



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ディスク・ブレード連成系の振動に関する基礎的研究
Author(s)	富岡, 隆弘
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第3629号
Issue Date	1995-03-24
DOI	https://doi.org/10.11501/3082631
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/50161
Type	doctoral thesis
File Information	000000285083.pdf



ディスク・ブレード連成系の振動
に関する基礎的研究

富岡 隆弘

⑨

ディスク・ブレード連成系の振動 に関する基礎的研究

1994年12月

富岡 隆弘

目 次

第1章 緒 論	1
1.1 本研究の目的と意義	1
1.2 従来の研究の概要と本研究の位置づけ	3
1.3 各章の構成と概要	7
第2章 リッツ法による力学モデルの定式化と接続条件の検討	10
2.1 緒 言	10
2.2 リッツ法	11
2.3 ディスク、ブレードのエネルギーの評価	13
2.4 連成系における境界条件と接続条件の取り扱い	16
2.4.1 接続条件を変位関数の幾何学的境界条件に取り込む方法	16
2.4.1.1 2本のはりを接続した系の解析	17
2.4.1.2 ディスク・ブレード連成系の解析	25
2.4.2 仮想ばねを用いて接続条件を扱う方法	33
2.5 結 言	39
第3章 ディスク・ブレード連成系の自由振動	41
3.1 緒 言	41
3.2 仮想ばねによるエネルギーを考慮した定式化	42
3.2.1 ディスク・ブレード連成系のエネルギー	42
3.2.2 変位関数	45
3.3 直交多項式の構成	46
3.4 リッツ法による振動数方程式の導出	50
3.5 ディスクとブレードの連成条件	52
3.6 数値計算と考察	56
3.6.1 数値計算精度の検討	56
3.6.2 周方向波数成分と固有ベクトルのノルム	58
3.6.3 固有振動数と振動モード	65
3.7 結 言	78

第4章 ディスク・ブレード連成系の定常応答	80
4.1 緒言	80
4.2 ラグランジュの方程式を用いた運動方程式の導出	81
4.3 数値計算と考察	88
4.3.1 数値計算精度の検討	88
4.3.2 振動数-応答曲線	91
4.4 結言	104
第5章 回転による影響を考慮したディスク・ブレード連成系の自由振動 ..	105
5.1 緒言	105
5.2 回転による遠心応力のポテンシャルエネルギー	106
5.2.1 回転するディスクに蓄えられる遠心応力 のポテンシャルエネルギー	106
5.2.2 回転するブレードに蓄えられる遠心応力 のポテンシャルエネルギー	109
5.3 リッツ法による振動数方程式の導出	115
5.4 ディスクとブレードの連成条件	123
5.5 数値計算と考察	127
5.5.1 数値計算精度の検討	127
5.5.2 周方向波数成分と固有ベクトルのノルム	131
5.5.3 固有振動数と振動モード	144
5.6 シュラウドの質量を考慮した解析例	165
5.6.1 集中質量を有するブレードの遠心力によるポテンシャルエネルギー と運動エネルギー、およびディスクとブレードの接続点における 面内応力のつりあい条件	165
5.6.2 シュラウドの質量を考慮した場合の数値計算例	169
5.7 結言	176
第6章 結 論	178
謝 辞	183
参考文献	184

第1章 緒 論

1.1 本研究の目的と意義

今日、さまざまな分野で機械の高速化、大型化が進んでおり、またエネルギーコスト低減の点から軽量化の努力が続けられている。それにともなう安全性、信頼性への要求は年々厳しくなっており、従来はあまり問題とならなかったようなレベルの振動が重要な問題となっている。加えて、開発期間の短縮のためにも設計段階でその振動特性を正確に把握する必要性が高まっており、計算効率が高く、精度の良い振動解析法が求められている。その際、解析対象を数学モデルに置き換え、そのモデルに対して誘導した微分方程式を解析的（ここで言う「解析的」とは、節点座標値や境界条件、荷重条件を与えれば解析の途中のプロセスをよく知らなくてもその部分はコンピュータを使ってブラックボックス的に解が得られる有限要素法などのような「数值的」手法に対して用いたものであり、厳密解だけでなくリッツ法などにより得られる級数の形で表された近似解や伝達マトリクス法のように数値積分を用いて得られるものも含む）に解くことができれば、解の持つ物理的な意味も把握しやすく好都合である。はり、板、殻等の機械構造物を構成する基本的な形状要素に関しては、これまで数多くの研究が成されてきており、解析的手法も微小振動の範囲ではほぼ確立され、それらの個々の振動特性はかなり正確に予測できるようになってきている。

一方、機械は一般に複雑な形状をした構造物であるが、それらを力学モデルに置き換えると、前述のはり、板、殻等の組み合わせからなる「接統系」とみなすことができる。そしてそのような接統系を解析的に取り扱うには困難をとまなうことが多く、そのため、これまでは系を等価なばねと質量とに置き換えて大幅に簡略化したモデルを解析対象とし、その妥当性は実験との比較を行うことによって検証する方法、あるいは有限要素法などを用いた離散的な手法により振動解析が行われることが多かった。しかし、等価ばね、質量モデルによる方法は、系の振動特性の大まかな傾向をつかむのには簡単で便利な方法であるが、実機に生じ

る複雑な振動現象までも再現することは困難であり、また有限要素法は、節点数を多く取り、適切な要素を用いて解析を行えばかなり複雑な対象物でも扱うことが可能であるが、その場合計算量が膨大となるため、材料定数などのパラメータを変更しての繰り返し計算には不向きであることや、形状を変更すると大量の形状データの再入力が必要となるなど、必ずしも効率的な手法とは言えない。したがって、接続系の振動解析に対して、「等価ばね、質量モデルを用いた方法より自由度が多く、必要に応じた（解析の対象として取り上げるべき）振動現象を考慮した解析が可能」であり、「有限要素法より計算効率が高く、得られた解の物理的な意味が把握しやすい」解析法の導入が強く要請されている。

このような状況を踏まえ、本研究では接続系の例として発電用の蒸気タービン、航空機のジェットエンジンなどに見られる構造をモデル化したディスクとブレードの接続系を取り上げ、その振動解析法と振動特性についての基礎的な研究を行う。ここでは、ディスクを、内周が固定され、外周が自由な有孔円板とし、ブレードはディスクの外周上に取り付けられ、長方形断面を有するはりとしてモデル化し、その接続系の振動問題を扱う。このような接続系ではディスクとブレードの連成振動が問題となるため、以下では本論文で扱う力学モデルを「ディスク・ブレード連成系」と呼ぶこととする。

このディスク・ブレード連成系について特徴的なことは、実際のタービンではブレードの数が数十から百以上となるため、接続されるサブシステム（ディスクとブレード）の数が非常に多くなることである。そのため、これらを有限要素法などで解析する場合、その計算規模は莫大なものとなり実用的でないため、従来は系の周期対称性を利用し、系の一部分を取り出した解析が行われてきた。このような取り扱いの可能な系（全てのブレードが同一で、系に周期対称性が成り立つとみなせる系）をチューン系という。しかし、実際のシステムでは工作誤差や材料定数のばらつきなどにより個々のブレードの特性はわずかに異なっている。このようなばらつき（ミスチューン）のある系をミスチューン系と呼ぶが、近年、このミスチューンの影響を考慮したブレードの設計が必要とされるようになってきている。ミスチューン系では系の周期対称性はもはや成り立たず全系にわたる解析が必要であるため、ミスチューンの影響を含んだ取り扱いのできる効率的な振動解析法が求められている。

ディスク・ブレード連成系の振動解析に求められている以上のような点を考慮して、本研究ではエネルギー法的一种であるリッツ法を用いて振動解析を行う。リッツ法では、変位を境界条件を満たす連続関数（試験関数と呼ぶ）の級数で表すため、「等価ばね、質量モデルを用いた方法より自由度が多く、対象として取り上げるべき振動現象を考慮した解析が可能」であり、対象物全体にわたる変位を表す関数を用いるので、「有限要素法より計算効率が高く、得られた解の物理的な意味が把握しやすい」解析法であるといえる。そして、はり、板、殻等の簡単な形状要素の対象物については、シンプルな試験関数で境界条件を満たすことができるために広く用いられている古典的と言える手法である。ただし、接続系の解析にあたっては接続条件の取り扱いが容易ではなかったため、従来はあまり用いられてこなかった。しかし最近になって、接続部分に仮想的なばねを導入することにより、接続条件の取り扱いが容易であり、試験関数の選択も非常に簡単になることが示され、それ以降、はりの接続系、長方形板の接続系、円筒殻と円板の接続系など様々な接続系に対して適用されるようになってきた。また、リッツ法では最終的に得られる振動数方程式は行列の固有値問題に帰着されるが、接続系の場合には取り扱う計算の規模が個々の場合より大きくなるために、固有値計算における数値計算の安定性の点からも試験関数の選択が重要になる。ディスク・ブレード連成系においては、接続されるブレードの数が非常に多いため、数値計算を安定して行うためには試験関数の選択に特に注意が必要である。本論文ではこの問題について詳しい検討を行う。

以上のそれぞれの問題点について検討を行い、ディスク・ブレード連成系のような多くのサブシステムが接続されている系の振動解析をリッツ法により安定して行うための方法について論ずるとともに、ディスク・ブレード連成系の振動現象について、様々な振動数、振動モードに関するデータを提供し、それらをもって接続系の振動解析法ならびにディスク・ブレード連成系の設計における有用な指針を与えることを本研究の目的とする。

1.2 従来の研究の概要と本研究の位置づけ

タービンディスク・ブレード系の振動問題はタービンシステムの信頼性に関わ

る重要なテーマとして、これまで数多くの研究が成されてきた。例えば、白木ら⁽¹⁾は数枚のブレードをラッシングワイヤで綴った群翼の振動をマイケルスタッドの方法を用いて解析し、田中⁽²⁾は伝達マトリクス法を用いて変断面ブレードと半径方向に厚さの変化するディスクとの連成振動を調べており、Huang⁽³⁾は伝達マトリクス法を用いて剛体円板に取り付けられたブレードの自由振動と強制振動を解析し、さらに志賀⁽⁴⁾はディスクとブレードのせん断変形及び回転慣性を考慮し、伝達マトリクス法を用いた解析を行っている。また、道村ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾は有限要素法、名村⁽⁷⁾⁽⁸⁾は伝達マトリクス法、OmprakashとRamamurtiはリッツ法⁽⁹⁾、有限要素法⁽¹⁰⁾、Balasubramanianら⁽¹¹⁾は有限要素法を、それぞれ系の周期対称性を利用して系の自由度を減らす、いわゆるサイクリックシンメトリーの手法と組み合わせた方法によりディスク・ブレード系の振動解析を行っている。これらに対し、WagnerとGriffin⁽¹²⁾は弾性円板上に取り付けられた綴り翼の応答を、周期対称に配置され、ばねで結ばれた弦を用いた類似モデルにより解析している。さらに、斎藤ら⁽¹³⁾は、複合周期構造を有するタービンブレードのディスクとの連成がない場合の振動特性を、周期性を利用して次数を縮小した伝達マトリクス法により調べている。また、Wildheim⁽¹⁴⁾はディスク、ブレード連成系に限らず周期対称性のある構造物に励振力が作用する場合の共振条件について調べており、LueschenとBergman⁽¹⁵⁾は同一のはり、板などがばねで結ばれた周期構造の自由振動をグリーン関数を用いて調べている。

一方、タービンの高速化、大容量化に伴い、製作誤差や、材料定数のばらつきなどに起因するブレード間のわずかな違い、すなわちミスチューンによる影響を考慮した振動解析が必要とされるようになってきたが、このような周期対称性の崩れた系には、前述のサイクリックシンメトリーのような手法はもはや適用できない。これに関しては、Ewins^{(16)~(19)}、El-BayoumyとSrinivasan⁽²⁰⁾は、ブレードを2自由度、あるいは1自由度で表したシンプルなモデルを用いて調べており、StangeとMacBain⁽²¹⁾、Crawley⁽²²⁾は実験的にミスチューン現象を調べている。また、KhaderとMasoud⁽²³⁾は弾性シャフトに取り付けられた剛体円板にミスチューンのある弾性ブレードが配置されている系の自由振動について、シャフトとブレードをはりとして扱い、ラグランジュの方程式を用いた解析を行っており、

Rzadkowski^{(24)~(26)}はディスクを厚板として扱い、ブレードのねじりなどを考慮したより実態に近いモデルにリッツ法を適用して解析している。さらに、金子ら⁽²⁷⁾はミスチューンのあるブレード、ディスク系を置き換えた等価ばね-質量系にモンテカルロ法と感度解析法を適用して応答解析を行っている。また、ミスチューンのある系のフラッタ現象については、KazaとKielb⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾、DugundjiとBundas⁽³⁰⁾が調べている。一方、ディスク・ブレード系以外にも、構造の周期対称性が崩されたことにより生じるモードの局所化現象についても精力的な研究がなされている。HodgesとWoodhouse⁽³¹⁾はばねで結ばれた振動子列をレーリー法を用いて扱い、ValeroとBendiksen⁽³²⁾はシュラウドで結ばれた翼列を有限要素法により解析し、WeiとPierre⁽³³⁾⁽³⁴⁾は剛体円板に取り付けられシュラウドで結ばれたブレードを摂動法により調べている。また、Bendiksen⁽³⁵⁾は大規模な宇宙用のアンテナなどにみられる構造を1自由度のモデルで扱い、そのモデルに摂動法を適用し、CornwellとBendiksenはこのモデルを多自由度系に拡張してリッツ法と有限要素法⁽³⁶⁾、リッツ法⁽³⁷⁾を用いた解析を行っており、さらにPierreとCha⁽³⁸⁾はばねで結ばれたはりについて摂動法を用いた解析を行っている。

このように、タービンディスク・ブレード系あるいは周期対称構造物の振動に関する研究はチューン系、ミスチューン系ともにさまざまなアプローチにより行われていることが分かるが、以上に挙げた文献は大胆な簡略化を行って大幅に自由度を減らしたモデルを扱ったものや、ブレードの数が少ない場合のみを扱ったものが多く、ミスチューンを含む実地的なタービンディスク・ブレードの振動問題を扱うことのできる手法が確立されているとはいいがたい状況である。そのため、本研究ではディスクとブレードをそれぞれ弾性円板、はりとして扱い、リッツ法を用いて解析を行う。その際、ブレードの数が多（100本以上）場合にも対応可能な手法を確立するための検討を行う。

一方、リッツ法では用いる試験関数は幾何学的境界条件を満たしていなければならないが、このようなディスク・ブレード連成系を扱う場合にはさらにディスクとブレードの接続点における接続条件も満足する必要があるため、試験関数の選択が難しくなる。この点に関して、YuanとDickinson⁽³⁹⁾は2本のはりの接続系について、接続点に変位と回転角のそれぞれの差に比例する仮想的なばねを導入

し、そのばねこわさを十分に大きくすることで両者の接続条件を満たすことができ、さらにその場合用いる試験関数には、両端が自由の幾何学的境界条件を満たす「べき関数」（試験関数としては最もシンプルな形の関数）を用いれば良いことを示した。彼らはその手法を用いて長方形板の接続系⁽⁴⁰⁾、ステップ状のはりおよび板⁽⁴¹⁾、二重円筒殻を含む円筒殻と円板⁽⁴²⁾の接続系の解析を行っている。また、ChengとNicolas⁽⁴³⁾は円筒殻と円板の接続系の自由振動、Cheng⁽⁴⁴⁾は円筒殻と円板の接続系の構造的な振動と円筒内の音場との関係について、それぞれ仮想ばねを導入したリッツ法を用いて解析している。

さらに、リッツ法による振動解析では、最終的に解かれる振動数方程式は行列の固有値問題として得られるが、接続される構造物の数が多く、行列のサイズが大きくなると数値計算の際の丸め誤差などのために固有値（固有振動数）を正しく計算することが困難になり、場合によっては計算そのものを続行することができなくなる。計算する行列の形や特性は用いる試験関数により決まるため、試験関数の選択は数値計算の面からも重要な問題である。この点に関連してBhat⁽⁴⁵⁾はグラム・シュミットの直交化法により構成される直交多項式を試験関数に用いることを提案し、長方形板の固有振動数を求めている。このような直交性のある関数を用いれば、運動エネルギーから導かれる係数行列が対角行列となるため、数値計算上の特性の大幅な改善が期待できる。この手法を用いて解析を行っている例としては他に、Bhat⁽⁴⁶⁾が先端に付加質量を持ち、回転するはりの自由振動を調べており、Rajalinghamら⁽⁴⁷⁾は、だ円板の固有振動数と振動モードを求めている。また、KimとDickinsonはさまざまな複雑な影響を受けるはり⁽⁴⁸⁾（付加質量を有し、内部に支持点を持ち、断面積が変化する）、円板⁽⁴⁹⁾と扇形板⁽⁵⁰⁾（それぞれ内部に線状の支持部を持ち、板厚が変化する、直交異方性を有する）の自由振動を調べており、Lamら⁽⁵¹⁾は、切り欠きのある異方性長方形板の自由振動を解析している。さらにLiewとLam^{(52)~(55)}、Liew^{(56)~(58)}、Lamら⁽⁵⁹⁾はBhatの提案した方法を拡張し、2変数の直交多項式を試験関数に用いたリッツ法をさまざまな形状、境界条件、付加条件（異方性や集中質量、内部支持など）をもつ板の自由振動解析に適用している。

以上から分かるように、リッツ法を用いて接続系の振動問題を扱ったものには、

本研究で取り上げるディスク・ブレード連成系のような非常に多くのサブシステムからなる系を対象としたものは見当たらず、また、そのような接続される構造物が多く計算が大規模となるような系をリッツ法で解析する際には、Bhatの提案している手法を用いれば数値計算上の特性の改善が期待できることが分かる。本研究では、これらの点について検討を行い、仮想ばねを導入して接続条件を扱う方法と直交性のある関数とを併用することで、解析ならびに数値計算上の大きなメリットが得られることを明らかにする。

1.3 各章の構成と概要

本論文は全6章で構成されている。以下にそれぞれの章の概要を具体的に示す。

第2章は、ディスク・ブレード連成系のような多くのサブシステムが接続されている系の振動解析をリッツ法により安定して行うための方法について、基本的な検討を行う章である。本章ではまず、本論文の第2章、第3章、第5章で用いられるリッツ法についてその概略を述べ、以降の解析において基礎式となるディスク、ブレードそれぞれのエネルギーの表示式を与える。次に、接続系の振動解析をリッツ法で行う際に問題となる境界条件と接続条件の取り扱いについて、変位関数に用いる試験関数の幾何学的境界条件に接続条件を取り込む方法と、仮想ばねを用いて接続条件を満たす方法について、その妥当性と有効性、あるいは問題となる点を比較、検討する。

第3章では、接続点に仮想ばねを導入して接続条件を満足させ、変位関数の試験関数に直交性のある関数を用いた方法でディスク・ブレード連成系の自由振動の解析を行う。本章ではまず、仮想ばねによるポテンシャルエネルギーを考慮した系の各エネルギーを示す。次に、グラム・シュミットの直交化法による直交多項式の構成の手順を示し、それを用いてブレードに対する試験関数を構成する。ディスク部分の試験関数としては、有孔円板の固有関数を用いる。これはブレードを持たない一様円板の自由振動を解いて得られる関数で、半径方向関数はベッセル関数の和の形で表され、周方向関数は三角関数（ここでは余弦関数を用いる）で表される。いずれの関数も直交性を持つ関数である。その後、リッツ法の手続きにしたがって振動数方程式を導出する。ここで用いられる手法により、振動数方

程式の右辺の係数マトリクスを対角マトリクスとすることができ、大規模で複雑な問題に対しても安定して数値計算を行うことができる。また、本章では、円板上に付加部材が周期対称に配置されている場合には、円板の振動形は周方向波数成分と付加部材の数との間に成り立つある特定の関係を満たすいくつかのグループ（型）に分けられることを明らかにする。そして、数値計算を行って系の固有振動数パラメータ、振動モードを求め、ディスク・ブレード連成系の振動が、ディスクあるいはブレードのどちらか一方の振動変位が卓越するそれぞれの主振動モードと、両者が共に大きく振動する強連成モードとから成ることを示す。また、シュラウドの有無による振動数パラメータや振動モード形への影響、ブレードの本数と振動数パラメータの関係、などについて調べる。さらに、ブレードの長さとディスクの半径との比を変えて振動数パラメータの計算を行い、強連成モードはディスクの固有振動数とブレードの固有振動数が接近するときに、特定のモードの振動数曲線が方向転換（ヴィーリング）するために生じたものであることを示す。

第4章では、ディスクあるいはブレード上の一点に調和的な集中外力が作用する場合を考え、そのときの系の定常応答の解析を行う。ここで行う応答解析は実際のタービンシステムに作用する励振力による応答をシミュレートするというよりも、系の持つ基本的な振動特性を応答特性の面から調べることを目的としたものである。本章では、調和外力による定常応答を求めるために、系の各エネルギーに加えて調和外力による仕事を求め、ラグランジュの方程式を用いて系の運動方程式を導く。その際に、ディスクとブレードそれぞれの曲げこわさを、内部減衰を考慮した複素量で近似する。また、変位の試験関数については、第3章と同じく、ディスク部分に対しては有孔円板の固有関数、ブレード部分に対してはグラム・シュミットの直交化法により構成した直交多項式を用いた級数でそれぞれ近似する。そして、得られた定常応答を決定する方程式を用いて数値計算を行い、励振振動数に対する系の応答曲線を求め、第3章の解析で得られたディスク・ブレード連成系の基本的な振動特性が応答曲線に現れることを示すとともに、内部減衰の大きさ、励振点の位置、シュラウドの有無、ディスクとブレードのこわさ比等が応答変位、共振振動数、反共振振動数などが系の応答特性に与える影響について調べる。

第5章では、回転の影響を考慮した、ディスク・ブレード連成系の自由振動解

析を行う。本章ではまず、遠心力によるポテンシャルエネルギーの評価をディスク、ブレードそれぞれについて行い、その表示式を導出する。その後、前章までの解析と同様にして、接続点に仮想ばねを導入し、直交性のある関数を試験関数に用いたリッツ法により振動数方程式を導く。このとき、本章ではより一般的なタービンディスク・ブレード系のモデルを考え、ディスクの周方向の変位関数を余弦関数と正弦関数の両者を考慮して展開する。また、ブレードの試験関数とともにディスクの半径方向の試験関数にもグラム・シュミットの直交化法により構成される直交多項式を用いる。これらを用いたリッツ法により導かれた振動数方程式を数値的に解いて、固有振動数パラメータ、振動モードを求める。本章では、得られた解の一部について、市販されている有限要素法（FEM）ソフト（NISA II）による計算結果との比較を行い、本解析法の妥当性を確認するとともに本解析法が数値計算において非常に計算効率の高い手法であることを示す。また、回転速度やブレードの本数、シュラウドの有無などなど、さまざまな条件を変化させて数値計算を行い、それらが振動数、振動モードに与える影響について考察を行う。さらに、本章ではシュラウドの質量を考慮した解析も行い、そのような場合でも直交多項式の構成には特別の技巧は不要であり、また直交性も完全に満たされることを示す。そして、シュラウドの質量や取り付け位置などが振動数パラメータに及ぼす影響について調べる。

第6章は結論であり、本研究を通じて得られた成果を取りまとめている。

第2章 リッツ法による力学モデルの定式化と 接続条件の検討

2.1 緒言

振動解析においては、対象とする系が複雑になると直接運動方程式を導くことが困難になるため、エネルギー原理に基づいた手法が採られることが多く、近年ではコンピュータの発達と相まって有限要素法が広く用いられている。有限要素法は、節点座標値や境界条件、荷重条件などを与えれば解析の途中のプロセスを特に意識しなくても解が得られ、ブラックボックス的に使える汎用性の高い数値解析手法であり、様々な対象を扱うことができるプログラムが数多く開発されて市販されているため、更なるコンピュータの発展とともに今後もますます身近な解析ツールとして利用されていくものと思われる。しかし、解析の途中のプロセスを意識せずに済む反面、そのために得られた結果の物理的・工学的な見通しが良くないこともあり、また、解析対象とする系が複雑になるにつれ、有限要素モデリングの違いによる解析結果の差やモデリングや数値計算に要するコストなどが問題となり、形状や材料などを変更してのパラメータスタディを行うのには必ずしも適しているとはいえない。

それに対し、本研究で用いるリッツ法は、近似解法ではあるが対象とする系を連続体として扱い、求める関数（通常は変位を表す関数）を物理的な意味づけのしやすい既知関数（試験関数）の級数で近似するため、形状や材料の変更にも対処しやすく、計算量も比較的少なくて済む。したがって、モデルの特性をよく表現する（振動変位をよく近似し、境界条件を満たす）関数をうまく見つけることができればパラメータスタディなどの繰り返し計算には非常に有利である。ただ、対象とする系が複雑になると境界条件（異なる構造要素の接続系の場合は、さらにそれらの接続条件も加わる）を満たす試験関数を見つけることが難しくなるため、コンピュータの発達した今日では有限要素法が用いられることが多いのが現状のようである。本研究の主要な目的のひとつは、ディスク・ブレード連成系の

ような複雑で、計算も大規模になる系に対してリッツ法を用いるための試験関数の選択、ならびに接続条件や境界条件の取り扱いについて有益な指針を与えることであり、本章ではそのための基礎的な検討を行う。

本章でははじめに、以降の第3章、第5章で用いられるリッツ法についてその概略を述べる。次に、リッツ法はエネルギー法的一种であるから、解析における基礎式として、ディスク、ブレードそれぞれのエネルギーの表示式を与える。さらに、ディスク・ブレード連成系の解析において重要となる両者の接続条件の取り扱いについて検討する。接続条件の取り扱いとしてはまず、用いる試験関数の幾何学的境界条件に変位と傾きの連続条件を取り込むことが考えられる⁽⁶⁰⁾⁽⁶¹⁾。これに対し、接続点に仮想ばねを導入し、それによって変位や傾きのずれを拘束するという方法も提案されており、はりの接続系⁽³⁹⁾⁽⁴¹⁾、平板の接続系⁽⁴⁰⁾、円板と殻の接続系^{(42)~(44)}などに適用されている。そこで本章では、試験関数の幾何学的境界条件に接続条件を取り込む方法に関しては、はりの接続系とディスク・ブレード接続系について、また、仮想ばねを用いて接続条件を満たす方法に関しては、はりの接続系について、それぞれ実際に解析と数値計算を行いその妥当性と有効性について検討する。

2.2 リッツ法

リッツ法は数学的には変分法の直接解法のひとつで、与えられた汎関数を停留化する関数をオイラーの微分方程式を経由せずに直接定めるものであり、様々な分野で使われている。力学の問題では、エネルギー原理が成り立ち、エネルギーが汎関数となるため、エネルギー法（の一種）とも言われる。振動問題においても連続体の自由振動を解く際の近似解法としてしばしば用いられる。この場合のリッツ法では、運動エネルギーの最大値とポテンシャルエネルギーの最大値との差が極小（実際には極値化）になるように未知関数を定める。本論文では、タービンディスク、ブレードをそれぞれ有孔円板、はりとしてモデル化し、その力学モデルにリッツ法を適用して解析を行う。そこで本節では、リッツ法を用いて振動解析を行う場合の解析手順の概略を示す。

対象とする系の振動変位を $w(x,t)=W(x)\sin(\omega t+\phi)$ とし、系の運動エネルギー

を T 、ひずみエネルギーを U とすると、それぞれの最大値の差 $L=T_{\max}-U_{\max}$ （ラグランジュ関数）を停留化（極値化）するような変位関数 $W(\mathbf{x})$ を求めることを考える。その際、リッツ法では、 $W(\mathbf{x})$ を幾何学的な境界条件を満たす既知の試験関数 $f_{mn}(\mathbf{x})$ と未知係数 a_{mn} を含む級数として次式のように展開する（2次元問題の場合、すなわち $\mathbf{x}=\{x, y\}^T$ のとき）。

$$W(\mathbf{x})=W(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} f_{mn}(x, y) \quad (2.1)$$

そして、その項数を有限項 M, N で打ち切ってラグランジュ関数の停留条件式、

$$\frac{\partial L}{\partial a_{kl}}=0, \quad (k=1, 2, \dots, M, l=1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

を用いると、未知係数 a_{mn} に関する MN 本の連立一次同次方程式が得られ、それらを整理すると次のような一般固有値問題となる。

$$[\mathbf{K}] \{a_{mn}\} = \lambda [\mathbf{M}] \{a_{mn}\} \quad (2.3)$$

ここで $[\mathbf{K}]$ 、 $[\mathbf{M}]$ は既知量からなる MN 次のマトリクスである。この固有値 $\lambda=\omega^2$ より系の固有振動数 ω が求められ、各固有値に対応する固有ベクトルとして未知係数 a_{mn} が定まる。

ここで、変位関数 $W(\mathbf{x})$ を、対象とする系の全体にわたる変位形を表す関数であるものとして、 $\mathbf{x}$ に関する連続関数 $f(\mathbf{x})$ で展開すれば、得られた変位を任意の点 $\mathbf{x}$ について計算できるので、これは解析対象を連続体として取り扱うことになる。一方、系を有限個の部分要素に分割して、それぞれの分割点における変位を $W(\mathbf{x})$ として離散化し、上記の手法により各点の変位を求めるのがいわゆる有限要素法であり、その場合分割点と分割点の間の点の変位は適当な次数の多項式（区分多項式）で補間する。したがって、リッツ法の試験関数として区分多項式を用いるのが有限要素法であるということが出来るが、本論文では試験関数に系の全体、あるいは部分構造全体にわたる連続関数を用いるものをリッツ法と呼び、有限要素法と区別する。

リッツ法で得られる解は、級数展開の項数を有限項で打ち切っているために近似解であるが、採用する項数を増やすとこの近似解は高い値をとりながら正解に

一様収束することが知られている。また、試験関数は境界条件を満たすどのような完全関数系から選んでもよいが、求まる近似解の精度や数値計算の成否は採用する試験関数の形に大きく依存するため、その選定には特に注意が必要である。

2.3 ディスク、ブレードのエネルギーの評価

ここでは、以下の解析を行うための基礎式として、ディスク、ブレードそれぞれのエネルギーの表示式を示す。

図2-1にここで扱うディスクと座標系を示す。ディスクは、外半径、内半径、板厚がそれぞれ a , b , h の有孔円板であり、座標系は、ディスクの中心に原点をもつ円柱座標系 $O_d-r\theta z$ を用いる。ディスクの板厚は半径に比べて十分小さいものとし、ディスクの変位は面外方向変位 w_d のみを考える。この変位は小さいものとする、通常のいわゆる薄板理論（古典板理論）に基づくディスクの曲げによるひずみエネルギー U_d^0 、および運動エネルギー T_d^0 はそれぞれ次のように表される。

$$U_d^0 = \frac{D_d}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left[(\nabla^2 w_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_d}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_d}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] r d\theta dr \quad (2.4)$$

$$T_d^0 = \frac{\rho_d h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_d}{\partial t} \right)^2 r d\theta dr \quad (2.5)$$

ただし、 D_d はディスクの曲げこわさで、ヤング率 E_d とポアソン比 ν を用いて $D_d = E_d h^3 / 12(1-\nu^2)$ と表され、 $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + \partial / r \partial r + \partial^2 / r^2 \partial \theta^2$ はラプラスの演算子、 ρ_d はディスクの密度である。

次に、図2-2にブレードと座標系を示す。ブレードは断面積一定の長方形断面をもつはりであるとし、長さ、幅、高さをそれぞれ l , b_b , h_b とする。座標系はブレードの中心に原点をもつ直交座標系 O_b-xyz を用いる。ブレードの曲げによる変位は $x-z$ 平面内のみで生じるものとする。ブレードの長さに比べて他の寸法は小さいものとし、 z 方向の変位 w_b のみ考える。 w_b は小さいものとする、はり理論に基づくブレードの曲げによるひずみエネルギー U_b^0 、および運動エネルギー

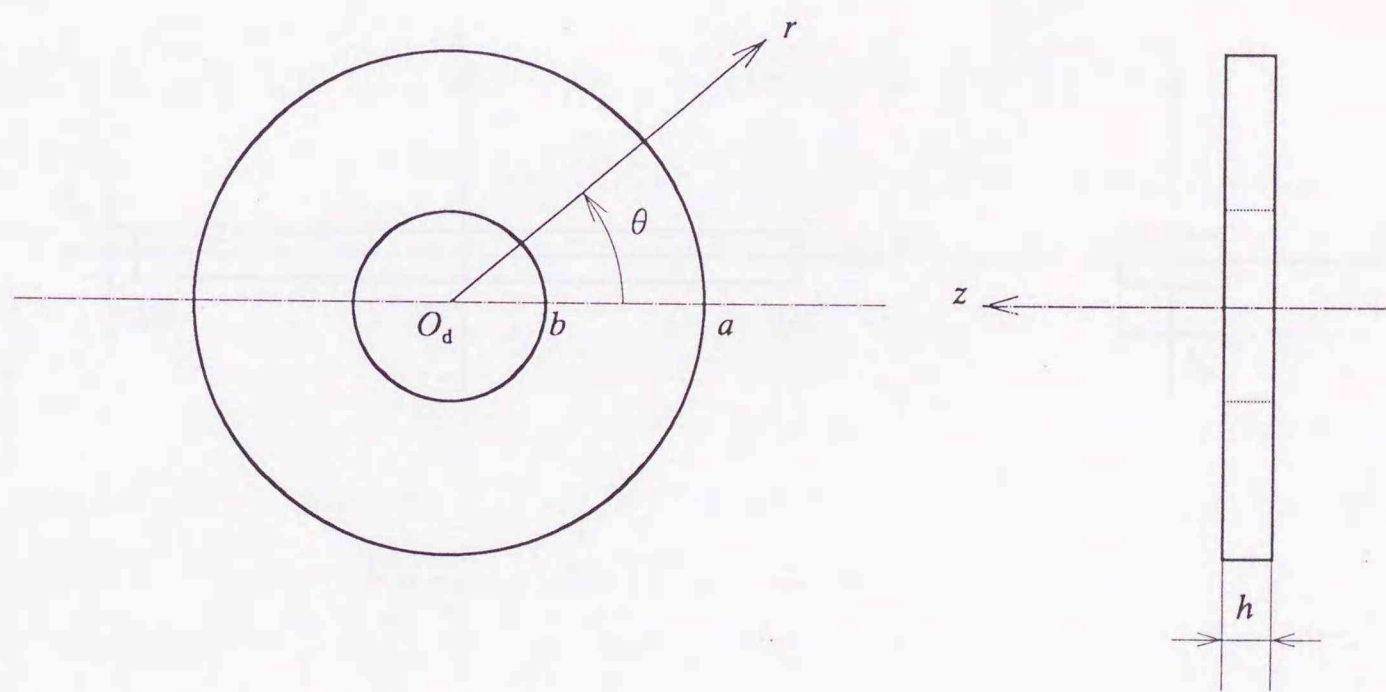


図 2 - 1 有孔円板と座標系

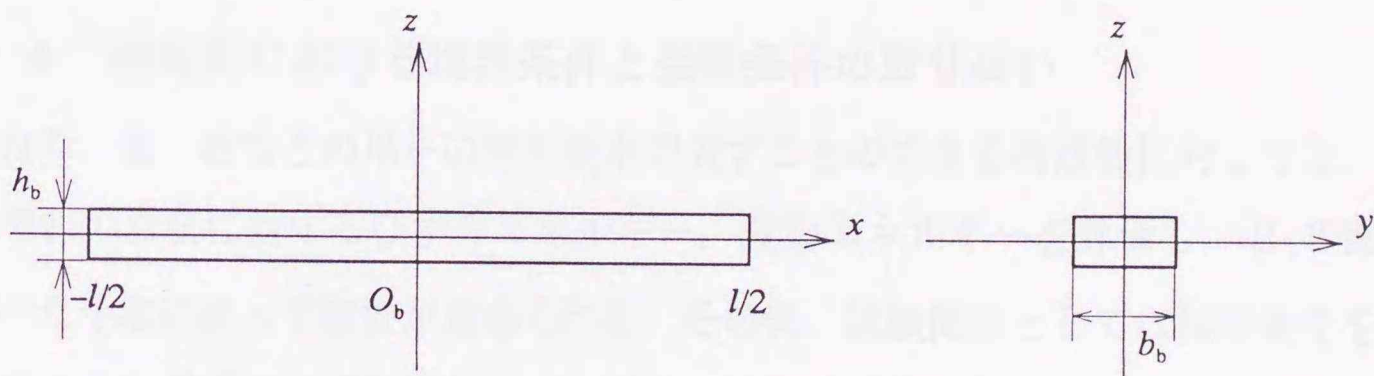


図 2-2 はりと座標系

T_b^0 はそれぞれ次式のようになる.

$$U_b^0 = \frac{E_b I_b}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.6)$$

$$T_b^0 = \frac{\rho_b A}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2.7)$$

ここで, E_b はブレードのヤング率であり, $I_b = b_b h_b^3 / 12$ はブレード断面の中心線に関する断面二次モーメント, ρ_b は密度, A は断面積である.

2.4 連成系における境界条件と接続条件の取り扱い

はり, 板, 殻などの単一の形状要素で表すことのできる構造物に対しては, それぞれの形状に対するひずみエネルギー, 運動エネルギーを評価し, 2.2節で述べた手順に従って解析が進められる. その際, 試験関数としては境界条件を満たすように選ばれた三角関数, ベキ関数, はりや円板の固有関数などが用いられることが多い. しかし, それらの形状要素を二つ以上接続して構成される接続系(連成系)では, 接続位置における幾何学的条件(変位, 傾き)の連続性, および力学的条件(モーメント, せん断力)の連続性を満たさなくてはならないために, 用いる関数の選択が難しくなる. 一般に, 幾何学的連続条件と力学的連続条件の両者を満足させることは困難であるため, 通常は幾何学的な連続条件のみを考慮した解析が行われる. 本論文においても, 接続条件としては幾何学的連続条件のみを考えるものとする. ここでは, 二種類の要素からなる接続系について, 変位関数の幾何学的境界条件に接続条件を取り込む方法と, 接続点に仮想ばねを導入して接続条件を満たす方法について述べる.

