勾配ベクトルdで表す。

$$\{\epsilon^L\} = [Z^L]\{d\} \dots \dots (6.11)$$

$$\{\epsilon^N\} = [Z^N]\{d\}/2$$

ただし、 $\{d\} = \{u_{i,j}\} = \{d_i\}$ ,  $i=1\sim 3, j=1\sim 3$ ,

$$[Z^L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Z^N] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & 0 & u_{2,1} & 0 & 0 & u_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & u_{1,2} & 0 & 0 & u_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u_{1,1} & 0 & 0 & 2u_{2,1} & 0 & 0 & 2u_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & 2u_{1,2} & 0 & 0 & 2u_{2,2} & 0 & 0 & 2u_{3,2} \\ 2u_{1,3} & 0 & 0 & 2u_{2,3} & 0 & 0 & 2u_{3,3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

さらに、 $\{\epsilon^N\}$ の各成分は次式で表せる。

$$\{\epsilon^N\} = \{d\}^T [H_i] \{d\} \dots \dots (6.12)$$

$[H_i]$ の詳細は巻末の付録A. 1に示してある。仮想仕事の定理に従い(6.6)式を離散化し、以上で定義したベクトル及びマトリックスで表示すると次式を得る。

$$\int_V \delta \{\epsilon\} \{\sigma\} dV = \int_V \delta \{u\}^T \{F\} dV + \int_{S_0} \delta \{u\}^T \{P\} dS. \dots (6.13)$$

厚肉シェル要素は3次元解析の特別な場合と考えることが出来る。立体要素を用いた場

合、要素が扁平であると厚さ方向の剛性係数が大きくなり、数値計算上、微小荷重変動に対する解の変動が増大する不安定性が増すこと、及び不必要なメッシュ分割により計算時間、計算容量の増大を招くことの2つの問題が生じる。この困難を避けるために厚肉シェル要素を導入する。この要素は中央面に垂直な応力に対応する歪みエネルギーを無視する仮定(6)により、数値計算上の条件を良くすると共に計算時間を短縮させることができる。厚肉シェル要素の形状と座標系の関係を図6-2に示す。全体座標(x,y,z)と節点座標(x<sub>i</sub>,y<sub>i</sub>,z<sub>i</sub>)の関係は、形状関数N<sub>i</sub>(η,ξ)を用いると次式で表わせる。

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_i N_i(\eta, \xi) \frac{1+\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} + \sum_i N_i(\eta, \xi) \frac{1-\zeta}{2} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \dots \dots (6.14)$$

(6.14)式をシェルの中央面の座標(x',y',z')を用いて表すと、

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_i N_i(\eta, \xi) \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} + \sum_i N_i(\eta, \xi) \frac{\zeta}{2} \mathbf{V}_{3i} \dots \dots (6.15)$$

ただし、 $\mathbf{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} - \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom}$ ; 長さがシェル厚さに等しいベクトル

となる。形状関数N<sub>i</sub>は図6-3に示す2次要素を用いると、次式で示される。

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)/4, N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$$

$$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)/4, N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)/2$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)/4, N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \dots \dots (6.16)$$

$$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)/4, N_8 = (1-\xi)(1+\eta^2)/2$$

次に変位および変位勾配を節点変位で書き換える。仮定(6)より、回転成分は $\mathbf{V}_{3i}$ の垂直方向成分( $\alpha_i, \beta_i$ )のみとなるから、

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_i N_i \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{Bmatrix} + \sum_i N_i \xi \frac{t_i}{2} (\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}) \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \dots \dots (6.17)$$

ここで、 $t_i$ は節点iのシェル厚さ、 $\mathbf{v}_{1i}, \mathbf{v}_{2i}$ は各々 $\mathbf{V}_{3i}$ に直交する $\mathbf{V}_{1i}, \mathbf{V}_{2i}$ を単位大きさにした単位ベクトルである。 $\mathbf{V}_{1i}, \mathbf{V}_{2i}$ は次の通りである。

$$\mathbf{V}_{1i} = \mathbf{i} \times \mathbf{V}_{3i}$$

$$\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}_{1i} \times \mathbf{V}_{3i} \dots \dots (6.18)$$

(6.17)式をマトリックス表示すると、

$$\{u\} = [N]\{a\} \dots \dots (6.19)$$

ただし、 $\{a\} = \{u_{1i} u_{2i} u_{3i} \alpha_i \beta_i\} = \{a_i\}$ ,  $i=1\sim 5$ ,

$$[N] = \begin{bmatrix} [I]N_i & 0 & 0 & [I]N_i t_i (\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i})/2 & 0 \\ 0 & [I]N_i & 0 & 0 & [I]N_i t_i (\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i})/2 \\ 0 & 0 & [I]N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

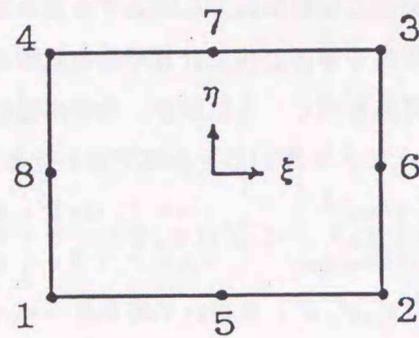


図6-3 8節点平面要素

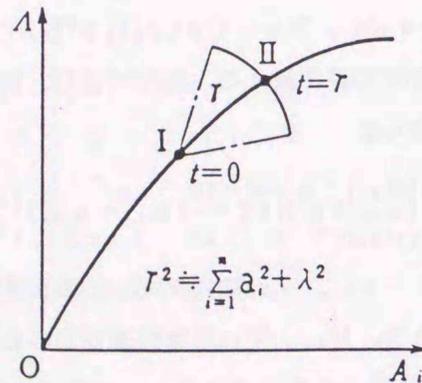


図6-4 弧長増分法

となる。また、変位勾配{d}を節点変位ベクトル{a}を用いて次の様に表す。

$$\{d\} = [Bd]\{a\} \quad \dots \dots (6.20)$$

(6.20)式の関係を用いて、歪みを書き直せば以下の様になる。

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^L\} + \{\epsilon^N\} = ([B^L] + [B^N])\{a\} = [B]\{a\} \quad \dots \dots (6.21)$$

ただし、 $[B^L] = [Z^L][Bd]$

$$[B^N] = [Z^N][Bd]/2$$

$[B^N]$ が変位の関数であることを考慮して、(6.21)式の変分をとると、

$$\delta\{\epsilon\} = ([B^L] + 2[B^N])\delta\{a\} \quad \dots \dots (6.22)$$

$\delta$ が任意であることから、(6.13)式は次式に書き換えられる。

$$\int_V ([B^L] + 2[B^N])^T \{\sigma\} dV = \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_{S_0} [N]^T \{P\} dS_0 \quad \dots (6.23)$$

(6.23)式は幾何学的非線形問題の有限要素法による定式化の基礎となるものである。

本研究では非線形方程式の解法に増分型解法の一つである弧長増分法<sup>(57)</sup>を適用する。

そこで、(6.23)式を増分型で表示する。

$$\begin{aligned} \int_V ([B^L] + 2[B^N])^T \Delta\{\sigma\} dV + 2 \int_V \Delta[B^N]^T \{\sigma_0\} dV \\ = \Delta\{P_v\} + \Delta\{P_s\} + \{R_0\} + \{Q_0\} \quad \dots \dots (6.24) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta\{\}$ は増分を、添字<sub>0</sub>は増分前の値を示す。

