

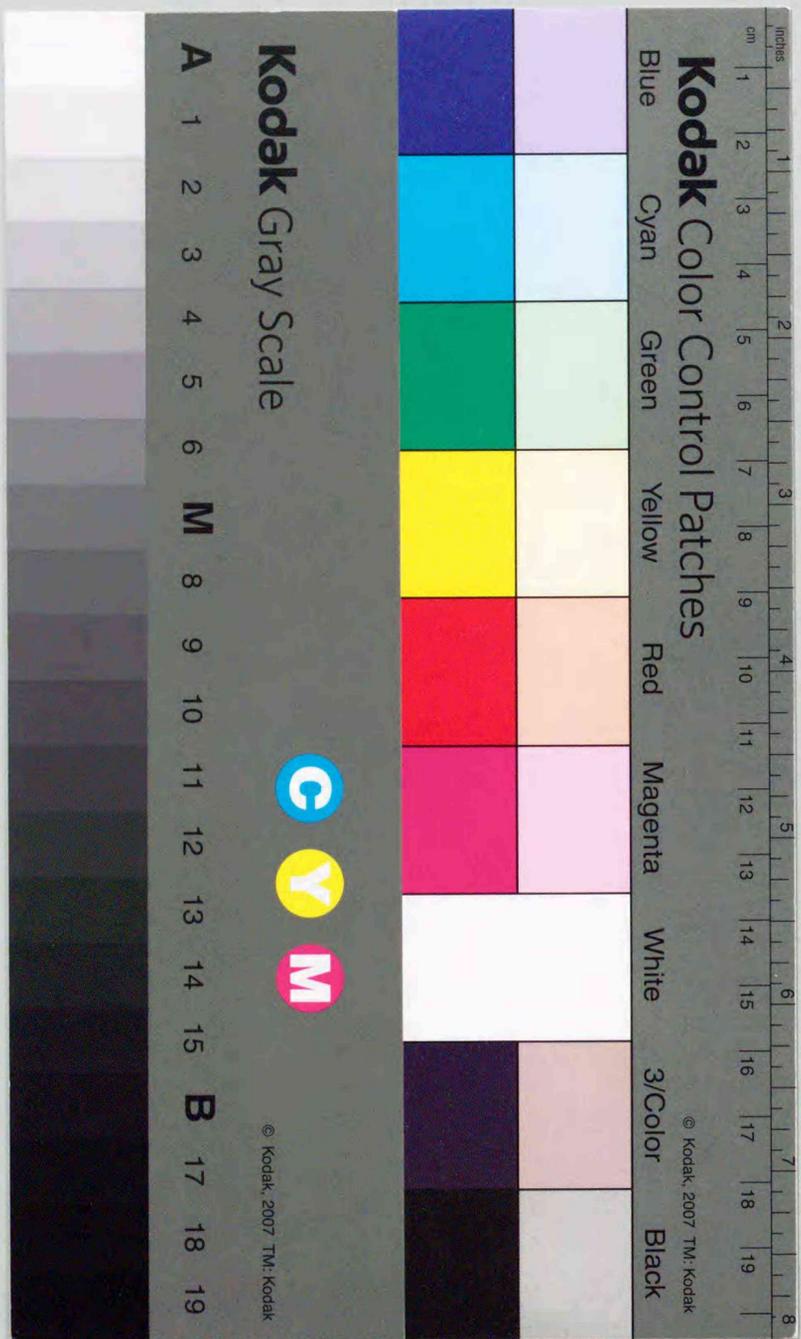


Title	境界要素法を用いた中性子拡散方程式の解法に関する研究
Author(s)	板垣, 正文
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第4629号
Issue Date	1994-09-30
DOI	<a href="https://doi.org/10.11501/3079404">https://doi.org/10.11501/3079404</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/50128">https://hdl.handle.net/2115/50128</a>
Type	doctoral thesis
File Information	000000278168.pdf



境界要素法を用いた  
中性子拡散方程式の解法に関する研究

板垣正文



①

境界要素法を用いた  
中性子拡散方程式の解法に関する研究

平成6年7月

板垣正文

目 次

第1章 序 論	1
1.1 本研究の動機と目的	1
1.2 過去の研究と背景	3
1.3 本研究の概要	5
1.3 本論文の構成	7
参考文献	8
第2章 境界積分方程式の導出	11
2.1 中性子拡散方程式	11
2.2 重み付き残差表示からの境界積分方程式の導出	12
2.3 Green の第2公式による境界積分方程式の導出	15
参考文献	15
第3章 境界要素による離散化と計算手順	17
3.1 境界要素による離散化	17
3.1.1 一定要素による離散化	17
3.1.2 1次要素による離散化	18
3.2 境界積分の方法	20
3.3 源項に起因する領域積分の方法	21
3.4 境界上計算と内部点計算	21
3.5 鏡像による対称性の取扱い	23
参考文献	25
第4章 一様中性子源及び減速中性子源に起因する領域積分の境界積分化	26
4.1 一様中性子源に起因する領域積分の境界積分化	26
4.2 減速中性子源に起因する領域積分の境界積分化	27
4.3 一様中性子源と減速中性子源の組み合わせ	28
参考文献	29

第5章 多領域化の方法	30
5.1 多領域化の方法	30
5.2 解析解による薄い領域を挟む2領域の接続	33
参考文献	35
第6章 固有値探索の方法	36
6.1 零行列式サーチによる方法	36
6.1.1 エネルギー1群モデルの場合	36
6.1.2 多群エネルギーモデルの場合	37
6.2 中性子源反復法	39
参考文献	40
第7章 境界要素法による基本テスト計算	41
7.1 例題1: 単一正方形領域に対するテスト計算	42
7.2 例題2: 水減速材の正方格子中に燃料棒のある問題	45
7.3 例題3: 無限反射体に囲まれた2次元2群2領域炉心の問題	47
7.4 例題4: 反射体と炉心隔板を含むエネルギー3群2次元の問題	50
7.5 例題5: 無限反射体に囲まれた3次元2群2領域吸収体の問題	53
7.6 例題6: 非線形最適化手法による2次元固有値問題の解	56
参考文献	58
第8章 境界要素法の炉心/反射体境界条件の解析への応用	59
8.1 群依存境界条件を与える行列の構造	60
8.2 境界要素法による炉心, 反射体及び炉心隔板の取扱	63
8.3 炉心/反射体境界問題に対する解析手順	65
8.4 数値計算例及び議論	66
8.4.1 IAEA 2次元ベンチマーク問題	66
8.4.2 炉心隔板を有する小型PWRの問題	69
8.5 まとめ	73
参考文献	74

第9章 核分裂中性子源項の境界積分化に関する検討	75
9.1 領域積分を避ける種々の手法について	76
9.1.1 零行列式サーチ	76
9.1.2 モンテカルロ領域積分法	77
9.1.3 二重相反法	79
9.1.4 多重相反法	81
9.2 境界積分のみによる固有値の算出	83
参考文献	85
第10章 二重相反法による核分裂中性子源項の境界積分化	87
10.1 核分裂中性子源に起因する領域積分	87
10.2 Fourier級数展開と特解の利用による二重相反法	88
10.3 領域内サンプリングによるFourier展開係数の決定	90
10.4 境界積分によるFourier展開係数の決定	92
10.5 テスト計算	94
10.6 Fourier級数の収束性の改善	96
10.7 まとめ	97
参考文献	98
第11章 多重相反法による核分裂中性子源項の境界積分化	99
11.1 Wielandtの原点移動法による中性子源反復計算の改良	99
11.2 多重相反法による定式化	101
11.3 多重相反計算における収束安定性	104
11.4 複素方程式の取扱い	106
11.5 数値計算による検証	108
11.6 Helmholtz方程式による一般の固有値問題への応用	112
11.7 まとめ	118
参考文献	119

第12章 多重相反境界要素法による正多角形のバックリング表式の導出	121
12.1 正多角形の幾何学的バックリングに関する考察	121
12.2 多重相反境界要素法による幾何学的バックリング表式の導出	124
12.3 まとめ	128
参考文献	129
第13章 結 論	130
謝 辞	134

1.1 本研究の動機と目的

原子炉内の中性子場を記述する方程式として中性子拡散方程式が広く用いられている。電子計算機を使って中性子拡散方程式を解くために多くの技法が開発されているが、それらの多くは差分法 (FDM: Finite Difference Method) <sup>(1)-(3)</sup> に基づいている。差分法では、元の中性子拡散方程式を差分近似し、差分格子点の中性子束に関する連立1次方程式に帰着させて解くことになる。これとは考え方の異なる解法として、有限要素法 (FEM: Finite Element Method) <sup>(4)(5)</sup> がある。有限要素法は、考えている領域を有限要素と呼ばれる多数の小領域に分割し、要素節点での関数値に関する連立1次方程式に近似して解く方法である。

差分法と有限要素法はともに有力な数値解法であるが、両者の共通点として領域内部を Fig.1-1 に示すようにメッシュや有限要素に分割する必要がある。このことから、これらの方法は領域型解法と呼ばれることがある。これに対し、近年、多くの工学分野で研究が進められている境界要素法 (BEM: Boundary Element Method) <sup>(6)</sup> は、境界型解法と位置付けられている。すなわち、対象領域の物質組成が均質であれば、支配微分方程式がこれと等価な境界積分方程式に変換されるので境界表面だけを要素分割するだけでよく、考えている問題の次元を一つ下げて取り扱うことができる。境界要素法では、境界積分方程式を解析の対象とするので、境界表面上の節点値に関する連立1次方程式を解く問題に帰着する。このため、差分法や有限要素法等の領域型解法に比べて方程式の元数、すなわち、未知数の数が極めて少なくなり必要な計算機記憶容量を節約できるとともに、入力データ数や計算時間を大幅に減少できる可能性がある。

差分法の適用対象は一般に規則的な幾何形状 (2次元では、X-Y, R-Z 体系等) を持つ領域に限られており、例えば、正方形領域内に円形の内部領域を含むような問題や不規則に歪んだ領域を扱うのは困難である。これに対し、有限要素法と境界要素法は不規則な幾何形状を容易に扱える解法として知られている。境界要素法では上述のように領域内部の要素分割が不要であることから、不規則幾何形状の取扱いは有限要素法の場合よりもさらに容易であるということが出来る。このことは、実験解析などにおいて、多数のケースに対してパラメータ・スタディを短期間に効率的に実行したいときに重要である。このよう

なパラメータ・スタディでは、一度作成した入力データの組を順次修正していく作業の繰り返しになる。上で述べた理由により、境界要素法における入力データの作成・修正は極めて容易であるから、境界要素法はパラメータ・スタディに最も適した解法ではないかと考えられる。

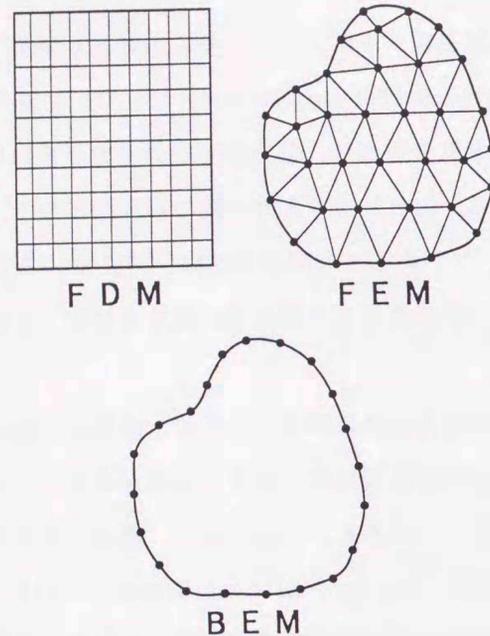


Fig.1-1 Segmentations for FDM, FEM and BEM

境界要素法のもうひとつの大きな利点は、上述のように未知数の数が少ないにもかかわらず、差分法や有限要素法に比べて一般に精度の高い計算結果が得られることである。これは、境界要素法が支配方程式を厳密に満足する基本解を用いた境界積分方程式に基づいていることに理由があると考えられる。このほか、境界要素法では可能であるが差分法や有限要素法では決して扱うことのできないものに、無限大領域を含む問題がある。原子炉物理の問題においては、例えば無限厚さを持つ反射体に囲まれた原子炉の問題を容易に解くことができ、反射体領域の内部をメッシュや有限要素に分割しなくても反射体内の中性子束分布を炉心からかなり隔たった位置まで精度良く計算できる。この場合のもうひとつの利点は反射体の外部境界に対して境界要素を設定する必要がないことであり、無限反射体とほとんど等価な十分厚い反射体に対してはモデル化が極めて簡単なものとなる。

ところで、境界要素法は、前述のように本来、均質領域を対象として定式化されてきた

ものであり、非均質性を持つ領域や著しく多数の領域からなる問題に対しては境界要素法の適用は困難と考えられてきた。実際、本論文で取り上げるのは、均質組成領域のみから構成される極めて少数領域の問題に限っている。ところが、極めて最近の研究では、着目する領域内部の物質組成が連続的に変化するような非均質の問題に対しても境界積分のみによる厳密解法を可能とする試み<sup>(7)</sup>もみられる。積分方程式の解析的取扱いに基づくがゆえ、境界要素法研究はこのように発展性に富んでおり、数値解析や計算力学に関心を持つ多くの研究者にとって魅力ある研究対象ととらえられている。

本研究の目的は、以上のように多くの潜在的有用性を持つ境界要素法を中性子拡散問題に適用し、その数値技法を確立することにある。原子力開発の成熟に伴い、電子計算機を用いた原子炉物理解析の効率化と高精度化が一層求められており、また、炉物理解析の受け持つ範囲は従来からなされていた通常の炉心設計や炉心管理のみならず事故時の核特性や核燃料サイクル施設の臨界安全性に関連した複雑かつ多様な問題に及んでいる。これらの中には、不規則な幾何形状を持つ問題や現象の解明のため多数回のパラメータ解析が要求される問題など、従来の計算法によるよりも境界要素法を用いたほうが有利と考えられる問題が多く含まれている。このようなことから、境界要素法の利点を積極的に引き出せるよう炉物理問題への応用に関する研究を行うことは、炉物理解析の対象がますます多様化しつつある今日、意義のあることと考えられる。もちろん、他の工学分野で開発された境界要素技術をそのまま導入しても、中性子拡散方程式が境界要素法で無理なく解けるわけではない。中性子拡散方程式を対象とするために生じる幾つかの数学的及び数値的な困難を克服するために独自のアルゴリズムを考案し、その有効性を立証することが本研究の骨子である。

## 1.2 過去の研究と背景

境界要素法の背景となっている基本的な考え方は、支配方程式 (Euler 方程式) を次元を一つ下げた積分方程式 (境界積分方程式とよばれる) に変換することにある。例えば、元の支配方程式が2次元のものであれば、境界積分方程式は考えている領域の境界に沿った線積分を使って記述される。このような考え方は、数学の分野では目新しいことではなく、Green 関数の応用について記した一般の教科書<sup>(8)</sup>で見られる。しかしながら、境界積分方程式が与えられても解析的に解が得られるのは極めて単純な問題に限られている。

境界積分方程式を現実的な問題に対して適用可能とするためには、デジタル計算機の発達と関連する数値計算技術の研究の進展を待たなければならなかった。境界要素法とは、境界積分方程式を離散化し、デジタル計算機によって精度の高い近似解を得るための一連の数値計算技術である。もちろん、境界積分方程式は解析的な表現による基本解に基づいて組み立てられているから、境界要素法では数学的な手続きを駆使した独自の定式化が特色である。しかし、空間ないし領域表面の離散化に関する部分には、有限要素法の発展の過程で培われた技法が多く転用されている。境界要素法が近年になって脚光を浴びるようになった遠因のひとつとして、有限要素法の円熟をあげることができるのである。

原子炉物理の分野で過去に境界積分型の解法を試みた例は極めて少ない。古いものとして、第3回ジュネーブ会議の報文集によると、1964年に Koskinen<sup>(9)</sup>は中性子拡散方程式に対応する境界積分方程式の一つの形式を与えている。しかし、その境界積分方程式の具体的な数値解法については述べられておらず、デジタル計算機を用いた離散化解法の便に供される段階には至っていなかった。1976年になると、本格的ではないにせよ、境界積分方程式を解く試みが2件なされている。Suzuki と Katsuragi<sup>(10)</sup>は、高速増殖炉の六角燃料集合体内部の出力分布を求めるために、中性子エネルギー1群近似の波動方程式に対応する境界積分方程式を離散化しデジタル計算機を用いて解いている。また、Kalambokas と Henry<sup>(11)</sup>は、境界積分方程式に大幅な近似を持ち込んで、軽水型原子炉の炉心と反射体の間のL字型境界に対してエネルギー2群構造の中性子束と中性子流相互の簡便な関係式を導いている。これら2件の解析対象は、いずれも、単一領域である、非斉次中性子源項がない、固有値問題ではない、のように制限されていた。臨界性に伴う固有値問題や固定中性子源問題を含め多群多領域からなる広く一般の中性子拡散問題に対して応用発展性が見える境界型解法はこの時点ではまだ現実性を帯びていなかった。

1985年になって、Itagaki<sup>(12)</sup>により、いわゆる「境界要素法」の名で位置付けることのできる水準の離散化解法が初めて中性子拡散問題に適用された。そこでは、他の工学分野での境界要素法と同様、境界積分方程式は中性子拡散方程式の重み付き残差表現から出発して境界上の特異積分を考慮しつつ導出されている。その後、この研究は進展し、中性子拡散問題への境界要素法の適用範囲を拡大するための種々の研究成果<sup>(12)-(25)</sup>が得られている。

### 1.3 本研究の概要

前述のように、境界要素法の中性子拡散問題への適用においては、まず、中性子拡散方程式に対応する境界積分方程式を与えることが出発点となる。任意エネルギー群  $g$  における中性子拡散方程式は、

$$-D_g \nabla^2 \phi_g + \Sigma T_g \phi_g = S_g \quad (1-1)$$

のようにかけられる。ここに  $D_g$ ,  $\Sigma T_g$ ,  $S_g$  は、各々、 $g$  群における拡散係数、全断面積（吸収断面積と除去断面積の和）、中性子源分布を表し、 $\phi_g$  は解くべき中性子束分布である。中性子源  $S_g$  は、核分裂中性子源、減速中性子源及び外部中性子源等からなる。式(1-1)に対応する境界積分方程式は、簡単のため群に関する添字  $g$  を省略して表わすと

$$D \tilde{\alpha}_i \phi_i = \int_{\Gamma} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} J \phi_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega \quad (1-2)$$

のようにかけるのである。式(1-1)から式(1-2)に至る導出は第2章で示す。式(1-2)では、考えている領域  $\Omega$  の境界を  $\Gamma$  で定義し、記法

$$\int_{\Gamma} [ \dots ] d\Gamma$$

は、境界  $\Gamma$  に沿った境界積分を表す。従って、式(1-1)の右辺で  $\phi$  と  $J$  は、各々、境界  $\Gamma$  上の中性子束と法線方向中性子流  $J = -D[\partial \phi / \partial n]$  を表す。左辺の  $\phi_i$  は、領域  $\Omega$  の内部または境界  $\Gamma$  上の任意の点 'i' における中性子束である。右辺にある  $\phi_i^*$  なる量は、Dirac のデルタ関数  $\delta_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$  に対して

$$\nabla^2 \phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + B^2 \phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + \delta_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) = 0 \quad (1-3)$$

を満足する無限大体系に対する Green関数であり、普通、基本解と呼ばれることが多い。式(1-3)中の  $B^2$  は、 $B^2 = \Sigma T/D$  のように与えている。具体的な基本解の形式は第2章で与えている。式(1-2)における量  $J_i^*$  は、法線方向微分を  $\partial/\partial n$  として、

$$J_i^* = -D[\partial \phi_i^* / \partial n]$$

で与えられる。式(1-2)の左辺にある  $\tilde{\alpha}_i$  は特異点に関するパラメータであり、領域内部で  $\tilde{\alpha}_i=1.0$ 、滑らかな境界では  $\tilde{\alpha}_i=1/2$  となる。

式(1-2)は他の工学分野で導かれる境界積分方程式と同一の形式をしており、右辺にある中性子源  $S$  に起因する領域積分

$$Q_i = \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega \quad (1-4)$$

を除けば全て境界積分のみで記述されている。デジタル計算機を用いて式(1-2)を実際に

解くために、境界積分の部分境界に沿って離散化すれば、境界積分方程式(1-2)は、

$$H\vec{\phi} - G\vec{J} + \vec{Q} = 0 \quad (1-5)$$

のように行列とベクトルを使った形式にかけられる。式(1-5)は境界要素方程式と呼ばれることがある。この時、境界表面は有限個のセグメントに分割され、このセグメントを境界要素という。式(1-5)は連立1次方程式となり、Gauss消去法などによって解けば境界要素上に設けた節点における中性子束及び中性子流は全て既知となる。境界上の中性子束と中性子流が全て既知となれば、領域の内部点*i*における中性子束値は  $\bar{\phi}_i = 1.0$  とおくことにより、境界積分方程式(1-2)から直接に得ることができる。

境界積分方程式(1-2)には、式(1-4)で表される領域積分  $Q_i$  が依然として含まれている。領域積分  $Q_i$  をそのままのかたちで数値的に実行するためには、領域内部を多くのセルに分割し、多数の内部点について中性子源の値を与える必要がある。但し、式(1-4)の結果のみを記憶すれば良く、未知数の数は境界要素上の節点の数のみで決まり、内部点の数には関係しない。これが差分法や有限要素法との大きな違いである。しかしながら、領域内部を離散化しなければならないことは、境界要素法の本来の利点を損なうことには変わりはない。そこで、式(1-4)で表される領域積分  $Q_i$  を等価な境界積分に変換してやる何らかの方法が望まれる。実は、一様な中性子源と減速中性子源に起因する領域積分については、Gaussの発散定理、Greenの第2公式及び中性子拡散方程式の性質を用いて比較的簡単に境界積分に変換できる。これらは、第4章で記述される。

最も重要な核分裂中性子源に起因する領域積分については、これと等価な境界積分を見出すことは容易ではなく、永年の研究課題であった。核分裂中性子源は未知の中性子束の関数となっており、固有値問題の枠組の中でとらえなければならないことが解決を困難にしていた。この問題が克服できるようになったのは極めて最近のことであり、他の工学分野で最近になって開発された二重相反法(DRM: Dual Reciprocity Method)<sup>(26)</sup>及び多重相反法(MRM: Multiple Reciprocity Method)<sup>(27)</sup>という新しい概念を導入することによって初めて解決されるようになった。

まず、臨界計算への二重相反法の適用においては、中性子源反復計算の過程で核分裂中性子源分布がFourier級数に展開できると仮定し、展開係数を境界積分の漸化式を与えている。Fourier級数を構成する個々の項は性質のよくわかった三角関数であるから、境界積分方程式の源項にこの三角関数を置いたときの特解が既知である。二重相反法では、この考え方を元領域積分を境界積分に変換している。

多重相反法の考え方はこれよりもさらに新しく、その骨子は

$$\nabla^2 \phi_i^{*(L)} + B^2 \phi_i^{*(L)} + \phi_i^{*(L-1)} = 0 \quad (1-6)$$

の関係式で与えられる高次基本解  $\phi_i^{*(L)}$  ( $L=1, 2, 3, \dots$ ) の列を利用して、元の領域積分に対して相反定理(Greenの第2公式)をシーケンシャルに適用することにある。これによって元の領域積分は境界積分のみの級数に変換される。この方法では、二重相反法のように中性子源分布を近似関数に展開する必要がなく、厳密な定式化に基づいていることから極めて精度の高い計算結果の得られることが特色である。

境界要素法そのものの歴史は比較的浅く、発展途上の計算法である。複雑かつ大規模な炉物理問題へ広く応用されるためには、技術的な面で一層の努力が必要である。しかしながら、境界要素法の中性子拡散問題への適用に関して理論面の基本的部分は本論文にほとんど網羅されるに至っていると考えられる。現在の時点でも、ある種の問題に対しては境界要素法の利点を活かした解析が可能となっている。本論文ではそれらのいくつかを紹介する。例えば、軽水型動力炉の炉心と反射体との境界において行列形式の境界条件を境界要素法から求めており、通常差分法において反射体領域に全くメッシュを設けないにもかかわらず精度のよい差分解が得られている(第8章)。また、多重相反境界要素法の応用例として、これまであまり顧みられることのなかった正多角形の幾何学的バックリングを与える一般的な表式を導いている。ここで用いた手法は正多角形のみならず任意の複雑形状を有する体系の幾何学的バックリングの評価にも適用可能である(第12章)。

#### 1.4 本論文の構成

境界要素法の出発点が境界積分方程式であることは既に述べた。第2章では中性子拡散方程式に対応する境界積分方程式を導く。境界要素法とは、この境界積分方程式を離散化して電子計算機による数値計算が容易となるように工夫する一連の技術であるということができる。第3章では境界要素による離散化と数値的な境界積分等の計算手順について概説する。境界積分方程式の中で中性子源に起因する項は一般に領域積分となるが、一様な中性子源と減速中性子源に起因する領域積分については容易に境界積分に変換できることを第4章に示す。第5章では中性子束と中性子流の連続条件を用いて多領域化を図る方法を与え、また、2つの領域の間に薄い帯状領域がある問題の取扱いについても触れる。原子炉物理特有の現象として臨界性の問題があり、第6章では実効増倍率の探索法

として零行列式サーチによる方法と中性子源反復法について記述する。第6章までに記述した種々の技法を実証する目的で、第7章においては幾つかの基本例題について行ったテスト計算の結果を示す。さらに、第6章までに述べた技法の実用的な応用例として、軽水型動力炉における炉心/反射体境界条件の解析を第8章に取り上げる。

本論文の後半、第9章から第12章では、核分裂中性子源に起因する非斉次の領域積分項を等価な境界積分に変換するために行った種々の研究開発の結果について詳述する。まず、第9章では核分裂中性子源項の境界積分化のためにどのような方法が考えられるかについて概説するとともに、実効増倍率そのものが境界積分のみを用いて計算できることを示す。核分裂中性子源項の境界積分化を図る有力な方法の一つとして、二重相反法による試みを第10章に示す。さらに第11章では、最も有望と考えられる多重相反法に基づく定式化とその収束安定性についてテスト計算結果も含めて詳しく記述する。多重相反法の有効性を実証することを狙いとして、第12章では正多角形の幾何学的バックリング表式の導出への応用について述べる。第13章では本研究で得られた成果をまとめるとともに今後の課題について述べる。

#### 参考文献

1. Varga, R.S., "Matrix Iterative Analysis," Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962).
2. Wachspress, E.L., Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics, Prentice-Hall (1966).
3. Fowler, T.B. and Vondy, D.R., "Nuclear Reactor Core Analysis Code: CITATION," ORNL-TM-2496 (1969).
4. Kang, C.M. and Hansen, K.F., "Finite Element Methods for Reactor Analysis," Nuclear Science and Engineering, 51, 456 (1973).
5. Kaper, H.G., Leaf, G.K. and Linderman, A.J., "Applications of Finite Element Methods in Reactor Mathematics," ANL-7925, Argonne National Laboratory (1972).
6. Brebbia, C.A., "The Boundary Element Method for Engineers," Pentech Press, London (1978).
7. Barbieri, R. and Barcellos, C.S., "Non-Homogeneous Field Potential Problems Solution by the Modified Local Green's Function Method (MLGFM)," Engineering Analysis with Boundary Elements, 11[1], 9 (1993).
8. Morse, P.M. and Feshbach, H., "Methods of Theoretical Physics," McGraw-Hill Inc. (1953).
9. Koskinen, H., "Generalized Potential Theory for Multi-Group Diffusion in a General Multi-Region Reactor," Proceedings of the Third International Conference of the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol.4, p.67, U.N. (1965).
10. Suzuki, T and Katsuragi, S., "A Method of Calculation of Detailed Power Distribution in Fuel Assemblies," Journal of Nuclear Science and Technology, 13[7], 348 (1976).
11. Kalambokas, P.C. and Henry, A.F., "The Representation of Light-Water Reflectors by Boundary Conditions," Nuclear Science and Engineering, 61, 181 (1976).
12. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," Journal of Nuclear Science and Technology, 22[7], 565 (1985).
13. Itagaki, M., "Boundary Element Techniques for Two-Dimensional Nuclear Reactor Calculations," Engineering Analysis, 4[4], 190 (1987).
14. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems," in Boundary Elements X (Ed. Brebbia, C.A.), Vol.2, p.45, Proceedings of the 10th Int. Conf. on BEM, Southampton, U.K., 1988, Computational Mechanics Publications, Southampton (1988).
15. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems of a Thin Layer Sandwiched Between Two Zones," in Boundary Elements X II (Eds. Tanaka, M., Brebbia, C.A. and Honma, T.), Vol.1, p.227, Proceedings of the 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990, Computational Mechanics Publications, Southampton (1990).
16. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Space-Dependent Core/Reflector Boundary Conditions Generated by the Boundary Element Method for Pressurized Water Reactors," Nuclear Science and Engineering, 107, 246 (1991).
17. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Formulation of Fission Neutron Source Problems Using Only Boundary Integrals, Engineering Analysis with Boundary Elements," 8[5], 239 (1991).
18. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Multiple Reciprocity Boundary Element Formulation for One-Group Fission Neutron Source Iteration Problems," Engineering Analysis with Boundary Elements, 11[1], 39 (1993).
19. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Generation of Higher Order Fundamental Solutions to the Two-Dimensional Modified Helmholtz Equation, Engineering Analysis with Boundary Elements," 11[1], 87 (1993).
20. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," Boundary Elements Abstracts and Newsletter, 3[2], 67 (1992).
21. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Remedy for Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," Engineering Analysis with Boundary Elements, 10[4], 345 (1992).

22. Itagaki, M., Miyoshi, Y. and Hirose, H., "Geometric Buckling Expression for Regular Polygons: II. Analyses Based on Multiple Reciprocity Boundary Element Method," Nuclear Technology, 103[3], 392 (1993).
23. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Dual and Multiple Reciprocity Formulations Applied to Fission Neutron Source Problems," in Boundary Elements X IV (Eds. Brebbia, C.A., Dominguez, F. and Paris, F.), Vol.1, p.25, Proceedings of the 14th Int. Conf. on BEM, Sevilla, Spain, 1992, Computational Mechanics Publications, Southampton (1992).
24. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Source Iterative Multiple Reciprocity Technique for Helmholtz Eigenvalue Problems with Boundary Elements," in "Boundary Element Methods, Current Research in Japan and China (Eds. Tanaka, M., Du, Q. and Honma, T.), p.79, Proceedings of the 5th Japan-China Symposium on Boundary Element Methods, Sapporo, Japan, 1993, Elsevier Science Publications, Amsterdam (1993).
25. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Application of the Multiple Reciprocity Method to Neutron Diffusion Problems" in "The Multiple Reciprocity Boundary Element Method (Eds. Nowak, A.J. and Neves, A.C.)," Computational Mechanics Publications, Southampton (1994).
26. Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method," Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science Publications (1992).
27. Nowak, A.J. and Brebbia, C.A., "The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming B.E.M. Domain Integral to the Boundary," Engineering Analysis with Boundary Elements, 6[3], 164 (1989).

## 第2章 境界積分方程式の導出

本章では、中性子拡散方程式に対応する境界積分方程式を導出する。境界要素法では、境界積分方程式を元の支配方程式の重み付き残差表現から導くのが通例である。第2.2節ではこの通例に従い、中性子拡散方程式の重み付き残差式から出発し、その重み関数として Helmholtz方程式または修正 Helmholtz方程式の基本解を選ぶことにより、中性子源項以外の領域積分が除去できることを示す。これとは別に、第2.2節では、境界積分方程式を Greenの第2公式を用いて直接に導く手法について記述する。

### 2.1 中性子拡散方程式

任意のエネルギー群  $g$  において、定常中性子拡散方程式は

$$-D_g \nabla^2 \phi_g + \Sigma T_g \phi_g = S_g \quad (2-1)$$

のようにかけられる<sup>(1)</sup>。ここに  $D_g$ ,  $\Sigma T_g$ ,  $S_g$  は、各々、 $g$  群における拡散係数、全断面積（吸収断面積  $\Sigma_{ag}$  と除去断面積  $\Sigma_{Rg}$  の和）、中性子源分布を表し、 $\phi_g$  は解くべき中性子束分布である。中性子源  $S_g$  は、核分裂中性子源、減速中性子源及び外部中性子源よりなり、以下のようにかけられる。

$$S_g = \left\{ \frac{1}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} (\nu \Sigma_f)_{g'} \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g} \phi_{g'} \right\} + S_g^{*x} \quad (2-2)$$

ここに、 $\chi_{g'}$  は核分裂中性子スペクトルの  $g$  群成分、 $\nu \Sigma_f$  は中性子発生断面積、 $\Sigma_{g'g}$  はエネルギー群  $g'$  から  $g$  へ減速する確率を表す群移動断面積である。また、 $S_g^{*x}$  は外部中性子源である。式(2-2)で  $k_{\text{eff}}$  は実効増倍率である。外部中性子源が無い、即ち、 $S_g^{*x} = 0$  の時、中性子拡散方程式は固有値問題となる。この場合には、原子炉は  $k_{\text{eff}} = 1$  の時に臨界であると定義する。

以下では簡単のため、群に関する添字  $g$  を省略する。式(2-1)は、

$$\nabla^2 \phi - k^2 \phi = -\frac{S}{D} \quad (k^2 = \Sigma T/D) \quad (2-3)$$

または1群モデルで  $S = \nu \Sigma_f \phi / k_{\text{eff}}$  の場合には

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \quad (B^2 = [\nu \Sigma_f / k_{\text{eff}} - \Sigma_a] / D) \quad (2-4)$$

のように整理できる。ここで、1群モデルでは  $\Sigma_T = \Sigma_a$  とした。式(2-4)は Helmholtz方程式、また、式(2-3)で右辺を零とおいた式は修正 Helmholtz方程式として良く知られて

いる。便利のために以下の議論では、式(2-3)と(2-4)を一般化した式

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = -\frac{S}{D} \quad (2-5)$$

を出発点とする。式(2-5)で、 $S = 0.0$  とすれば式(2-5)は式(2-4)に等しく、 $B^2 = -k^2$  とすれば式(2-3)に一致する。

## 2.2 重み付き残差表示からの境界積分方程式の導出

いま、Fig.2-1 に示す均質領域  $\Omega$  の境界を  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  で表す。境界条件として、 $\Gamma_1$  上で  $\phi = \bar{\phi}$  (const.)、 $\Gamma_2$  上で中性子束の法線方向微分  $\partial\phi/\partial n = \bar{q}$  (const.) とする。この場合、式(2-5)の重み付き残差表示は、重み関数  $\phi^*$  を使って

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi + B^2 \phi) \phi^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} \right) \phi^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\phi - \bar{\phi}) \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{D} \int_{\Omega} S \phi^* d\Omega \quad (2-6)$$

のようにかける<sup>(2)</sup>。

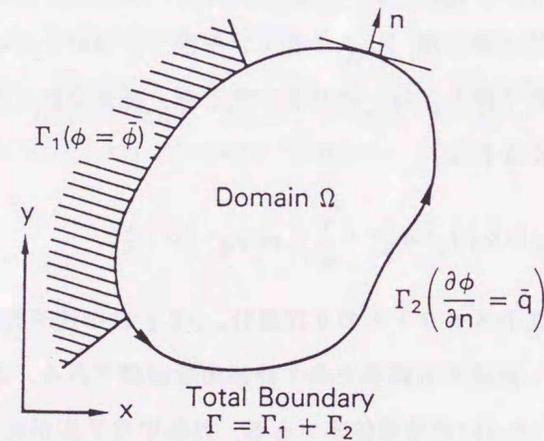


Fig.2-1 Definitions of domain and boundary

式(2-6)を2回部分積分すると

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi^* + B^2 \phi^*) \phi d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{D} \int_{\Omega} S \phi^* d\Omega \quad (2-7)$$

を得る。ここで、炉物理問題を扱うのに便利なように、境界上で法線方向の中性子流

$$J = -D[\partial\phi/\partial n]$$

及び

$$J^* = -D[\partial\phi^*/\partial n]$$

なる量を使えば、式(2-7)は

$$-D \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi^* + B^2 \phi^*) \phi d\Omega = - \int_{\Gamma} J \phi^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi J^* d\Gamma + \int_{\Omega} S \phi^* d\Omega \quad (2-8)$$

のように修正できる。いま、領域  $\Omega$  の内部の任意の点 'i' について考え、その位置をベクトル  $\mathbf{r}_i$  で表すことにする。Dirac のデルタ関数  $\delta_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  を用いて

$$\nabla^2 \phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + B^2 \phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + \delta_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0 \quad (2-9)$$

を満足する無限大体系に対する Green関数  $\phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  を定義する。この  $\phi_i^*$  は基本解と呼ばれる。式(2-8)における重み関数  $\phi^*$  を基本解  $\phi_i^*$  で置き換えれば、

$$D\phi_i = \int_{\Gamma} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} J \phi_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega \quad (2-10)$$

が得られる。

具体的な基本解として2次元問題の例では

$$\phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{2\pi} K_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \quad (B^2 = -k^2 < 0) \quad (2-11)$$

及び

$$\phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{4i} H_0^{(2)}(B|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \quad (B^2 = > 0) \quad (2-12a)$$

を選ぶことができる。ここで、 $K_0(\cdot)$  は第2種零次変形Bessel関数、 $H_0^{(2)}(\cdot)$  は第2種零次Hankel関数であり、 $i^2 = -1$  を表す。式(2-12a)は複素関数であるが、その実数部のみを取って

$$\phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{4} Y_0(B|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) \quad (B^2 = > 0) \quad (2-12b)$$

のように第2種零次Bessel関数  $Y_0(\cdot)$  で表す近似がしばしば採用される<sup>(3)</sup>。いずれの場合も、式(2-10)における量  $J^*$  は、

$$J_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = -D \frac{\partial}{\partial n} \phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \quad (2-13)$$

で与えられる。

式(2-10)は領域  $\Omega$  の内部の任意の点 'i' について成立するが、点 i が境界上に置かれた場合には修正を必要とする。いま、Fig.2-1 に示す境界  $\Gamma_2$  に沿った境界積分を以下のように二つの部分に分割する。

$$\int_{\Gamma_2} \phi J_i^* d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{(2-\epsilon)}} \phi J_i^* d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \phi J_i^* d\Gamma \quad (2-14)$$

ここで  $\Gamma_{\epsilon}$  は、Fig.2-2 に示すように角度  $(2\pi - \theta)$  を持つ扇状の仮想境界である。境界点 i は半径  $\epsilon$  の円の中心にあると仮定し、この  $\epsilon$  を零に近づける。 $B^2 > 0$  で基本解とし

て式(2-12b)が採用された場合を例にして考える。この時、式(2-14)の右辺第2項は

$$\int_{\Gamma_\epsilon} d\Gamma = (2\pi - \theta)\epsilon$$

に注意すると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \phi J_{i^*} d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{D}{4} \int_{\Gamma_\epsilon} \phi \frac{\partial}{\partial \epsilon} Y_0(B\epsilon) d\Gamma \right\} = \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \cdot D\phi_i \quad (2-15)$$

となる。基本解として式(2-11)または(2-12a)を採用した場合も同一の結果が得られる。

$\epsilon \rightarrow 0$  の時、境界  $\Gamma_{(2-\epsilon)}$  は  $\Gamma_2$  に一致するから、式(2-14)から、

$$\int_{\Gamma_2} \phi J_{i^*} d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_2} \phi J_{i^*} d\Gamma + \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \cdot D\phi_i \quad (2-16)$$

の修正を施せばよい。式(2-16)の右辺において、 $\theta/2\pi$  ( $\equiv \tilde{\alpha}_i$ ) なる量は特異点パラメータと呼ばれることがある。

一方、同一の手続きを別の境界積分

$$\int_{\Gamma_2} J \phi_{i^*} d\Gamma$$

に施しても新しい項は派生しない。以上のことは境界  $\Gamma_1$  についても同様である。結局、式(2-16)を式(2-10)に代入することによって領域の内部と境界上の両方に対して成り立つ境界積分方程式

$$D\tilde{\alpha}_i \phi_i = \int_{\Gamma} \phi J_{i^*} d\Gamma - \int_{\Gamma} J \phi_{i^*} d\Gamma + Q_i \quad (2-17)$$

が得られる<sup>(4)(5)</sup>。ここに、

$$Q_i = \int_{\Omega} S \phi_{i^*} d\Omega \quad (2-18)$$

である。式(2-17)に含まれる特異点パラメータ  $\tilde{\alpha}_i$  は、領域内部で  $\tilde{\alpha}_i=1.0$ 、滑らかな境界では  $\tilde{\alpha}_i=1/2$  となる。滑らかでない境界での  $\tilde{\alpha}_i$  の値は、考えている境界点を持つ角度を  $\theta$  とするとき、 $\tilde{\alpha}_i = \theta/2\pi$  で与えられる。

式(2-17)は他の工学分野で導かれる境界積分方程式と同一の形式をしている。  $Q_i$  の項を除いて境界積分のみで記述されており、これが境界要素法の出発点となる式である。式(2-17)は右辺に中性子源  $S$  に起因する領域積分  $Q_i$  を依然として含んでいるが、この取扱いについては後に議論する。

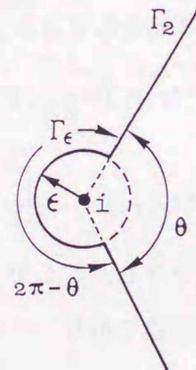


Fig.2-2 Boundary point augmented by a small semicircle

### 2.3 Green の第2公式による境界積分方程式の導出

式(2-10)は、重み付き残差表示から出発せずに、Green の第2公式を活用して導くこともできる。式(2-5)に  $\phi_{i^*}$ 、式(2-9)に  $\phi$  を乗じれば、各々、

$$\phi_{i^*} \nabla^2 \phi + B^2 \phi \phi_{i^*} + \frac{1}{D} S \phi_{i^*} = 0 \quad (2-19a)$$

$$\phi \nabla^2 \phi_{i^*} + B^2 \phi \phi_{i^*} + \phi \delta_i = 0 \quad (2-19b)$$

となる。式(2-19a)から式(2-19b)を差し引いたものに領域積分を施す。

$$\phi_i = \int_{\Omega} \phi \delta_i d\Omega$$

とかくことにすれば、

$$\phi_i = \int_{\Omega} (\phi_{i^*} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi_{i^*}) d\Omega + \frac{1}{D} \int_{\Omega} S \phi_{i^*} d\Omega \quad (2-20)$$

が得られる。ここで、Green の第2積分公式から、

$$\int_{\Omega} (\phi_{i^*} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi_{i^*}) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \phi_{i^*} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi_{i^*}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2-21)$$

とかける。式(2-21)を式(2-20)に代入して

$$\phi_i = \int_{\Gamma} \left( \phi_{i^*} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi_{i^*}}{\partial n} \right) d\Gamma + \frac{1}{D} \int_{\Omega} S \phi_{i^*} d\Omega \quad (2-22)$$

となる。さらに、 $J = -D[\partial \phi / \partial n]$ 、 $J_{i^*} = -D[\partial \phi_{i^*} / \partial n]$  を用いれば

$$D\phi_i = \int_{\Gamma} (\phi J_{i^*} - J \phi_{i^*}) d\Gamma + \int_{\Omega} S \phi_{i^*} d\Omega \quad (2-23)$$

となり、式(2-23)は式(2-10)と全く同一である。この後の手順は式(2-10)から式(2-17)に至る手順と同様である。

### 参考文献

1. Henry, A.F., "Nuclear-Reactor Analysis," The MIT Press (1975).
2. Brebbia, C.A., "The Boundary Element Method for Engineers," Pentech Press, London (1978).
3. DeMey, G., "A Simplified Integral Equation Method for the Calculation of the Eigenvalues of the Helmholtz Equation," International Journal of Numerical Methods for Engineering, 11, 1340 (1977).

4. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," *Journal of Nuclear Science and Technology*, 22[7], 565 (1985).
5. Itagaki, M., "Boundary Element Techniques for Two-Dimensional Nuclear Reactor Calculations," *Engineering Analysis*, 4[4], 190 (1987).

### 第3章 境界要素による離散化と計算手順

前章では境界要素法の出発点となる境界積分方程式を導いた。境界要素法とは、この境界積分方程式を離散化し電子計算機による数値解析が可能な形態とする一連の数値技術であるといつてさしつかえない。本章では、その離散化及び境界積分の方法について概説するとともに、境界要素法計算の骨格を示す。

#### 3.1 境界要素による離散化

本節では境界要素による離散化の例として、2次元問題における一定要素と1次要素による離散化の手法を示す。これより高次の要素を用いた離散化、あるいは3次元問題における面要素等については、一般の境界要素法の文献<sup>(1)(2)</sup>に詳しく掲げられているので、本節では割愛する。これらのより複雑な境界要素による離散化の中性子拡散問題への適用方法は本節における記述から十分に類推可能である。

##### 3.1.1 一定要素による離散化

いま、考えている単一領域の境界を Fig.3-1(a) に示すようにN個の直線状の線分、 $[\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_j, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_{N-1}, \Gamma_N]$  に分割する。任意の線要素  $\Gamma_j$  上では中性子束  $\phi$ 、中性子流  $J$  とともに一定値であると仮定し、線分  $\Gamma_j$  の中央における値を各々、 $\phi_j$  及び  $J_j$  と定義する。この仮定下で任意点 'i' に対する境界積分方程式(2-17)を離散化すれば、 $\phi_j$  と  $J_j$  は積分の外へ出せるから、

$$-D\bar{\omega}_i \phi_i = \sum_{j=1}^N \phi_j \int_{\Gamma_j} J_j^* d\Gamma - \sum_{j=1}^N J_j \int_{\Gamma_j} \phi_i^* d\Gamma + Q_i \quad (3-1)$$

のようにかける。いま、

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \hat{H}_{ij} \quad (i \neq j), & H_{ij} &= \hat{H}_{ij} - D\bar{\omega}_i \quad (i = j) \\ \hat{H}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} J_j^* d\Gamma, & G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \phi_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3-2)$$

なる量を定義すれば、式(3-1)は

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} J_j + Q_i = 0 \quad (3-3)$$

となる。このような離散化によって得られる境界要素を一定要素 (constant element) という。

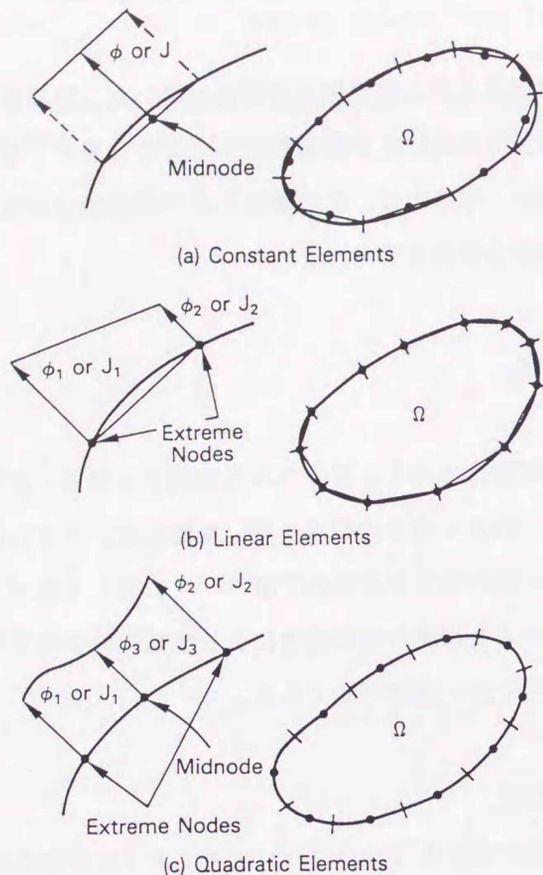


Fig.3-1 Different types of boundary elements

### 3.1.2 1次要素による離散化

Fig.3-1(b) に示されるモデルは1次要素 (linear element) 近似と呼ばれる。この場合、ひとつの境界要素  $\Gamma_j$  の上では中性子束も中性子流も直線的に変化すると仮定する。ここでは、二つの境界要素  $\Gamma_{j-1}$  と  $\Gamma_j$  の接する点を節点  $j$  と定める。境界積分方程式(2-17)は、

$$D\bar{c}_i \phi_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi J_{i^*} d\Gamma - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} J \phi_{i^*} d\Gamma + Q_i \quad (3-4)$$

のようにかける。式(3-2)と異なり、この場合は  $\phi$  と  $J$  は積分の外に出すことができない。要素  $\Gamma_j$  上での  $\phi$  と  $J$  の変化は  $\Gamma_j$  の両端に設けた節点の値及び内挿関数  $\eta_1, \eta_2$  を使って

$$\phi(\xi) = \eta_1 \phi_j + \eta_2 \phi_{j+1}, \quad J(\xi) = \eta_1 J_j + \eta_2 J_{j+1} \quad (3-5)$$

のように表すことができる。ここで要素の長さを  $L$  とする時、無次元座標  $\xi$  は、

$$\xi = 2x/L \quad (-L/2 \leq x \leq L/2, \text{ 即ち, } -1 \leq \xi \leq 1)$$

で表示され、二つの内挿関数は各々、

$$\eta_1 = (1 - \xi)/2, \quad \eta_2 = (1 + \xi)/2$$

で与えられる。式(3-4)における境界積分は、

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \eta_1 J_{i^*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Gamma, & h_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \eta_2 J_{i^*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Gamma, \\ g_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \eta_1 \phi_{i^*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Gamma, & g_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \eta_2 \phi_{i^*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3-6)$$

なる量を用いて

$$\int_{\Gamma_j} \phi J_{i^*} d\Gamma = h_{ij}^1 \phi_j + h_{ij}^2 \phi_{j+1}, \quad \int_{\Gamma_j} J \phi_{i^*} d\Gamma = g_{ij}^1 J_j + g_{ij}^2 J_{j+1} \quad (3-7)$$

のようにかかれる。したがって、式(3-4)の右辺第1項は

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi J_{i^*} d\Gamma = \sum_{j=1}^N (h_{ij}^1 \phi_j + h_{ij}^2 \phi_{j+1}) = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \phi_j \quad (3-8)$$

となる。ここで、

$$\hat{H}_{ij} = h_{i,j-1}^2 + h_{ij}^1 \quad (j \neq 1), \quad \hat{H}_{ij} = h_{in}^2 + h_{ij}^1 \quad (j=1)$$

である。同様に、

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} J \phi_{i^*} d\Gamma = \sum_{j=1}^N G_{ij} J_j \quad (3-9)$$

が得られ、ここに、

$$G_{ij} = g_{i,j-1}^2 + g_{ij}^1 \quad (j \neq 1), \quad G_{ij} = g_{in}^2 + g_{ij}^1 \quad (j=1)$$

である。式(3-6)と(3-7)を式(3-4)に代入すれば

$$\sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} J_j + Q_i = 0 \quad (3-10)$$

が得られる。ここに、

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad (i \neq j), \quad H_{ij} = \hat{H}_{ij} - D\bar{c}_i \quad (i=j)$$

である。式(3-10)は、 $\hat{H}_{ij}$  と  $G_{ij}$  の定義を除けば、一定要素に対する式(3-3)と全く同一の形式をしている。このほか、Fig.3-1(c) に示ような2次要素 (quadratic element) 近似など、種々の境界要素モデルが考えられる。

### 3.2 境界積分の方法

式(3-2)における  $\hat{H}_{ij}$  や  $G_{ij}$ , 式(3-6)に示される  $h_{ij}^1, h_{ij}^2, g_{ij}^1, g_{ij}^2$  のような境界積分を実行するには, 一般に Gauss積分によるのが便利である。無次元座標  $\xi$  による区間  $-1 \leq \xi \leq 1$  において関数  $f(\xi)$  の積分は, Gauss積分を用いて

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i) \quad (3-11)$$

のように数値積分される。重み関数  $w_i$  と座標  $\xi_i$  の組み合わせは積分点の数  $N$  に応じて文献<sup>(3)</sup>に与えられている。

境界積分を実行するにあたり, 基本解の  $\phi_i^*$  や  $J_i^*$  の値を得るためには, 例えば2次元問題においては Bessel関数や変形Bessel関数の値を数値的に計算する必要がある。これらの関数は多項式近似によって高い精度で計算できることが知られており, 主要なものは文献<sup>(4)</sup>にまとめられている。

種々の境界積分のうち  $i=j$  の特別なケースでは,  $\hat{H}_{ii}$  は零であり,  $G_{ii}, g_{ii}^1, g_{ii}^2$  の積分は以下のように解析的に実行できる。まず, 一定要素の場合は, 要素  $\Gamma_i$  の長さを  $L$  として, 例えば,

$$G_{ii} = -\frac{1}{2} \int_0^{L/2} Y_0(Br) dr, \quad (B^2 > 0) \quad (3-12a)$$

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} \int_0^{L/2} K_0(kr) dr \quad (B^2 = -k^2 < 0) \quad (3-12b)$$

のようにかける。式(3-12a)及び(3-12b)の積分は各々, 文献<sup>(4)</sup>にある特殊関数, Struve関数及び変形Struve関数の助けを借りて解析的に実行できる<sup>(5)</sup>。1次要素では, 二つの積分が

$$g_{ii}^1 = \int_0^L \left(1 - \frac{r}{L}\right) z_0(Br) dr, \quad (3-13a)$$

$$g_{ii}^2 = \int_0^L \frac{r}{L} z_0(Br) dr \quad (3-13b)$$

のように与えられる。ここに,  $z_0(Br)$  は,  $B^2 > 0$  の時  $(-1/4)Y_0(Br)$  であり,  $B^2 < 0$  の時は  $(1/2\pi)K_0(kr)$  を意味する。

### 3.3 源項に起因する領域積分の方法

境界積分方程式(2-17)の右辺末尾にある領域積分

$$Q_i = \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega$$

をそのままのかたちで実行するためには, 有限要素法で行うように領域  $\Omega$  の内部を多数の三角形や四角形のセルに分割する必要がある。一例として, 数値積分公式

$$Q_i \sim \sum_{m=1}^M \left[ \sum_{j=1}^k w_j \{S(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}, r_j)\}_j \right] A_m \quad (3-14)$$

が使える。ここで,  $M$  はセルの数,  $k$  はひとつのセル内に設けた節点の数,  $w_j$  は数値積分の重みであり,  $A_m$  は個々のセルの面積である。三角形のセルを用いた数値積分モデルの例を Fig.3-2 に示す。セル内に節点を7点 (Fig.3-2 中の 1~7) 設けた場合の節点座標と各々の重みの組み合わせが Hammer ら<sup>(6)</sup>によって推奨されている。Fig.3-2 中の点 a~f について中性子源分布  $S(\mathbf{r})$  の値を与えると, 節点 1~7 における値が多項式

$$S(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \quad (3-15)$$

を使って内挿される。

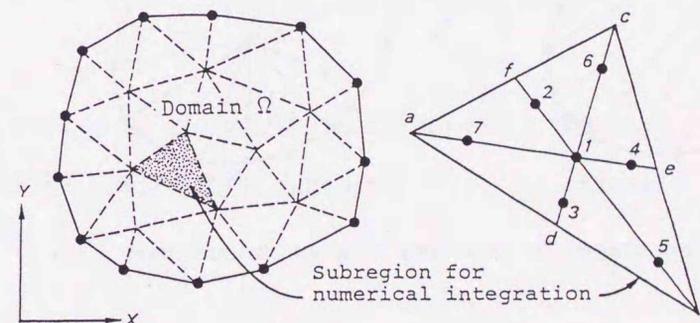


Fig.3-2 Cells for domain integrals

### 3.4 境界上計算と内部点計算

一般に境界要素法による計算は2段階よりなっており, まず境界上の節点値を全て既知とする計算を行い, その後に領域内部の任意点を求めるという手順がとられる。

式(3-3)または(3-10)を行列とベクトルを使って表示すれば

$$\vec{H} \vec{\phi} - \vec{G} \vec{J} + \vec{Q} = 0 \quad (3-16)$$

の形式にかける。未知数を左辺に、既知数を右辺にくるように書き直せば、式(3-16)は

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{f} \quad (3-17)$$

の形式となる。 $\vec{x}$  は  $\vec{\phi}$  と  $\vec{J}$  のうち未知のものを集めたベクトルであり、 $\vec{f}$  は境界条件及び源項の寄与である。この時の未知数の数は境界要素の数  $N$  に等しく、領域内に取りられるメッシュや要素節点が未知数となる差分法や有限要素法に比べて大幅に少ないことが理解できる。連立1次方程式(3-17)を Gauss消去法などによって解けば境界上の中性子束及び中性子流は全て既知となる。

境界上の中性子束と中性子流が全て既知となれば、領域の内部点における中性子束の値は、 $\tilde{c}_i = 1.0$  とおいて、

$$\phi_i = \left\{ \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} J_j + Q_i \right\} / D \quad (3-18)$$

のように与えることができる。

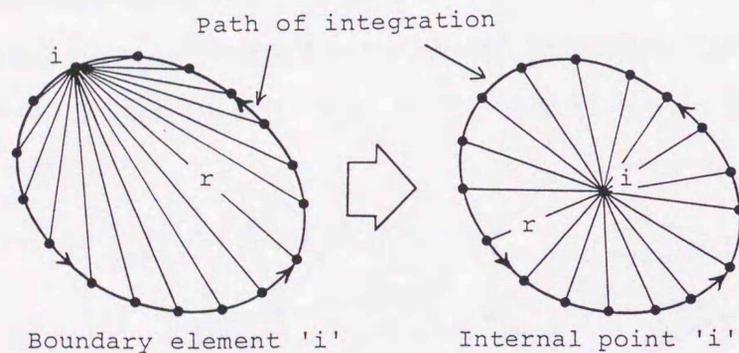


Fig.3-3 Two stages of boundary element calculations

要約すると、境界要素法の計算は2段階からなる。Fig.3-3 に示すように、第1の計算はソース点  $i$  は境界上にあり式(3-3)または式(3-10)にしたがって反時計回りに線積分を実行する。境界上の中性子束と中性子流が既知になったら、第2の計算として、ソース点  $i$  を領域内部におき、式(3-18)を用いて点  $i$  における中性子束を計算する。第2の計算においても線積分は反時計回りに実行する。

前節で記述したように、領域積分  $Q_i$  をそのままのかたちで数値的に実行するためには多くの領域内部点について中性子源の値を求める必要がある。核分裂中性子源は、境界上の中性子束と中性子流が既知となった後、式(3-18)によって計算される中性子束分布から求めることができる。ここで重要なことは、式(3-17)における全体行列  $\mathbf{A}$  の大きさは

境界要素上の節点の数のみで決まり、内部点の数には関係しないことである。いいかえれば、内部点の数が膨大になっても連立1次方程式(3-17)の未知数の数は増えない。これが領域型解法である差分法や有限要素法との大きな違いである。

### 3.5 鏡像による対称性の取扱

対称性を有する領域に対しては、計算上の領域面積を減らし、ひいては境界積分の経路の長さを減らすことができる。例えば Fig.3-4(a) に示す領域  $\Omega$  は 1/8対称であるから、計算上は実際の領域  $\Omega$  よりも外部に接する部分境界  $\Gamma_s$  と対称軸  $\Gamma_0$  に囲まれた小さな領域  $\Omega_{1/8}$  を考えれば足りる。いま中性子源に起因する領域積分項を無視すれば、小領域  $\Omega_{1/8}$  に対する境界積分方程式は

$$D\tilde{c}_i \phi_i = \int_{\Gamma_0} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_0} J \phi_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_s} J \phi_i^* d\Gamma \quad (3-19)$$

のようにかける。対称軸  $\Gamma_0$  に沿って  $J = 0$  の境界条件を適用すれば、式(3-19)は

$$D\tilde{c}_i \phi_i = \int_{\Gamma_0} \phi J_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_s} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_s} J \phi_i^* d\Gamma \quad (3-20)$$

のようになる。式(3-20)の右辺には、対称軸  $\Gamma_0$  に沿った境界積分として

$$\int_{\Gamma_0} \phi J_i^* d\Gamma$$

が未だ含まれているが、以下に記述する「鏡像」の考え方をを用いるとこの項も消去され、未知数の数をさらに減少させることができる<sup>(5)</sup>。

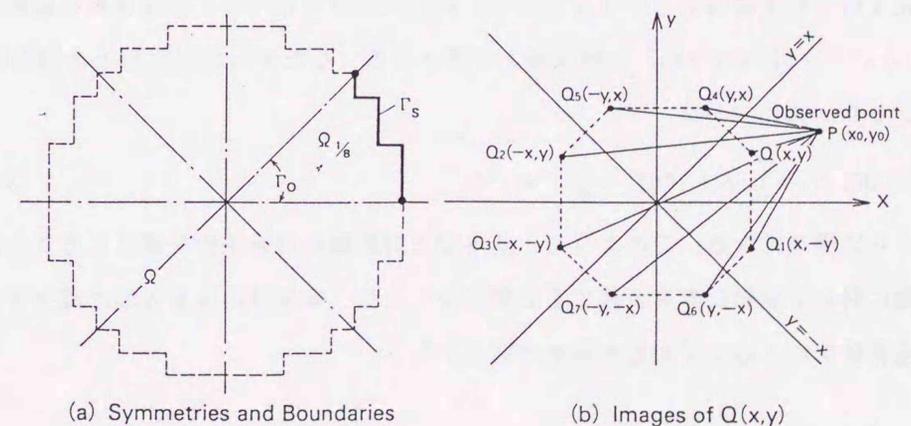


Fig.3-4 Method of images for a symmetric geometry

Fig.3-4(b) で、座標(x,y) に単位中性子源 Q が置かれているとする。対称軸  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $y=x$  及び  $y=-x$  の上で  $J_i^*=0$  となるように、Q の鏡像として  $Q_1 \sim Q_7$  を定める。各々の座標は Fig.3-4(b) に示すとおりである。観測点を  $P(x_0, y_0)$  にとった時、鏡像  $Q_1 \sim Q_7$  に基づく基本解は零次変形Bessel関数  $K_0(\cdot)$  を用いて、各々、

$$\begin{aligned}\phi^*_{Q_1} &= K_0[k\{(x-x_0)^2 + (-y-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi \\ \phi^*_{Q_2} &= K_0[k\{(-x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi \\ \phi^*_{Q_3} &= K_0[k\{(-x-x_0)^2 + (-y-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi \\ \phi^*_{Q_4} &= K_0[k\{(y-x_0)^2 + (x-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi \\ \phi^*_{Q_5} &= K_0[k\{(-y-x_0)^2 + (x-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi \\ \phi^*_{Q_6} &= K_0[k\{(y-x_0)^2 + (-x-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi \\ \phi^*_{Q_7} &= K_0[k\{(-y-x_0)^2 + (-x-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi\end{aligned}\quad (3-21)$$

のようにかける。対称軸  $\Gamma_0$  における境界条件を満足する基本解は、対称軸の数に応じて以下のような重ね合わせで表現できる。

$$\begin{aligned}\phi_i^* &= \phi^*_Q + \phi^*_{Q_1} && (y=0 \text{ に関して対称の時}) \\ \phi_i^* &= \phi^*_Q + \phi^*_{Q_2} && (x=0 \text{ に関して対称の時}) \\ \phi_i^* &= \phi^*_Q + \phi^*_{Q_1} + \phi^*_{Q_2} + \phi^*_{Q_3} && (y=0 \text{ 及び } x=0 \text{ に関して対称の時}) \\ \phi_i^* &= \phi^*_Q + \phi^*_{Q_1} + \phi^*_{Q_2} + \phi^*_{Q_3} + \phi^*_{Q_4} + \phi^*_{Q_5} + \phi^*_{Q_6} + \phi^*_{Q_7} \\ &&& (y=0, x=0 \text{ 及び } y=\pm x \text{ に関して対称の時})\end{aligned}\quad (3-22)$$

ここで

$$\phi^*_Q = K_0[k\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\}^{1/2}]/2\pi$$

であり、元々の中性子源Qからの寄与を表す。式(3-22)及び(3-21)で定義される基本解を用いると  $J_i^* = -D[\partial\phi_i^*/\partial n]$  は対称軸上で零となる。したがって対称軸上の境界積分は全て零となり、式(3-20)は、

$$D\bar{\alpha}\phi_i = \int_{\Gamma_0} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_0} J \phi_i^* d\Gamma \quad (3-23)$$

のようにさらに簡単になる。このように、基本解を対称軸の境界条件を満足するように選ぶと対称軸に対して境界要素を定義する必要がなくなり、未知数の数を大幅に減少できるとともに境界要素によるモデル化が極めて容易となる。

#### 参考文献

1. Brebbia, C.A. and Walker, S., "Boundary Element Techniques in Engineering," Butterworth & Co., London (1980).
2. Brebbia, C.A. and Dominguez, J., "Boundary Elements - An Introductory Course", Computational Mechanics Publications, Southampton (1989).
3. Stroud, A.H. and Secrest, D., "Gaussian Quadrature Formulas," Prentice-Hall, New York (1966).
4. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions," Dover (1965).
5. Itagaki, M., "Boundary Element Techniques for Two-Dimensional Nuclear Reactor Calculations," Engineering Analysis, 4[4], 190 (1987).
6. Hammer, P.C., Marlove, O.J. and Stroud, A.H., "Numerical Integration over Simplex and Cones," Math. Tables and Other Aids to Computation, Vol.10 (1956).

#### 第4章 一様中性子源及び減速中性子源に起因する領域積分の境界積分化

第2章の式(2-17)で与えた境界積分方程式中で、非斉次中性子源項の寄与は一般に領域積分となるので、数値積分のため領域内部を多数のセルに分割する必要がある。しかしながら、原子炉物理で遭遇する中性子源のうち、一様中性子源、減速中性子源及びこれらが混在する問題の場合には、以下のように Gaussの発散定理または Greenの第2公式と中性子拡散方程式の性質を使って領域積分を等価な境界積分に変換できる<sup>(1)-(5)</sup>。

##### 4.1 一様中性子源に起因する領域積分の境界積分化

一般に中性子源分布  $S(\mathbf{r})$  に起因する領域積分

$$Q_i = \int_{\Omega} S(\mathbf{r}) \phi_i^* d\Omega \quad (4-1)$$

は、基本解の性質

$$\phi_i^* = \{ \delta_i + \nabla^2 \phi_i^* \} / k^2 \quad (k^2 = \Sigma_T / D) \quad (4-2)$$

を用いて

$$Q_i = \left\{ S(\mathbf{r}_i) + \int_{\Omega} S(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi_i^* d\Omega \right\} / k^2 \quad (4-3)$$

のように変形できる。いま中性子源分布が一様  $S(\mathbf{r}) = S_0$  であれば、これは上記の領域積分の外に出すことができる。即ち、

$$Q_i = S_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} \nabla^2 \phi_i^* d\Omega \right\} / k^2 \quad (4-4)$$

となる。式(4-4)に Gaussの発散定理を適用し、さらに変形すれば

$$\begin{aligned} Q_i &= S_0 \left\{ 1 + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} d\Omega \right\} / k^2 \\ &= S_0 \left\{ D - \int_{\Gamma} J_i^* d\Omega \right\} / Dk^2 \end{aligned} \quad (4-5)$$

を得る。ここで第2章の式(2-14)から(2-16)にかけての議論と同様の考察により、

$$\int_{\Gamma} J_i^* d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma} J_i^* d\Gamma + \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \cdot D \quad (4-6)$$

の修正を施すことができる。式(4-6)を式(4-5)に代入し、特異点パラメータ  $\tilde{c}_i = \theta / (2\pi)$  に注意すれば、結局、

$$Q_i = S_0 \left\{ D\tilde{c}_i - \int_{\Gamma} J_i^* d\Gamma \right\} / \Sigma_T \quad (4-7)$$

となる。このように、一様中性子源に起因する領域積分は、境界積分のみを含む形式に変換できる。

##### 4.2 減速中性子源に起因する領域積分の境界積分化

簡単のため、以下に示すような非増倍体系に対するエネルギー2群の中性子拡散方程式を最初に考える。

$$\nabla^2 \phi_1 - k_1^2 \phi_1 = 0, \quad (k_1^2 = \Sigma_{T1} / D_1) \quad (4-8a)$$

$$\nabla^2 \phi_2 - k_2^2 \phi_2 = -\Sigma_{12} \phi_1 / D_2, \quad (k_2^2 = \Sigma_{T2} / D_2) \quad (4-8b)$$

式(4-8b)に対応する境界積分方程式は減速中性子源に起因する領域積分を含むことになるが、この領域積分は基本解の性質

$$\phi_{2i}^* = \{ \nabla^2 \phi_{2i}^* + \delta_i \} / k_2^2 \quad (4-9)$$

を使って

$$Q_i = \Sigma_{12} \int_{\Omega} \phi_1(\mathbf{r}) \phi_{2i}^* d\Omega = \left( \Sigma_{12} / k_2^2 \right) \left\{ \phi_1(\mathbf{r}_i) + \int_{\Omega} \phi_1(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi_{2i}^* d\Omega \right\} \quad (4-10)$$

のように変形できる。ここで Greenの第2積分公式

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) d\Gamma \quad (4-11)$$

を用いると

$$\int_{\Omega} \phi_1 \nabla^2 \phi_{2i}^* d\Omega = (k_1^2 / \Sigma_{12}) Q_i - \int_{\Gamma} (\phi_1 J_{2i}^* / D_2 - \phi_{2i}^* J_1 / D_1) d\Gamma \quad (4-12)$$

と変形できる。式(4-12)を式(4-10)に代入すると、結局、求める境界積分表示

$$Q_i = \frac{\Sigma_{12}}{k_2^2 - k_1^2} \left\{ \tilde{c}_i \phi_i + \int_{\Gamma} (\phi_1 J_{2i}^* / D_2 - \phi_{2i}^* J_1 / D_1) d\Gamma \right\} \quad (4-13)$$

を得る。この手法はエネルギー3群以上のモデルに対しても拡張できる。一例として、エネルギー第2群から第3群への減速中性子源に関わる領域積分

$$Q_i = \Sigma_{23} \int_{\Omega} \phi_2(\mathbf{r}) \phi_{3i}^* d\Omega$$

は、等価な境界積分

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\Sigma_{23}}{k_3^2 - k_2^2} \left\{ \tilde{c}_i \phi_{2i} - \int_{\Gamma} (\phi_2 J_{3i}^* / D_3 - \phi_{3i}^* J_2 / D_2) d\Gamma \right\} \\ &\quad - \frac{\Sigma_{23}}{k_3^2 - k_2^2} \cdot \frac{\Sigma_{12} / D_2}{k_3^2 - k_1^2} \left\{ \tilde{c}_i \phi_{1i} - \int_{\Gamma} (\phi_1 J_{3i}^* / D_3 - \phi_{3i}^* J_1 / D_2) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (4-14)$$

に変換できる。

### 4.3 一様中性子源と減速中性子源の組み合わせ

いま、エネルギー第1群に一様中性子源  $S_1$  が存在する時、2群中性子拡散方程式は

$$\nabla^2 \phi_1 - k_1^2 \phi_1 = -S_1/D_1 \quad (k_1^2 = \Sigma_{T1}/D_1), \quad (4-15a)$$

$$\nabla^2 \phi_2 - k_2^2 \phi_2 = -\Sigma_{12} \phi_1/D_2 \quad (k_2^2 = \Sigma_{T2}/D_2). \quad (4-15b)$$

のように簡単化できる。この場合、減速中性子源に関する領域積分

$$Q_i = \Sigma_{12} \int_{\Omega} \phi_1(\mathbf{r}) \phi_{2i}^* d\Omega \quad (4-16)$$

は、式(4-12)とはわずかに異なったかたちの境界積分に変換される。式(4-8a)のかわりに式(4-15a)を用いると、式(4-12)のかわりに

$$\int_{\Omega} \phi_1 \nabla^2 \phi_{2i}^* d\Omega = (k_1^2 / \Sigma_{12}) Q_i - \int_{\Omega} S_1 \phi_{2i}^* d\Omega / D_1 - \int_{\Gamma} (\phi_1 J_{2i}^* / D_2 - \phi_{2i}^* J_1 / D_1) d\Gamma \quad (4-17)$$

の関係をj得る。式(4-17)を式(4-10)に代入して

$$Q_i = \frac{\Sigma_{12}}{k_2^2 - k_1^2} \left\{ \tilde{c}_i \phi_{1i} - \int_{\Gamma} (\phi_1 J_{2i}^* / D_2 - \phi_{2i}^* J_1 / D_1) d\Gamma - Q^u_i / D_1 \right\} \quad (4-18)$$

を得る。ここで、 $Q^u_i$  は、一様中性子源による寄与であり、これも

$$Q^u_i = \int_{\Omega} S_1 \phi_{2i}^* d\Omega = S_1 \left\{ D_2 \tilde{c}_i - \int_{\Gamma} J_{2i}^* d\Gamma \right\} / \Sigma_{T2} \quad (4-19)$$

のように境界積分に変換されている。一様中性子源  $S_1 = 0$  の時、式(4-18)は式(4-13)に一致する。一様中性子源と減速中性子源の組み合わせに関する以上の表式はエネルギー3群以上の問題に対しても容易に拡張できる。一例として、エネルギー第1群に中性子源分布  $S_1(\mathbf{r})$  が存在する時の第2群から第3群への減速中性子源に関する領域積分を

$$Q_i = \Sigma_{23} \int_{\Omega} \phi_2(\mathbf{r}) \phi_{3i}^* d\Omega$$

のように表すと、これは等価な境界積分

$$Q_i = \frac{\Sigma_{23}}{k_3^2 - k_2^2} \left\{ \tilde{c}_i \phi_{2i} - \int_{\Gamma} (\phi_2 J_{3i}^* / D_3 - \phi_{3i}^* J_2 / D_2) d\Gamma \right\} - \frac{\Sigma_{23}}{k_3^2 - k_2^2} \cdot \frac{\Sigma_{12} / D_2}{k_3^2 - k_1^2} \left\{ \tilde{c}_i \phi_{1i} - \int_{\Gamma} (\phi_1 J_{3i}^* / D_3 - \phi_{3i}^* J_1 / D_2) d\Gamma - Q^u_i / D_1 \right\} \quad (4-20)$$

に変換され、中性子源に起因する領域積分に関わる項  $-Q^u_i / D_1$  が含まれていることを除けば、式(4-20)は式(4-14)に等しい。中性子源  $S_1$  が一様中性子源であれば、領域積分  $Q^u_i$  は式(4-19)と同様に境界積分に変換できる。すなわち、

$$Q^u_i = \int_{\Omega} S_1(\mathbf{r}) \phi_{3i}^* d\Omega = S_1 \left\{ D_3 \tilde{c}_i - \int_{\Gamma} J_{3i}^* d\Gamma \right\} / \Sigma_{T3} \quad (4-21)$$

のようにかかれる。

### 参考文献

1. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," *Journal of Nuclear Science and Technology*, 22[7], 565 (1985).
2. Itagaki, M., "Boundary Element Techniques for Two-Dimensional Nuclear Reactor Calculations," *Engineering Analysis*, 4[4], 190 (1987).
3. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems," in *Boundary Elements X* (Ed. Brebbia, C.A.), Vol.2, p.45, Proceedings of the 10th Int. Conf. on BEM, Southampton, U.K., 1988, Computational Mechanics Publications, Southampton (1988).
4. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems of a Thin Layer Sandwiched Between Two Zones," in *Boundary Elements X II* (Eds. Tanaka, M., Brebbia, C.A. and Honma, T.), Vol.1, p.227, Proceedings of the 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990, Computational Mechanics Publications, Southampton (1990).
5. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Space-Dependent Core/Reflector Boundary Conditions Generated by the Boundary Element Method for Pressurized Water Reactors," *Nuclear Science and Engineering*, 107, 246 (1991).

前章までの議論は単一領域に対するものであったが、中性子束と中性子流の連続性を用いればこれを多領域問題に拡張することができる。第5.1節では、2領域問題を例にして多領域化の方法<sup>(1)</sup>を概説する。また、第5.2節では多領域問題の変形として、2つの領域の間に薄い帯状領域がある問題の取扱い<sup>(2)</sup><sup>(3)</sup>について取り上げる。

5.1 多領域化の方法

簡単のため、ここでは Fig.5-1 に示すように材料組成の異なる（基本解の異なる）2領域問題を考える。3領域以上の問題への拡張は容易である。Fig.5-1 における領域1及び2について、式(3-16)と同様の行列方程式を書き下すと

$$H^1 \vec{\phi}^1 + H^1_I \vec{\phi}^1_I - G^1 \vec{J}^1 - G^1_I \vec{J}^1_I + \vec{Q}^1 = 0 \quad (\text{領域1}), \quad (5-1a)$$

$$H^2 \vec{\phi}^2 + H^2_I \vec{\phi}^2_I - G^2 \vec{J}^2 - G^2_I \vec{J}^2_I + \vec{Q}^2 = 0 \quad (\text{領域2}) \quad (5-1b)$$

のようである。添字の1, 2及びIは、各々、領域1, 2及びInterfaceを表す。

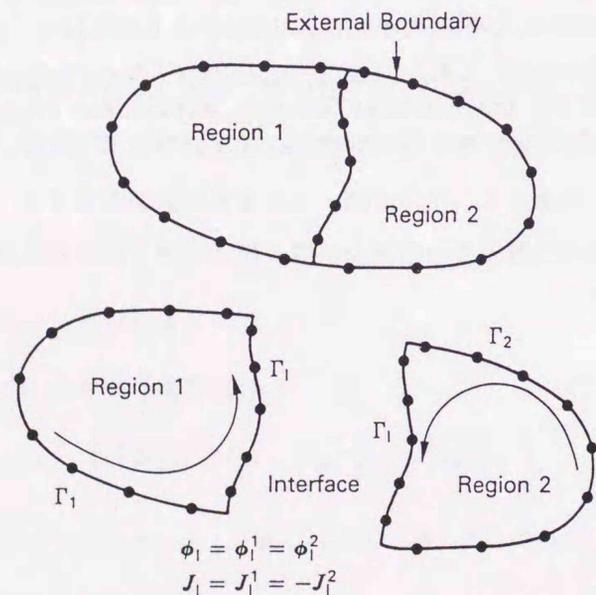


Fig.5-1 Schematic representation of method for two-region problems

2つの領域間の連続条件として

$$\vec{\phi}_1 \equiv \vec{\phi}^1_I = \vec{\phi}^2_I, \quad \vec{J}_1 \equiv \vec{J}^1_I = -\vec{J}^2_I, \quad (5-2)$$

の関係がある。ここで各領域の境界積分は反時計回りになされるので Interface における中性子流の定義は向きが逆であることに注意する必要がある。式(5-2)を式(5-1a)及び(5-1b)に代入して整理すると

$$\begin{bmatrix} H^1 & -G^1 & H^1_I & -G^1_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H^2 & G^2 & H^2 & -G^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\phi}^1 \\ \vec{J}^1 \\ \vec{\phi}_1 \\ \vec{J}_1 \\ \vec{\phi}^2 \\ \vec{J}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{Q}^1 \\ \vec{Q}^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5-3)$$

のようにかける<sup>(1)</sup>。Fig.5-1 における領域1と2の外部境界の要素数を各々、 $m_1, m_2$ とし、Interfaceの要素数を $m_I$ とすれば、式(5-3)中の列ベクトルを構成する要素は合計 $2(m_1 + m_2 + m_I)$ 個の要素からなる。このうち $(m_1 + m_2)$ 個が外部境界条件として既知であり、未知数は $(m_1 + m_2 + 2m_I)$ 個となる。既知数を右辺に移項して

$$A \vec{x} = \vec{f}$$

の形式にすれば、Gauss消去法などによって境界及びInterfaceの中性子束と中性子流は全て既知となる。この後は領域毎に式(3-18)にしたがえば領域内の任意点の中性子束値が得られる。

なお、式(5-3)より明らかのように、単一領域の問題では‘Dense’であった行列が多領域問題では零要素ブロックを多く含んだ‘Sparse’な行列となる。このことから、多くの領域からなる大規模な問題に対しては、Gauss消去法に代わるより最適な行列方程式解法を開発できる余地がある。

2領域問題に対する上で述べた技法は、無限に厚い反射体に囲まれた炉心の問題に応用できる。この問題の興味深いところは、炉心領域が無限反射体の内部に納まっていることである。即ち、炉心領域の境界は全て反射体に接するInterfaceであり（中性子束と中性子流の両方が未知である）、最外端境界が無い。反射体の外部境界は最外端境界といえるが、無限反射体の外部境界においては中性子束、中性子流、さらに基本解までが零に収束するため、式(5-3)における境界積分HとGは無限反射体の外部境界においては計算する必要がない。このようなことから、この問題では式(5-3)に対応する行列方程式は

$$\begin{bmatrix} H^C & -G^C \\ H^R & G^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\phi}_1 \\ \vec{J}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{Q}^C \\ \vec{Q}^R \end{bmatrix} = 0 \quad (5-4)$$

のように簡単に記述することができる<sup>(3)</sup>。ここで、添字の C と R は、各々、炉心と反射体を表す。式(5-2)に対応させて炉心/反射体境界の連続条件は

$$\vec{\phi}_1 \equiv \vec{\phi}_1^C = \vec{\phi}_1^R, \quad \vec{J}_1 \equiv \vec{J}_1^C = -\vec{J}_1^R, \quad (5-5)$$

のようにかけられる。Fig.5-2 に示すように炉心/反射体境界における境界積分(線積分)は炉心の物質定数を使って反時計回りに、反射体の物質定数を使って時計回りに実行することになる。

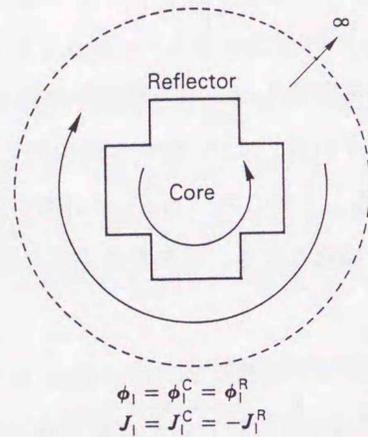


Fig.5-2 Schematic representation of method for core/reflector interface

軽水反射体による反射体節約効果は厚さ 20~30cm 程度で無限反射体と等価であることが知られているから、ここで述べた解法は軽水炉物理などの問題に応用して利点がある。一般に差分法では反射体ピーク付近の中性子束を精度良く計算するのにかなり詳細なメッシュ分割を必要とするが、ここで記述した方法によれば反射体領域を全くメッシュないし要素分割することなく高い精度の反射体内中性子束を得ることができる。

## 5.2 解析解による薄い領域を挟む2領域の接続

次に、Fig.5-3 に示すような薄い帯状の領域が2つの領域 'L' と 'R' に挟まれている問題を考える。この場合、各々の領域に対して境界要素方程式は、

$$H^L \vec{\phi}^L + H^L \vec{\phi}^L - G^L \vec{J}^L - G^L \vec{J}^L + \vec{Q}^L = 0 \quad (\text{領域 L}), \quad (5-6a)$$

$$H^R \vec{\phi}^R + H^R \vec{\phi}^R - G^R \vec{J}^R - G^R \vec{J}^R + \vec{Q}^R = 0 \quad (\text{領域 R}) \quad (5-6b)$$

のようにかける。いま、薄い帯状領域を無限平板とみなせば、1次元中性子拡散方程式の解析解を用いて帯状領域の両側の中性子束と中性子流を関係付けることができる。エネルギー-3群モデルを例にとると、

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1}(X_R) \\ -J_{1,1}(X_R) \\ \phi_{2,1}(X_R) \\ -J_{2,1}(X_R) \\ \phi_{3,1}(X_R) \\ -J_{3,1}(X_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1}(X_L) \\ J_{1,1}(X_L) \\ \phi_{2,1}(X_L) \\ J_{2,1}(X_L) \\ \phi_{3,1}(X_L) \\ J_{3,1}(X_L) \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

ように与えられ、式(5-7)中の小行列は以下のように与えられる<sup>(2)(3)</sup>。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i & -\frac{L_i}{D_i} S_i \\ -\frac{D_i}{L_i} S_i & C_i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{2i-1, 2i-1} & Z_{2i-1, 2i} \\ Z_{2i, 2i-1} & Z_{2i, 2i} \end{bmatrix}, \quad (i=j; i=1,2,3)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1 - C_2)r_{21} & (L_2 S_2 - L_1 S_1) \frac{r_{21}}{D_1} \\ (\frac{S_2 - S_1}{L_2 - L_1}) D_2 r_{21} & (C_1 - C_2) \frac{D_2}{D_1} r_{21} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{31} & Z_{32} \\ Z_{41} & Z_{42} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Z_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1 - C_2)r_{32} - (C_1 - C_3)r_{321} & (L_2 S_2 - L_1 S_1) \frac{r_{32}}{D_1} - (L_3 S_3 - L_1 S_1) \frac{r_{321}}{D_1} \\ (\frac{S_2 - S_1}{L_2 - L_1}) D_3 r_{32} - (\frac{S_3 - S_1}{L_3 - L_1}) D_3 r_{321} & (C_1 - C_2) \frac{D_3}{D_1} r_{32} - (C_1 - C_3) \frac{D_3}{D_1} r_{321} \end{bmatrix} \\ \equiv \begin{bmatrix} Z_{51} & Z_{52} \\ Z_{61} & Z_{62} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} Z_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_2 - C_3)r_{32} & (L_3 S_3 - L_2 S_2) \frac{r_{32}}{D_2} \\ (\frac{S_3 - S_2}{L_3 - L_2}) D_3 r_{32} & (C_2 - C_3) \frac{D_3}{D_2} r_{32} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Z_{53} & Z_{54} \\ Z_{63} & Z_{64} \end{bmatrix}, \quad (5-8)$$

ここで,

$$L_i^2 = 1/k_i^2 = D_i / \Sigma_i \quad (i=1,2,3), \quad \Delta = |x_L - x_R|,$$

$$C_i = \cosh(\Delta/L_i), \quad S_i = \sinh(\Delta/L_i), \quad (i=1,2,3)$$

$$r_{21} = \frac{\Sigma_{12}/D_2}{1/L_2^2 - 1/L_1^2}, \quad r_{32} = \frac{\Sigma_{23}/D_3}{1/L_3^2 - 1/L_2^2} \quad \text{and} \quad r_{321} = \frac{\Sigma_{12}/D_2}{1/L_3^2 - 1/L_1^2} \cdot r_{32} \quad (5-9)$$

のように定義している。式(5-7)は任意のエネルギー群  $i$  について

$$\begin{bmatrix} \phi_{i,1}(x_R) \\ -J_{i,1}(x_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i & -\frac{L_i}{D_i} S_i \\ -\frac{D_i}{L_i} S_i & C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i,1}(x_L) \\ J_{i,1}(x_L) \end{bmatrix} + \vec{E} \quad (i=1,2,3) \quad (5-10)$$

のように書き直すことができる。ここで,

$$\vec{E} = 0 \quad (i=1),$$

$$\vec{E} = \sum_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k,1}(x_L) \\ J_{k,1}(x_L) \end{bmatrix} \quad (i>1) \quad (5-11)$$

と与えられる。式(5-10)の右辺では、 $\phi_{i,1}(x_L)$  と  $J_{i,1}(x_L)$  だけが未知数であり、 $\vec{E}$  中の他の中性子束と中性子流は全て上方エネルギー群で計算されている既知数である。式(5-10)を式(5-6b)に代入して  $\phi_{i,1}(x_R)$  と  $J_{i,1}(x_R)$  を消去すると,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^L - \mathbf{G}^L & \mathbf{H}^{L_1} & -\mathbf{G}^{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_i \mathbf{H}^{R_1} - \frac{D_i}{L_i} S_i \mathbf{G}^{R_1} & -\frac{L_i}{D_i} S_i \mathbf{H}^{R_1} + C_i \mathbf{G}^{R_1} & \mathbf{H}^R - \mathbf{G}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\phi}^L \\ \vec{J}^L \\ \vec{\phi}^{L_1} \\ \vec{J}^{L_1} \\ \vec{\phi}^R \\ \vec{J}^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{Q}^L \\ \vec{Q}^R + \vec{P}^R \end{bmatrix} = 0, \quad (5-12)$$

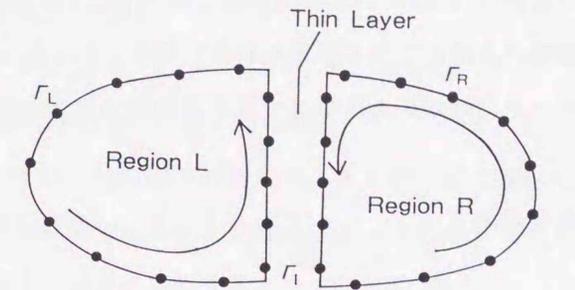
を得る。ここに,

$$\vec{P}^R = 0 \quad (i=1),$$

$$\vec{P}^R = \mathbf{H}^R (Z_{31} \vec{\phi}_{1,L} + Z_{32} \vec{J}_{1,L}) - \mathbf{G}^R (Z_{41} \vec{\phi}_{1,L} + Z_{42} \vec{J}_{1,L}) \quad (i=2),$$

$$\begin{aligned} \vec{P}^R &= \mathbf{H}^R (Z_{51} \vec{\phi}_{1,L} + Z_{52} \vec{J}_{1,L} + Z_{53} \vec{\phi}_{2,L} + Z_{54} \vec{J}_{2,L}) \\ &\quad - \mathbf{G}^R (Z_{61} \vec{\phi}_{1,L} + Z_{62} \vec{J}_{1,L} + Z_{63} \vec{\phi}_{2,L} + Z_{64} \vec{J}_{2,L}) \quad (i=3) \end{aligned} \quad (5-13)$$

である。上方エネルギー群の寄与、すなわち、式(5-10)にある  $\vec{E}$  は、式(5-12)では中性子源項の一部、 $\vec{P}^R$  として扱われている。なお、帯領域の幅  $\Delta$  を零に近づけると式(5-12)は通常の二領域問題に対する式(5-3)に一致する。



$$\mathbf{H}^L \vec{\phi}^L + \mathbf{H}^{L_1} \vec{\phi}^{L_1} - \mathbf{G}^L \vec{J}^L - \mathbf{G}^{L_1} \vec{J}^{L_1} + \vec{Q}^L = 0 \quad (\text{Region L})$$

$$\mathbf{H}^R \vec{\phi}^R + \mathbf{H}^{R_1} \vec{\phi}^{R_1} - \mathbf{G}^R \vec{J}^R - \mathbf{G}^{R_1} \vec{J}^{R_1} + \vec{Q}^R = 0 \quad (\text{Region R})$$

Fig.5-3 Thin layer treatment

#### 参考文献

1. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," *Journal of Nuclear Science and Technology*, 22[7], 565 (1985).
2. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems of a Thin Layer Sandwiched Between Two Zones," in *Boundary Elements X II* (Eds. Tanaka, M., Brebbia, C.A. and Honma, T.), Vol.1, p.227, Proceedings of the 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990, Computational Mechanics Publications, Southampton (1990).
3. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Space-Dependent Core/Reflector Boundary Conditions Generated by the Boundary Element Method for Pressurized Water Reactors," *Nuclear Science and Engineering*, 107, 246 (1991).