2.4.1 接続条件を変位関数の幾何学的境界条件に取り込む方法

この方法では, 要素1の先に要素2が接続されているものとし, 要素2の変位は要素1との変位と傾きの連続性を満たすような形で近似される. 各要素の変位関数は, 例えば次式のようになる.

$$w_1(x) = \sum_{m=1}^M a_m f_m(x) \quad (2.8)$$

$$w_2(x) = w_1(x_0) + w_1'(x_0)(x - x_0) + \sum_{n=1}^N b_n g_n(x) \quad (2.9)$$

式(2.9)の右辺第1項、第2項は、それぞれ接点 $x=x_0$ での要素1と要素2の変位と傾きの連続条件を表している。

以下ではこの手法を用いて、2本のはりを接続した系と、ディスク・ブレード連成系について自由振動解析を行う。

2.4.1.1 2本のはりを接続した系の解析⁽⁶¹⁾

ここで考えるはりの接続系を図2-3に示す。この系は、 L_1 、 L_2 の二つのはりから構成されており、それぞれのはりの長さを l_1 、 l_2 、全長は l とする。はりの変位を w とし、はり L_1 に関する諸量には添字1を、 L_2 に関する諸量には添字2をつけると、はりの各エネルギーの最大値は式(2.6)、(2.7)より次式のようなになる。

$$U_{1\max} = \frac{1}{2} \int_0^\beta \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (2.10)$$

$$T_{1\max} = \frac{1}{2} \lambda^4 \int_0^\beta W_1^2 d\xi \quad (2.11)$$

$$U_{2\max} = \frac{1}{2} \mu_1 \int_\beta^1 \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi \quad (2.12)$$

$$T_{2\max} = \frac{1}{2} \mu_0 \lambda^4 \int_\beta^1 W_2^2 d\xi \quad (2.13)$$

ただし、以下のような無次元量を用いている。

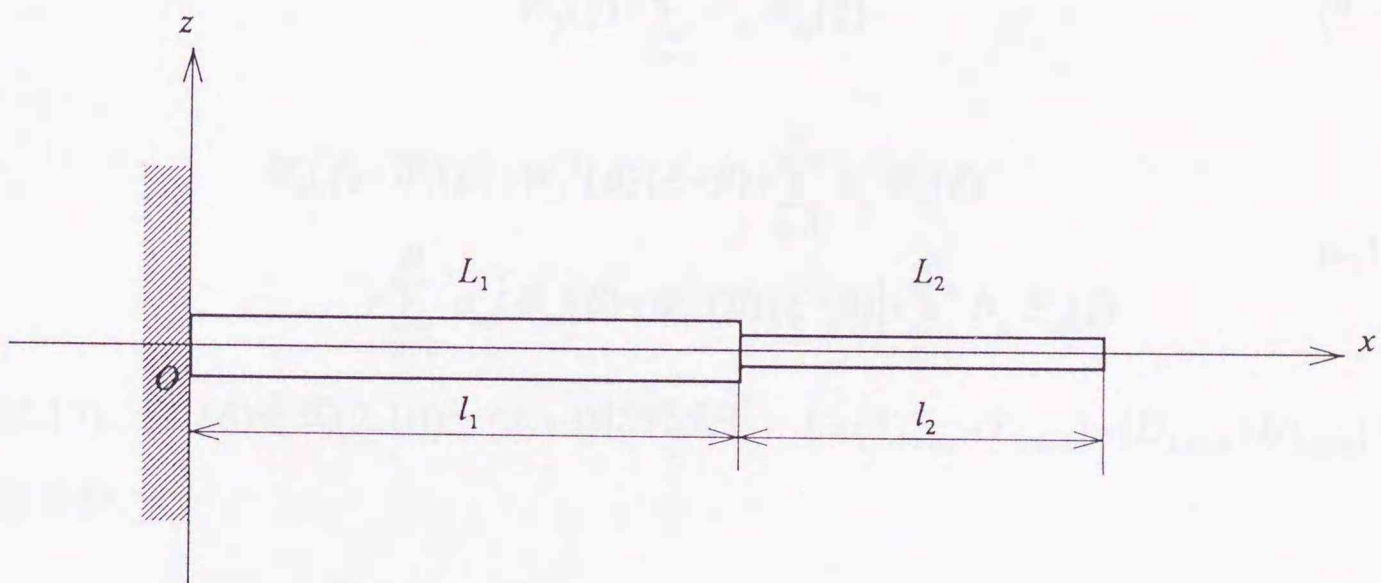


図 2 - 3 2 本のはりの接続系と座標系

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x/l, \quad \beta = l_1/l, \quad W_i(\xi) \sin \omega t = w_i(x, t)/l \quad (i=1, 2), \\ (U_1, U_2, T_1, T_2) &= \frac{l}{E_1 I_1} (U_1^0, U_2^0, T_1^0, T_2^0) \\ \lambda^4 &= \rho_1 A_1 l^4 \omega^2 / E_1 I_1, \quad \mu_0 = \rho_2 A_2 / \rho_1 A_1, \quad \mu_1 = E_2 I_2 / E_1 I_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

ここで、 λ は無次元振動数パラメータであり、 μ_0 、 μ_1 はそれぞれ2本のはりの単位長さあたりの質量の比、こわさ比である。

次に、 L_1 、 L_2 の変位を次式のように展開する。

$$W_1(\xi) = \sum_{m=1}^M a_m \Phi_m(\xi) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} W_2(\xi) &= W_1(\beta) + W_1'(\beta)(\xi - \beta) + \sum_{n=1}^N b_n \Psi_n(\xi) \\ &= \sum_{m=1}^M a_m [\Phi_m(\beta) + \Phi_m'(\beta)(\xi - \beta)] + \sum_{n=1}^N b_n \Psi_n(\xi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

式(2.15)、(2.16)を式(2.10)～(2.13)に代入し、 $L = (T_{1 \max} + T_{2 \max}) - (U_{1 \max} + U_{2 \max})$ の停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b_l} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, M, \quad l=1, 2, \dots, N) \quad (2.17)$$

より次式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_m^{(k)} & 0 \\ 0 & U_n^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ b_n \end{bmatrix} = \lambda^4 \begin{bmatrix} T_m^{(k)} & T_n^{(k)} \\ T_m^{(l)} & T_n^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ここで、各マトリクスの要素は、

$$U_m^{(k)} = \int_0^\beta \Phi_m''(\xi) \Phi_k''(\xi) d\xi \quad (2.19)$$

$$U_n^{(l)} = \mu_1 \int_\beta^1 \Psi_n''(\xi) \Psi_l''(\xi) d\xi \quad (2.20)$$

$$T_m^{(k)} = \int_0^\beta \Phi_m(\xi) \Phi_k(\xi) d\xi \\ + \mu_0 \int_\beta^1 \left[\Phi_m(\beta) + \Phi_m'(\beta)(\xi - \beta) \right] \left[\Phi_k(\beta) + \Phi_k'(\beta)(\xi - \beta) \right] d\xi \quad (2.21)$$

$$T_n^{(k)} = \mu_0 \int_\beta^1 \Psi_n(\xi) \left[\Phi_k(\beta) + \Phi_k'(\beta)(\xi - \beta) \right] d\xi \quad (2.22)$$

$$T_m^{(l)} = \mu_0 \int_\beta^1 \Psi_l(\xi) \left[\Phi_m(\beta) + \Phi_m'(\beta)(\xi - \beta) \right] d\xi \quad (2.23)$$

$$T_n^{(l)} = \mu_0 \int_\beta^1 \Psi_n(\xi) \Psi_l(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

である.

式(2.15), (2.16)中の試験関数として, ここでは次のようなべき関数を用いる.

$$\Phi_m(\xi) = \xi^2(\beta - \xi)^{m-1} \quad (2.25)$$

$$\Psi_n(\xi) = (\xi - \beta)^2(1 - \xi)^{n-1} \quad (2.26)$$

この式(2.25), (2.26)を式(2.19)~(2.24)に代入することにより, 式(2.18)の固有値として系の振動数パラメータ λ が得られる. さらに, 各固有値に対する固有ベクトルとして未定係数 $\{a_m, b_n\}^T$ が求められ, それらを式(2.15), (2.16)に用いることにより系の振動モードが計算できる. 固有値計算の手順としては, まず式(2.18)の一般固有値問題について右辺のマトリクスをコレスキー分解して標準固有値問題に変換し, それに対して, ハウスホルダー・二分法, QR法などが適用されることになる. 本論文では主にハウスホルダー・二分法に基づくサブルーチンを用いる.

表2-1に $\mu_0 = \mu_1 = 1$, $\beta = 0.5$ とした場合の, 式(2.15), (2.16)中の級数の項数 M , N による振動数パラメータの収束状況と式(2.18)の右辺のマトリクスをコレスキー分解したものの残差ノルム $\|\mathbf{R}\|_1$ を示す. この残差ノルムは,

$$\begin{bmatrix} T_m^{(k)} & T_n^{(k)} \\ T_m^{(l)} & T_n^{(l)} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{T} \quad (2.27)$$

表 2 - 1 2 本のはりの接続系の振動数パラメータ λ の収束状況

【 $\mu_0 = \mu_1 = 1, \beta = 0.5$ 】

(M, N)	λ				$\ R\ _1$
	1st	2nd	3rd	4th	
(4,4)	1.875	4.694	7.860	11.072	2.8×10^{-17}
(6,6)	1.875	4.694	7.855	11.000	2.8×10^{-17}
(8,8)	1.875	4.694	7.855	10.996	2.8×10^{-17}
(10,10)	1.875	4.694	7.855	10.996	2.8×10^{-17}
Exact	1.875	4.694	7.855	10.996	0

とすると、式(2.18)の固有値問題を解く際に、 $T=T_L T_L^T$ の形にコレスキー分解をし（ここで、 T_L は下三角マトリクス、 T_L^T は T_L の転置行列）、その分解結果 $\hat{T}_L$ 、 $\hat{T}_L^T$ について、残差ノルム

$$R=T-\hat{T}_L \hat{T}_L^T=[a_{ij}] \quad (i,j=1,2,\dots, isize) \quad (2.28)$$

$$\|R\|_1=\max_j \sum_{i=1}^{isize} |a_{ij}| \quad (2.29)$$

すなわち、残差行列の各要素の絶対値について列和の最大値を計算したものであり、コレスキー分解における計算精度を図るひとつの尺度である。ただし、 $isize$ はマトリクス T のサイズを表し、この場合は $M+N$ である。この残差ノルムが小さいほど計算精度が高いことを示している。ここで用いた試験関数は、 $\Phi_m(\xi)$ は $\xi=0$ で固定された片持ばり、 $\Psi_n(\xi)$ は $\xi=\beta$ で固定された片持ばりに対する試験関数であるため、 L_1 、 L_2 の各部分の材料、断面形状が同じならば、接続系の振動は一本の様な片持ばりの振動と同等になるはずである。表2-1より、接続系の振動数パラメータ λ は少ない項数で厳密解である様な片持ばりの振動数パラメータの値に収束することが分かる。また、残差ノルムの値も小さく、十分な精度でコレスキー分解が行われていることを示している。次に、表2-2に $\mu_0=\mu_1=1$ 、 $M=N=7$ としたときの、接続点の位置 β による振動数パラメータの変化を示す。この範囲の β に対しては λ の変化は認められず、安定して λ の計算ができることが分かる。また、図2-4は $\mu_0=\mu_1=1$ 、 $\beta=0.5$ とした場合の接続系の振動モードを実線で、様な片持ばりの振動モードを点線で示したものである。両者はほとんど一致しており、図からはその差は判別できない。

以上より、はりの接続系に対しては、本節で述べたような接続条件の取り扱いによって十分な精度で解析ができることが分かる。

表 2 - 2 接続点の位置 β による 2 本のはりの接続系の振動数パラメータ λ の変化

【 $M=7, N=7, \mu_0=\mu_1=1$ 】

β	λ			
	1st	2nd	3rd	4th
0.3	1.875	4.694	7.855	10.996
0.4	1.875	4.694	7.855	10.996
0.5	1.875	4.694	7.855	10.996
0.6	1.875	4.694	7.855	10.996
0.7	1.875	4.694	7.855	10.996
Exact	1.875	4.694	7.855	10.996

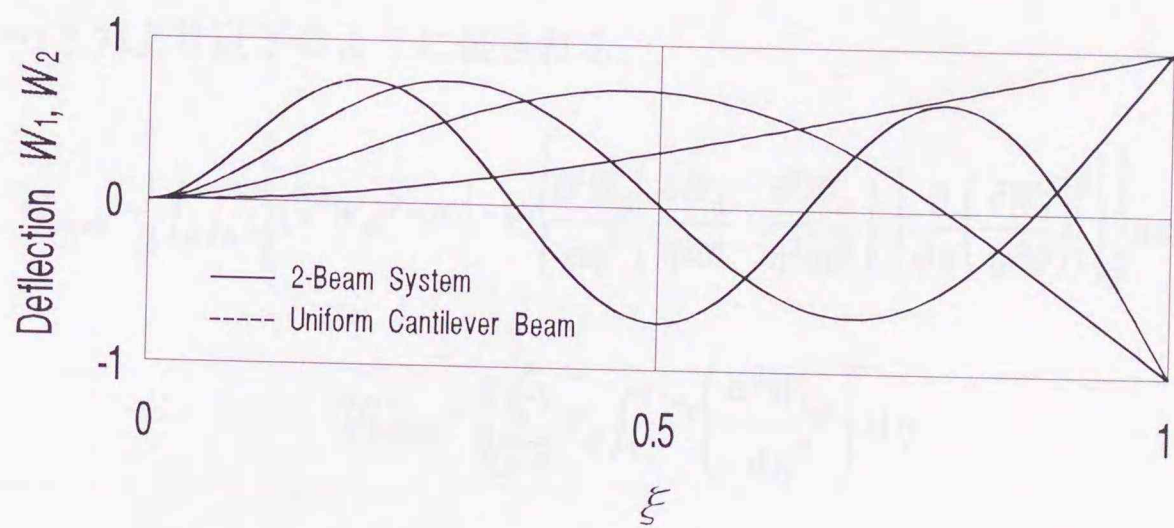


図 2-4 はりの振動モード
 【 $\mu_0=1, \mu_1=1, M=7, N=7, \beta=0.5$ 】

2.4.1.2 ディスク・ブレード連成系の解析⁽⁶⁰⁾

図2-5に、ここで扱うディスク・ブレード連成系を示す。この系は外半径、内半径、板厚がそれぞれ a , b , h のディスクの外周上に、 P 本のブレードが接続されている。ブレードは断面積一定の長方形断面をもつはりであるとし、 p 番目のブレードの長さ、幅、高さをそれぞれ l_p , b_{bp} , h_{bp} ($p=1,2,\dots,P$)とする。座標系は、ディスクの中心に原点をもつ円柱座標系 $O_d-r\theta z$ を用いる。ディスク、ブレードの変位は面外方向変位のみ考えるものとし、それぞれ w_d , w_{bp} とする。このとき、ディスク、ブレードそれぞれのひずみエネルギー、運動エネルギーの最大値は式(2.4)~(2.7)より以下のように表される。

$$U_{d\max} = \frac{1}{2} \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} \left[(\bar{\nabla}^2 W_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 W_d}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \eta} + \frac{\partial^2 W_d}{\eta^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] \eta d\theta d\eta \quad (2.30)$$

$$U_{b\max} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \varepsilon_p \int_1^{1+\alpha_p} \left(\frac{d^2 W_{bp}}{d\eta^2} \right)^2 d\eta \quad (2.31)$$

$$T_{d\max} = \frac{1}{2} \Lambda^4 \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} W_d^2 \eta d\theta d\eta \quad (2.32)$$

$$T_{b\max} = \frac{1}{2} \Lambda^4 \sum_{p=1}^P \gamma_p \int_1^{1+\alpha_p} W_{bp}^2 d\eta \quad (2.33)$$

ただし、以下のような無次元量を導入してある。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r/a, \quad \beta = b/a, \quad \alpha_p = l_p/a, \\ w_d(r, \theta, t) &= a W_d(\eta, \theta) \sin \omega t, \quad w_{bp}(r, t) = a W_{bp}(\eta) \sin \omega t, \\ (U_d, U_b, T_d, T_b) &= \frac{1}{D_d} (U_d^0, U_b^0, T_d^0, T_b^0), \\ \bar{\nabla}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

また

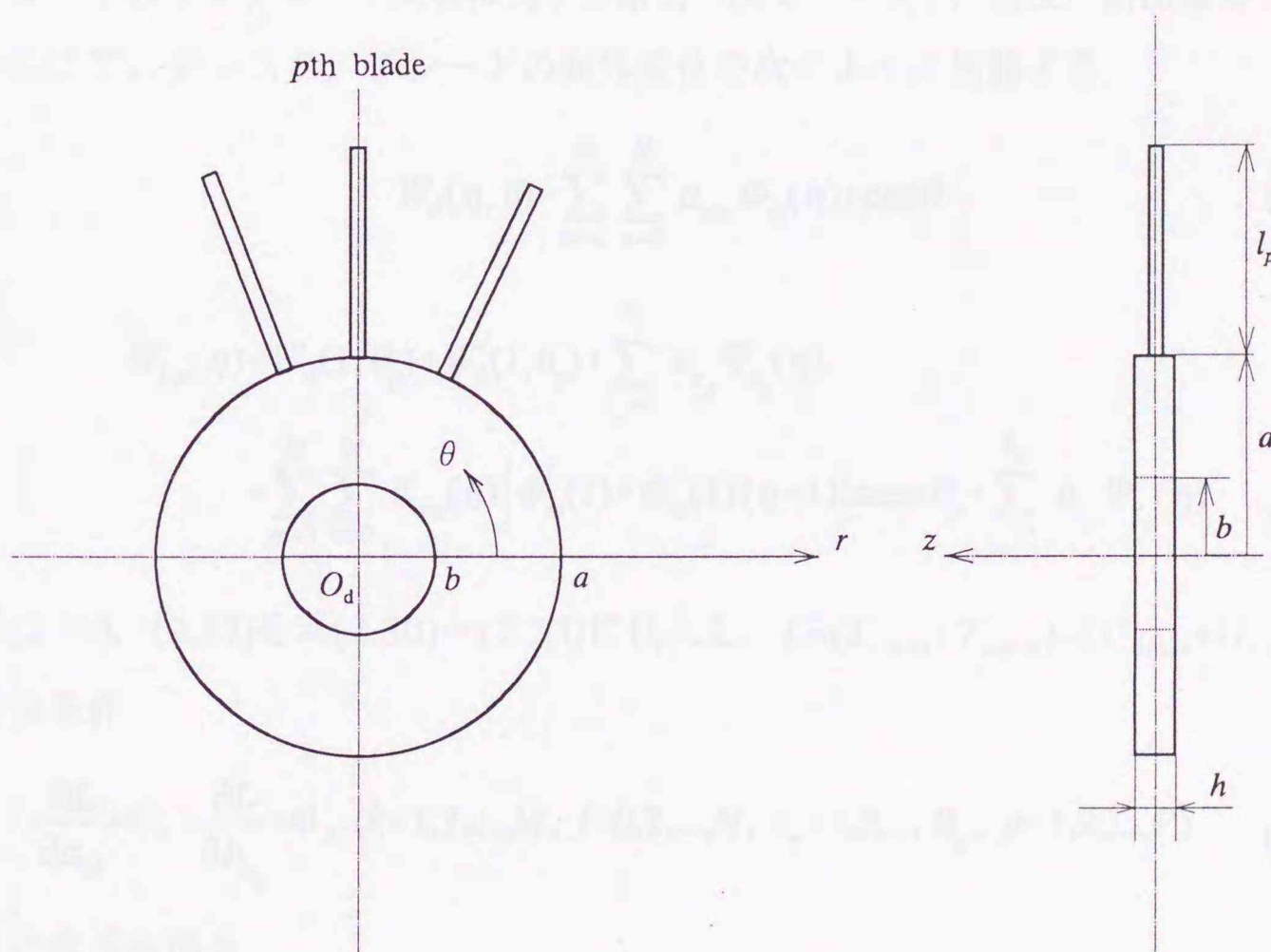


図 2-5 ディスク・ブレード連成系と座標系

$$\varepsilon_p = \frac{E_{bp} I_{bp}}{D_d a}, \quad \gamma_p = \frac{\rho_{bp} A_p}{\rho_d h a} \quad (2.35)$$

である。ここで、 $\Lambda^4 = \rho_d h a^4 \omega^2 / D_d$ は無次元振動数パラメータであり、 D_d はディスクの曲げこわさで、ヤング率 E_d とポアソン比 ν を用いて $D_d = E_d h^3 / 12(1 - \nu^2)$ と表され、 ρ_d はディスクの密度であり、 E_{bp} 、 $I_{bp} = b_{bp} h_{bp}^3 / 12$ 、 ρ_{bp} 、 A_p はそれぞれ p 番目のブレードのヤング率、中央線に関する断面二次モーメント、密度、断面積である。

ここで、ディスク、ブレードの面外変位を次のように展開する。

$$W_d(\eta, \theta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \Phi_m(\eta) \cos n \theta \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} W_{bp}(\eta) &= W_d(1, \theta_p) + W'_d(1, \theta_p) + \sum_{r_p=1}^{R_p} b_{r_p} \Psi_{r_p}(\eta) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N a_{mn}(\eta) [\Phi_m(1) + \Phi'_m(1)(\eta - 1)] \cos n \theta_p + \sum_{r_p=1}^{R_p} b_{r_p} \Psi_{r_p}(\eta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

式(2.36)、(2.37)を式(2.30)～(2.33)に代入し、 $L = (T_{d \max} + T_{b \max}) - (U_{d \max} + U_{b \max})$ の停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial a_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b_{s_p}} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, M, \quad l=0, 2, \dots, N, \quad s_p=1, 2, \dots, R_p, \quad p=1, 2, \dots, P) \quad (2.38)$$

より次式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_{mn}^{(kl)} & 0 \\ 0 & U_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{r_p} \end{bmatrix} = \Lambda^4 \begin{bmatrix} T_{mn}^{(kl)} & T_{r_p}^{(kl)} \\ T_{mn}^{(s_p)} & T_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{r_p} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

あるいは

$$\frac{1}{\Lambda^4} \begin{bmatrix} U_{mn}^{(kl)} & 0 \\ 0 & U_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{r_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{mn}^{(kl)} & T_{r_p}^{(kl)} \\ T_{mn}^{(s_p)} & T_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mn} \\ b_{r_p} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

ただし、各マトリックスの要素は

$$\begin{aligned}
U_{mn}^{(kl)} = & \Pi_1 \int_{\beta}^1 \left[\left(\Phi_m'' + \frac{\Phi_m'}{\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} \Phi_m \right) \left(\Phi_k'' + \frac{\Phi_k'}{\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} \Phi_k \right) \right. \\
& - (1-\nu) \left\{ \Phi_m'' \left(\frac{\Phi_k'}{\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} \Phi_k \right) + \Phi_k'' \left(\frac{\Phi_m'}{\eta} - \frac{n^2}{\eta^2} \Phi_m \right) \right. \\
& \left. \left. - 2 \left(\frac{n}{\eta^2} \Phi_m - \frac{n}{\eta} \Phi_m' \right) \left(\frac{n}{\eta^2} \Phi_k - \frac{n}{\eta} \Phi_k' \right) \right\} \right] \eta d\eta
\end{aligned} \quad (2.41)$$

$$U_{r_p}^{(s_p)} = \varepsilon_p \int_1^{1+\alpha_p} \Psi_{r_p}''(\eta) \Psi_{s_p}''(\eta) d\eta \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
T_{mn}^{(kl)} = & \Pi_1 \int_{\beta}^1 \Phi_m \Phi_k \eta d\eta \\
& + \sum_{p=1}^P \gamma_p \cos n \theta_p \cos l \theta_p \int_1^{1+\alpha_p} [\Phi_m(1) + \Phi_m'(1)(\eta-1)] [\Phi_k(1) + \Phi_k'(1)(\eta-1)] d\eta
\end{aligned} \quad (2.43)$$

$$T_{r_p}^{(kl)} = \gamma_p \cos l \theta_p \int_1^{1+\alpha_p} \Psi_{r_p} [\Phi_k(1) + \Phi_k'(1)(\eta-1)] d\eta \quad (2.44)$$

$$T_{mn}^{(s_p)} = \gamma_p \cos n \theta_p \int_1^{1+\alpha_p} \Psi_{s_p} [\Phi_m(1) + \Phi_m'(1)(\eta-1)] d\eta \quad (2.45)$$

$$T_{r_p}^{(s_p)} = \gamma_p \int_1^{1+\alpha_p} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} d\eta \quad (2.46)$$

である。なお、以下の記号を用いている。

$$\Pi_1 = \begin{cases} 2\pi & (n=l=0) \\ \pi & (n=l \neq 0) \\ 0 & (n \neq l) \end{cases} \quad (2.47)$$

ここでは、半径方向の試験関数には次のような関数を用いる。

$$\Phi_m(\eta) = (\eta - \beta)^2 \eta^{m-1} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{r_p}(\eta) = & \sin[\lambda_{br_p}(\eta-1)] + C_{1r_p} \cos[\lambda_{br_p}(\eta-1)] \\
& + C_{2r_p} \sinh[\lambda_{br_p}(\eta-1)] + C_{3r_p} \cosh[\lambda_{br_p}(\eta-1)]
\end{aligned} \quad (2.49)$$

この Φ_m は、 $\eta = \beta$ で固定された片持ばりの試験関数であり、 Ψ_{r_p} は $\eta = 1$ で固定された長さが α_p の片持ばりの固有関数である。 λ_{br_p} は長さ1の片持ばりの振動数パラ

メータ λ_{r_p} を用いて, $\lambda_{br_p} = \lambda_{r_p} / \alpha_p$ と表される. また, λ_{r_p} , C_{1r_p} , C_{2r_p} , C_{3r_p} は片持ばりの自由振動を解いて得られる既知定数である.

表 2-3 に, 式(2.36)の級数の項数 M , N によるディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ の収束状況を 8 本の同一形状のブレードを持つ系について示す. 計算は, 円板が主として振動するモードのうち, 節直径が 1, 節円が 0 のモードについて行った. ここでは, $\alpha_p = 1$, $\gamma_p = 1.290 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_p = 1.174 \times 10^{-2}$ ($p=1, 2, \dots, 8$), $\beta = 0.3$ とし, 式(2.37)中の級数の項数は全てのブレードについて同一の値 $R_p = R = 5$ とした. ただし, 式(2.39)ではなく式(2.40)を用いて計算している. これは, 式(2.39)の右辺の係数マトリクスの性質が悪く, コレスキー分解が困難なためである. 式(2.40)を用いれば, コレスキー分解すべき行列は式(2.40)の左辺であり, ブロック対角行列であるので数値計算上の性質が改善され, コレスキー分解が可能になる. この表中の $\|R\|_1$ は

$$\begin{bmatrix} U_{mn}^{(kl)} & 0 \\ 0 & U_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \equiv U \quad (2.50)$$

に対し, $U = U_L U_L^T$ の形にコレスキー分解をし (ここで, U_L は下三角マトリクス, U_L^T は U_L の転置行列), その分解結果 $\hat{U}_L$, $\hat{U}_L^T$ について, 残差ノルム

$$R = U - \hat{U}_L \hat{U}_L^T = [a_{ij}], \quad (i, j = 1, 2, \dots, isize) \quad (2.51)$$

$$\|R\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{M+N} |a_{ij}| \quad (2.52)$$

を計算したものである. ただし, $isize$ はマトリクス U のサイズを表し, この場合は $M \times (N+1) + P \times R$ である. この表より, ディスクの半径方向試験関数の項数は $M=6$ 項程度で収束していると判断できるが, 周方向関数の項数は $N=20$ を超えてもまだ Λ の値は変動していることが分かる. これは, 円板上に周期対称に付加物が付加された系においては, 円板の振動は周方向波数と付加物の数との間の特定の関係を満たすような形で生じ, ひとつの振動モードに全ての周方向波数成分 (級数の全項) が関与するわけではないためである. これについては, 第 3 章で詳しく

表2-3 ディスク-ブレード連成系の振動数パラメータ Λ の収束状況

【 $P=8$, $\alpha_p=1$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$, $R_p=R=5$ ($p=1,2,\dots,8$), $\beta=0.3$, $\nu=0.3$ 】

	M					
	4		5		6	
	Λ	$\ R\ _1$	Λ	$\ R\ _1$	Λ	$\ R\ _1$
12	2.582	4.5×10^{-13}	2.581	4.5×10^{-13}	2.581	4.5×10^{-13}
16	2.576	3.6×10^{-12}	2.574	3.6×10^{-12}	2.574	3.6×10^{-12}
20	2.576	9.0×10^{-12}	2.574	1.1×10^{-11}	2.574	1.2×10^{-11}
24	2.573	1.5×10^{-11}	2.571	1.5×10^{-11}	2.570	1.8×10^{-11}
28	2.573	2.9×10^{-11}	2.571	3.6×10^{-11}	2.570	4.4×10^{-11}
32	2.572	5.8×10^{-11}	2.569	5.8×10^{-11}	2.568	5.8×10^{-11}

述べるが、そのような円板の振動形は関与する周方向波数成分の組合せによりグループ分けすることができる。そしてそのような振動形の種類は、接続されるブレードの本数とともに増加し、 P 本のブレードを持つ系の場合 $[P/2]+1$ とおり生じる（ $[x]$ は x を超えない最大の整数）。したがって、ブレードがはりとしての n 次の振動形で振動する場合、ディスクの振動形はそれぞれに対して $[P/2]+1$ とおり生じるので、ディスク・ブレード連成系のブレードの主振動モード（ブレードの振動が卓越する振動モード）の振動は $[P/2]+1$ とおり存在することになる。これに関して表2-4には、 $M=6$ 、 $N=24$ とし、他のパラメータは表2-3の場合と同じ値を用いた場合の振動数パラメータ Λ を、ブレードの本数 P とともに示す。これより、ブレードの数が増加すると、質量効果により Λ の値が低下することが分かる。さらに、ブレードの本数が増しても、ブレードの主振動モードの振動数の数は6とおりのままで、ディスクがほとんど動かずにブレードのみが振動するモード（重解、 $\Lambda=1.831$ ）の数が増えていることが分かる。これは、表中の $\|R\|_1$ の値が 10^{-11} のオーダーと大きいことから、コレスキー分解された行列の精度が十分でないために、その後の固有値計算において本来分離されるべき固有値が分離されず重解となったものと考えられる。したがって、本節の解析法によると、ブレードの本数が8本より多い場合には全ての固有値を正しく計算することが困難になるといえる。

以上より、接続条件を試験関数の幾何学的境界条件に取り込む方法では、はりどうしの接続系については問題ないが、ディスク・ブレード連成系に対しては数値計算上のトラブルが生じ、正しい解を求めることが困難になることが明らかになった。この困難は、主としてコレスキー分解におけるトラブルであり、ディスク・ブレード連成系の計算においては密行列のコレスキー分解は困難であり、分解される行列が対角行列に近いほど計算が容易になるためブロック対角行列とすればコレスキー分解は一応可能だが、その精度が不十分なため、その後の固有値計算において正しい解を得ることが困難になる。

表 2-4 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ

【 $\alpha_p=1$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$, $R_p=5(p=1,2,\dots,P)$,
 $M=6$, $N=24$, $\beta=0.3$, $\nu=0.3$ 】

Mode	P		
	8	16	32
1st	1.768	1.603	1.463
2nd	1.771	1.759	1.717
3rd	1.780	1.767	1.746
4th	1.797	1.789	1.779
5th	1.801	1.799	1.795
6th	1.831	1.831	1.831
7th	1.831	1.831	1.831
8th	1.831	1.831	1.831
9th	2.555	1.831	1.831
10th	2.570	1.831	1.831
11th	2.777	1.831	1.831
12th	3.444	1.831	1.831
13th	4.026	1.831	1.831
14th	4.519	1.831	1.831
15th	4.555	1.831	1.831
16th	4.556	1.831	1.831
17th	4.562	2.293	1.831
18th	4.585	2.401	1.831
19th	4.585	2.566	1.831
20th	4.585	2.965	1.831
$\ R\ _1$	1.8×10^{-11}	1.8×10^{-11}	1.8×10^{-11}

2.4.2 仮想ばねを用いて接続条件を扱う方法

本節で述べる方法は、接続点に仮想ばねを導入し、そのばねこわさを十分大きくとることによって接続の条件を満足させるものである。ここでは、はりの接続系について取り上げ、この手法による解析手順と実際の数値計算における解の計算状況について調べる。

図2-6に、2本のはりからなる系を示す。2.4.1.1節との違いは、2本のはりのそれぞれの中央に原点を持つ二つの局所座標系 $O_i-x_i z_i (i=1,2)$ をとることと、 $x_1=-l_1/2$ に固定端の境界条件を満たすための変位と回転角に比例するばねこわさ kT_1^0 , kR_1^0 を導入し、また2本のはりの接続点に接続条件を満足させるための変位の差と回転角の差に比例するばねこわさ kT_2^0 , kR_2^0 を導入することである。

この場合、系に蓄えられる各エネルギーの最大値は以下のようなになる。

$$U_{1\max} = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi_1^2} \right)^2 d\xi_1 \quad (2.53)$$

$$T_{1\max} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^4}{(1+\alpha)^4} \int_{-1/2}^{1/2} W_1^2 d\xi_1 \quad (2.54)$$

$$U_{2\max} = \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{\alpha} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi_2^2} \right)^2 d\xi_2 \quad (2.55)$$

$$T_{2\max} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^4} \lambda^4 \int_{-1/2}^{1/2} W_2^2 d\xi_2 \quad (2.56)$$

$$U_{s\max} = \frac{1}{2} \left[kT_1 W_1^2 + kR_1 W_1'^2 \right]_{\xi_1=-1/2} + \frac{1}{2} \left[kT_2 (W_1 - \alpha W_2)^2 + kR_2 (W_1' - W_2')^2 \right]_{\xi_1=1/2, \xi_2=-1/2} \quad (2.57)$$

ただし、 U_s は仮想ばねに蓄えられるポテンシャルエネルギーであり、各式には以下のような無次元量を用いている。

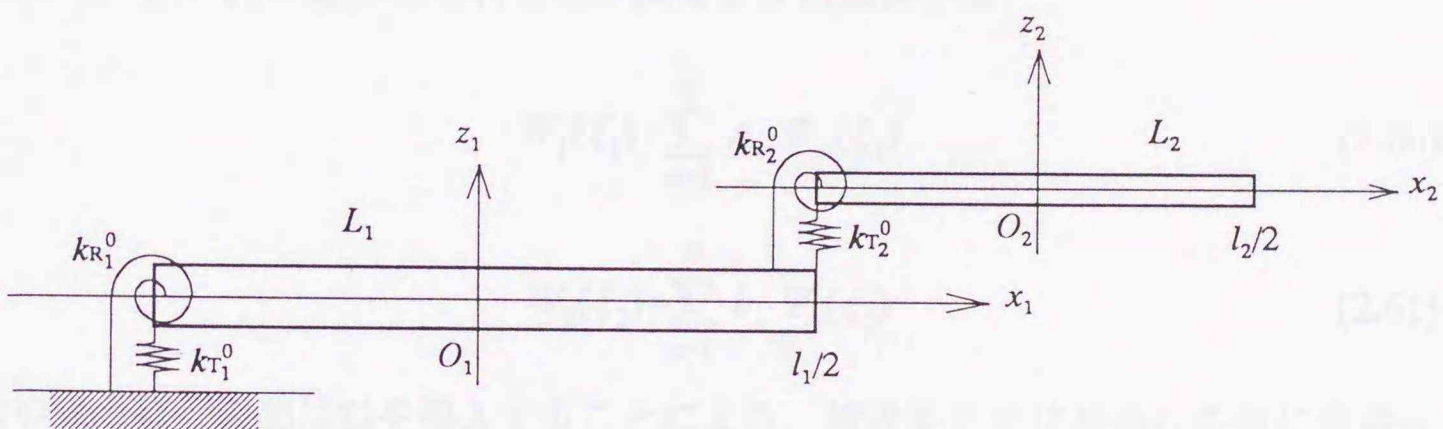


図 2 - 6 仮想ばねを用いた 2 本のはりの接続系と座標系

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= l_2/l_1, \quad \xi_i = x_i/l_i, \quad W_i(\xi_i) \sin \omega t = w_i(x_i, t)/l_i \quad (i=1,2), \\ k_{T_1} &= k_{T_1}^0 l_1^3/E_1 I_1, \quad k_{R_1} = k_{R_1}^0 l_1/E_1 I_1, \quad k_{T_2} = k_{T_2}^0 l_1^3/E_1 I_1, \quad k_{R_2} = k_{R_2}^0 l_1/E_1 I_1, \\ (U_1, U_2, T_1, T_2) &= \frac{l_1}{E_1 I_1} (U_1^0, U_2^0, T_1^0, T_2^0) \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

また, λ, μ_0, μ_1 は次のような無次元量である.

$$\lambda^4 = \frac{\rho_1 A_1 l_1^4}{E_1 I_1} \omega^2, \quad \mu_0 = \frac{\rho_2 A_2}{\rho_1 A_1}, \quad \mu_1 = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \quad (2.59)$$

ここで, L_1, L_2 の変位をそれぞれ次式のように展開する.

$$W_1(\xi_1) = \sum_{m=1}^M a_m \Phi_m(\xi_1) \quad (2.60)$$

$$W_2(\xi_2) = \sum_{n=1}^N b_n \Psi_n(\xi_2) \quad (2.61)$$

このように, 仮想ばねを導入することにより, 境界条件や接続条件を特に意識せずに変位関数の試験関数を選択することができる. そのため, シンプルな形の試験関数を用いることができ, 解析が非常に簡単になる. ここで考えている系については, L_1, L_2 とも両端自由のほりに対する試験関数を用いればよい. 式(2.60), (2.61)を式(2.53)~(2.57)に代入し, $L = (T_{1 \max} + T_{2 \max}) - (U_{1 \max} + U_{2 \max} + U_{s \max})$ の停留条件,

$$\frac{\partial L}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b_l} = 0, \quad (k=1,2,\dots,M, \quad l=1,2,\dots,N) \quad (2.62)$$

より次式を得る.

$$\begin{bmatrix} U_m^{(k)} & U_n^{(k)} \\ U_m^{(l)} & U_n^{(l)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ b_n \end{Bmatrix} = \lambda^4 \begin{bmatrix} T_m^{(k)} & 0 \\ 0 & T_n^{(l)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ b_n \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

ここで, 各マトリクスの要素は,

$$U_m^{(k)} = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_m''(\xi_1) \Phi_k''(\xi_1) d\xi_1 \\ + \left[k_{T_1} \Phi_m \Phi_k + k_{R_1} \Phi_m' \Phi_k' \right]_{\xi_1=-1/2} + \left[k_{T_2} \Phi_m \Phi_k + k_{R_2} \Phi_m' \Phi_k' \right]_{\xi_1=1/2} \quad (2.64)$$

$$U_n^{(k)} = - \left[\alpha k_{T_2} \Phi_k \Psi_n + k_{R_2} \Phi_k' \Psi_n' \right]_{\xi_1=1/2, \xi_2=-1/2} \quad (2.65)$$

$$U_n^{(l)} = \frac{\mu_1}{\alpha} \int_{-1/2}^{1/2} \Psi_n''(\xi_2) \Psi_l''(\xi_2) d\xi_2 + \left[k_{T_2} \alpha^2 \Psi_n \Psi_l + k_{R_2} \Psi_n' \Psi_l' \right]_{\xi_2=-1/2} \quad (2.66)$$

$$U_m^{(l)} = - \left[\alpha k_{T_2} \Phi_m \Psi_l + k_{R_2} \Phi_m' \Psi_l' \right]_{\xi_1=1/2, \xi_2=-1/2} \quad (2.67)$$

$$T_m^{(k)} = \frac{1}{(1+\alpha)^4} \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_m(\xi_1) \Phi_k(\xi_1) d\xi_1 \quad (2.68)$$

$$T_n^{(l)} = \frac{\mu_0 \alpha^3}{(1+\alpha)^4} \int_{-1/2}^{1/2} \Psi_n(\xi_2) \Psi_l(\xi_2) d\xi_2 \quad (2.69)$$