$\Delta\{P_v\}$ 、 $\Delta\{P_s\}$ ：各々物体力、表面力に等価な節点荷重増分

$\{R_0\}$ ：増分前の残差荷重

$\{Q_0\}$ ：応力増分による2次の項

各項の具体形は次の通りである。

$$\Delta\{P_v\} = \int_V [N]^T \{F\} dv$$

$$\Delta\{P_s\} = \int_{S_0} [N]^T \{P\} ds$$

$$\{R_0\} = \{P_0\} - \int_V ([B^L] + 2[B^N])^T \Delta\{\sigma_0\} dv \quad \dots \dots (6.25)$$

$$\{P_0\} = \int_V [N]^T \{F_0\} dv + \int_{S_0} [N]^T \{P_0\} ds$$

$$\{Q_0\} = -2 \int_V \Delta[B^N]^T \{\sigma\} dv$$

(6.7)式の構成方程式により、応力増分を節点変位増分に置き換えると共に、(6.22)式の増分を考慮すれば次式が求まる。

$$([K_L] + [K_N] + [K_0]) \Delta\{a\} = \Delta\{P\} + \{R_0\} + \{Q\} \quad \dots \dots (6.26)$$

ただし、 $\Delta\{P\} = \Delta\{P_0\} + \Delta\{P_s\} + \Delta\{P_i\}$ 、

$$\{Q\} = \{Q_0\} + \{Q_u\}$$

ここで、 $[K_L]$ 、 $[K_N]$ 、 $[K_0]$  は各々線形項、非線形項、増分前の応力に対応する剛性マトリックス、 $\Delta\{P_i\}$  は初期歪みに等価な節点変位増分、 $\{Q_u\}$  は変位増分による2次の項である。各項の詳細は以下の通り。

$$\begin{aligned} [K_L] &= \int_V [B_L]^T [D] [B_L] dv \\ [K_N] &= \int_V ([B_L]^T [D] [B_N] + 2[B_N]^T [D] [B_N] + [B_N]^T [D] [B_L]) dv \\ [K_0] &= \int_V \Delta [B_N]^T \{\sigma_0\} dv \quad \dots \dots (6.27) \\ \Delta\{P_i\} &= \int_V ([B_L] + 2[B_N])^T [D] \Delta\{\epsilon_i\} dv \\ \{Q_u\} &= - \int_V ([B_L] + 2[B_N])^T [D] \Delta [B_N] dv \cdot \Delta\{a\} \end{aligned}$$

熱歪みは初期歪み  $\{\epsilon_i\}$  の項で与える。金型上下面の温度の相違に伴う曲げ成分を考慮する必要があるため、初期歪みを次式で与えた。

$$\{\epsilon_i\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_x \Delta T_x \\ \alpha_y \Delta T_y \\ 0 \\ -\alpha_y (\Delta T_{yt} - \Delta T_{yb}) \\ -\alpha_x (\Delta T_{xt} - \Delta T_{xb}) \end{array} \right\} \quad \dots \dots (6.28)$$

(6.26)式の解法には増分型解法の一つである弧長増分法<sup>(57)</sup>を適用した。弧長増分法は増分パラメータとしてつり合い経路上の弧長  $r$  を用いるもので、つり合い経路上の既知の点  $(A_0, \Lambda_0)$  を中心として、半径  $r$  の  $(N+1)$  次元球 ( $N$  は変位未知量の総数、この場合は5) を考え、この球面とつり合い経路上との交点を探そうとするものである (図6-4参照)。弧長増分法は連続性を持つ空間曲線であれば、常に次段階のつり合い点を見いだすことが可能であるため、特異点を含むつり合い経路 (例えば、座屈) の追跡に有効な手法である。要素積分にはZienkiewicz の提唱する次数低減積分<sup>(58)</sup>を採用した。弧長増分法と修正Newton-Raphson法とを組み合わせた  $n$  回目の収束過程は次式で表わせる。

$$\begin{bmatrix} [K_n] (\{a^0\} + \{a^n\}) - \{f\} \\ \{a^n\}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\{a^n\} \\ \Delta\lambda^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^n \\ F_2^n \end{bmatrix} \quad \dots \dots (6.29)$$

ただし、 $[K_n]$ :  $n$  回目の接線剛性マトリックス ( $= [K_L] + [K_N] + [K_0]$ )、

$\lambda^n$ : 荷重パラメータ ( $\Delta\{a\}^T \Delta\{a\} + (\Delta\lambda)^2 = r^2$ )、

$\{f\}$ : 荷重モード、 $F_1^n, F_2^n$ : 荷重項

上記の反復式を修正Riks法<sup>(59)</sup>で解く。この手法では荷重パラメータの増分  $\Delta\lambda^n$  を次式

で求める。

$$\Delta\lambda^n = \frac{\Delta a^1 \Delta c^1}{\Delta a^1 a^n + \Delta\lambda^n} \quad \dots \dots (6.30)$$

ここに、 $\Delta c$  は修正Newton-Raphson法による修正項である。

### 6.3.3 ランナー部の数値解法

キャビティと樹脂の流入流路であるランナーははり要素を用いて離散化する。冷却解析はキャビティ同様に半径方向の放熱を計算するため、(6.1)式を円柱座標に置き換えた式を用いる。変形解析は(6.26)式で変位及び剛性関係をはり要素のそれに置き換えれば良い。はり要素としては、はりの剪断変形は無視し、曲げを考慮する。この場合、変位場は図6-5に従って次式で表わされる。

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(z) \\ v(z) \\ w(z) - x \cdot u(z), z - y \cdot v(z), z \end{Bmatrix} \quad \dots \dots (6.31)$$

変位勾配  $u(z), z, v(z), z$  が回転角変位  $\theta_{yi}, \theta_{yj}$  に相当する。従って、 $u(z), v(z)$  の内挿を3次式、 $w(z)$  の内挿を1次式で近似すれば、変位と節点変位ベクトルの関係が形状関数  $N_b$  を用いて次式で表わせる。

$$\{u\} = [N_b] \{a_b\} \quad \dots \dots (6.32)$$

ただし、 $\{a_b\}^T = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{yi} - \theta_{xi}, u_j, v_j, w_j, \theta_{yj} - \theta_{yj}\}$

また、はり要素の剛性関係は以下の様になる。

$$[K_b] \{a_b\} = \{f_b\} \quad \dots \dots (6.33)$$

ただし、 $\{f_b\}^T = \{V_{xi}, V_{yi}, P_i, M_{xi}, M_{yi}, V_{xj}, V_{yj}, P_j, M_{xj}, M_{yj}\}$ : 外力ベクトル、

$[K_b]$  は剛性マトリックスである。なお、 $[N_b]$ 、 $[K_b]$  の具体形およびはり要素の局所座標系から全体座標系への変換は付録に示す。(6.33)式を増分形で表示すれば(6.26)式と等価な基礎式が得られる。