## 第6章 固有値探索の方法

原子炉または中性子増倍系の解析に特有の問題として臨界性の問題、即ち、固有値問題があり、境界要素法においても臨界探索の方法を確立しておく必要がある。これまでに求めた境界要素方程式(3-16)及び(5-3)において源項積分に関するベクトル  $\vec{Q}$  が零か零でないかによって、臨界探索の方法が二通り考えられる。即ち、以下に示すように源項が存在しない時は零行列式サーチ、源項のある時は中性子源反復法の適用が考えられる。

### 6.1 零行列式サーチによる方法

#### 6.1.1 エネルギー-1群モデルの場合

源項積分に関するベクトル  $\vec{Q}$  が存在しないケースとして最も考えられるのは、エネルギー-1群の中性子拡散方程式

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = \nu\Sigma_f\phi / k_{eff} \quad (6-1)$$

を整頓して

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \quad (B^2 = (\nu\Sigma_f/k_{eff} - \Sigma_a)/D) \quad (6-2)$$

のように表したときであり、基本解  $\phi_i^*$  として

$$\nabla^2\phi_i^* + B^2\phi_i^* + \delta_i = 0$$

を満足するものを選べば境界積分方程式に源項は現れない。この場合、零中性子束または零中性子流が外部境界条件として設定されれば、境界要素方程式を整理して得られる系全体の連立1次方程式

$$A\vec{x} = \vec{f} \quad (6-3)$$

において  $\vec{f}$  は零ベクトルであることから、臨界条件は未知の中性子束及び中性子流のベクトル  $\vec{x}$  が non-trivial であるための条件、即ち、行列  $A$  の行列式が零となる条件

$$|A(k_{eff})| = 0 \quad (6-4)$$

であり、式(6-4)を満足する  $k_{eff}$  が系の実効増倍率である。行列式が零となるようにサーチする最も簡単な方法として Newton法などが使える。実効増倍率  $k_{eff}$  が求まった後、未知ベクトル  $\vec{x}$  の決定には Gauss消去法が使えるが、この場合、式(6-4)は不定方程式なので後退代入の際、ひとつのベクトル値をある値に設定、例えば、 $x_n = 1.0$  というように定める必要がある。

#### 6.1.2 多群エネルギーモデルの場合

零行列式サーチの手法をエネルギー-多群の問題にも拡張するために以下の方法が考えられる。この手法の詳細は著者による論文<sup>(1)</sup>にまとめられている。多群拡散方程式(連立方程式)においてエネルギーの最も低い群  $G$  における中性子束  $\phi_G$  のみを残してそれ以外の群の中性子束を消去すれば、

$$(\nabla^2 + B_1^2)(\nabla^2 + B_2^2)\cdots(\nabla^2 + B_G^2)\phi_G = 0 \quad (6-5)$$

のような因数分解形式の特性方程式が得られる<sup>(2)</sup>。ここで、 $B_1^2, B_2^2, \dots, B_G^2$  は一般に複素数であり、それぞれの添字は特定のエネルギー群を意味しない。 $B_1^2, B_2^2, \dots, B_G^2$  のうち実数で絶対値最小のものが空間基本モード形成に寄与し、この量は反射体のない単一領域ではバックリングに相当する。いま、 $B_1^2, B_2^2, \dots, B_G^2$  の各々に対応する空間モード  $f_j(\mathbf{r})$  が

$$(\nabla^2 + B_j^2)f_j(\mathbf{r}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, G) \quad (6-6)$$

を満たすとすれば、任意の群  $g$  における中性子束は線形結合

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^G t_{gj} f_j(\mathbf{r}) \quad (g=1, 2, \dots, G) \quad (6-7)$$

で表される。ここで  $t_{gj}$  は境界条件に依存しない結合係数であり、物質組成が与えられれば元の中性子拡散方程式から求められる。

式(6-6)に対応する境界積分方程式は

$$\oint_{\Gamma} f_j(\mathbf{r}_i) \{ \psi_j^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \frac{\partial}{\partial n} f_j(\mathbf{r}) - f_j(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \psi_j^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \} d\Gamma \quad (6-8)$$

とかかれる。 $\frac{\partial}{\partial n}$  は法線方向微分を表し、基本解  $\psi_j^*$  は

$$\nabla^2\psi_j^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + B_j^2\psi_j^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + \delta_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0 \quad (6-9)$$

を満たすように決められる。 $f_j(\mathbf{r})$  と  $\frac{\partial}{\partial n} f_j(\mathbf{r})$  は、各々、零中性子束及び零中性子流の境界条件を持つ境界で零値が与えられる。二つの領域  $A$  と  $B$  が互いに接する境界では、中性子束と中性子流の連続条件から

$$\sum_{j=1}^G t_{gj}^A f_j^A(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^G t_{gj}^B f_j^B(\mathbf{r}) \quad (6-10a)$$

$$-D_g^A \sum_{j=1}^G t_{gj}^A \frac{\partial}{\partial n} f_j^A(\mathbf{r}) = -D_g^B \sum_{j=1}^G t_{gj}^B \frac{\partial}{\partial n} f_j^B(\mathbf{r}) \quad (6-10b)$$

の関係がある。式(6-8)、(6-10a)及び(6-10b)を全エネルギー群、全領域にわたって連立させて離散化すれば、全体行列方程式

$$A(k_{\text{eff}}) \vec{x} = 0 \quad (6-11)$$

が得られる。ここで、ベクトル  $\vec{x}$  は  $f_j(\mathbf{r})$  と  $\sum f_j(\mathbf{r})$  のうち未知数を集めたものである。式(6-11)の解がいったん得られれば、式(6-8)で  $\bar{\alpha} = 1.0$  と置き、かつ、式(6-7)を活用すれば、領域内部の任意点の中性子束が計算できる。

エネルギー多群の問題においては、式(6-11)中の行列  $A$  の行列式を直接計算して零となる  $k_{\text{eff}}$  を求めようとしてもうまくいかない場合が多い。この理由は、式(6-6)で定義される高次の空間モードに関する  $B_j^2$  の絶対値が基本モードのそれに比べてはるかに大きいことと関係がある。 $B_j$  が大きいために高次モードに対応する基本解は特異点から離れると急速に減衰するので、その境界積分値は微小な量となる。このため、式(6-11)における全体行列は絶対値の微小な行列要素を多数含んだものとなる。その結果、 $A$  の行列式そのものは極めて微小であり、数学的には行列式の値が零とみなせない場合であってもデジタル計算機による数値計算では underflow error を多発することがある。このような場合は直接的な零行列式サーチにかえて、以下の「残差最小法」等の工夫が必要となる。

この方法は、実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  の推定値を与えて Gauss消去法によって解ベクトル  $\vec{x}$  の近似値を計算（ベクトル中のひとつの要素を一定値に仮定）し、それを式(6-11)に代入して得られる残差ベクトル

$$\vec{\epsilon}^{(m)} = A(k_{\text{eff}}^{(m)}) \vec{x}^{(m)} \quad (6-12)$$

の root-mean-square (RMS) が最小となるように  $k_{\text{eff}}$  の値を繰り返し更新していくものである。添字 (m) は第 m 回の繰り返しを表す。この RMS は常に非負の値をとるので  $k_{\text{eff}}$  を探索するのに Newton法のかわりに「成功と失敗のルーチン (routine of success and failure)」<sup>(3)</sup> 等の非線形最適化手法が活用できる。この非線形最適化手法によって 2 群 2 領域の固有値問題を解いた計算例を第 7.6 節で後述する。

以上のような零行列式サーチが適用できる場合は核分裂中性子源に起因する領域積分項が全く現れないので、離散化モデルの組立てが簡単であり、また、計算時間が短くてすむという利点がある。この方法のもうひとつの利点はいわゆる「臨界調整」も容易にできることである。全体行列方程式(6-4)または(6-11)の左辺は実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  の関数として与えているが、 $k_{\text{eff}}$  を固定して体系寸法、核物質濃度などの他のパラメータの関数として与えることもできる。これらの場合、Newton法や非線形最適化手法による零行列式サーチの手順は  $k_{\text{eff}}$  をパラメータとする場合と全く同一であるから、臨界調整による計算時間は  $k_{\text{eff}}$  の探索の場合と同程度となる。（次節で記述する中性子源反復法で臨界調整を行うた

めには、 $k_{\text{eff}}$  探索の計算ルーチンの外側に臨界調整のためのループを設ける必要があり、その結果、臨界調整に要する計算時間は一般に膨大なものとなる。）

零行列式サーチの欠点は物理的に意味のある固有値に必ず収束するという保証のないことである。式(6-4)または(6-11)が満たす数学上の固有値は無数に存在する。それらの中から原子炉物理で関心のある固有値のみを選別することは、小規模な問題では可能であっても行列の次元が大きくなると困難となる。Newton法や非線形最適化による技法も万能ではなく、しばしば発散または偽の固有値に収束し、固有値の真偽の判定に苦しむ場合がある。これらに対し、次節で記述する中性子源反復法では最大固有値である  $k_{\text{eff}}$  に収束することが知られている。

## 6.2 中性子源反復法

式(2-2)で見たように、中性子拡散方程式は固有値  $k_{\text{eff}}$  を含んでいる。数学的には  $k_{\text{eff}}$  として無数の固有値がとり得るが、それらの中最大値のみが物理的意味（実効増倍率）を与える。これは中性子拡散方程式で中性子束分布  $\phi$  は常に正であることによっている。このように最大固有値の探索のみに関心を持つ場合は、従来の差分法や有限要素法に基づく原子炉解析コードに広く用いられている中性子源反復法を使うのが便利である。中性子源反復法は、原子炉解析分野での呼び方であるが、数値解析の立場では「べき乗法 (power method)」という用語<sup>(4)</sup>が一般的である。

まず、初期推定値として一様な中性子源分布  $S(\mathbf{r})=1.0$  を仮定する。明らかに

$$V_c = \int_{\Omega} S(\mathbf{r}) d\Omega \quad (6-13)$$

なる量は原子炉体積を表す。この中性子源分布を用いて境界要素法により領域  $\Omega$  内部の中性子束分布が計算できる。計算で得られた中性子束分布により、新しい中性子源分布

$$G(\mathbf{r}) = \sum_g (\nu \Sigma_f)_g \phi_g(\mathbf{r}) \quad (6-14)$$

が得られる。この時、実効増倍率は以下のように計算される。

$$k_{\text{eff}} = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}) d\Omega / V_c \quad (6-15)$$

この計算上の実効増倍率により、中性子源分布は次のように繰り返しによらず原子炉体積  $V_c$  が一定となるように再規格化される。

$$S(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r}) / k_{\text{eff}} \quad (6-16)$$

この規格化された中性子源分布は中性子束計算に再び用いられ、収束判定条件を満足するまで計算が反復される。反復過程で境界上の中性子束・中性子流のうち未知のものを集めたベクトル  $\vec{x}$  は、中性子源の寄与ベクトル  $\vec{f}$  より

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{f} \quad (6-17)$$

のようにして求められるが、全体マトリクス  $\mathbf{A}$  は中性子源反復過程で不変なので新しい  $\vec{x}$  ベクトルは中性子源ベクトル  $\vec{f}$  を更新してだけで得られる。

中性子源反復法の最大の利点は、原子炉解析で豊富な実績を有していることである。最大固有値へ安定に収束することは経験上よく知られている。また、零行列式サーチの場合と異なり、計算上得られた固有値の真偽について解析者自身が判定を行う必要は一般に生じない。

#### 参考文献

1. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," *Journal of Nuclear Science and Technology*, 22[7], 565 (1985).
2. Koskinen, H., "Generalized Potential Theory for Multi-Group Diffusion in a General Multi-Region Reactor," *Proceedings of the Third International Conference of the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol.4, p.67, U.N. (1965).
3. Dixon, L.C.W., "Nonlinear Optimisation", English University Press (1972).
4. Wachspress, E.L., "Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics", Prentice-Hall (1966).

## 第7章 境界要素法による基本テスト計算

第6章までは、中性子拡散方程式を境界要素法で解くために必要な種々の基本的な技法について記述した。これらの技法の妥当性を実証する目的で、本章ではいくつかの基本例題について行ったテスト計算の結果を示す。

第7.5節では3次元問題を取り上げるが、それ以外は2次元問題についてテスト計算を行っている。2次元計算のために2種類のテスト・プログラム BEM2DB-A と BEM2DB-B を試作した。両プログラムの違いは固有値探索の方法にあり、BEM2DB-A では行列式サーチにより、BEM2DB-B では核分裂中性子源項を領域積分で与え中性子源反復により実効増倍率を求めている。BEM2DB-B は一様な固定中性子源の問題も解くことができる。BEM2DB-A と BEM2DB-B に使われている計算手法を各々、BEM(A) 及び BEM(B) のように区別することにする。

境界要素法による計算結果と比較するために、差分法プログラム CITATION<sup>(1)</sup> と有限要素法プログラム FEM2DJ<sup>(2)</sup> による計算を適宜行った。CITATION は汎用中性子拡散プログラムとして広く使われているが、FEM2DJ は本章の目的のために特に試作されたものである。FEM2DJ プログラムの主な使用を Table 7-1 に示す。

Table 7-1 Specifications of FEM2DJ program

Classification	Two-dimensional finite element program based on Galerkin-type scheme
Finite elements	Isoparametric elements with approximated function $\phi(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2$
Nodal points	Eight points on the boundary of an element
Solution techniques for linear equations	Gauss elimination
Eigenvalue search	Source iteration (Power method)
Acceleration technique	Not used

7.1 例題 1 : 単一正方形領域に対するテスト計算

一辺が 100cm の均質な正方形領域についてテスト計算を行った<sup>(3)</sup>。この領域の外周で中性子束が零の境界条件を設けたとき、中性子束の解析解は

$$\phi(x,y) \propto \sin\left(\frac{\pi}{100}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{100}y\right) \quad (7-1)$$

のように与えられる。この時の幾何学的バックリング  $2(\pi/100)^2$  に材料バックリングが一致するように、核定数を  $D=1.0(\text{cm})$ ,  $\Sigma_a=0.01(\text{cm}^{-1})$ ,  $\nu\Sigma_f=0.0119739(\text{cm}^{-1})$  と定めれば、実効増倍率の厳密解は  $k_{\text{eff}}=1.0$  となる。

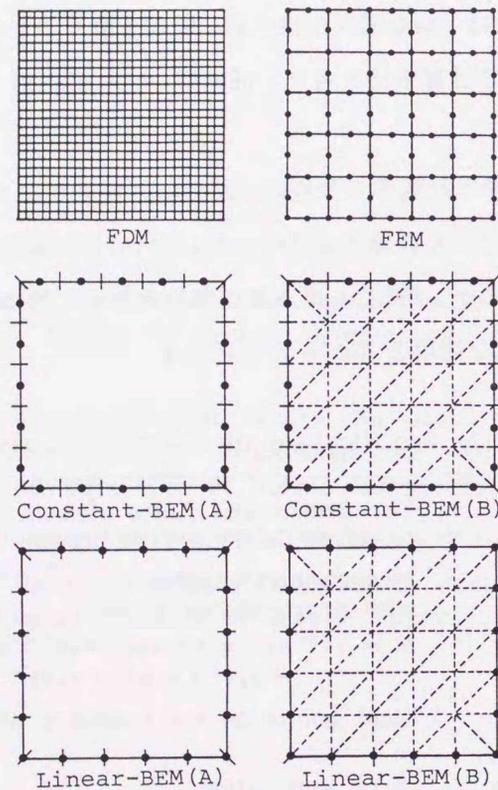


Fig.7-1 Examples of segmentations for FDM, FEM, BEM(A) and BEM(B)

差分法 (FDM), 有限要素法 (FEM) 及び境界要素法 (BEM(A) と BEM(B)) による離散化モデルの例を Fig.7-1 に示す。差分法と有限要素法では、領域を各々、正方形のメッシュ及び有限要素に等分割した。有限要素法では、個々の有限要素の境界に 8 個の節点を設けた。境界要素法 (BEM(A) と BEM(B)) では正方形の各辺を等分割し、BEM(B) の場合

はさらに領域内部を領域積分のための小三角形のセルに分割した。境界要素法で 1 次要素 (linear element) を用いる場合は正方形のかど点にも節点がとられる。この位置の特異点パラメータ  $\tilde{\alpha}_i$  の値は 0.25 となる。BEM(A) における固有値探索には、第 6.1 節に述べた零行列式サーチを用いた。この場合、まず、 $0.95 \leq k_{\text{eff}} \leq 1.05$  の範囲で等間隔に 11 個のサンプリング値について行列式の値を求めて  $k_{\text{eff}}$  の最適な試行値を選んだ後、Newton 法による  $k_{\text{eff}}$  の探索を行っている。

個々の方法による計算結果の要約を Table 7-2 に示す。BEM(A) では未知数の数が最も少ないにもかかわらず良好な精度が得られており、計算時間は有限要素法よりも短い。BEM(B) は、核分裂中性子源に関する領域積分のために計算時間が長くかかっているが、必要な計算機容量 (Program length) は BEM(A) と同程度であり有限要素法に比べてかなり少ない。4 種類の境界要素計算による中性子束分布の結果と差分法、有限要素法による結果及び解析解との比較を Table 7-3 に示す。これらの結果は、差分法では 2,601 個のメッシュ点、有限要素法では有限要素 100 個に 341 節点を用いた場合のものであり、境界要素法では 4 種類とも 40 個の境界要素を用いた計算結果を掲げている。1 次要素を用いた BEM(A) では、一定要素を用いた BEM(A) と比べて必要計算機容量、実行時間にほとんど差がないにもかかわらず、中性子束分布と実効増倍率の計算精度が改善されている。しかし、BEM(B) の場合は、一定要素と 1 次要素とで結果の精度に大差がない。これは、BEM(B) の計算精度がほとんど核分裂中性子源に関する領域積分の精度に支配されるためと考えられる。

BEM(B) の計算精度を向上させるためには、領域内部のセル分割数を増やすか、第 3.3 節で示した中性子源分布の内挿多項式 (3-15) の次数を上げるなどの対策が考えられる。しかし、これらは計算時間を有限要素法に比べても相当長いものにしてしまう (この場合、第 3.4 節末尾に述べた理由により、必要計算機容量は大きく増えないが) ので、効率的計算法としての境界要素法の魅力を半減させることになる。一方で、実効増倍率を求めるために BEM(B) が用いている中性子源反復法は BEM(A) の零行列式サーチに比べて、はるかに扱いやすいものである。もしも BEM(B) において核分裂中性子源に関する項が境界積分で与えられれば、中性子源反復法に基づく理想的な境界要素法プログラムを開発することができる。第 9 章以降で後述する、核分裂中性子源に関する領域積分を等価な境界積分に変換する方法の研究はこのようなことが動機となっている。

Table 7-2 Summary of test calculation results for Example 1

Method	Number of variables	Program length (bytes)	Eigenvalue ( $k_{eff}$ )	Number of iterations*	Execution time (s)**
FDM	441 (mesh points)	293K	1.000361	28	1.19
	1,681	342K	1.000086	38	4.62
	2,601	409K	1.000053	35	6.54
FEM	96 <sup>a</sup> (nodal points)	188K	0.999950	17	6.86
	225 <sup>b</sup>	552K	0.999948	18	30.31
	341 <sup>c</sup>	1,084K	0.999987	19	106.33
Constant-BEM(A)	20 (BEs)	104K	1.000442	19	1.30
	32	120K	1.000099	23	3.59
	40	132K	1.000049	25	5.98
Constant-BEM(B)	20 <sup>d</sup> (BEs)	124K	0.999480	18	14.75
	32 <sup>e</sup>	148K	0.999875	19	80.57
	40 <sup>f</sup>	172K	0.999904	19	182.33
Linear-BEM(A)	20 (BEs)	104K	1.000262	17	1.25
	32	120K	1.000061	18	3.03
	40	132K	1.000030	19	4.92
Linear-BEM(B)	20 <sup>d</sup> (BEs)	124K	0.999381	18	15.05
	32 <sup>e</sup>	152K	0.999835	19	82.49
	40 <sup>f</sup>	172K	0.999888	19	185.91

\* Convergence criteria:  $\Delta k/k \leq 10^{-7}$  for BEM(A);  $\Delta k/k \leq 10^{-7}$  for other methods.

\*\* Utilizing the HITAC H-8690 computer.

a,b,c: 25,64,100 finite elements were used, respectively.

d,e,f: 50,128,200 cells were used for domain integrals, respectively.

Table 7-3 Comparison of values of flux distribution for Example 1

(x,y) (cm,cm)	Analytic value	Percentage deviation from the analytic values					
		FDM	FEM	Constant elements		Linear elements	
				BEM(A)	BEM(B)	BEM(A)	BEM(B)
(10,10)	0.0955	0.00	0.00	0.21	-0.21	0.10	-0.21
(10,20)	0.1816	0.06	0.06	0.11	0.00	0.06	0.00
(10,30)	0.2500	0.04	0.00	0.08	-0.04	0.04	-0.08
(10,40)	0.2939	0.03	0.00	0.07	0.10	0.03	0.07
(10,50)	0.3090	0.03	0.00	0.06	0.00	0.03	-0.03
(20,20)	0.3455	0.03	0.00	0.03	-0.09	0.03	-0.09
(20,30)	0.4755	0.04	0.02	0.04	0.11	0.02	0.08
(20,40)	0.5590	0.04	0.02	0.02	-0.02	0.02	-0.02
(20,50)	0.5878	0.02	0.00	0.02	0.12	0.02	0.12
(30,30)	0.6545	0.06	0.00	0.02	-0.02	0.02	-0.02
(30,40)	0.7694	0.00	0.01	0.01	0.13	0.01	0.13
(30,50)	0.8090	0.02	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00
(40,50)	0.9045	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
(40,50)	0.9511	-0.01	0.00	0.00	0.14	0.00	0.14
(50,50)	1.0	-	-	-	-	-	-

7.2 例題 2 : 水減速材の正方形格子中に燃料棒のある問題

不規則幾何形状を有する問題に対する境界要素法の有用性を実証するために、Fig.7-2 に示すような水減速材の正方形格子中に燃料棒のある問題を考える<sup>(3)</sup>。減速材領域に一樣な熱中性子源  $S_M$  を仮定すれば、この格子中の熱中性子束分布は 1 群中性子拡散方程式

$$D_F \nabla^2 \phi_F - \Sigma_F \phi_F = 0, \quad (\text{燃料棒領域})$$

$$D_M \nabla^2 \phi_M - \Sigma_M \phi_M + S_M = 0 \quad (\text{減速材領域}) \quad (7-2)$$

で近似できる<sup>(4)</sup>。ここで、添字 F と M は、各々、燃料棒領域と減速材領域を表す。燃料棒領域の核定数を  $D_F = 0.5596(\text{cm})$ ,  $\Sigma_F = 0.2166(\text{cm}^{-1})$ , 減速材領域に対する核定数を  $D_M = 0.2582(\text{cm})$ ,  $\Sigma_M = 0.0108(\text{cm}^{-1})$  及び  $S_M = 1.0(\text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1})$  と定める。

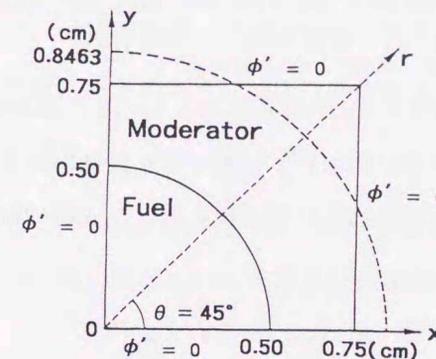


Fig.7-2 Problem specifications of Example 2

この問題を差分法、有限要素法及び 1 次要素による境界要素法で解いた。Fig.7-3 に有限要素分割と境界要素分割を図示する。差分法では二つの領域の曲線境界を階段状のジグザク線で近似し、合計 32x32個のメッシュ格子に分割した。このように四角の中に丸のあるような不規則幾何形状の問題を差分法や有限要素法で解こうとする時は、面倒な領域分割を避けることができない。これに対して境界要素法では、Fig.7-3 に見られるように境界のみを離散化するだけでよい。減速材領域における一樣中性子源に対しては、第 4 章の式(4-7)による境界積分表示が使えるので領域内部をセル分割する必要がない。

ここで用いた 1 次の境界要素に関連して特殊な問題が生じる。Fig.7-3(b) で示す点 'a' と 'b' では、各々、減速材領域に属するとみなすか燃料領域に属するとみなすかにより法線方向中性子流の値が 2 通り取り得る。したがって、点 'a' と 'b' についてモデル化を工夫しないと正しい解が得られない。この問題を避けるために、Fig.7-3(b) で図示するよう

に、問題のかど点の近傍に2つの境界要素節点を2個、互いに限りなく接近させて置き、それぞれの点が異なる領域境界に属するように定義する方法<sup>(5)</sup>が通常採られる。実際には、2個の境界要素節点が全く同一の座標であっても不都合は生じない。

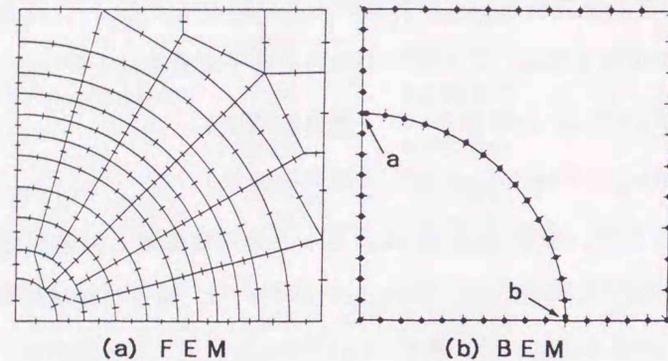


Fig.7-3 Segmentations for FEM and BEM for Example 2

計算結果を Table 7-4 に要約する。Fig.7-4 は、Fig.7-2 における  $\theta=45^\circ$  の線に沿った中性子束分布を比較している。Fig.7-2 における水減速材の正方形格子を面積等価な円筒形セル（等価半径  $r_m \sim 0.8463\text{cm}$ ）に置き換えれば、式(7-2)に対する解析解が

$$\begin{aligned} \phi_F(r) &= aI_0(k_F r), \\ \phi_M(r) &= cK_0(k_M r) + gI_0(k_M r) + S_0/\Sigma_M \end{aligned} \quad (7-3)$$

のように与えられる。ここに  $k_F^2 = \Sigma_F/D_F$ ,  $k_M^2 = \Sigma_M/D_M$  である。Fig.7-4 では、この円筒化セルについて境界要素解析を行った結果についても図示しており、結果は式(7-3)による解析解と良く一致している。

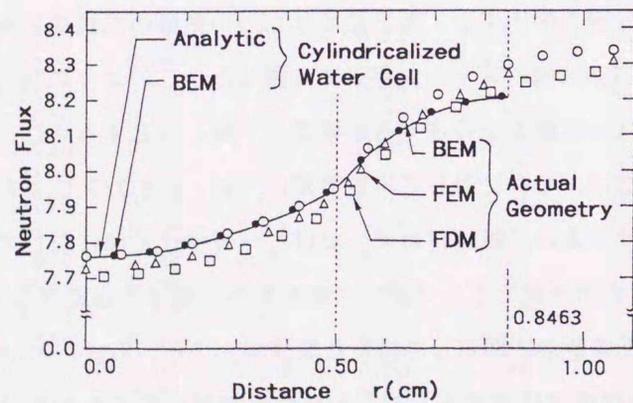


Fig.7-4 Calculation results of flux distribution for Example 2

Table 7-4 Summary of test calculation results for Example 2

Geometry	Method	Segmentation	Program length (bytes)	$\bar{\phi}_M/\bar{\phi}_F$	Execution time (s)*
Actual	FDM	32×32 mesh points	319K	1.038	2.46
	FEM	66 finite elements 229 nodal points	636K	1.039	2.69
	Linear-BEM	68 boundary elements (84 variables)	220K	1.040	1.87
Cylindricalized water cell	Linear-BEM	68 boundary elements (84 variables)	220K	1.038	1.72
	Analytical	—	—	1.036	—

\* Utilizing the HITAC H-8690 computer.

Table 7-4 では、損失因子(disadvantage factor)  $\bar{\phi}_M/\bar{\phi}_F$  の値も比較している。ここに  $\bar{\phi}_M$  及び  $\bar{\phi}_F$  は、各々、減速材領域及び燃料領域の平均中性子束である。境界要素法ではこれらの平均中性子束を、以下のように法線方向中性子流の境界積分

$$\bar{\phi}_M = \left( S_M - \int_{\Gamma_M} J d\Gamma / A_M \right) / \Sigma_M, \quad \bar{\phi}_F = - \int_{\Gamma_F} J d\Gamma / (\Sigma_F A_F) \quad (7-4)$$

から容易に計算できる。ここで  $A_M$  及び  $A_F$  は、各々、減速材領域及び燃料領域の面積である。式(7-4)は式(7-2)に対して Gaussの発散定理を適用すれば容易に得られる。

### 7.3 例題3：無限反射体に囲まれた2次元2群2領域炉心の問題

Fig.7-5 に示すように、2領域炉心が無限に広い水反射体に取り囲まれている問題を考える<sup>(3)</sup>。反射体の効果を取り扱うため、エネルギー2群の中性子拡散方程式を解く。各領域の核定数は Table 7-5 のように与えられている。BEM(B) の手法を取り入れて実効増倍率を求めるためには、炉心領域に対しては核分裂中性子源に関して領域積分が必要である。一方、減速中性子源は境界積分で表現できるので、反射体領域についてはセルに分割する必要がない。炉心領域に関する境界積分は炉心の核定数を使って反時計回りに、反射体領域に関する境界積分は反射体核定数を使って時計回りに、ともに炉心/反射体境界に沿って実行する。ところで第5.1節の後半で述べたように、基本解が無限遠で零になるという性質から反射体無限遠境界に関して境界積分は不要である。それにもかかわらず反射体内のいかなる位置の中性子束も式(3-18)を使って計算できる。これは境界要素解析の大きな利点のひとつである。

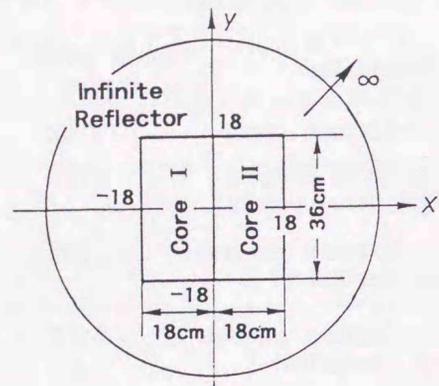


Fig.7-5 Problem specifications for Example 3

Table 7-5 Nuclear constants used in Example 3

Region	Group	D (cm)	$\Sigma_a$ (cm <sup>-1</sup> )	$\Sigma_{t2}$ (cm <sup>-1</sup> )	$\nu \Sigma_f$ (cm <sup>-1</sup> )
Core I	1	1.188	0.008179	0.02503	0.005383
	2	0.2939	0.1008	-	0.1310
Core II	1	1.193	0.008801	0.02422	0.006387
	2	0.2979	0.1079	-	0.1606
Reflector	1	1.174	0.0007454	0.05703	0.0
	2	0.1563	0.01885	-	0.0

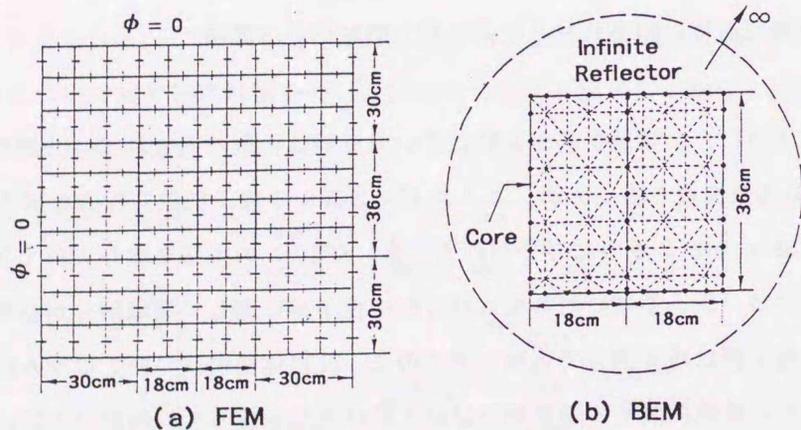


Fig.7-6 Segmentations for FEM and BEM(B) for Example 3

1次要素を用いた境界要素解析 (linear-BEM(B)) のほかに、ここでも差分法と有限要素法による比較計算を行った。Fig.7-6(a),(b) に各々、有限要素法と境界要素法の離散化モデルを示す。Fig.7-6(b)では境界要素分割のほかに炉心領域内部のセル分割を破線で

示している。差分法と有限要素法では、無限反射体を厚さ 30cmの反射体に置き換えて計算した。差分法では合計 104×103個のメッシュ点を設けた。

実効増倍率の計算結果等を Table 7-6 に要約し、Fig.7-5 中の x-軸上 (y=0) に沿った2群中性子束分布を Fig.7-7 に示す。反射体ピーク付近の中性子束分布を見ると、有限要素法による結果は誤差が大きい。この理由は、所望の精度を得るには Fig.7-6(a) に示す粗さの有限要素分割では十分でなかったためと考えられる。これに対して、差分法と境界要素法とでは中性子束分布が良く一致しており、実効増倍率の相対偏差も 0.08%程度である。境界要素解析の結果は有限要素解析のそれよりも高精度であるが、Table 7-6 に示すように境界要素解析に要した計算機容量は有限要素法の約1/4 に過ぎない。有限要素法における誤差の発生要因は反射体のモデル化にある。境界要素法ではこの部分を領域分割せずに厳密な境界積分に変換していることが高精度解を得た理由と考えられる。

Table 7-6 Summary of test calculation results for Example 3

Method	Number of variables	Program length (bytes)	Eigenvalue ( $k_{eff}$ )	Number of iterations*	Execution time (s)**
FDM	104×103 mesh points	844K	0.94387	57	78.1
FEM	100 finite elements 341 nodal points	1,208K	0.95644	17	172.3
Linear-BEM(B)	47 boundary elements 160 cells (94 variables)	300K	0.94464	18	134.5

\* Convergence criteria:  $\Delta k/k \leq 10^{-5}$ .

\*\* Utilizing the HITAC H-8690 computer.

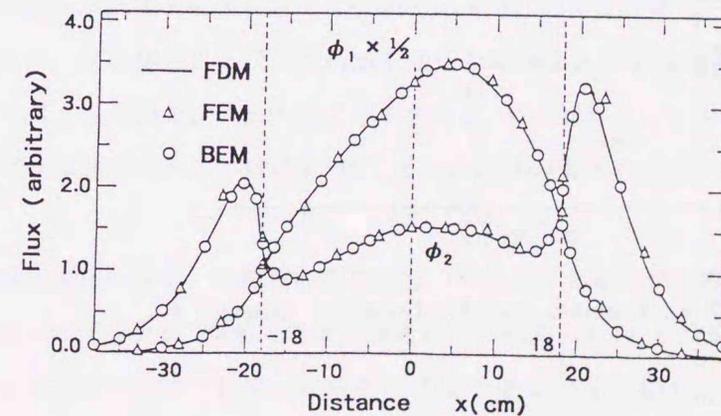


Fig.7-7 Calculation results of flux distribution for Example 3

7.4 例題4：反射体と炉心隔板を含むエネルギー3群2次元の問題

Fig.7-8 は、ある小型加圧水型軽水炉 (PWR) の水平断面を描いたものである<sup>(6)</sup>。この問題では、起動用中性子源 (start-up source) 及びその被覆管等は均質な吸収体として扱う。また、炉心槽 (core barrel)、熱遮蔽板、圧力容器等、炉心を同心円状に囲む構造材は単一の領域に均質化する。さらに、炉内の核分裂中性子源の分布は一様であると仮定する。Fig.7-8 の2次元平面におけるエネルギー3群の中性子束分布を求める。個々の領域の3群核定数を Table 7-7 に示す。Fig.7-8 に示すような複雑な幾何形状に対しては x-y 座標等に基づく差分法の適用は困難である。これに対して、境界要素法はこのように直角形状や円形状の混在する問題を容易に取り扱うことができる。

反射体中の熱中性子束分布は、炉心隔板 (baffle plate) の強い熱中性子吸収により大きく影響される。ここでは第5.2節に述べたように炉心隔板を薄い帯状領域とみなし、炉心隔板をはさんで炉心と反射体領域を中性子束分布の1次元解析解を用いて接続する。一般の多領域問題では炉心隔板の両側の中性子束と中性子流が未知数となるが、この手法により片側の未知数を全て消去することができる。

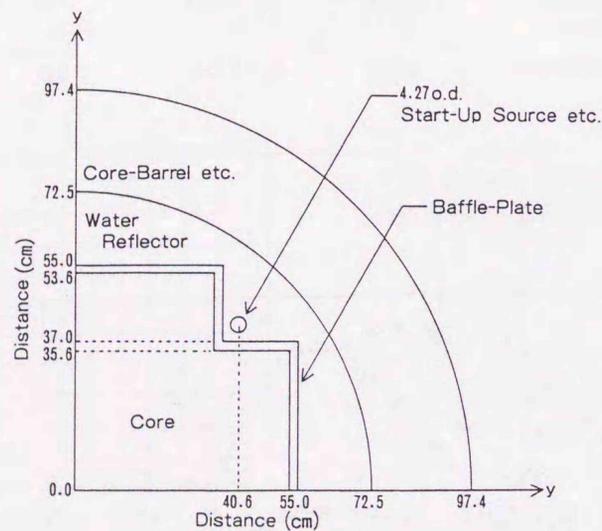


Fig.7-8 Problem specifications for Example 4

Table 7-7 Nuclear constants used in Example 4

Region	Group	D (cm)	$\Sigma_a$ (cm <sup>-1</sup> )	$\Sigma_{g \rightarrow g+1}$ (cm <sup>-1</sup> )
① Core	1	1.70	0.003	0.04
	2	0.75	0.028	0.06
	3	0.35	0.13	—
② Baffle plate	1	1.30	0.0001	0.001
	2	0.40	0.012	0.004
	3	0.30	0.165	—
③ Water reflector	1	2.00	0.0004	0.06
	2	0.75	0.0207	0.12
	3	0.25	0.010	—
④ Start-up source etc.	1	4.16	0.003	0.009
	2	1.28	0.0028	0.013
	3	0.83	0.033	—
⑤ Core barrel etc.	1	1.05	0.001	0.017
	2	0.31	0.016	0.038
	3	0.26	0.133	—

Constant axial buckling  $B_z^2 = 2.0 \times 10^{-3}$  is given for all regions and energy groups.