である。

さて、式(2.63)よりこの問題の場合でコレスキー分解される右辺の係数行列は一般にブロック対角行列となるが、前節の計算結果より、ディスク・ブレード連成系などに対してはブロック対角行列に対するコレスキー分解の精度が十分ではなくなる場合があることが分かっているため、ここでは右辺の係数行列が対角行列になるような関数、すなわち直交性を持つ関数を試験関数として用いることを考える。はりにについては固有関数が存在し、それらは直交性を有するが、ここではグラム・シュミットの直交化法を用いて構成される直交多項式を用いる。これについては第3章で詳しく述べるが、両端が自由なはりについては次の漸化式から得られる。

$$F_1(\xi) = 1 \quad (2.70)$$

$$F_2(\xi) = (\xi - B_2) F_1(\xi), \quad (2.71)$$

$$F_i(\xi) = (\xi - B_i)F_{i-1}(\xi) - C_i F_{i-2}(\xi), \quad (i=3,4,\dots) \quad (2.72)$$

$$B_i = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} \xi F_{i-1}^2 d\xi}{\int_{-1/2}^{1/2} F_{i-1}^2 d\xi}, \quad C_i = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} \xi F_{i-1} F_{i-2} d\xi}{\int_{-1/2}^{1/2} F_{i-2}^2 d\xi} = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} F_{i-1}^2 d\xi}{\int_{-1/2}^{1/2} F_{i-2}^2 d\xi} \quad (2.73)$$

ここで $F_i(\xi)$ は、 L_1 に対しては $F_i(\xi) = \Phi_m(\xi_1)$ であり、 L_2 に対しては $F_i(\xi) = \Psi_n(\xi_2)$ である。こうして構成された直交多項式は、次のような直交条件を満たす。

$$\int_{-1/2}^{1/2} F_i(\xi) F_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & (i \neq j) \\ g_{ij}, & (i = j) \end{cases} \quad (2.74)$$

ただし、 g_{ij} は 0 でない定数であり、正規化されている場合は 1 である。これらを式(2.64)～(2.69)に用いて数値計算を行う。

表 2-5 は、 $\mu_0 = \mu_1 = 1$ 、 $\alpha = 1$ とした場合の、式(2.60)、(2.61)中の級数の項数 M 、 N と仮想ばねのばねこわさ k_{T_1} 、 k_{R_1} 、 k_{T_2} 、 k_{R_2} による振動数パラメータの収束状況を示す。この表より、級数の項数 M 、 N の値とともに振動数パラメータは高い値をとりながら収束し、 $(M, N) = (10, 10)$ 以上とれば 4 次モードまでについて収束したとみなすことができる。また、仮想ばねのばねこわさを大きくしていくと、振動数パラメータは低い値をとりながら収束し、 $k_{T_1} = k_{R_1} = k_{T_2} = k_{R_2} = 10^7$ で厳密解に小数点以下 3 桁の範囲で一致する。ただし、これらのばねこわさをあまり大きくすると、低次の振動数から数値計算上の不安定を生じて、振動数パラメータが一定値に収束せず振動挙動を示すことが分かる。ここでは試験関数に直交多項式を用いているため、式(2.63)の固有値問題を解く際にコレスキー分解される右辺の係数行列の残差ノルムを調べてみると、ばねこわさの大きさに関わらず 2.8×10^{-17} と非常に小さい値となっており、コレスキー分解は支障無く行われていると思われることから、この数値上の不安定はマトリクス要素中に非常に大きなオーダーの要素が存在することに起因するコレスキー分解後の固有値計算時のトラブルであると考えられる。そのため、完全に剛結の場合は接続点のばねこわさは無限大であるが、解の収束状況と数値計算の安定性を考えると仮想ばねのばねこわさは $10^6 \sim 10^7$ 程度が妥当であるといえる。

なお、この仮想ばねを用いた場合の接続位置における幾何学的条件（変位、傾

表 2-5 仮想ばねを用いて 2 本のはりを接続した系の振動数パラメータ λ の収束状況

【 $\mu_0 = \mu_1 = 1, \alpha = 1$ 】

$kT_1 = kR_1 = kT_2 = kR_2$	(M, N)	1st	2nd	3rd	4th
10^5	(4,4)	1.876	4.714	8.668	14.766
	(6,6)	1.875	4.694	7.859	11.070
	(8,8)	1.875	4.694	7.854	10.994
	(10,10)	1.875	4.694	7.854	10.994
	(12,12)	1.875	4.694	7.854	10.994
10^6	(4,4)	1.876	4.714	8.669	14.769
	(6,6)	1.875	4.694	7.860	11.072
	(8,8)	1.875	4.694	7.855	10.996
	(10,10)	1.875	4.694	7.855	10.995
	(12,12)	1.875	4.694	7.855	10.995
10^7	(4,4)	1.876	4.714	8.669	14.769
	(6,6)	1.875	4.694	7.860	11.072
	(8,8)	1.875	4.694	7.855	10.996
	(10,10)	1.875	4.694	7.855	10.996
	(12,12)	1.875	4.694	7.855	10.996
10^8	(4,4)	1.876	4.714	8.669	14.769
	(6,6)	1.875	4.694	7.860	11.072
	(8,8)	1.875	4.694	7.855	10.996
	(10,10)	1.875	4.694	7.855	10.996
	(12,12)	1.877	4.694	7.855	10.996
10^9	(4,4)	1.876	4.714	8.669	14.769
	(6,6)	1.875	4.694	7.860	11.072
	(8,8)	1.876	4.694	7.855	10.996
	(10,10)	1.876	4.694	7.855	10.996
	(12,12)	1.888	4.695	7.855	10.996
10^{10}	(4,4)	1.876	4.714	8.669	14.769
	(6,6)	1.878	4.694	7.860	11.072
	(8,8)	1.880	4.694	7.855	10.996
	(10,10)	1.780	4.701	7.857	10.995
	(12,12)	1.768	4.677	7.854	10.993
Exact		1.875	4.694	7.855	10.996

き)の連続性, および力学的条件(モーメント, せん断力)の連続性に関しては YuanとDickinson⁽⁴¹⁾がはりの接続系と平板の接続系について調べており, そこでは, 変位, 傾き, モーメント, せん断力のいずれもが連続性を持つことが示されている.

2.5 結 言

本章では, まずはじめにリッツ法についてその概略を述べ, 次にブレードとディスクのひずみエネルギー, 運動エネルギーの表示式を示した. また, 接続系における境界条件と接続条件の取り扱いについて述べ, 変位関数に用いる試験関数の幾何学的境界条件に接続条件を取り込む方法に関しては, はりの接続系とディスク・ブレード接続系について, また, 仮想ばねを用いて接続条件を満たす方法に関しては, はりの接続系について, それぞれ解析を行いその妥当性と有効性について検討した. ここで得られた結果を要約すると以下のようなになる.

- [1] 接続条件を変位関数の幾何学的境界条件に取り込む方法に関して.
 - (1) はりの接続系については, 解の収束性, 精度, 計算の安定性ともに良好である.
 - (2) ディスク・ブレード連成系については, 通常のリッツ法の手順で得られる式(2.39)の固有値問題は, 運動エネルギーから導かれる右辺の係数マトリクスの特が悪くコレスキー分解が困難となる. そのため分解される行列がブロック対角行列となる式(2.40)を用いて計算を行ったが, ブレードの本数が増加するとコレスキー分解結果の精度不足に起因すると思われる数値計算上の問題により, 全ての固有値を正しく求めることが困難になる.
 - (3) この方法によると, ひずみエネルギーから導かれる係数行列がブロック対角行列となるが, これを完全な対角行列の形にするには微分演算子を含んだ形での直交性を有する関数を用いる必要があり, 一般にそのような関数を簡単な形で構成することは困難である.

[2] 仮想ばねを用いて接続条件を扱う方法に関して.

- (1) 変位と傾きの差に比例する仮想的なばねを導入し, それらに蓄えられるポテンシャルエネルギーを考慮することにより, 接続条件, 境界条件を扱うことができることをはりの接続系を例として示した.
- (2) 仮想ばねを導入することで, 変位関数の試験関数は, 境界条件や接続条件を特に意識せずに選ぶことができることからシンプルな形の関数を用いることができ, 解析が簡単になる. またこのとき, 運動エネルギーから導かれる係数マトリクスは一般にはブロック対角行列となるが, 直交性のある関数を用いれば完全に対角行列とすることができる. したがって, 仮想ばねを用いて接続条件を扱う方法と直交性のある関数とを併用することで解析ならびに数値計算上の大きなメリットを得ることができる.
- (3) 仮想ばねのばねこわさを大きくしてゆくと振動数パラメータは厳密解に近い値をとりながら収束してゆくが, ばねこわさを大きくし過ぎると, 固有値計算において数値的な不安定が生じ, 正しい解が得られなくなる. そのため解の収束状況と数値計算の安定性を考えると仮想ばねのばねこわさは, はりの接続系に対しては $10^6 \sim 10^7$ 程度が妥当である.

第3章 ディスク・ブレード連成系の自由振動

3.1 緒言

蒸気タービン等にみられる構造は、円板の外周部に等間隔にはりが取付けられたディスク・ブレード連成系としてモデル化できる。このような接続系には連成振動が生じ、全系の解析は一般に大規模で複雑なものとなる。そのため、従来このような系を連続体あるいは多自由度系として扱う場合には、構造の周期対称性を利用して自由度を減らした系に伝達マトリクス法⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾、有限要素法⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、あるいはリッツ法⁽⁹⁾等を適用する方法が採られてきた。

このような異なる構造要素からなる系の全系にわたる解析をリッツ法で行う際、特に問題となるのが第2章で述べた接続条件、境界条件の取り扱い、ならびにそれらを満たす適切な試験関数を見つけることである。これ以降、本論文では第2章の結果を踏まえ、仮想ばねを接続点に導入して接続条件を満足させ、試験関数には直交性のある関数を使用することにより解析を行う。

本章で行う解析において用いる変位関数の試験関数には、ディスクに対してはブレードを持たない様な円板の自由振動を解いて得られる円板の固有関数を、ブレードに対してはグラム・シュミットの直交化法を用いて構成される直交多項式を採用する。これに関して、Bhat⁽⁴⁵⁾はこの直交多項式を試験関数に用いることを提案し、長方形板⁽⁴⁵⁾、先端に集中質量を有する回転ばり⁽⁴⁶⁾などの振動解析を行っている。

本章ではまず、仮想ばねによるポテンシャルエネルギーを考慮した系の各エネルギーの評価を行う。この仮想ばねの導入により、用いる変位関数を接続条件を特に意識せずに選ぶことができる。次に、グラム・シュミットの直交化法により直交多項式を構成するための手順を示し、それを用いてブレードに対する試験関数を構成する。その後、リッツ法の手続きにしたがって振動数方程式を導出する。この方法により、振動数方程式のうち運動エネルギーから導かれる係数マトリクス（質量マトリクスに相当）を対角マトリクス化でき、大規模で複雑な問題に対し

でも安定して数値計算を行うことが可能となる。さらに、ディスク上に付加部材が周期対称に配置されている場合には、そのディスクの振動形は周方向波数成分と付加部材の数との間に成り立つある特定の関係を満たすいくつかのグループ（型，タイプ）に分けられることを明らかにする。そして数値計算を行ってこれを確認するとともに、系の固有振動数パラメータ，振動モードを求め，ディスク・ブレード連成系の振動が，ディスクあるいはブレードのどちらか一方の振動変位が卓越するそれぞれの主振動モードと，両者が共に大きく振動する強連成モードとから成ることを示す。また，シュラウドの有無による振動数パラメータや振動モード形への影響，ブレードの本数と振動数パラメータの関係，などについて調べる。

3.2 仮想ばねによるエネルギーを考慮した定式化

3.2.1 ディスク・ブレード連成系のエネルギー

ここで取扱うディスク・ブレード連成系を図3-1に示す。座標系として，ディスクの中心に原点を持つ円柱座標系 $O_d-r\theta z$ と，それぞれのブレードの中央に原点を持ち，ブレードに沿う局所座標系 $O_p-x_pz_p$ （ z_p 軸は z 軸に平行であるとする）を用いる。ディスクは外周に P 本のブレードが接続された有孔円板で，その外半径，内半径，および板厚をそれぞれ a ， b ， h とする。また，ブレードは長方形断面をもつ断面積一定のはりであるとし， p 番目のブレードの長さ，断面積，周方向の接続位置をそれぞれ， l_p ， A_p ， θ_p （ $p=1,2,\dots,P$ ）とする。ここでは，系の変位 W は z 軸方向のみに生じるものとする。また，ディスクとブレードとの接続点に変位と回転角の差に比例するばねこわさ k_{Tp}^0 ， k_{Rp}^0 を導入する。さらに， p 番目のブレードと $p+1$ 番目のブレードとの間に変位の差に比例するばねこわさ k_{Sp}^0 を導入する。図3-1ではこのばねはブレードの面内変位を拘束するかのよう描いてあるが，これは立体的に描くと図が煩雑になるために模式的に表したものであり，ブレードの変位はディスクの面外方向（ z 軸方向）成分のみ考えているため，このばねも z 軸方向変位の差を拘束するものである。図3-1左図では， z 軸方向のばねを点線で表している。また，このばねは実際のタービンにおけるシュラウドを想定す

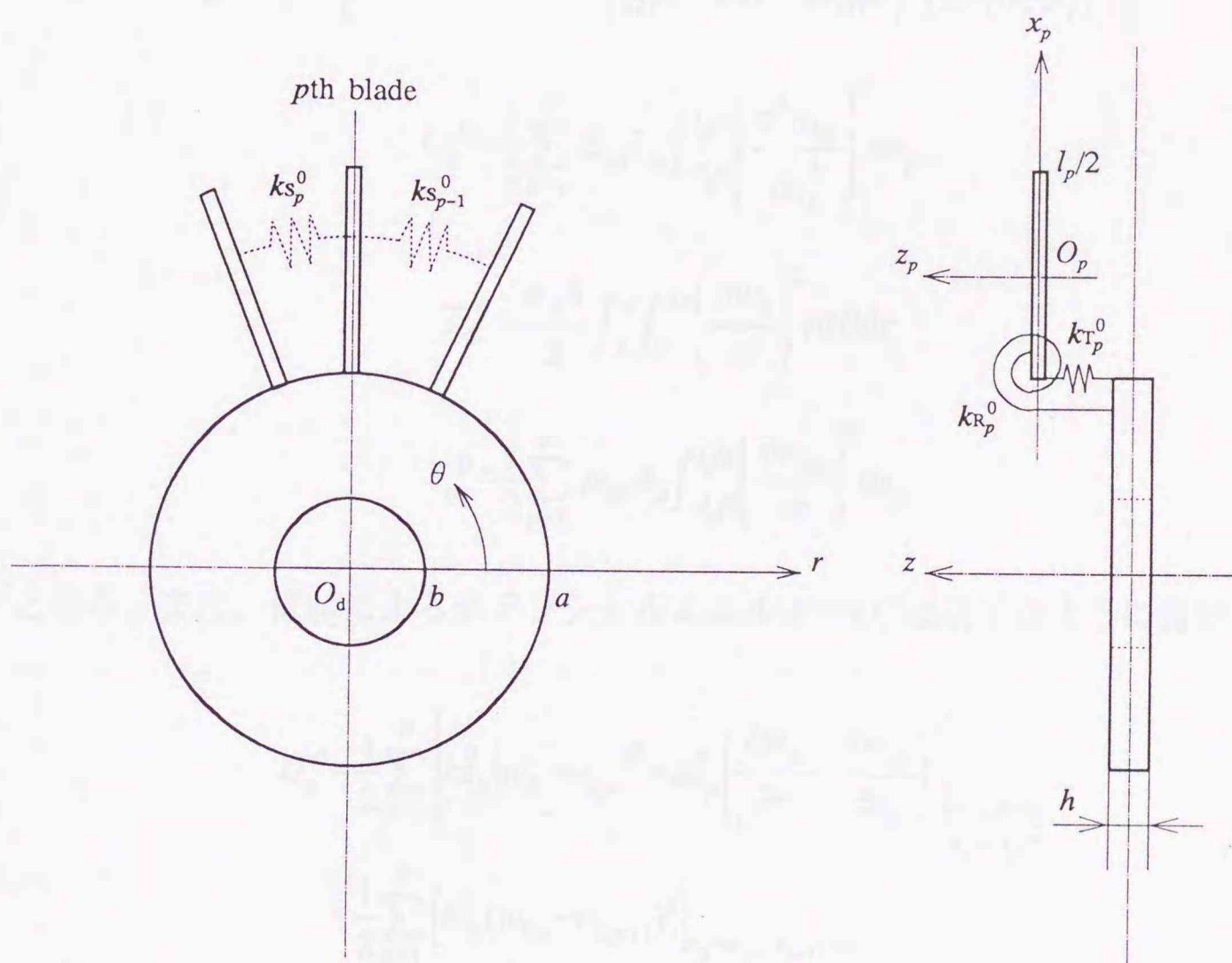


図 3-1 ディスク・ブレード連成系と座標系

るためのものである。いま，ディスクに関する諸量には添字d，ブレードに関する諸量には添字bを付けるものとする，ひずみエネルギー U^0 ，運動エネルギー T^0 は式 (2.4)～(2.7)より

$$U_d^0 = \frac{D_d}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left[(\nabla^2 w_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_d}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w_d}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] r d\theta dr \quad (3.1)$$

$$U_b^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P E_{bp} I_{bp} \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(\frac{\partial^2 w_{bp}}{\partial x_p^2} \right)^2 dx_p \quad (3.2)$$

$$T_d^0 = \frac{\rho_d h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_d}{\partial t} \right)^2 r d\theta dr \quad (3.3)$$

$$T_b^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial t} \right)^2 dx_p \quad (3.4)$$

となる。また，ばねによるポテンシャルエネルギー U_s^0 は以下のように書ける。

$$U_s^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Tp}^0 (w_d - w_{bp})^2 + k_{Rp}^0 \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} - \frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 \right]_{r=a, \theta=\theta_p, x_p=-l_p/2}^{x_p=l_p/2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Sp}^0 (w_{bp} - w_{b_{p+1}})^2 \right]_{x_p=x_{sp}, x_{p+1}=x_{s_{p+1}}} \quad (3.5)$$

ただし， x_{sp} は p 番目のシュラウドの位置を表す。ここで，次のような無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r/a, \quad \xi_p = x_p/l_p, \quad \beta = b/a, \quad \alpha_p = l_p/a, \quad \bar{\nabla}^2 = a^2 \nabla^2, \\ W_d(\eta, \theta) \sin \omega t &= w_d(r, \theta, t)/a, \quad W_{bp}(\xi_p) \sin \omega t = w_{bp}(x_p, t)/l_p, \\ (U_d, U_b, T_d, T_b, U_s) &= \frac{1}{D_d} (U_d^0, U_b^0, T_d^0, T_b^0, U_s^0), \\ k_{Tp} &= \frac{a^2}{D_d} k_{Tp}^0, \quad k_{Rp} = \frac{1}{D_d} k_{Rp}^0, \quad k_{Sp} = \frac{a^2}{D_d} k_{Sp}^0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

これらを用いて式(3.1)～(3.5)を無次元化し，その最大値を求めると，以下のとおりとなる。

$$U_{d \max} = \frac{1}{2} \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} \left[(\nabla^2 W_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 W_d}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \eta} + \frac{\partial^2 W_d}{\eta^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] \eta d\theta d\eta \quad (3.7)$$

$$U_{b \max} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p^3} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial^2 W_{bp}}{\partial \xi_p^2} \right)^2 d\xi_p \quad (3.8)$$

$$T_{d \max} = \frac{1}{2} \Lambda^4 \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} W_d^2 \eta d\theta d\eta \quad (3.9)$$

$$T_{b \max} = \frac{1}{2} \Lambda^4 \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p \int_{-1/2}^{1/2} W_{bp}^2 d\xi_p \quad (3.10)$$

$$U_{s \max} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Tp} (W_d - W_{bp})^2 + k_{Rp} \left(\frac{\partial W_d}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{bp}}{\alpha_p \partial \xi_p} \right)^2 \right]_{\substack{\eta=1, \theta=\theta_p \\ \xi_p=-1/2}} \\ + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Sp} (W_{bp} - W_{b(p+1)})^2 \right]_{\xi_p=\xi_{Sp}, \xi_{p+1}=\xi_{Sp+1}} \quad (3.11)$$

ただし,

$$\Lambda^4 = \frac{\rho_d h a^4}{D_d} \omega^2, \quad \varepsilon_p = \frac{E_{bp} I_{bp}}{D_d a}, \quad \gamma_p = \frac{\rho_{bp} A_p}{\rho_d h a} \quad (3.12)$$

であり, $W_{b(p+1)} = W_{b1}$ とする. ここで Λ は系の無次元振動数パラメータ, ε_p , γ_p はそれぞれ, ディスクと各ブレードの曲げこわさの比, 質量比に関する無次元量である.

3.2.2 変位関数

いま, ディスクとブレードの変位をそれぞれ次式で近似する.

$$W_d(\eta, \theta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \Phi_{mn}(\eta) \cos n\theta \quad (3.13)$$

$$W_{bp}(\xi_p) = \sum_{r_p=1}^{R_p} B_{r_p} \Psi_{r_p}(\xi_p) \quad (3.14)$$

ここで、 $\Phi_{mn}(\eta)$ は、境界条件を満たす円板の固有関数であり、次式で与えられる。

$$\Phi_{mn}(\eta) = J_n(\lambda_{mn}\eta) + C_{1mn}Y_n(\lambda_{mn}\eta) + C_{2mn}I_n(\lambda_{mn}\eta) + C_{3mn}K_n(\lambda_{mn}\eta) \quad (3.15)$$

ただし、 J_n 、 Y_n は第1種、第2種のベッセル関数、 I_n 、 K_n は第1種、第2種の変形されたベッセル関数であり、 $\lambda^4 = \rho_d h a^4 \omega_d^2 / D_d$ 、 C_1 、 C_2 、 C_3 は、内周が固定され、外周が自由な円板の固有値問題を解いて得られる無次元振動数パラメータ（ ω_d は円板の円振動数）と係数である。また、 $\Psi_{rp}(\xi)$ は以下で述べるグラム・シュミットの直交化法を用いて構成される直交多項式であり、 A_{mn} 、 B_{rp} は未知の係数である。

3.3 直交多項式の構成

リッツ法では得られる解の精度は用いる許容関数の項数に依存するが、通常用いられる「べき関数」では運動エネルギーから得られる係数行列がブロック対角行列となるため、ディスク・ブレード連成系においては第2章で述べたように項数が多くなると悪条件となり、数値計算が困難になる。一方、直交性のある関数を用いればその行列は対角行列となるため、悪条件を避けることができる。そこで、本節では以下の解析で使われる直交多項式の導出を行う。

グラム・シュミットの直交化法の手続き⁽⁶³⁾によれば、線型独立な関数系

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_i(x), \dots \quad (3.16)$$

が与えられ、また関数の内積 (ϕ_i, ϕ_j) が定義されているとき、それらの線型結合で直交関数系

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots \quad (3.17)$$

を以下のようにして構成することができる。まず

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x) \quad (3.18)$$

と定める。次に

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) + b_{21}\varphi_1(x) \quad (3.19)$$

とおき, φ_2 が φ_1 に直交するように定数 b_{21} を定める. そのために, φ_2 と φ_1 の内積を作ると

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \psi_2) + b_{21}(\varphi_1, \varphi_1) \quad (3.20)$$

これが0となるためには

$$b_{21} = -\frac{(\varphi_1, \psi_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \quad (3.21)$$

であればよい. したがって

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) - \frac{(\varphi_1, \psi_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \varphi_1(x) \quad (3.22)$$

となる. 次に

$$\varphi_3(x) = \psi_3(x) + b_{32}\varphi_2(x) + b_{31}\varphi_1(x) \quad (3.23)$$

とおき, これが φ_1, φ_2 と直交する条件, $(\varphi_1, \varphi_3)=0, (\varphi_2, \varphi_3)=0$ より

$$(\varphi_1, \varphi_3) = (\varphi_1, \psi_3) + b_{32}(\varphi_1, \varphi_2) + b_{31}(\varphi_1, \varphi_1) = 0 \quad (3.24)$$

$$(\varphi_2, \varphi_3) = (\varphi_2, \psi_3) + b_{32}(\varphi_2, \varphi_2) + b_{31}(\varphi_2, \varphi_1) = 0 \quad (3.25)$$

を得る. ここで, アンダーラインを付した項は直交性より0となるので, 結局

$$b_{32} = -\frac{(\varphi_2, \psi_3)}{(\varphi_2, \varphi_2)}, \quad b_{31} = -\frac{(\varphi_1, \psi_3)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \quad (3.26)$$

となる. したがって

$$\varphi_3(x) = \psi_3(x) - \frac{(\varphi_2, \psi_3)}{(\varphi_2, \varphi_2)} \varphi_2(x) - \frac{(\varphi_1, \psi_3)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \varphi_1(x) \quad (3.27)$$

となる. 以下同様にして, 次式を得る.

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\varphi_j, \psi_i)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \varphi_j(x) \quad (3.28)$$

次に, この式を用いて関数系

$$F_1(x), xF_1(x), \dots, x^{i-1}F_1(x), \dots \quad (3.29)$$

を直交化することを考える⁽⁴⁵⁾. ここでは, 関数の内積を

$$(f, g) = \int w(x) f(x) g(x) dx \quad (3.30)$$

と定義する. ただし, $w(x)$ は任意の重み関数で, 問題に応じて選ばれる関数である. まず開始関数 $F_1(x)$ を

$$F_1(x) = F_1(x) \quad (3.31)$$

と定め, 式(3.28)を用いると

$$\begin{aligned} F_2(x) &= xF_1(x) - \frac{(F_1, xF_1)}{(F_1, F_1)} F_1(x) \\ &= xF_1(x) - \frac{\int wxF_1^2 dx}{\int wF_1^2 dx} F_1(x) \\ &= xF_1(x) - B_2 F_1(x) \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる. さらに

$$\begin{aligned} F_3(x) &= x^2 F_1 - \frac{(F_2, x^2 F_1)}{(F_2, F_2)} F_2(x) - \frac{(F_1, x^2 F_1)}{(F_1, F_1)} F_1(x) \\ &= B_2 x F_1 + x F_2 - \frac{(F_2, B_2 x F_1 + x F_2)}{(F_2, F_2)} F_2 - \frac{(F_1, B_2 x F_1 + x F_2)}{(F_1, F_1)} F_1 \\ &= B_2^2 F_1 + B_2 F_2 + x F_2 - \left\{ B_2^2 \frac{(F_2, F_1)}{(F_2, F_2)} + B_2 \frac{(F_2, F_2)}{(F_2, F_2)} + \frac{(F_2, x F_2)}{(F_2, F_2)} \right\} F_2 \\ &\quad - \left\{ B_2^2 \frac{(F_1, F_1)}{(F_1, F_1)} + B_2 \frac{(F_1, F_2)}{(F_1, F_1)} + \frac{(F_1, x F_2)}{(F_1, F_1)} \right\} F_1 \\ &= x F_2 - \frac{(F_2, x F_2)}{(F_2, F_2)} F_2 - \frac{(F_1, x F_2)}{(F_1, F_1)} F_1 \\ &= \left\{ x - \frac{\int wxF_2^2 dx}{\int wF_2^2 dx} \right\} F_2 - \frac{\int wxF_1 F_2 dx}{\int wF_1^2 dx} F_1 \\ &= (x - B_3) F_2 - C_3 F_1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる. 以下についても同様な計算から

$$F_2(x) = (x - B_2) F_1(x) \quad (3.34)$$

$$F_i(x) = (x - B_i)F_{i-1}(x) - C_i F_{i-2}(x) \quad (i=3,4,\dots) \quad (3.35)$$

$$B_i = \frac{\int w(x) x F_{i-1}^2 dx}{\int w(x) F_{i-1}^2 dx}, \quad C_i = \frac{\int w(x) x F_{i-1} F_{i-2} dx}{\int w(x) F_{i-2}^2 dx} = \frac{\int w(x) F_{i-1}^2 dx}{\int w(x) F_{i-2}^2 dx} \quad (3.36)$$

なる漸化式を得る。ただし

$$x F_1(x) = B_2 F_1(x) + F_2(x) \quad (3.37)$$

の関係を使った。これらの漸化式より構成される直交多項式 $F_i(x)$ は次の直交条件を満たす。

$$\int w(x) F_i(x) F_j(x) dx = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ g_{ij} & (i = j) \end{cases} \quad (3.38)$$

ただし g_{ij} は0でない定数であり、 $F_i(x)$ が正規化されている場合には1である。

これらの漸化式より構成される直交多項式をリッツ法の試験関数に用いる場合には、開始関数 $F_1(x)$ として系の幾何学的境界条件を満たすような関数を選ぶ。また、式(3.30)の重み関数 $w(x)$ は問題に応じて選ばれる関数であるが、例えばはりの断面積や板の厚さ、密度などが変化する場合にはその変化を表す関数を重み関数として用いればよく、ディラックの δ 関数を含む関数を用いれば集中質量などを有する場合を扱うこともできる。ここで扱う問題のように断面積が変化しない、両端が自由の境界条件を持つブレードの場合には重み関数ならびに開始関数は非常に簡単な形となり、ともに1とすればよい⁽⁴⁵⁾⁽⁵²⁾。したがって

$$F_i(x) \equiv \Psi_{r_p}(\xi_p), \quad x \equiv \xi_p, \quad i \equiv r_p, \quad w(x) \equiv 1, \quad F_1(x) \equiv 1 \quad (3.39)$$

となる。ここで $\Psi_{r_p}(\xi_p)$ は、次式の直交関係をもつ。

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Psi_{r_p}(\xi_p) \Psi_{s_p}(\xi_p) d\xi_p = \begin{cases} 0 & (r_p \neq s_p) \\ g_{rs} & (r_p = s_p) \end{cases} \quad (3.40)$$

ただし g_{rs} は0でない定数であり、 $\Psi_{r_p}(\xi_p)$ が正規化されている場合には1である。

3.4 リッツ法による振動数方程式の導出

式(3.13)~(3.15)で与えられる変位関数を式(3.7)~(3.11)の各エネルギーに代入し, $L=(T_{d\max}+T_{b\max})-(U_{d\max}+U_{b\max}+U_{s\max})$ の停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial A_{kl}}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial B_{s_p}}=0, \quad (k=1,2,\dots,M, \quad l=0,1,\dots,N, \quad s_p=1,2,\dots,R_p) \quad (3.41)$$

を用いると, 以下のような振動数方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} U_{mn}^{(kl)} & U_{r_p}^{(kl)} \\ U_{mn}^{(s_p)} & U_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{r_p} \end{bmatrix} = \Lambda^4 \begin{bmatrix} T_{mn}^{(kl)} & 0 \\ 0 & T_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{r_p} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

この一般固有値問題の固有値として振動数パラメータ Λ が得られ, 各固有値に対応する固有ベクトルとして未知係数 $\{A_{mn} \ B_{r_p}\}^T$ が定まる. なお, 式(3.42)の各係数行列の部分行列の要素は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} U_{mn}^{(kl)} = & \Pi_c \int_{\beta}^1 \left[\Phi_{mn}'' \Phi_{kn}'' \eta + \nu (\Phi_{mn}'' \Phi_{kn}' + \Phi_{mn}' \Phi_{kn}'') \right. \\ & - \nu n^2 \frac{(\Phi_{mn}'' \Phi_{kn} + \Phi_{mn} \Phi_{kn}'')}{\eta} + [1+2n^2(1-\nu)] \frac{\Phi_{mn}' \Phi_{kn}'}{\eta} \\ & \left. - (3-2\nu)n^2 \frac{(\Phi_{mn}' \Phi_{kn} + \Phi_{mn} \Phi_{kn}')}{\eta^2} + n^2[n^2+2(1-\nu)] \frac{\Phi_{mn} \Phi_{kn}}{\eta^3} \right] d\eta \\ & + \sum_{p=1}^P \left[k_{Tp} \Phi_{mn} \Phi_{kl} \cos n\theta_p \cos l\theta_p + k_{Rp} \Phi_{mn}' \Phi_{kl}' \cos n\theta_p \cos l\theta_p \right]_{\eta=1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$U_{r_p}^{(kl)} = - \left[k_{Tp} \Phi_{kl} \Psi_{r_p} \cos l\theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{Rp} \Phi_{kl}' \Psi_{r_p}' \cos l\theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (3.44)$$

$$U_{mn}^{(s_p)} = - \left[k_{Tp} \Phi_{mn} \Psi_{s_p} \cos n\theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{Rp} \Phi_{mn}' \Psi_{s_p}' \cos n\theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (3.45)$$

$$T_{mn}^{(kl)} = \Pi_c \int_{\beta}^1 \Phi_{mn} \Phi_{kn} \eta d\eta \quad (3.46)$$

$$T_{r_p}^{(s_p)} = \alpha_p \gamma_p \int_{-1/2}^{1/2} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} d\xi_p \quad (3.47)$$

ここで, Π_c は

$$\Pi_c \equiv \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq l) \\ \pi & (n=l \neq 0) \\ 2\pi & (n=l=0) \end{cases} \quad (3.48)$$

であり, ()' は

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_{mn} &= \frac{d\Phi_{mn}}{d\eta}, \quad \Phi''_{mn} = \frac{d^2\Phi_{mn}}{d\eta^2}, \\ \Psi'_{r_p} &= \frac{d\Psi_{r_p}}{d\xi_p}, \quad \Psi''_{r_p} = \frac{d^2\Psi_{r_p}}{d\xi_p^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

を表す. また, 式(3.42)の左辺の部分行列 $[U_{r_p}^{(s_p)}]$ は, 0 でない要素を持つブロックを*で表すと

$$[U_{r_p}^{(s_p)}] = \begin{bmatrix} * & * & & & * \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & * & * & * \\ * & & & & & * & * \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

という形をしている. つまり, 対角線とそのすぐ両隣のブロックならびに行列の右上隅と左下隅のブロックに 0 でない要素を持ち, それ以外の要素が全て 0 であるような行列である. そのうち, 対角ブロックの要素を $U_{r_p}^{d(s_p)}$, 対角線より上のブロックの要素を $U_{r_p}^{u(s_p)}$, 対角線より下のブロックの要素を $U_{r_p}^{l(s_p)}$ とするとそれらはそれぞれ

$$\begin{aligned} U_{r_p}^{d(s_p)} &= \frac{\epsilon_p}{\alpha_p^3} \int_{-1/2}^{1/2} \Psi''_{r_p} \Psi''_{s_p} d\xi_p \\ &+ \left[k_{Tp} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} + \frac{1}{\alpha_p^2} k_{Rp} \Psi'_{r_p} \Psi'_{s_p} \right]_{\xi_p = -1/2} \\ &+ \left[(ks_p + ks_{p-1}) \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \right]_{\xi_p = \xi_{s_p}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$U_{r_p}^{u(s_p)} = - \left[ks_p \Psi_{r_{p+1}} \Psi_{s_p} \right]_{\xi_p = \xi_{s_p}, \xi_{p+1} = \xi_{s_{p+1}}} \quad (3.52)$$

$$U_{r_p}^{1(s_p)} = - \left[k s_{p-1} \Psi_{r_{p-1}} \Psi_{s_p} \right]_{\xi_p = \xi_{s_p}, \xi_{p-1} = \xi_{s_{p-1}}} \quad (3.53)$$

である。ただし、 $\Psi_{r_0} = \Psi_{r_p}$ 、 $k_{s_0} = k_{s_p}$ とする。

なお、式(3.15)の $\Phi_{mn}(\eta)$ は円板の固有関数であるため、次式のような直交性を持つ。

$$\int_{\beta}^1 \Phi_{mn}(\eta) \Phi_{kn}(\eta) \eta d\eta = \begin{cases} 0 & (m \neq k) \\ f_{mk} & (m = k) \end{cases} \quad (3.54)$$

ただし f_{mk} は0でない定数であり、 $\Phi_{mn}(\eta)$ が正規化されている場合には1である。これより、式(3.46)のマトリクスは対角行列となり、また、 $\Psi_{r_p}(\xi_p)$ は式(3.40)で与えられる直交性をもつので式(3.47)のマトリクスも対角行列となる。したがって、振動数方程式(3.42)の右辺の係数マトリクスは完全に対角行列となる。

3.5 ディスクとブレードの連成条件

振動数方程式(3.42)の左辺の行列は式(3.43)～(3.45)に示されるような項を含んでいる。これらのうち、式(3.44)と(3.45)はディスクとブレードの連成項であり、式(3.43)の Σ の付いた項はブレードが接続されたことによるディスクのポテンシャルエネルギーへの影響を表す連成項である。したがって、これらの項が0でないときにディスクとブレードの連成振動が生じる。このうち、式(3.43)の Σ の付いた項についてみると、その形から k_{T_p} 、 k_{R_p} が0でなくてもブレードの本数 P と n 、 l の組合せによってその項が0になることがある。すなわち、1本目のブレードの接続位置を角度の基準にとり($\theta_1 = 0$)、各ブレードがディスクの外周上に等間隔に接続されているとすると $\theta_p = 2\pi(p-1)/P$ であり、式(3.43)の Σ の付いた項はブレードの本数 P と n 、 l の組合せによって、いくつかの決まった値のみとることになり、連成振動を生じる場合にはその値により振動モードを分類することができる。以下ではディスクとブレードの連成振動が生じる場合の P と n 、 l の組合せと、そのときの振動モードとの関係について述べる。

系の構造に周期対称性が満たされている場合、 k_{T_p} 、 k_{R_p} はそれぞれ一定値となる

ため、次の式について考えるだけでよいことになる。

$$f = \sum_{p=1}^P \cos n \theta_p \cos l \theta_p \quad (3.55)$$

変形して、

$$f = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] + \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] \right\} \quad (3.56)$$

ただし、ここで考えている式はディスクとブレードの接続点における仮想ばねのポテンシャルエネルギーから得られる式であるので、対称性より $l \leq n$ の場合のみを考えれば充分である。次の公式⁽⁶⁴⁾

$$\sum_{p=1}^P \cos cp = \cos \frac{c(P+1)}{2} \sin \frac{cP}{2} / \sin \frac{c}{2} \quad (3.57)$$

を用いて式(3.56)の右辺の各項を変形すると

$$\sum_{p=1}^P \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] = \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} \frac{(P+1)}{2} \right] \sin [\pi(n+l)] / \sin \left[\frac{\pi(n+l)}{P} \right] \quad (3.58)$$

$$\sum_{p=1}^P \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] = \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} \frac{(P+1)}{2} \right] \sin [\pi(n-l)] / \sin \left[\frac{\pi(n-l)}{P} \right] \quad (3.59)$$

となり、 k を $0 \leq k$ なる任意の整数とすると、 f は周方向波数成分 n 、 l の組合せによって次の3通りの値をとることになる。

(1) $n \pm l = kP$ のとき、 $f = P$ 。

(2) $n + l = kP$ かつ $n - l \neq k'P$ のとき、または $n + l \neq kP$ かつ $n - l = k'P$ のとき、

$f = P/2$ 。 (k' は $0 \leq k' \leq k$ なる任意整数)

(3) $n \pm l \neq kP$ のとき、 $f = 0$ 。

これらを満たす n 、 l の組合せから、ディスクの振動形は接続されるブレードの本数 P に対して次のような $[P/2]+1$ 通り ($[x]$ は x を超えない最大の整数) のグループに分かれることが示される。

(a) P が奇数の場合,

$f=P$ となるのは $n, l=kP$ のとき (S型) .