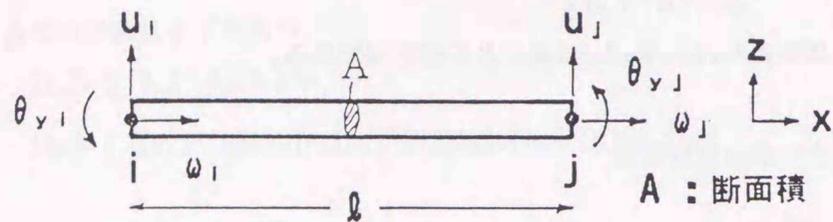


図6-5 はり要素の変位場

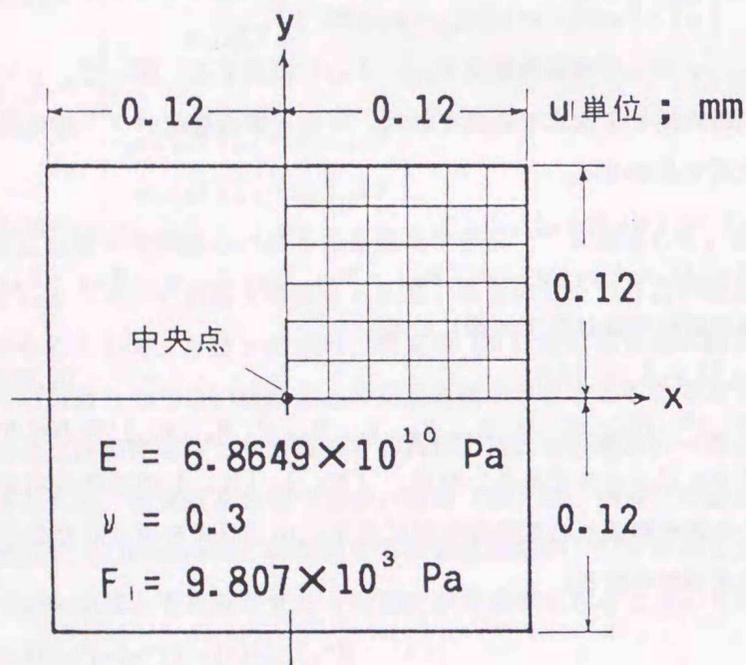


図6-6 正方形板の計算体系

## 6.4 解析結果と検討

### 6.4.1 理論解との比較

ここでは解析機能を確認するため、平面曲げ及び片持ちはりのたわみに対する理論解と計算結果とを比較する。まず、一様な分布荷重が加わった場合の周辺固定の正方形板のたわみを計算する。図6-6に計算体系を示す。周辺を全拘束した場合の中央点の変位は次式で示される。

$$\omega = 0.00126 q a^4 / D \quad \dots \dots (6.34)$$

ただし、  $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$

ここで、hは板厚、qは分布荷重、aは周長である。計算にあたっては、対称性から全体の1/4の領域を四辺形要素で6×6に分割する。境界条件は周辺の固定辺が  $w = w_x = w_y = 0$ 、x軸上の節点では対称条件から  $w_y = 0$ 、y軸上では  $w_x = 0$  である。主な計算条件としてヤング率  $6.8649 \times 10^{10} \text{Pa}$ 、ポアソン比 0.3、一様分布荷重が  $9.807 \times 10^3 \text{Pa}$  を与えた。板厚をパラメータに理論解と比較した結果を図6-7に示す。理論解と計算結果は誤差0.74%以内で一致した。

次に片持ちはりの自由端に一定荷重をかけた場合の最大変位を計算する。図6-8に計算体系を示す。はりの曲げ理論より、理論解は次式で与えられる。

$$\delta_{\max} = W l^3 / 3 E I \quad \dots \dots (6.35)$$

ただし、  $I = a^4 / 12$

ここで、Iは断面2次モーメントである。計算条件として  $l = 1.0 \text{m}$ 、 $a = 0.02 \text{m}$ 、荷重  $W = 9.807 \text{N}$ 、ヤング率  $E = 2.05917 \times 10^{11} \text{Pa}$  を与えた。この条件下では理論解は  $\delta_{\max} = 0.119095 \times 10^{-2} \text{m}$  となる。4要素に分割して計算した結果は  $0.1190768 \times 10^{-2} \text{m}$  であり、その差は-0.015%と良く一致した。以上の様に正方形板及び片持ちはりのたわみ共に理論解と一致し、基本的な解析機能が確認できた。

### 6.4.2 ランナーとの組み合わせ

平板とはり混在する場合の解析機能を確認するために、図6-9に示した3種の計算体系でテスト計算を行なう。本例では2枚の平板（平板1と平板2）を直角に接続し、平板2側を全拘束、平板1側に一様分布荷重をかけた場合について、はり要素の有無による平板1のたわみの変化を計算する。はり要素は各々1本及び2本で平板1と平板2の中心

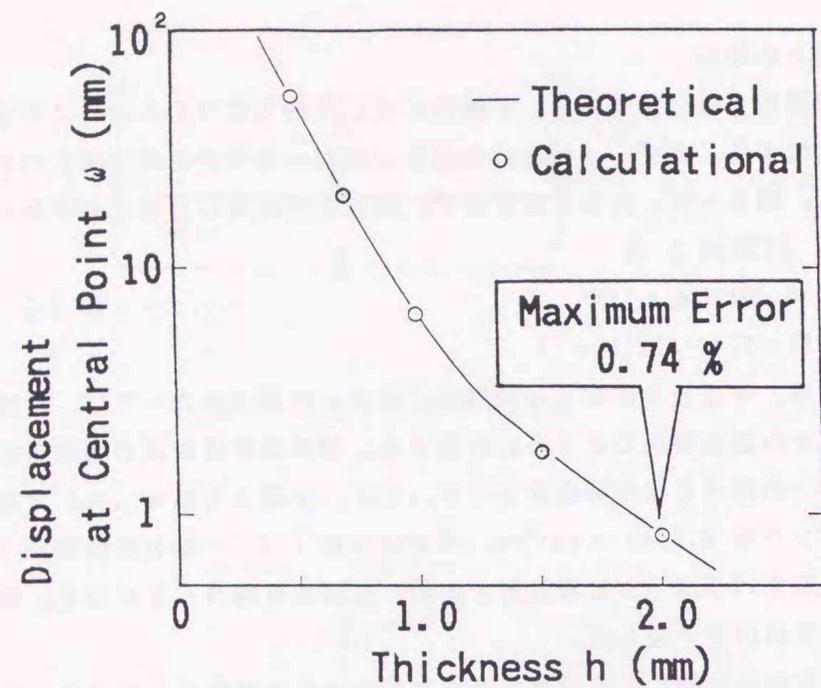


図6-7 理論解と計算結果との比較

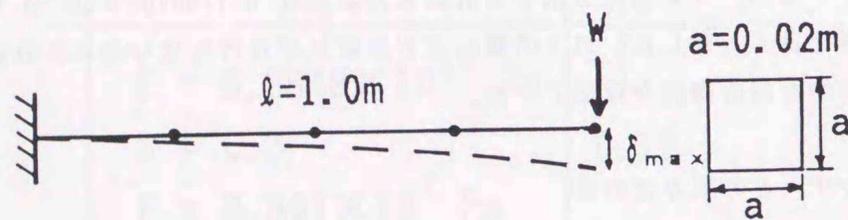
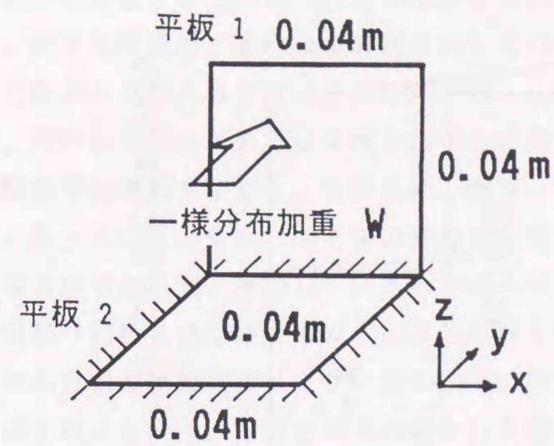
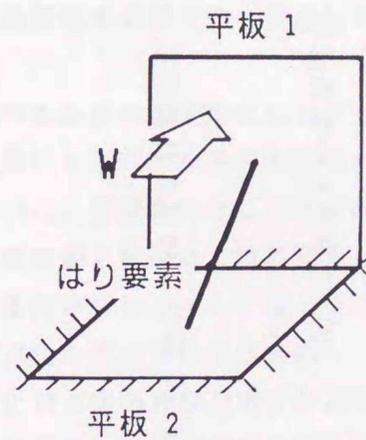