[3領域モデルによる計算]

境界要素解を差分法による計算結果と直接比較できるように、ここではまず、与えられた問題を炉心、炉心隔板及び無限反射体の3領域のみからなる簡単な問題に置き換えて考える。このため、Table 7-7 に示す ④中性子源等の領域と ⑤炉心槽等の領域に対する核定数は ③水反射体の核定数に置き換える。修正された問題に対して、3通りの計算を行った。第1は CITATION プログラム<sup>(1)</sup>による差分計算であり、第2は炉心隔板の両側に境界要素を定義した通常の境界要素法 (standard BEM) による計算である。第3も境界要素計算であるが、炉心隔板に1次元解析解を適用して炉心と反射体領域を接続する第5.2節に述べたモデルを用いた。Fig.7-8 に示す体系は 45° 対称 (1/8 対称) なので、第2と第3の境界要素計算に対しては第3.5節に述べた鏡像の考え方をういて未知数の数を減らした。

通常の境界要素法の場合、未知数の数は合計 168個としたが、炉心隔板に1次元解析解を適用したモデルでは合計 88個にはほぼ半減された。Fig.7-8 の  $\theta = 45^\circ$  の線に沿った中性子束分布を3通りの方法で計算した結果を Fig.7-9 に示す。炉心隔板に1次元解析解を適用したモデル (Present method と表記) では、その近似的取扱いにもかかわらず、十分容認できる精度の中性子束解が得られていることがわかる。

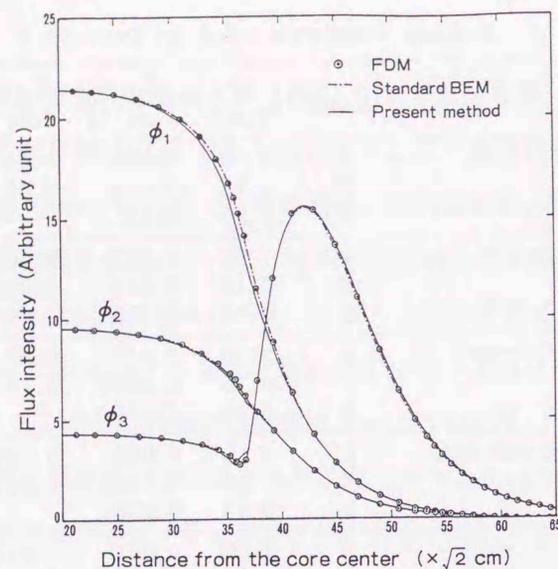


Fig.7-9 Three-zone flux calculation results for Example 4

[ 5 領域モデルによる計算 ]

今度は計算方法を「炉心隔板に1次元解析解を適用した境界要素法」に限定し、与えられた問題を Fig.7-10 に示す5領域のモデルで扱う。シェル状の領域⑤（炉心槽等）の外周で零中性子束の境界条件を与えている。ここでも鏡像を用いて 1/8 対称で計算した。このような不規則幾何形状の問題を差分法で解くのはかなり困難である。それに比べると境界要素法による離散化は極めて容易であり、ここで要した未知数の数は合計 145個に過ぎない。

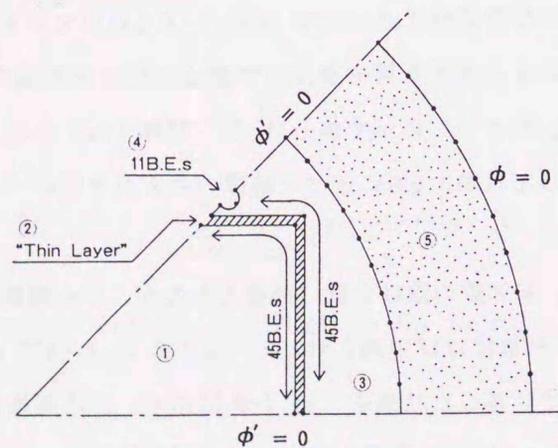


Fig.7-10 Five-zone calculation modelling for Example 4

Fig.7-10 の  $\theta = 45^\circ$  の線に沿った3群中性子束分布を Fig.7-11 に示す。前述の3領域モデルによる結果 (Fig.7-11 の1点鎖線, Fig.7-9 の実線に同じ) と比べると, 5領域モデルによる結果のうち反射体領域の熱(第3群)中性子束は大きく異なっている。これは, 5領域モデルでは炉心隔板の外側において水反射体のほかに炉心槽等の領域と中性子源領域を区別して扱ったためである。このように原子炉体系中の現実の不規則幾何形状を考慮した詳細な解析は, 压力容器表面の中性子照射量の評価や起動用中性子源の有効寿命の推定等に有用である。不規則幾何形状の解析を可能としたのは境界要素法そのものが持つ特質によるが, この解析モデルでは鏡像による対称性の考慮と炉心隔板への1次元解析の適用によって計算をさらに効率的なものにしている。

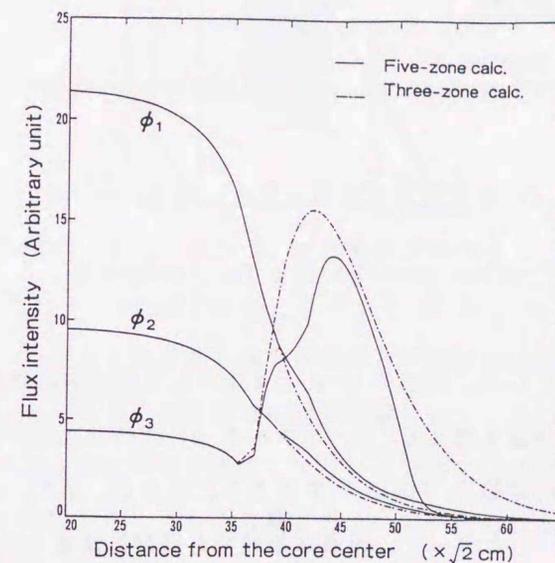


Fig.7-11 Five-zone and three-zone flux calculation results for Example 4

7.5 例題5：無限反射体に囲まれた3次元2群2領域吸収体の問題

境界要素法による技法に関する第6章までの記述は2次元モデルを中心としており, また, 前節までに取り上げた例題は全て2次元問題であった。しかしながら, 第6章までに記述した定式化はそのまま3次元問題にも適用できる。3次元問題における主要な変更点は, 境界要素として線要素のかわりに面要素が使われることと, 基本解が式(2-11)(2-12)のかわりに

$$\phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) \quad (B^2 = -k^2 < 0) \quad (7-5)$$

$$\phi_i^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi r} \exp(-iB|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|) \quad (B^2 > 0) \quad (7-6)$$

となることである。

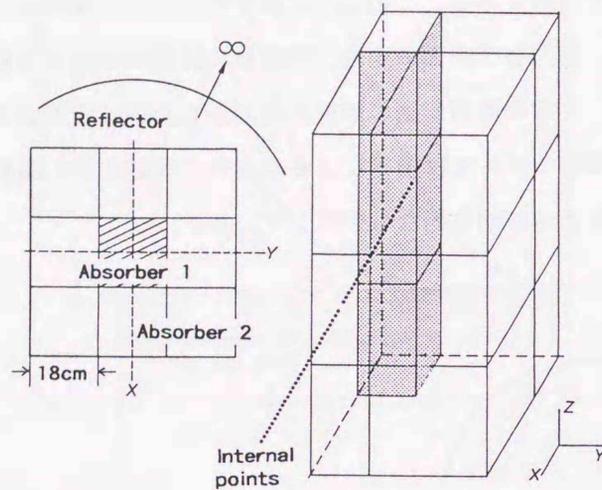


Fig.7-12 Problem specifications for Example 5

本節では3次元問題の例として、Fig.7-12に示すように2領域吸収体が無限に広い水反射体に取り囲まれている問題を考える<sup>(7)</sup>。エネルギー2群の3次元中性子拡散方程式を解くこととし、各領域の核定数をTable 7-8のように与える。また、両吸収体領域では一様中性子源を仮定する。したがって、吸収体領域でも反射体領域(減速中性子源)でも中性子源は全て第4章で述べた技法により境界積分で表現される。

Table 7-8 Nuclear constants used in Example 5

Region	Group	D (cm)	$\Sigma_a$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\Sigma_{t-2}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	S ( $\text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ )
Absorber 1	1	1.20	0.01	0.025	1.0
	2	0.30	0.11	-	0.0
Absorber 2	1	1.20	0.01	0.025	1.0
	2	0.30	0.10	-	0.0
Reflector	1	1.15	0.001	0.060	0.0
	2	0.15	0.02	-	0.0

境界要素分割モデルはFig.7-12の右側に示すとおりであり、合計22個の境界要素、各面要素に9個の節点を設けている。図中全ての境界で中性子束と中性子流の両方が未知

なため、未知変数の数は合計396個となる。

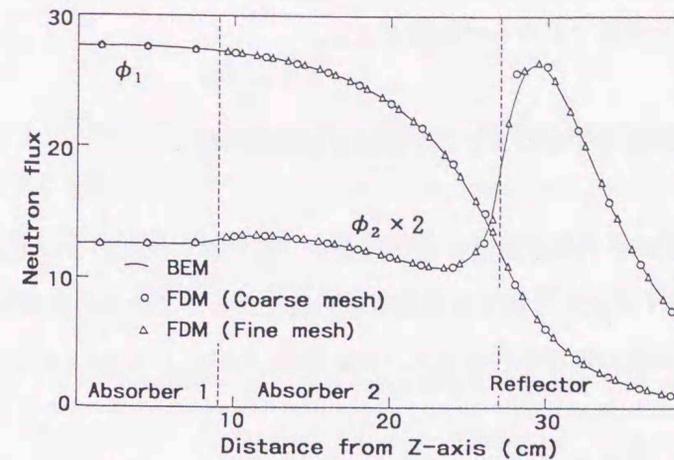


Fig.7-13 Calculation results of flux distribution for Example 5

Fig.7-12でプロットした内部点上の2群中性子束分布をFig.7-13に示す。実線が境界要素法による解、プロット○及び△は差分法プログラムCITATIONによる結果である。反射体領域でプロット○は2cm幅、プロット△は1cm幅のメッシュ分割を行っている。粗いメッシュによる差分法と境界要素法とでは反射体境界の近傍で若干の差異があるが、細かいメッシュによる差分法は境界要素法と良く一致している。このことは、差分法では安定な解を得るのにかなり細かくメッシュ分割する必要があるのに対し、境界要素法では境界要素の数が少なくても十分精度のよい解が得られることを示している。

Table 7-9 Summary of test calculation results for Example 5

Method	Segmentation	Program length (bytes)	Execution time (s)*
FDM(1)	22×22×36 =17,424 mesh points	2,248 K	100.3
FDM(2)	41×41×36 =60,516 mesh points	3,855 K	249.3
BEM	22 boundary elements (396 variables)	928 K	176.8

\* Utilizing the HITAC H-8690 computer.

Table 7-9はこの問題に対して差分法と境界要素法とで要したプログラム長(必要計算機容量)及び計算時間を比較したものである。差分法プログラムCITATIONでは、この間

題を解くのに 2~4 M-bytes を要しているのに対し、境界要素法では 1 M-byte 未満で済んでいる。このように、高精度の解を得るのに必要な未知数の数が僅かですむという境界要素法の利点は、3次元問題でとりわけ顕著となる。

### 7.6 例題 6：非線形最適化手法による 2次元固有値問題の解

第6.1.2節では、エネルギー多群問題を零行列式サーチで解く手法について述べた。ここでは、Fig.7-14 に示す 2次元 2群 2領域固有値問題に対してこの手法を適用する<sup>(3)</sup>。体系の周囲で中性子束が零の境界条件を与え、核定数は Table 7-10 のとおりとする。

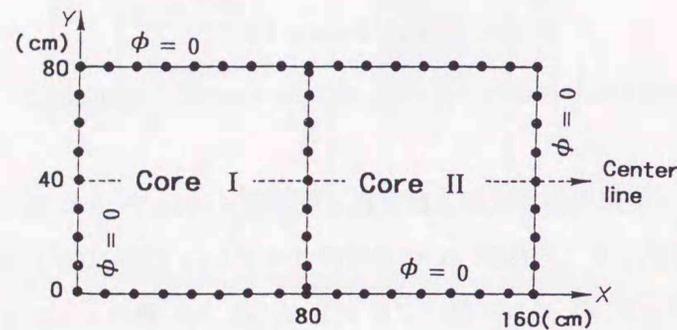


Fig. 7-14 Problem specifications of Example 6

Table 7-10 Nuclear constants used in Example 6

Region	Group	D (cm)	$\Sigma_a$ (cm <sup>-1</sup> )	$\Sigma_{1+2}$ (cm <sup>-1</sup> )	$\nu \Sigma_f$ (cm <sup>-1</sup> )
Core I	1	1.5	0.01	0.02	0.005
	2	0.4	0.095	-	0.135
Core II	1	1.5	0.01	0.02	0.005
	2	0.4	0.105	-	0.135

いま、2群問題を解いているから、2群拡散方程式から第1群の中性子束を消去して

$$(\nabla^2 + B_1^2)(\nabla^2 + B_2^2)\phi_2 = 0 \quad (7-7)$$

の因数分解形式を得る。個々の因数に基づく式

$$(\nabla^2 + B_j^2)f_j(\mathbf{r}) = 0 \quad (7-8)$$

が満たす空間モード  $f_j(\mathbf{r})$  から、第1群と2群の中性子束は線形結合

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^2 t_{gj} f_j(\mathbf{r}) \quad (g=1,2) \quad (7-9)$$

で表される。式(7-6)に対応する境界積分方程式を解くことによって個々の空間モードが得られる。中性子束と中性子流の連続条件から2領域問題を解くことができ、最終的に全体行列方程式

$$A(k_{\text{eff}}) \vec{x} = 0 \quad (7-10)$$

を解く。式(7-10)の解法には、第6.1.2節に述べた非線形最適化手法を用いる必要があり、ここでは「成功と失敗のルーチン (routine of success and failure)」<sup>(8)</sup>を用いた。

なお、境界要素計算には Fig.7-14 に節点配置を示す線形要素を使用し、境界要素数は合計 59個であるが、エネルギー2群構造などから、未知数は合計 172個となった。

Table 7-11 Summary of test calculation results for Example 6

Method	Number of variables	Program length (bytes)	Eigenvalue ( $k_{\text{eff}}$ )	Number of iterations*	Execution time (s)**
FDM	5,000 mesh points	525K	0.98585	86	54.0
FEM	128 finite elements 433 nodal points	1,690K	0.98533	50	981.2
Linear-BEM(A)	59 boundary elements (172 variables)	652K	0.98613	35	31.5

\* Convergence criteria:  $\Delta k/k \leq 10^{-7}$  for BEM(A),  $\Delta k/k \leq 10^{-5}$  for other methods.

\*\* Utilizing the HITAC H-8690 computer.

以上の方法による計算結果を Table 7-11 に要約する。また、Fig.7-14 の点線上の2群中性子束分布を Fig.7-15 に示す。境界要素法による計算結果は差分法、有限要素法による結果と比較的良好一致を示している。計算時間の点で境界要素法はかなり有利であるが、必要計算機容量が差分法の場合よりも大きく、境界要素法の利点が十分活かされていない。これは、2つのエネルギー群にまたがる境界積分の全てが式(7-10)の全体行列  $A$  の中に割り当てられ行列の構造が巨大化したためである。ただし、この行列中で零でない要素は約 20%を占めるに過ぎないので、ここで用いた Gauss消去法のかわりに、将来、より最適化された解法を採用できれば記憶容量を大幅に低減させることは可能である。

零行列式サーチの欠点は物理的に意味のある固有値に必ず収束する保証のないことである。一方、第6.2節で示した中性子源反復法では最大固有値である  $k_{\text{eff}}$  に収束することが知られており、またエネルギー群毎に行列方程式を立てるから、上述のような行列の巨大化の問題は生じない。第7.3節の例題3において BEM(B) では中性子源反復法を使って実効増倍率を求めた。そこでは核分裂中性子源項を領域積分で与えたが、これを等価な境界積分に変換できれば境界要素法と中性子源反復法の両方の利点が最大限に活かせる。第9

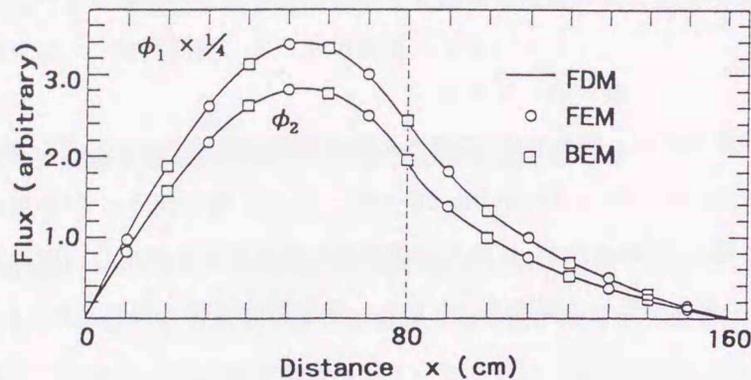


Fig. 7-15 Results of flux distribution for Example 6

章から第12章までに後述するのはこのような観点から行った研究の成果である。

#### 参考文献

1. Fowler, T.B. and Vondy, D.R., "Nuclear Reactor Core Analysis Code: CITATION," ORNL-TM-2496 (1969).
2. Kawamura, R., Private communications (1984).
3. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," Journal of Nuclear Science and Technology, 22[7], 565 (1985).
4. Glasstone, S. and Edlund, M.C., "The Elements of Nuclear Reactor Theory," Van Nostrand Co., New York (1952).
5. Brebbia, C.A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London (1978).
6. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems of a Thin Layer Sandwiched Between Two Zones," in Boundary Elements X II (Eds. Tanaka, M., Brebbia, C.A. and Honma, T.), Vol.1, p.227, Proceedings of the 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990, Computational Mechanics Publications, Southampton (1990).
7. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems," in Boundary Elements X (Ed. Brebbia, C.A.), Vol.2, p.45, Proceedings of the 10th Int. Conf. on BEM, Southampton, U.K., 1988, Computational Mechanics Publications, Southampton (1988).
8. Dixon, L.C.W., "Nonlinear Optimisation", English University Press (1972).

## 第8章 境界要素法の炉心/反射体境界条件の解析への応用

本章では、軽水型原子炉の炉心と反射体の境界におけるエネルギー依存、行列型の境界条件を決定するために境界要素法を応用する。また、炉心と反射体の間におかれているステンレス鋼製の炉心隔板を取り扱うのに、第5.2節で述べた薄い帯状領域を挟む問題に対する技法を用いる。境界要素法で得られた炉心/反射体境界条件が差分法による反射体を含めない炉心計算に引き渡される。ここに示すのは差分法と境界要素法の一種の結合計算といえる。本章に関連したさらに詳しい記述は著者による論文<sup>(1)(2)</sup>に与えられている。

軽水炉の水反射体は、炉内の出力分布と臨界性の両方に影響を与える。反射体中の中性子束分布の詳細が大きな関心事となることは少ないにもかかわらず、差分法を用いた原子炉解析では、通常、反射体領域に多数のメッシュ点を設定する必要がある。これに対し、計算時間と計算機容量を節約するために、反射体領域を解くかわりに炉心/反射体境界条件を与える手法<sup>(3)-(5)</sup>がしばしば採用される。これは単に計算の経済を図るためではなく、反射体領域のメッシュを節約することで炉心領域のメッシュ分割の細分化が可能となり、炉内の非均質性等の取扱をより精密にできるという側面がある。炉心/反射体境界条件の近似が粗ければ炉内中性子束の誤差を大きなものにするから、この境界条件を決定するためのモデルをいかに適切に与えるかは重要な課題となる。

Kalambokas と Henry<sup>(3)</sup>は、任意のエネルギー群の中性子束はその群の中性子流だけでなく、その群よりも高い群の中性子流にも依存するとする行列型の境界条件を提案している。3群構造を例にとると、その行列型境界条件は、

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{1n} \\ J_{2n} \\ J_{3n} \end{bmatrix}, \quad (8-1)$$

とかける。ここに、 $\phi_g$  及び  $J_{gn}$  は、各々、第  $g$  群の中性子束及び法線方向（領域の中から外へ向かう）中性子流である。1次元問題では、式(8-1)中の要素  $\alpha_{ij}$  は近似を施さずに解析的に与えられ、その値は反射体の材料組成のみに依存して炉心のそれには関係しない<sup>(5)</sup>。一方、2次元問題に対する  $\alpha_{ij}$  の厳密な解析解は明らかではない。

上記の境界条件を近似的に与える種々の試みが過去にみられる。Kalambokas と Henry はいくつかの近似の下で Kirchhoff 方程式から簡便な境界条件を導いた<sup>(3)</sup>。また、Chao と Suo は、境界中性子束ノード法を使って簡単なアルベド表式を導いた<sup>(4)</sup>。これらの方

法では、平面境界 (plane boundary) のほかに、Fig.8-1 に示すようなL字型、即ち、角が外側に凹 (outward concaving) の境界について表式を与えている。一方、Fig.8-1 中の逆L字型境界、即ち、角が外側に凸 (outward convexing) の境界に対する境界条件については、この時点では十分に調べられていなかった。後述するように  $\alpha_{ij}$  は逆L字型境界においても強い場所依存性を持つことが本研究の過程で明らかになっている。

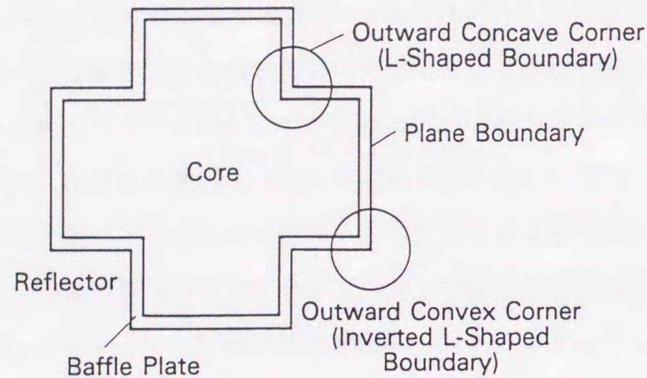


Fig.8-1 Various types of core/reflector boundaries

あらゆる種類の炉心/反射体境界に対して場所依存の境界条件を発生させるために、本章では境界要素法を活用する。炉心と反射体及び炉心隔板を含めた全体系に対して中性子拡散方程式を解く。この時、炉心領域は均質組成とし、炉心領域にのみ一様な高速中性子源があると仮定する。したがって実効増倍率を求めるための反復計算は行わない。この固定中性子源問題の境界要素解として境界上での中性子束と中性子流が得られ、これらから境界条件が組み立てられる。もちろん、この方法によっても境界条件の厳密解が得られるわけではない。しかし、このような簡単な仮定にもかかわらず、得られる行列型境界条件を設定した炉心部だけの差分計算は、後述するように極めて精度の高い中性子束分布と実効増倍率を与える。

### 8.1 群依存境界条件を与える行列の構造

ここでは、非増倍領域に接する境界上の群依存中性子束及び中性子流の関係について調べる。反射体のような非増倍領域に対してエネルギー3群の中性子拡散方程式は、

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1 + \Sigma_1 \phi_1 = \nabla \cdot J_1 + \Sigma_1 \phi_1 = 0 \quad (8-2a)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2 + \Sigma_2 \phi_2 = \nabla \cdot J_2 + \Sigma_2 \phi_2 = \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1 \quad (8-2b)$$

$$-D_3 \nabla^2 \phi_3 + \Sigma_3 \phi_3 = \nabla \cdot J_3 + \Sigma_3 \phi_3 = \Sigma_{2 \rightarrow 3} \phi_2 \quad (8-2c)$$

のようにかける。ここに、 $\phi_g$ 、 $J_g$ 、 $D_g$ 、 $\Sigma_g$  及び  $\Sigma_{i \rightarrow g}$  は、第  $g$  群の中性子束、中性子流、拡散係数、全断面積及び群移動断面積を表す。一方で、仮想的な斉次方程式の組

$$-D_1 \nabla^2 \phi_{10} + \Sigma_1 \phi_{10} = \nabla \cdot J_1 + \Sigma_1 \phi_{10} = 0 \quad (8-3a)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_{20} + \Sigma_2 \phi_{20} = \nabla \cdot J_2 + \Sigma_2 \phi_{20} = 0 \quad (8-3b)$$

$$-D_3 \nabla^2 \phi_{30} + \Sigma_3 \phi_{30} = \nabla \cdot J_3 + \Sigma_3 \phi_{30} = 0 \quad (8-3c)$$

を用意する。炉心/反射体境界上で中性子束と法線方向の中性子流の関係を便宜上、

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{1n} \\ J_{2n} \\ J_{3n} \end{bmatrix} \quad (8-4)$$

の行列形式で与える。n は法線方向を表す。また、式(8-3a)~(8-3c)に対応させて、

$$\begin{bmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \\ \phi_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{10n} \\ J_{20n} \\ J_{30n} \end{bmatrix} \quad (8-5)$$

を与えておく。拡散方程式(8-2a)~(8-2c)の中性子束解は、

$$\phi_1 = \phi_{10} \quad (8-6a)$$

$$\phi_2 = \phi_{20} + R_{21} \phi_{10} \quad (8-6b)$$

$$\phi_3 = \phi_{30} + R_{32} \phi_{20} + R_{321} \phi_{10} \quad (8-6c)$$

の形式をしている。ここで、

$$R_{21} = \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}/D_2}{1/L_2^2 - 1/L_1^2}, \quad R_{32} = \frac{\Sigma_{2 \rightarrow 3}/D_3}{1/L_3^2 - 1/L_2^2} \quad \text{及び} \quad R_{321} = \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}/D_2}{1/L_3^2 - 1/L_2^2} \cdot R_{21} \quad (8-7a)$$

であり、また

$$L_1^2 = D_1/\Sigma_1, \quad L_2^2 = D_2/\Sigma_2 \quad \text{及び} \quad L_3^2 = D_3/\Sigma_3 \quad (8-7b)$$

である。行列方程式(8-4)及び(8-5)中の対角要素  $\alpha_{ii}$  は、

$$\alpha_{11} = \phi_{10}/J_{10n} \quad (8-8a)$$

$$\alpha_{22} = \phi_{20}/J_{20n} \quad (8-8b)$$

$$\alpha_{33} = \phi_{30}/J_{30n} \quad (8-8c)$$

のように与えられ、ここに、

$$\phi_{10} = \phi_1, \quad (8-9a)$$

$$\phi_{20} = \phi_2 - R_{21}\phi_{10}, \quad (8-9b)$$

$$\phi_{30} = \phi_3 - R_{32}\phi_{20} - R_{321}\phi_{10} \quad (8-9c)$$

及び

$$J_{10n} = J_1, \quad (8-10a)$$

$$J_{20n} = J_2 - R_{21}J_{10n}(D_2/D_1), \quad (8-10b)$$

$$J_{30n} = J_3 - R_{32}J_{20n}(D_3/D_2) - R_{321}J_{10n}(D_3/D_1) \quad (8-10c)$$

である。非対角要素  $\alpha_{ij}$  ( $i \neq j$ ) は、上述の対角要素を使って

$$\alpha_{21} = R_{21}\{\alpha_{11} - \alpha_{22}(D_2/D_1)\}, \quad (8-11a)$$

$$\alpha_{32} = R_{32}\{\alpha_{22} - \alpha_{33}(D_3/D_2)\}, \quad (8-11b)$$

$$\alpha_{31} = R_{321}\{\alpha_{11} - \alpha_{33}(D_3/D_1)\} - R_{21}\alpha_{32}(D_2/D_1) \quad (8-11c)$$

と表すことができる。

境界条件を行列型式で与えるやり方には、式(8-4)の他に、いわゆる対数微分型

$$\begin{bmatrix} J_{1n} \\ J_{2n} \\ J_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (8-12)$$

やアルベド型の境界条件

$$\begin{bmatrix} J_1^- \\ J_2^- \\ J_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1^+ \\ J_2^+ \\ J_3^+ \end{bmatrix} \quad (8-13)$$

がある。式(8-12)の  $\beta_{ij}$  及び式(8-13)の  $a_{ij}$  は、式(8-4)の  $\alpha_{ij}$  を使って次のように変換できる。即ち、

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= 1/\alpha_{11} & (i=j), \\ \beta_{21} &= -\alpha_{21}/(\alpha_{11}\alpha_{22}), \\ \beta_{31} &= -(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31})/(\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}), \\ \beta_{31} &= -\alpha_{32}/(\alpha_{22}\alpha_{33}) \end{aligned} \quad (8-14)$$

または、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\alpha_{11} - 2}{2 + \alpha_{11}} & (i=j), \\ a_{21} &= \frac{4\alpha_{21}}{(2 + \alpha_{11})(2 + \alpha_{22})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{\alpha_{31}(2 + \alpha_{22}) - 4\alpha_{32}\alpha_{21}}{(2 + \alpha_{11})(2 + \alpha_{22})(2 + \alpha_{33})}, \\ a_{32} &= \frac{4\alpha_{32}}{(2 + \alpha_{22})(2 + \alpha_{33})} \end{aligned} \quad (8-15)$$

のように変換できる。

第8-3節に示す数値計算例では、式(8-12)で定義した対数微分形式の境界条件  $[\beta_{ij}]$  を採用する。行列要素  $\beta_{ij}$  を求める手順は以下の通りである。

- (i) 炉心、炉心隔板及び反射体を含む全体系について中性子拡散方程式を解き、炉心/反射体境界上の中性子束と法線方向中性子流を求める。
- (ii) 式(8-9a)~(8-10c)を使って中性子束と中性子流の斉次解を計算する。
- (iii) 式(8-8a)~(8-8c)を適用して行列の対角要素  $\alpha_{ii}$  を決定する。
- (iv) 式(8-11a)~(8-11c)を使って非対角要素  $\alpha_{ij}$  ( $i \neq j$ ) を計算する。
- (v) 式(8-14)を使って行列  $[\alpha_{ij}]$  をもう一つの形式の行列  $[\beta_{ij}]$  に変換する。

## 8.2 境界要素法による炉心、反射体及び炉心隔板の取扱

炉心/反射体境界の問題には、第5章で述べた2領域問題に対する技法が使える。炉心/反射体境界の問題の特殊性は、炉心領域が反射体領域に取り囲まれることであり、第5.1節に述べた理由により、炉心/反射体境界に対する行列方程式は

$$\begin{bmatrix} H^c & -G^c \\ H^R & G^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\phi}_1 \\ \vec{J}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{Q}^c \\ \vec{Q}^R \end{bmatrix} = 0 \quad (8-16)$$

のように簡単にかける。ここで、エネルギー群に関する添字は省略した。いま、中性子束と中性子流の連続性から、

$$\vec{\phi}_1 \equiv \vec{\phi}_1^c = \vec{\phi}_1^R, \quad \vec{J}_1 \equiv \vec{J}_1^c = -\vec{J}_1^R, \quad (8-17)$$

を与えることができる。ここで、添字の C と R は、各々、炉心と反射体を表す。

次に、Fig.8-2 に示すように炉心と反射体の間にステンレス鋼製の炉心隔板が挟まれている問題を取り扱うには、第5.2節で述べた薄い帯状領域を挟む問題に対する技法を応用することができる。炉心隔板の炉心側と反射体側に対する境界要素方程式は、

$$H^c \vec{\phi}_c - G^c \vec{J}_c + \vec{Q}^c = 0 \quad (\text{炉心側}) \quad (8-18a)$$

$$H^R \vec{\phi}_R - G^R \vec{J}_R + \vec{Q}^R = 0 \quad (\text{反射体側}) \quad (8-18b)$$

とかかれる。炉心領域の外周が全て炉心隔板及び反射体に取り囲まれているという事実から、式(5-6a)及び(5-6b)に比べて簡単な形式となっている。

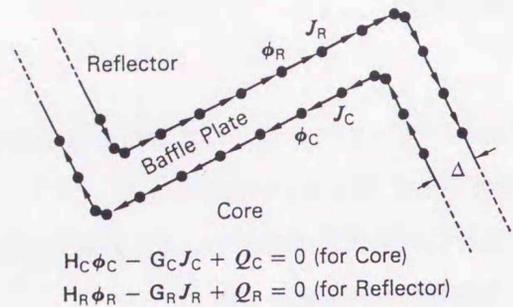


Fig.8-2 Baffle-plate treatment

炉心隔板の炉心側と反射体側のエネルギー依存中性子束及び中性子流を結び付けるために、第5.2節と同様に、エネルギー3群構造の場合、

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,R} \\ (-J_{1,R}) \\ \phi_{2,R} \\ (-J_{2,R}) \\ \phi_{3,R} \\ (-J_{3,R}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{O} \\ \mathbf{Z}_{31} & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,C} \\ J_{1,C} \\ \phi_{2,C} \\ J_{2,C} \\ \phi_{3,C} \\ J_{3,C} \end{bmatrix} \quad (8-19)$$

なる関係式が必要である。炉心隔板の厚さは十分薄いので1次元無限平板に近似することができるから、式(8-19)中の小行列は、第5.2節の式(5-8)と同一の定義が使える。

式(8-19)は任意のエネルギー群*i*について、

$$\begin{bmatrix} \phi_{i,R} \\ (-J_{i,R}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i & -\frac{L_i}{D_i} S_i \\ -\frac{D_i}{L_i} S_i & C_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i,C} \\ J_{i,C} \end{bmatrix} + \vec{E} \quad (i=1,2,3), \quad (8-20)$$

のように書きかえることができる。ここで、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0 & (i=1), \\ \vec{E} &= \sum_{k=1}^{i-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k,C} \\ J_{k,C} \end{bmatrix} & (i>1) \end{aligned} \quad (8-21)$$

である。式(8-20)の右辺では、 $\phi_{i,C}$ と $J_{i,C}$ だけが未知数であり、 $\vec{E}$ 中の他の中性子

束と中性子流は全て上方エネルギー群で計算された既知数である。式(8-20)を式(8-18b)に代入して $\phi_{i,R}$ と $J_{i,R}$ を消去すると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^C & -\mathbf{G}^C \\ C_i \mathbf{H}^R - \frac{D_i}{L_i} S_i \mathbf{G}^R & -\frac{L_i}{D_i} S_i \mathbf{H}^R + C_i \mathbf{G}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\phi}_{i,C} \\ \vec{J}_{i,C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{Q}^C \\ \vec{Q}^R + \vec{P}^R \end{bmatrix} = 0, \quad (8-22)$$

を得る。ここに、 $\vec{P}^R$ の定義は式(5-13)に与えたものと同一である。

### 8.3 炉心/反射体境界問題に対する解析手順

炉心/反射体境界の問題に対してここで提案する解析手順は、以下のとおりである。

(i) 炉心/反射体境界または炉心隔板の表面における中性子束と法線方向中性子流を境界要素法による簡単な計算から求める。炉心領域に対して以下の仮定を設ける。

- 均質な単一炉心領域であるとし、その核定数は炉心/反射体境界に接する燃料合体のものを用いる。

- 高速エネルギー群に対して一様な固定中性子源を仮定する。

境界積分方程式の非斉次ソース項は、炉心部に対しては第4章で述べた一様中性子源と減速中性子源の混在する場合の境界積分表示、即ち、式(4-18)または(4-20)で記述される。また、反射体に対しては、減速中性子源に関する境界積分表示である式(4-13)または(4-14)が利用できる。必要な入力データは、境界要素を定義する空間座標と、炉心、反射体及び炉心隔板の核定数のみである。境界のみを離散化すればよいので、領域内部をメッシュや有限要素などに分割する必要がない。さらに、無限反射体を仮定することで、反射体外部境界に沿った線積分が不要である。

(ii) 上記で求めた境界上の中性子束及び法線方向中性子流から行列型の境界条件 $[\alpha_{ij}]$ を式(8-8a)~(8-11c)を使って求める。境界条件 $[\alpha_{ij}]$ は $[\beta_{ij}]$ に変換できる。

(iii) 行列型境界条件を差分法による中性子拡散コードにあてはめて、反射体を含めない計算を実行する。この場合に、非対角要素 $\alpha_{ij}$ または $\beta_{ij}$ ( $i \neq j$ )は、文献<sup>(6)</sup>で記述されている技法を使うと通常の拡散コードでも容易に扱うことができる。

## 8.4 数値計算例及び議論

前節までに述べた技法の妥当性を検証するため、2種類の加圧水型原子炉（PWR）について解析を行った。

### 8.4.1 IAEA 2次元ベンチマーク問題

PWRをモデル化した IAEA 2次元ベンチマーク問題の仕様を Fig.8-3 に示す。炉心は、一辺が 20cm の正方形断面を持つ燃料集合体 177体からなり、厚さ 20cm の水反射体に囲まれている。この問題を記述する 2群核定数を Table 8-1 に示す。

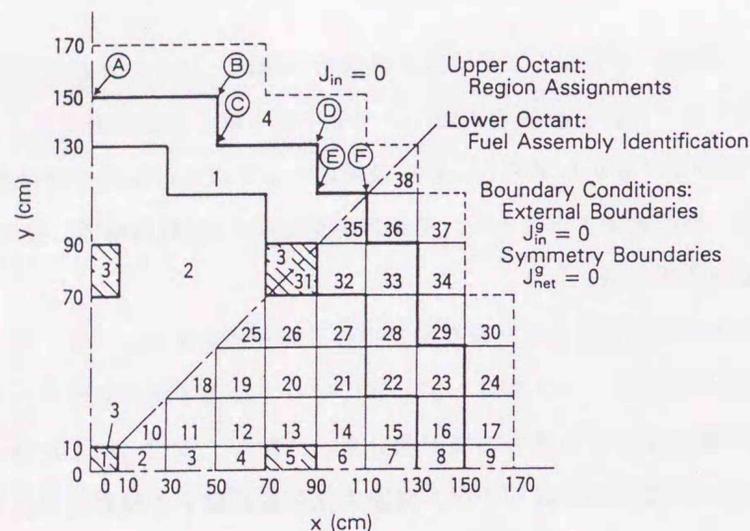


Fig.8-3 IAEA 2-D benchmark problem specifications

Table 8-1 Two-group constants for the IAEA 2-D benchmark problem

Region	Group	D (cm)	$\Sigma_a$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\Sigma_{g \rightarrow g+1}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\nu \Sigma_f$ ( $\text{cm}^{-1}$ )
1. Fuel 1	1	1.5	0.01	0.02	0.0
	2	0.4	0.08	—	0.135
2. Fuel 2	1	1.5	0.01	0.02	0.0
	2	0.4	0.085	—	0.135
3. Fuel 1 + rod	1	1.5	0.01	0.02	0.0
	2	0.4	0.13	—	0.135
4. Reflector	1	2.0	0.0	0.04	0.0
	2	0.3	0.01	—	0.0

Constant axial buckling  $B_z^2 = 0.8 \times 10^{-4}$  is given for all regions and energy groups.

炉心/反射体境界条件を計算するため、まず、均質な炉心領域と無限反射体からなる 2 領域問題を境界要素法で解いた。炉心領域について以下の仮定を設けた。

- 炉心全域は均質で、最外周の燃料集合体 (Fig.8-3 の領域 1) の核定数を持つ。
- 炉心全域にわたり高速中性子源が一様に分布する。

Fig.8-3 に示す原子炉は、 $45^\circ$  対称、即ち、1/8 炉心対称なので、未知数の数を減らすために第3.5節に示した鏡像の原理<sup>(7)</sup>が使える。境界積分は、わずか 150cm の経路にのみ適用し、全部で 90個の線形境界要素を使用した。

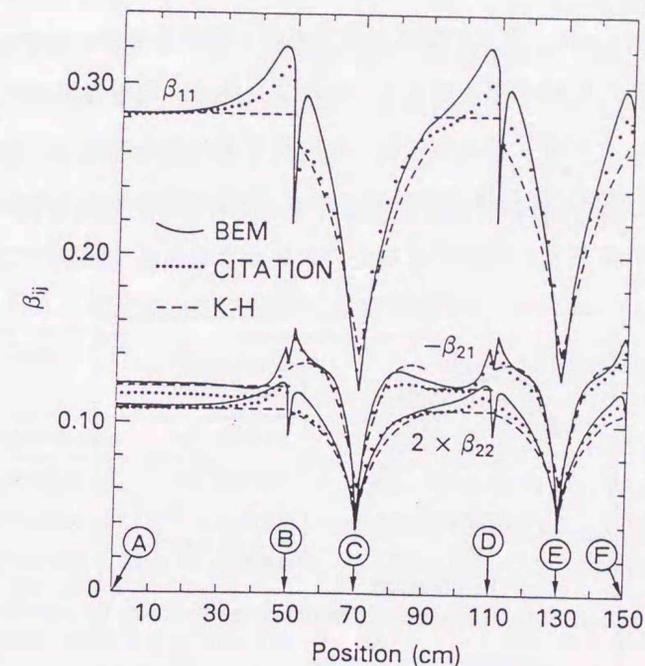


Fig.8-4 Space-dependent variation in core/reflector boundary conditions

差分法による計算には CITATION コード<sup>(8)</sup>を用いた。これによる基準計算 (Standard calculation) では、炉心と反射体の両方を等間隔 ( $\Delta x = \Delta y = 2.0\text{cm}$ ) にメッシュ分割した。比較のため、炉心/反射体境界条件をこの基準計算と Kalambokas と Henry の方法 (K-H 法)<sup>(3)</sup>でも求めた。Fig.8-4 は、これらの方法による境界条件  $\beta_{11}$ 、 $\beta_{21}$  及び  $\beta_{22}$  の場所依存性を、境界要素法による結果と比較している。Fig.8-4 の x 軸は、Fig.8-3 中の太線で示す境界に沿って A からの距離を示す。B と D は逆 L 字型 (outward convexing) のかど点、C と E は L 字型 (outward concaving) のかど点である。C と E の近傍では  $\beta_{ij}$  の計算値は、境界要素法、CITATION 及び K-H 法によって大きな差がない。これら

3通りの方法は、点④付近の平坦境界においてもほとんど同一の値を与える。しかしながら、逆L字型のかど点である⑧と⑨の近傍では、K-H法では $\beta_{11}$ の激しい変化をシミュレートできていない。境界要素法とCITATIONによる結果のみが⑧と⑨における鋭い凹みを示している。境界要素法による計算結果によれば、 $\beta_{11}$ 、 $\beta_{21}$ 及び $\beta_{22}$ の曲線は、いずれも⑧から④に向かう際に緩やかなピークを持ち、やがて減衰して、最後は平坦境界に対する値に一致する。⑨を中心とする曲線も同様の傾向を持つが、この場合、曲線は⑧と⑨におけるL字型境界においてK-H法やCITATIONによる結果と良く一致する。

反射体を解かず、上の3種の方法で求めた境界条件を使ってCITATIONによる簡易計算(Short calculation)を行った。3種の簡易計算とも炉心部のみを等メッシュ分割( $\Delta x = \Delta y = 2.0\text{cm}$ )した。Table 8-2に結果を比較する。K-H法に比べ、境界要素法による $k_{\text{eff}}$ は精度が良い。Fig.8-5は、 $\theta = 45^\circ$ の方向に沿った中性子束分布を比較している。K-H法による熱中性子束分布は、炉心/反射体境界付近で最大25%の誤差を生じたのに対し、境界要素法に基づく境界条件を与えた場合では炉心の大部分で誤差は3%以内である。

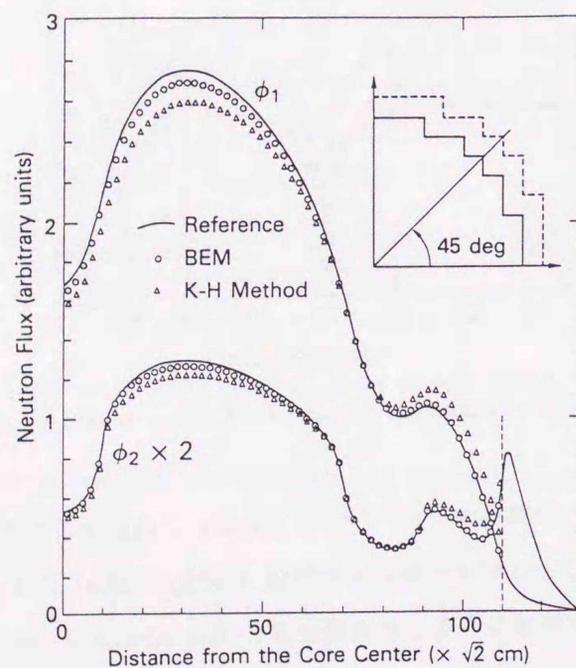


Fig.8-5 Flux distribution results along  $\theta = 45^\circ$  for IAEA 2-D problem. 'BEM' and 'K-H Method' indicate CITATION calculations based on boundary conditions generated using BEM and K-H method, respectively.