$f=P/2$ となるのは $n, l=kP \pm i$ のとき (D型) . ($i=1, 2, \dots, (P-1)/2$)

ただし, $0 \leq n, 0 < P-1$.

(b) P が偶数の場合,

$f=P$ となるのは $n, l=kP$ のとき (S S'型) ,

または, $n, l=(2k+1)P/2$ のとき (S A'型) .

$f=P/2$ となるのは $n, l=kP \pm i$ のとき (D型) . ($i=1, 2, \dots, (P-2)/2$)

ただし, $0 \leq n, 0 < P-2$.

表3-1にこれらの結果をまとめて示す. なお, S型は対称軸に関して対称なモード, D型は縮退したモードを表し, S', A'はとなりあった2本のブレードの間の角度を2等分する直径に関して対称, 逆対称なモードを表す.

このように, ディスクとブレードの連成振動においては, 各モードについて, 上記の関係を満たす特定の周方向波数成分どうしのみが関与することになるが, これは構造の周期対称性が成り立つ場合の特徴であり, この性質を利用すると式(3.13)のディスクの試験関数において, 着目する振動モードに無関係な周方向波数成分を除外することができるため, 計算に用いられる行列のサイズを縮小することができる. 関与する周方向波数成分はD型モードについては i (これを以降ではD型モード指数と呼ぶ) を与えると $[(P-1)/2]$ 通り, S型モードについては1通り (P が奇数) または2通り (P が偶数) それぞれ任意の整数 $k(k=0, 1, 2, \dots)$ に対して定まる. これらの結果は, ブレードが接続されたディスクに特有のものではなく, 周期対称に付加物あるいは拘束を有する円板に対しても一般に成り立つことである^{(65)~(70)}. また, 斉藤ら⁽¹³⁾は複合周期構造を持つタービン翼の固有モードの円周方向の特性について考察を行い, ここに述べたのと類似の結果を得ている.

なお, 一般に円板の振動は, ある直径が対称軸となる場合, その直径に関して対称なモードと逆対称なモードとが生じ, それらを全て表すためには周方向変位関数に余弦関数と正弦関数を同時に考慮しなければならない. しかし, 本章で扱うような周期対称性が満たされる系の場合, 節直径を有する振動形については対

表 3-1 ブレードの本数, 周方向波数成分とディスク・ブレード連成振動
のモード形との関係

P	n, l	f	Mode Type
odd	kP	P	S-type
	$kP \pm i, (i=1, 2, \dots, (P-1)/2, 1 < P)$	$P/2$	D-type
	another number	0	no coupled vibrations occur
even	kP	P	SS'-type
	$(2k+1)P/2$	P	SA'-type
	$kP \pm i, (i=1, 2, \dots, (P-2)/2, 2 < P)$	$P/2$	D-type
	another number	0	no coupled vibrations occur

称モードと逆対称モードの固有振動数は一致し、余弦関数のみを考慮して求めることができる。そのため、本章の解析においては周方向変位関数を式(3.13)のように余弦関数で展開している。

3.6 数値計算と考察

ここでは、式(3.42)の振動数方程式を用いて数値計算を行い、ディスクの外周上に周期対称にブレードが接続されている系の自由振動について調べる。以下で用いる各パラメータの値は、ディスクの内外半径比 $\beta=0.3$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、接続されているブレードは長方形断面を有する全て同一なブレードであり、ディスクの外半径との長さ比 $\alpha_p=1$ 、曲げこわさ比 $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$ 、質量比に関する無次元パラメータ $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$ とする。また、1番目のブレードの取り付け位置は $\theta_1=0$ とする。

3.6.1 数値計算精度の検討

表3-2に、ディスクの半径方向変位関数の試験関数 Φ_{mn} の項数 M と、接続点における仮想ばねのばねこわさを変化させたときの系の固有振動数パラメータ Λ の収束状況を示す。この計算には3.5節で述べた連成条件を満たす n のうち3項を用いた。この表をみると、仮想ばねのばねこわさの値を大きくしてゆくと Λ は低い値から高くなりながら収束し、一方 M を増やしてゆくと Λ は高い値から低くなりながら収束することが分る。ただし、ばねこわさの値を大きくし過ぎると第2章2.4.2節と同様の数値的な不安定が生じ、振動数パラメータを正しく計算することが困難になる。例えばこの表の、 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^8$ の場合のSS'-1, SA'-1モードの振動数パラメータは $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$ の場合よりも低くなっているものが多く、 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^{10}$ とすると解そのものが得られない場合がある（表中で-と示されているもの）。得られる解の収束状況と計算の安定性から判断して、以下の計算では $M=7$ 、 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$ を採用する。ブレード部分の直交多項式の項数については、第2章2.4.2節の表2-5の片持ばりに対する収束状況から、 $R=10$ を採用する。

表 3 - 2 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータの収束状況

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1.0$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{sp}=0$, $\nu=0.3$, $R_p=10$ 】

Mode	M	$k_{Tp}=k_{Rp}$				
		10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
SS'-1	4	1.780	1.781	1.781	1.778	-
	5	1.779	1.780	1.780	1.779	-
	6	1.779	1.779	1.779	1.781	1.694
	7	1.778	1.779	1.779	1.777	1.682
	8	1.778	1.778	1.778	1.779	1.700
SA'-1	4	1.813	1.814	1.814	1.813	-
	5	1.812	1.813	1.813	1.816	-
	6	1.812	1.812	1.812	1.813	1.686
	7	1.811	1.812	1.812	1.810	1.698
	8	1.810	1.811	1.811	1.810	1.687
SS'-2	4	2.603	2.603	2.603	2.603	2.481
	5	2.603	2.603	2.603	2.603	2.464
	6	2.603	2.603	2.603	2.601	2.705
	7	2.602	2.602	2.602	2.601	2.515
	8	2.602	2.602	2.602	2.600	2.541
SA'-2	4	4.246	4.253	4.253	4.253	4.257
	5	4.244	4.252	4.252	4.252	4.256
	6	4.243	4.251	4.251	4.251	4.267
	7	4.242	4.250	4.250	4.250	4.264
	8	4.242	4.249	4.249	4.249	4.268

3.6.2 周方向波数成分と固有ベクトルのノルム

図3-2(a)~(q)に、8本のブレードを有する系の振動数パラメータと対応する係数 A_{mn} のノルムを示す。この計算には、ディスクの周方向試験関数は $n=0\sim 24$ の全ての波数成分を用い、シュラウドばねこわさは $k_{s_p}=0$ ($p=1,2,\dots,8$)とした。このノルムは各振動モードにおけるディスクの各周方向波数成分の関与の度合いを示し

$$\|A_{mn}\| = \sum_{m=1}^M |A_{mn}|, \quad (n=0,1,\dots,N) \quad (3.60)$$

より求められる。ただし、最大値が1となるように正規化してある。また、 h_N はディスク部分と、ブレード部分の固有ベクトルのノルムの最大値の比

$$h_N = \frac{\max_n \|A_{mn}\|}{\max_p \|B_{r_p}\|} \quad (3.61)$$

ただし

$$\|B_{r_p}\| = \sum_{r_p=1}^{R_p} |B_{r_p}|, \quad (p=1,2,\dots,P) \quad (3.62)$$

であり、そのモードにおけるディスクの振幅とブレードの振幅の大小関係を大まかに知る目安として示してある。この図で、(a)~(e)は、片持ばりとしての1次振動が卓越し、(l)~(o)は、片持ばりとしての2次振動が卓越したブレードの主振動モードであり、(g)~(j)はそれぞれ、節直径が1本、0本、2本、3本の円板単独の振動モードの固有振動数に近い値のため、ディスクの振動が卓越したディスクの主振動モードである。以上の各モードは、円板あるいは片持ばりの単独の固有振動数に近い値をもつディスクあるいはブレードの主振動モードであるが、(k)、(q)は円板や片持ばりの単独の固有振動数とは異なる値をもつモードである。この図から明らかなように、3.5節の連成条件に合うような n の値どうしのみがそれぞれの固有振動数における係数 A_{mn} に関与していることが分かる。そのため、対応する振動モードの型を図中に示してあり、記号SS'-j, SA'-j, Di-jはそれぞれ3.5節で述べたSS'型, SA'型, D型のj次モードを表し、特にD型のi(この場合では $i=1,2,3$)はD型モード指数である。なお、(f)と(p)は、 h_N の値が非常に小さい

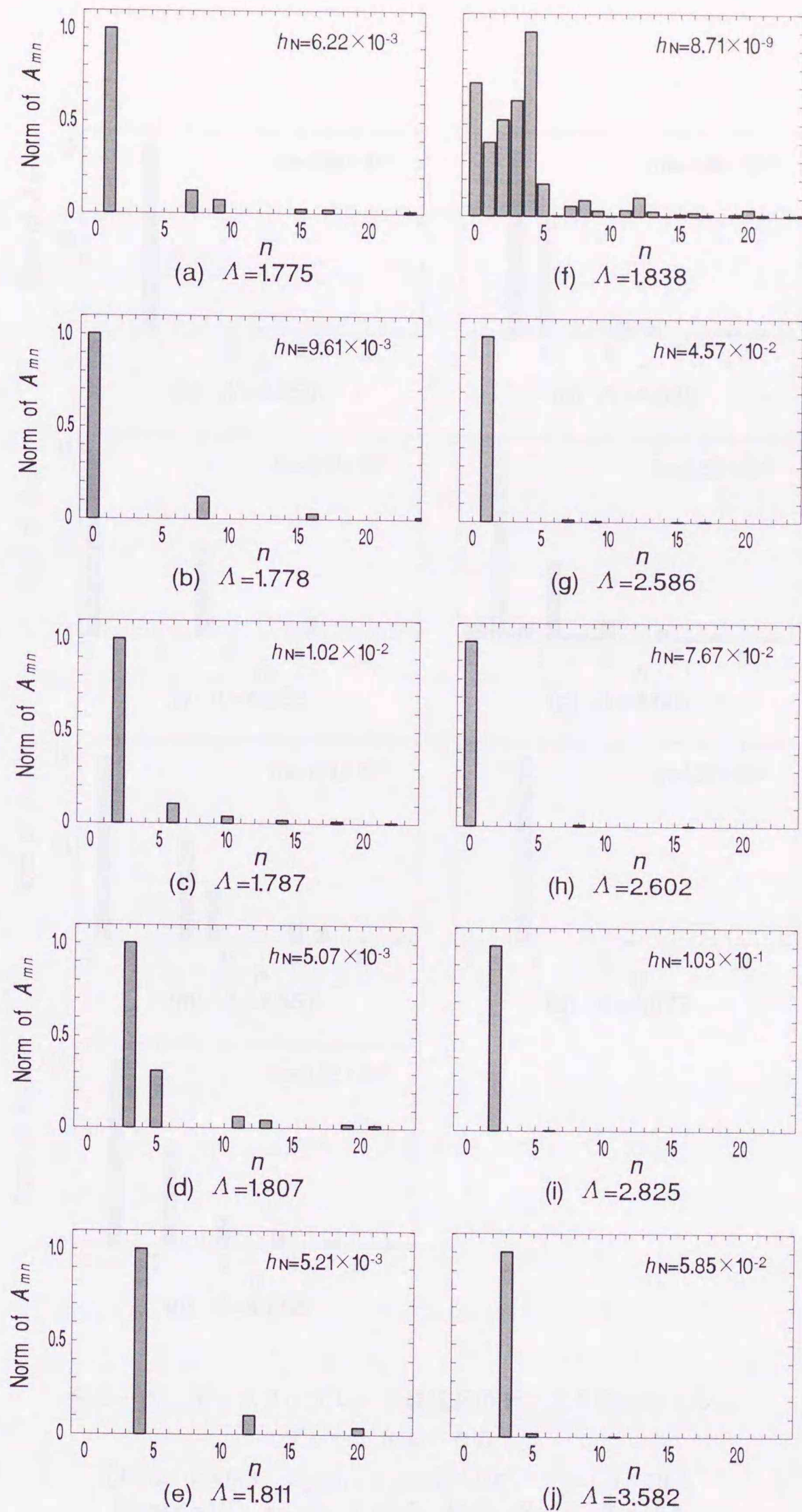


図 3-2 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード 8 本 : その 1)

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

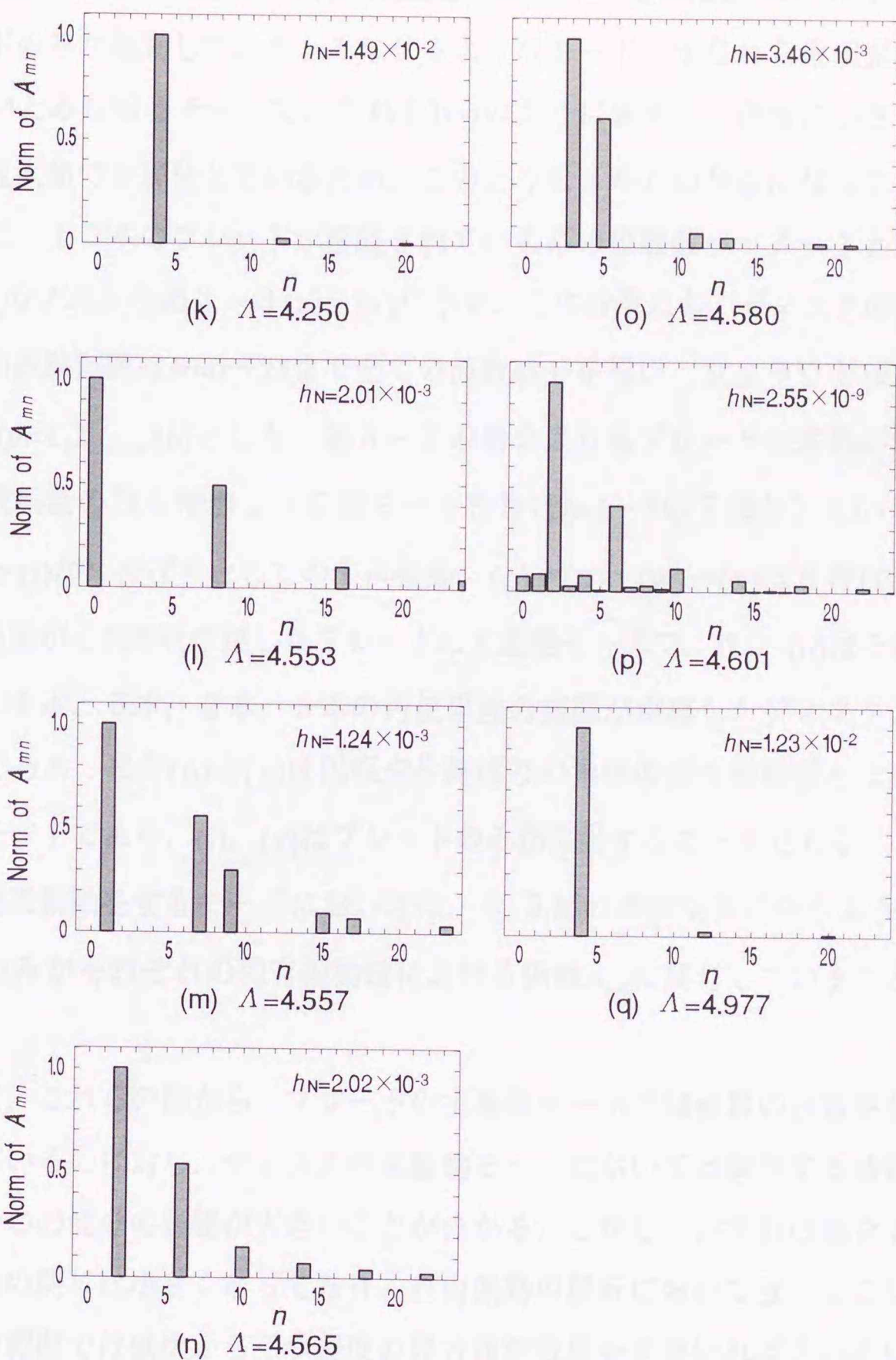


図 3-2 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード 8 本: その 2)

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

ことから分かるように、ディスクの変位がブレードの変位に比べて非常に小さく、ブレードのみが振動しているとみなせるようなモード、すなわち連成振動は生じていないとみなせるモードで、これをB-jのように表す。（非常に小さいものの中での最大値で正規化しているため、このようなノルムの分布になっている。）

同様に、16本のブレードが接続されている系の振動数パラメータと対応する係数 A_{mn} のノルムを図3-3(a)~(y)に示す。この計算にも、ディスクの変位関数の周方向試験関数は $N=0\sim 24$ まで全ての波数成分を用い、シュラウドばねこわさは $k_{s_p}=0$ ($p=1, 2, \dots, 16$)とした。図3-2の場合よりもブレードの本数が増えたため、連成振動の型も増加し（D型モード指数は $i=1\sim 7$ の7通り）ている。ここで、(a)~(i)が片持ばりとしての1次振動、(p)~(u), (w)~(x)は片持ばりとしての2次振動がそれぞれ卓越したブレードの主振動モードで、(k)~(n)はそれぞれ、節直径が1本、0本、2本、3本の円板単独の振動が卓越したディスクの主振動モードである。また(o)と(y)は円板や片持ばりの単独の固有振動数とは異なる値をもつモードであり、(j), (v)はブレードのみが振動するモードである。この図からも、連成振動をするモードにおいては、3.5節の連成条件に合うような n の値どうしのみがそれぞれの固有振動数における係数 A_{mn} に関与していることが分かる。

さらに、これらの図から、ブレードの主振動モードでは複数の波数成分の影響を受けているのに対し、ディスクの主振動モードにおいては関与する波数成分のうちの一つの成分の影響が大きいことが分かる。しかし、いずれの場合も高次の波数成分の関与は小さくなっており、自由振動の解析においては、ここに示した振動数の範囲では低次から三つ程度の周方向波数成分を用いればよいといえる。このように周期対称な系の自由振動に関しては、着目するモードに関与する周方向波数成分のみ用いて計算すればよく、数値計算の規模が大幅に縮小できることが分かる。そこで、以下本章では $N=24$ とし、数値計算に用いるディスクの試験関数中の周方向波数成分には、 $n=0\sim 24$ のうち低次から3項を採用するものとする。

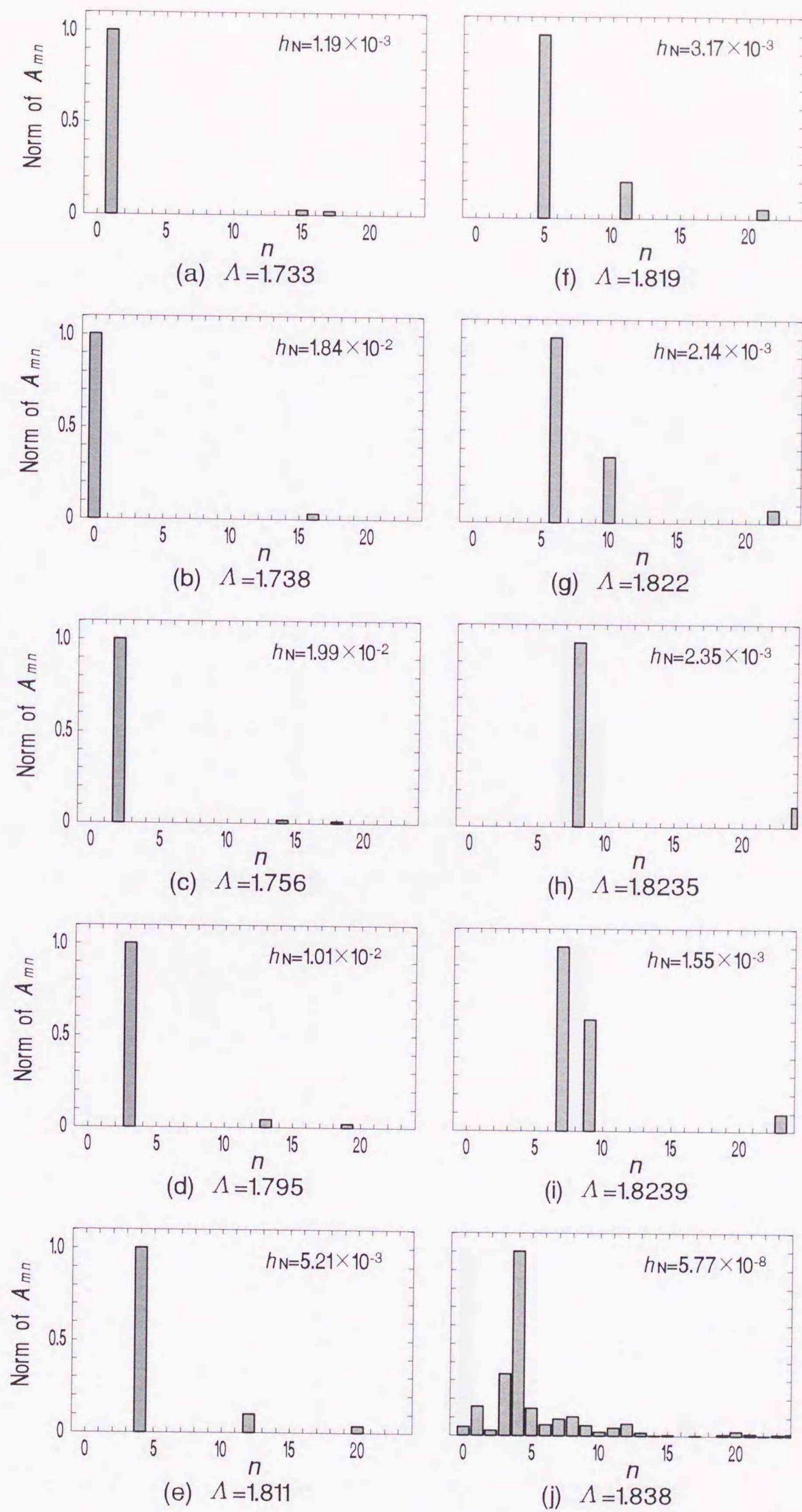


図 3-3 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード 16 本: その 1)

【 $P=16$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

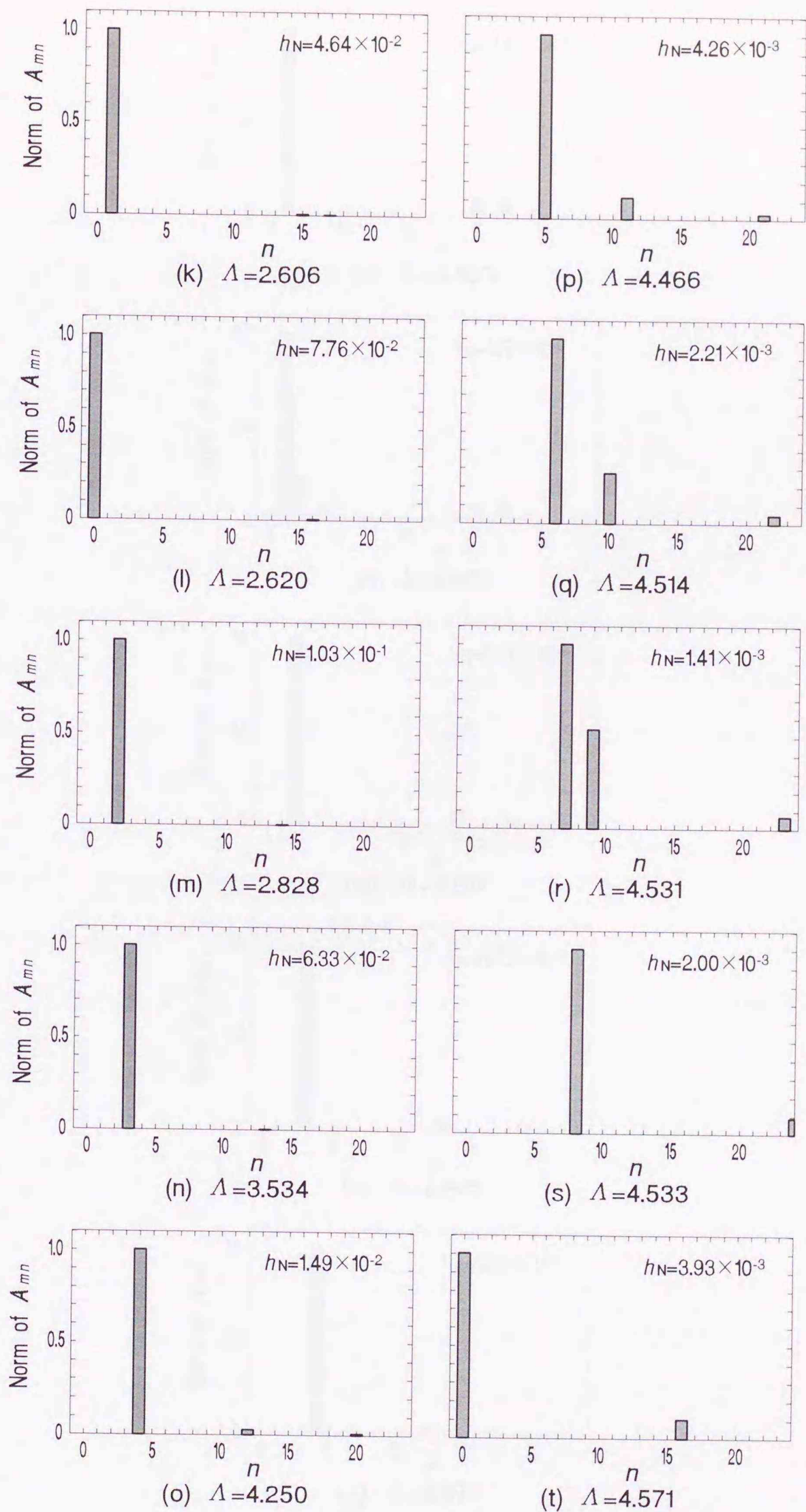
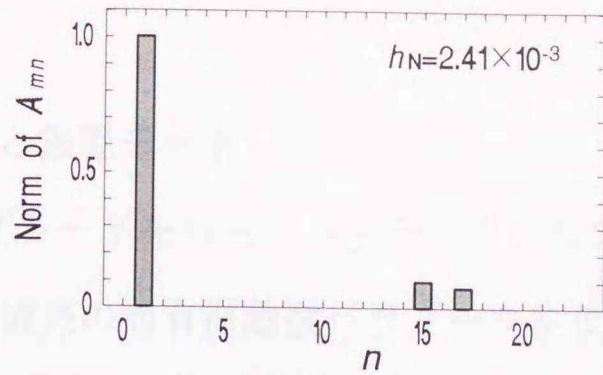
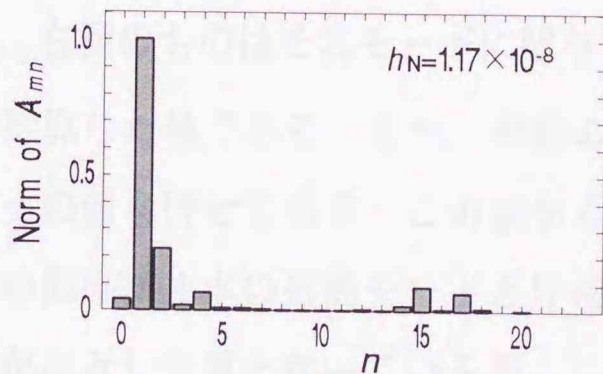


図 3-3 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード 16 本: その 2)

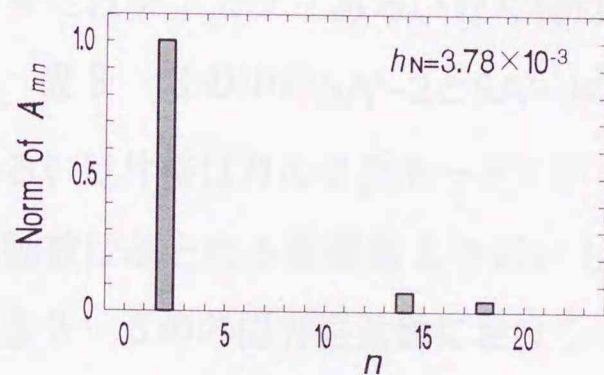
【 $P=16$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】



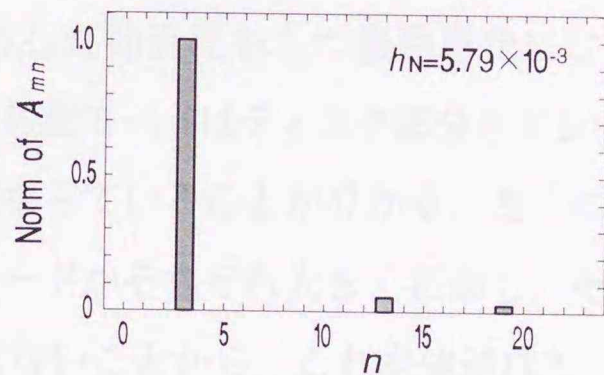
(u) $\Lambda = 4.580$



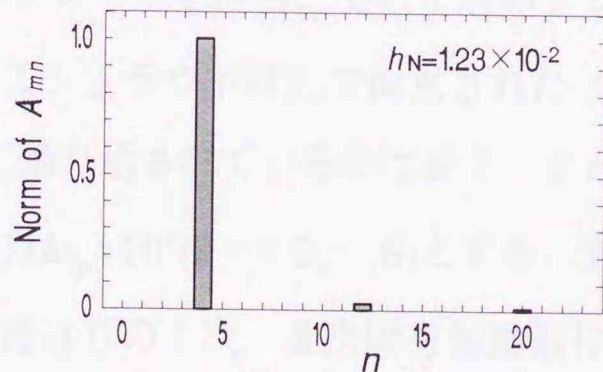
(v) $\Lambda = 4.601$



(w) $\Lambda = 4.611$



(x) $\Lambda = 4.681$



(y) $\Lambda = 4.977$

図 3-3 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード 16 本: その 3)

【 $P=16$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

3.6.3 固有振動数と振動モード

表3-3に8本のブレードを持ち、シュラウドのない($k_{s_p}=0$; $p=1,2,\dots,8$)ディスク・ブレード連成系の固有振動数パラメータを低次から順に示す。この表で Λ が二通り示されているが、左側のものは周方向波数成分を $n=0\sim 24$ の全てを用いて計算した値であり、右側のものはそのモードに関与する n のうち表に示されている3項だけを用いて計算した値である。また、単独のディスクおよび片持ばりの固有振動数パラメータの値も併せて示す。この表から分かるようにこの計算例では、単独のディスクの節直径4本の振動モードと片持ばりの2次モードの固有振動数パラメータの値が接近した値となっているが、このような場合には連成系の固有振動数パラメータにはディスク(あるいは片持ばり)単独の振動数から分化した振動数が生じる。表3-3の中のSA'-2とSA'-3がディスク単独の場合の節直径4本のモード(あるいは片持ばりの2次モード)から分化した振動数であり、このように分化した振動数は基となる振動数より低いものと高いものとに分かれて生じる。図3-4に表3-3の各固有振動数における系の振動モード形を示す。この図より、各振動モード形はディスク部分の振動形が図3-2で卓越している周方向波数成分に対応した節直径をもつ振動形状になっていることが分かる。また、上述の分化した振動モードはディスク部分とブレード部分の振動が同位相のものと逆位相のものになっていることが分かる。さらに、この分化した振動モードは、ディスクとブレードがそれぞれ大きく振動し、そのどちらか一方の振動が卓越しているわけではないことから、これを強連成モードと呼ぶことにする。

表3-4に、8本のブレードを持ち、それぞれのブレードの先端($\xi_{s_p}=0.5$)どうしが全周にわたってシュラウドばねで拘束された(綴られた)系の振動数パラメータを示す。 Λ が二通り示されているのは表3-3と同じ理由である。シュラウドばねのばねこわさは $k_{s_p}=10^6$ ($p=1,2,\dots,8$)とする。表3-3と比べると、系の固有振動数のうちで片持ばりの1次、2次固有振動数付近にあるのはそれぞれ一つずつ(SS'-1, SS'-3)だけであるが、これはブレードが全周にわたって綴られているためにディスクの周方向波数が0(節直径0本)の成分が卓越する振動モードとのみ連成するためである。一方、固定-単純支持の境界条件を持つばりの1次固有振動数パラメータの値の付近に複数の連成モードの固有振動数が現れてい

表 3-3 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1.0$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$,
 $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

Mode	Λ	Λ	n	Uniform Disk (m_c, n_d) [*]	Cantilever Beam
D1-1	1.775	1.777	1,7,9		
SS'-1	1.778	1.779	0,8,16		
D2-1	1.787	1.790	2,6,10		
D3-1	1.807	1.809	3,5,11		
SA'-1	1.811	1.812	4,12,20		
B-1	1.838	1.838			1.838 (1st)
D1-2	2.586	2.586	1,7,9	2.560 (0,1)	
SS'-2	2.602	2.602	0,8,16	2.581 (0,0)	
D2-2	2.825	2.825	2,6,10	2.821 (0,2)	
D3-2	3.582	3.582	3,5,11	3.644 (0,3)	
SA'-2	4.250	4.250	4,12,20		
SS'-3	4.553	4.556	0,8,16		
D1-3	4.557	4.565	1,7,9		
D2-3	4.565	4.573	2,6,10	4.698 (0,4)	
D3-3	4.580	4.589	3,5,11		
B-2	4.601	4.601			4.601 (2nd)
SA'-3	4.977	4.977	4,12,20		

※ m_c ; Number of Nodal Circles,
 n_d ; Number of Nodal Diameters.

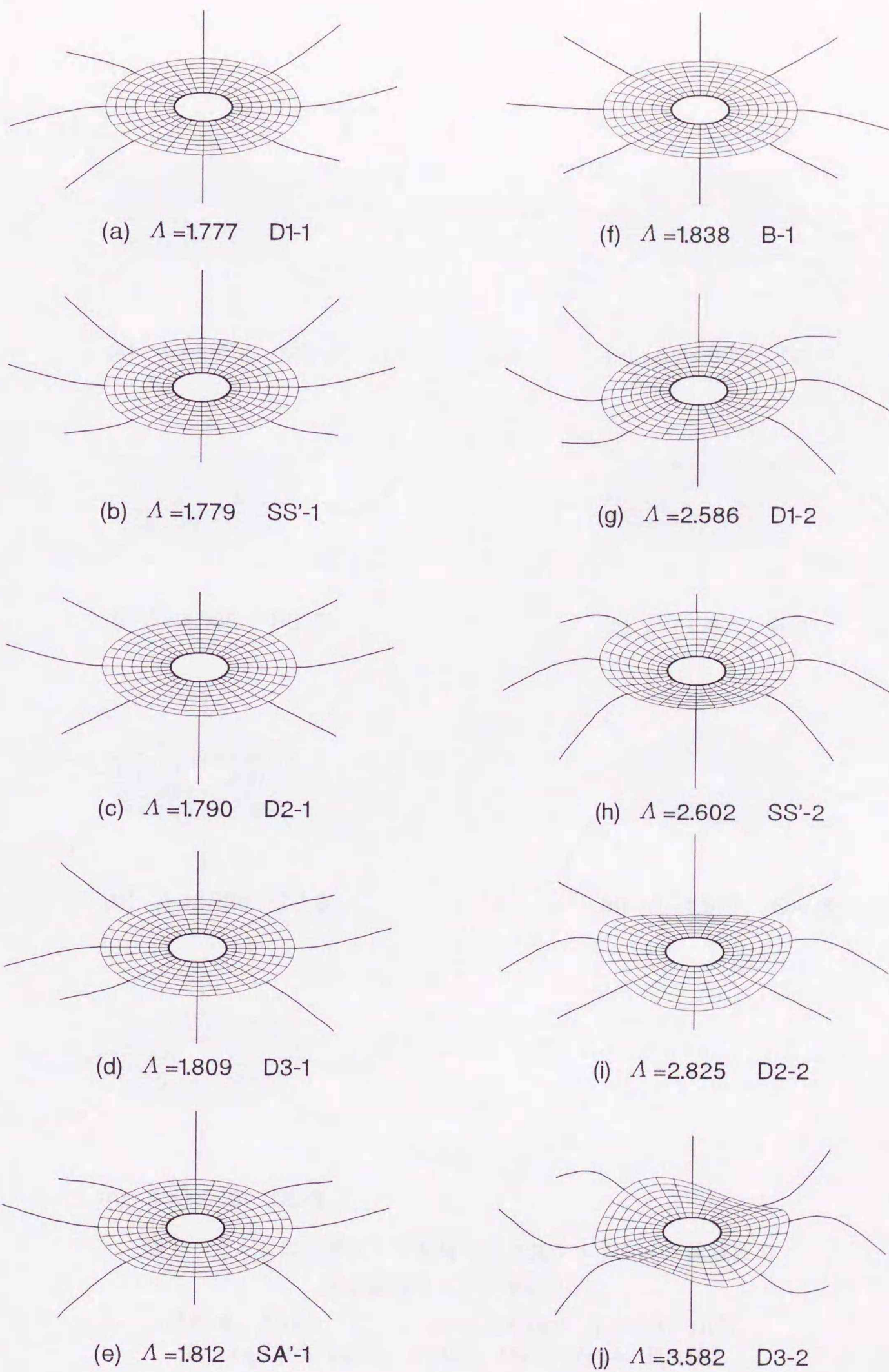


図 3-4 8本のブレードを持つディスク・ブレード連成系の
固有振動モード (その1)

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

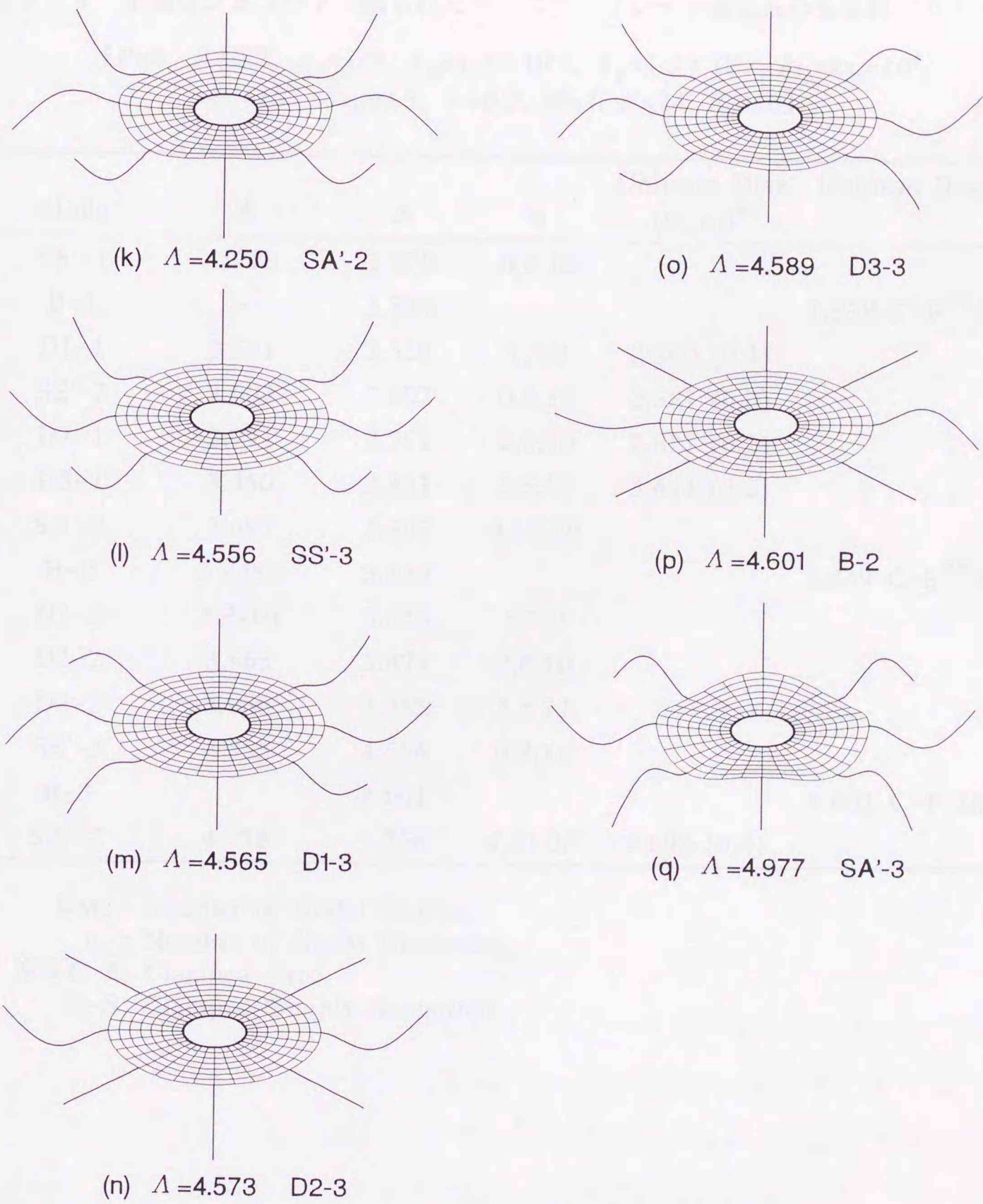


図 3-4 8本のブレードを持つディスク・ブレード連成系の固有振動モード (その2)

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

表 3-4 全周をシュラウドで綴られたディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1.0$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$,
 $k_{S_p}=10^6$, $\xi_{S_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

Mode	Λ	Λ	n	Uniform Disk (m_c, n_d) [*]	Uniform Beam
SS'-1	1.778	1.779	0,8,16		
B-1	-	1.838			1.838 C-F ^{***} 1st
D1-1	2.531	2.531	1,7,9	2.560 (0,1)	
SS'-2	2.602	2.602	0,8,16	2.581 (0,0)	
D2-1	2.771	2.771	2,6,10	2.821 (0,2)	
D3-1	3.450	3.451	3,5,11	3.644 (0,3)	
SA'-1	3.697	3.697	4,12,20		
B-2	3.8488	3.849			3.849 C-S ^{***} 1st
D1-2	3.8494	3.856	1,7,9		
D2-2	3.865	3.871	2,6,10		
D3-2	3.980	3.985	3,5,11		
SS'-3	4.553	4.556	0,8,16		
B-3	-	4.601			4.601 C-F 2nd
SA'-2	4.758	4.758	4,12,20	4.698 (0,4)	

※ m_c ; Number of Nodal Circles,

n_d ; Number of Nodal Diameters.