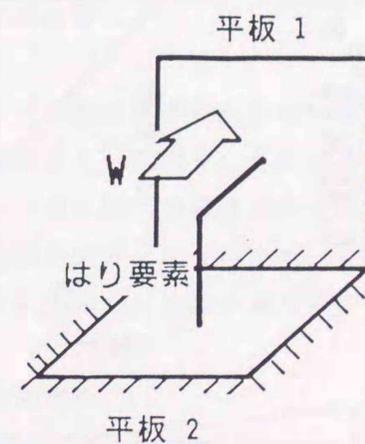
図6-8 はりの計算体系



(1) 二平板



(2) 二平板と一本のはり



(3) 二平板と二本のはり

図6-9 平板とはりの計算体系

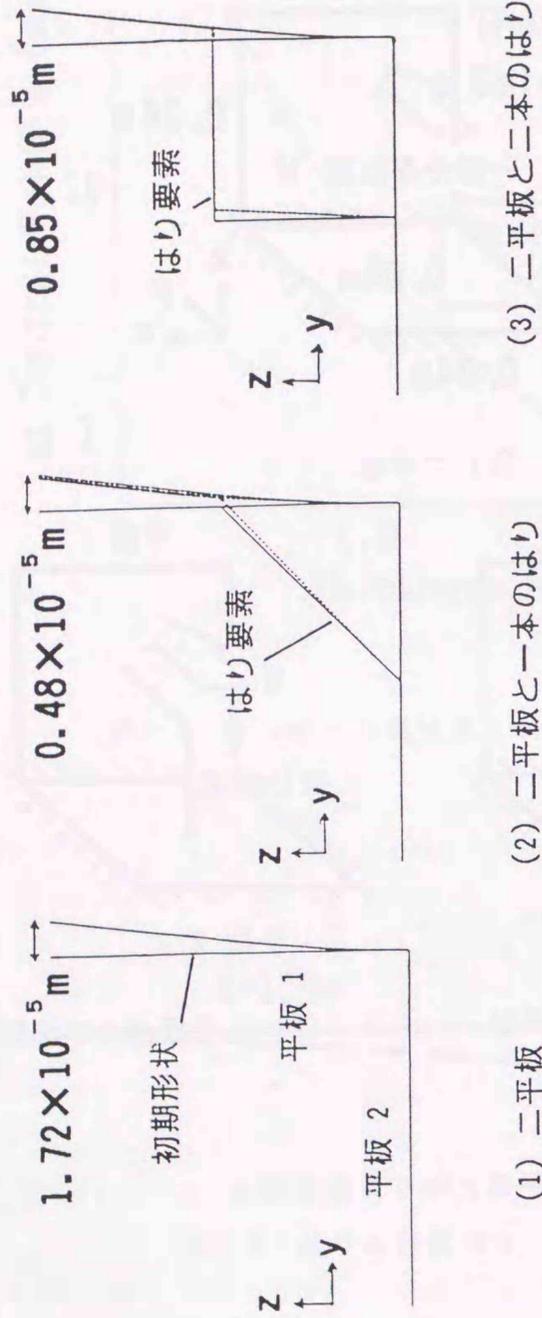


図6-10 平板とはりの計算結果

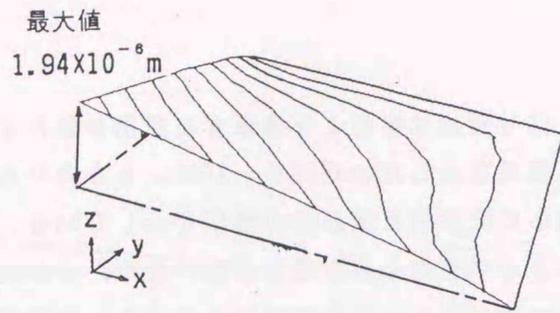
を結んでいる。この場合、はり要素は平板1を拘束する役割を果たす。主な計算条件を図6-9に示してある。計算結果を示したのが図6-10で、x方向からみた変形を最大変位量と共に図示してある。図中に変形前と変形後の形状を示している。図から(1)のはりがない場合は平板1は薄板近似より平板内の剪断成分がないため、x軸回りの変形のみが生じる。それに対して、(2)、(3)のはりがある場合は平板1の中心に拘束が生じるため、変位量が小さくなると共にz軸回りの変形も生じる。そのため、図6-10(2)で変形後の形状がx方向から見ると二重となっている。また、(2)と(3)の結果を比較すると、(2)の結果の方が変位量が小さい。(3)の場合は平板2側と接続しているはりのみが拘束を与えるから、結局(2)、(3)の違いははりの引張り剛性と曲げ剛性の大小による平板1の拘束の度合に依存している。通常、引張り剛性の方が曲げ剛性より大きいため、(2)の拘束の方が大きく、変位量も小さくなっている。以上のことから、平板とはり混在した場合に対しても本解析は妥当な結果を与えている。

#### 6.4.3 熱膨張率の異方性を考慮した熱変形の計算

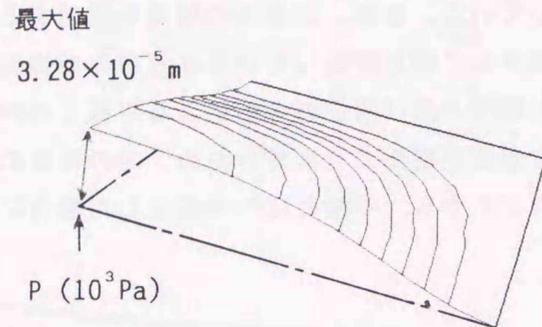
異方性のある板の熱変形については比較すべき解析解が存在しないため、ここでは簡単な形状を用いて定性的な検討を試みる。計算体系として図6-6に示した周辺固定の正方形板を用いる。温度条件として正方形板の上下面に50℃の温度差を与えた。その他の条件については前節と同様に、境界条件は周辺の固定辺が $w = w_x = w_y = 0$ 、x軸上の節点では対称条件から $w_y = 0$ 、y軸上では $w_x = 0$ である。次の4通りについて検討した。

- (1) 等方的な熱歪みによる変形
- (2) (1)に正方向の外部荷重を付加した場合の変形
- (3) (1)に負方向の外部荷重を付加した場合の変形
- (4) (1)の条件でxとy方向の熱膨張率を1:20とした時の異方性の熱歪みによる変形

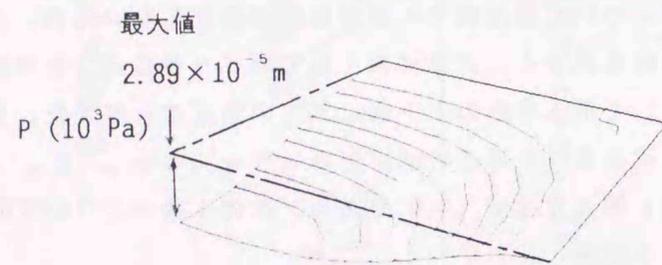
計算結果は図6-11に示す。(1)では正方形板の板厚方向の上下の熱膨張の差によりx軸及びy軸回りに曲げが生じる。この場合は熱膨張は等方的に働くので前節の同様分布荷重の場合と同様の変形挙動を示し、境界条件から変形は3次のモードとなる。(2)の場合は、(1)の場合に曲げの正の方向に荷重が加わるため、変形量が増大するが、変形モードは変わらない。(3)の場合は、(1)の場合に曲げの負の方向に荷重が加わるため、変形方向が変わると共に、変形モードも変化してくる。これは熱膨張による曲げに対して外力による拘束が加