次に、元のIAEAベンチマーク問題に以下のような若干の修正(Perturbation)を加え

た新たな3通りの問題を考える。

修正(A): Fig.8-3中の領域1の制御棒を引き抜く(領域1の核定数をNo.3からNo.2に変更する)。

修正(B): 領域18の制御棒を挿入する(核定数をNo.2からNo.3に変更する)。

修正(C): 領域31の制御棒を引き抜く(核定数をNo.3からNo.1に変更する)。

元のIAEAベンチマーク問題向けに境界要素法で求めた炉心/反射体境界条件と同一の条件をこれらの修正ケースに対しても適用した。また、K-H法による境界条件を適用した計算も行い、基準計算と比較した。Table 8-2には、これらの修正計算の結果を併記してある。同一の境界条件下において、実効増倍率の計算精度は、修正(A)、(B)、(C)とも元のIAEA問題に対する場合と同程度であることがわかる。このことは、原子炉の運転形態が異なっても同一の境界条件を使ってよいことを示している。この理由は、反射体境界に近い炉心領域の材料組成は制御棒の動きによって大きく変化しないことによる。

Table 8-2 Critical eigenvalue comparisons for the IAEA 2-D problem

Case	Standard Calculation	Short Calculations	
		BEM	K-H
IAEA problem	1.02949	1.02983(0.033)	1.03053(0.101)
Perturbation A	1.03391	1.03414(0.022)	1.03462(0.068)
Perturbation B	1.01966	1.02029(0.062)	1.02154(0.184)
Perturbation C	1.03838	1.03891(0.051)	1.04012(0.168)

The values in parentheses show percentage deviations from the standard calculation results.

#### 8.4.2 炉心隔板を有する小型PWRの問題

第2の例題は、32体の燃料集合体からなる小型PWRである。炉心は厚さ1.4cmのステンレス鋼製の炉心隔板と水反射体に囲まれている。反射体も含めた基準計算のために、反射体の厚さは30cmとする。この原子炉の反応度は十字型の制御棒で制御されるが、ここでは、制御棒の挿入されていない平面に着目し、制御棒領域にはジルカロイ製のフォロワーが封入されていると仮定する。この炉心平面の領域区分をFig.8-6に示す。

この小型PWRの問題について、エネルギー3群の解析を行った。反射体を含めた基準計算(Standard calculation)と反射体を含めない簡易計算(Short calculation)の両方をCITATIONコードを用いて試みた。3群核定数をTable 8-3に示す。CITATIONによる差分計算におけるメッシュ分割をFig.8-6中に示す。

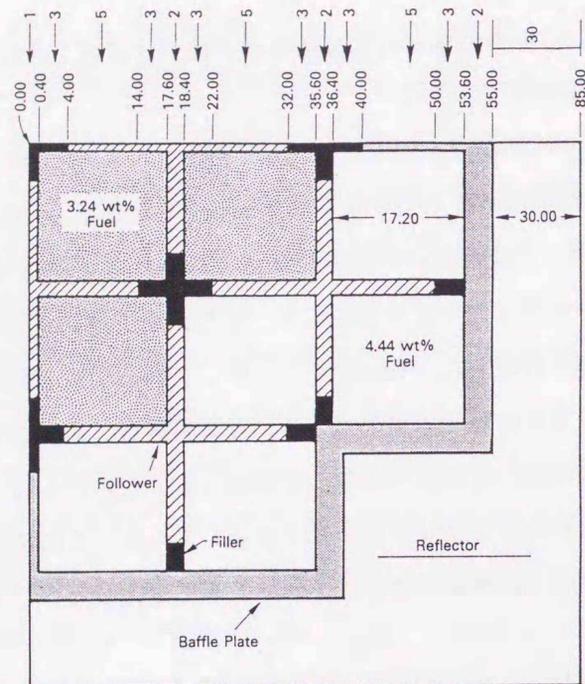


Fig.8-6 Problem specifications for a small PWR problem. All dimensions are in centimetres. The integers with arrows ←5 indicate that the interval was divided into 5 meshpoints for FDM calculations.

Table 8-3 Three-group constants for a small PWR problem

Region	Group (g)	D (cm)	$\Sigma_a$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\Sigma_{g \rightarrow g+1}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\nu \Sigma_f$ ( $\text{cm}^{-1}$ )
3.24% fuel	1	1.70	0.003	0.04	0.004
	2	0.75	0.025	0.06	0.013
	3	0.35	0.10	—	0.145
4.44% fuel	1	1.70	0.003	0.04	0.004
	2	0.75	0.028	0.06	0.018
	3	0.35	0.13	—	0.185
Filler	1	1.70	0.0004	0.06	0.0
	2	0.70	0.002	0.09	0.0
	3	0.29	0.026	—	0.0
Control rod follower	1	1.60	0.001	0.0006	0.0
	2	1.20	0.004	0.0006	0.0
	3	1.00	0.004	—	0.0
Baffle plate	1	1.30	0.0001	0.001	0.0
	2	0.40	0.012	0.004	0.0
	3	0.30	0.165	—	0.0
Water reflector	1	2.00	0.0004	0.06	0.0
	2	0.75	0.0007	0.12	0.0
	3	0.25	0.010	—	0.0

Constant axial buckling  $B_z^2 = 2.0 \times 10^{-3}$  is given for all regions and energy groups.

簡易計算における炉心/反射体境界条件は境界要素法から求めた。境界要素法では、炉心は濃縮度 4.44w/o の燃料のみからなる均質な単一領域とみなし、一様な高速中性子源を仮定した。エネルギー 3 群の境界要素法計算により、炉心と無限反射体に挟まれる炉心隔板の内側と外側表面の境界条件を計算した。CITATION コードを用いて、

ケース A: 炉心隔板の「内側」表面に境界条件を設定、

ケース B: 炉心隔板の「外側」表面に境界条件を設定、

の 2 通りの簡易差分計算を実行し、その計算結果を基準計算の結果と比較した。

Fig.8-7 に、ケース A による簡易計算と基準計算による中性子束分布 (Fig.8-7 の右上の燃料体配置中に示す破線に沿った分布) を示す。この分布の数値を Table 8-4 に掲げ、ケース B による簡易計算結果も併せて示す。ケース A とケース B による中性子束の誤差 (基準計算からの偏差) は、炉心の大部分で 0.3% 以内である。炉心隔板近傍で数%の誤差を生じているが、炉心中心から 49.0cm 以内、即ち、炉心隔板の内側から 5cm 離れた場所では、誤差は 1%以下である。実効増倍率の比較を Table 8-5 に示す。

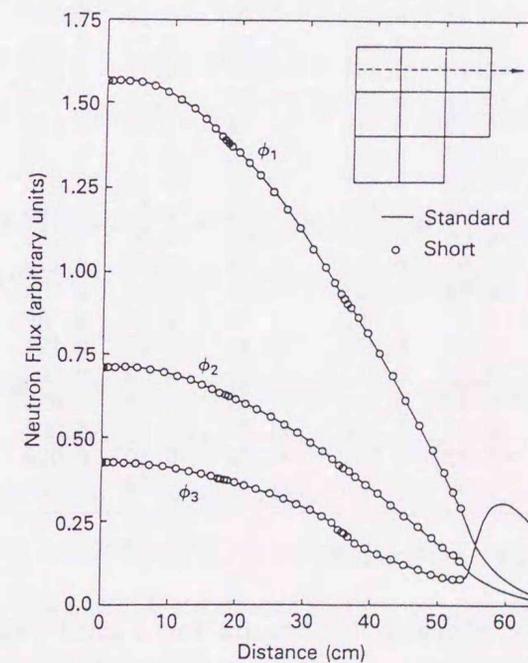


Fig.8-7 Results of flux distributions for a small PWR problem

これらの 3 群簡易計算の誤差は、前節の IAEA の問題に対する 2 群計算に比べて極めて小さい。これは、前節のメッシュ ( $\Delta x = \Delta y = 2.0\text{cm}$ ) が粗いのにに対し、ここではより細かい

Table 8-4 Comparison of flux distributions for a small PWR problem

Distance (cm)	$\phi_1$			$\phi_2$			$\phi_3$		
	Standard	Short error(%)		Standard	Short error(%)		Standard	Short error(%)	
		Case A	Case B		Case A	Case B		Case A	Case B
0.20	1.563	-0.13	+0.26	0.710	-0.17	+0.23	0.423	-0.17	+0.24
0.70	1.565	-0.19	+0.19	0.711	-0.17	+0.23	0.424	-0.17	+0.21
1.75	1.566	-0.13	+0.26	0.712	-0.17	+0.22	0.424	-0.17	+0.24
3.25	1.566	-0.19	+0.19	0.713	-0.17	+0.22	0.424	-0.17	+0.24
5.00	1.561	-0.13	+0.26	0.711	-0.15	+0.23	0.422	-0.14	+0.24
7.00	1.550	-0.13	+0.26	0.706	-0.16	+0.23	0.418	-0.17	+0.22
9.00	1.533	-0.13	+0.26	0.698	-0.17	+0.21	0.413	-0.15	+0.24
11.00	1.510	-0.13	+0.26	0.687	-0.16	+0.23	0.407	-0.15	+0.22
13.00	1.482	-0.20	+0.20	0.674	-0.15	+0.22	0.400	-0.15	+0.23
14.75	1.452	-0.14	+0.21	0.660	-0.15	+0.21	0.392	-0.15	+0.23
16.25	1.423	-0.14	+0.21	0.646	-0.14	+0.22	0.384	-0.13	+0.23
17.30	1.401	-0.14	+0.21	0.635	-0.14	+0.22	0.377	-0.13	+0.21
17.80	1.390	-0.14	+0.22	0.630	-0.14	+0.22	0.375	-0.13	+0.24
18.20	1.382	-0.14	+0.22	0.628	-0.14	+0.21	0.374	-0.13	+0.21
18.70	1.373	-0.15	+0.22	0.625	-0.14	+0.21	0.372	-0.16	+0.21
19.75	1.355	-0.15	+0.22	0.617	-0.13	+0.23	0.367	-0.14	+0.19
21.25	1.325	-0.08	+0.23	0.604	-0.13	+0.22	0.359	-0.14	+0.22
23.00	1.288	-0.16	+0.16	0.586	-0.12	+0.20	0.348	-0.12	+0.20
25.00	1.240	-0.08	+0.24	0.564	-0.11	+0.19	0.334	-0.09	+0.21
27.00	1.188	-0.08	+0.17	0.541	-0.09	+0.20	0.320	-0.09	+0.19
29.00	1.132	-0.09	+0.18	0.515	-0.08	+0.17	0.304	-0.07	+0.16
31.00	1.072	-0.09	+0.09	0.487	-0.06	+0.16	0.286	-0.03	+0.17
32.75	1.017	-0.10	+0.10	0.461	-0.04	+0.13	0.268	-0.04	+0.11
34.25	0.969	-0.01	+0.11	0.437	-0.02	+0.11	0.247	0.00	+0.12
35.30	0.937	+0.01	+0.10	0.419	+0.02	+0.10	0.227	0.00	+0.09
35.80	0.921	+0.02	+0.09	0.411	+0.02	+0.10	0.218	0.00	+0.09
36.20	0.909	+0.03	+0.09	0.407	+0.02	+0.10	0.215	+0.05	+0.09
36.70	0.895	+0.04	+0.08	0.400	+0.05	+0.07	0.206	+0.05	+0.10
37.75	0.865	+0.07	+0.06	0.384	+0.08	+0.05	0.188	+0.05	+0.05
39.25	0.817	+0.11	+0.01	0.361	+0.11	+0.03	0.170	+0.12	0.00
41.00	0.757	+0.17	-0.04	0.334	+0.18	-0.03	0.155	+0.19	0.00
43.00	0.686	+0.28	-0.10	0.302	+0.30	-0.10	0.139	+0.29	-0.14
45.00	0.613	+0.39	-0.20	0.270	+0.41	-0.15	0.124	+0.40	-0.24
47.00	0.538	+0.58	-0.32	0.237	+0.59	-0.30	0.109	+0.64	-0.37
49.00	0.462	+0.80	-0.48	0.204	+0.83	-0.39	0.095	+0.98	-0.68
50.75	0.394	+1.09	-0.61	0.176	+1.25	-0.46	0.084	+1.53	-1.49
52.25	0.335	+1.43	-0.72	0.151	+1.78	-0.40	0.079	+2.35	-3.24
53.30	0.290	+1.76	-0.69	0.135	+2.37	-0.30	0.081	+3.30	-5.91

Table 8-5 Summary of eigenvalue results for a small PWR problem

Problem	Boundary of short calculation	Calculated eigenvalue	
		Standard	Short
Case A	Inner surface of baffle	0.987388	0.987513(+0.013)
Case B	Outer surface of baffle	0.987388	0.987386( 0.000)

The values in parentheses show percentage deviations from the standard calculation results.

メッシュを使ったためである。これは別途行った感度解析<sup>(1)</sup>によって検証されている。

### 8.5 まとめ

本章で紹介した炉心/反射体境界条件の評価法は、2群と3群の両方、炉心隔板のある体系と無い体系の両方に適用可能であることが立証された。炉心/反射体境界条件に関して得られた知見は以下の通りである。

1. PWRの炉心/反射体境界及び炉心隔板表面のエネルギー依存行列型境界条件を効率的に求めるために境界要素法が使い、従来法よりも高い精度を与える。
2. 炉心/反射体境界条件は、いわゆるL字型境界のみならず、逆L字型境界においても強い場所依存性を持つ。境界要素法を用いた方法では、あらゆるタイプの幾何形状を含む炉心/反射体境界の全周に対して境界条件を一度の計算で求めることができる。
3. 炉心隔板を取り扱う新しい技法の有効性が実証された。1次元拡散理論から導かれる応答行列と炉心及び反射体に対する境界積分方程式とを結合してひとつの行列方程式が得られる。この行列方程式を通常の境界要素法の手順にしたがって解くと炉心隔板表面の境界条件が得られる。応答行列の採用により、炉心隔板内部の中性子束分布を計算する必要がなくなった。
4. 炉心/反射体境界条件を求めるための境界要素法計算では、均一炉心に一様中性子源という極めて単純な仮定をしているにもかかわらず、反射体を含めない簡易計算において高い計算精度をもたらしている。
5. 基準計算と簡易計算とを問わず、差分法計算において計算精度を上げるためには、幅1cm以下の細かいメッシュ区分を採用することが不可欠であり、特に炉心/反射体境界の近傍のメッシュ分割に注意を払う必要がある。
6. 本章で定義したような行列型の炉心/反射体境界条件を一度定めれば、制御棒の上げ下げなど現実に起こり得るほとんどの炉心状態の変化に対しても、簡易差分計算の精度を同一水準に保つことができる。
7. 炉心/反射体境界条件に関するこれまでの研究はエネルギー2群モデルに限られていたが、ここで提案した方法は3群及びさらに多群への適用が可能である。
8. ここで提案した方法は境界要素法に基づいているため、六角集合体やさらに複雑な炉心形状に対しても無修正で適用可能である。

## 参考文献

1. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Space-Dependent Core/Reflector Boundary Conditions Generated by the Boundary Element Method for Pressurized Water Reactors," Nuclear Science and Engineering, 107, 246 (1991).
2. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Method Applied to Neutron Diffusion Problems of a Thin Layer Sandwiched Between Two Zones," in Boundary Elements X II (Eds. Tanaka, M., Brebbia, C.A. and Honma, T.), Vol.1, p.227, Proceedings of the 12th Int. Conf. on BEM, Sapporo, Japan, 1990, Computational Mechanics Publications, Southampton (1990).
3. Kalambokas, P.C. and Henry, A.F., "The Representation of Light-Water Reflectors by Boundary Conditions," Nuclear Science and Engineering, 61, 181 (1976).
4. Chao, Y.A. and Suo, C.A., "A Two-Dimensional Two-Group Albedo Model for Pressurized Water Reflector," Nuclear Science and Engineering, 88, 103 (1984).
5. Segev, M., "Application of Light Water Core/Reflector Boundary Conditions," Nuclear Science and Engineering, 90, 221 (1985).
6. Kalambokas, P.C. and Henry, A.F., "The Replacement of Reflectors by Albedo-Type Boundary Conditions," MITNE-183, Massachusetts Institute of Technology (1975).
7. Itagaki, M., "Boundary Element Techniques for Two-Dimensional Nuclear Reactor Calculations," Engineering Analysis, 4[4], 190 (1987).
8. Fowler, T.B. and Vondy, D.R., "Nuclear Reactor Core Analysis Code: CITATION," ORNL-TM-2496, Rev.2, Oak Ridge National Laboratory (1971).

## 第9章 核分裂中性子源項の境界積分化に関する検討

中性子拡散方程式中の非斉次中性子源項は、境界積分方程式中で領域積分項として残される。この領域積分を実行するためには、第3.3節で見たように領域内部をセル分割する必要があり、セル分割と積分点を定義するためのデータ入力が増加する。また、この領域積分は距離に関して指数関数的な減衰特性を持つ基本解に対して行うから、数値精度を確保するためにセル分割を非常に細かくする必要があり、ひいては領域積分に要する計算時間が膨大となる。これらは境界要素法が狙いとする計算労力の経済性に反するものであるから、中性子源項に起因する領域積分を避けるための工夫が不可欠となる。

一様中性子源と減速中性子源の場合は、この領域積分が、各々、Gaussの発散定理及びGreenの第2公式を用いて等価な境界積分に変換できることは、既に第4章で述べた。しかし、原子炉物理で最も重要な核分裂中性子源の場合は、それほど簡単ではない。核分裂中性子源は未知数である中性子束分布の関数となっているからである。核分裂中性子源分布は実効増倍率とともに臨界固有値問題の解として与えられ、通常、中性子源反復計算によって求められる。このような場合、上記の領域積分を境界積分へ変換するためには中性子源反復の過程に沿ったやや複雑な定式化が必要となる。

本章から第12章においては、核分裂中性子源に起因する非斉次の領域積分項を等価な境界積分に変換するために行った種々の研究開発の成果について詳述する。まず、本章の第9.1節では核分裂中性子源に伴う領域積分を避けるために考えられるいくつかの方法について概説する。それらの中で二重相反法及び多重相反法と呼ばれる技法が有望であることが示され、各々の詳細は第10章と第11章に与えられる。

ところで、実効増倍率そのものも式(6-15)のような中性子束分布の領域積分で与えられることに注意する必要がある。実効増倍率の評価に領域積分が依然として必要ならば、境界積分方程式中の領域積分を避けようとするせっきくの試みも無意味となる。実は、中性子拡散方程式の性質と Gaussの発散定理を組み合わせると、式(6-15)に現れる中性子束分布の領域積分は境界積分による漸化式に変換できるのである。すなわち、実効増倍率そのものも境界積分のみから計算できることが本研究の過程で示されている。第9.2節ではこれについて記述する。

## 9.1 領域積分を避ける種々の手法について

核分裂中性子源に起因する領域積分を避ける方法ないしは領域内部のセル分割に要する労力を避ける方法として、次のようなものが考えられる。

- (1) 零行列式サーチ
- (2) モンテカルロ領域積分法
- (3) 二重相反法
- (4) 多重相反法

これらの手法の概要について以下に記述する。

### 9.1.1 零行列式サーチ

これは、中性子拡散方程式で右辺の核分裂中性子源項を左辺に移行して方程式を斉次とさせる方法であり、既に第6.1節で述べたものと同一である。上記の斉次方程式に対応する境界積分方程式には領域積分項がなく、境界積分方程式を離散化して得られる全体行列の行列式が零となるように実効増倍率を探索する。この零行列式サーチには、Newton法などの非線形最適化法が使われる。

エネルギー-1群モデルの場合、中性子拡散方程式

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = \nu\Sigma_f\phi/k_{\text{eff}} \quad (9-1)$$

で右辺の核分裂中性子源項を左辺に移行すると、斉次方程式

$$\nabla^2\phi + B^2\phi = 0 \quad (B^2 = (\nu\Sigma_f/k_{\text{eff}} - \Sigma_a)/D) \quad (9-2)$$

を得る。基本解  $\phi_i^*$  として

$$\nabla^2\phi_i^* + B^2\phi_i^* + \delta_i = 0$$

を満足するものを選べば境界積分方程式に源項は現れない。この場合、境界要素方程式を整理して得られる系全体の連立1次方程式は

$$\mathbf{A}(k_{\text{eff}})\vec{x} = 0 \quad (9-3)$$

となり、系の実効増倍率は

$$|\mathbf{A}(k_{\text{eff}})| = 0 \quad (9-4)$$

を満足するように決められる。

多群エネルギーモデルの場合、多群拡散方程式においてエネルギーの最も低い群 G における中性子束  $\phi_G$  のみを残してそれ以外の群の中性子束を消去すれば、

$$(\nabla^2 + B_1^2)(\nabla^2 + B_2^2)\cdots(\nabla^2 + B_G^2)\phi_G = 0 \quad (9-5)$$

のような因数分解形式が得られる。個々の因数に対応する空間モード  $f_j(\mathbf{r})$  は

$$(\nabla^2 + B_j^2)f_j(\mathbf{r}) = 0 \quad (9-6)$$

を満し、式(9-6)に対応する境界積分方程式は

$$\tilde{c}_i f_j(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} \{\psi_j^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \cdot \nabla f_j(\mathbf{r}) - f_j(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi_j^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)\} d\Gamma \quad (9-7)$$

とかかれる。中性子束分布は、この空間モードの線形結合で表される。第6.1.2節に詳述したように、エネルギー群構造、複数領域の境界における中性子束と中性子流の連続条件を考慮すると、最終的に行列方程式

$$\mathbf{A}(k_{\text{eff}})\vec{x} = 0 \quad (9-8)$$

が得られる。ここで、ベクトル  $\vec{x}$  は  $f_j(\mathbf{r})$  と  $\nabla f_j(\mathbf{r})$  のうち未知数を集めたものである。

多群問題では、式(9-8)中の行列  $\mathbf{A}$  は絶対値の微小な行列要素を多数含んでおり、その行列式を直接、数値的に求めるのは困難となる。このため、第6.1.2節に述べたような「残差最小法」などの工夫が必要となり、Newton法にかえて特殊な非線形最適化手法を用いなければならない<sup>(1)</sup>。このような手法を使って2群2領域の固有値問題を解いた計算例は第7.6節で既に取り上げている。

以上のような零行列式サーチが適用できる場合は領域積分項が全く現れないので、離散化モデルの組立てが簡単であり、また、計算時間が短くてすむという利点がある。零行列式サーチの欠点は、物理的に意味のある固有値に必ず収束するという保証がないことである。式(9-3)または(9-8)が満たす数学上の固有値は無数に存在し、それらの中から原子炉物理で関心のある固有値のみを選別することは、小規模な問題では可能であっても行列の次元が大きくなると困難となる。Newton法や非線形最適化による技法も万能ではなく、発散または偽の固有値に収束する場合がある。これに対し、次節以降で取り上げる手法はいずれも中性子源反復法に基づいており、この場合、 $k_{\text{eff}}$  への安定収束が知られている。

### 9.1.2 モンテカルロ領域積分法

ここで述べる方法は領域積分を避ける方法ではない。この方法は領域積分に基づいているとはいえ、領域積分のためのセル分割や積分点の設定を人の手で入力しなくて済み、労力の点では領域積分を避けたのと同等の効果が得られる。乱数発生によって領域積分を自動的に行うこの手法は Gipson<sup>(2)</sup>によって提案されたものであり、モンテカルロ境界要素法 (Monte Carlo boundary element method) と呼ばれることがある。

いま、面積  $A$  を持つ領域  $\Omega$  において、中性子源分布  $S(\mathbf{r})$  と基本解  $\phi_i^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$  の積に関する領域積分

$$Q_i = \int_{\Omega} \{ S(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \} d\Omega \quad (9-9)$$

を考える。この時、関数  $S(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$  の領域  $\Omega$  における平均値は、

$$\bar{f} = \int_{\Omega} \{ S(\mathbf{r}) \phi_i^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \} d\Omega / A = Q_i / A \quad (9-10)$$

とかける。いま、領域  $\Omega$  内に分布する任意の  $N$  個の座標  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  を乱数を用いて発生させる。  $N$  が大きくなるにつれてこれらの座標はほぼ一様に分布するようになるので、

$$F_N = \frac{\sum_{j=1}^N [S(\mathbf{r}_j) \phi_i^*(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)]}{N} \quad (9-11)$$

なる量は、  $N \rightarrow \infty$  において限りなく式(9-10)による平均値  $\bar{f}$  に近づくことが知られている。すなわち、十分大きな  $N$  に対して式(9-9)の領域積分は近似的に

$$Q_i \sim \frac{A}{N} \sum_{j=1}^N [S(\mathbf{r}_j) \phi_i^*(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)] \quad (9-12)$$

のように計算できる。

この方法による領域積分の具体的な手順は以下のとおりである。

- ① 考えている解析領域（一般に不規則な形状）を取り囲む矩形領域を設定する。
- ② 矩形領域内に積分点が均等に分布するように乱数発生により座標点を連続指定する。
- ③ 解析領域の外部に指定された座標点は排除する。
- ④ 解析領域内部に指定された座標点を使って、式(9-12)による数値積分を実行する。

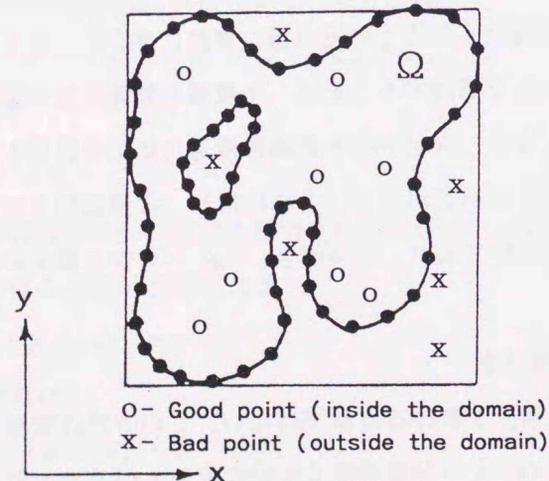


Fig.9-1 Points generated randomly for the Monte Carlo domain integral  
Reproduced from Ref.(2)

今日、ほとんどの電子計算機に一様乱数を発生させるサブルーチンが付属されている。

このサブルーチンにより、区間  $[0, 1]$  の範囲の乱数を連続発生させる。奇数番目及び偶数番目の乱数に各々、上記の矩形領域の縦及び横の長さをかけ合わせる。このようにして積分点の  $x$  座標と  $y$  座標の値を交互に発生させる。

発生させた点座標が解析領域の内部にあるか外部にあるかを Fig.9-1 のように判定するために、複素積分における「留数の定理」が活用できる<sup>(3)</sup>。解析領域を含む平面上の任意の座標を定義する複素数を  $Z$ 、判定したい点座標を  $Z_0$  とする。解析領域の境界に沿った以下の線積分の値によって  $Z_0$  が解析領域  $\Omega$  の内部にあるか外部にあるかが判定できる。即ち、留数の定理

$$\int_{\Gamma} \frac{dZ}{Z - Z_0} \begin{cases} = 2\pi i & (Z_0 \in \Omega \text{ の時}) \\ = 0 & (Z_0 \notin \Omega \text{ の時}) \end{cases} \quad (9-13)$$

が適用できる。式(9-13)の線積分を実行するサブルーチンも公開されている<sup>(2)</sup>。

以上のようなモンテカルロ領域積分法では、積分点  $\mathbf{r}_j$  が自動的に発生し、積分のための特別な重み関数も不要なので、境界のみの情報から解を得るという境界要素法の利点を損なうことがない。また、計算原理が簡単なため、プログラム構造が極めて単純になる。この方法の欠点は、容認できる計算精度を達成するために膨大な数の乱数発生を必要とすることであり、計算時間と精度の点では他の方法より不利である。

### 9.1.3 二重相反法

非斉次ソース項に起因して境界積分方程式中に現れる領域積分を数学的処理によって等価な境界積分に変換する手法として二重相反法 (dual reciprocity method; DRM) と多重相反法 (multiple reciprocity method; MRM) がある。二重相反法の基本的な考え方は、ソース分布を性質のよくわかっている関数で展開し、個々の関数をソース項とする元の支配方程式が満足する特解を利用することにある。

エネルギー-1群の中性子拡散方程式

$$-D\nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi = \nu \Sigma_f \phi / k_{\text{eff}} = S \quad (9-14)$$

を例にとると、式(9-14)に対応する境界積分方程式は第2章でみたように

$$D\tilde{\nabla}^2 \phi_i = \int_{\Gamma} \phi J_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} J \phi_i^* d\Gamma + Q_i, \quad (9-15a)$$

ここに

$$Q_i = \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega \quad (9-15b)$$

であった。式(9-15a)の導出にあたっては Greenの第2公式

$$\int_{\Omega} (\phi_i^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi_i^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \phi_i^* \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (9-16)$$

が重要な役割を担っていた。Greenの第2公式は相反定理 (reciprocity theorem) と呼ばれることがある。

いま、式(9-14)の解として  $\phi$  のかわりに特解  $f$  が与えられれば、

$$-D\nabla^2 f + \Sigma_a f = S \quad (9-17a)$$

または  $k^2 = \Sigma_a/D$  を使って

$$-D(\nabla^2 f - k^2 f) = S \quad (9-17b)$$

が成り立つ。したがって、式(9-15b)で与えられる領域積分は

$$Q_i = \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega = (-D) \int_{\Omega} (\nabla^2 f - k^2 f) \phi_i^* d\Omega \quad (9-18)$$

とかきかえられる。式(9-18)に対しても Greenの第2公式 (相反定理) を適用すれば

$$\begin{aligned} Q_i &= (-D) \left[ \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi_i^* - k^2 \phi_i^*) f d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_i^* \frac{\partial f}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} f \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} d\Gamma \right] \\ &= D \bar{c}_i f_i + \int_{\Gamma} j \phi_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} f J_i^* d\Gamma, \quad (j = -D \bar{c}_i f) \end{aligned} \quad (9-19)$$

となり、領域積分(9-15b)は境界積分のみを含む形式に変換できる。式(9-19)の形式は、元の中性子拡散方程式に対する境界積分方程式(9-15a)に極めて類似していることに気付く。二重相反法の名は、境界積分方程式(9-15a)とソース項に関する境界積分(9-19)の両方の導出に Greenの第2公式 (相反定理) が使われていることに由来する。

二重相反法の決め手は特解  $f$  をどのように与えるかにある。通常とられる方法は、前述のように、ソース分布  $S$  を性質の良くわかっている既知関数で級数展開することである。どのような関数で展開するかは、対象とする工学分野で異なり、種々の関数が提案されている<sup>(4)</sup>。中性子拡散問題に対しては、三角関数、即ち、Fourier 級数で展開し、

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t_i(\mathbf{r}) \quad (9-20)$$

のように与えるのが便利と考えられる。ここで、 $t_i(\mathbf{r})$  は Fourier 展開  $i$  番目の三角関数、 $a_i$  は展開係数である。Fourier 展開を用いる理由は、三角関数には2回微分すると元の三角関数に戻るという便利な性質があるからである。 $t_i(\mathbf{r})$  は既知関数であるから、式(9-17a)の右辺に式(9-20)を代入した時、特解  $f$  は容易に求まる。

ここで、展開係数  $a_i$  をどのようにして定めるのかという重要な問題が残されている。二重相反法の過去の研究では、展開係数  $a_i$  は入力データとして与えるものとされ、その

決定は解析者に委ねられていた<sup>(5)</sup>。Poisson型の問題や、炉物理でも固定中性子源問題では、ソース分布の形状が既知であるからこのような展開係数の決定は困難ではない。しかし、臨界計算では中性子源分布は未知量であるから、計算開始前に展開係数  $a_i$  を定める方法はない。このようなことから、二重相反法の臨界計算への応用は困難と考えられていた。しかしながら、1991年に Itagaki と Brebbia<sup>(6)</sup> は、中性子源反復の過程で Fourier 展開係数  $a_i$  を自動的に発生させる新しいアルゴリズムを提唱している。彼らは Fourier 展開係数の本来の定義がソース分布と三角関数の積の領域積分から与えられることに着目し、この領域積分に Greenの第2公式を再度適用すると展開係数  $a_i$  が境界積分の漸化式によって精度良く計算できることを示した。このアルゴリズムの考案によって、領域内部のいかなる情報も必要とせず展開係数は計算プログラムの内部で計算されるようになり、解析者は境界を定義するデータと核定数のみを入力するだけでよくなった。二重相反法の臨界計算への応用に関する詳細は第10章で記述される。

#### 9.1.4 多重相反法

前節で見た二重相反法は、核分裂中性子源に起因する領域積分を境界積分に変換する有力な一方法である。しかしながら、二重相反法では中性子源分布を式(9-20)のような無限 Fourier 級数で定義するため、所定の計算精度を得るためにかなりの数の展開項を確保しなければならない。また、どの程度の展開項数を取れば十分な計算精度が得られるかは問題によって異なる。これに対し、ここで紹介する多重相反法では、中性子源分布を三角関数などで級数展開するという方法はとらないので、上記のような問題は生じない。多くの工学分野において、多重相反法は非斉次ソース項に起因する領域積分を境界積分に変換する最も有望な手法と考えられており、現在も精力的な研究開発が進められている<sup>(7)</sup>。

多重相反法の基本的な考え方は、考えている領域積分に対して高次基本解の列を逐次代入するとともに、Greenの第2公式 (相反定理) を繰り返し適用するところにある<sup>(8)</sup>。いま、1群中性子拡散方程式に対応する高次基本解の列  $[\phi_i^{*(L)}, L=1,2,3,\dots]$  として、

$$\nabla^2 \phi_i^{*(0)} - k^2 \phi_i^{*(0)} + \delta_i = 0 \quad (L=0) \quad (9-21a)$$

$$\nabla^2 \phi_i^{*(L)} - k^2 \phi_i^{*(L)} + \phi_i^{*(L-1)} = 0 \quad (L=1,2,\dots) \quad (9-21b)$$

を満たすものを選ぶ。ここに  $k^2 = \Sigma_a/D$  である。中性子源反復の第  $m$  回で考えている領域積分を

$$Q_i^{(m)} = S_0 \int_{\Omega} \phi_i^{*(0)} d\Omega, \quad (m=1) \quad (9-22a)$$

$$Q_i^{(m)} = \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} \phi_i^{*(0)} d\Omega \quad (m \geq 2) \quad (9-22b)$$

のように、あらためて定義する。式(9-22b)に対して式(9-21b)を適用すると

$$Q_i^{(m)} = -\frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} \left\{ \nabla^2 \phi_i^{*(1)} - k^2 \phi_i^{*(1)} \right\} d\Omega \quad (9-23)$$

となり、1次基本解  $\phi_i^{*(1)}$  が現われる。式(9-23)の右辺に Greenの第2公式を適用すると、 $\phi^{(m-1)}$  と  $\phi_i^{*(1)}$  が入れ替わるかわりに境界積分項が新たに派生して、

$$Q_i^{(m)} = -\frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \left\{ \int_{\Omega} \phi_i^{*(1)} \left\{ \nabla^2 \phi^{(m-1)} - k^2 \phi^{(m-1)} \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial n} \phi_i^{*(1)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(1)} \frac{\partial}{\partial n} \phi^{(m-1)} d\Gamma \right\} \quad (9-24)$$

のようになる。ここで、中性子拡散方程式の性質から、

$$\nabla^2 \phi^{(m-1)} - k^2 \phi^{(m-1)} = -\frac{S^{(m-1)}}{D} = -\frac{\nu \Sigma_f}{Dk_{\text{eff}}^{(m-2)}} \phi^{(m-2)}$$

とかけるから、式(9-24)は、結局、

$$Q_i^{(m)} = \frac{\nu \Sigma_f}{Dk_{\text{eff}}^{(m-1)}} \left\{ \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-2)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-2)} \phi_i^{*(1)} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi^{(m-1)} J_i^{*(1)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(1)} J^{(m-1)} d\Gamma \right\} \quad (9-25)$$

のように変形される。式(9-25)中で、

$$\frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-2)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-2)} \phi_i^{*(1)} d\Omega$$

の部分は式(9-22b)と同一の形式をしているから、式(9-23)から(9-25)までの操作を繰り返すことができる。その結果、式(9-25)に含まれる領域積分は

$$\frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-3)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-3)} \phi_i^{*(2)} d\Omega$$

のみとなる。以上の手順を  $(m-1)$  回繰り返すと  $(m-1)$  個の境界積分項が現れ、式(9-25)に残される領域積分は、中性子源反復の初回に仮定した一様中性子源  $S^{(1)} = S_0$  に関する領域積分

$$\int_{\Omega} S^{(1)} \phi_i^{*(m-1)} d\Omega = S_0 \int_{\Omega} \phi_i^{*(m-1)} d\Omega \quad (9-26)$$

のみとなる。実は、式(9-26)の領域積分も高次基本解の関係式と Gaussの発散定理を使うと容易に境界積分に変換できる。式(9-22b)で与えられた領域積分は、結局、 $(m-1)$  個の境界積分のみからなる級数に変換されるのである。

多重相反法の中性子源反復計算への適用は、1992年、Itagaki と Brebbia<sup>(9)</sup>により初めて示された。研究の初期においては、多重相反法による中性子源反復の過程でまるめ誤差が混入して実効増倍率の精度が悪くなる現象がみられた<sup>(10)</sup>。これは、中性子源項に関する領域積分を変換して得られる  $(m-1)$  個の境界積分の級数の構造に原因があり、高次項になるにつれその絶対値が小さくなるように組立てを修正するとよいことがわかった。この修正のために、従来から中性子源反復の加速に使われている Wielandt の原点移動法<sup>(11)</sup>が利用され、多重相反計算の安定収束を保証する条件式も与えられている<sup>(12)</sup>。

このような措置により、多重相反法による臨界計算は極めて精度の高い結果を与えることが明らかとなった。多重相反法の定式化には近似がない。二重相反法のように中性子源分布の関数展開の項数をどのくらいとればよいかを解析者自身が判断する必要がないし、展開を有限個で打ち切ることに伴う誤差の心配がない。入力データとして要求されるのは境界座標の定義と核定数のみであり、境界要素法が目指す理想に一致する。多重相反法による定式化の詳細と高次基本解の具体的な関数形、多重相反計算における安定収束を図る方法、さらに数値計算例などについて第11章で後述する。また、第12章では、正多角形の幾何学的バックリングの統一的な評価式を導くのに多重相反法が使われた例を示す。

## 9.2 境界積分のみによる固有値の算出

第6.2節で見たように、中性子源反復法において実効増倍率は2つの領域積分の比で定義される。最も簡単な例として、エネルギー1群近似、単一領域問題に対しては、

$$k_{\text{eff}}^{(m)} = \frac{\int_{\Omega} \nu \Sigma_f \phi^{(m)} d\Omega}{\int_{\Omega} S^{(m)} d\Omega} = \frac{\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega}{\left\{ \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} d\Omega / k_{\text{eff}}^{(m-1)} \right\}} \quad (9-27)$$

のように与えられる。実効増倍率を式(9-27)の領域積分で与えるのであれば、前節までに述べた境界積分方程式中の領域積分を境界積分に変換しようとする努力は無意味になる。しかしながら、Itagaki と Brebbia<sup>(6)</sup>は式(9-27)に現れる領域積分が境界積分に変換できることを示している。領域  $\Omega$  に対して中性子拡散方程式から、

$$\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega = \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Omega} S^{(m)} d\Omega + \frac{D}{\Sigma_a} \int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega \quad (9-28)$$

のようにかける。Gaussの発散定理を適用すると、式(9-28)は

$$\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega = \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Omega} S^{(m)} d\Omega - \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma$$

$$= \frac{1}{\Sigma_a} \cdot \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} d\Omega - \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma \quad (9-29a)$$

のように法線方向の中性子流  $J^{(m)}$  の境界積分を含む形式に変形できる。  $m=1$  の時、  $S^{(1)} (= S_0)$  は一様であるから、式(9-28)は

$$\int_{\Omega} \phi^{(1)} d\Omega = \frac{S_0}{\Sigma_a} \int_{\Omega} d\Omega - \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Gamma} J^{(1)} d\Gamma = \frac{S_0}{\Sigma_a} \cdot A - \frac{1}{\Sigma_a} \int_{\Gamma} J^{(1)} d\Gamma, \quad (9-29b)$$

のように領域積分を全く含まない形式となる。ここに、

$$A = \int_{\Omega} d\Omega \quad (9-30)$$

は、考えている領域  $\Omega$  の体積または面積である。複雑な幾何形状を有する領域の体積や面積を正確に与えるのは一般に困難であるが、式(9-30)の領域積分もまた境界積分から計算することができる。いま、

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = 1 \quad (9-31)$$

となるような関数  $\Psi(\mathbf{r})$  を考えると、式(9-30)に Gauss の発散定理が適用できて、

$$A = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) d\Omega = \int_{\Gamma} [\partial \Psi(\mathbf{r}) / \partial n] d\Gamma \quad (9-32)$$

のように境界積分に変換される。一例として、2次元平面に対する関数  $\Psi(\mathbf{r})$  として、

$$\Psi(\mathbf{r}) = r^2/4 = (x^2 + y^2)/4 \quad (9-33)$$

を選ぶことができる。したがって、2次元平面における領域  $\Omega$  の面積  $A$  は、

$$A = \int_{\Gamma} [\partial \Psi(\mathbf{r}) / \partial n] d\Gamma = \int_{\Gamma} (r/2) (\partial r / \partial n) d\Gamma \quad (9-34)$$

の線積分を境界  $\Gamma$  に沿って実行すればよいことになる。

以上の工夫によって実効増倍率の定義式に関する全ての領域積分は境界積分だけを使って計算できるようになった。式(9-29b)から出発し、中性子源反復の進行に応じて順次、漸化式(9-29a)に従って計算していけば、中性子束に関する領域積分は全て境界積分で与えることができる。即ち、本来、領域積分で定義される実効増倍率が境界積分だけを使って表示できる。

以上のやり方は、ソース反復  $m$  回

$$[B^{(m)}]^2 = - \int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega / \int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega \quad (9-35)$$

で定義される幾何学的バックリングに対しても応用できる。この場合、式(9-35)の分子は Gauss の発散定理から、

$$- \int_{\Omega} \nabla^2 \phi^{(m)} d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial n} d\Gamma \quad (9-36)$$

のように容易に変換できる。従って、式(9-35)も、式(9-29)と(9-36)で与えられる境界積分だけの比で表示し直すことができる。

以上の導出は、簡単のため、単一領域・1群問題に対して与えているが、多領域・多群問題への拡張は容易である。第10章と第11章で詳述する二重相反法と多重相反法において、実効増倍率の算出は以上で導いた方法に基づいている。これによって固有値計算のためにいかなる領域積分も領域内のセル分割が不要となり、境界要素法の持つ本来の利点が最大限に活かされることになる。

#### 参考文献

1. Itagaki, M., "Boundary Element Methods Applied to Two-Dimensional Neutron Diffusion Problems," *Journal of Nuclear Science and Technology*, 22[7], 565 (1985).
2. Gipson, G.S., "Topics in Engineering Vol.2: Boundary Element Fundamentals - Basic Concepts and Recent Developments in the Poisson Equation," Computational Mechanics Publications, Southampton (1987).
3. Gipson, G.S., "Use of the Residue Theorem in Locating Points Within an Arbitrary Multiply Connected Region," *Advances in Engineering Software*, 8[3], 138 (1985).
4. Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method," Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science Publications (1992).
5. Tang, W., "Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM - A Generalized Approach," *Lecture Notes in Engineering Vol.35*, Springer-Verlag, Berlin (1988).
6. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Formulation of Fission Neutron Source Problems Using Only Boundary Integrals," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8[5], 239 (1991).
7. Nowak, A.J. and Neves, A.C. (Eds.), "The Multiple Reciprocity Boundary Element Method," Computational Mechanics Publications, Southampton (1994).
8. Nowak, A.J. and Brebbia, C.A., "The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming B.E.M. Domain Integral to the Boundary," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6[3], 164 (1989).
9. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Dual and Multiple Reciprocity Formulations Applied to Fission Neutron Source Problems," in *Boundary Elements X IV* (Eds. Brebbia, C.A., Dominguez, F. and Paris, F.), Vol.1, p.25, Proceedings of the

14th Int. Conf. on BEM, Sevilla, Spain, 1992, Computational Mechanics Publications, Southampton (1992).

10. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," *Boundary Elements Abstracts and Newsletter*, 3[2], 67 (1992).
11. Wachspress, E.L., "Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics," Prentice-Hall (1966).
12. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Remedy for Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10[4], 345 (1992).

## 第10章 二重相反法による核分裂中性子源項の境界積分化

前章において、核分裂中性子源に起因して境界積分方程式中に現れる領域積分項を等価な境界積分に変換する手法として、二重相反法と多重相反法が有望であることを述べた。本章では、そのうち二重相反法による定式化について詳述する。二重相反法の中性子源反復計算への適用における基本的な考え方は、中性子源分布を既知関数の級数に展開し、級数の個々の項をソースとする中性子拡散方程式の特解を利用することにある<sup>(1)</sup>。議論を簡潔なものにするため、本章では、エネルギー1群の2次元単一領域の問題に限って取り上げる。本章に関連したさらに詳しい記述は著者による文献<sup>(2)(3)</sup>に見られる。

### 10.1 核分裂中性子源に起因する領域積分

中性子源反復の第 $m$ 回においてエネルギー1群の中性子拡散方程式は、

$$-D\nabla^2 \phi^{(m)} + \Sigma_a \phi^{(m)} = S^{(m)} \begin{cases} = S_0 = 1.0 & (m=1) \\ = \nu \Sigma_f \phi^{(m-1)} / k_{\text{eff}}^{(m-1)} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (10-1a)$$

のようにかけられ、反復の初回では  $S^{(1)} = S_0 = 1.0$  を仮定している。式(10-1)に対応する境界積分方程式は、

$$D \tilde{\partial}_i \phi_i^{(m)} = \int_{\Gamma} \phi^{(m)} J_{i^*} d\Gamma - \int_{\Gamma} J^{(m)} \phi_i^* d\Gamma + Q_i^{(m)} \quad (10-2)$$

のように与えられ、核分裂中性子源に起因する領域積分項  $Q_i^{(m)}$  は

$$Q_i^{(m)} = \int_{\Omega} S^{(m)} \phi_i^* d\Omega \begin{cases} = \int_{\Omega} S_0 \phi_i^* d\Omega & (m=1) \\ = \int_{\Omega} \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \phi^{(m-1)} \phi_i^* d\Omega & (m \geq 2) \end{cases} \quad (10-3a)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \phi^{(m-1)} \phi_i^* d\Omega \quad (m \geq 2) \quad (10-3b)$$

で定義されている。ここで、 $k^2 = \Sigma_a / D$  とすると、基本解  $\phi_i^*$  の満たす式は

$$\nabla^2 \phi_i^* - k^2 \phi_i^* + \delta_i = 0 \quad (10-4)$$

であり、 $J^{(m)}$  及び  $J_{i^*}$  なる量は、各々、

$$J^{(m)} = -D[\partial \phi^{(m)} / \partial n], \quad (10-5)$$

$$J_{i^*} = -D[\partial \phi_i^* / \partial n] \quad (10-6)$$

のように定義されている。式(10-3)で定義される領域積分を境界積分に変換するために、以下に示す二重相反法を用いる。

10.2 Fourier級数展開と特解の利用による二重相反法

いま、中性子束の解  $\phi$  は斉次方程式の解  $\phi_0$  と特解  $u$  を使って

$$\phi = \phi_0 + u \quad (10-7)$$

のようにかけると仮定する。即ち、元の中性子拡散方程式は、

$$-D\nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi = -D\nabla^2 (\phi_0 + u) + \Sigma_a (\phi_0 + u) = S \quad (10-8)$$

とかかれ、斉次解は

$$-D\nabla^2 \phi_0 + \Sigma_a \phi_0 = 0 \quad (10-9)$$

を満たし、特解  $u$  は

$$-D\nabla^2 u + \Sigma_a u = S \quad (10-10a)$$

または、

$$-D(\nabla^2 u - k^2 u) = S \quad (k^2 = \Sigma_a/D) \quad (10-10b)$$

を満足する。式(10-10b)の関係を利用すると、式(10-3)の領域積分は

$$Q_i = \int_{\Omega} S \phi_i^* d\Omega = (-D) \int_{\Omega} (\nabla^2 u - k^2 u) \phi_i^* d\Omega \quad (10-11)$$

のように変形できる。ここで中性子源反復の回数を表す添字 (m) は省略した。ここから先の変形には、第2章で境界積分方程式を導く時に用いたのと同様の考え方をを用いることができる。式(10-11)の右辺に Greenの第2公式(相反定理; reciprocity theorem)

$$\int_{\Omega} (\Psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \Psi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (10-12)$$

を適用すれば、

$$Q_i = (-D) \left[ \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi_i^* - k^2 \phi_i^*) u d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_i^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} d\Gamma \right] \quad (10-13)$$

となり、式(10-11)中の  $u$  と  $\phi_i^*$  が入れ替わるかわりに新たに境界積分項の加わった形式となる。式(10-13)に対して、式(10-4)に示した基本解の性質を代入し、さらに

$$J_i^* = -D[\partial \phi_i^* / \partial n], \quad (10-14)$$

及び

$$j = -D[\partial u / \partial n] \quad (10-15)$$

と定義すれば、

$$Q_i = Du_i + \int_{\Gamma} j \phi_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u J_i^* d\Gamma \quad (10-16)$$

を得る。さらに、特異積分に関して第2章の式(2-16)で示したのと同様の修正

$$\int_{\Gamma} u J_i^* d\Gamma \longrightarrow \int_{\Gamma} u J_i^* d\Gamma + (1 - \tilde{\alpha}_i) \cdot Du_i \quad (10-17)$$

を施すべきであるから、結局、式(10-3)の領域積分は

$$Q_i = D\tilde{\alpha}_i u_i + \int_{\Gamma} j \phi_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u J_i^* d\Gamma \quad (10-18)$$

のように境界積分のみからなる形式に変換できることになる。式(10-18)は、元の中性子拡散方程式に対する境界積分方程式(10-2)に極めて類似している。二重相反法の名は、境界積分方程式(10-2)と中性子源項に関する境界積分(10-18)の両方の導出に Greenの第2公式(相反定理)が使われていることに由来する。

式(10-18)を実際に適用するには、特解  $u$  が既知でなければならない。このためには、中性子源分布  $S(\mathbf{r})$  を性質の良くわかっている既知関数で級数展開するとよい。中性子拡散問題に対しては、三角関数、即ち、Fourier級数で展開するのが便利である。三角関数には2回微分すると元の三角関数に戻るという便利な性質があるからである。

2次元問題に対しては、 $S(\mathbf{r})$  を以下のような二重 Fourier級数<sup>(4)</sup>に展開する。即ち、

$$S(\mathbf{r}) = a_0 + \sum_{p=1}^2 \sum_{i=1}^N a_i^{(p)} t_i^{(p)} + \sum_{p=1}^2 \sum_{j=1}^M a_j^{(p)} t_j^{(p)} + \sum_{p=1}^4 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij}^{(p)} t_{ij}^{(p)}, \quad (10-19)$$

とする。ここで、 $a_0$ 、 $a_i^{(p)}$ 、 $a_j^{(p)}$  及び  $a_{ij}^{(p)}$  は未知係数である。なお、式(10-19)で添字  $i$  は三角関数の展開次数を表わし、式(10-18)における点  $i$  とは意味が異なる。いま、考えている領域  $\Omega$  を取り囲む矩形領域  $L_x \times L_y$  を Fig.10-1 のように与え、 $2L_x \times 2L_y$  の寸法を持つ矩形領域を Fourier展開のための基準領域  $\Omega_f$  と定める。式(10-19)中の関数  $t_i^{(p)}$ 、 $t_j^{(p)}$ 、 $t_{ij}^{(p)}$  の組み合わせは次のように選ぶ。即ち、

$$\begin{aligned} t_0 &= 1, \\ t_i^{(1)} &= \cos \alpha_i x, \quad t_i^{(2)} = \sin \alpha_i x, \\ t_j^{(1)} &= \cos \beta_j y, \quad t_j^{(2)} = \sin \beta_j y, \\ t_{ij}^{(1)} &= \cos \alpha_i x \cos \beta_j y, \quad t_{ij}^{(2)} = \cos \alpha_i x \sin \beta_j y, \\ t_{ij}^{(3)} &= \sin \alpha_i x \cos \beta_j y, \quad t_{ij}^{(4)} = \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \end{aligned} \quad (10-20)$$

とする。ここで、 $\alpha_i = i(\pi/L_x)$  及び  $\beta_j = j(\pi/L_y)$  である。

式(10-20)に示される種々の三角関数は、

$$-D\nabla^2 u_i^{(p)}(\mathbf{r}) + \Sigma_a u_i^{(p)}(\mathbf{r}) = t_i^{(p)}(\mathbf{r}), \quad (10-21a)$$

$$-D\nabla^2 u_j^{(p)}(\mathbf{r}) + \Sigma_a u_j^{(p)}(\mathbf{r}) = t_j^{(p)}(\mathbf{r}), \quad (10-21b)$$

及び

$$-D\nabla^2 u_{ij}^{(p)}(\mathbf{r}) + \Sigma_a u_{ij}^{(p)}(\mathbf{r}) = t_{ij}^{(p)}(\mathbf{r}). \quad (10-21c)$$

を満たすから、式(10-20)の関数の組に対応する特解は、 $k^2 = \Sigma_a/D$  を用いて、

$$u_0 = 1/\Sigma_a,$$

$$u_i^{(p)} = \frac{t_i^{(p)}}{D(k^2 + \alpha_i^2)} \quad (p=1, 2), \quad u_j^{(p)} = \frac{t_j^{(p)}}{D(k^2 + \beta_j^2)} \quad (p=1, 2),$$

$$u_{ij}^{(p)} = \frac{t_{ij}^{(p)}}{D(k^2 + \alpha_i^2 + \beta_j^2)} \quad (p=1, 4) \quad (10-22)$$

のように与えることができる。

以上により、中性子源分布を式(10-19)のように Fourier級数に展開した時、級数を構成する各項の三角関数に対する特解は式(10-22)で与えられることがわかった。中性子源分布を Fourier級数に展開したことの利点として、式(10-22)で示される個々の特解は元の三角関数の定数倍になっており、計算プログラムの設計上、扱いやすいものであることがわかる。

ところで、式(10-19)における展開係数  $a_0, a_i^{(p)}, a_j^{(p)}, a_{ij}^{(p)}$  をどのようにして定めるのかという重要な問題が依然として残されている。臨界計算の開始前には中性子源分布は一般に未知量であるから、中性子源反復過程に沿った Fourier展開係数を計算プログラムの内部において逐次更新させていく必要がある。このような方法を考案しなければ、臨界計算に対する二重相反法の定式化は完成しない。

### 10.3 領域内サンプリングによる Fourier展開係数の決定

式(10-19)における展開係数を定める最も直接的な方法は、サンプリング法であろう。中性子源反復の初回は一様中性子源を仮定するから、二重相反法の助けを借りなくても領域内部の任意点における中性子束及び新しい中性子源を計算できる。領域内部の多数のサンプリング点  $j$  に対して中性子源分布  $S(r_j)$  を求め、対応する三角関数  $t_i(r_j)$  の値の組との組み合わせから連立1次方程式に持ち込めば、代数的に展開係数  $a_i$  を決定できる。得られた展開係数を使って新しい中性子源分布を組み立てることができ、さらに、前節で述べた二重相反法に基づいて第2回の中性子源反復を実行できる。以上の手続きを繰り返せばやがて中性子源反復の収束解が得られる。

この方法では、中性子源反復の全ての回において領域内部の多数点の中性子束を計算しなければならない。このため、一般には領域内のサンプリング点の座標を入力で与える必要がある、サンプリング点をどのように分布させるのが適切であるかを解析者自身が判断しなければならない。したがって、境界のみの情報から解を得ようとする境界要素法本来

の狙いからやはずれるのであるが、第9.1.2節に述べたような乱数発生の方法<sup>(5)</sup>を利用してサンプリング点を自動的に設定することで解析者の負担を低減させることができる。

第9.1.2節に述べた乱数発生によるサンプリング点の自動設定のあらましを繰り返すと以下のとおりである。

- ① 考えている解析領域（一般に不規則な形状）を取り囲む矩形領域を設定する。
- ② この矩形領域内にサンプリング点がほぼ均等に分布するように乱数発生によって点座標を連続的に指定する。
- ③ 「留数の定理」に基づく境界積分により、指定された点座標が解析領域の内部にあるか外部にあるかを判定し、解析領域の外部に指定された点は排除する。

解析領域内にはどのくらいの数のサンプリング点を設定すればよいであろうか。展開係数  $a_i$  の数だけサンプリング値  $S(r_j)$  を用意する場合はいわゆる選点法 (Collocation technique) となるが、Gauss消去法などによって連立1次方程式を解く時に必ずしも安定な解が保証されない。このため、展開係数の2~3倍のサンプリング点を指定し、以下に示すような最小自乗法を用いて展開係数を定めるのがよい。

未知の展開係数に関するベクトルを  $\{a\}$ 、既知のサンプリング値に関するベクトルを  $\{S\}$ 、また三角関数の値からなる行列を  $[t]$  とすると、

$$[t]\{a\} = \{S\} \quad (10-23)$$

の連立1次方程式が得られる。サンプリング点を過剰にとっているため、式(10-23)では未知数の数と方程式の数は一致していない。そこで、式(10-23)の両辺に  $[t]^T$  の転置行列  $[t]^T$  をかけあわせて

$$[t]^T[t]\{a\} = [t]^T\{S\} \quad (10-24)$$

を得る。これより、 $\{a\}$  の最小自乗近似解は

$$\{a\} = ([t]^T[t])^{-1}[t]^T\{S\} \quad (10-25)$$

のようにして求められる。式(10-25)は Gauss消去法などを使って解くことができる。

以上に述べた手法によれば、Fourier級数展開における展開係数を自動的に発生させることができ、二重相反法による臨界計算プログラムを作ることができる。乱数発生によるサンプリング点の数が十分にあり、その分布が適切なものであれば、計算結果について容認できる程度の精度が期待できる。しかしながら、領域内の中性子源分布が複雑に変動する場合は、所定の計算精度を確保するために必要なサンプリング点の数が膨大となる。また、乱数発生に頼っているためにサンプリング点の並びが不規則となり、幾何学的に対称

性を持つ領域の中性子源分布が必ずしも対称形状に近似されないというような例の生じる場合がある。より高精度の臨界計算結果を二重相反法に望むのであれば、Fourier展開係数の決定について別種のアプローチを模索する必要がある。このような要求に答える新しい方法が、1991年に Itagaki と Brebbia<sup>(2)</sup>によって提唱されている。それは、次節で述べるように境界積分そのものを使って Fourier展開係数を自動発生させる方法であり、この方法では領域内部にいかなるサンプリング点も必要としない。

#### 10.4 境界積分による Fourier展開係数の決定

ここに示す方法では、Fourier展開係数の本来の定義が中性子源分布と三角関数の積の領域積分から与えられることに着目している。この領域積分に Greenの第2公式を適用すると展開係数が境界積分の漸化式によって与えられ、その漸化式は中性子源反復の進行とともに更新される形式をしている。

いま、式(10-20)で示した種々の三角関数を統一的に  $t_i(x,y)$  で表すことにする。この関数と中性子源反復第  $m$  回の中性子源分布  $S^{(m)}$  を用いると、中性子源反復第  $m$  回における Fourier展開係数  $a_i^{(m)}$  は、本来、

$$a_i^{(m)} = \frac{1}{A} \int_{\Omega_f} S^{(m)} t_i(x,y) d\Omega \quad (10-26)$$

のように与えられる。ここで  $A$  は Fig.10-1 に示した基準矩形領域  $\Omega_f$  の面積である。

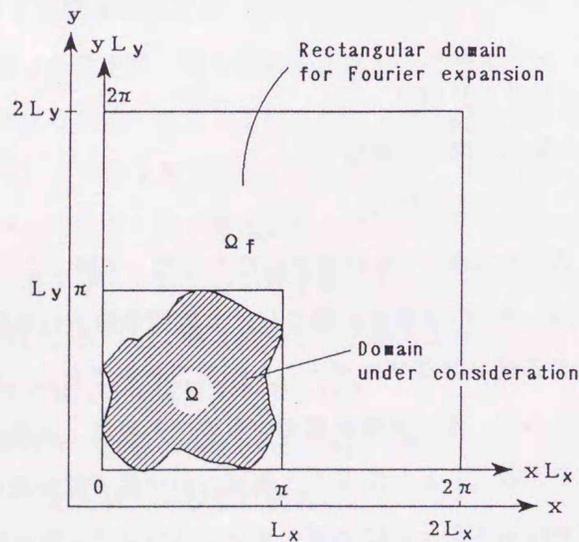


Fig.10-1 Domain for Fourier expansion

この基準矩形領域は解析対象の領域  $\Omega$  を内包し、基準矩形領域の各辺は Fourier級数の周期  $2\pi$  と対応づけられている。いま、領域  $\Omega$  の外ではいたるところ  $S^{(m)}(\mathbf{r})=0$  と仮定すると、式(10-26)は

$$a_i^{(m)} = \frac{1}{A} \int_{\Omega} S^{(m)} t_i(x,y) d\Omega \quad (10-27)$$

のようにかきかえられる。式(10-27)の式(10-26)との違いは、積分領域が  $\Omega_f$  から  $\Omega$  に変更されたことのみである。式(10-27)の領域積分が境界積分に変換できることを以下に示す。

式(10-22)中の量  $\alpha_i^2$ ,  $\beta_j^2$  及び  $\alpha_i^2 + \beta_j^2$  をまとめて  $b^2$  と表すことにすれば、三角関数  $t_i(x,y)$  について

$$\nabla^2 t_i(x,y) = -b^2 t_i(x,y) \quad (10-28)$$

の関係がある。したがって、式(10-27)は

$$A \cdot a_i^{(m)} = \int_{\Omega} S^{(m)} t_i(x,y) d\Omega = -\frac{1}{b^2} \int_{\Omega} S^{(m)} \nabla^2 t_i(x,y) d\Omega \quad (10-29)$$

のようにかきかえることができる。式(10-29)は Greenの第2公式を使ってさらに

$$A \cdot a_i^{(m)} = -\frac{1}{b^2} \left[ \int_{\Omega} \nabla^2 S^{(m)} \cdot t_i(x,y) d\Omega + \int_{\Gamma} S^{(m)} [\partial t_i(x,y) / \partial n] d\Gamma - \int_{\Gamma} [\partial S^{(m)} / \partial n] \cdot t_i(x,y) d\Gamma \right] \quad (10-30)$$

のように変形される。ところで、 $S^{(m)}$  は中性子源反復第  $m$  回の中性子源であり、エネルギー-1群モデルの場合は、

$$S^{(m)} = \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \phi^{(m-1)} \quad (m > 1) \quad (10-31)$$

のようにかけられる。したがって、中性子拡散方程式の性質から、 $k^2 = \Sigma_a / D$  を用いて、

$$\begin{aligned} \nabla^2 S^{(m)} &= \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \nabla^2 \phi^{(m-1)} \\ &= \frac{\nu \Sigma_f}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} [k^2 \phi^{(m-1)} - S^{(m-1)} / D] \\ &= k^2 S^{(m)} - \frac{\nu \Sigma_f}{D \cdot k_{\text{eff}}^{(m-1)}} S^{(m-1)} \quad (m > 1) \end{aligned} \quad (10-32)$$

の関係があり、また、

$$\frac{\partial S^{(m)}}{\partial n} = -\frac{\nu \Sigma_f}{D \cdot k_{\text{eff}}^{(m-1)}} J^{(m-1)} \quad (m > 1) \quad (10-33)$$

である。式(10-32)を利用すれば式(10-30)中の領域積分は

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla^2 S^{(m)} t_i(x,y) d\Omega \\ &= k^2 \int_{\Omega} S^{(m)} t_i(x,y) d\Omega - \frac{\nu \Sigma_f}{D \cdot k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \int_{\Omega} S^{(m-1)} t_i(x,y) d\Omega \\ &= A \cdot \left\{ k^2 a_i^{(m)} - \frac{\nu \Sigma_f}{D \cdot k_{\text{eff}}^{(m-1)}} a_i^{(m-1)} \right\} \quad (m > 1) \end{aligned} \quad (10-34)$$

のように変形できる。式(10-31)~(10-34)を用いて式(10-30)を変形すれば、

$m > 1$  の時、

$$\begin{aligned} a_i^{(m)} &= \frac{1}{A} \int_{\Omega} S^{(m)}(\mathbf{r}) \cdot t_i(x,y) d\Omega \\ &= \frac{\nu \Sigma_f / k_{\text{eff}}^{(m-1)}}{D(b^2 + k^2)} \left[ a_i^{(m-1)} + \frac{1}{A} \int_{\Gamma} \{ \phi^{(m-1)} j_i(x,y) - J^{(m-1)} t_i(x,y) \} d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (10-35)$$

の漸化式が得られる。ここに、

$$j_i(x,y) = -D \{ \partial t_i(x,y) / \partial n \} \quad (10-36)$$

である。一方で、 $m=1$  の時、Fourier係数  $a_i^{(1)}$  は

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= \frac{S_0}{A} \int_{\Omega} t_i(x,y) d\Omega \\ &= -\frac{S_0}{A \cdot b^2} \int_{\Omega} \nabla^2 t_i(x,y) d\Omega \\ &= -\frac{S_0}{A \cdot b^2} \int_{\Gamma} \{ \partial t_i(x,y) / \partial n \} d\Gamma \end{aligned} \quad (10-37)$$

のように簡単に求まる。式(10-37)から出発して式(10-35)を用いれば、全ての Fourier係数を境界積分のみで求めることができる。

以上のアルゴリズムの考案によって、領域内部のいかなる情報も必要とせず展開係数は計算プログラムの内部で計算されるようになり、解析者は境界を定義するデータと核定数のみを入力するだけでよくなった。

### 10.5 テスト計算

以上に述べた二重相反法の定式化の妥当性を検証するために、簡単な2次元単一領域についてテスト計算を行った。ここで取り上げるのは、Fig.10-2 に示す一辺が 100cm の正方形領域であり、1群核定数の組として、

$$D=1.0 \text{ (cm)}, \quad \Sigma_a=0.01 \text{ (cm}^{-1}\text{)} \quad \text{及び} \quad \nu \Sigma_f=0.0119739 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$$

を与える。Fig.10-2 中のケースAのように正方形領域の外周全てに中性子束が零の境界条件を設定すると、実効増倍率の厳密解は  $k_{\text{eff}}=1.0$  となり、中性子束分布は

$$\phi(x,y) \propto \sin(\pi x/100) \cdot \sin(\pi y/100)$$

のようになることが知られている。また、境界条件の設定が同一であれば、この正方形領域を傾けてケースBのように配置しても、当然ながら、実効増倍率は  $k_{\text{eff}}=1.0$  となる。

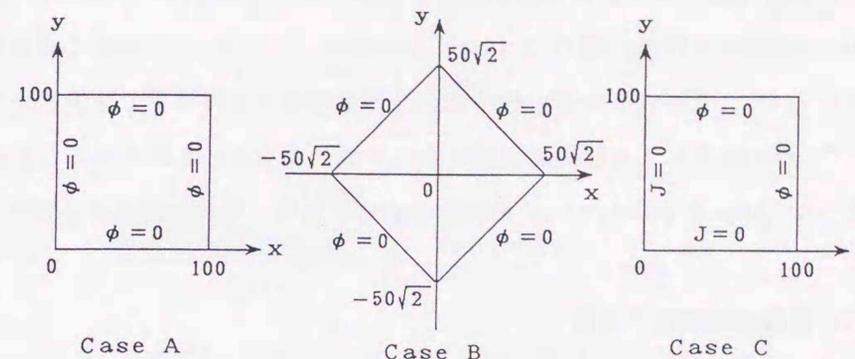


Fig.10-2 Geometry and boundary conditions for the DRM test calculations

二重相反法に基づく中性子源反復の各回における実効増倍率の計算には、第9.2節で記述した境界積分の漸化式を用いた。計算結果の要約を Table 10-1 に示す。実効増倍率の計算結果と厳密解との一致は、ケースAのみならず正方形領域が  $x$ -軸、 $y$ -軸に平行でない、ケースBにおいても良好である。このことは、式(10-19)で与えた中性子源分布の二重 Fourier展開が任意の幾何形状に対して十分適用可能であることを示唆している。

Table 10-1 Summary of the DRM test calculation results

Case	Number of boundary elements	Number of Fourier terms	Number of iterations	Eigenvalue ( $k_{\text{eff}}$ )* <sup>1</sup>
A	16	81	19	1.00034
B	16	81	14	0.99779
B	16	169	20	1.00093
C	18	81	20	1.11607* <sup>2</sup>

\*<sup>1</sup> Convergence criterion:  $\Delta k/k \leq 10^{-5}$

\*<sup>2</sup> Not Converged:  $\Delta k/k \sim 0.4 \times 10^{-3}$

もうひとつのテスト計算として、Fig.10-2 のケースCに示す問題を取り上げる。このケースでは、正方形領域の形状はケースA及びBと同一であるが、隣接する2辺のみに零中性子束、残る2辺に零中性子流の境界条件を設定する。この場合の実効増倍率の厳密解は  $k_{\text{eff}}=1.14108$  となる。Table 10-1 に示されるように、ケースCに対する二重相反法による実効増倍率の計算結果と厳密解との一致は悪い。また、中性子源反復による実効増

倍率の収束が極めて遅いことに気づく。

この現象は、前節で述べたように、中性子源分布の Fourier 展開にあたって領域  $\Omega$  の外側で  $S(x,y)=0$  を仮定したことに原因があると考えられる。この仮定では、中性子束が零でない境界の内外では中性子源分布が不連続 (jump discontinuity) となる。このような場合、Fourier 級数は境界の内側の  $S(x,y)$  と外側の  $S(x,y)$  の平均値に収束することが知られている<sup>(6)</sup>。ケース C で零中性子流の境界条件を与えた境界では中性子束が零でないから、Fourier 級数による展開は実際の中性子源分布を正しく再現することができない。このような jump discontinuity の問題を避けるため、新たな工夫が必要である。

### 10.6 Fourier 級数の収束性の改善

上述のような jump discontinuity の問題を回避するために考えられるひとつの可能性は、Fig.10-3 に示すように問題の境界条件をあらかじめ満足する多項式の関数  $Z(x,y)$  を導入し、中性子源分布  $S(x,y)$  との差

$$S(x,y) - Z(x,y)$$

が全ての境界で零値を取り、かつ、境界の内外で連続となるようにすることである。この多項式関数  $Z(x,y)$  を用いると、式(10-19)は

$$S(x,y) = Z(x,y) + \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - e_i) t_i(x,y), \quad (10-38)$$

のように修正される。ここで、定数  $e_i$  は  $Z(x,y)$  を Fourier 級数

$$Z(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \cdot t_i(x,y), \quad (10-39)$$

に展開した時の展開係数であり、係数  $a_i$  を決定した時と同様に、

$$e_i = \frac{1}{A} \int_{\Omega} Z(x,y) \cdot t_i(x,y) d\Omega, \quad (10-40)$$

で求めることができる。ここで  $Z(x,y)$  についても領域  $\Omega$  の外で  $Z(x,y)=0$  を仮定している。式(10-38)で与えた新しい級数はあらゆる境界に対して一様収束が保証されるはずである。

なお、Ohtani ら<sup>(7)</sup>は、ここで記述したのとはほぼ同様の手法を用いて中性子拡散方程式の精度のよい Fourier 級数解を得ている。彼らの手法は境界要素法とは無関係のものであるが、上述のような jump discontinuity の問題を解決するために距離に関する 3 次式を

使って Fourier 展開式を修正し、Fourier 級数の一様収束を図っている。

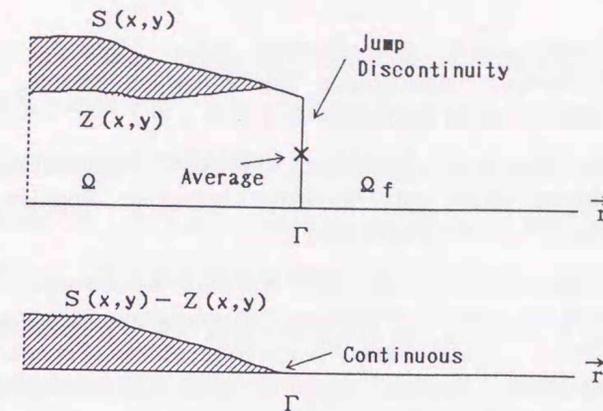


Fig.10-3 Removal of the jump discontinuity

### 10.7 まとめ

中性子源反復による臨界計算に二重相反法が適用された。中性子源反復の過程において二重相反法が適用できるように、反復各回の中性子源分布は Fourier 級数で展開され、その展開係数を漸化式に基づいて自動的に計算する方法が考案された。核分裂中性子源に起因して境界積分方程式中に現れる領域積分項は、これらの手法によって Fourier 級数の展開項の数だけの境界積分の組に置き換えられた。

二重相反法により領域内部をセル分割する必要がなくなり、境界要素法本来の利点が活かせるようになった。また、実効増倍率の算出には第9.2節で述べた境界積分の漸化式を使うことができ、この方法は二重相反法、境界要素法と良く適合している。零中性子束の境界条件を持つ単一領域に対するテスト計算結果は、厳密解と極めて良い一致を示した。

通常の Fourier 展開の下では、中性子束が零でない境界の内外で jump discontinuity の問題が生じる。これを避けるために、零でない境界条件を満たす多項式関数を導入して Fourier 級数展開を修正する方法が提案された。この方法によれば、いかなる境界条件に対しても Fourier 級数の一様収束が保証されるはずであるが、具体的な数値計算はまだなされていない。この理由は、核分裂中性子源に起因する領域積分を境界積分に変換する方法として本章でとりあげた二重相反法よりも次章で記述する多重相反法のほうが、より優れていると判断されたからであり、二重相反法の臨界計算への応用に関する研究開発は一時中断されている。

参考文献

1. Partridge, P.W., Brebbia, C.A. and Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity Boundary Element Method," Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science Publications (1992).
2. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Formulation of Fission Neutron Source Problems Using Only Boundary Integrals, Engineering Analysis with Boundary Elements," 8[5], 239 (1991).
3. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Dual and Multiple Reciprocity Formulations Applied to Fission Neutron Source Problems," in Boundary Elements X IV (Eds. Brebbia, C.A., Dominguez, F. and Paris, F.), Vol.1, p.25, Proceedings of the 14th Int. Conf. on BEM, Sevilla, Spain, 1992, Computational Mechanics Publications, Southampton (1992).
4. Tang, W., "Transforming Domain into Boundary Integrals in BEM - A Generalized Approach," Lecture Notes in Engineering Vol.35, Springer-Verlag, Berlin (1988).
5. Gipson, G.S., "Use of the Residue Theorem in Locating Points Within an Arbitrary Multiply Connected Region," Advances in Engineering Software, 8[3], 138 (1985).
6. W. Kaplan, "Advanced Calculus," 387-436, Addison-Wesley (1952).
7. Ohtani, N., Jung, J., Kobayashi, K. and Nishihara, H., "Numerical Solution of Diffusion Equations in Multi-Dimensional Slab Geometry by Fourier Expansions," Journal of Nuclear Science and Technology, 12[6], 325 (1975).

第11章 多重相反法による核分裂中性子源項の境界積分化

前章では、中性子源分布の Fourier 級数展開に基づく二重相反法を用いて、中性子源反復計算における核分裂中性子源に起因する領域積分を境界積分に変換した。本章では、同じく核分裂中性子源に起因する領域積分を境界積分に変換する目的で、もうひとつの新しい技法である多重相反法 (Multiple reciprocity method; MRM)<sup>(1)</sup> を適用する。多重相反法の基本的な考えは、高次基本解の列を用いて Green の第 2 公式 (相反定理) を繰り返し適用して領域積分を境界積分の級数に変換することにある。多重相反法では、二重相反法のように中性子源分布を既知関数に級数展開するという方法はとらない。したがって、展開を有限個で打ち切ることによる誤差が発生することはなく、一般に極めて高精度の解が得られるのが特徴である。議論を単純なものにするため、本章においてもエネルギー 1 群の単一領域の問題に限って記述を進める。

11.1 Wielandt の原点移動法による中性子源反復計算の改良

第 11.2 節で試みる多重相反法による定式化の便宜上、中性子拡散方程式及び中性子源反復計算の形式をあらかじめ以下のように修正する。まず、対象とするエネルギー 1 群の中性子拡散方程式は、一般的な記法を用いて、

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = (\nu\Sigma_f/k_{\text{eff}})\phi \quad (11-1)$$

のようにかける。いま、実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  の推定値として  $\lambda_e$  なる量を導入し、式 (11-1) の両辺から  $\nu\Sigma_f/\lambda_e\phi$  を差し引いて、

$$-D\nabla^2\phi + (\Sigma_a - \nu\Sigma_f/\lambda_e)\phi = (1/k_{\text{eff}} - 1/\lambda_e)\nu\Sigma_f\phi, \quad (11-2)$$

のようにする。式 (11-1) から式 (11-2) への変形は、Wielandt の原点移動法 (Wielandt's spectral shift technique)<sup>(2)</sup> と呼ばれ、一般に中性子源反復による臨界計算を加速する働きのあることが知られている。しかしながら、ここで中性子拡散方程式を式 (11-2) のように変形する真の理由は、後述するように式 (11-2) への変形が多重相反計算における収束の安定性と深く関係しているからである。いま、

$$\tilde{\Sigma}_a = \Sigma_a - \nu\Sigma_f/\lambda_e = -DB_0^2 \quad (11-3a)$$

及び

$$B_0^2 = -\tilde{\Sigma}_a/D = (\nu\Sigma_f/\lambda_e - \Sigma_a)/D \quad (11-3b)$$

なる量を定義すれば、式 (11-2) は

$$-D\nabla^2\phi + \widetilde{\Sigma}_a\phi = (\nu\Sigma_f/\lambda)\phi \quad (11-4)$$

のように簡単化される。式(11-4)に現れる新しい固有値  $\lambda$  は、

$$1/\lambda = (1/k_{\text{eff}} - 1/\lambda_e) \quad (11-5)$$

のように定義される。

Wielandt の原点移動法による以上の変形に伴い、中性子源反復の第  $m$  回における中性子拡散方程式は、

$$-D\nabla^2\phi^{(m)} + \widetilde{\Sigma}_a\phi^{(m)} = S^{(m)} = \begin{cases} S_0 = 1.0 & (m=1) \\ \nu\Sigma_f\phi^{(m-1)}/\lambda^{(m-1)} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (11-6a)$$

$$(11-6b)$$

のようにかかれるべきであるが、中性子源反復の方法は第6.2節で述べたものと全く同一のものが使える。ちなみに、反復の第  $m$  回における固有値は

$$G^{(m)}(\mathbf{r}) = \nu\Sigma_f\phi^{(m)}(\mathbf{r}) \quad (m \geq 2) \quad (11-7)$$

なる量を用いて、

$$\lambda^{(m)} = \int_{\Omega} G^{(m)} d\Omega / \int_{\Omega} S^{(m)} d\Omega = \int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega / \left\{ \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} d\Omega / \lambda^{(m-1)} \right\} \quad (11-8)$$

のように計算され、式(11-5)から実効増倍率は、

$$k_{\text{eff}}^{(m)} = \lambda^{(m)} \lambda_e / (\lambda^{(m)} + \lambda_e) \quad (11-9)$$

で与えられる。

第9.2節で述べたと同様にして、固有値  $\lambda^{(m)}$  を定義する式(11-8)中の領域積分は境界積分の漸化式に置き換えることができる。即ち、

$$\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega = \frac{S_0}{\widetilde{\Sigma}_a} \cdot A - \frac{1}{\widetilde{\Sigma}_a} \int_{\Gamma} J^{(1)} d\Gamma \quad (m=1) \quad (11-10a)$$

及び

$$\int_{\Omega} \phi^{(m)} d\Omega = \frac{1}{\widetilde{\Sigma}_a} \cdot \frac{\nu\Sigma_f}{\lambda^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} d\Omega - \frac{1}{\widetilde{\Sigma}_a} \int_{\Gamma} J^{(m)} d\Gamma \quad (m \geq 1) \quad (11-10b)$$

の関係式が使える。

中性子源反復の第  $m$  回における中性子拡散方程式(11-6)に対応する境界積分方程式は、

$$D\widetilde{\alpha}_i\phi_i^{(m)} = \int_{\Gamma} \phi^{(m)} J_i^{*(0)} d\Gamma - \int_{\Gamma} J^{(m)} \phi_i^{*(0)} d\Gamma + Q_i^{(m)} \quad (11-11)$$

のようにかかれる。式(11-11)中の零次基本解は

$$\nabla^2\phi_i^{*(0)} + B_0^2\phi_i^{*(0)} + \delta_i = 0 \quad (11-12)$$

を満たすものとし、また、

$$J^{(m)} = -D(\partial\phi^{(m)}/\partial n) \quad (11-13)$$

及び

$$J_i^{*(0)} = -D(\partial\phi_i^{*(0)}/\partial n) \quad (11-14)$$

と定義している。実効増倍率の推定値  $\lambda_e$  をどのように仮定するかにより、式(11-3b)で

定義した量  $B_0^2$  の正負が異なる。したがって、式(11-12)を満足する零次基本解は、 $B_0^2$

の正負に応じて、

$$\phi_i^{*(0)} = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(B_0 r) \quad (B_0^2 > 0 \text{ の時}) \quad (11-15a)$$

及び

$$\phi_i^{*(0)} = \frac{1}{2\pi} K_0(k_0 r) \quad (B_0^2 = -k_0^2 < 0 \text{ の時}) \quad (11-15b)$$

の2とおりがとり得る。ここに、 $H_0^{(2)}(x)$  及び  $K_0(x)$  は、各々、零次第2種の Hankel 関数及び修正 Bessel 関数である。

## 11.2 多重相反法による定式化

式(11-11)で与えた境界積分方程式中には核分裂中性子源に起因する領域積分

$$Q_i^{(m)} = \int_{\Omega} S^{(m)} \phi_i^{*(0)} d\Omega \quad (11-16)$$

が含まれている。 $m=1$  の時、 $S^{(1)} (= S_0)$  は一様中性子源なので積分の外へ出すことができ、

$$Q_i^{(1)} = S_0 \int_{\Omega} \phi_i^{*(0)} d\Omega \quad (11-17)$$

のようにかかれる。零次基本解の関係式(11-12)から、

$$\phi_i^{*(0)} = -\{\delta_i + \nabla^2\phi_i^{*(0)}\}/B_0^2 \quad (11-18)$$

を式(11-17)に代入して Gauss の発散定理を適用すれば、第4.1節で見たように、

$$Q_i^{(1)} = -\frac{S_0}{DB_0^2} \left( D\widetilde{\alpha}_i - \int_{\Gamma} J_i^{*(0)} d\Gamma \right) \quad (11-19)$$

の簡単な境界積分の形式に変換できる。

$m \geq 2$  の場合、式(11-16)の領域積分は

$$Q_i^{(m)} = \int_{\Omega} S^{(m)} \phi_i^{*(0)} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\nu\Sigma_f}{\lambda^{(m-1)}} \phi^{(m-1)} \phi_i^{*(0)} d\Omega \quad (11-20)$$

のように第  $(m-1)$  回に計算された中性子束  $\phi^{(m-1)}$  を含む形式となる。式(11-20)を等価な境界積分に変換するため、以下に記述する多重相反法が使える。多重相反法の定式化には高次基本解の列  $\{\phi_i^{*(L)}, L=0,1,2,\dots\}$  の活用が基本となっており、これらは

$$\nabla^2\phi_i^{*(0)} + B_0^2\phi_i^{*(0)} + \delta_i = 0, \quad (L=0) \quad (11-21a)$$

$$\nabla^2\phi_i^{*(L)} + B_0^2\phi_i^{*(L)} + \phi_i^{*(L-1)} = 0 \quad (L=1,2,\dots) \quad (11-21b)$$

を満たす。ここに添字  $L$  は高次基本解の次数を表す。導出を助けるために、ここで、

$$Z_i(m, L) = \int_{\Omega} S^{(m)} \phi_i^{*(L)} d\Omega = S_0 \int_{\Omega} \phi_i^{*(L)} d\Omega \quad (11-22a)$$

$$= \frac{\nu \sum f}{\lambda^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} \phi_i^{*(L)} d\Omega \quad (11-22b)$$

なる量を定義しておく。

$m \geq 2$  かつ  $L \geq 0$  の時、式(11-22)は、高次基本解の関係式(11-21b)、Greenの第2公式及び中性子拡散方程式の性質を順次活用して、

$$\begin{aligned} Z_i(m, L) &= -\frac{\nu \sum f}{\lambda^{(m-1)}} \int_{\Omega} \phi^{(m-1)} (\nabla^2 \phi_i^{*(L+1)} + B_0^2 \phi_i^{*(L+1)}) d\Omega \\ &= -\frac{\nu \sum f}{\lambda^{(m-1)}} \left\{ \int_{\Omega} \phi_i^{*(L+1)} (\nabla^2 \phi^{(m-1)} + B_0^2 \phi^{(m-1)}) d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} \phi^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial n} \phi_i^{*(L+1)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(L+1)} \frac{\partial}{\partial n} \phi^{(m-1)} d\Gamma \right\} \\ &= \frac{\nu \sum f}{D \lambda^{(m-1)}} \left\{ Z_i(m-1, L+1) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} \phi^{(m-1)} J_i^{*(L+1)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(L+1)} J^{(m-1)} d\Gamma \right\} \quad (11-23a) \end{aligned}$$

のように変形していくことができる。

$m=1$  の時、式(11-22a)中の中性子源  $S^{(1)} (= S_0)$  は一様であるから、

$$Z_i(1, L) = \frac{S_0}{DB_0^2} \int_{\Gamma} J_i^{*(L)} d\Gamma - \frac{1}{B_0^2} Z_i(1, L-1), \quad (11-23b)$$

さらに

$$Z_i(1, 0) = Q_i^{(1)} = -\frac{S_0}{DB_0^2} \left( D\tilde{c}_i - \int_{\Gamma} J_i^{*(0)} d\Gamma \right) \quad (11-23c)$$