※※C-F; Clamped-Free

C-S; Clamped-Simply Supported.

るが、これはブレード先端のシュラウドばねがブレード先端に単純支持と同様の効果を与えているためである。また、この場合、固定-単純支持はりの1次固有振動数とディスクの節円0、節直径3本のモードの固有振動数が近いため、この二つの振動成分を持つ固有振動数の分化が生じる。この表中のD3-1モードとD3-2モードが分化した振動数である。また、表3-3、図3-4中のシュラウドのない場合の分化した振動数($\Lambda=4.250$, $\Lambda=4.977$)は、この場合には認められない。

図3-5に、表3-4の各固有振動数に対応する振動モード形を示す。図中に、振動していない場合のディスク面に平行な仮想のリングを点線で示した。この仮想のリングが各ブレード先端を通ることから、ブレード先端間の相対的な変位がほとんど0であることが確認できる。この図からも、分化したモードの振動モードはディスク部分とブレード部分それぞれが大きく振動する強連成モードであり、またその振動はディスクとブレードが同位相のもの(分化した振動数のうち低い方のモード)と逆位相のもの(分化した振動数のうち高い方のモード)になっていることが分かる。

表3-5に、16本のブレードを持ち、シュラウドのない($k_{s_p}=0$; $p=1,2,\dots,16$)ディスク・ブレード連成系の固有振動数パラメータを低次から順に示す。また、表3-6に16本のブレードを持ち、それぞれのブレードの先端($\xi_{s_p}=0.5$)どうしが全周にわたってシュラウドばね($k_{s_p}=10^6$; $p=1,2,\dots,16$)で拘束された系の振動数パラメータを示す。両者とも Λ の値が二通り示されているのは表3-3の場合と同じ理由である。これらの表をブレードが8本の場合と比べるといずれもD型モード指数が増加するため連成振動モードの種類が増加していることが分かる。また、ブレードの主振動モードの振動数の幅(ブレードの主振動モードの振動数のうち、いちばん小さいものといちばん大きいものの差)も拡大していることが分かる。ディスクの主振動モードの振動数に関しては、ブレードが8本の場合よりも低くなっているもの(表3-3、3-5のD3-2モード、表3-4、表3-6のD1-1, D2-1, D3-1モード)、高くなっているもの(表3-3、3-5のSS'-2, D1-2, D2-2モード、表3-4、表3-6のSS'-1モード)がある。また、強連成モードについては、分化した振動数の差が大きくなっていることが分かる。すなわち、強連成モードのうち低い方のモードの固有振動数は8本の場合

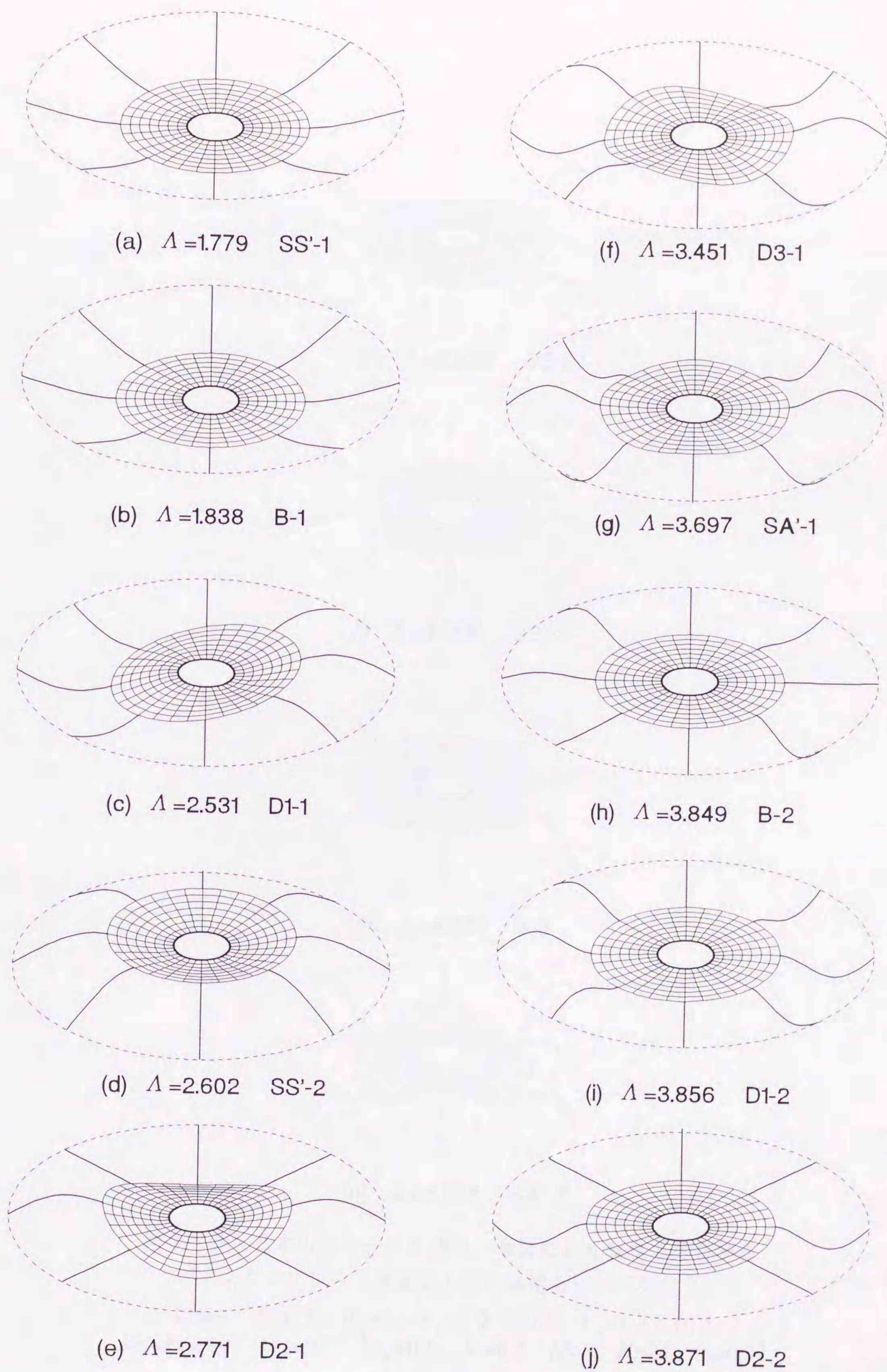
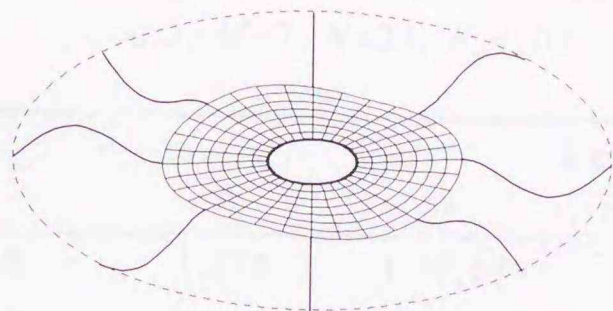
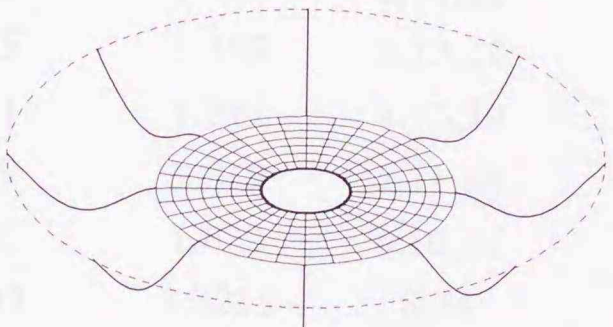


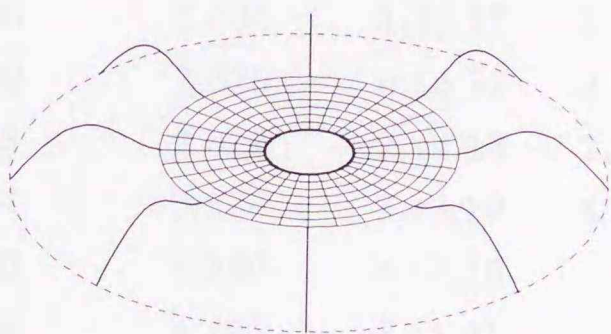
図 3-5 8本のブレードを持ち、全周にシュラウドを有する
ディスク・ブレード連成系の固有振動モード（その1）
【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=10^6$, $\xi_{S_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】



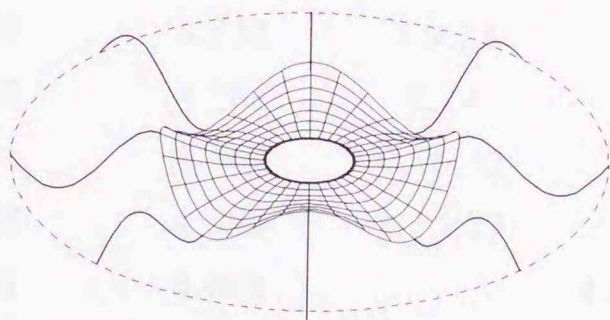
(k) $\Lambda = 3.985$ D3-2



(l) $\Lambda = 4.556$ SS'-3



(m) $\Lambda = 4.601$ B-3



(n) $\Lambda = 4.758$ SA'-2

図 3-5 8本のブレードを持ち、全周にシュラウドを有する
ディスク・ブレード連成系の固有振動モード (その2)

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=10^6$, $\xi_{Sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

表 3-5 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ

【 $P=16$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1.0$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$,
 $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

Mode	Λ	Λ	n	Uniform Disk (m_c, n_d) [*]	Cantilever Beam
D1-1	1.733	1.733	1,15,17		
SS'-1	1.738	1.737	0,16,32		
D2-1	1.756	1.756	2,14,18		
D3-1	1.795	1.795	3,13,19		
D4-1	1.811	1.811	4,12,20		
D5-1	1.819	1.819	5,11,21		
D6-1	1.822	1.822	6,10,22		
SA'-1	1.8235	1.8235	8,24		
D7-1	1.8239	1.8239	7,9,23		
B-1	1.838	1.838			1.838 (1st)
D1-2	2.606	2.606	1,15,17	2.560 (0,1)	
SS'-2	2.620	2.620	0,16,32	2.581 (0,0)	
D2-2	2.828	2.828	2,14,18	2.821 (0,2)	
D3-2	3.534	3.534	3,13,19	3.644 (0,3)	
D4-2	4.250	4.250	4,12,20		
D5-2	4.466	4.466	5,11,21		
D6-2	4.514	4.514	6,10,22		
D7-2	4.531	4.531	7,9,23		
SA'-2	4.533	4.533	8,24		
SS'-3	4.571	4.567	0,16,32		
D1-3	4.580	4.580	1,15,17		
B-2	4.601	4.601		4.698 (0,4)	4.601 (2nd)
D2-3	4.611	4.611	2,14,18		
D3-3	4.681	4.681	3,13,19		
D4-3	4.977	4.977	4,12,20		

※ m_c ; Number of Nodal Circles,
 n_d ; Number of Nodal Diameters.

表 3-6 全周をシュラウドで綴られたディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ

【 $P=16$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1.0$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$,
 $k_{Sp}=10^6$, $\xi_{Sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

Mode	Λ	Λ	n	Uniform Disk (m_c, n_d) [*]	Uniform Beam
SS'-1	1.738	1.737	0,16,32		
B-1	—	1.838			1.838 C-F ^{**} 1st
D1-1	2.506	2.506	1,15,17	2.560 (0,1)	
SS'-2	2.620	2.620	0,16,32	2.581 (0,0)	
D2-1	2.731	2.731	2,14,18	2.821 (0,2)	
D3-1	3.358	3.358	3,13,19	3.644 (0,3)	
D4-1	3.697	3.697	4,12,20		
D5-1	3.767	3.767	5,11,21		
D6-1	3.790	3.790	6,10,22		
D7-1	3.7996	3.7996	7,9,23		
SA'-1	3.800	3.800	8,24		
B-2	3.849	3.849			3.849 C-S ^{**} 1st
D1-2	3.892	3.892	1,15,17		
D2-2	3.927	3.927	2,14,18		
D3-2	4.090	4.090	3,13,19		
SS'-3	4.571	4.567	0,16,32		
B-3	—	4.601			4.601 C-F 2nd
D4-2	4.758	4.758	4,12,20	4.698 (0,4)	

※ m_c ; Number of Nodal Circles,

n_d ; Number of Nodal Diameters.

※※C-F; Clamped-Free,

C-S; Clamped-Simply Supported.

よりさらに低くなり、高い方のモードの固有振動数はブレード8本の場合よりさらに高くなる。

次に、8本のブレードを有する系における、ブレードの長さとディスクの外半径との比 α_p による振動数パラメータの変化を図3-6に示す。ここで、細線で横軸に平行に引かれた線はディスク単独の固有振動数パラメータ、同じく細線で図の左上から右下に向かう曲線は片持ばりの固有振動数パラメータを表す。これを見ると、ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ曲線のなかには、単独のディスクと片持ばりの振動数の曲線が交差する点の付近で大きく方向転換するものが認められる。この図を振動モードのタイプ別に表したのが図3-7である。これを見ると例えば(a)のSS'タイプの振動数曲線はディスク単独の $(m_c, n_d)=(0,0)$ モードと片持ばりの1次の振動数曲線の交点付近で方向転換しているが、そのほかの交点の付近では方向転換していないことがわかる(m_c, n_d はそれぞれディスクの節円数、節直径数)。同様に、SA'タイプでは単独ディスクの(0,4)モードと片持ばりの振動数曲線の交点付近で方向転換しており、D1, D2, D3タイプはそれぞれ単独ディスクの(0,1), (0,2), (0,3)モードと片持ばりの交点付近で方向転換している。この結果から、ディスク・ブレード連成系の各モードタイプの振動数曲線はそのモードに参与する周方向波数成分に一致する節直径数の単独ディスクの振動数曲線と片持ばりの振動数曲線との交点付近で方向転換を起こすことが分かる。また、これまで述べてきた強連成モードは、SA'タイプの振動数曲線が方向転換して生じたものであることもこの図から分かる。

なお、このような振動数曲線の方向転換は「curve veering (ヴィーリング)」と呼ばれ、ディスク・ブレード連成系のような構造的な連成のある系^{(71)~(73)}や、単独の構造物^{(74)~(76)}においても平板のアスペクト比など、系のパラメータの変化によって二種類の振動モードの振動数が接近するような場合においてみられる。このようなヴィーリングが生じるとその前後でモードの入れ替わりが生じる。また、ヴィーリングしている領域ではモード形はわずかなパラメータの変化でも大きく変化することから、モードの局所化と関連した研究もなされている⁽⁷⁷⁾⁽⁷⁸⁾。

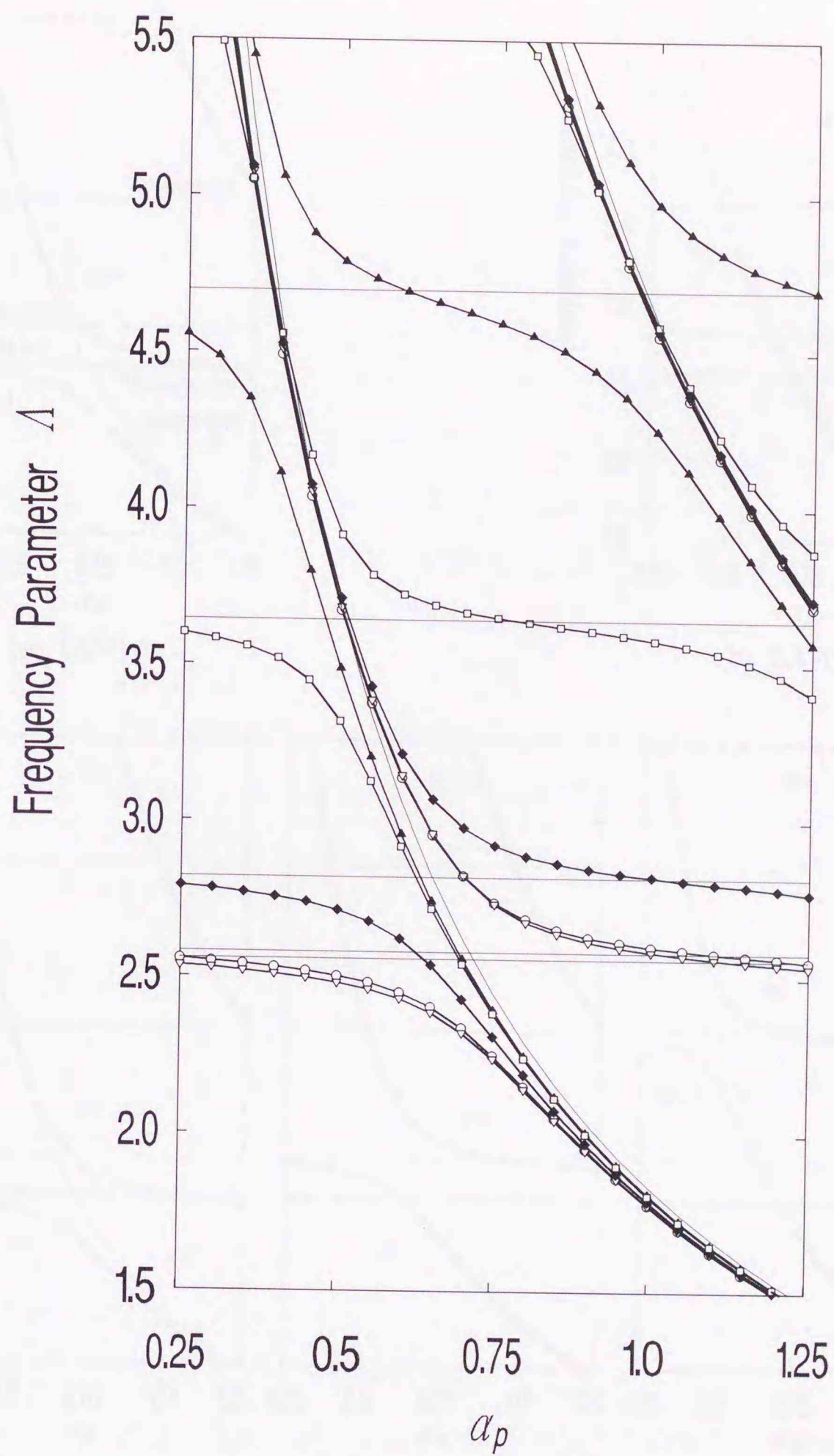
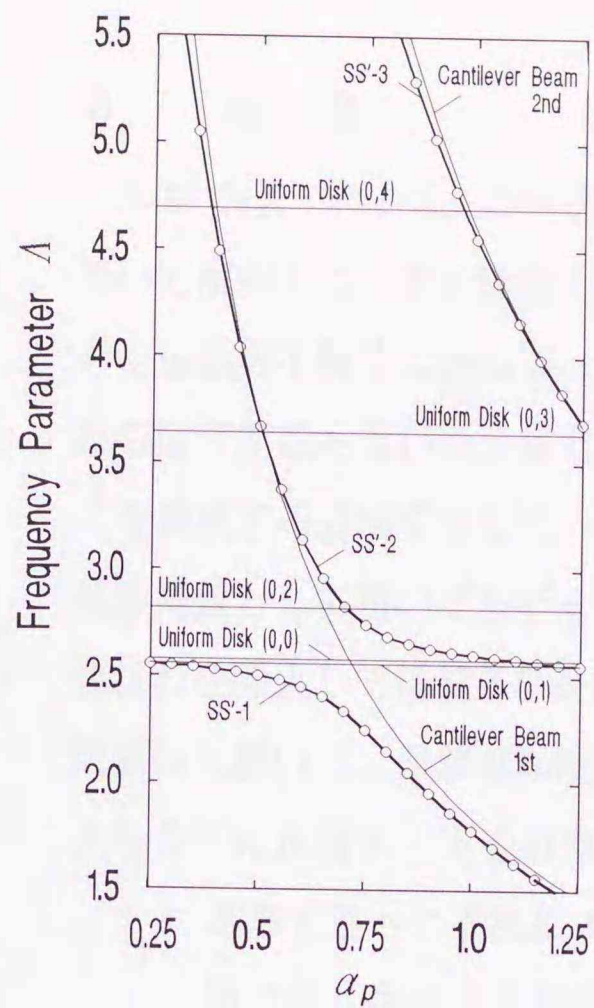
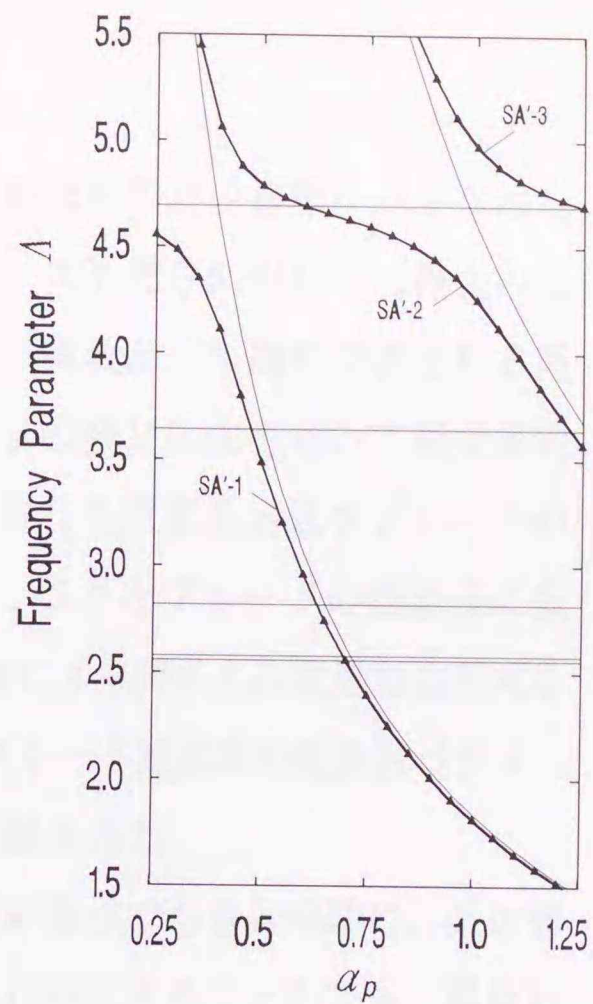


図 3-6 ディスクの外半径とブレードの長さ比による振動数パラメータの変化

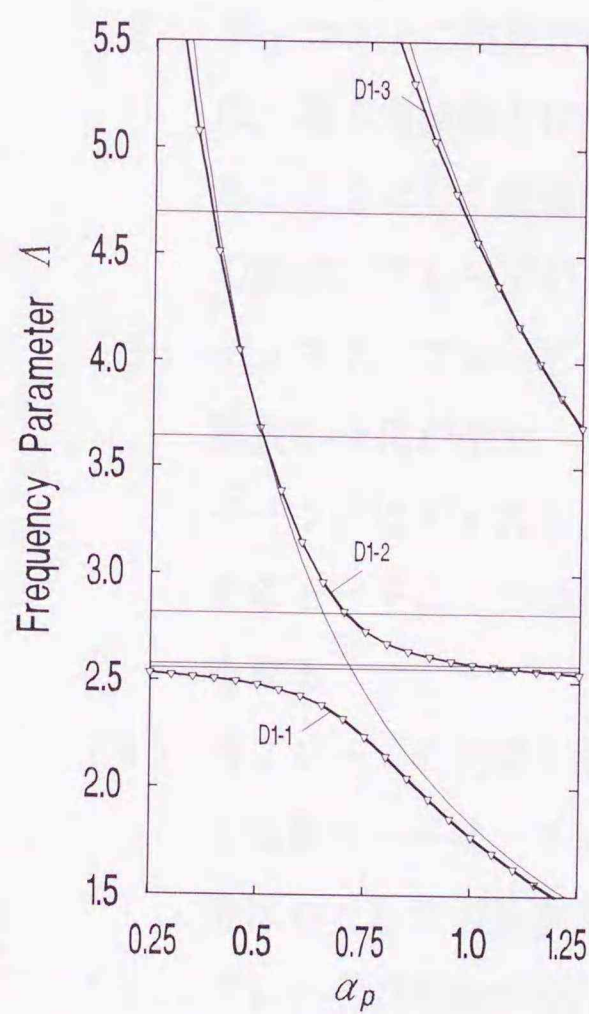
【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】



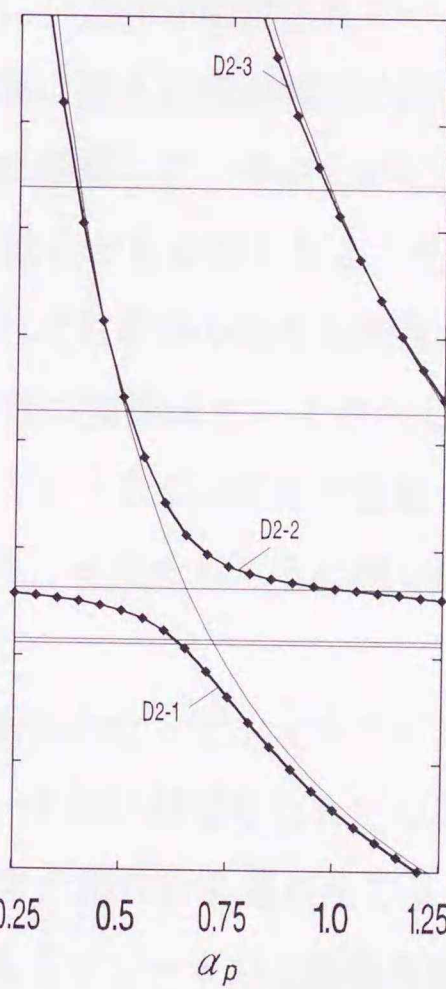
(a) SS'-type



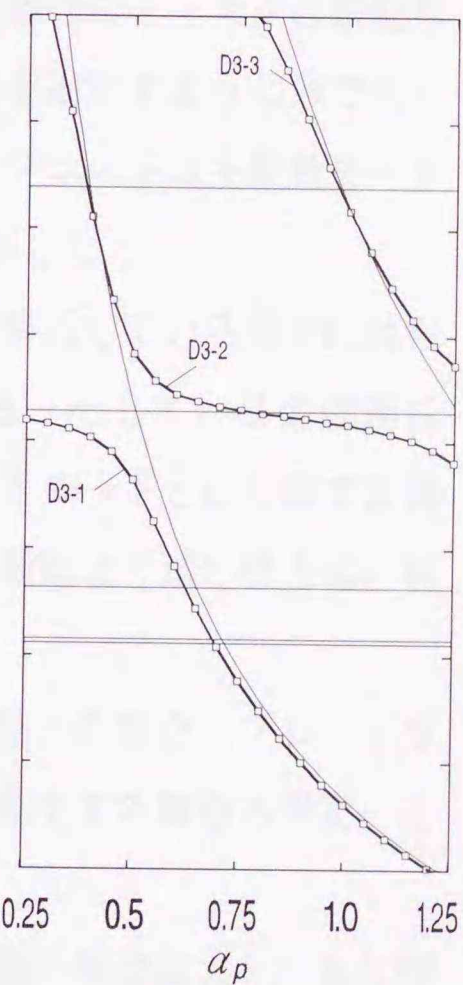
(b) SA'-type



(c) D1-type



(d) D2-type



(e) D3-type

図 3-7 ディスクの外半径とブレードの長さ比による振動数パラメータの変化

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

3.7 結 言

本章では、ディスクの外周にブレードが接続された系の自由振動をリッツ法を用いて解析した。変位関数の試験関数として、ディスク部分に対しては静止円板の自由振動を解くことによって決定され、ベッセル関数と三角関数で表される円板の固有関数を用いた。また、グラム・シュミットの直交化法を用いて直交多項式を構成する方法を示して、その手法により構成される直交多項式をブレードの試験関数として用いて解析を行った。その際、ディスクとブレードの接続点に仮想ばねを導入して接続条件を満足させた。この方法により得られた振動数方程式を数値的に解いて、周期対称性を有するディスク・ブレード連成系の振動数パラメータならびに振動モードを計算し、以下のような結論を得た。

- (1) 本章で述べた手法により、用いる試験関数が簡単であると同時に、系の運動エネルギーより導かれる係数行列を対角行列化することができ、数値計算を安定して行うことができる。
- (2) ディスク上に周期対称に付加物が配置されている場合のディスクの振動形は、周方向波数と付加物の数との間の特定の関係を満たすような形で生じることを示し、数値的に確認した。そのために、ブレードの主振動モードの数は、ブレードの本数とともに増えることを示した。
- (3) ディスク、ブレードそれぞれ単独の固有振動数が接近している場合には振動数の分化が生じ、両者の強連成モードが生じる。そして、この強連成モードにはディスクとブレードが同位相で振動するモードと逆位相で振動するモードの二つがあり、それぞれもとの固有振動数より低い値と高い値を取る。
- (4) 各ブレードの先端を全周にわたってシュラウドで結んだ場合、ブレードの主振動モードは、ブレードが片持ばりとしての振動をする場合と固定-支持ばりとしての振動をする場合の2通り生じる。
- (5) ブレードの本数が増えるとブレードの主振動振動数の幅は拡大し、また強連成モードの場合には分化した固有振動数の差が大きくなる。
- (6) ブレードの長さやディスクの外半径との比による振動数パラメータの値をプロットすると、各モードの振動数曲線は、そのモードに関与する周方向波数成分に一致する節直径数の単独ディスクの振動数曲線と片持ばりの振

第4章 ディスク・ブレード連成系の定常応答⁽⁷⁹⁾

4.1 緒言

前章までは、ディスク・ブレード連成系を連続体としてモデル化し、エネルギー法を用いて振動解析を行うための接続条件、境界条件の取り扱いに関する問題について述べてきた。そして、ディスクとブレードの接続部に仮想ばねを導入することと、直交性のある関数を試験関数として用いることで解析が容易になり、また数値計算を安定化させることができることを示し、周期対称性のあるディスク・ブレード連成系に関して基本的な振動特性を明らかにした。一方、実際の蒸気タービンシステムなどにおいては、流体中を回転することによる流体励振力を始めとするさまざまな励振力を受けながら運転されるため、自由振動特性（固有振動数、固有モード）だけでなく、系の周波数応答特性をも把握することが重要となる。しかし、実機に作用するような規則的、あるいは不規則な励振力の振舞いは非常に複雑であり、それらの予測技術、モデル化技術はそれ自身が現在進行中の重要な研究テーマとなっているため^{(28)~(30),(80)(81)}、本論文では深くは立ち入らない。ここでは、最も単純な励振力として、ディスクあるいはブレード上の一点に調和的な集中外力が作用する場合を考え、そのときの系の定常応答を解析する。したがってここで行う応答解析は、実際のタービンシステムに作用する励振力による応答をシミュレートするというよりも、系の持つ基本的な振動特性を系の応答という観点から調べることを目的としている。

そのために本章では、系の各エネルギーに加えて調和外力による仕事を求め、ラグランジュの方程式を用いて系の運動方程式を導く。その際に、ディスクとブレードそれぞれの曲げこわさを、内部減衰を考慮した複素量で近似する。また、変位の試験関数については、第3章と同じく、ディスク部分に対しては有孔円板の固有関数、ブレード部分に対してはグラム・シュミットの直交化法により構成した直交多項式を用いた級数でそれぞれ近似する。数値例として、8本のブレードがディスクの外周に周期対称に取り付けられた系について数値計算を行い、励

振振動数に対する系の応答曲線を求める。そして、第3章の解析で得られたディスク・ブレード連成系の基本的な振動特性が応答曲線に現れることを示すとともに、内部減衰の大きさ、励振点の位置、シュラウドの有無、ディスクとブレードのこわさ比等が応答変位、共振振動数、反共振振動数などの系の応答特性に与える影響について調べる。

4.2 ラグランジュの方程式を用いた運動方程式の導出

図4-1に、本章で扱う調和外力による励振を受けるディスク・ブレード連成系を示す。各ブレードはディスクの外周上に等間隔に取り付けられているものとし、ディスクとブレードの接続条件は接続点に変位と回転角のそれぞれの差に比例する仮想ばねを導入して処理する。用いる座標系、記号等は第3章とまったく同じであるが、調和外力の作用点を添字0を付して表す。すなわち、励振力がディスク上に作用する場合はその位置を (r_0, θ_0) 、 p 番目のブレード上に作用する場合には (x_{p0}) とする。

系の振動変位はディスクの面外方向変位 w のみを考えるものとする。ディスク、ブレードそれぞれに蓄えられる各エネルギーは以下の式で与えられる。

$$U_d^0 = \frac{\tilde{D}_d}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left[(\nabla^2 w_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_d}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w_d}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] r d\theta dr \quad (4.1)$$

$$U_b^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \tilde{E}_{bp} I_{bp} \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(\frac{\partial^2 w_{bp}}{\partial x_p^2} \right)^2 dx_p \quad (4.2)$$

$$T_d^0 = \frac{\rho_d h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_d}{\partial t} \right)^2 r d\theta dr \quad (4.3)$$

$$T_b^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial t} \right)^2 dx_p \quad (4.4)$$