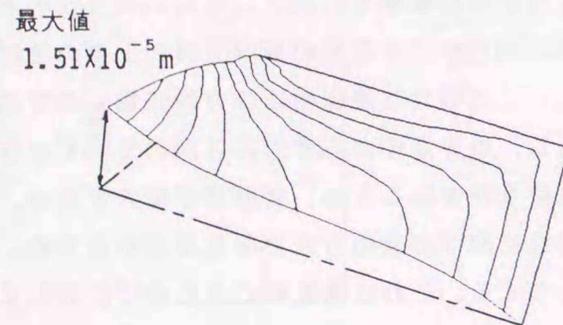
(1) 等方の熱変形の場合



(2) 熱変形に正の荷重を加えた場合



(3) 熱変形に負の荷重を加えた場合



(4) 異方性の熱変形 ( $a_x/a_y=1/20$ )

図6-11 異方性の熱変形の計算結果

わるため、4次以上の高次の変形モードが生じている様子が判る。(4)の場合は熱膨張率の異方性により、 $x$ 軸および $y$ 軸回りの曲げモーメントが異なってくるためにアンバランスが生じ、この場合は変形量も増加し、変形モードは(1)の場合に比べて4次以上の高次の変形モードが生じていることが判る。以上の様に計算結果は各ケースに対して定性的に妥当な結果を与えている。

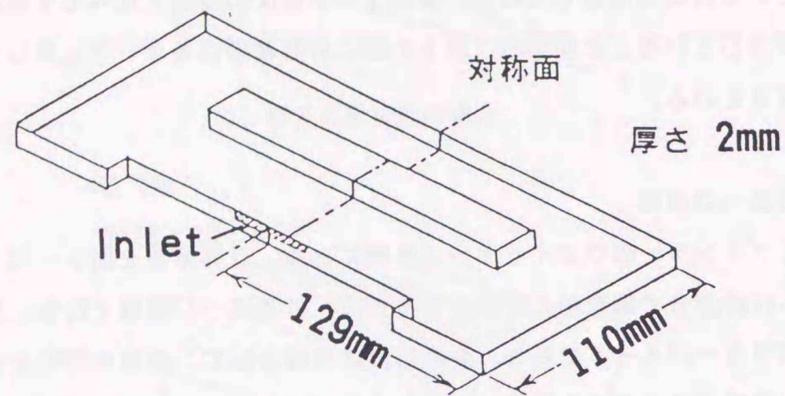
#### 6.4.4 実製品への適用

対象としてプリンターのウェイトケースを例にとる。計算体系を図6-12(1)に示す。本例では流入口の部分で構造的に対称となるため、計算は1/2領域で行なった。使用している樹脂はポリカーボネートである。金型温度は内面が $80^\circ\text{C}$ 、外面が $30^\circ\text{C}$ とし $50^\circ\text{C}$ の温度差を与えた。対称面での境界条件は $x$ 軸回りの曲げ成分 $w, v=0$ となる。変形の基準点として流入口の部分で完全固定境界と設定した。本例の場合は、内外面の温度差により $x, y$ 軸回りの正の方向に曲げモーメントが加わる。従って、全体の変形挙動は内面側から外面側へ向かって外反りとなる。また、変形モードとしては底板部分はほぼ2次のモードで変形するが、側壁は両端で拘束が生じるため4次以上のモードが生じることが類似形状の結果<sup>(55)</sup>から予想できる。図6-12(2)に示す計算結果は上記と同様の変形挙動を示しており、計算結果の妥当性が確認できた。また、この場合最大の変位量はA点で $0.16\text{mm}$ となっている。

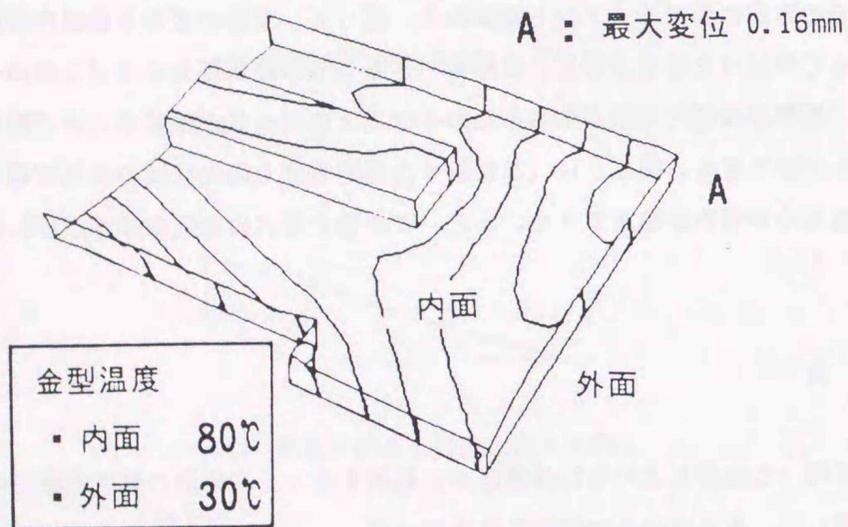
#### 6.5 結 言

固化時の不均一な冷却により生じる熱応力に起因するシェル構造の射出成形品の変形解析手法を開発した。本手法の主な特徴を以下に示す。

- (1) 8節点厚肉シェル要素を用いた有限要素法で空間を離散化し、繊維配向による熱膨張率やヤング率の異方性を考慮した直交異方性の熱応力を解析可能とした。繊維の配向による直交異方性は、前章の手法で計算した要素毎の繊維の平均配向角分布から、繊維の配向する方向とそれに直交する方向で与えた。
- (2) 成形品の上下面の冷却の不均一により生じる温度差に起因する曲げモーメントを考慮して熱歪みを計算した。
- (3) 四辺形要素とはり要素を組み合わせ、ランナーとキャビティの一体変形解析を可能



(1) 計算モデル



(2) 計算結果

図6-12 箱形成形品の計算結果

とした。

(4) 成形品の非定常の温度解析に対しては、支配的な放熱方向であるシェルの厚さ方向をメッシュ分割し、隣接要素間の熱輸送は集中定数形でモデル化した。

(5) 節点変位に対する非線形な増分型基礎式は、増分型解法の一つである弧長増分法を改良した修正Riks法とNewton-Raphson法を組合せた手法で計算した。

本手法を理論解の存在する一様分布荷重が加わった場合の周辺固定の平行平板の曲げ問題に適用して、計算精度を確認した。また、平行平板の等方性および異方性の熱変形を計算すると共に、実成形品の変形問題に適用し、手法の有効性を確認した。得られた主な知見は以下の通りである。

(6) 一様分布荷重が加わった場合の周辺固定の平行平板の中央部の変位に対する理論解と計算結果は最大0.74%の差で一致した。また、片持ちはりの曲げに対する理論解と計算値は最大0.015%の差で一致した。

(7) 熱膨張率の異方性を持った正方形板の熱変形を解析し、上下面の温度差を50℃にした場合、等方的な熱歪みが加わると一様分布荷重と同様の3次モードの変形を計算は示し、直交する2方向に対して異なる熱膨張率を与えた異方性の熱歪みが加わると、4次以上の高次の変形モードの発生が計算された。この結果、本手法が定性的に妥当な結果を与えることがわかった。

(8) 箱型の成形品を流動から変形まで一貫して解析し、類似形状の結果から予想された変形挙動と計算結果は良く一致し、本手法の有効性を確認した。

## 7.1 結 論

非ニュートン流体は、水、空気等の一般のニュートン流体の流れと著しく異なる非線形なレオロジー的流動挙動を示す。非ニュートン流体を用いる工業分野には、溶融樹脂を用いた射出成形や化学プラント等がある。特に射出成形の分野では、高分子材料の進歩により従来の欠点であった強度や寸法精度が大幅に改善され、元々プラスチック成形品の持つ軽量・成形性の良さという特徴と相まって、家電・情報通信機器、自動車、玩具など適用分野が飛躍的に増大してきている。この種の流れの熱流動的特性を正確に把握し、さらに、高精度で予測することは、工業分野における製品の信頼性・生産性向上、開発期間の短縮、及びコストの低減の上で極めて有意義なことである。