を得る。式(11-23a)~(11-23c)の導出の詳細は論文<sup>(3)(4)</sup>に与えられている。

式(11-23a)、(11-23b)及び(11-23c)は、 $Z_i(m, L)$  に関する漸化式になっている。これらを順次適用することによって式(11-20)の領域積分  $Q_i^{(m)}$  は、結局、以下に示すように  $(m-1)$ 個の境界積分のみからなる級数に変換できる<sup>(3)(4)</sup>。即ち、

$$\begin{aligned} Q_i^{(m)} &= \sum_{L=1}^{m-1} \left( \prod_{S=1}^L \frac{\nu \sum f}{D \lambda^{(m-S)}} \right) \left\{ \int_{\Gamma} \phi^{(m-L)} J_i^{*(L)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(L)} J^{(m-L)} d\Gamma \right\} \\ &\quad + \left( \prod_{L=1}^{m-1} \frac{\nu \sum f}{D \lambda^{(m-L)}} \right) \cdot Z_i(1, m-1) \quad (m \geq 2) \quad (11-24a) \end{aligned}$$

の形式とかけ、高次基本解の次数  $L$  の最大値は  $(m-1)$ となる。ここで、

$$Z_i(1, m-1) = -\frac{1}{B_0^2} \left\{ Z_i(1, m-2) - \frac{S_0}{D} \int_{\Gamma} J_i^{*(m-1)} d\Gamma \right\} \quad (m \geq 2) \quad (11-24b)$$

及び

$$Z_i(1, 0) \equiv Q_i^{(1)} = -\frac{S_0}{DB_0^2} \left( D\tilde{c}_i - \int_{\Gamma} J_i^{*(0)} d\Gamma \right) \quad (m=1) \quad (11-24c)$$

である。

式(11-21b)を満たす  $L$  次基本解は、2次元問題の場合、

$$\phi_i^{*(L)} = A_L (B_0 r)^L H_L^{(2)}(B_0 r) \quad (B_0^2 > 0 \text{ の時}) \quad (11-25a)$$

及び

$$\phi_i^{*(L)} = A_L (k_0 r)^L K_L(B_0 r) \quad (B_0^2 = -k_0^2 < 0 \text{ の時}) \quad (11-25b)$$

のように与えられる<sup>(5)</sup>。ここに、 $(B_0 r)^L$  及び  $(k_0 r)^L$  は各々、 $(B_0 r)$  及び  $(k_0 r)$  の  $L$  乗を示す。 $H_L^{(2)}(x)$  と  $K_L(x)$  は、各々、第2種  $L$  次の Hankel関数及び修正 Bessel 関数である。Hankel関数  $H_L^{(2)}(x)$  は複素関数であり、

$$H_L^{(2)}(x) = J_L(x) - iY_L(x) \quad (11-26)$$

とかかれる。ここで、 $i^2 = -1$  であり、 $J_L(x)$  と  $Y_L(x)$  は、各々、第1種と第2種の  $L$  次 Bessel関数である。式(11-25a)及び(11-25b)中の係数  $A_L$  は、

$$A_L = -A_{L-1} / (2LB_0^2) = A_{L-1} / (2Lk_0^2), \quad (L=1, 2, 3, \dots) \quad (11-27)$$

$$A_0 = -i/4 \quad (B_0^2 > 0 \text{ の時}) \quad (11-28a)$$

$$A_0 = 1/(2\pi) \quad (B_0^2 = -k_0^2 < 0 \text{ の時}) \quad (11-28b)$$

の関係式を使って順次計算していくことができる。

式(11-25a)及び(11-25b)による高次基本解を求めるためには、高次の関数  $x^L J_L(x)$ 、 $x^L Y_L(x)$  及び  $x^L K_L(x)$  の値が必要であるが、これらは漸化式<sup>(6)(7)</sup>

$$x^{L+1} J_{L+1}(x) = 2L \cdot \{x^L J_L(x)\} - x^2 \cdot \{x^{L-1} J_{L-1}(x)\}, \quad (11-29a)$$

$$x^{L+1} Y_{L+1}(x) = 2L \cdot \{x^L Y_L(x)\} - x^2 \cdot \{x^{L-1} Y_{L-1}(x)\}, \quad (11-29b)$$

及び

$$x^{L+1} K_{L+1}(x) = 2L \cdot \{x^L K_L(x)\} + x^2 \cdot \{x^{L-1} K_{L-1}(x)\} \quad (11-29c)$$

を使って計算できる。式(11-29b)と(11-29c)による計算は、 $x < L$  の時、 $L$  の増加に対して安定なことが知られており<sup>(6)</sup>、式(11-29b)に対して  $Y_0(x)$  と  $xY_1(x)$ 、式(11-29c)に対しては  $K_0(x)$  と  $xK_1(x)$  を初期値として順次計算していくとよい。一方、式(11-29a)は、 $x < L$  の時、 $L$  の増加に対して不安定であり丸め誤差が蓄積するが、 $L$  の減少に対して安定である<sup>(6)</sup>。このような関数の計算には、Miller のアルゴリズム<sup>(7)</sup>が使える。即ち、十分大きな  $L$  に対して  $x^L J_L(x)$  の値を仮定して式(11-29a)を逆に解き、次に、

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + 2J_6(x) + \dots, \quad (11-30)$$

の性質を利用して所望の次数の  $x^L J_L(x)$  の値を規格化するとよい。

### 11.3 多重相反計算における収束安定性

多重相反法により、核分裂中性子源に起因する領域積分は式(11-24a)に示される境界積分の級数に変換された。この級数が収束性を有するためには、級数の各項の絶対値が高次になるにつれて減少する傾向でなければならない<sup>(8)(9)</sup>。具体的には、式(11-24a)中の隣り合う2つの項について、

$$\frac{\left| \left( \prod_{S=1}^L \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-s)}} \right) \left\{ \int_{\Gamma} \phi^{(m-L)} J_i^{*(L)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(L)} J^{(m-L)} d\Gamma \right\} \right|}{\left| \left( \prod_{S=1}^{L-1} \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-s)}} \right) \left\{ \int_{\Gamma} \phi^{(m-L+1)} J_i^{*(L-1)} d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi_i^{*(L-1)} J^{(m-L+1)} d\Gamma \right\} \right|} < 1.0 \quad (11-31)$$

を満足する必要がある。中性子源反復の過程で  $\phi^{(m-L)}$  と  $J^{(m-L)}$  の変動は緩やかであり、また、高次基本解の次数  $L$  の増加に伴う  $J_i^{*(L)}$  の挙動は  $\phi_i^{*(L)}$  のそれと極めて類似していることから、以下の議論では式(11-31)のかわりに

$$\frac{\left| \left( \prod_{S=1}^L \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-s)}} \right) \cdot \phi_i^{*(L)} \right|}{\left| \left( \prod_{S=1}^{L-1} \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-s)}} \right) \cdot \phi_i^{*(L-1)} \right|} < 1.0 \quad (11-32)$$

の条件を近似的に用いることとする。

式(11-24a)を見ると、 $L$ 次基本解  $\phi_i^{*(L)}$  は常に因子、

$$\prod_{S=1}^L \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-s)}}$$

を伴っていることがわかる。 $L$ 次基本解  $\phi_i^{*(L)}$  は式(11-25a)または(11-25b)のように与えられていることを併せ考えると、式(11-32)による収束条件を調べるためには、

$$\frac{\tilde{A}_L}{\tilde{A}_{L-1}} = \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-L)}} \cdot \frac{A_L}{A_{L-1}} = \frac{\nu \Sigma_f}{D \lambda^{(m-L)}} \cdot \frac{-1}{2L B_0^2} = \frac{\nu \Sigma_f / \lambda^{(m-L)}}{2L \cdot \tilde{\Sigma}_a} \quad (11-33)$$

で定義される量を吟味すべきである。

$B_0^2 < 0$  の時、関数  $\tilde{A}_L \cdot x^L K_L(x)$  は、式(11-29c)を修正した漸化式

$$\begin{aligned} \tilde{A}_L \cdot x^L K_L(x) &= 2(L-1) \{ \tilde{A}_{L-1} \cdot x^{L-1} K_{L-1}(x) \} \cdot (\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}) \\ &\quad + x^2 \{ \tilde{A}_{L-2} \cdot x^{L-2} K_{L-2}(x) \} \cdot (\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}) \cdot (\tilde{A}_{L-1} / \tilde{A}_{L-2}) \end{aligned} \quad (11-34)$$

にしたがい、ふつう、多項式近似<sup>(6)</sup>による  $K_0(x)$  と  $xK_1(x)$  の数値を初期値として逐次計算されていることになる。式(11-34)の両辺を  $\tilde{A}_{L-1} \cdot x^{L-1} K_{L-1}(x)$  で割ると、

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= |\tilde{A}_L \cdot x^L K_L(x)| / |\tilde{A}_{L-1} \cdot x^{L-1} K_{L-1}(x)| \\ &= |\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}| \cdot |2(L-1) + x \cdot \{ K_{L-2}(x) / K_{L-1}(x) \}| \end{aligned} \quad (11-35)$$

を得る。中性子拡散問題では、通常、 $x = k_0 r < 1.0$  であり、また、 $K_{L-1}(x)$  は  $K_{L-2}(x)$  より大きいから、

$$\tilde{R} < (2L-1) \cdot |\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}| = \left| \frac{\nu \Sigma_f / \lambda^{(m-L)}}{\tilde{\Sigma}_a} \right| \cdot \left( \frac{2L-1}{2L} \right) \quad (11-36)$$

の関係がある。式(11-36)中の  $(2L-1)/(2L)$  の部分は中性子源反復の進行につれて1.0に近づくから、多重相反計算における収束安定条件として、

$$\tilde{\eta} = \frac{\nu \Sigma_f / \lambda^{(m-L)}}{\tilde{\Sigma}_a} = \frac{(1/k_{\text{eff}}^{(m-L)} - 1/\lambda_e) \nu \Sigma_f}{\Sigma_a - \nu \Sigma_f / \lambda_e} \quad (11-37)$$

で定義される量の絶対値が1.0よりも小さいこと、即ち、

$$|\tilde{\eta}| < 1.0 \quad (11-38)$$

を設定することができる<sup>(9)</sup>。

$B_0^2 > 0$  の時は、複素関数  $\tilde{A}_L \cdot x^L H_L^{(2)}(x)$  の実部  $\tilde{A}_L \cdot x^L Y_L(x)$  に対して上記と同一の結果が得られる。この場合、式(11-34)に対応する漸化式は、

$$\begin{aligned} \tilde{A}_L \cdot x^L Y_L(x) &= 2(L-1) \{ \tilde{A}_{L-1} \cdot x^{L-1} Y_{L-1}(x) \} \cdot (\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}) \\ &\quad - x^2 \{ \tilde{A}_{L-2} \cdot x^{L-2} Y_{L-2}(x) \} \cdot (\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}) \cdot (\tilde{A}_{L-1} / \tilde{A}_{L-2}) \end{aligned} \quad (11-39)$$

ようになる。式(11-39)の両辺を  $\tilde{A}_{L-1} \cdot x^{L-1} Y_{L-1}(x)$  で割り、 $Y_L(x)$  は  $L < x$  の時、 $L$ の増加とともに増加する関数である<sup>(6)</sup>ことを考慮すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= |\tilde{A}_L \cdot x^L Y_L(x)| / |\tilde{A}_{L-1} \cdot x^{L-1} Y_{L-1}(x)| \\ &= |\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}| \cdot |2(L-1) - x \cdot \{ Y_{L-2}(x) / Y_{L-1}(x) \}| \\ &< 2(L-1) \cdot |\tilde{A}_L / \tilde{A}_{L-1}| \\ &= \left| \frac{\nu \Sigma_f / \lambda^{(m-L)}}{\tilde{\Sigma}_a} \right| \cdot \left( \frac{L-1}{L} \right) \end{aligned} \quad (11-40)$$

の関係が得られる。式(11-40)は  $L \rightarrow \infty$  において式(11-36)と一致するから、 $B_0^2 > 0$  における実数部計算に対しても式(11-38)を収束安定条件とすることができる。一方で、関数

$\widetilde{A}_L \cdot x^L H_L^{(2)}(x)$  の虚数部分については,

$$\begin{aligned} \widetilde{R} &= \left| \frac{\widetilde{A}_L x^L J_L(x)}{A_{L-1} x^{L-1} J_{L-1}(x)} \right| = \left| \frac{\nu \sum_f / \lambda^{(m-L)}}{2L \cdot \sum_a} \cdot \frac{x^L J_L(x)}{x^{L-1} J_{L-1}(x)} \right| \\ &= |\widetilde{\eta}| \cdot \left| \frac{x^L J_L(x)}{x^{L-1} J_{L-1}(x)} \right| \cdot \left( \frac{1}{2L} \right) \end{aligned} \quad (11-41)$$

の関係がある。関数  $x^L J_L(x)$  の絶対値は  $L < x$  の時,  $L$  の増加とともに減少することが知られている<sup>(6)</sup>。したがって, 実数部分に対する収束安定条件の式(11-38)が満たされている限り, 式(11-41)で与えられる量は 1.0 より小さく, 虚数部分についても級数の収束を不安定にすることはない<sup>(10)</sup>。

式(11-37)より示唆されるように, 実効増倍率の推定値  $\lambda_e$  が実効増倍率の真値に近いものであれば, 式(11-38)の収束安定条件は自動的に満足される。

#### 11.4 複素方程式の取扱

Tai と Shaw<sup>(11)</sup> は,  $B_0^2 > 0$  の時の零次基本解として複素関数

$$\phi_i^{*(0)} = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(B_0 r) \quad (11-42a)$$

を用いるべきであると主張している。この場合, 境界積分方程式を離散化して得られる全体行列は複素行列となる。一方で, 式(11-42a)の実数部のみを取り出して零次基本解を

$$\phi_i^{*(0)} = -\frac{1}{4} Y_0(B_0 r) \quad (11-42b)$$

とする近似がしばしば用いられる<sup>(12)</sup>。本研究においてもいくつかの数値計算例ではこの近似を使っている。式(11-42b)を使う利点は複素演算が不要になることであり, 必要な計算機容量を 1/4 程度に低減できる。しかし, 固有値問題の厳密な解法を試みるためには式(11-42b)よりも式(11-42a)を用いるのが正しい。式(11-42b)を基本解とした時, 正しい固有ベクトルのほかに物理的に意味を持たない偽の固有ベクトルが加わるからである。

Tai と Shaw<sup>(11)</sup> は, 式(11-42a)を基本解とする境界積分方程式を外周で  $\partial\phi/\partial n = 0$  の境界条件を持つ半径  $R$  の円筒体系について解析的に解き, 実部と虚部から, 各々,

$$Y_L(BR) \cdot [\partial J_L(BR)/\partial n] = 0 \quad (11-43a)$$

及び

$$J_L(BR) \cdot [\partial J_L(BR)/\partial n] = 0 \quad (11-43b)$$

の解が派生することを示した。 $J_L(\cdot)$  と  $Y_L(\cdot)$  は各々, 第 1 種及び第 2 種の  $L$  次 Bessel

関数である。実関数である式(11-42b)を基本解とした時は, 式(11-43a)から, 本来の解である  $\partial J_L(BR)/\partial n = 0$  の他に, 意味のない  $Y_L(BR) = 0$  も固有ベクトルとして現われる。

一方, 式(11-42a)を基本解とした時は, 実部と虚部の両方程式を連立させて解くから, 式(11-43a)と(11-43b)が共通して持つ  $\partial J_L(BR)/\partial n = 0$  のみが正しい解として得られる。

式(11-42a)を基本解とした時, 境界積分方程式は複素行列方程式となるので特別の考慮が必要である。ここでは, 直接に複素数演算を行うのではなく, 複素行列の逆行列を実行列の逆行列計算により求める方法<sup>(13)</sup>を採用する。

境界積分方程式を離散化して得られる行列方程式は,

$$\vec{H}\vec{\phi} - \vec{G}\vec{J} + \vec{Q} = 0 \quad (11-44)$$

の形式をしている。未知数を左辺, 既知数を右辺にくるように書き直せば, 式(11-44)は

$$\vec{A}\vec{z} = \vec{w} \quad (11-45)$$

の形式となる。 $\vec{z}$  は  $\vec{\phi}$  と  $\vec{J}$  のうち未知のものを集めたベクトルであり,  $\vec{w}$  は境界条件及び源項の寄与である。ここで,

$$\vec{A} = \vec{\alpha} + i\vec{\beta}, \quad \vec{z} = \vec{x} + i\vec{y}, \quad \vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$$

とおき,  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  は  $n \times n$  の実行列, また,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  は実ベクトルとする。これらを用いて式(11-45)を書きかえると

$$(\vec{\alpha} + i\vec{\beta})(\vec{x} + i\vec{y}) = (\vec{u} + i\vec{v}) \quad (11-46)$$

となり, 実部と虚部から二つの方程式  $(\vec{\alpha}\vec{x} - \vec{\beta}\vec{y}) = \vec{u}$  及び  $(\vec{\beta}\vec{x} + \vec{\alpha}\vec{y}) = \vec{v}$  が得られる。これらは実行列方程式

$$\begin{bmatrix} \vec{\alpha} & -\vec{\beta} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad (11-47)$$

で表示できる。 $\vec{x}$  と  $\vec{y}$  は  $2n \times 2n$  の逆行列

$$\begin{bmatrix} \vec{\alpha} & -\vec{\beta} \\ \vec{\beta} & \vec{\alpha} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{W}_1 & \vec{W}_2 \\ \vec{W}_3 & \vec{W}_4 \end{bmatrix} \quad (11-48)$$

から求めることができる。式(11-48)の右辺中の 4 つの小行列は

$$\vec{\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}\vec{\alpha}^{-1}\vec{\beta}, \quad \vec{W}_4 = \vec{\Delta}^{-1}, \quad \vec{W}_3 = -\vec{\Delta}^{-1}\vec{\beta}\vec{\alpha}^{-1}$$

$$\vec{W}_2 = \vec{\alpha}^{-1}\vec{\beta}\vec{\Delta}^{-1} = -\vec{W}_3, \quad \vec{W}_1 = \vec{\alpha}^{-1} - \vec{\alpha}^{-1}\vec{\beta}\vec{\Delta}^{-1}\vec{\beta}\vec{\alpha}^{-1} = \vec{\Delta}^{-1}$$

のようにして計算できる。 $\vec{W}_1 \sim \vec{W}_3$  が求まったら

$$\begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{W}_1 & -\vec{W}_3 \\ \vec{W}_3 & \vec{W}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad (11-49)$$

により解が得られる。中性子拡散問題では、解ベクトルの虚数部は零であることが自明なので、単に、

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_1 \mathbf{u} - \mathbf{W}_3 \mathbf{v} \quad (11-50)$$

として実ベクトルを求めることもできる。

以上のようにして式(11-44)を解き、いったん  $\vec{\phi}$  と  $\vec{J}$  が境界上の全ての節点について既知となれば、領域内部の任意の点における中性子束  $\phi_i^{(m)}$  の値は、境界積分方程式

$$D\tilde{\alpha}_i \phi_i^{(m)} = \int_{\Gamma} \phi^{(m)} J_i^{*(0)} d\Gamma - \int_{\Gamma} J^{(m)} \phi_i^{*(0)} d\Gamma + Q_i^{(m)} \quad (11-51)$$

より  $\tilde{\alpha}_i = 1.0$  を仮定して得られる。この場合、中性子束  $\phi_i^{(m)}$  は、式(11-51)の実数部のみを用いて計算すればよく、基本解として複素形式の式(11-42a)のかわりに式(11-42b)を使ってさしつかえない。この理由は、境界積分方程式(11-51)において  $D\tilde{\alpha}_i \phi_i$  の項は虚数部からは発生しないからである。

### 11.5 数値計算による検証

第11.2節に示した多重相反法による定式化の妥当性を検証するため、簡単な単一領域問題についていくつかのテスト計算を行った。この節ではその結果について概要を記すとともに、第11.3節で述べた収束安定性の問題についても実例に基づいて議論する。

一辺が 50cm の均質な単一正方形領域をテスト計算の対象として選んだ。Fig.11-1 に示すように、隣り合う2辺に零中性子束、残りの2辺に零中性子流の境界条件を与えた。

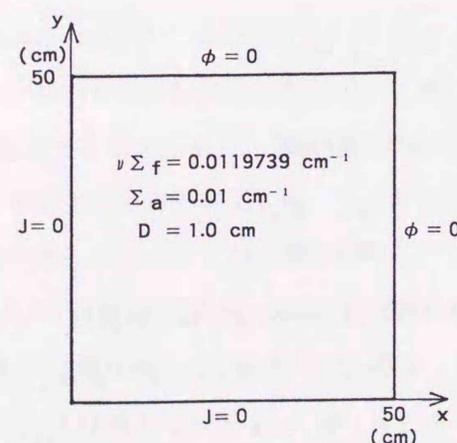


Fig.11-1 Specifications for the neutron diffusion problem

各辺とも5個の線形境界要素に等分割し、4個のかど点ではいずれも同一座標に2個の節点を定義した。核定数の組は、与えられた幾何形状と境界条件の下で実効増倍率の厳密解が  $k_{\text{eff}} = 1.0$  となるように、

$$D = 1.0 \text{ (cm)}, \quad \Sigma_a = 0.01 \text{ (cm}^{-1}\text{)} \quad \text{and} \quad \nu \Sigma_f = 0.0119739 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$$

と定めた。なお、中性子源反復仮定における実効増倍率の計算には、第9.2節の式(9-29)に基づく境界積分の漸化式を用いた。

#### 計算例1 ( $\lambda_e = \infty$ を仮定した場合)

実効増倍率の推定値を  $\lambda_e = \infty$  のように選んだ場合は、式(11-2)は中性子拡散方程式の原形式(11-1)に一致する。この場合、式(11-3b)で定義される量  $B_0^2$  は負となり、基本解としては修正 Bessel関数に基づく式(11-15b)が使われる。Fig.11-2 は、中性子源反復の初回から 100回までの実効増倍率の計算値の収束状況を示したものである。反復の100回目では 100次までの高次基本解が計算に使われている。Fig.11-2 で破線は、反復  $m$  回

$$\varepsilon^{(m)} = \left| \frac{k_{\text{eff}}^{(m)} - k_{\text{eff}}^{(m-1)}}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \right| \quad (11-52)$$

で定義される実効増倍率の偏差をプロットしたものである。

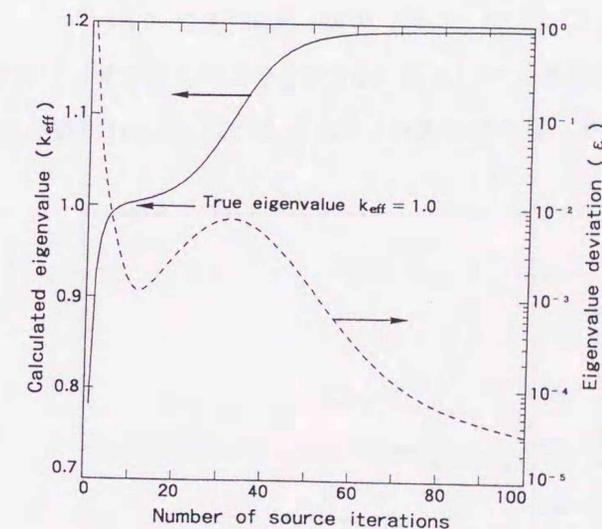


Fig.11-2 Convergence behavior of source iteration in case of  $\lambda_e = \infty$

反復の初期において実効増倍率の計算値は真値 ( $k_{\text{eff}} = 1.0$ ) に速やかに接近しているように見え、7回に  $k_{\text{eff}} = 0.99843$ 、8回に  $k_{\text{eff}} = 1.00070$  を与えている。しかし、8回を過ぎると計算値は真値から徐々にはずれる傾向を示している。式(11-52)による実効増倍

率の偏差は第12回に最小値  $\varepsilon = 1.18 \times 10^{-3}$  を示した後、上昇に転じている。この現象は多重相反計算において丸め誤差が蓄積されたためと考えられた<sup>(8)</sup>。この場合、式(11-38)で与えた収束安定条件は満足されていない。

興味深いことに、Fig.11-2における実効増倍率の計算値は無限増倍率  $k_{\infty} = \nu \Sigma_f / \Sigma_a$  ( $= 1.19739$ ) に向かって偽の収束をしているように見える。実際、100回目に計算された境界上の中性子流は極めて小さな値となっており、中性子の漏れがほとんどない状態、すなわち、実効増倍率が無限増倍率にはほぼ等しい状態を表している。Fig.11-2では、丸め誤差の蓄積により実効増倍率の計算値は徐々に大きくなる傾向を示している。たまたま実効増倍率の計算値が無限増倍率にはほぼ等しくなった時、式(11-37)で定義した量  $\tilde{\eta}$  が

$$\tilde{\eta} \rightarrow \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{k_{\text{eff}}^{(m-1)}} \rightarrow \frac{\Sigma_f / \Sigma_a}{k_{\infty}} = 1.0 \quad (11-53)$$

のように極めて 1.0 に近くなるために、丸め誤差の蓄積が緩和される。実効増倍率の計算値が無限増倍率に偽収束するように見えるのはこのためと考えられる。

#### 計算例2 ( $\lambda_e$ の良好推定値を用いた場合)

ここでは、式(11-38)による収束安定条件を満足するように実効増倍率の推定値  $\lambda_e$  を

$$1.03, 1.02, 1.01, 1.00, 0.99, 0.98 \text{ 及び } 0.97$$

のように選んだ時の計算結果について述べる。 $\lambda_e$  をこのような値とした時、式(11-3b)で定義した  $B_0^2$  は正となり、基本解は式(11-15a)のように Hankel関数を含む形式となる。

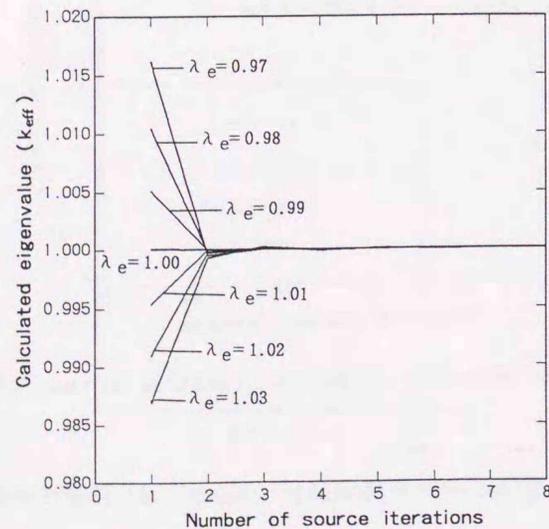


Fig.11-3 Convergence behavior of  $k_{\text{eff}}$  for well estimated value of  $\lambda_e$

したがって、厳密には複素計算を実行すべきであるが、ここでは簡単のため零次基本解として式(11-15a)のかわりに式(11-42b)を用いた。実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  は、

$$k_{\text{eff}} = \lambda \lambda_e / (\lambda + \lambda_e) \quad (11-54)$$

で計算される。

種々の  $\lambda_e$  に対する実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  の収束状況を Fig.11-3 に示す。Fig.11-4 は実効増倍率の偏差  $\varepsilon$  の変化を示す。中性子源反復は

$$|\Delta \lambda / \lambda| = |\{\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)}\} / \lambda^{(m-1)}| \quad (11-55)$$

で定義される量が  $10^{-5}$  を下回った時に打ち切るようにした。 $\lambda_e = \infty$  の時に比べると、Fig.11-3 に示される結果は極めて収束の早いことに気づく。式(11-55)の条件を満足した時、いずれのケースにおいても  $\varepsilon$  の値は  $10^{-6}$  以下であり、かつ、いずれも実効増倍率の収束値  $k_{\text{eff}} = 1.000053$  を得ている。これは、真値に対してわずか 0.0053% の相対誤差に過ぎない。以上の結果から示されるように、多重相反法に基づく中性子源反復計算において早い収束と高精度の解を保証するためには、式(11-38)で与えた収束安定条件を満足させることが不可欠である<sup>(9)</sup>。このためには、式(11-2)で施した Wielandt の原点移動法が極めて有効であることが明らかになった。

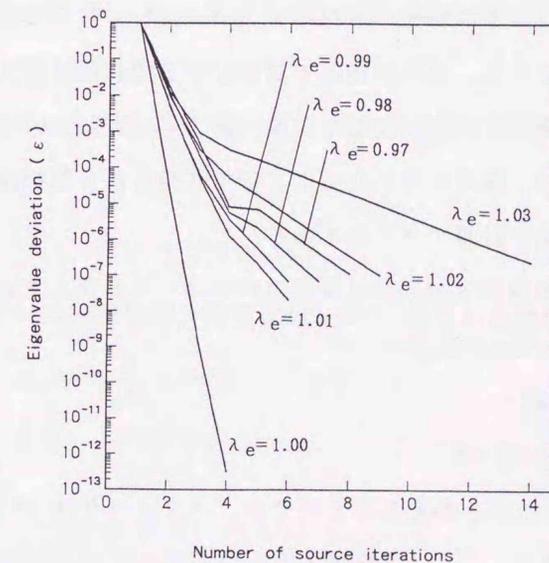


Fig.11-4 Behavior of eigenvalue deviation  $\varepsilon$  for well estimated value of  $\lambda_e$

Fig.11-3 より示唆されるように、実効増倍率の推定値  $\lambda_e$  が実効増倍率の真値に近いものであるほど中性子源反復の収束が早い。このことは Wielandt の原点移動法がもたらすもうひとつの利点である。この利点を活かすことによって、以下のように非常に効率的な

中性子源反復のやり方を考えることができる。即ち、適当な  $\lambda_e$  の下で中性子源反復を少数回だけ実行し、得られた実効増倍率を新しい  $\lambda_e$  として再び少数回の中性子源反復を実行する。この時に得られる実効増倍率の精度が式(11-52)の条件を満足するまで上記の手続きを繰り返す。この方法によれば、実効増倍率の当初の推定値がかなり粗いものであっても  $\lambda_e$  の更新によってやがて高精度の結果に収束する。ちなみに、 $\lambda_e = \infty$  を仮定した「計算例1」では、収束安定条件の式(11-38)を満足していないとはいえ、反復8回までに計算値は  $k_{\text{eff}} = 1.0 \pm 0.002$  の範囲に達している。したがって、このような悪条件の計算でもその反復初期の計算値を新たな  $\lambda_e$  とすれば、中性子源反復の再開によって「計算例2」でみたような早い収束と高精度を実現できる。なお、この方法によると中性子源反復の回数が少なくてすむので、核分裂中性子源に関する積分  $Q_i^{(m)}$  を境界積分の級数で表した式(11-24a)において級数の数が節約できるというもうひとつの利点が生じる。

### 11.6 Helmholtz 方程式による一般の固有値問題への応用

実効増倍率を求める目的で中性子源反復に多重相反境界要素法をとりこんだ方法を開発したわけであるが、この方法は原子炉物理のみならず Helmholtz 方程式で記述される一般の固有値問題に対しても応用できる。原子炉物理で対象とする固有値は最大固有値(実効増倍率)1個のみであるが、振動・音響・波動などの一般工学分野においては複数の固有値を調べる必要が生じる。実は、臨界計算のためにここで開発した多重相反法をわずかに修正すれば、高次固有値も容易に計算できるのである<sup>(14)</sup>。

エネルギー1群の中性子拡散方程式(11-1)は4個のパラメータを含んでいるが、いま、

$$B^2 = (\nu \Sigma_f / k_{\text{eff}} - \Sigma_a) / D \quad (11-56)$$

なる量を用いれば、式(11-1)は、

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \quad (11-57)$$

の標準的な Helmholtz 方程式にかきかえることができ、パラメータは  $B^2$  のみとなる。式(11-57)を中性子源反復(以下、「ソース反復」といいかえる)のようにして解くために以下の修正を施す。まず、式(11-57)中の  $B^2$  を

$$B^2 = B_0^2 + \delta B^2 \quad (11-58)$$

のように2つの部分に分離する。ここで  $B_0^2$  は  $B^2$  の推定値であり、 $\delta B^2$  は  $B^2$  の真値からの偏差を表す。式(11-58)を利用して式(11-57)を

$$\nabla^2 \phi + B_0^2 \phi + \phi / \lambda = 0 \quad (11-59)$$

のようにかきかえ、新しい固有値  $\lambda$  を

$$\lambda = 1 / \delta B^2 = (B^2 - B_0^2)^{-1} \quad (11-60)$$

のように定義する。 $\phi / \lambda$  をソース項とみなせば、 $\lambda$  の値を決定するためにソース反復の手法が使える。また、推定値  $B_0^2$  を適当に選べば最大固有値に対応する基本モードのみならず高次モードの解を求めることができる。Wielandtの原点移動法<sup>(2)</sup>の考え方によると、この反復計算は推定値  $B_0^2$  に最も近い  $B^2$  に対応した固有ベクトルに収束する。求めようとする固有値  $B^2$  に対する  $|B^2 - B_0^2|$  が他のどの固有値に対する  $|B^2 - B_0^2|$  よりも小さくなるからである。

ソース反復の  $m$  回において、式(11-59)は

$$-\{\nabla^2 \phi^{(m)} + B_0^2 \phi^{(m)}\} = S^{(m)} = \begin{cases} S_0 = 1.0 & (m=1) \\ \phi^{(m-1)} / \lambda^{(m-1)} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (11-61a)$$

$$\quad (11-61b)$$

の形式でかかれる。式(11-61)に対応する境界積分方程式は、

$$\tilde{c}_i \phi_i^{(m)} + \int_{\Gamma} \left\{ \phi^{(m)} J_i^{*(0)} - J_i^{(m)} \phi_i^{*(0)} \right\} d\Gamma + Q_i^{(m)} = 0 \quad (11-62)$$

とかける。零次基本解  $\phi_i^{*(0)}$  は中性子拡散問題の時と同様に、

$$\nabla^2 \phi_i^{*(0)} + B_0^2 \phi_i^{*(0)} + \delta_i = 0 \quad (11-63)$$

を満たすものとする。ただし、式(11-62)には拡散係数に相当する量はなく、また、

$$J_i^{(m)} = \partial \phi^{(m)} / \partial n \quad (11-64a)$$

及び

$$J_i^{*(0)} = \partial \phi_i^{*(0)} / \partial n \quad (11-64b)$$

のように定義している。境界積分方程式(11-62)に含まれる領域積分項

$$Q_i^{(m)} = \int_{\Omega} S^{(m)} \phi_i^{*(0)} d\Omega \quad (11-65)$$

は、多重相反法により、この場合、

$$Q_i^{(m)} = \left\{ \prod_{L=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^{(m-L)}} \right\} \cdot Z_i(1, m-1) - \sum_{L=1}^{m-1} \left\{ \prod_{S=1}^L \frac{1}{\lambda^{(m-S)}} \right\} \cdot \int_{\Gamma} \left\{ \phi^{(m-L)} J_i^{*(L)} - \phi_i^{*(L)} J^{(m-L)} \right\} d\Gamma \quad (m \geq 2) \quad (11-66a)$$

のような境界積分の級数に変換される<sup>(10)(14)</sup>。ここで、

$$Z_i(1, m-1) = -\frac{1}{B_0^2} Z_i(1, m-2) - \frac{S_0}{B_0^2} \int_{\Gamma} J_i^{*(m-1)} d\Gamma \quad (m \geq 2) \quad (11-66b)$$

及び

$$Z_i(1,0) \equiv Q_i^{(1)} = -\frac{S_0}{B_0^2} \left\{ \tilde{c}_i + \int_{\Gamma} J_i^{*(0)} d\Gamma \right\} \quad (m=1) \quad (11-66c)$$

である。式(11-66a)~(11-66b)に必要なL次基本解は中性子拡散問題の時と同様、Hankel関数に基づく式(11-25a)を使うことができる。

次に、中性子拡散の場合に調べたと同様に、一般の固有値問題についても多重相反計算における収束安定条件を導いておく必要がある。その導出は著者による既報<sup>(10)(14)</sup>に与えられている。ここでは結果のみを記すことにすれば、

$$\eta = \left| \frac{[B^{(m-L)}]^2 - B_0^2}{B_0^2} \right| < 1.0 \quad (11-67a)$$

または、もっと簡単に

$$B_0^2 > [B^{(m-L)}]^2 / 2 \quad (11-67b)$$

を満足するように  $B_0^2$  を与えるとよい。式(11-67a)は、

$$B_0^2 \rightarrow -\tilde{\Sigma}_a / D = (\nu \Sigma_f / \lambda_e - \Sigma_a) / D \quad (11-68a)$$

及び

$$[B^{(m-L)}]^2 \rightarrow \{\nu \Sigma_f / k_{eff}^{(m-L)} - \Sigma_a\} / D \quad (11-68b)$$

の置き換えをすれば、中性子拡散問題における収束安定条件の式(11-38)に全く等価であることがわかる。

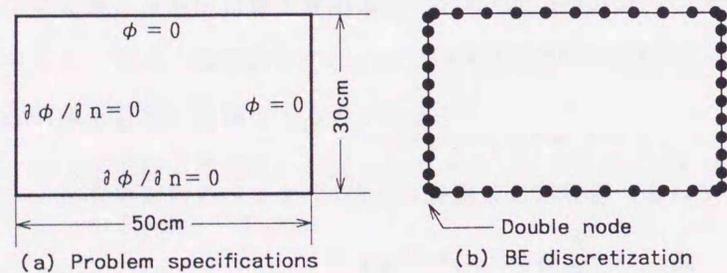


Fig.11-5 Specifications and discretization for a standard Helmholtz problem

ここで、Fig.11-5(a)に示すような50cmと30cmの辺からなる長方形を一般固有値問題のテスト計算例として取り上げる。隣り合う2辺に  $\phi = 0$ 、残りの2辺に  $\partial\phi/\partial n = 0$  の境界条件を設定する。この問題には解析解が存在し、波数 (wave number) は

$$B_{p,q} = \pi \sqrt{\left(\frac{p}{100}\right)^2 + \left(\frac{q}{60}\right)^2} \quad (p, q = 1, 3, 5, \dots) \quad (11-69)$$

のように与えられ、また、領域内部のポテンシャル分布は

$$\phi(x,y) \propto \cos(p\pi x/100) \cdot \cos(q\pi y/60) \quad (11-70)$$

の形式をしている。境界要素法による計算のため、Fig.11-5(b)に示すように各辺を10個の線形要素に等分割し、各々のかど点には2個の節点を設けた。零次基本解として複素関数であるHankel関数を含む式(11-42a)の形式を用いた。なお、ソース反復の過程で  $B^2$  の値を精度良く計算するために第9.2節の式(9-29)に基づく境界積分の漸化式と式(9-36)を用いた。ソース反復による固有値探索に Wielandt のアルゴリズムを併用しているため、波数  $B$  の推定値  $B_0$  の入力が必要である。 $B_0$  が  $B$  の真値に近ければ、式(11-38)で与えた収束安定条件は自動的に満足する。

種々の波数モードを探索するために行った計算結果の概要を Table 11-1 に示す。いずれのケースにおいても収束判定は  $|\Delta\lambda/\lambda| < 10^{-5}$  とした。いずれの  $(p,q)$  モードに対しても、 $B_0$  を波数の真値に近い値に選べばソース反復の収束は早い。一方、推定値  $B_0$  が隣接する2つの波数の中間近傍に設定されると、収束は極めて遅くなるか、しばしば発散することとなる。

Fig.11-6 は、基本モード ( $p=q=1$ ) の解 (解析解:  $B=0.06106$ ) を求めるために行った2通りの計算で、波数の計算値の収束の様子を比較したものである。 $B_0=0.06$  としたケースでは、わずか5回の反復で  $|\Delta\lambda/\lambda| < 10^{-5}$  の収束判定条件を満足している。一方、 $B_0=0.03$  を推定値としたケースでは、式(11-67a)で定義した  $\eta$  の値が  $\sim 3.14$  と、1.0より極めて大きなものとなり、発散振動をひきおこしている。

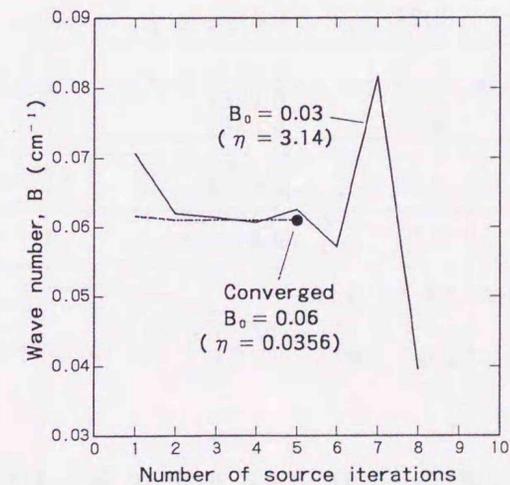


Fig.11-6 Convergence behavior of wave number

Table 11-1 Summary of test calculation results for the standard Helmholtz Problem

p	q	Anal. Sol. (B)	Estimate (B <sub>0</sub> )	$\frac{ B^2 - B_0^2 }{ B_0^2 }$	No. of It. (m)	Calculated (B <sup>(m)</sup> )
1	1	0.06106	0.03	3.14	—	Divergent
			0.04	1.33	—	Divergent
			0.05	0.491	6	0.06109
			0.06	0.0356	5	0.06108
			0.07	0.239	8	0.06107
			0.08	0.417	17	0.06106
			0.09	—	—	Divergent
3	1	0.1078	0.10	0.162	13	0.1079
			0.11	0.0396	7	0.1079
			0.12	0.193	12	0.1079
			0.13	0.312	27	0.1078
0.14	—	—	Divergent			
1	3	0.1602	0.15	0.141	21	0.1603
			0.16	0.00250	6	0.1603
5	1	0.1656	0.17	0.0511	17	0.1657
3	3	0.1832	0.18	0.0359	12	0.1833
			0.19	0.0703	13	0.1832
			0.20	0.161	33	0.1831
5	3	0.2221	0.21	0.119	36	0.2223
			0.22	0.0192	14	0.2224
7	1	0.2261	0.23	0.0336	14	0.2263
			0.24	0.112	29	0.2263
1	5	0.2637	0.25	0.113	28	0.2639
			0.26	0.0287	10	0.2639
			0.27	0.0461	31	0.2638
3	5	0.2782	0.28	0.0128	11	0.2782
9	1	0.2876	0.29	0.0165	9	0.2878

Convergence criterion:  $\Delta\lambda / \lambda \leq 10^{-5}$

Analytic solution:  $B_{p,q} = \pi \sqrt{\left(\frac{p}{100}\right)^2 + \left(\frac{q}{60}\right)^2}$  (p, q = 1, 3, 5, ...)