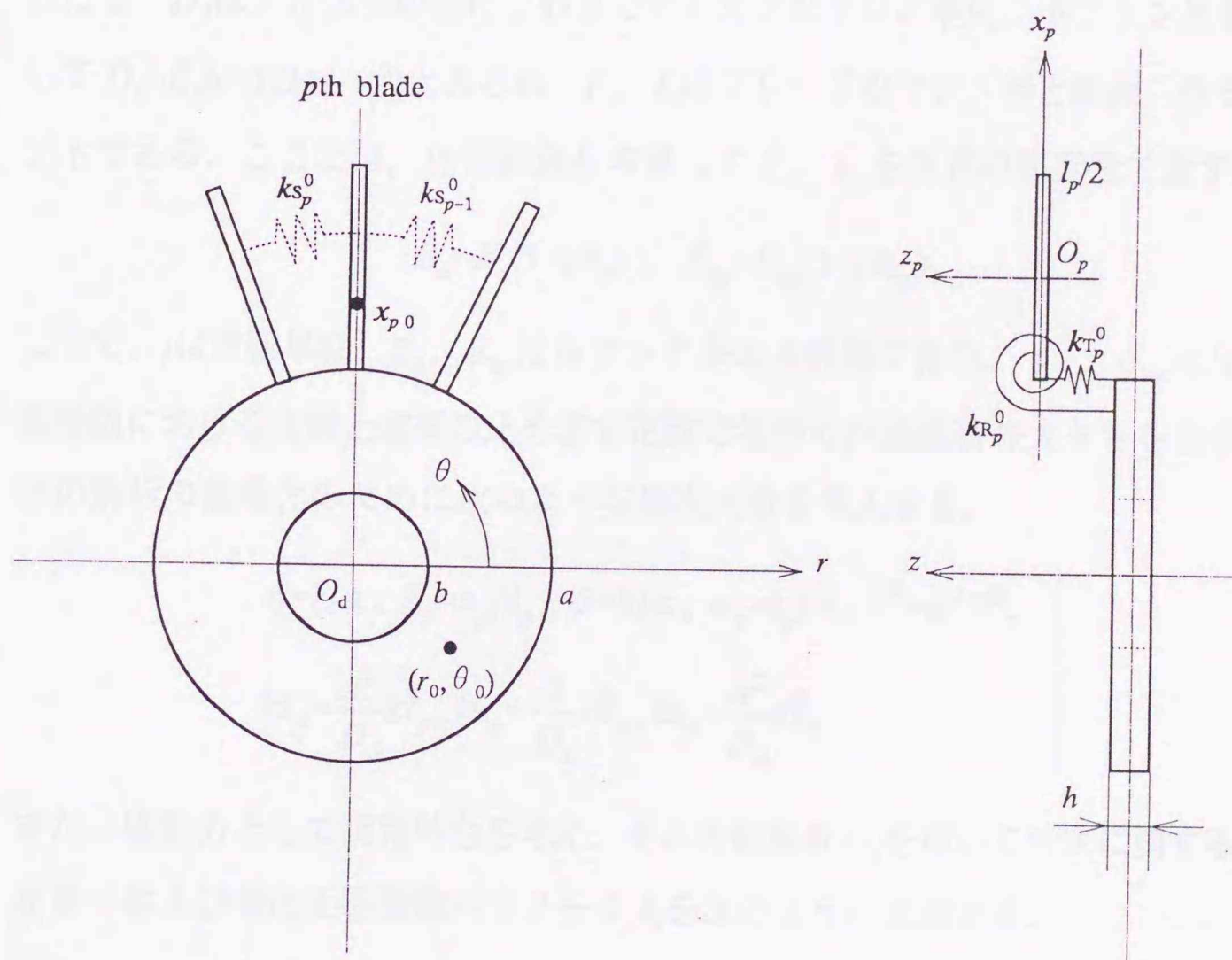


図 4 - 1 調和励振力を受けるディスク・ブレード連成系と座標系

$$U_s^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Tp}^0 (w_d - w_{bp})^2 + k_{Rp}^0 \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} - \frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 \right]_{r=a, \theta=\theta_p, x_p=-l_p/2} \\ + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Sp}^0 (w_{bp} - w_{bp+1})^2 \right]_{x_p=x_{sp}, x_{p+1}=x_{sp+1}} \quad (4.5)$$

ただし、 $\bar{D}_d$ はディスクの曲げこわさでディスクのヤング率 $\bar{E}_d$ 、ポアソン比を ν として $\bar{D}_d = \bar{E}_d h^3 / 12(1 - \nu^2)$ と表され、 $\bar{E}_b$ 、 I_b はブレードのヤング率と断面二次モーメントである。ここでは、内部減衰を考慮して $\bar{E}_d$ 、 $\bar{E}_b$ を次式の複素量で表す。

$$\bar{E}_d = E_d(1 + j\delta_d), \quad \bar{E}_{bp} = E_{bp}(1 + j\delta_{bp}) \quad (4.6)$$

ここで、 j は虚数単位、 E_d 、 E_{bp} は各ヤング率の実数部であり、 δ_d 、 δ_{bp} は任意の振動数における実部と虚部の比を表す定数で材料の内部減衰の大きさを表す。以下の解析の簡略化のために次のような無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \eta = r/a, \quad \xi_p = x_p/l_p, \quad \beta = b/a, \quad \alpha_p = l_p/a, \quad \bar{\nabla}^2 = a^2 \nabla^2, \\ k_{Tp} = \frac{a^2}{D_d} k_{Tp}^0, \quad k_{Rp} = \frac{1}{D_d} k_{Rp}^0, \quad k_{Sp} = \frac{a^2}{D_d} k_{Sp}^0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

また、励振力として調和外力を考え、その円振動数 ω_f を用いて時間に関する無次元量 τ および無次元振動数パラメータ Λ_f を次のように定義する。

$$\tau = \omega_f t, \quad \Lambda_f^4 = \frac{\rho_d h a^4}{D_d} \omega_f^2 \quad (4.8)$$

これらを用いて式(4.1)～(4.5)を無次元量で書き直すと、以下のとおりとなる。

$$U_d = \frac{(1 + j\delta_d)}{2} \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} \left[(\bar{\nabla}^2 W_d)^2 - 2(1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 W_d}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial W_d}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 W_d}{\eta^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] \eta d\theta d\eta \quad (4.9)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p^3} (1 + j\delta_{bp}) \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial^2 W_{bp}}{\partial \xi_p^2} \right)^2 d\xi_p \quad (4.10)$$

$$T_d = \frac{1}{2} A_f^4 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial W_d}{\partial \tau} \right)^2 \eta d\theta d\eta \quad (4.11)$$

$$T_b = \frac{1}{2} A_f^4 \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{\partial W_{bp}}{\partial \tau} \right)^2 d\xi_p \quad (4.12)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Tp} (W_d - W_{bp})^2 + k_{Rp} \left(\frac{\partial W_d}{\partial \eta} - \frac{\partial W_{bp}}{\alpha_p \partial \xi_p} \right)^2 \right]_{\substack{\eta=1, \theta=\theta_p \\ \xi_p=-1/2}} \\ + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Sp} (W_{bp} - W_{bp+1})^2 \right]_{\xi_p=\xi_{Sp}, \xi_{p+1}=\xi_{Sp+1}} \quad (4.13)$$

ただし、各エネルギー、変位は次のような無次元化を行っている。

$$\left. \begin{aligned} (U_d, U_b, T_d, T_b, U_s) &= \frac{1}{D_d} (U_d^0, U_b^0, T_d^0, T_b^0, U_s^0) \\ W_d(r, \theta, t) &= a w_d(\eta, \theta, \tau), \quad W_{bp}(x_p, t) = a w_{bp}(\xi_p, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

また、

$$\varepsilon_p = \frac{E_{bp} I_{bp}}{D_d a}, \quad \gamma_p = \frac{\rho_{bp} A_p}{\rho_d h a}, \quad D_d = \frac{E_d h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.15)$$

であり、 ε_p 、 γ_p はそれぞれ p 番目のブレードとディスクの曲げこわさの比、質量の比に関する無次元量である。なお、 $W_{bP+1} = W_{b1}$ とする。

ここで、ディスクとブレードの変位を次のように近似する。

$$W_d(\eta, \theta, \tau) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \Phi_{mn}(\eta) \cos n\theta A_{mn}(\tau) \quad (4.16)$$

$$W_{bp}(\xi_p, \tau) = \sum_{r_p=1}^{R_p} \Psi_{r_p}(\xi_p) B_{r_p}(\tau) \quad (4.17)$$

ここで、 $\Phi_{mn}(\eta)$ は、境界条件を満たす円板の固有関数であり式(3.15)で与えられる。 $\Psi_{r_p}(\xi_p)$ はグラム-シュミットの直交化法を用いて構成される直交多項式で、式(3.34)～(3.36)、(3.39)より得られる。また、 $A_{mn}(\tau)$ 、 $B_{r_p}(\tau)$ は未知の時間関数である。なお、本章においても、系には構造の周期対称性が満たされているもの

とする。さらに以下の数値計算で励振力をディスクの対称軸上に作用させることを念頭におき、対称振動のみが励起される場合に問題を限定して扱うものとしているので、ディスクの周方向変位関数を式(4.16)のように余弦関数で展開している。

次に、調和励振力を受けるディスク・ブレード連成系の運動方程式を導くために、次式で与えられるラグランジュの方程式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}_{kl}} \right) - \frac{\partial T}{\partial A_{kl}} + \frac{\partial U}{\partial A_{kl}} &= Q_{kl}, \quad (k=1,2,\dots,M, l=0,1,\dots,N) \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{B}_{s_p}} \right) - \frac{\partial T}{\partial B_{s_p}} + \frac{\partial U}{\partial B_{s_p}} &= Q_{s_p}, \quad (s_p=1,2,\dots,R_p) \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

ここで、 Q_{kl} 、 Q_{s_p} は A_{kl} 、 B_{s_p} を一般化座標とする一般化力であり、 $(\cdot)$ は τ による微分を表し、 U 、 T はそれぞれ、

$$U = U_d + U_b + U_s, \quad T = T_d + T_b \quad (4.19)$$

である。いま、ディスク上の一点 (η_0, θ_0) に大きさ $Q_0/2$ の調和外力が作用するとき、その力による仕事 W_f は、次式で表される。

$$W_f = \frac{Q_0}{2} \exp(j\tau) A_{mn}(\tau) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \Phi_{mn}(\eta) \cos n\theta \delta(\eta - \eta_0) \delta(\theta - \theta_0) d\theta d\eta \quad (4.20)$$

ただし、 δ はディラックのデルタ関数である。したがって、この場合の一般化力 Q_{kl} 、 Q_{s_p} は、

$$\left. \begin{aligned} Q_{kl} &= \frac{\partial W_f}{\partial A_{kl}} = \frac{Q_0}{2} \exp(j\tau) \Phi_{kl}(\eta_0) \cos l\theta_0 \\ Q_{s_p} &= \frac{\partial W_f}{\partial B_{s_p}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

となる。同様に、大きさ $Q_0/2$ の調和外力がブレード上の一点 (ξ_{p0}) に作用する場合の一般化力 Q_{kl} 、 Q_{s_p} は、

$$\left. \begin{array}{l} Q_{kl}=0 \\ Q_{s_p}=\frac{Q_0}{2}\exp(j\tau)\Psi_{s_p}(\xi_{p0}) \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

で与えられる。式(4.9)～(4.13), (4.21), (4.22)を式(4.18)に代入して整理すると、ディスク・ブレード連成系の運動方程式,

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_f^4 [T_{mn}^{(kl)}] \{\ddot{A}_{mn}\} + [U_{mn}^{(kl)}] \{A_{mn}\} + [U_{r_p}^{(kl)}] \{B_{r_p}\} = \{Q_{kl}\} \\ \Lambda_f^4 [T_{r_p}^{(s_p)}] \{\ddot{B}_{r_p}\} + [U_{r_p}^{(s_p)}] \{B_{r_p}\} + [U_{mn}^{(s_p)}] \{A_{mn}\} = \{Q_{s_p}\} \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

が導かれる。この方程式は、複素係数の連立1次方程式であり、与えられた励振振動数 Λ_f に対してこの方程式を解くことで、時間関数 A_{mn} , B_{r_p} が以下のように決定される。

$$\begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{r_p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{mn}^{(kl)} & U_{r_p}^{(kl)} \\ U_{mn}^{(s_p)} & U_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix}^{-1} \Lambda_f^4 \begin{bmatrix} T_{mn}^{(kl)} & 0 \\ 0 & T_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{kl} \\ Q_{s_p} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

ただし調和励振力に対する応答であるので $\{A_{mn} B_{r_p}\}^T = \{a_{mn} b_{r_p}\}^T \exp(j\tau)$ とおいた ($\{a_{mn} b_{r_p}\}^T$ は時間に無関係な未知定数)。式(4.24)を式(4.16), (4.17)に代入することにより、調和外力を受けるディスク・ブレード連成系の応答が求められる。なお、式(4.24)の各係数行列の部分行列の要素は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} U_{mn}^{(kl)} = & \Pi_c (1+j\delta_d) \int_{\beta}^1 \left[\Phi_{mn}'' \Phi_{kn}'' \eta + \nu (\Phi_{mn}'' \Phi_{kn}' + \Phi_{mn}' \Phi_{kn}'') \right. \\ & - \nu n^2 \frac{(\Phi_{mn}'' \Phi_{kn} + \Phi_{mn} \Phi_{kn}'')}{\eta} + [1+2n^2(1-\nu)] \frac{\Phi_{mn}' \Phi_{kn}'}{\eta} \\ & \left. - (3-2\nu)n^2 \frac{(\Phi_{mn}' \Phi_{kn} + \Phi_{mn} \Phi_{kn}')}{\eta^2} + n^2 [n^2+2(1-\nu)] \frac{\Phi_{mn} \Phi_{kn}}{\eta^3} \right] d\eta \\ & + \sum_{p=1}^P \left[k_{T_p} \Phi_{mn} \Phi_{kl} \cos n\theta_p \cos l\theta_p + k_{R_p} \Phi_{mn}' \Phi_{kl}' \cos n\theta_p \cos l\theta_p \right]_{\eta=1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$U_{r_p}^{(kl)} = - \left[k_{T_p} \Phi_{kl} \Psi_{r_p} \cos l\theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{R_p} \Phi_{kl}' \Psi_{r_p}' \cos l\theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (4.26)$$

$$U_{mn}^{(s_p)} = - \left[k_{T_p} \Phi_{mn} \Psi_{s_p} \cos n \theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{R_p} \Phi'_{mn} \Psi'_{s_p} \cos n \theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (4.27)$$

$$T_{mn}^{(kl)} = \Pi_c \int_{\beta}^1 \Phi_{mn} \Phi_{kn} \eta d\eta \quad (4.28)$$

$$T_{r_p}^{(s_p)} = \alpha_p \gamma_p \int_{-1/2}^{1/2} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} d\xi_p \quad (4.29)$$

ここで, Π_c , $()'$ は式(3.48), (3.49)で与えられる. また, 式(4.24)の部分行列 $[U_{r_p}^{(s_p)}]$ は, 0 でない要素を持つブロックを*で表すと(3.50)と同様に,

$$[U_{r_p}^{(s_p)}] = \begin{bmatrix} * & * & & & * \\ * & * & * & & \\ & * & * & * & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & * & * & * \\ * & & & & & * & * \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

という形をしている. そのうち, 対角ブロックの要素を $U_{r_p}^{d(s_p)}$, 対角線より上のブロックの要素を $U_{r_p}^{u(s_p)}$, 対角線より下のブロックの要素を $U_{r_p}^{l(s_p)}$ とするとそれらはそれぞれ

$$\begin{aligned} U_{r_p}^{d(s_p)} = & \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p^3} (1 + j \delta_{bp}) \int_{-1/2}^{1/2} \Psi_{r_p}'' \Psi_{s_p}'' d\xi_p \\ & + \left[k_{T_p} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} + \frac{1}{\alpha_p^2} k_{R_p} \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \right]_{\xi_p=-1/2} \\ & + \left[(ks_p + ks_{p-1}) \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \right]_{\xi_p=\xi_{s_p}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$U_{r_p}^{u(s_p)} = - \left[ks_p \Psi_{r_{p+1}} \Psi_{s_p} \right]_{\xi_p=\xi_{s_p}, \xi_{p+1}=\xi_{s_{p+1}}} \quad (4.32)$$

$$U_{r_p}^{l(s_p)} = - \left[ks_{p-1} \Psi_{r_{p-1}} \Psi_{s_p} \right]_{\xi_p=\xi_{s_p}, \xi_{p-1}=\xi_{s_{p-1}}} \quad (4.33)$$

である. ただし, $\Psi_{r_0} = \Psi_{r_p}$, $ks_0 = ks_p$ とする.

4.3 数値計算と考察

本節では、式(4.24)の定常応答を決定する方程式を用いて数値計算を行い、ディスクの外周上に周期対称にブレードが接続されている系に調和励振力が作用するときの系の応答について調べる。以下で用いる各パラメータの値は、ディスクの内外半径比 $\beta=0.3$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、接続されているブレードは長方形断面を有する全て同一なブレードであり、特に断らない限り、ディスクの外半径との長さ比 $\alpha_p=1$ 、曲げこわさ比 $\varepsilon_p=1.2\times 10^{-2}$ 、質量比に関する無次元パラメータ $\gamma_p=1.3\times 10^{-2}$ とする。また、ここで扱う系のブレードの数は8本とし、1番目のブレードの取り付け位置は $\theta_1=0$ とする。なお、本論文の手法によればブレードに差異が存在する、いわゆるミスチューン系の解析も可能であるが、以下では全てのブレードが同一である場合のみを扱うため、各パラメータ中のブレードの番号を表す添字 p は省略する。

4.3.1 数値計算精度の検討

式(4.24)を励振振動数を細かく変化させながら解き、特定の点（観測点と呼ぶ）についてその時々に応答変位を計算していくと、励振振動数が系の固有振動数に近くなると観測点の応答変位は大きくなる。このような共振振動数には第3章の議論から、ディスク、ブレードそれぞれの主共振モードと両者が共に大きな応答をする強連成モードとが存在する。また励振振動数によっては、観測点の応答変位がほとんど0となる、反共振振動数も存在する。表4-1、4-2に、シュラウドを持たない系のブレードの主共振モードの最低次（固有振動モードD1-1に対応）、ディスクの主共振モードの最低次（固有振動モードD1-2に対応）、ディスクとブレードの強連成モード（固有振動モードSA'-2に対応）の各共振振動数ならびにその強連成モードに隣接する反共振振動数のうち低い方の反共振振動数、のそれぞれについて、1番目のブレード先端の応答変位（ただし、調和外力の大さきの2倍で割って $|w_{b1}(0.5)/Q_0|$ としたもの）をそのときの励振振動数 Λ_f （[]内の数値）と共に示す。表4-1は、式(4.16)の級数の項数、表4-2は式(4.17)の級数の項数による収束状況である。この表より、いずれの場合も $M=8, N=8$,

表 4 - 1 応答変位の M, N による収束状況

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$,
 $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-4}$, 励振点: $\eta_0=0.8$, $\theta_0=0$, 観測点: $\xi_1=0.5$, $\nu=0.3$, $R_p=10$ 】

(M, N)	$ w_{b1}(0.5)/Q_0 $			
	bm1(D1-1) (resonance)	d ₀₁ (D1-2) (resonance)	Anti. (antiresonance)	sc1(SA'-2) (resonance)
(5,4)	1.256×10^3 [1.783]	5.368×10^2 [2.586]	9.250×10^{-5} [4.172]	66.37 [4.258]
(7,6)	1.258×10^3 [1.783]	5.364×10^2 [2.586]	8.535×10^{-5} [4.167]	66.50 [4.257]
(8,8)	1.266×10^3 [1.779]	5.335×10^2 [2.586]	8.463×10^{-5} [4.166]	66.51 [4.257]
(9,10)	1.264×10^3 [1.776]	5.316×10^2 [2.586]	8.543×10^{-5} [4.167]	66.49 [4.257]

表 4-2 応答変位の R_p による収束状況

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$,
 $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-4}$, 励振点: $\eta_0=0.8$, $\theta_0=0$, 観測点: $\xi_1=0.5$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$ 】

R_p	$ w_{b1}(0.5)/Q_0 $			
	bm1(D1-1) (resonance)	d ₀₁ (D1-2) (resonance)	Anti. (antiresonance)	sc1(SA'-2) (resonance)
6	1.266×10^3 [1.779]	5.335×10^2 [2.586]	8.278×10^{-5} [4.169]	66.93 [4.261]
8	1.266×10^3 [1.779]	5.335×10^2 [2.586]	8.462×10^{-5} [4.166]	66.51 [4.257]
10	1.266×10^3 [1.779]	5.335×10^2 [2.586]	8.463×10^{-5} [4.166]	66.51 [4.257]
11	1.266×10^3 [1.779]	5.335×10^2 [2.586]	8.463×10^{-5} [4.166]	66.51 [4.257]

$R=10$ をとれば、振動数は有効数字3～4桁、応答変位の値は有効数字2～3桁の範囲で収束しているため、応答曲線を描くには実用上十分であると判断できる。そこで、以下の計算では変位関数の級数の項数は、 $M=8$, $N=8$, $R=10$ とする。また、接続点でのばねこわさは、第3章での固有振動数の収束状況から判断して $k_T=k_R=10^6$ とした。

4.3.2 振動数－応答曲線

図4-2に、シュラウドを持たないディスク・ブレード連成系($k_s=0$)のディスク上の点 $(\eta_0, \theta_0)=(0.8, 0)$ に調和励振力が作用する場合の系の振動数－応答曲線を示す。これは、横軸に励振振動数 Λ_f を採り、縦軸には応答変位の大きさを励振力の大きさの2倍で割ったものを対数目盛りでプロットしたものである。図の上方に向かうピークは共振状態を示すピーク、図の下方に向かうピークは反共振状態を表す。ここでは、内部減衰の値として $\delta_d=\delta_b=10^{-4}$ を用いた。図4-2(a)～(e)はそれぞれ1番目～5番目のブレードの先端の応答を表し、図(f)～(j)はディスクの外周上の点で、1番目～5番目のブレードとの接続点の応答を表している。この図(a), (f)で、bm1, bm2と書かれたピーク群は、そのときの励振振動数が片持ばりの1次、2次の固有振動数に近い値となっていることから分かるように、主としてブレードが振動するブレードの主共振ピーク群である。また、 d_{01} と書かれたピークは(c)と(h)の応答曲線には認められないが、これはこのピークが、ディスクの節直径1本の固有振動モードが卓越するような振動形で応答している共振点であるためで、3番目のブレードは節直径上にあるため応答ピークが現れない。このときの共振振動数はディスクの節円数0、節直径数1のモードの固有振動数に近い値となっている。さらに、 d_{00} と書かれたピークは全ての図においてピークが現れているが、これはディスクがかさ型モードが卓越するような振動形で応答しているためであり、 d_{02} と書かれたピークは(b), (d), (g), (i)の図ではピークが現れていないが、これはディスクが節直径2本のモードが卓越する振動形で応答しているためで、2番目、4番目のブレードは節直径上になるため応答ピークが現れない。以下同様に、図中の d_{mn} はディスクの各主共振ピーク（添字 m , n はそ

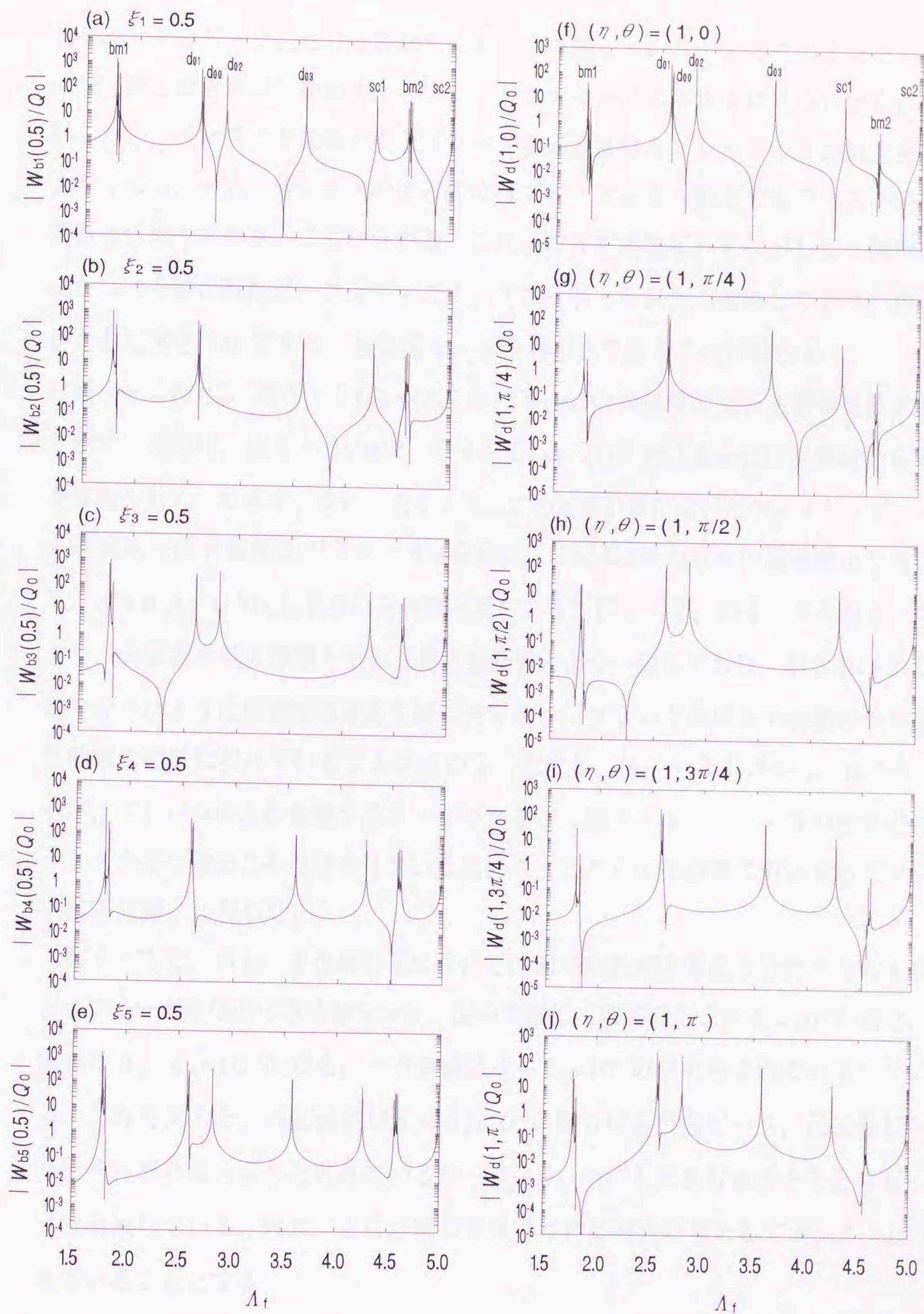


図4-2 ディスク上の一点に励振力が作用するディスク・ブレード連成系の振動数-応答曲線

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$, $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-4}$, 励振点: $\eta_0=0.8$, $\theta_0=0$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

れぞれ、そのピークにおける振動形において卓越しているディスクの固有モードの節円数と節直径数)を表す。各ブレードはディスクの外周上に取り付けられているため、ディスクが共振するとブレードの応答変位もブレードの主共振点並に大きくなる。一方、ディスクの応答変位はブレードの主共振点ではディスクの主共振点に比べて小さいことが分かる。これらの各主共振ピークに対して、図中でsc1, sc2と書かれたピークはディスク、ブレードとも大きく振動しており、両者がともに大きく応答する、強連成モードの共振点であることが分かる。

図4-3(a)に、図4-2(a), (f)におけるbm1の共振時の応答を横軸を拡大して示す。同様に、図4-3(b)に、図4-2(a), (f)におけるbm2の共振時の応答を横軸を拡大して示す。また、表4-3にこの応答計算に用いたディスク・ブレード連成系の固有振動数パラメータ Λ を示す。この Λ は系の固有円振動数 ω を用いて、 $\Lambda^4 = \rho_d h a^4 \omega^2 / D_d$ と表される無次元量である。図4-2, 図4-3と表4-3より、共振振動数の個数と数値は固有振動数とよく一致しており、第3章の3.5節で述べたような周期対称構造を持つディスク・ブレード連成系の振動特性が応答曲線に明瞭に現れていることが分かる。ただし、表4-3中のB-1, B-2モードはブレードのみが振動するモードであるが、図4-2, 図4-3の計算ではディスク上に励振力を作用させているために、これらの振動型に対応するピークは応答曲線には現れない。

図4-4に、図4-2と同じ系において内部減衰の値を変化させたときの1番目のブレード先端の応答曲線を示す。図の実線は内部減衰が $\delta_d = \delta_b = 10^{-4}$ の場合、破線は $\delta_d = \delta_b = 10^{-3}$ の場合、一点鎖線は $\delta_d = \delta_b = 10^{-2}$ の場合をそれぞれ示している。これを見ると、内部減衰が $\delta_d = \delta_b = 10^{-4}$ の場合は各共振ピーク、反共振ピークはそれぞれはっきりと現れているが、 $\delta_d = \delta_b = 10^{-2}$ と大きな値をとると各ピークは消滅している。なお、これ以降の計算では内部減衰の値として $\delta_d = \delta_b = 10^{-3}$ を用いることとする。

次に、励振点の位置を変化させた場合の、1番目のブレード先端の応答曲線を図4-5(a),(b)に示す。図(a),(b)はそれぞれブレードが片持ばりとしての1次、2次の振動形で共振するブレードの主共振振動数領域における応答曲線である。また、破線はディスクの外周上の点 $(\eta_0, \theta_0) = (1, 0)$ に励振力が作用する場合、実

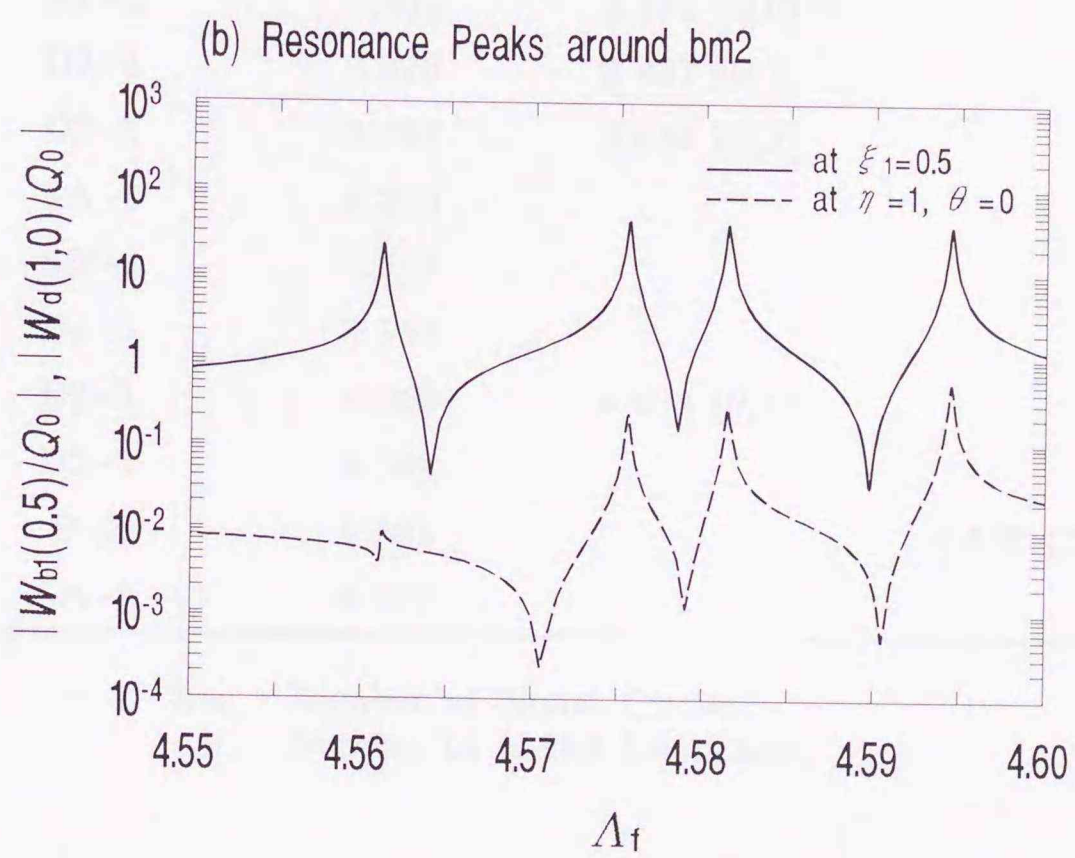
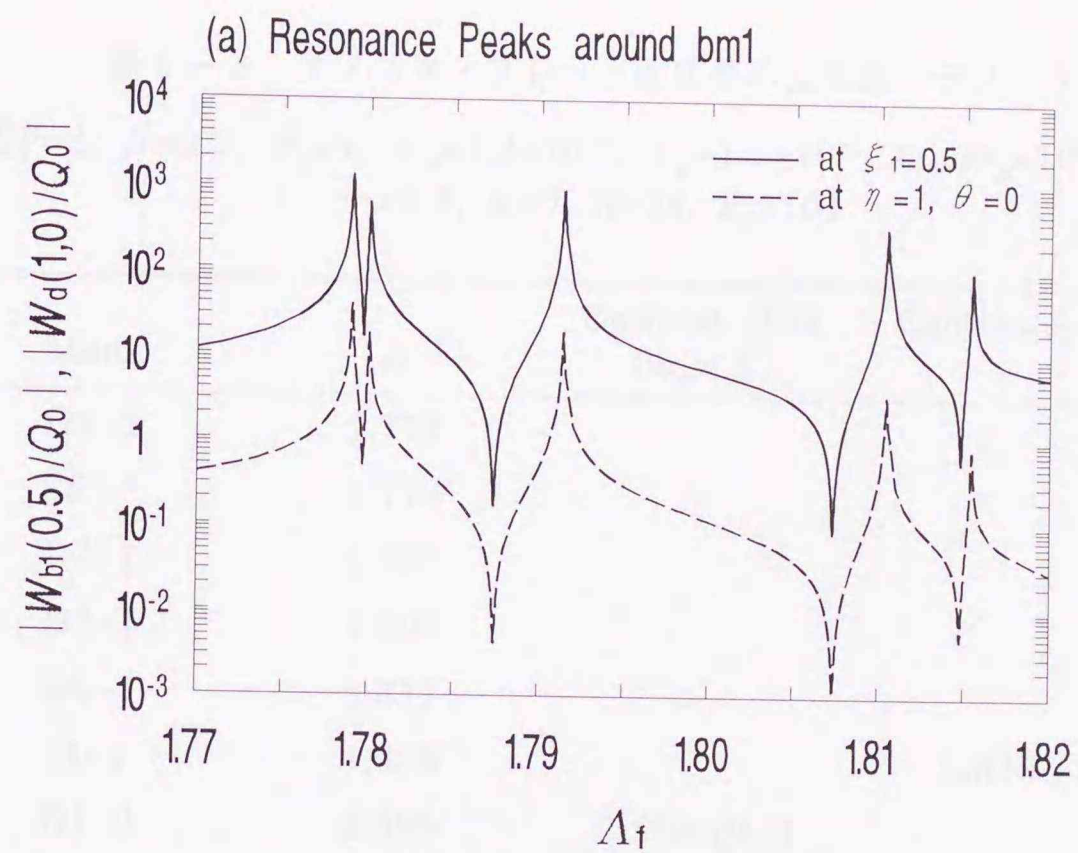


図4-3 ブレードの主共振領域での振動数-応答曲線
 【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$,
 $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-4}$, 励振点: $\eta_0=0.8$, $\theta_0=0$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

表 4-3 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ
 $[P=8, \beta=0.3, \alpha_p=1, \varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}, \gamma_p=1.3 \times 10^{-2}, k_{Tp}=k_{Rp}=10^6, k_{Sp}=0, \nu=0.3, M=7, N=24, R_p=10]$

Mode	Λ	Uniform Disk (m_c, n_d) [*]	Cantilever Beam
D1-1	1.775		
SS'-1	1.778		
D2-1	1.787		
D3-1	1.807		
SA-1	1.811		
B-1	1.838		1.838 (1st)
D1-2	2.586	2.560 (0,1)	
SS'-2	2.602	2.581 (0,0)	
D2-2	2.825	2.821 (0,2)	
D3-2	3.582	3.644 (0,3)	
SA-2	4.250		
SS'-3	4.553		
D1-3	4.557		
D2-3	4.565	4.698 (0,4)	
D3-3	4.580		
B-2	4.601		4.601 (2nd)
SA-3	4.977		

^{*} m_c ; Number of Nodal Circles,
 n_d ; Number of Nodal Diameters.