本研究では溶融樹脂に代表される非ニュートン流体を対象として、移動自由境界を持った非定常3次元流れの数値解析手法の開発と、樹脂中に配合される強化繊維の流動配向および配向性による異方性場での熱変形の解析手法の開発を目的とする。なお、非線形なレオロジー的挙動を記述する構成方程式には指数則モデルを用いる。本研究で得た知見をまとめて以下に示す。

第2章では、解析の対象である指数則モデルで表わされる高粘性の溶融樹脂の非定常3次元流れを解くために、時間離散化にはFractional Step 法の一つである流速修正法と有理ルンゲクッタ法 (Rational Runge-Kutta Method, 以下RRK法と略す) を組合せた準陽解法を提案し、本手法が非線形な指数則流体の流れに対して、指数  $n$  が  $n < 1$  の時に無条件安定となることを明らかにした。また、温度場を計算するためのエネルギー式の解法には、高ペクレ数の移流支配であることを考慮し、拡散項と移流項を各々分離して、前者にRRK法、後者に特性曲線法を拡張して開発した流跡積分法を適用した。3次元の空間離散化には、流速・圧力計算の計算精度向上の観点からひずみ速度も変数とする混合型の有限要素法を用いた。さらに、成形品に多いシェル構造物 (薄肉平板) 内の流れを効率良く解析するために、シェルの厚さ方向を流速分布の層流解を用いてモデル化した三次元シェル (以下、擬似3次元と呼ぶ) で定式化した。提案した解法を矩形平板の流れに対して適用し、混合型解法による時間ステップと精度の関係を明らかにした。また、エネルギー式の移流項の計算に用いた流跡積分法の数値解は、風上法とRRK法を組合せた手法で求

めた結果と比較して、温度伝播の遅れもなく、数値拡散も小さいことがわかった。

第3章では、溶融樹脂の充填過程を解析するために、移動自由境界の解析手法としてメッシュを空間に固定したオイラー型のSOLA-VOF法に基づいて改良したマーカー粒子法と、メッシュが流体と共に移動するラグランジュ型の解法を改良した部分メッシュ生成法とを考案した。前者の手法は1メッシュ内の流体の占める体積分率の輸送方程式をマーカーで解く手法で、計算領域の区分によりマーカー計算の計算容量、計算時間を減らして効率的に計算できる様にした。また、後者の手法では予め分割しておいた固定メッシュと境界の移動に伴い再分割する境界メッシュを組合せて、ラグランジュ的の利点をいかしつつ、欠点であるメッシュ再分割が最小限になるように考慮した。提案した手法をL型および凹レンズ形状の流路内の流れに適用し、その実用性、有効性を確認した。また、両手法で求めた数値解は共に平均移動距離が3%以内で一致した。マーカー粒子法では二流体として計算するため、二流体の境界面で数値拡散が生じるが、数値拡散幅は時間の進行に依存せず一定幅に保たれる。したがって、本質的に複雑流路に対しての適用性に優れたマーカー粒子法は、計算精度、数値拡散共に充分実用的であることがわかった。

第4章では、第2章、第3章で述べた流動解析手法を検証した。流速分布の計算精度を確認するために、指数則で表せる澱粉溶液を用いて、透明アクリル製の矩形平板内の流れに対する可視化実験を実施した。非接触型の三次元流速分布測定装置で測定した定常の流速分布と、擬似三次元の解析結果を比較し7%以内で一致することを確認した。さらに、箱型流路内の溶融樹脂の流れと実成形品の流れに適用し、溶融樹脂の流動先端であるメルトフロントについて擬似三次元計算結果と実験結果とを比較検討した。射出成形機を用いて、一定時間間隔で一定量の溶融樹脂を注入するショートショット成形実験の結果と比較し、メルトフロントの計算精度が5%以内であることを確認した。

第5章では、溶融樹脂中に混入した強化繊維の流動配向の解析手法を提案した。本手法では繊維同士の相互作用の影響が小さい短繊維を対象として、局所的な速度勾配により剛体繊維の回転を計算した。さらに上流の配向の影響を計算に取り入れるため、繊維の量(本数)を表す繊維充填率を導入して、繊維充填率の輸送方程式を風上有限要素法で計算した。これにより、繊維の配向角分布のみならず繊維密度の分布計算を可能にした。また、要素内の平均配向角を計算する際、要素毎に繊維の配向方向を基準とした局所座標系を設定し、隣接要素の繊維の充填率と流入量を考慮して重み付けすることにより計算精度を向上させた。提案した解析手法を正方形板の非定常流れに適用し、特徴的な繊維配向挙動の

計算性能を確認すると共に、偏心の矩形平板に対する実験結果と比較し、自由境界の移動の様子および平均配向角の分布共に良く一致することを確認した。

第6章では、第5章で求めた繊維配向による異方性を考慮した変形解析手法を提案した。本手法では、シェル構造の成形品の熱変形を幾何学的に非線形な大変形問題として8節点の厚肉シェル要素を用いた有限要素法で定式化した。その際、繊維配向による熱膨張率やヤング率の異方性を考慮するために、繊維の配向方向とそれに直交する方向を基準とした直交異方性を剛性マトリックスに取り込んだ。また、成形品の上下面の冷却の不均一により生じる温度差に起因する曲げモーメントを考慮して熱歪みを計算した。節点変位に対する非線形な増分型基礎式は、増分型解法の一つである弧長増分法を改良した修正Riks法とNewton-Raphson法を組合せた手法を用いた。本手法を平行平板の曲げ問題に適用して、理論解と比較して計算精度を確認した。また、平行平板の等方性および異方性の熱変形を計算すると共に、実成形品の変形問題に適用し、手法の有効性を示した。

## 7.2 今後の課題

第2章、第3章で提案した手法は、3次元シェルの成形品に対しては本論文で示した以外にも数多くの計算例、実証例があり、その信頼性、実用性が十分に明らかであると考えている。しかし、3次元解析に関しては実用性を考えると計算時間の短縮が必要となる。また、3次元の実験データの取得そのものが難しいこともあり、今後も検証の積み重ねが必要である。

第5章で提案した手法により求まる繊維の配向は、本論文中でも述べたように表面近傍のスキン層と中央のコア層のうち、コア層の部分の配向を計算している。スキン層では急峻な速度勾配により初期の配向状態が保持されることが判っているが、最近の実験的知見ではスキン層とコア層の間にもう1層があり、スキン層およびコア層とは異なる配向が生じている。この層での配向要因はまだ明らかではないが、精度向上の観点から今後、この層での配向要因の分析及び分析結果に基づく計算モデルの確立が必要であると考えている。

第6章で提案した手法は、繊維の配向による異方性を考慮した熱変形を対象としている。成形品の変形要因としては、本研究で対象とした熱変形以外に、保圧過程で生じる密度の不均一による圧縮歪みによる変形と結晶化に伴う歪みによる変形が考えられる。変形要因

としては熱変形が主と考えているが、圧縮歪み、結晶歪みによる変形の影響が無視出来ない場合も当然あるため、計算結果の精度向上の観点から、圧縮歪みに関しては保圧過程での圧縮性の流動及び固化の解析手法の開発が、結晶歪みに関しては何らかのモデル化が必要と考えている。

## 謝 辞

本論文は筆者が㈱日立製作所エネルギー研究所にて1986年から7年間に渡って従事した非ニュートン流体の流動・変形解析に関連する研究をとりまとめたものである。

本論文を執筆するにあたり、懇切なる御指導、御助言を賜りました北海道大学工学部 粥川尚之教授、北海道大学工学部 石黒亮二教授に心から感謝致します。

本論文をまとめるにあたり、貴重な御助言と示唆に富む御討論を賜りました北海道大学工学部 木谷 勝教授、北海道大学工学部 井上良紀教授、北海道大学工学部 阿部 寛教授、北海道大学理学部 中村邦男講師に謹んで謝意を表します。