Fig.11-7 は、4種類の推定値  $B_0 = 0.03, 0.04, 0.05, 0.06$  に対して実行した反復計算の過程で、式(11-71)で定義した  $|\Delta\lambda / \lambda|$  がどのように変化したかを示している。各々のケースで、 $\eta$  は 3.14, 1.33, 0.491 及び 0.0356 の値を持つ。 $B_0 = 0.05$  と 0.06 のケースでは、各々、わずか5回と6回で収束しており、両者とも  $\eta < 1.0$  であること

からうなづける。 $B_0 = 0.03$  と 0.04 のケースでは、 $|\Delta\lambda / \lambda|$  の値が、各々、3回と6回で最小値を取るものの、 $\eta > 1.0$  であるために、その後、増加傾向に転じている。このように、一般の固有値問題においても多重相反計算における収束安定性を確保するために式(11-67a)を満足させることが重要である。

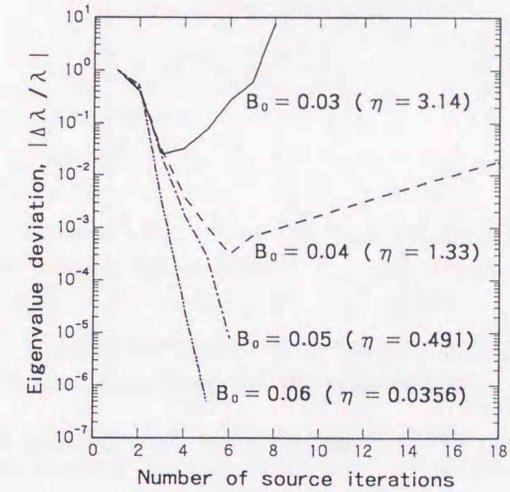


Fig.11-7 Convergence behavior of  $|\Delta\lambda / \lambda|$

固有値探索を終えて境界上の未知数が全て既知となれば、式(11-62)を使って領域内部におけるポテンシャル分布を計算できる。この場合、式(11-62)中の  $\tilde{\phi}_i^{(m)}$  の項は虚数部からは派生しないから、基本解として式(11-42a)の複素関数を用いる必要がなく、その実数部である式(11-42b)を使ってかまわない。Fig.11-8 と Fig.11-9 は、種々の(p,q)モードについて内部ポテンシャル分布をプロットしたものである。

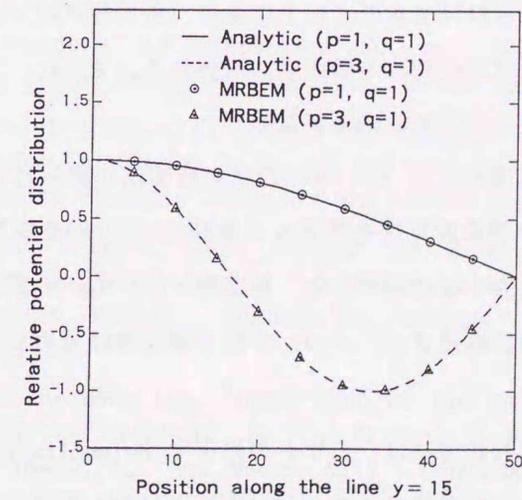


Fig.11-8 Comparison of internal potential distributions (1)

基本モード ( $p=q=1$ ) 及び ( $p=3, q=1$ )モードの計算値は解析解と極めてよく一致しており、さらに高次のモードについても計算値は解析解を良く再現している。

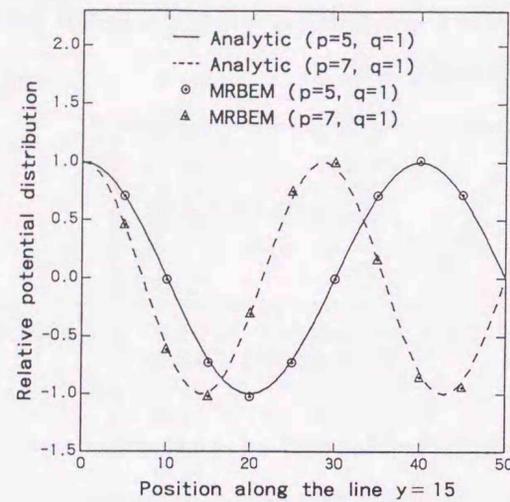


Fig.11-9 Comparison of internal potential distributions (2)

### 11.7 まとめ

中性子源反復計算に多重相反境界要素法がはじめて適用された。境界積分方程式中において反復  $m$  回の核分裂中性子源に起因する領域積分は  $(m-1)$ 個の境界積分の級数に変換された。これらの境界積分は、零次から  $(m-1)$ 次の高次基本解及び過去の  $(m-1)$ 回の反復で計算された境界上の中性子束と中性子流を使って計算される。実効増倍率は第9.2節に述べたように境界積分の漸化式から計算できる。以上により、多重相反法では領域内部の離散化が全く不要となり、境界要素法の利点が最大限に活かせる。さらに、二重相反法のように中性子源分布を既存の関数で展開する必要がない。

ここで用いている中性子源反復法には Wielandtの原点移動法が組み合わされている。この方法では、多重相反計算の収束安定性を保証する条件式(11-38)を満足するように実効増倍率  $k_{eff}$  の推定値  $\lambda_e$  を入力する必要がある。推定値  $\lambda_e$  が  $k_{eff}$  の真値に近いものであれば、収束安定条件は自動的に満足され、かつ、中性子源反復は極めて早く収束することが明らかにされた。

臨界計算のためにここで開発した方法は、わずかの修正で Helmholtz方程式で記述される一般の固有値問題に対しても適用可能であることが実証された。特に、Wielandtのアル

ゴリズムを積極的に活用することにより、基本モード固有値のみならず複数の高次モード固有値及びそれらに対応するポテンシャル分布が容易に計算できることが示された。一般固有値問題に対して多重相反計算の収束安定性を確保するための条件として、 $B_0^2 < B^2/2$  が与えられた。ここに、 $B$  は波数の真値、 $B_0$  はその推定値である。

### 参考文献

1. Nowak, A.J. and Brebbia, C.A., "The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming B.E.M. Domain Integral to the Boundary," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 6[3], 164 (1989).
2. Wachspress, E.L., "Iterative Solution of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics," Prentice-Hall (1966).
3. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Dual and Multiple Reciprocity Formulations Applied to Fission Neutron Source Problems," in *Boundary Elements X IV* (Eds. Brebbia, C.A., Dominguez, F. and Paris, F.), p.1-25, Proceedings of the 14th Int. Conf. on BEM, Sevilla, Spain, Computational Mechanics Publications, Southampton (1992).
4. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Multiple Reciprocity Boundary Element Formulation for One-Group Fission Neutron Source Iteration Problems," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11[1], 39 (1993).
5. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Generation of Higher Order Fundamental Solutions to the Two-Dimensional Modified Helmholtz Equation," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11[1], 87 (1993).
6. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions," Dover (1965).
7. Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., "Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press (1986).
8. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," *Boundary Elements Abstracts and Newsletter*, 3[2], 67 (1992).
9. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Remedy for Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10[4], 345 (1992).
10. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Application of the Multiple Reciprocity Method to Neutron Diffusion Problems" in "The Multiple Reciprocity Boundary Element Method (Eds. Nowak, A.J. and Neves, A.C.)," Computational Mechanics Publications, Southampton (1994).

11. Tai, G.R.C. and Shaw, R.P., "Eigenvalues and Eigenmodes for the Homogeneous Helmholtz Equation for Arbitrary Domains," Report No.90, Department of Engineering Science, State University of New York at Buffalo (1973).
12. DeMey, G., "A Simplified Integral Equation Method for the Calculation of the Eigenvalues of the Helmholtz Equation," International Journal of Numerical Methods for Engineering, 11, 1340 (1977).
13. Westlake, J.R., "A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations," John Wiley & Sons (1968).
14. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Source Iterative Multiple Reciprocity Technique for Helmholtz Eigenvalue Problems with Boundary Elements," in Proceedings of the 5th Japan-China Symposium on Boundary Element Methods, Sapporo, Japan, Elsevier Science Publications (1993).

## 第12章 多重相反境界要素法による正多角形のバックリング表式の導出

本章では、正多角形の幾何学的バックリングを記述する数学的な表式を導き出すために第11章で紹介した多重相反境界要素法を応用する。ここでの応用例は正多角形に限っているが、ここで与える手法は一般のいかなる不規則幾何形状に対しても適用可能である。著者による既報<sup>(1)</sup>には本章に関連したさらに詳しい記述がある。

### 12.1 正多角形の幾何学的バックリングに関する考察

裸の均質体系に対する幾何学的バックリングは、Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + Bg^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (12-1)$$

の最小固有値と定義されており、通常、中性子束分布  $\phi(\mathbf{r})$  は体系の境界で零とする境界条件が課せられている。考えている体系の形状と寸法に対して幾何学的バックリングが既知であれば、

$$B_m^2 = (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) / D \quad (12-2)$$

で定義される材料バックリング  $B_m^2$  と大小比較することにより、この体系が超臨界か未臨界かの判定を簡単に下すことができる。材料バックリングは体系の物質組成から計算される。もし幾何学的バックリングが種々の幾何形状に対して簡便な表式で与えられていれば、幾何学的バックリングと材料バックリングのこのような比較法は臨界安全上、極めて有用である。

平板、長方形、円、直方体、球、円筒などのいくつかの単純な幾何形状に対しては、幾何学的バックリングの簡単な数学的表式が与えられている<sup>(2)</sup>。これらの幾何形状では、2次元または3次元体系においても、中性子束分布  $\phi(\mathbf{r})$  が1次元成分に容易に分離できるからである。

さらに複雑な幾何形状に対しては、離散化解法を使って式(12-1)を解けば幾何学的バックリングを計算できる。多重相反境界要素法はこの作業に適している。多重相反境界要素法の何よりの利点は、境界のみを離散化すればよいことであり、領域内部のメッシュ分割が不要である。この特徴は、幾何学的バックリングの一般的表式を導出するための広範なサーベイ計算に有効である。この作業では、多くの寸法と形状について頻繁に入力データを修正する必要があるからである。領域内部の離散化に基づく差分法や有限要素法では、

入力データを迅速かつ効率的に修正するのは手軽ではない。これに対し多重相反境界要素法では、幾何形状の変化に応じて入力データを修正するのは比較的容易である。

日本原子力研究所で実施された一連の臨界実験の結果<sup>(3)</sup>から、正多角形の幾何学的バックリングは、外接円の半径  $R_c$  の二乗に反比例することが示唆されている。即ち、

$$B_g^2 \sim (a_N/R_c)^2 \quad (12-3)$$

のように表現できる見通しを得ている。ここに  $a_N$  は正多角形の種類、即ち、正多角形の辺の数で決まる定数である。正方形の幾何学的バックリングは、一辺の長さを  $L$  とする

時  $2(\pi/L)^2$  で与えられる<sup>(2)</sup>から、 $a_N$  の値は  $\pi$  となる。また、半径  $R$  の円に対して幾何学的バックリングが  $B_g^2 = (2.405/R)^2$  となることが知られている<sup>(2)</sup>から、 $L$  が無限大の時、 $a_N$  は 2.405 の値を持つ。

正多角形の幾何学的バックリングを考察するために、Fig.12-1 を見てみよう。この図では、典型的な正多角形についてその外接円と内接円をあわせて描いている。ここで、考えている正多角形と外接円、内接円及び正多角形と同一面積を有する円との間には、以下の関係があると仮定する。

(A) 正多角形のバックリングは、外接円のバックリングより大きく、内接円のバックリングより小さい。

(B) 正多角形のバックリングは、その正多角形と等しい面積を有する円のバックリングより大きい。

仮定(A)の意味するところは、式(12-3)における  $a_N$  の真値は

$$2.405 < a_N < 2.405 \times R_c/R_i, \quad (12-4)$$

の範囲にあるということである。ここで、 $R_c$  と  $R_i$  は各々、外接円及び内接円の半径である。正多角形の辺の数を  $N$  とすれば、 $R_c$  と  $R_i$  の間には、

$$R_i = R_c \cdot \cos(\pi/N), \quad (12-5)$$

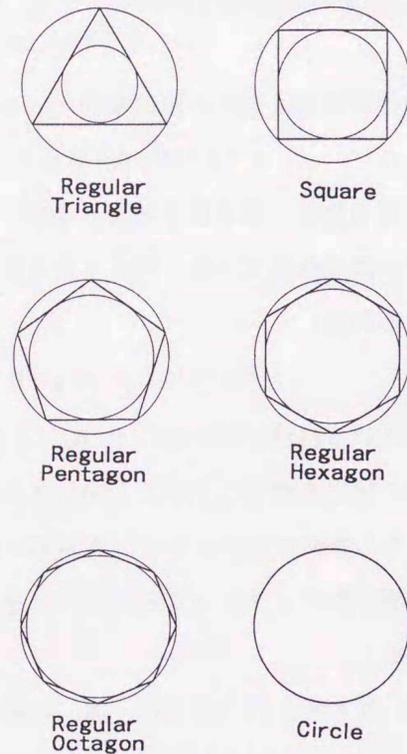


Fig.12-1 Typical regular polygons with circumscribed and inscribed circle

の関係がある。 $N$  個の辺を持つ正多角形の面積は、

$$A_N = (N/2)R_c^2 \sin(2\pi/N) \quad (12-6)$$

で与えられる。また、 $A_N$  と等しい面積を有する円のバックリング  $B_e^2$  は、

$$B_e^2 = (2.405)^2 / (A_N/\pi) = 18.171/A_N \quad (12-7)$$

のようにかける。仮定(B)は  $B_e^2 < B_g^2$  ということであるから、

$$B_e^2 = \frac{18.171}{(N/2)R_c^2 \sin(2\pi/N)} < B_g^2 = (a_N/R_c)^2, \quad (12-8a)$$

即ち、

$$a_N^2 > 18.171 / \{(N/2)\sin(2\pi/N)\} \quad (12-8b)$$

のようになる。仮定の(A)と(B)を併せると、不等式

$$L_N \equiv \sqrt{\frac{18.171}{\left(\frac{N}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}} < a_N < \frac{2.405}{\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)} \equiv U_N \quad (12-9)$$

が得られる。幾何定数  $a_N$  の存在範囲は式(12-9)から予測できる。典型的な正多角形に対する結果を Table 12-1 に示す。式(12-9)を導くために設定した仮定の妥当性は、次節において多重相反境界要素法を使った詳細解析の結果から確認される。

Table 12-1 Estimates of Geometric Constants for Various Regular Polygons

Number of Sides (N)	$R_i/R_c = \cos(\pi/N)$	Volume Fraction $A_N/(\pi R_c^2)^{+)}$	Geometric Constants $L_N < a_N < U_N^{++}$
3 (Triangle)	0.5	0.4135	$3.740 < a_N < 4.810$
4 (Square)	0.7071	0.6366	$3.014 < a_N < 3.401$
5 (Pentagon)	0.8090	0.7568	$2.764 < a_N < 2.973$
6 (Hexagon)	0.8660	0.8270	$2.644 < a_N < 2.777$
7	0.9010	0.8710	$2.577 < a_N < 2.669$
8 (Octagon)	0.9239	0.9003	$2.535 < a_N < 2.603$
9	0.9397	0.9207	$2.506 < a_N < 2.559$
10 (Decagon)	0.9511	0.9355	$2.487 < a_N < 2.529$
11	0.9595	0.9465	$2.472 < a_N < 2.507$
12	0.9659	0.9549	$2.461 < a_N < 2.490$
$\infty$ (Circle)	1.0	1.0	$a_N = 2.405$

$$+ ) A_N = (N/2)R_c^2 \sin(2\pi/N) \quad ++ ) L_N \equiv \sqrt{\frac{18.171}{\left(\frac{N}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)}}, \quad U_N \equiv \frac{2.405}{\cos\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

## 12.2 多重相反境界要素法による幾何学的バックリング表式の導出

正三角形, 正方形, 正五角形, 正六角形及び正八角形を典型的な正多角形の例として取り上げる。これらの幾何学的バックリングを計算するために, 2次元体系でエネルギー1群の中性子拡散方程式を多重相反境界要素法を使って解く。

境界要素モデルを簡単にするため, 正三角形以外の正N角形は対称性を使ってN個の二等辺三角形に等分割する。この時, 個々の二等辺の長さは元の正N角形の外接円半径に一致している。正三角形については6個の小さな直角三角形に分割する。境界要素解析は, 分割された小三角形の一つに対して行う。小三角形の2辺については零中性子流, 残りの1辺には零中性子束の境界条件を設ける。各辺は, 各々, 30個の線形境界要素に分割し, かど点には2個の節点を設けることにより合計93個の節点を用いる。Fig.12-2は, 正六角形に対する離散化を示している。

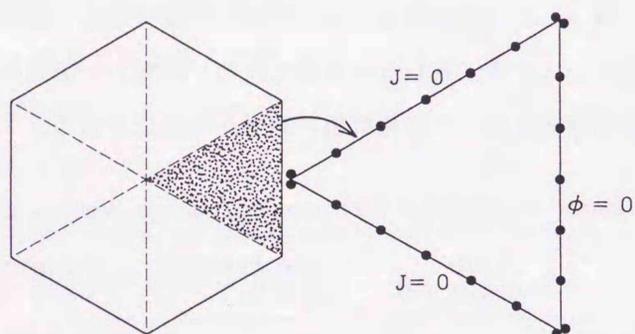


Fig.12-2 Boundary element segmentation for a hexagon. Each side of the small triangle is divided into 30 linear boundary elements for actual computations.

多重相反境界要素法は境界のみを離散化すればよいので, 形状データの作成は極めて容易である。さらに, 体系の寸法, 形状の変更に伴う入力データの修正も簡単である。ここではまず, 外接円半径が1.0cmである正多角形を考え, その小三角形の境界要素節点の座標を与える。基準となるこの座標データをいったん決めれば, 任意の寸法の正多角形の境界要素節点の座標は外接円半径を与えるだけで比例により自動的に計算できる。

幾何学的バックリングを与えるための解析では, 仮定する核定数は任意の値でよい。計算の過程で実効増倍率  $k_{eff}$  が調整されて,

$$B_m^2 = (\nu \Sigma_f / k_{eff} - \Sigma_a) / D \quad (12-10)$$

で定義される材料バックリングが幾何学的バックリングに一致するからである。一連の解

析では同一の核定数の組:  $\nu \Sigma_f = 0.015$ ,  $\Sigma_a = 0.01$  及び  $D = 1.0$  を用いた。

第11章で示した多重相反法の定式化では Wielandt のアルゴリズムを併用しているために,  $k_{eff}$  の推定値  $\lambda_e$  が必要である。 $\lambda_e$  の値が  $k_{eff}$  の真値に近ければ中性子源反復の収束が極めて早いことが知られている<sup>(4)(5)</sup>。このことから,  $\lambda_e$  の値を

$$\lambda_e \sim \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad (12-11)$$

のように見積ることを推奨できる。バックリング  $B^2$  は未知であるが, その近似値は前節で導いた不等式(12-9)を利用して与えることができる。ここでは, 式(12-9)で定義した量  $L_N$  と  $U_N$  を使って, バックリングを

$$B^2 \sim \left( \frac{L_N + U_N}{2R_c} \right)^2, \quad (12-12)$$

のように仮定する。

典型的な正多角形に対する計算結果の例を Table 12-2 に示す。良好な推定値  $\lambda_e$  による Wielandt 加速のおかげで中性子源反復は全てのケースで早い収束を示している。一連の反復計算の打ち切りは,

$$1/\lambda^{(m)} = 1/k_{eff}^{(m)} - 1/\lambda_e$$

で定義される量  $\lambda^{(m)}$  に関して

$$|(\lambda^{(m)} - \lambda^{(m-1)})/\lambda^{(m-1)}| < 10^{-5}$$

を収束判定条件とした。Table 12-2 に掲げる  $\lambda_e$  の値は全て式(12-11)と(12-12)から決定した。正方形に対する幾何学的バックリングの計算値は  $(\pi/R_c)^2$  から得られる解析値と良く一致している。

いずれの正多角形でも, 外接円半径  $R_c$  と  $B_g$  の計算値との積は, 多角形の寸法によらず一定である。この事実は, 正多角形の幾何学的バックリングが外接円半径の二乗に反比例していることを示している。このことは, x軸に  $(1/R_c)^2$  をとり, y軸にバックリングの計算値を示す Fig.12-3 からも立証できる。どの正多角形においても, 計算値は原点を通る直線上にプロットされている。したがって, 正多角形の幾何学的バックリングは,

$$B_g^2 = (a_N/R_c)^2 \quad (12-13)$$

の形式となることが結論できる。幾何定数  $a_N$  は  $a_N = B_g \cdot R_c$  から, または, Fig.12-3 の直線の傾きから求めることができる。幾何定数  $a_N$  の評価結果を Table 12-3 に要約する。 $a_N$  の値は全て Table 12-1 に示した存在範囲の中にあることがわかる。これによって, 前節で与えた仮定(A)と(B)が妥当であることが確認された。

Table 12-2 Examples of Buckling Calculation Results

Geometry	R <sub>c</sub> (cm)	λ <sub>e</sub>	No. of Iteration	k <sub>eff</sub>	B <sub>g</sub> <sup>2</sup> (cm <sup>-1</sup> )	a <sub>N</sub> ~ R <sub>c</sub> ·B <sub>g</sub>	Time <sup>++</sup> (s)
Triangle	5.0	0.020	5	0.02106	7.0213-1 <sup>+) </sup>	4.190	13.52
	10.0	0.078	5	0.08085	1.7553-1	4.190	13.61
	20.0	0.27	5	0.27838	4.3883-2	4.190	13.69
	50.0	0.87	5	0.88125	7.0213-3	4.190	13.76
	100.0	1.27	5	1.27602	1.7553-3	4.190	13.78
Square	5.0	0.036	5	0.03705	3.9487-1	3.142	13.47
	10.0	0.13	5	0.13797	9.8718-2	3.142	13.54
	20.0	0.42	5	0.43253	2.4680-2	3.142	13.65
	50.0	1.06	5	1.07537	3.9487-3	3.142	13.86
	100.0	1.36	5	1.36523	9.8718-4	3.142	13.82
Pentagon	5.0	0.044	5	0.04568	3.1838-1	2.821	13.43
	10.0	0.16	5	0.16742	7.9594-2	2.821	13.57
	20.0	0.49	5	0.50170	1.9899-2	2.821	13.82
	50.0	1.13	4	1.13776	3.1838-3	2.821	9.93
	100.0	1.39	4	1.38941	7.9595-4	2.821	9.86
Hexagon	5.0	0.049	5	0.05062	2.8632-1	2.675	13.38
	10.0	0.18	4	0.18387	7.1580-2	2.675	9.59
	20.0	0.53	5	0.53773	1.7895-2	2.675	13.77
	50.0	1.16	5	1.16612	2.8632-3	2.675	13.99
	100.0	1.40	4	1.39980	7.1581-4	2.675	9.91
Octagon	5.0	0.055	4	0.05565	2.5955-1	2.547	9.56
	10.0	0.20	4	0.20030	6.4887-2	2.547	9.61
	20.0	0.57	5	0.57207	1.6221-2	2.547	13.83
	50.0	1.19	5	1.19091	2.5954-3	2.547	13.95
	100.0	1.41	5	1.40858	6.4899-4	2.548	13.98

<sup>+)</sup>  Read as 7.0213×10<sup>-1</sup>.

<sup>++)</sup>  Using FACOM M-780 computer

N個の辺を持つ正多角形の面積は、式(12-6)のように外接円半径の関数として与えることができる。式(12-6)と(12-13)を組み合わせて R<sub>c</sub> を消去すると、面積は

$$A_N = \frac{N}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{a_N}{B_g}\right)^2 \quad (12-14)$$

のように幾何学的バックリングの関数として与えられる。式(12-14)中の幾何学的バックリング B<sub>g</sub><sup>2</sup>を材料バックリング B<sub>m</sub><sup>2</sup> で置き換えた

$$\tilde{A}_N = \frac{N}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot \left(\frac{a_N}{B_m}\right)^2 \quad (12-15)$$

で定義される量は、設定した材料バックリングの下での最小臨界面積を与える。典型的な正多角形に対する  $\tilde{A}_N$  の値を Table 12-3 に併記する。

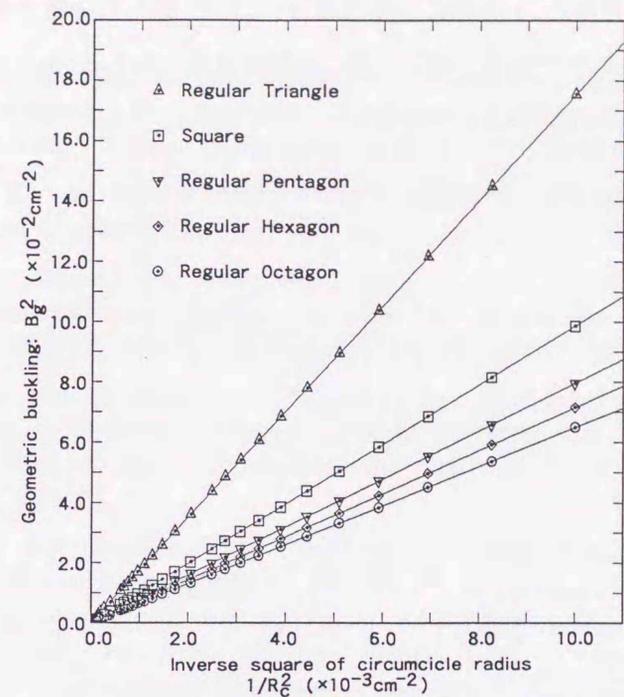


Fig.12-3 Calculated bucklings as functions of radius of circumcircle

Table 12-3 Summary of Bucklings for Typical Regular Polygons

Geometry	Number of Sides: N	B <sub>g</sub> <sup>2</sup> = (a <sub>N</sub> /R <sub>c</sub> ) <sup>2</sup>	
		Geometric Constant: a <sub>N</sub>	Minimum Critical Area $\tilde{A}_N$
Triangle	3	4.190	22.81/B <sub>m</sub> <sup>2</sup>
Square	4	3.142(π)	19.74/B <sub>m</sub> <sup>2</sup>
Pentagon	5	2.821	18.92/B <sub>m</sub> <sup>2</sup>
Hexagon	6	2.675	18.59/B <sub>m</sub> <sup>2</sup>
Octagon	8	2.547	18.35/B <sub>m</sub> <sup>2</sup>
Circle	∞	(2.405)	18.17/B <sub>m</sub> <sup>2</sup> <sup>+) </sup>

<sup>+)</sup>  calculated as 2.405<sup>2</sup>×π/B<sub>m</sub><sup>2</sup>

Fig.12-4 は、半径 30cm の円に内接する正三角形の内部に引いた線 AB に沿った中性子束分布を描いたものである。線分 AB 上の大半の個所では中性子束分布は上に凸であるが、AB の右端、即ち、三角形の頂点の近傍では下に凸となっている。このことは、2次元平面において Helmholtz 方程式を満足する幾何学的バックリングが、たとえ、一定値 B<sub>g</sub><sup>2</sup> = (a<sub>N</sub>/R<sub>c</sub>)<sup>2</sup> であっても、その 1次元成分は一樣ではなく、多角形領域の内部で正にも

負にもなり得ることを示唆している。いいかえれば、正方形以外の正多角形では、2次元バックリング  $B_g^2$  を  $x$  方向と  $y$  方向に一樣な成分  $B_x^2$  と  $B_y^2$  に分離することはできない。即ち、 $B_g^2 \neq B_x^2 + B_y^2$  である。唯一、正しい関係式は、 $B_x^2$  と  $B_y^2$  に場所依存性を持たせた  $B_g^2 = B_x^2(x,y) + B_y^2(x,y)$  である。

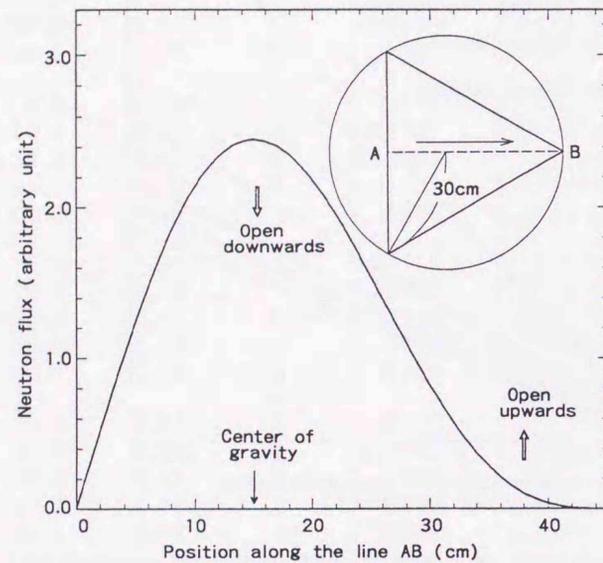


Fig.12-4 Flux distribution in a regular triangle

### 12.3 まとめ

正多角形に対する幾何学的バックリングは、外接円半径  $R_c$  を用いて、 $B_g^2 = (a_n/R_c)^2$  のように与えられることがわかった。定数  $a_n$  は、正方形に対して  $\pi$ 、無限個の辺を持つ正多角形とみなされる真円において極限值 2.405 となる。多重相反境界要素法による広範な解析により、正三角形、正五角形、正六角形及び正八角形に対する  $a_n$  の値は、各々、4.190、2.821、2.675 及び 2.547 と計算された。多重相反境界要素法は、正多角形のみならず任意の形状を有する体系の幾何学的バックリングを評価する上で有力な解析手段であると考えられる。

### 参考文献

1. Itagaki, M., Miyoshi, Y. and Hirose, H., "Geometric Buckling Expression for Regular Polygons: II. Analyses Based on Multiple Reciprocity Boundary Element Method," Nuclear Technology, 103[3], 392 (1993).
2. Glasstone, S. and Edlund, M.C., "The Elements of Nuclear Reactor Theory," Van Nostrand Co., New York (1952).
3. Miyoshi, Y., Itagaki, M., Akai, M., Hirose, H. and Hashimoto, M., "Geometric Buckling Expression for Regular Polygons: I. Measurements for Low Enriched  $UO_2-H_2O$  Lattices," Nuclear Technology, 103[3], 380 (1993).
4. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Remedy for Round-Off Error Accumulation Observed in a Neutron Diffusion Calculation Using the Multiple Reciprocity Boundary Element Method," Engineering Analysis with Boundary Elements, 10[4], 345 (1992).
5. Itagaki, M. and Brebbia, C.A., "Dual and Multiple Reciprocity Formulations Applied to Fission Neutron Source Problems," in Boundary Elements X IV (Eds. Brebbia, C.A., Dominguez, F. and Paris, F.), Vol.1, p.25, Proceedings of the 14th Int. Conf. on BEM, Sevilla, Spain, 1992, Computational Mechanics Publications, Southampton (1992).

本研究は、近年、多くの工学分野で発達している新しいコンピュータ解法である境界要素法を中性子拡散問題に適用する初めての試みである。本研究で示した定式化には、他の工学分野で開発された一般的な境界要素技術のみならず中性子拡散方程式を対象とするために独自に考案したアルゴリズムが多く含まれている。

本研究により得られた主な成果は次のようなものである。

- (1) 中性子拡散方程式に対応する境界積分方程式が導かれ、デジタル計算機による解が得られるように境界要素による離散モデルが与えられた。これによって境界要素法を用いて中性子拡散計算を行う基本算法が初めて確立され、境界要素法の中性子拡散計算への応用に関するその後の発展への道が拓かれた。
- (2) 2次元問題の定式化においては、境界積分を解析的に実行するため、Bessel関数及び変形Bessel関数の取扱いに種々の工夫が図られ、特異点近傍での数値積分の困難を取り除いた。Bessel関数や変形Bessel関数に対する解析的な積分の技法は、他の分野での境界要素法研究では深く取り上げられることのなかった部分である。
- (3) Gaussの発散定理及びGreenの第2公式と中性子拡散方程式の性質を利用して、一様中性子源、減速中性子源に起因する非斉次の領域積分項が各々等価な境界積分に変換された。これによって、これらの中性子源に基づく中性子拡散問題については領域内部をメッシュや要素に分割する必要がなくなった。
- (4) 中性子束と中性子流の連続条件を用いることによって多領域問題への拡張を可能とした。また、薄い帯状領域内の中性子束分布を1次元中性子拡散方程式の解析解で近似することにより、軽水炉の炉心隔板等、薄い帯状領域を挟む問題の効率的な取扱いを容易にした。
- (5) 実際の軽水炉への境界要素法の応用例として、炉心と反射体の境界における境界条件を中性子エネルギーに関して行列形式で精密に与えることに成功した。この行列形式の反射体境界条件を設定することにより、通常の差分計算において反射体領域に全くメッシュを設けないにもかかわらず、極めて精度の高い実効増倍率と中性子束分布の結果を得ている。
- (6) 核分裂中性子源に起因する非斉次の領域積分項を等価な境界積分に変換するため、二つの技法、二重相反法と多重相反法が初めて適用された。二重相反法と多重相反法

は、他の分野の研究者により主としてPoisson型の方程式の解法を目的として開発されたものであり、Helmholtz型ないしは固有値問題の性格を持つ中性子拡散問題にはそのままの形では適用できないという問題点があった。これらに対して、Helmholtz型固有値問題に対応した定式化を導くとともに著者独自の改良を施すことによって、中性子源反復に基づく臨界計算への応用が初めて可能となった。

- (7) 二重相反法の臨界計算への応用においては、炉内の中性子源分布をFourier級数に展開し、個々の展開項である三角関数を中性子拡散方程式のソース項とするときの特解を見出すことが技法上の骨子となっている。この場合、Fourier級数の展開係数をいかに与えるかが重要である。本研究では、この展開係数を境界積分に基づく漸化式から自動的に与えることに成功した。Poisson型方程式を対象とする従来の二重相反法では、展開係数は一般に入力条件として外部から与える必要があった。展開係数を計算プログラム内で自動的に決定するアルゴリズムは著者独自の考案であり、二重相反法の研究では過去に例がない。
- (8) Helmholtz方程式及び修正Helmholtz方程式が満たすべき一連の高次基本解は多重相反法を中性子源反復計算に適用するために不可欠であるが、これらがどのような形式で与えられるかはこれまで明確にされていなかった。本研究では、2次元問題におけるL次の基本解は、L次のHankel関数または変形Bessel関数に距離のL乗を掛け合わせた量を用いて記述されることを初めて示した。これにより、中性子源反復の第m回において核分裂中性子源に起因する領域積分は(m-1)個の境界積分項からなる有限級数に変換できるようになった。Helmholtz方程式及び修正Helmholtz方程式の高次基本解に基づく多重相反法の定式化は世界初の試みである。
- (9) 多重相反法において核分裂中性子源に起因する領域積分が境界積分の級数に変換されたことに関連して、この級数の収束安定性を保証する条件を与えた。さらに、実効増倍率の推定値に基づく仮の核分裂中性子源を元の中性子拡散方程式の両辺から差し引く、いわゆるWielandtの原点移動法を適用すれば、上記の収束安定条件が自動的に満足されることを示した。また、この収束安定条件は計算プログラムの内部で容易に判別できるので級数の数値的な発散を避けることができるようになった。このような収束安定性の問題は、多重相反法に特有の現象として他の工学分野においても議論の対象となっており、本研究における成果は一般の境界要素法研究の進展にも貢献したと考えられる。

(10) さらに、二重相反法と多重相反法の両方に共通して、中性子源反復過程の実効増倍率を中性子流に関する境界積分の漸化式で与えられることを示し、テスト計算においてその有効性を立証した。この方法では、実効増倍率を求めるのに差分法や有限要素法のように中性子束分布の領域積分を実行する必要がなくなり、領域内部をセル分割しない境界要素法の利点が最大限に活かせるようになった。

(11) 多重相反法の応用例として、正多角形の幾何学的バックリングに対する一般的な表式が正多角形の外接円半径の二乗に逆比例することが極めて容易に示された。ここで用いた幾何学的バックリングの評価手法はあらゆる幾何形状に対して無修正で適用可能であり、臨界安全性研究などにおいて有用である。これは、境界要素法が一般の不規則幾何形状の問題に対して極めて有効であることを実証する好例でもある。

本研究の成果は、軽水炉における炉心/反射体境界条件の評価、正多角形の幾何学的バックリング表式の導出など、すでに具体的な炉物理問題の解析に使用されるに至っているが、実用的な応用範囲を一層拡大するために今後さらに以下の項目について研究を進展させたいと考えている。

(1) 核分裂中性子源に起因する領域積分項を等価な境界積分に変換するには多重相反法が将来的にも最も有望な方法と考えられる。したがって多重相反法の応用発展を今後の最重点課題の一つとしてとらえたい。多重相反法の多群問題への拡張はまず着手すべき課題である。さらに、臨界安全性研究の分野で遭遇する、より現実的な3次元問題を解析できるように、3次元アイソパラメトリック境界要素に基づく多重相反法計算コードの開発を予定している。このアイソパラメトリック境界要素を用いると、燃料溶液タンク内の液面が波打った状態もモデル化できるなど、従来の計算コードでは困難であった複雑幾何形状の問題を自在に扱える利点がある。

(2) 多領域問題への拡張は、基本的に中性子束と中性子流の連続条件の適用だけでなされるものであり、定式化という面では解決済みである。しかし、領域数が極めて多数となり未知数の数が増えると離散化によって得られる連立1次方程式の解法に必要な計算機容量が増大し、古典的な Gauss 消去法に頼る場合は数値誤差も無視できなくなる。差分法では連立1次方程式を構成する行列は一般に三重対角であり、有限要素法では比較的規則性のあるバンド行列となることから、各々の行列の特性に適合した解法が開発され、計算機容量や数値誤差の問題を克服している。一方、境界要素法で多領域問題を扱った場合は、バンド行列とはなるものの極めて規則性に乏しいため、こ

のような行列に最適な解法が未だ提案されていない。境界要素法に向けた連立1次方程式の解法サブルーチンの開発こそが、将来、境界要素法の飛躍的發展を実現する鍵と考えられる。これは原子炉物理のみならず境界要素法一般に共通の課題である。

(3) 本研究では定常状態の中性子拡散方程式のみを解析の対象としたが、さらに時間依存の問題、中性子動特性方程式の解法についても境界要素法を応用できる余地が残されている。中性子動特性方程式で遅発中性子に関する項を除外した部分に対しては基本解が存在する。この基本解は時間変数も含んだ形式になっているので時間軸に関して厳密な扱いが可能となり、数値的不安定に陥りやすい従来の時間ステップ法を使わなくてすむ。遅発中性子に関する項はそのままでは非斉次の領域積分項となるが、これを何らかの境界積分形式に変換するために、本研究で示した二重相反法または多重相反法の知見が参考になると考えられる。

境界要素法を用いて中性子拡散方程式を解こうとする際の理論面での課題は、本研究でほとんど解決されるに至ったと考えられる。しかしながら、本研究で取り上げた計算例は比較的簡単なものに限られている。極めて多数の領域からなる問題に対しては、上記の(2)に述べたような困難があり、差分法や有限要素法と比肩できる水準には必ずしも達していない。境界要素法の応用範囲を拡大するためには、境界要素法そのものの理論的研究もさることながら関連する技術的な課題に取り組まざるを得ない。これは、境界要素法の原子炉物理への応用というよりも境界要素法そのものに課せられている課題である。境界要素法は、いわば発展途上の計算法である。それでも境界要素法の持つ種々の利点には捨てがたいものがある。幸いなことに、境界要素法については極めて多くの工学分野で依然として精力的な研究開発が進められている。それらの研究開発の現状を絶えず注視し、培われた知見を取り入れることによって、将来の飛躍的な進展が期待できるのではないかと考えられる。

## 謝 辞

本研究をまとめるにあたり、北海道大学工学部の成田正邦教授には幾多の懇篤有益なご助言、ご指導をいただきました。心からの謝意を表します。同大学工学部の山崎初男教授、榎戸武揚教授さらに辻雅司博士には本論文に対して貴重なご指摘と幾多のご教示を賜りました。また、同大学工学部の本間利久教授には、境界要素法をご専門とするお立場から種々の忌憚のないご指摘をいただきました。以上、深く感謝いたします。

著者が初めて境界要素法の名を知ったのは、昭和56年頃に Carlos A. Brebbia博士の著書“The Boundary Element Method for Engineers”の邦訳「境界要素法入門」を書店で手にした時だった。ほぼ時を同じくして、この邦訳をテキストとする通信教育をブレイン図書出版(株)が企画していることを知り、著者も早速受講したものである。この時の講師、富久泰明先生による懇切丁寧なご指導が、著者をして境界要素法研究に没頭させる端緒となった。通信教育終了後も先生との文通は続き、境界要素法による中性子拡散プログラムの試作を志してから著者が抱いた数々の疑問にいちいち助言され、また、内外の資料を送っていただくなど、ご支援をいただきました。紙面を借りて厚くお礼申し上げます。

本研究における成果の大部分は著者が自作した一連の境界要素プログラムに基づいているが、数値計算の一部は以下の諸氏の助力による。昭和59年当時に日本情報サービス(株)におられた河村隆二氏(現(株)情報数理研究所)には、第7章における有限要素法による比較計算をお願いした。(株)日本総合研究所の松井泰氏は、第8章で記述した行列型の境界条件が扱えるように差分法コード CITATION の修正を担当された。第7.5節の数値計算に用いた3次元境界要素法プログラムの作成は、(株)構造計画研究所の藤又康氏の努力に負うところが大きい。以上の方々に深く感謝致します。

境界要素法の研究を深めるためには原子力以外の種々の工学分野から幅広く情報を入手する必要があった。この意味で、境界要素法研究会(JASCOME)を通じて多くの大学の先生方とお近づきになれたのは幸運だった。中でも研究会代表、信州大学の田中正隆教授には、研究発表等、交流の機会を数多く与えていただきました。名古屋大学の神谷紀生教授には固有値問題及び多重相反法に関連して有益な助言を受けました。このほか、日本大学の登坂宣好教授、東京理科大学の大西和栄教授、北海道大学の本間利久教授はじめ皆様には大変お世話になりました。これら諸先生のご指導ご鞭撻に感謝致します。

著者の境界要素法研究が格段に進展したのは、昭和62年暮れより1年間、科学技術庁の原子力留学生として英国 Southampton市郊外にある Computational Mechanics Institute

(CMI)に滞在中のことだった。CMIは境界要素法研究のメッカ、所長の Carlos A. Brebbia博士は境界要素法の始祖として有名であり、著者の憧れであった。実は、昭和60年来日中の Brebbia博士と面談する機会があり、著者の稚い研究に関心をお寄せいただいたことが留学実現の伏線となったものである。CMI所長室で幾度となく博士とマンツーマンの討議をさせていただいたことは、生涯忘れ得ぬ貴重な体験となった。著者による境界要素法関係論文の大半は、博士によるこのようにきめ細かい研究指導と数々の助言の賜物であり、そのご指導は現在も続いている。あらためて深甚の謝意を表します。

CMIでは、さらに Mohammed H. Aliabadi博士はじめ若い研究指導者と世界中から集まった気鋭の同僚に多く恵まれ、真に実りある時を過ごすことができた。特に、Polandの Silesian大学から滞在中の Andrzej J. Nowak博士は当時、多重相反法の基礎概念を世界に先駆けて完成させており、博士からの刺激と現在に至る密接な文通がなければ第11章に述べた多重相反法の臨界計算への適用に関する研究はあり得なかった。また、第9.2節に記した任意幾何形状の面積を境界積分で求める計算手法はイラン出身の Siad M. Niku博士のご教示による。Raghat S. Bains博士(現在、科学技術庁フェローシップ研究員として日本原子力研究所に滞在中)には著者の拙い英語論文をしばしば査読していただいた。さらに、Paulo Azevedo, Degivaldo Defigueredo, Tania Defigueredo, Eliane Portela, Andre Neves(以上、ブラジル)、Artur Portela(ポルトガル)、Zhao Zhiye(中国)ほかの留学生仲間と交わした数々の討論は極めて有益であり、思い出深いものがある。日本から著者より先に滞在中の高橋進(日産自動車(株))、速見謙(当時日本電気(株)、現東京大学工学部)の両氏には私生活面も含めてひとかたならぬお世話になった。これら諸兄のご指導に対し、深い感謝の意を表します。

最後に、著者が所属していた旧日本原子力船研究開発事業団技術部及び日本原子力研究所原子力船技術部の部長を歴任された二村嘉明、石塚信、八巻治恵の各氏、また、技術第1課長及び試験課長を歴任された原山泰雄、後藤頼男、落合政昭の各氏による本研究への支持と励ましに深く謝意を表します。とりわけ、石塚信氏(その後、日本原子力研究所理事等を歴任)からは上記の原子力留学の機会を与えられるなど、格別のご厚情を賜りました。厚くお礼申し上げます。さらに、現在著者が所属している燃料サイクル安全工学部の小林岩夫部長、内藤倅孝次長には、境界要素法研究のさらなる進展を図る上で絶好の研究環境を与えていただいております。終わりにあたり、心より感謝申し上げます。

平成6年7月

著 者