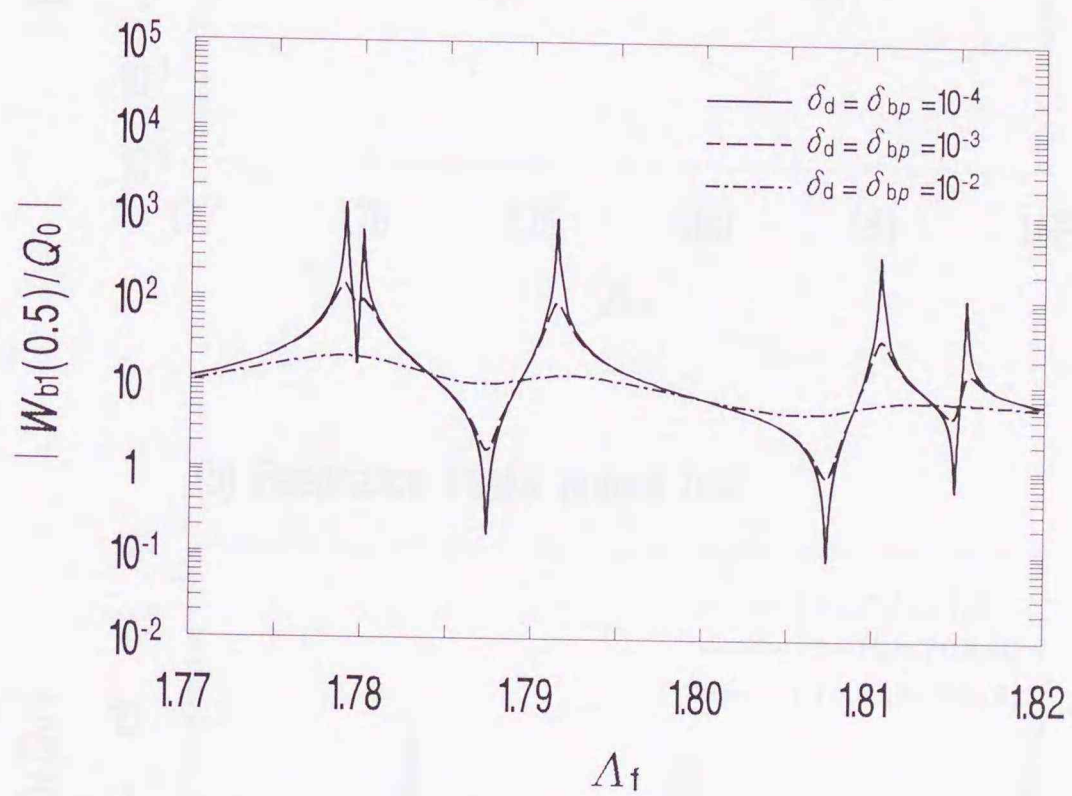


図 4-4 内部減衰の大きさによる振動数-応答曲線の変化
 【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=0$,
 励振点: $\eta_0=0.8$, $\theta_0=0$, 観測点: $\xi_1=0.5$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

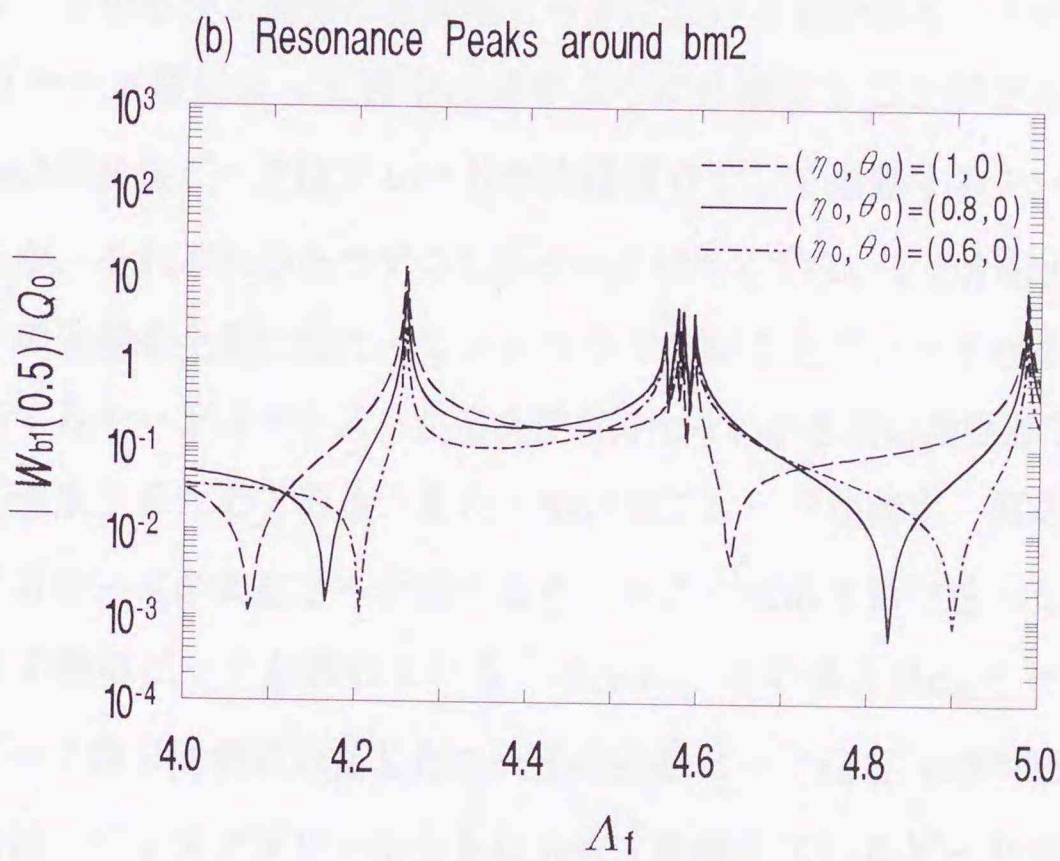
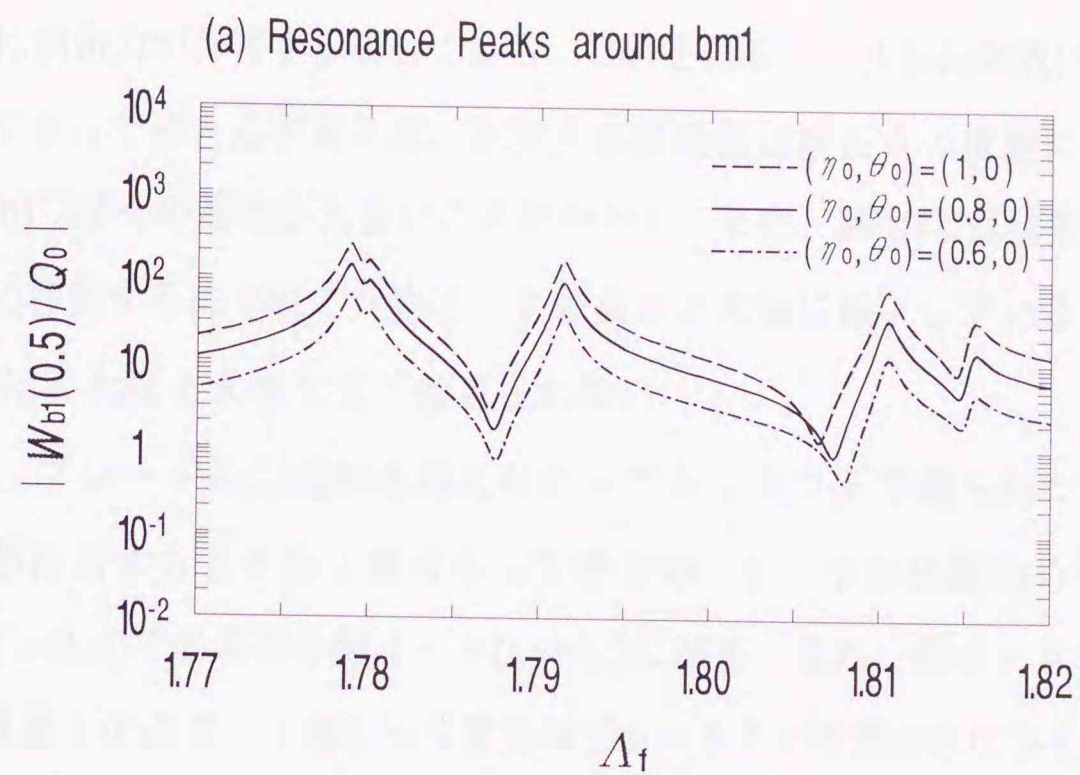


図 4-5 励振点の位置による振動数-応答曲線の変化

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$,
 $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-3}$, 観測点: $\xi_1=0.5$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

線は図4-2～図4-4の場合と同様にディスクの外周から少し内側の点 $(\eta_0, \theta_0) = (0.8, 0)$ に励振力が作用する場合、そして一点鎖線はさらに内側の点 $(\eta_0, \theta_0) = (0.6, 0)$ に励振力が作用する場合である。これを見ると、共振振動数は励振点の位置の変化によってほとんど変わらないが反共振振動数は励振点の位置によって変り、特に図(b)ではその変化が大きいことが分かる。また、図(a)では励振点がディスクの内側に移動するにつれて共振ピークの高さが大幅に低下しているのに対して、図(b)ではそれほど大きな低下は見られない。

次に、ブレードの先端が全周にわたってシュラウドで綴られた系($k_s=10^6$)に励振力が作用するときの1番目から5番目のブレードの先端からやや内側の点($\xi_1 \sim \xi_5=0.4$)での応答を図4-6(a)～(e)に示す。また、図4-6(f)～(j)はディスクの外周上の点で、1番目～5番目のブレードとの接続点の応答を表している。ここでは励振力は1番目のブレード上の点 $\xi_0=0.4$ に作用するものとした。ここでも、図4-2の場合と同様に各共振ピークにおける振動形を、そのとき卓越している固有モード形によって図中に示すように分類することができる。この図でbm1, bm3の共振ピークはブレードが片持ばりとして振動するモードの共振ピークであるが、それぞれひとつずつしかピークが生じてないことが分かる。これは、ブレードの先端を全周にわたってシュラウドで結ぶとブレードが片持ばりの振動形で応答するモードはディスクが節直径を持たないかさ型の振動形で振動するモードとのみ連成するためである。また、bm2はブレードが固定-単純支持はりとして振動するモードの共振ピーク群であり、そこには第3章で述べたような連成条件を満たす数のピークが現れている。さらに、この場合は d_{03} モードのピークとbm2のピーク群の両側に分化したモードの共振ピークsc1, sc2が現れているが、この両者は、ディスクブレードともに大きく振動しているピークであり、強連成モードの共振点であることが分かる。なお、このsc1, sc2はディスクが節直径を3本持つようなモードから分化した共振ピークなので、図(c), (h)にはピークは現れていない。また、bm3のピークはブレードの主共振ピークのためディスクの応答は非常に小さく、一方 d_{04} のピークディスクの主共振ピークなのでブレードの共振ピークは低くなっている。この系の固有振動数パラメータを表4-4に示す。

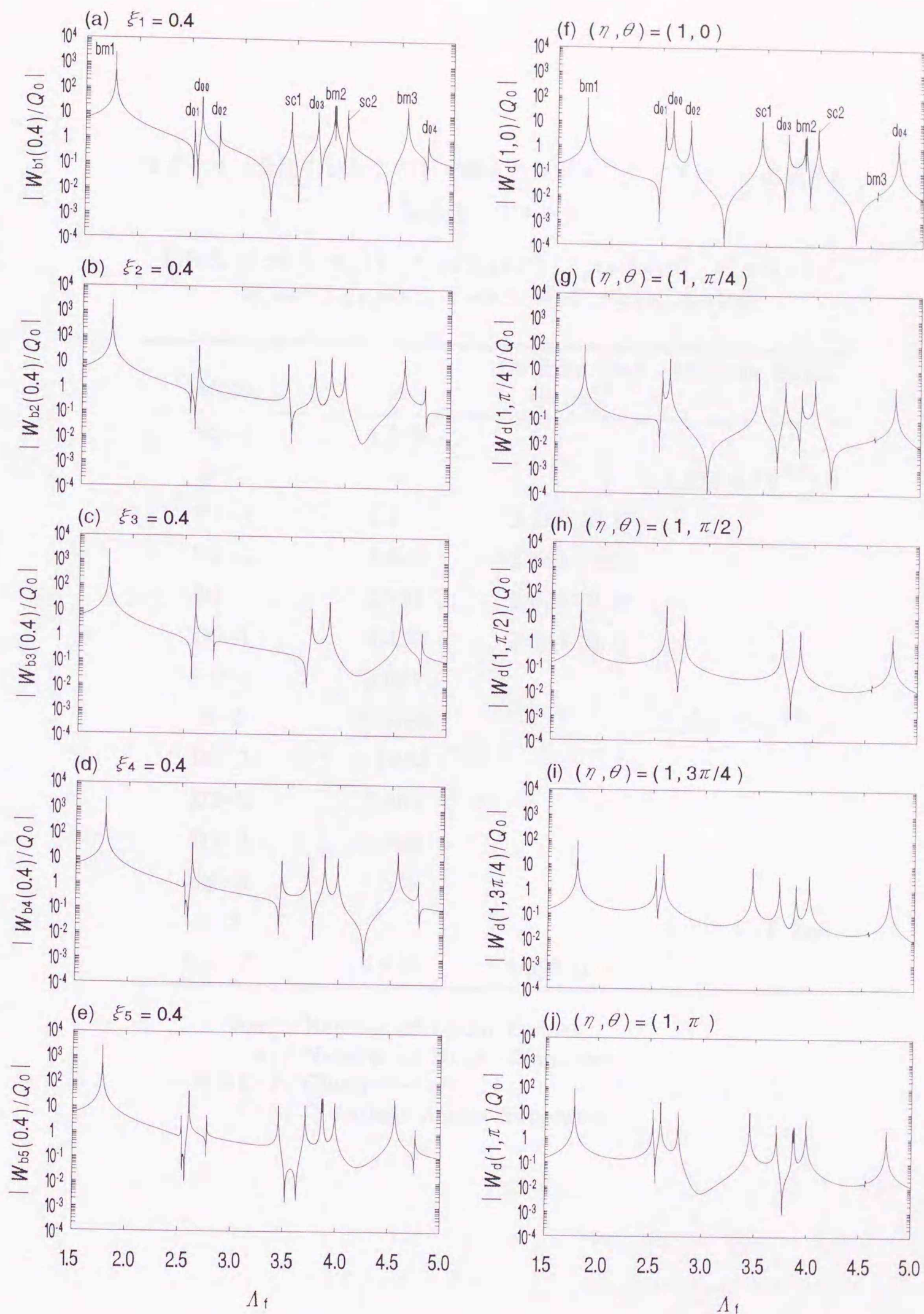


図4-6 全周にシュラウドを有するディスク・ブレード連成系の
ブレード上の一点に励振力が作用する場合の振動数-応答曲線

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Sp}=10^6$,
 $\xi_{Sp}=0.5$, $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-3}$, 励振点: $\xi_{10}=0.4$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

表4-4 全周をシュラウドで綴られたディスク・ブレード連成系の
振動数パラメータ

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$,
 $k_{Sp}=10^6$, $\xi_{Sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=7$, $N=24$, $R_p=10$ 】

Mode	Λ	Uniform Disk (m_c, n_d) [*]	Uniform Beam
SS'-1	1.778		
B-1	-		1.838 C-F ^{**} 1st
D1-1	2.531	2.560 (0,1)	
SS'-2	2.602	2.581 (0,0)	
D2-1	2.771	2.821 (0,2)	
D3-1	3.450	3.644 (0,3)	
SA'-1	3.697		
B-2	3.8488		3.849 C-S ^{**} 1st
D1-2	3.8494		
D2-2	3.865		
D3-2	3.980		
SS'-3	4.553		
B-3	-		4.601 C-F 2nd
SA'-2	4.758	4.698 (0,4)	

^{*} m_c ; Number of Nodal Circles,

n_d ; Number of Nodal Diameters.

^{**}C-F; Clumped-Free,

C-S; Clumped-Simply Supported.

図4-6, 表4-4より, 共振振動数, 固有振動数パラメータは個数, 値ともよく一致しており, シュラウドを持つ系についても第3章の3.5節で述べたような周期対称構造を持つディスク・ブレード連成系の振動特性が応答曲線に現れていることが分かる。ただし, 表4-4中のB-2モードはブレードのみ振動するモードであるが, 図4-6の計算では励振力を作用させているために, この振動型に対応するピークは応答曲線には現れない。

図4-7に, 図4-6の場合と同様に全周をシュラウドで綴られた系($k_s=10^6$, $\xi_{s_p}=0.5$)に励振力が作用するときの1番目のブレードの先端からやや内側の点($\xi_1=0.4$)の応答を示す。ここでも励振力は1番目のブレード上に作用するものとし, 実線は励振点 $\xi_0=0.4$, 点線は励振点 $\xi_0=0$ の場合を表す。この図からも, 共振振動数は励振点の位置の変化によってほとんど変わらないが, 反共振振動数は励振点の位置により大きく変化することが分かる。

図4-8に, ディスクとブレードの曲げこわさ比 ε を変化させたときの, シュラウドを持たない系の応答曲線を示す。励振点及び応答変位の観測点は図4-4の場合と同じである。この図から ε が減少するとディスクの主共振振動数はほとんど変わらないが, 他の共振振動数は低い方へ移動することが認められる。これは, ブレード部分の固有振動数パラメータ $\Lambda_p = \rho_{bp} A_p l_p^4 \omega^4 / E_{bp} I_{bp}$ と, ここで用いたディスク・ブレード系のパラメータ Λ との間に

$$\Lambda^4 = \frac{\Lambda_p^4}{\gamma_p \alpha_p^4} \varepsilon_p \quad (4.34)$$

の関係が成り立つことから, ε の減少と共にブレードの主共振振動数パラメータの値が減少するためである。この図より, ε のわずかな変化によってブレードの主共振振動数およびそれに隣接する反共振振動数は共に大きく変化することが分かる。系の応答変位のうち最大のものはブレードの主共振時に生じるが, この関係を用いてブレードの主共振振動数のチューニングを行うことが可能である。

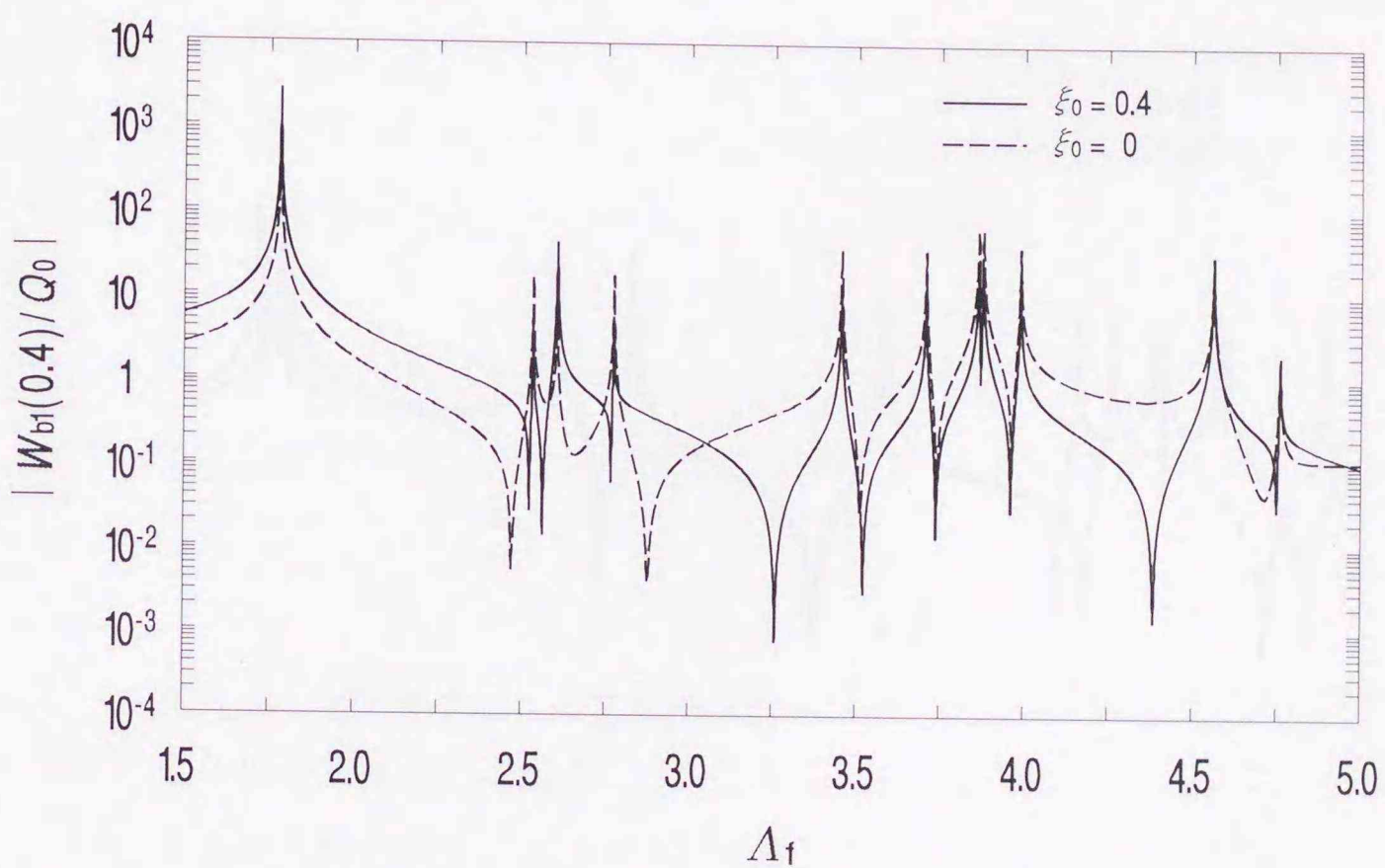


図 4-7 全周にシュラウドを有するディスク・ブレード連成系の
励振点の位置による振動数-応答曲線の変化

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.2 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=10^6$,
 $\xi_{S_p}=0.5$, $\delta_d=\delta_{bp}=10^{-3}$, 観測点: $\xi_1=0.4$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

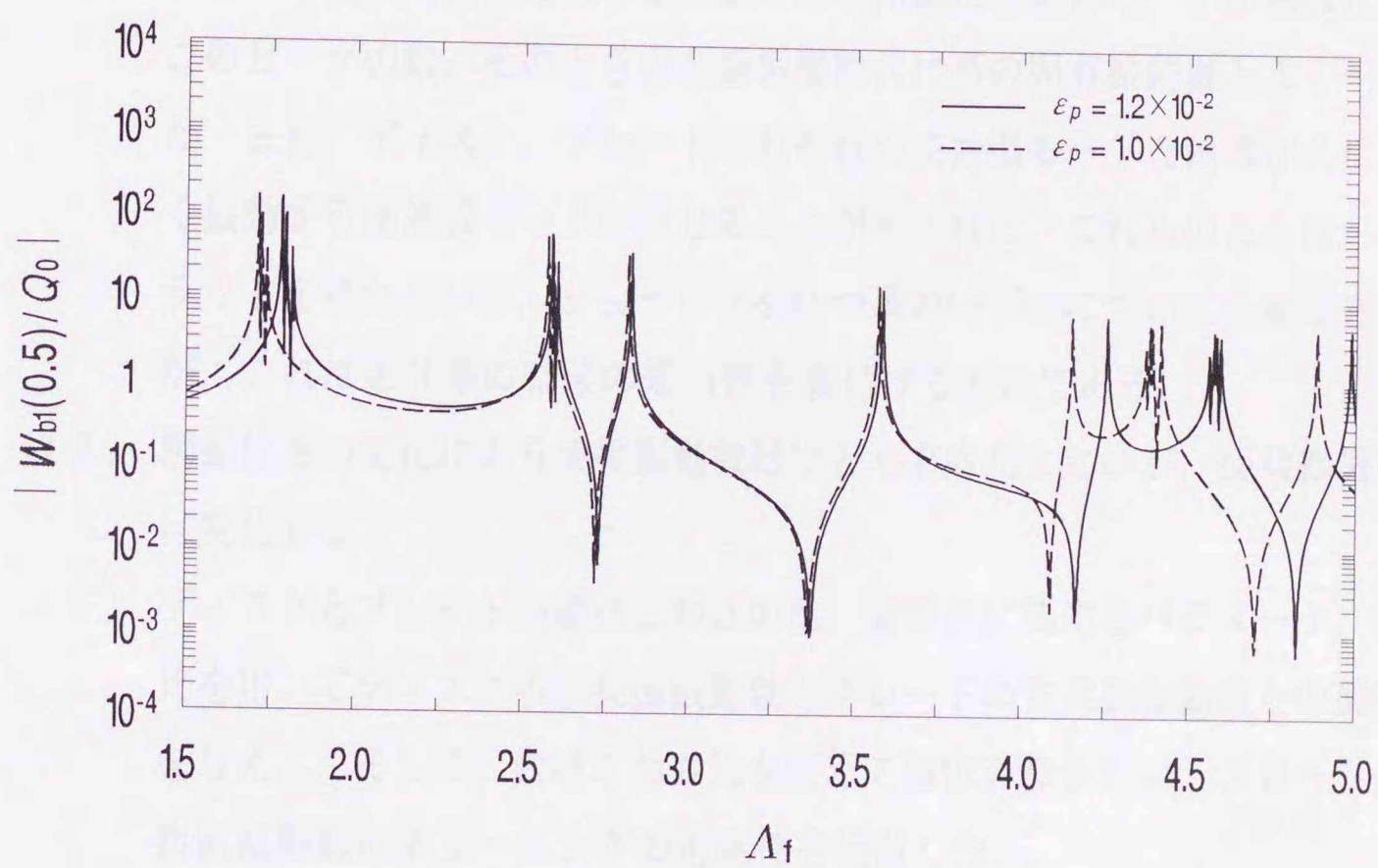


図 4-8 ディスクとブレードの曲げこわさの比による振動数-応答曲線の変化

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\gamma_p=1.3 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{S_p}=0$, $\delta_d=\delta_{b_p}=10^{-3}$,
 励振点: $\eta_0=0.8$, $\theta_0=0$, 観測点: $\xi_1=0.5$, $\nu=0.3$, $M=8$, $N=8$, $R_p=10$ 】

4.4 結 言

本章では、ディスク・ブレード連成系に調和外力が作用するときの系の応答を解析した。解析に当たって、接続条件は接続点に仮想のばねを導入して処理し、各要素の変位は直交性のある関数、特にはり部分には両端自由の境界条件を持つ直交多項式を用いたが、この手法により解析を容易にすることができた。数値例として、8本の同一なブレードが接続された系を取り上げて数値計算を行い、以下のような結果が得られた。

- (1) ブレードの主共振点付近の振動数で応答曲線に複数のピークが現れたが、このピークの数、そのときの共振振動数共に系の固有振動数とよく一致した。また、ディスク、ブレードそれぞれの主共振モードと両者が共に大きく振動する強連成モードが生じることが示された。これらのことは、シュラウドを持たない系、シュラウドを持つ系のいずれについても確認されたが、これは第3章の結果の妥当性を裏付けるものである。
- (2) 励振位置の変化により共振振動数はほとんど変化しないが、反共振振動数は変化する。
- (3) ディスクとブレードの曲げこわさの比、質量比に関するパラメータ、長さ比を用いてディスクの主共振振動数とブレードの主共振振動数との関係式を与えた。そして、曲げこわさ比を変えて数値計算を行い、ブレードの主共振振動数のチューニングの可能性を検討した。

第5章 回転による影響を考慮したディスク・ブレード 連成系の自由振動⁽⁸²⁾

5.1 緒言

前章までの解析では、基本的な形状要素である円板とはりとの接続系としてディスク・ブレード連成系をモデル化し、その振動問題をリッツ法により扱う手法について述べてきた。本章では、実際のタービンシステムにより近いモデルとするため、回転による効果を考慮した解析を行う。すなわち、ディスクとブレードに作用する遠心力によるポテンシャルエネルギーを考えることにより回転の影響を解析に取り込む。

本章ではまず、遠心力によるポテンシャルエネルギーの評価をディスク、ブレードそれぞれについて行い、その表示式を示す。その後、前章までの解析と同様に、接続点に仮想ばねを導入し、直交性のある関数を試験関数に用いたリッツ法により振動数方程式を導く。その際に、本章ではより一般的なタービンディスク・ブレード系のモデルを考え、ディスクの周方向の変位関数を余弦関数と正弦関数の両者を考慮して展開する。前章までの解析では、系にミスチューンが存在する場合を扱う場合、そのミスチューンは基準軸に関して対称に分布する場合のみに限定されていたが、本章ではそのような制限はなく、一般的な不均一が系に存在する場合の取り扱いも可能である。また、ブレードの試験関数とともにディスクの半径方向の試験関数にもグラム・シュミットの直交化法により構成される直交多項式を用いる。これによって前章までの解析に比べて試験関数の計算がより簡単になり、また、より多くのブレードが接続された系に対しても数値計算を安定に実施することが可能となる。

このようにして導かれた振動数方程式を用いて数値計算を行い、固有振動数パラメータ、振動モードを求める。得られた結果の一部について、市販されている有限要素法（FEM）ソフト（NISA II）による計算結果との比較を行い、本解

析法の妥当性を確認するとともに本解析法が非常に計算効率の高い手法であることを示す。また、回転速度やブレードの本数、シュラウドの有無などなど、さまざまな条件を変化させて数値計算を行い、それらが振動数、振動モードに与える影響について考察を行う。

さらに、本章ではシュラウドの質量を考慮した解析も行い、そのような場合でも直交多項式の構成には特別の技巧は不要であり、また直交性も完全に満たされることを示す。そして、シュラウドの質量や取り付け位置などが振動数パラメータに及ぼす影響についても調べる。

5.2 回転による遠心応力のポテンシャルエネルギー

図5-1に本章で扱うディスク・ブレード連成系を示す。これまでと同様にディスクは外半径 a 、内半径 b 、厚さ h の有孔円板、ブレードは長さ l_p の長方形断面のはりであり、座標系はディスクの中心に原点を持つ $O_d-r\theta z$ と p 番目のブレードの中心に原点を持つ $O_p-x_pz_p$ をとる。ただし本章では、ブレードがディスクの面に対して角度 ϕ_p 傾いて取り付けられているものとする。この取り付け角 ϕ_p は Z_p 軸（ z 軸と平行）と z_p 軸のなす角である。ここで考えるディスクの変位 w_d 、 p 番目のブレードの変位 w_{bp} はそれぞれ z 、 z_p 方向のみに生じるものとする。また、系は z 軸のまわりに一定の角速度 Ω [rad/sec]で回転しているものとする。本章では、回転によるポテンシャルエネルギーのうち、ディスク部分に蓄えられる分については、簡単のため一様な軸対称円板に対するものを用いることとし、ブレード部分についてはディスクの外周に取り付けられて回転するはりに対するものを用いる。そこで本節では以下に、回転するディスク（ブレードを持たない一様な軸対称円板）に蓄えられるポテンシャルエネルギーと、ディスクの外周に取り付けられて回転するブレードに蓄えられるポテンシャルエネルギーの導出を行う。

5.2.1 回転するディスクに蓄えられる遠心応力のポテンシャルエネルギー

一様で軸対称なディスクが平面を保ったまま水平面内で回転するときに、ディスク面内に生じる半径方向および周方向の遠心応力をそれぞれ σ_r 、 σ_θ とする。

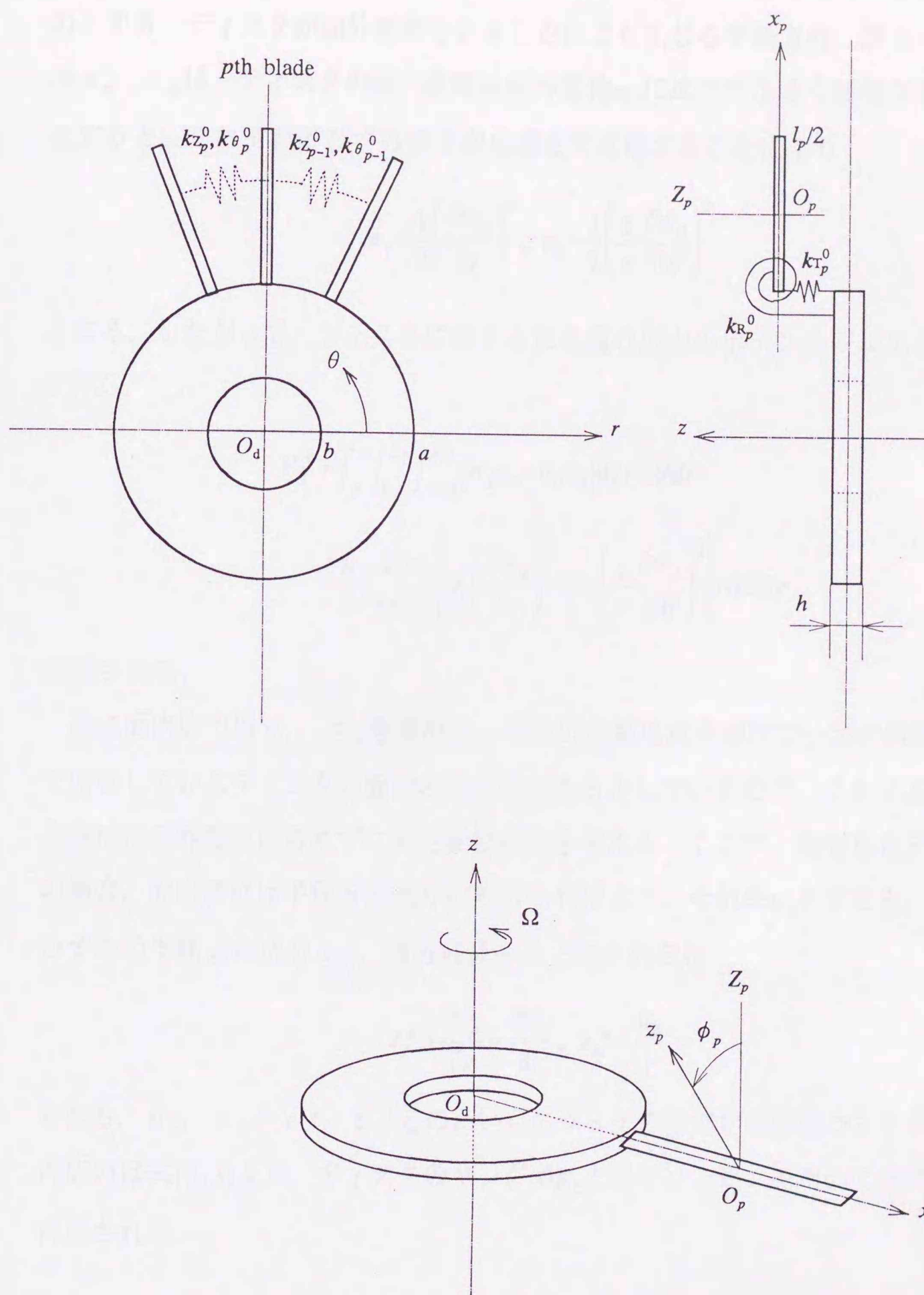


図5-1 回転するディスク・ブレード連成系と座標系

いま、これらの応力が作用する場の下で、このディスクが面外方向に振動するものとする。ディスクが面外変位をすることにより生じる半径方向、周方向のひずみ ε_r , ε_θ は、ディスクの面内変位は面外変位 w_d に比べて小さく無視できるものとする、それぞれのひずみの2次の項まで考慮することにより

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_d}{\partial \theta} \right)^2 \quad (5.1)$$

となる。したがって、ディスクに蓄えられる遠心応力のポテンシャルエネルギー V_d^0 は

$$\begin{aligned} V_d^0 &= \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta) dz r d\theta dr \\ &= \frac{h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left[\sigma_r \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_d}{\partial \theta} \right)^2 \right] r d\theta dr \end{aligned} \quad (5.2)$$

と表される。

次に面内応力場 σ_r , σ_θ を求める。この応力場は水平面内で一定の回転速度 Ω で回転しているディスクの面内の応力場であるとしているので、これらを求めるときには面外変位は考えずに面内変位のみを考える。ここで、軸対称なディスクの場合、面内変位は半径方向成分のみ考えればよく、それを u_d とすると、面内のひずみの半径方向成分 ε_r^s , 周方向成分 ε_θ^s はそれぞれ

$$\varepsilon_r^s = \frac{\partial u_d}{\partial r} = \frac{du_d}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^s = \frac{u_d}{r} \quad (5.3)$$

となる。 σ_r , σ_θ と ε_r^s , ε_θ^s とのあいだにフックの法則が成り立つとすると、面内応力は式(5.3)より、ディスクのヤング率 E_d とポアソン比 ν を用いて次式のように表される。

$$\sigma_r = \frac{E_d}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{u_d}{r} + \frac{du_d}{dr} \right) \quad (5.4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_d}{1-\nu^2} \left(\frac{u_d}{r} + \nu \frac{du_d}{dr} \right) \quad (5.5)$$

また、このときの半径方向の応力の平衡方程式は次式のように書ける。

$$\frac{d}{dr}(hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho_d r^2 \Omega^2 = 0 \quad (5.6)$$

式(5.4), (5.5)を式(5.6)に代入し, ディスクの板厚は一定であるとして整理すると次式のような u_d に関する微分方程式が得られる.

$$r^2 \frac{d^2 u_d}{dr^2} + r \frac{du_d}{dr} - u_d = -\frac{1-\nu^2}{E_d} \rho_d r^3 \Omega^2 \quad (5.7)$$

この方程式の一般解は定数 C_1 を C_2 用いて次式のように求められる.

$$u_d = C_1 r + C_2 r^{-1} - \frac{1-\nu^2}{8E_d} \Omega^2 \rho_d r^3 \quad (5.8)$$

ここで, C_1, C_2 はディスクの内周と外周における境界条件によって定められる定数である.

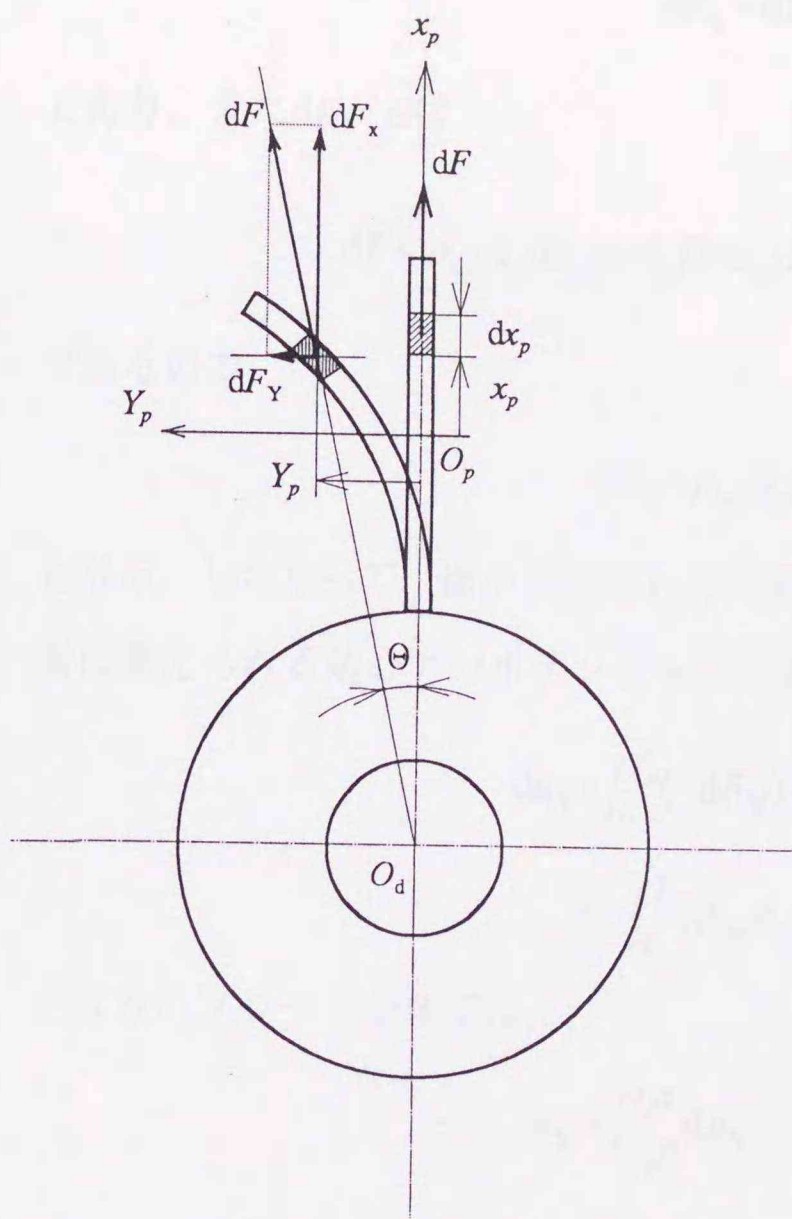
5.2.2 回転するブレードに蓄えられる遠心応力のポテンシャルエネルギー

本節ではCarnegie⁽⁸³⁾により提示されている方法に従って, 回転するブレードに対する遠心力によるポテンシャルエネルギーの導出を行う. 図5-2に, 半径 a のディスクの外周部に取り付けられて一定の回転速度 Ω で回転する p 番目のブレードの変形状態を示す. ここで, 座標系 $O_p-x_p Y_p Z_p$ は Z_p 軸がディスクの z 軸方向と一致するようにとった座標系である. ブレード上の x_p の位置に微小要素 dx_p を考え, この微小要素に作用する遠心力を dF とする. 図5-2(b)より, ブレードが Z_p 方向に変位するときには, dF は x_p 軸に平行なままなのでこの力の Z_p 方向成分は0であり, 遠心力は微小要素に対して仕事をしない. したがって, この微小要素に蓄えられるポテンシャルエネルギーの Z_p 方向成分 du_z は0となるので, ブレード全体に蓄えられるポテンシャルエネルギーの Z_p 方向成分 u_z も0で

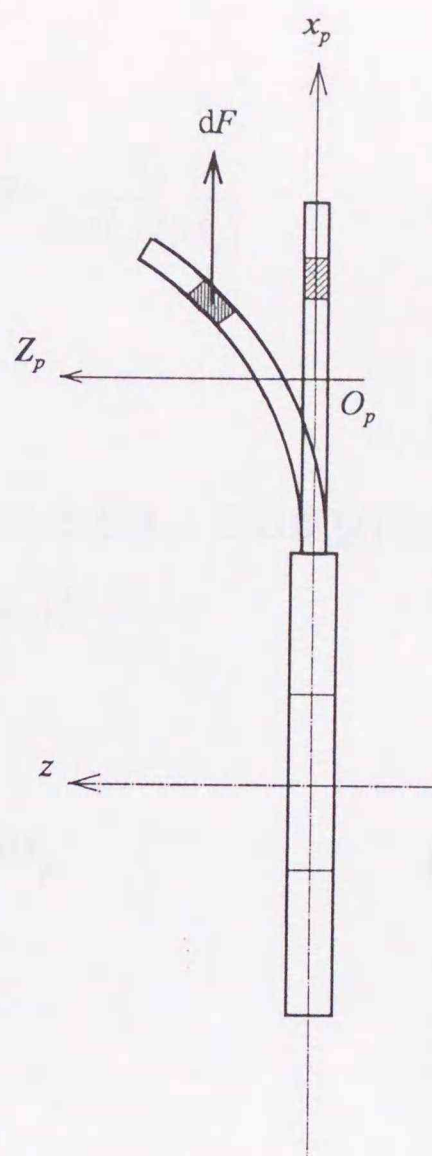
$$u_z = 0 \quad (5.9)$$

となる.