本研究を長期にわたって遂行する機会を与えていただいた㈱日立製作所研究開発本部 土井 彰技師長に深く感謝致します。また、本研究の遂行時に、直接の上司としての的確な御助言、討論と共に激励していただいた㈱日立製作所エネルギー研究所 山川正剛主管研究員に心から感謝致します。さらに、本研究の遂行当初、研究立ち上げや実験データの取得に御尽力いただいた㈱八木アンテナ 堀川裕巳主任技師に感謝致します。

本研究における流体数値シミュレーション技術の開発にあたり、㈱日立製作所エネルギー研究所 第2部 小泉 眞主任研究員に御協力いただきました。本研究の成果は氏のご支援の賜物であり、ここに深く感謝致します。

参 考 文 献

- (1) Kawahara, M. and Takeuchi, N., Mixed Finite Element Method for Analysis of Viscoelastic Fluid Flow, *Computers and Fluids*, 5(1977), 33
- (2) Yeh, P.W. et.al., Multiple Solutions in the Calculation of Axisymmetric Contraction Flow of an Upper Convected Maxwell Fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 16(1984), 173
- (3) Bhatnager, R.K. et.al., Flow of an Oldroyd-fluid in a Contracting Channel with a Moving Boundary, *Rheol. Acta.*, 22(1983), 268
- (4) Thompson, E.G. et.al., Some Integration Techniques for the Analysis of Viscoelastic Flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 3(1983), 165
- (5) Harlow, F.H. and Welch, Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *J.E., Phys. of Fluid*, 8(1965), 2182
- (6) Donea, J. et.al., Finite Element Solution of The Unsteady Navier-Stokes Equations by a Fractional Step Method, *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, 30(1982), 53
- (7) Hieber, C.A. and Shen, S.F., A Finite Element / Finite Difference Simulation of the Injection Molding Process, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 7(1980), 1
- (8) Bird, R.B. et.al., *Dynamics of Polymeric Liquids - Fluid Mechanics*, vol.1, John Wiley & Sons (1977)
- (9) Oldroyd, J.G., Non-Newtonian Effects in Steady Motion of Some Idealized Elastic-Viscous Liquids, *Proc. Roy. Soc.*, A245(1958), 278
- (10) Broyer, E. et.al., A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding, *Trans. Soc. of Rheol.*, 19:3(1975), 423
- (11) 廣惠章利、本吉正信, プラスチック成形加工入門, 日刊工業新聞社 (昭59-5)
- (12) MOLDFLOWオペレーティングマニュアル, 電通国際情報サービス (1985)
- (13) Tanner, R.I. et.al., Finite Element Methods for the Solution of Some Incompressible Non-Newtonian Fluids Mechanics Problems with Free Surfaces, *Comput. Methods Appl. Mech. and Engng.*, 6(1975), 155

- (14) Huynh, B.P., Some Finite Element Studies of Extrusion, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 13(1983), 1
- (15) Murty, V.D., Convective Heat Transfer for Newtonian and Moderately Non-Newtonian Fluids in U-Channels Using Finite Elements, *ASME*, 84-WA/HT-112(1984)
- (16) Wang, K.K. et.al., Computer-Aided Injection Molding System Progress Report No.7, PB81-174088, NSF(1980-10)
- (17) Crochet, M.J. and Bezy, N., Numerical Solution for the Flow of Viscoelastic Fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 5(1979), 201
- (18) Malone, M.F. and Middleman, S., A Finite Element Scheme for Two-Dimensional Viscoelastic Fluid Flow, Annual Meeting of the AIChE(1979-11)
- (19) 金信行, 粘弾性流体の入口近傍の流れ(数値解による検討), *機論B*, 46-405(昭55-5), 873
- (20) Coleman, C.J., A Finite Element Routine for Analyzing Non-Newtonian Flows PART 1 : Basic Methods and Preliminary Results, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 7(1980), 289
- (21) Coleman, C.J., A Finite Element Routine for Analyzing Non-Newtonian Flows PART 2 : The Extrusion of a Maxwell Fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 8(1981), 260
- (22) Mendelson, M.N. et.al., Approximation Error in Finite Element Calculation of Viscoelastic Fluids Flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 10(1982), 31
- (23) 後藤ほか: 射出成形における金型内の樹脂流動シミュレーション, *シャープ技報*, 第34号(1986), 63
- (24) Bush, M.B. et.al., Finite Element and Boundary Element Methods for Extrusion Computations, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 16(1984), 37
- (25) Viriyayuthakor, M. and Caswell, B., Finite Element Simulation of Viscoelastic Flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 6(1980), 245
- (26) Court, H. et.al., Long-Range Memory Effects in Flows Involving Abrupt Changes in Geometry ( Part 4 Numerical Simulation Using Integral Models ), *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 8(1981), 95

- (27) Gatski, T.B., On the Numerical Modeling of an Oldroyd-Type Constitutive Equation, *J. Comput. Phys.*, 19-4(1975), 376
- (28) Davies, A.R. et.al., Long-Range Memory Effects in Flows Involving Abrupt Changes in Geometry, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 4(1979), 325
- (29) Perera, M.G.N. and Strauss, K., Direct Numerical Solutions of the Equations for Viscoelastic Fluid Flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 5(1979), 269
- (30) Upadhyay, R.K., Simulation of Viscoelastic Flows at Large Deformations According to the Leonov Model, Dr. Thesis, Cornell Univ. (1982)
- (31) Townsend, P., On the Numerical Simulation of Two-Dimensional Time-Dependent Flows of Oldroyd Fluids PART 1 : Basic Methods and Preliminary Results, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 14(1984), 265
- (32) 堀川ら, 粘弾性流体の偏心2重管流れ, *機論B*, 47-422(昭56-10), 1971
- (33) Chang, P.W. et.al., Collocation and Galerkin Finite Element Methods for Viscoelastic Fluid Flow I. Description of Method and Problems with Fixed Geometries, *Comp. Fluids.*, 7(1979), 267
- (34) Wambecq, A., Rational Runge-Kutta Method for Solving System of Ordinary Differential Equation, *Computing*, 20(1978), 241
- (35) 寒河江ほか, 高粘性非ニュートン流体の数値解法(第1報 指数則流体の2次元非定常解析), *日立地方講演会論文集*, 505(1987), 132
- (36) 寒河江ほか, 高粘性非ニュートン流体の数値解法(指数則流体の三次元非定常解析), *機論B*, 55-517(1989), 2618
- (37) Koizumi, M., Sagae, K. and Utamura, M., A New Time Integration Method for Convection Diffusion Equations, *Comput. Meth.'86, Proc. of ICCM*, 2(1986) VII 207
- (38) 里深・西田, 無条件安定な陽的方法と陰的方法の比較, *宇宙航空の力学シンポジウム予稿集*, (昭58), 1
- (39) Hirt, C.W. et.al., SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows, LA-5852(1975)
- (40) 金井・棚橋, 非定常非圧縮性粘性流に適するGSMAC有限要素法(第1報, 高レイノルズ数に安定な解法), *機論B*, 53-487(昭62-3), 683
- (41) 山川ほか, 流れの可視化, TVカメラを用いた3次元流速分布測定システムの開発,

- (42) Bach, P. and Hassager, O., An Algorithm for the Use of the Lagrangian Specification in Newtonian Fluid Mechanics and Applications to Free-Surface Flow, *J. Fluid Mech.*, 152(1985), 173
- (43) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 7(1987), 953
- (44) Amsden, A.A. et.al., SALE : A Simplified ALE Computer Program for Fluid Flow at All Speeds, LA-8095(1979)
- (45) Ramaswamy, B. and Kawahara, M., Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Method for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, 7(1987), 1053
- (46) 河村ほか, 液体ジェットの滴生成に関する数値的研究, *ながれ*, 1(1982), 285
- (47) Hirt, C.W. and Nichols, B.D., Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *J. Comput. Phys.*, 39(1981), 201
- (48) 寒河江ほか, 高粘性非ニュートン流体の自由表面を持つ非定常流れの数値解析, *機論B*, 56-522(1990), 402
- (49) 塩島ほか2名, 自由表面をもつ粘性流体の非定常クリープ流れの解析 (マーカ粒子を用いた有限要素解析), *機論*, 53-492(昭62), 2365
- (50) 高橋・武田, 自由表面を伴う流体の運動の数値計算, *ながれ*, 7(1988), 154
- (51) Ioki, N. and Kawahara, M., Selective Lumping Finite Element Method for the Analysis of Wave Run-Up, *Comput. Mechanics '86, Proc. of ICCM, 2(1986), VII-157*
- (52) Gillespie Jr., J.W. et.al., Process Induced Fiber Orientation - Numerical Simulation with Experimental Verification, *Polym. Compos.*, 6(2)(1985), 82
- (53) 平井ほか, 射出成形における強化繊維の配向に関する研究, *材料*, 第34巻, 第378号(昭60-3), 256
- (54) 寒河江ほか, 強化繊維を含む樹脂中の繊維配向の数値解析, *日本機械学会, 第68期全国大会講演集*, E(1990), 308
- (55) 熊沢ほか, 射出成形品のそり解析, *成形加工'89 予稿集* (1989), B207
- (56) 寒河江・山川, 射出成形品のそり変形解析, *日本機械学会, 第69期通常総会講演集*,

- (57) Riks, E., An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems in Elastic Stability, *Int. J. Solids Structures*, 15(1978), 529
- (58) Zienkiewicz, O.C. et.al., Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 3(1971), 275
- (59) E. Ramm, The Riks/Wempner Approach An Extension of the Displacement Control Method in Nonlinear Analysis, *Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics* by E. Hinton, D.R.J. Owen and C. Taylor, Pineridge Press Ltd. (1982)
- (60) 鳥井, MAC法による自由表面を持つ流れの解析, *日本機械学会関西支部第36回特別講義会テキスト* (昭54-10)
- (61) Broyer, E. et.al., A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding, *Trans. Soc. of Rheol.*, 19:3(1975), 423



$$[N_b]^T = \begin{bmatrix} 1-3z^2/l^2+2z^3/l^3 & 0 & 6(z/l^2-z^2/l^3)x \\ 0 & 1-3z^2/l^2+2z^3/l^3 & 6(z/l^2-z^2/l^3)y \\ 0 & 0 & 1-z/l \\ z-2z^2/l+z^3/l^2 & 0 & (-1+4z/l-3z^2/l^2)x \\ 0 & z-2z^2/l+z^3/l^2 & (-1+4z/l-3z^2/l^2)y \\ 3z^2/l^2-2z^3/l^3 & 0 & 6(-z/l^2+z^2/l^3)x \\ 0 & 3z^2/l^2-2z^3/l^3 & 6(-z/l^2+z^2/l^3)y \\ 0 & 0 & z/l \\ -z^2/l+z^3/l^2 & 0 & (2z/l-3z^2/l^2)x \\ 0 & -z^2/l+z^3/l^2 & (2z/l-3z^2/l^2)y \end{bmatrix}$$

$$[K_b] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & C_3 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & C_3 \\ 0 & C_2 & 0 & -C_4 & 0 & 0 & -C_2 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_9 & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 & 0 & C_6 & 0 & 0 & C_4 & 0 & C_8 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & C_5 & -C_3 & 0 & 0 & 0 & C_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_3 & C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_3 \\ 0 & -C_2 & 0 & C_4 & 0 & 0 & C_2 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & -C_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 & 0 & C_8 & 0 & 0 & C_4 & 0 & C_6 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 & C_7 & -C_3 & 0 & 0 & 0 & C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ただし、 $C_1 = 12EI_{xx}/l^3$ ,  $C_2 = 12EI_{yy}/l^3$ ,  $C_3 = 6EI_{xx}/l^2$ ,  
 $C_4 = 6EI_{yy}/l^2$ ,  $C_5 = 4EI_{xx}/l$ ,  $C_6 = 4EI_{yy}/l$ ,  
 $C_7 = 2EI_{xx}/l$ ,  $C_8 = 2EI_{yy}/l$ ,  $C_9 = EA/l$ ,  
 $I_{xx}, I_{yy}$ : 各々断面2次モーメント

### A. 3 座標の変換関係

本解法による定式化では、全体座標  $(x, y, z)$ 、シェル中央面を基準とする局所座標  $(x', y', z')$  及び要素内座標  $(\xi, \eta, \zeta)$  の3座標が必要であるから、各座標系間の変換関係をここで定める。まず、局所座標系  $(x', y', z')$  を定めるため、面に垂直なベクトル ( $z'$  方向)  $V_3$  を定める。

$$V_3 = \begin{Bmatrix} x, \xi \\ y, \xi \\ z, \xi \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x, \eta \\ y, \eta \\ z, \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y, \xi z, \eta - y, \eta z, \xi \\ z, \xi x, \eta - z, \eta x, \xi \\ x, \xi y, \eta - x, \eta y, \xi \end{Bmatrix} \quad \dots \quad (A.1)$$

また、 $V_3$  に直交する  $V_1, V_2$  を次の様に定める。

$$\begin{aligned} V_1 &= V_M \times V_3 \\ V_2 &= V_1 \times V_3 \end{aligned} \quad \dots \quad (A.2)$$

ただし、 $V_M = \{i' j' k'\}$ ; 異方性の主軸方向ベクトル

$V_1, V_2, V_3$  の各方向に局所座標  $(x', y', z')$  をとる。 $V_1, V_2, V_3$  から単位ベクトル  $v_1, v_2, v_3$  を作り、 $\theta = \{v_1, v_2, v_3\}$  とおけば、全体座標と局所座標との微係数の関係は、次のようになる。

$$[u', i'] = \theta^T [u, i] \theta \quad \dots \quad (A.3)$$

また、全体座標と要素内座標の微係数の関係は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} u, x & v, x & w, x \\ u, y & v, y & w, y \\ u, z & v, z & w, z \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} u, \xi & v, \xi & w, \xi \\ u, \eta & v, \eta & w, \eta \\ u, \zeta & v, \zeta & w, \zeta \end{bmatrix} \quad \dots \quad (A.4)$$

ただし、 $[J] = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi & z, \xi \\ x, \eta & y, \eta & z, \eta \\ x, \zeta & y, \zeta & z, \zeta \end{bmatrix}$

次に全体座標とはり要素の局所座標との変換関係をここで定める。はりの局所座標系における単位ベクトルを  $\{e_b\} = \{i_b, j_b, k_b\}^T$ 、全体座標系における単位ベクトルを  $\{e\} = \{i_x, i_y, i_z\}^T$  とすると、座標変換マトリックス  $[T]$  は次式で与えられる。

$$\{e_b\} = [T]\{e\} \quad \dots \quad (A.5)$$

ただし、 $[T] = \begin{bmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \varrho_{13} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} & \varrho_{23} \\ \varrho_{31} & \varrho_{32} & \varrho_{33} \end{bmatrix}$

ここで、 $(\varrho_{11} \varrho_{12} \varrho_{13})$ ,  $(\varrho_{21} \varrho_{22} \varrho_{23})$ ,  $(\varrho_{31} \varrho_{32} \varrho_{33})$  は各々局所座標の全体座標への方向余弦である。