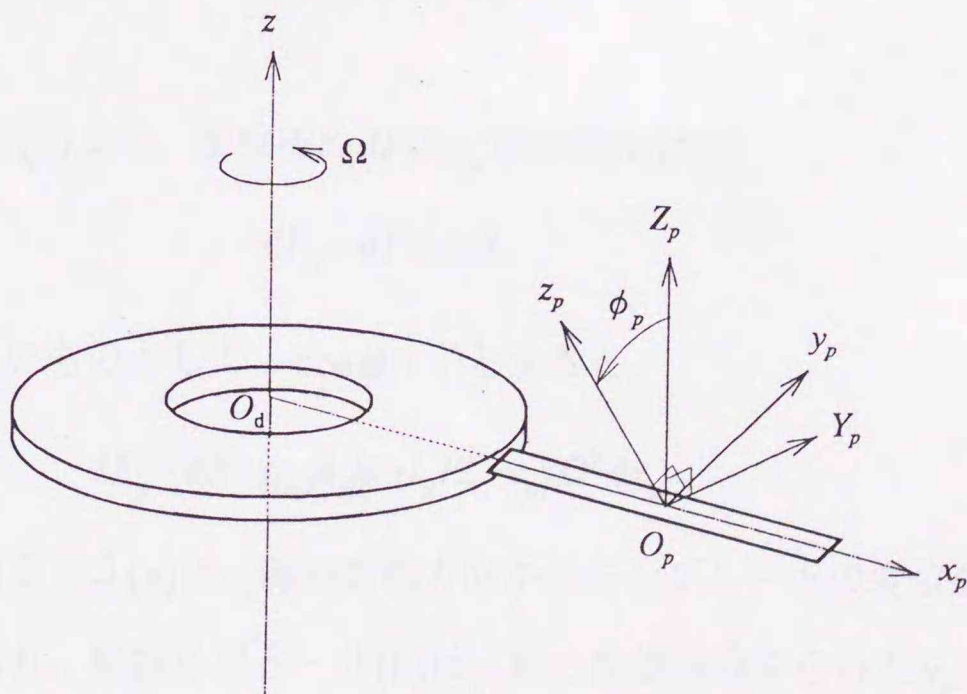
次に, ブレードが Y_p 方向に変位するときには, dF の Y_p 方向成分 dF_y は



(a) x_p - Y_p 平面での変位



(b) x_p - Z_p 平面での変位



(c) 回転するブレードの座標系

図5-2 ディスクに取り付けられて回転するブレードの変位と座標系

$$dF_Y = dF \sin \Theta \quad (5.10)$$

であり、また dF , Θ は

$$dF = \rho_{bp} A_p dx_p (a + l_p/2 + x_p) \Omega^2, \quad \sin \Theta = \frac{Y_p}{(a + l_p/2 + x_p)} \quad (5.11)$$

であるので

$$dF_Y = \rho_{bp} A_p \Omega^2 Y_p dx_p \quad (5.12)$$

となる。したがって、微小要素の Y_p 方向変位が Y_p であるとき、この変位により要素に蓄えられる遠心力のポテンシャルエネルギー du_Y は

$$\begin{aligned} du_Y &= \int_0^{Y_p} (-dF_Y) dY_p \\ &= - \int_0^{Y_p} (\rho_{bp} A_p \Omega^2 dx_p) Y_p dY_p \end{aligned} \quad (5.13)$$

となり、ブレード全体では

$$\begin{aligned} u_Y &= \int_{-l_p/2}^{l_p/2} du_Y \\ &= - \frac{1}{2} \rho_{bp} A_p \Omega^2 \int_{-l_p/2}^{l_p/2} Y_p^2 dx_p \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。

さらに、図 5-2 (a) より、変位後の dF の x_p 方向成分 dF_x は

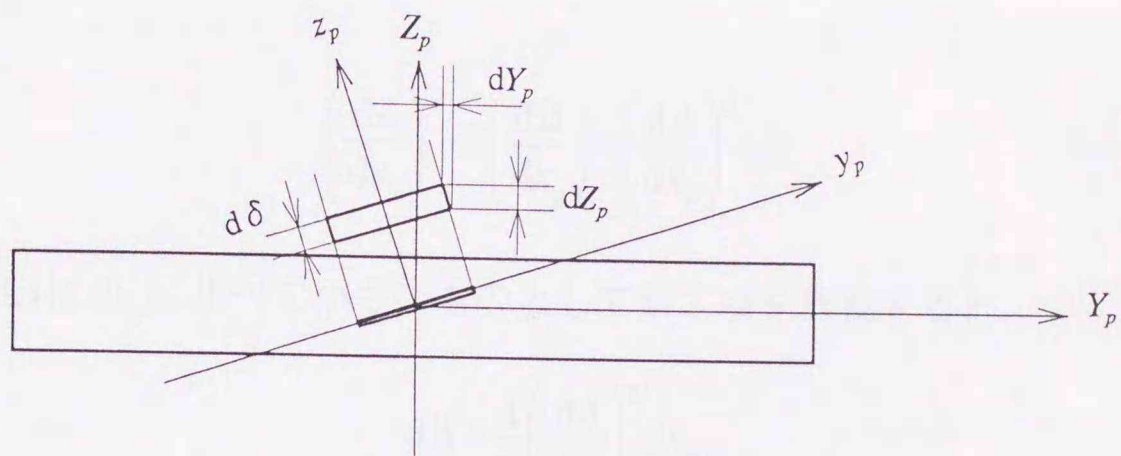
$$dF_x = dF \cos \Theta \quad (5.15)$$

であるが、 Θ は小さいものとして、 $\cos \Theta \approx 1$ とすると、

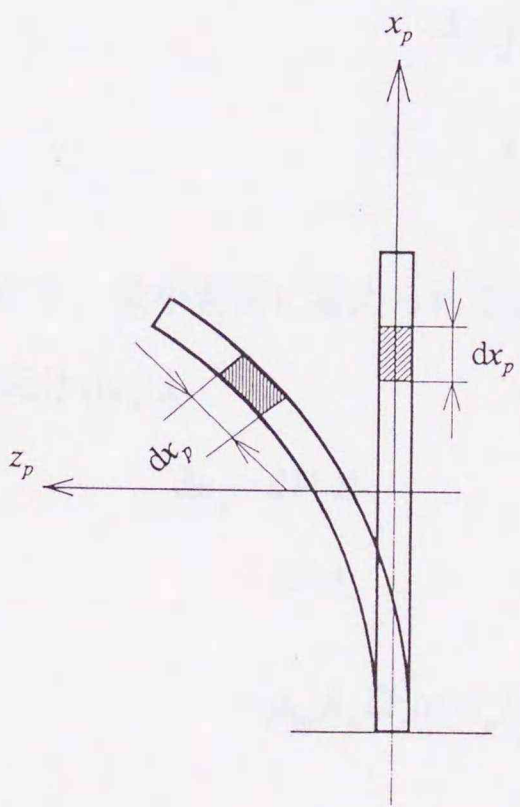
$$dF_x = dF = \rho_{bp} A_p (a + l_p/2 + x_p) \Omega^2 dx_p \quad (5.16)$$

となる。ここで、図 5-3 (a) は x_p 軸の始端方向からみたブレードの変位の Y_p - Z_p 平面への投影図であり、同様に図 5-3 (b) は y_p 軸の先端方向からみた x_p - z_p 平面への投影図、そして図 5-3 (c) は図 5-3 (b) において微小要素の変位前と変位後の状態を始点を合わせて示したものであるが、この図 5-3 (a) より

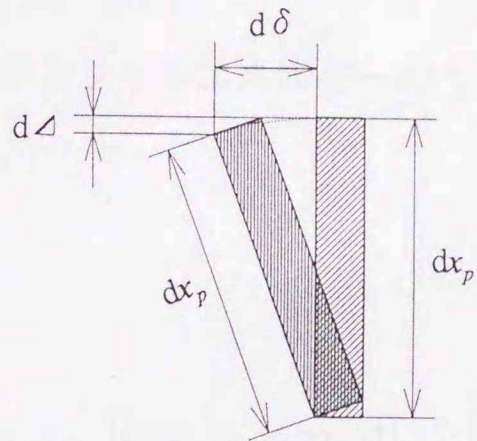
$$(d\delta)^2 = (dY_p)^2 + (dZ_p)^2 \quad (5.17)$$



(a) Y_p - Z_p 平面



(b) x_p - z_p 平面



(c) 微小要素の始点を合わせる

図5-3 ブレードの微小要素の変位

また、図 5-3(c)より

$$\begin{aligned} (dx_p)^2 &= (d\delta)^2 + (dx_p - d\Delta)^2 \\ &= (d\delta)^2 + (dx_p)^2 - 2dx_p d\Delta + (d\Delta)^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

したがって

$$\left(\frac{d\delta}{dx_p}\right)^2 - 2\left(\frac{d\Delta}{dx_p}\right) + \left(\frac{d\Delta}{dx_p}\right)^2 = 0 \quad (5.19)$$

ここで、 $d\Delta$ は dx_p に比べて小さいものとして第3項を無視すると、

$$d\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta}{dx_p}\right)^2 dx_p \quad (5.20)$$

を得る。したがって、 x_p の位置にある微小要素の x_p 軸方向の変位 Δ は、

$$\begin{aligned} \Delta &= \int d\Delta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l_p/2}^{x_p} \left[\left(\frac{\partial Y_p}{\partial x_p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial x_p}\right)^2 \right] dx_p \end{aligned} \quad (5.21)$$

となり、微小要素に蓄えられる遠心力のポテンシャルエネルギーのうちこの Δ による成分 du_x は、

$$\begin{aligned} du_x &= dF_x \Delta \\ &= dF \Delta \\ &= \rho_{bp} A_p \Omega^2 (a + l_p/2 + x_p) dx_p \left\{ \frac{1}{2} \int_{-l_p/2}^{x_p} \left[\left(\frac{\partial Y_p}{\partial \bar{x}_p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial \bar{x}_p}\right)^2 \right] d\bar{x}_p \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

となる。したがって、ブレード全体では、

$$u_x = \frac{1}{2} \rho_{bp} A_p \Omega^2 \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) \left\{ \int_{-l_p/2}^{x_p} \left[\left(\frac{\partial Y_p}{\partial \bar{x}_p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial \bar{x}_p}\right)^2 \right] d\bar{x}_p \right\} dx_p \quad (5.23)$$

となる。

以上より、 p 番目のブレード全体に対して回転により生じる遠心力のポテンシャルエネルギー V_{bp}^0 は

$$V_{bp}^0 = u_x + u_Y + u_Z$$

$$= \frac{\rho_{bp} A_p \Omega^2}{2} \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) \left\{ \int_{-l_p/2}^{x_p} \left[\left(\frac{\partial Y_p}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 \right] d\bar{x}_p \right\} - Y_p^2 \right] dx_p \quad (5.24)$$

となる。ここでは、ブレードの変位 w_{bp} は z_p 方向のみに生じるとしているので、

$$Y_p = -w_{bp} \sin \phi_p, \quad Z_p = w_{bp} \cos \phi_p \quad (5.25)$$

となり、式(5.24)は

$$V_{bp}^0 = \frac{\rho_{bp} A_p \Omega^2}{2} \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) \int_{-l_p/2}^{x_p} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 d\bar{x}_p - w_{bp}^2 \sin^2 \phi_p \right] dx_p \quad (5.26)$$

となる。ところで

$$\left. \begin{aligned} f &= \int_{x_p}^{l_p/2} \left(a + \frac{l_p}{2} + \bar{x}_p \right) d\bar{x}_p \\ g &= \int_{-l_p/2}^{x_p} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 d\bar{x}_p \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

とし、次式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d(fg)}{dx_p} &= \frac{df}{dx_p} g + f \frac{dg}{dx_p} \\ &= - \left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) g + f \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

すると

$$\begin{aligned} \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \frac{d(fg)}{dx_p} dx_p &= [fg]_{-l_p/2}^{l_p/2} \\ &= - \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) \left[\int_{-l_p/2}^{x_p} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 d\bar{x}_p \right] dx_p \\ &\quad + \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\int_{x_p}^{l_p/2} \left(a + \frac{l_p}{2} + \bar{x}_p \right) d\bar{x}_p \right] \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 dx_p \end{aligned} \quad (5.29)$$

であるが、式(5.27)より

$$\left. \begin{array}{l} f=0 \text{ at } x_p=l_p/2 \\ g=0 \text{ at } x_p=-l_p/2 \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

であるので, [式(5.29)] = 0 となり次式を得る.

$$\begin{aligned} & \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) \left[\int_{-l_p/2}^{x_p} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 d\bar{x}_p \right] dx_p \\ &= \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\int_{x_p}^{l_p/2} \left(a + \frac{l_p}{2} + \bar{x}_p \right) d\bar{x}_p \right] \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 dx_p \\ &= \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\left(a + \frac{l_p}{2} \right) \left(\frac{l_p}{2} - x_p \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{l_p^2}{4} - x_p^2 \right) \right] \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 dx_p \end{aligned} \quad (5.31)$$

これを式(5.26)に用いると, P 本のブレード合計の遠心力のポテンシャルエネルギー V_b^0 は次式のようになる.

$$V_b^0 = \frac{\Omega^2}{2} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left\{ \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 \left[\left(a + \frac{l_p}{2} \right) \left(\frac{l_p}{2} - x_p \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{l_p^2}{4} - x_p^2 \right) \right] - w_{bp}^2 \sin^2 \phi_p \right\} dx_p \quad (5.32)$$

5.3 リッツ法による振動数方程式の導出

5.2 節において導いたディスクとブレードの遠心力によるポテンシャルエネルギーと, 曲げによるひずみエネルギー U^0 , バネによるポテンシャルエネルギー U_s^0 , 運動エネルギー T^0 の式を再び示せば, 本章での解析に必要なエネルギーの表示式は以下のとおりである.

$$U_d^0 = \frac{D_d}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left[(\nabla^2 w_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_d}{\partial r^2} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w_d}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w_d}{r \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] r d\theta dr \quad (5.33)$$

$$U_b^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P E_{bp} I_{bp} \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(\frac{\partial^2 w_{bp}}{\partial x_p^2} \right)^2 dx_p \quad (5.34)$$

$$V_d^0 = \frac{h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left[\sigma_r \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} \right)^2 + \sigma_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_d}{\partial \theta} \right)^2 \right] r d\theta dr \quad (5.35)$$

$$V_b^0 = \frac{\Omega^2}{2} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left\{ \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \right)^2 \left[\left(a + \frac{l_p}{2} \right) \left(\frac{l_p}{2} - x_p \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{l_p^2}{4} - x_p^2 \right) \right] - w_{bp}^2 \sin^2 \phi_p \right\} dx_p \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} U_s^0 = & \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{T_p}^0 (w_d - w_{bp} \cos \phi_p)^2 + k_{R_p}^0 \left(\frac{\partial w_d}{\partial r} - \frac{\partial w_{bp}}{\partial x_p} \cos \phi_p \right)^2 \right]_{\substack{r=a, \theta=\theta_p \\ x_p=-l_p/2}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{Z_p}^0 (w_{bp} \cos \phi_p - w_{b_{p+1}} \cos \phi_{p+1})^2 \right]_{x_p=x_{s_p}, x_{p+1}=x_{s_{p+1}}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left[k_{\theta_p}^0 (w_{bp} \sin \phi_p - w_{b_{p+1}} \sin \phi_{p+1})^2 \right]_{x_p=x_{s_p}, x_{p+1}=x_{s_{p+1}}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$T_d^0 = \frac{\rho_d h}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w_d}{\partial t} \right)^2 r d\theta dr \quad (5.38)$$

$$T_b^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial t} \right)^2 dx_p \quad (5.39)$$

ただし、図5-1に示すように、 U_s^0 の中の $k_{T_p}^0$ 、 $k_{R_p}^0$ はそれぞれ p 番目のブレードとディスクの接続点に導入された変位と回転角の差に比例する仮想ばねのばねこわさであり、 $k_{Z_p}^0$ 、 $k_{\theta_p}^0$ はシュラウドを模擬するために導入されたばねのばねこわさである。このシュラウドのばねこわさ $k_{Z_p}^0$ 、 $k_{\theta_p}^0$ は、図では便宜上ブレードのディスクの面内方向の変位を拘束するかのように描いてあるが、実際にはそれぞれ p 番目のブレードの変位と $p+1$ 番目のブレードの変位の、ディスクの面外方向（ Z_p 方向）成分と面内方向成分のそれぞれの差に比例するばねであり、そのため図5-1左上図では点線で表してある。また、 x_{s_p} 、 $x_{s_{p+1}}$ はシュラウドの位置を表す。

さて、ここで式(5.8)の定数 C_1 、 C_2 を求める。ディスクの外周部分に作用する遠心力とブレードのルート部分における遠心力の合計が等しいものとする、 $r=a$ での境界条件は

$$2\pi ah \sigma_r = \Omega^2 \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p l_p \left(a + \frac{l_p}{2} \right) \quad \text{at } r=a \quad (5.40)$$

となり，またディスクは内周で固定されているので $r=b$ での境界条件は

$$u=0 \quad \text{at } r=b \quad (5.41)$$

となる．これらの境界条件式(5.40)，(5.41)に式(5.4)，(5.8)を代入して C_1 ， C_2 に関して解くと次式を得る．

$$C_1 = \frac{(1-\nu^2) \rho_d \Omega^2}{8E_d [a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)]} \left\{ (3+\nu)a^4 + (1-\nu)b^4 + 4a^2(a^2-b^2) \left[\mu + \frac{1}{2M_d a} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p l_p^2 \right] \right\} \quad (5.42)$$

$$C_2 = -\frac{(1-\nu^2) \rho_d \Omega^2 a^2 b^2}{8E_d [a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)]} \left\{ (3+\nu)a^2 - (1+\nu)b^2 - 4(a^2-b^2) \left[\mu + \frac{1}{2M_d a} \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p l_p^2 \right] \right\} \quad (5.43)$$

ただし， μ はディスクに接続されているブレード全体の質量 M_b とディスクの質量 M_d との比を表しており，次式の関係式で表される無次元量である．

$$\mu = \frac{M_b}{M_d}, \quad M_d = \rho_d \pi h (a^2 - b^2), \quad M_b = \sum_{p=1}^P \rho_{bp} A_p l_p \quad (5.44)$$

ここで，以下の解析を簡単にするために次のような無次元量を導入する．

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r/a, \quad \xi_p = x_p/l_p, \quad \beta = b/a, \quad \alpha_p = l_p/a, \quad \bar{\nabla}^2 = a^2 \nabla^2, \\ W_d(\eta, \theta) \sin \omega t &= w_d(r, \theta, t)/a, \quad W_{bp}(\xi_p) \sin \omega t = w_{bp}(x_p, t)/l_p, \\ (U_d, U_b, V_d, V_b, U_s, T_d, T_b) &= \frac{1}{D_d} (U_d^0, U_b^0, V_d^0, V_b^0, U_s^0, T_d^0, T_b^0), \\ k_{Tp} &= \frac{a^2}{D_d} k_{Tp}^0, \quad k_{Rp} = \frac{1}{D_d} k_{Rp}^0, \quad k_{Zp} = \frac{a^2}{D_d} k_{Zp}^0, \quad k_{\theta p} = \frac{a^2}{D_d} k_{\theta p}^0 \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

ただし ω は系の固有円振動数である．これらを用いて式(5.33)～(5.39)を無次元量で表し，その最大値を求めると次のようになる．

$$U_{d\max} = \frac{1}{2} \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} \left[(\bar{\nabla}^2 W_d)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 W_d}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \eta} + \frac{\partial^2 W_d}{\eta^2 \partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial W_d}{\eta \partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right] \eta d\theta d\eta \quad (5.46)$$

$$U_{b \max} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p^3} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{d^2 W_{bp}}{d\xi_p^2} \right)^2 d\xi_p \quad (5.47)$$

$$V_{d \max} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2}{8} \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} \left\{ S_1 + \frac{S_2}{\eta^2} - (3+\nu)\eta^2 \left[\frac{\partial W_d}{\partial \eta} \right]^2 + \left[S_1 - \frac{S_2}{\eta^2} (1+3\nu)\eta^2 \left[\frac{\partial W_d}{\eta \partial \theta} \right]^2 \right\} \eta d\theta d\eta \quad (5.48)$$

$$V_{b \max} = \frac{1}{2} \Omega_0^2 \sum_{p=1}^P \alpha_p \gamma_p \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \left(\frac{dW_{bp}}{d\xi_p} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \xi_p \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \xi_p^2 \right) \right] - W_{bp}^2 \sin^2 \phi_p \right\} d\xi_p \quad (5.49)$$

$$U_{s \max} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ k\Gamma_p (W_d - W_{bp} \cos \phi_p)^2 + kR_p \left(\frac{\partial W_d}{\partial \eta} - \frac{1}{\alpha_p} \frac{dW_{bp}}{d\xi_p} \cos \phi_p \right)^2 \right\}_{\eta=1, \theta=\theta_p, \xi_p=-1/2} \\ + [kZ_p (W_{bp} \cos \phi_p - W_{bp+1} \cos \phi_{p+1})^2 \\ + k\theta_p (W_{bp} \sin \phi_p - W_{bp+1} \sin \phi_{p+1})^2]_{\xi_p=\xi_{sp}, \xi_{p+1}=\xi_{sp+1}} \quad (5.50)$$

$$T_{d \max} = \frac{1}{2} \Lambda^4 \int_{\beta}^1 \int_0^{2\pi} W_d^2 \eta d\theta d\eta \quad (5.51)$$

$$T_{b \max} = \frac{1}{2} \Lambda^4 \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p \int_{-1/2}^{1/2} W_{bp}^2 d\xi_p \quad (5.52)$$

ただし,

$$\Lambda^4 = \frac{\rho_d h a^4}{D_d} \omega^2, \quad \varepsilon_p = \frac{E_{bp} I_{bp}}{D_d a}, \quad \gamma_p = \frac{\rho_{bp} A_p}{\rho_d h a}, \quad \Omega_0^2 = \frac{\rho_d h a^4}{D_d} \Omega^2 \quad (5.53)$$

$$S_1 = \frac{(1+\nu) \{ [(3+\nu) + (1-\nu) \beta^4] + 4\mu(1-\beta^2) \}}{(1+\nu) + (1-\nu) \beta^2} \quad (5.54)$$

$$S_2 = \frac{(1-\nu) \beta^2 \{ [(3+\nu) - (1+\nu) \beta^2] - 4\mu(1-\beta^2) \}}{(1+\nu) + (1-\nu) \beta^2} \quad (5.55)$$

であり, $W_{bp+1} = W_{b1}$ とする. ここで Λ は系の無次元振動数パラメータであり, ε_p , γ_p はそれぞれ, ディスクと各ブレードの曲げこわさの比, 質量比に関する無次元量である.

次に, ディスクとブレードの変位をそれぞれ次式のように未知係数 A_{mn}^c , A_{mn}^s ,

B_{r_p} を含む級数で近似する.

$$W_d(\eta, \theta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \Phi_m(\eta) [A_{mn}^c \cos n\theta + A_{mn}^s \sin n\theta] \quad (5.56)$$

$$W_{bp}(\xi_p) = \sum_{r_p=1}^{R_p} B_{r_p} \Psi_{r_p}(\xi_p) \quad (5.57)$$

式(5.56)ではディスクの周方向の試験関数には余弦関数と正弦関数の両方を用いており, これにより対称モード, 逆対称モードに加えてそれらに分離できないようなモード形についても表すことができる. また, $\Phi_m(\eta)$, $\Psi_{r_p}(\xi_p)$ には第3章で述べた直交多項式を用いる. これらは第3章で導いた漸化式,

$$F_2(x) = (x - B_2)F_1(x) \quad (5.58)$$

$$F_i(x) = (x - B_i)F_{i-1}(x) - C_i F_{i-2}(x), \quad (i=3, 4, \dots) \quad (5.59)$$

$$B_i = \frac{\int w(x) x F_{i-1}^2 dx}{\int w(x) F_{i-1}^2 dx}, \quad C_i = \frac{\int w(x) x F_{i-1} F_{i-2} dx}{\int w(x) F_{i-2}^2 dx} = \frac{\int w(x) F_{i-1}^2 dx}{\int w(x) F_{i-2}^2 dx} \quad (5.60)$$

において, ディスク部分に対しては, 一定板厚であることを考慮して

$$F_i(x) \equiv \Phi_m(\eta), \quad w(x) \equiv \eta, \quad i \equiv m, \quad x \equiv \eta \quad (5.61)$$

とにおいて得られ, ブレードに対しては断面積一定であるので

$$F_i(x) \equiv \Psi_{r_p}(\xi_p), \quad w(x) \equiv 1, \quad i \equiv r_p, \quad x \equiv \xi_p \quad (5.62)$$

とにおいて得られる. ただし積分区間は, ディスクに対しては $\eta = \beta$ から $\eta = 1$, ブレードに対しては $\xi_p = -1/2$ から $\xi_p = 1/2$ である. また, 開始関数はディスクに対しては内周固定, 外周自由の幾何学的境界条件を満たす関数

$$\Phi_1(\eta) = (\eta - \beta)^2 = \eta^2 - 2\beta\eta + \beta^2 \quad (5.63)$$

とし, ブレード部分には両端が自由の幾何学的境界条件を満たすように

$$\Psi_1(\xi_p) = 1 \quad (5.64)$$

を用いる.

これらの試験関数を用いた式(5.56), (5.57)を式(5.46)～(5.52)に代入し, ラグランジュ関数

$$L=(T_{d \max}+T_{b \max})-(U_{d \max}+U_{b \max}+V_{d \max}+V_{b \max}+U_{s \max}) \quad (5.65)$$

の停留条件

$$\frac{\partial L}{\partial A_{kl}^c}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial A_{kl}^s}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial B_{s_p}}=0, \quad (k=1,2,\dots,M, \quad l=0,1,\dots,N, \quad s_p=1,2,\dots,R_p) \quad (5.66)$$

を用いることにより, 次のような振動数方程式が得られる.

$$\begin{bmatrix} U_{mn}^{cc(kl)} & U_{mn}^{sc(kl)} & U_{r_p}^{c(kl)} \\ U_{mn}^{cs(kl)} & U_{mn}^{ss(kl)} & U_{r_p}^{s(kl)} \\ U_{mn}^{c(s_p)} & U_{mn}^{s(s_p)} & U_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}^c \\ A_{mn}^s \\ B_{r_p} \end{bmatrix} = \Lambda^4 \begin{bmatrix} T_{mn}^{c(kl)} & 0 & 0 \\ 0 & T_{mn}^{s(kl)} & 0 \\ 0 & 0 & T_{r_p}^{(s_p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn}^c \\ A_{mn}^s \\ B_{r_p} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

この一般固有値問題の固有値として系の振動数パラメータ Λ が得られ, 各固有値に対応する固有ベクトルとして未知係数 $\{A_{mn}^c, A_{mn}^s, B_{r_p}\}^T$ が定められる. ここで, 式(5.67)の各係数行列の部分行列の要素は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} U_{mn}^{cc(kl)} = & \Pi_c \int_{\beta}^1 \left\{ \Phi_m'' \Phi_k'' \eta + \nu (\Phi_m'' \Phi_k' + \Phi_m' \Phi_k'') - \nu n^2 \frac{(\Phi_m'' \Phi_k + \Phi_m \Phi_k'')}{\eta} + [1 + 2n^2(1-\nu)] \frac{\Phi_m' \Phi_k'}{\eta} \right. \\ & - (3-2\nu)n^2 \frac{(\Phi_m' \Phi_k + \Phi_m \Phi_k')}{\eta^2} + n^2 [n^2 + 2(1-\nu)] \frac{\Phi_m \Phi_k}{\eta^3} \\ & + \frac{\Omega_0^2}{8} \left\{ S_1 \Phi_m' \Phi_k' \eta + S_2 \Phi_m' \Phi_k' - (3+\nu) \Phi_m' \Phi_k' \eta^3 \right. \\ & \left. \left. + S_1 n^2 \frac{\Phi_m \Phi_k}{\eta} - S_2 n^2 \frac{\Phi_m \Phi_k}{\eta^2} - (1+3\nu) n^2 \Phi_m \Phi_k \eta \right\} \right\} d\eta \\ & + \sum_{p=1}^P \left[k_{T_p} \Phi_m \Phi_k \cos n \theta_p \cos l \theta_p + k_{R_p} \Phi_m' \Phi_k' \cos n \theta_p \cos l \theta_p \right]_{\eta=1} \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$U_{mn}^{sc(kl)} = \sum_{p=1}^P \left[k_{T_p} \Phi_m \Phi_k \sin n \theta_p \cos l \theta_p + k_{R_p} \Phi_m' \Phi_k' \sin n \theta_p \cos l \theta_p \right]_{\eta=1} \quad (5.69)$$

$$U_{mn}^{cs(kl)} = \sum_{p=1}^P \left[k_{T_p} \Phi_m \Phi_k \cos n \theta_p \sin l \theta_p + k_{R_p} \Phi_m' \Phi_k' \cos n \theta_p \sin l \theta_p \right]_{\eta=1} \quad (5.70)$$

$$U_{r_p}^{c(kl)} = - \left[k_{T_p} \Phi_k \Psi_{r_p} \cos \phi_p \cos l \theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{R_p} \Phi'_k \Psi'_{r_p} \cos \phi_p \cos l \theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (5.71)$$

$$U_{mn}^{ss(kl)} = \Pi_s \int_{\beta}^1 \left\{ \Phi''_m \Phi''_k \eta + \nu (\Phi''_m \Phi'_k + \Phi'_m \Phi''_k) - \nu n^2 \frac{(\Phi''_m \Phi_k + \Phi_m \Phi''_k)}{\eta} + [1 + 2n^2(1-\nu)] \frac{\Phi'_m \Phi'_k}{\eta} \right. \\ \left. - (3-2\nu)n^2 \frac{(\Phi'_m \Phi_k + \Phi_m \Phi'_k)}{\eta^2} + n^2 [n^2 + 2(1-\nu)] \frac{\Phi_m \Phi_k}{\eta^3} \right. \\ \left. + \frac{\Omega_0^2}{8} \left\{ S_1 \Phi'_m \Phi'_k \eta + S_2 \Phi'_m \Phi'_k - (3+\nu) \Phi'_m \Phi'_k \eta^3 \right. \right. \\ \left. \left. + S_1 n^2 \frac{\Phi_m \Phi_k}{\eta} - S_2 n^2 \frac{\Phi_m \Phi_k}{\eta^2} - (1+3\nu) n^2 \Phi_m \Phi_k \eta \right\} \right\} d\eta \\ + \sum_{p=1}^P \left[k_{T_p} \Phi_m \Phi_k \sin n \theta_p \sin l \theta_p + k_{R_p} \Phi'_m \Phi'_k \sin n \theta_p \sin l \theta_p \right]_{\eta=1} \quad (5.72)$$

$$U_{r_p}^{s(kl)} = - \left[k_{T_p} \Phi_k \Psi_{r_p} \cos \phi_p \sin l \theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{R_p} \Phi'_k \Psi'_{r_p} \cos \phi_p \sin l \theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (5.73)$$

$$U_{mn}^{c(s_p)} = - \left[k_{T_p} \Phi_m \Psi_{s_p} \cos \phi_p \cos n \theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{R_p} \Phi'_m \Psi'_{s_p} \cos \phi_p \cos n \theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (5.74)$$

$$U_{mn}^{s(s_p)} = - \left[k_{T_p} \Phi_m \Psi_{s_p} \cos \phi_p \sin n \theta_p + \frac{1}{\alpha_p} k_{R_p} \Phi'_m \Psi'_{s_p} \cos \phi_p \sin n \theta_p \right]_{\eta=1, \xi_p=-1/2} \quad (5.75)$$

$$T_{mn}^{c(kl)} = \Pi_c \int_{\beta}^1 \Phi_m \Phi_k \eta d\eta \quad (5.76)$$

$$T_{mn}^{s(kl)} = \Pi_s \int_{\beta}^1 \Phi_m \Phi_k \eta d\eta \quad (5.77)$$

$$T_{r_p}^{(s_p)} = \alpha_p \gamma_p \int_{-1/2}^{1/2} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} d\xi_p \quad (5.78)$$

ここで Π_c , Π_s は

$$\Pi_c \equiv \int_0^{2\pi} \cos n \theta \cos l \theta d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq l) \\ \pi & (n = l \neq 0) \\ 2\pi & (n = l = 0) \end{cases} \quad (5.79)$$

$$\Pi_s \equiv \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin l\theta d\theta = \begin{cases} 0 & (n \neq l) \\ \pi & (n=l \neq 0) \\ 0 & (n=l=0) \end{cases} \quad (5.80)$$

であり, ()'は

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_m &= \frac{d\Phi_m}{d\eta}, \quad \Phi''_m = \frac{d^2\Phi_m}{d\eta^2}, \\ \Psi'_{r_p} &= \frac{d\Psi_{r_p}}{d\xi_p}, \quad \Psi''_{r_p} = \frac{d^2\Psi_{r_p}}{d\xi_p^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.81)$$

を表す. また, 式(5.67)の左辺の部分行列 $[U_{r_p}^{(s_p)}]$ は, 0でない要素を持つブロックを*で表すと

$$[U_{r_p}^{(s_p)}] = \begin{bmatrix} * & * & & & * \\ & * & * & * & \\ & & * & * & * \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & * & * & * \\ * & & & & & & * & * \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

なる形式である. つまり, 対角線とそのすぐ両隣のブロックならびに行列の右上隅と左下隅のブロックに0でない要素を持ち, それ以外の要素が全て0であるような行列である. そのうち, 対角ブロックの要素を $U_{r_p}^{d(s_p)}$, 対角線より上のブロックの要素を $U_{r_p}^{u(s_p)}$, 対角線より下のブロックの要素を $U_{r_p}^{l(s_p)}$ とするとそれらはそれぞれ,

$$\begin{aligned}
U_{r_p}^{d(s_p)} = & \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p^3} \Psi_{r_p}'' \Psi_{s_p}'' + \Omega_0^2 \alpha_p \gamma_p \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_p} + \frac{3}{4} \right) \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' - \left(\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{2} \right) \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \xi_p \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \xi_p^2 - \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \sin^2 \phi_p \right] \right\} d\xi_p \\
& + \left[k_{T_p} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \cos^2 \phi_p + \frac{1}{\alpha_p^2} k_{R_p} \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \cos^2 \phi_p \right]_{\xi_p = -1/2} \\
& + \left[(k_{Z_p} + k_{Z_{p-1}}) \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \cos^2 \phi_p + (k_{\theta_p} + k_{\theta_{p-1}}) \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \sin^2 \phi_p \right]_{\xi_p = \xi_{s_p}} \quad (5.83)
\end{aligned}$$

$$U_{r_p}^{u(s_p)} = - \left[k_{Z_p} \Psi_{r_{p+1}} \Psi_{s_p} \cos \phi_{p+1} \cos \phi_p + k_{\theta_p} \Psi_{r_{p+1}} \Psi_{s_p} \sin \phi_{p+1} \sin \phi_p \right]_{\substack{\xi_p = \xi_{s_p}, \\ \xi_{p+1} = \xi_{s_{p+1}}}} \quad (5.84)$$

$$U_{r_p}^{l(s_p)} = - \left[k_{Z_p} \Psi_{r_{p-1}} \Psi_{s_p} \cos \phi_{p-1} \cos \phi_p + k_{\theta_p} \Psi_{r_{p-1}} \Psi_{s_p} \sin \phi_{p-1} \sin \phi_p \right]_{\substack{\xi_p = \xi_{s_p}, \\ \xi_{p-1} = \xi_{s_{p-1}}}} \quad (5.85)$$

である。ただし、 $\Psi_{r_0} = \Psi_{r_p}$, $k_{Z_0} = k_{Z_p}$, $k_{\theta_0} = k_{\theta_p}$ とする。なお、部分行列 $[T_{mn}^{c(kl)}]$, $[T_{mn}^{c(kl)}]$, $[T_{r_p}^{(sp)}]$ はその要素がそれぞれ直交性を持つため対角行列であり、したがって式(5.67)の右辺の係数マトリクスは完全な対角行列となる。

5.4 ディスクとブレードの連成条件

1 番目のブレードの位置を周方向の基準とし、各ブレードがディスクの外周上に等間隔に接続されているとすると $\theta_p = 2\pi(p-1)/P$ であり、この場合式(5.68), (5.72)のそれぞれの第2項 (Σ のついた項) や式(5.69), (5.70) のような項は、ここでも第3章の3.5節で述べたのと同様に接続されているブレードの本数 P と n , l の組合せによって、いくつかの決まった値のみをとり、連成振動を生じる場合にはその値により振動モードを分類することができる。本章では、周方向変位関数として余弦関数に加えて正弦関数も用いているため、第3章の3.5節の議論を正弦関数を含んだものに拡張する。そしてディスクとブレードの連成振動が生じる場合の P と n , l との組合せとそのときの振動モードとの関係について述べる。

系の構造が周期対称性を満たす場合を考え、 k_{Tp} , k_{Rp} はそれぞれ一定値である
とすると、次の式について考えればよいことになる。

$$f_{cc} \equiv \sum_{p=1}^P \cos n\theta_p \cos l\theta_p = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] + \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] \right\} \quad (5.86)$$

$$f_{ss} \equiv \sum_{p=1}^P \sin n\theta_p \sin l\theta_p = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] - \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] \right\} \quad (5.87)$$

$$f_{sc} \equiv \sum_{p=1}^P \sin n\theta_p \cos l\theta_p = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ \sin \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] + \sin \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] \right\} \quad (5.88)$$

$$f_{cs} \equiv \sum_{p=1}^P \cos n\theta_p \sin l\theta_p = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \left\{ \sin \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] - \sin \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] \right\} \quad (5.89)$$

ここで、対称性より $l \leq n$ の場合のみを考えれば充分である。次の公式⁽⁶⁴⁾

$$\sum_{p=1}^P \cos cp = \cos \frac{c(P+1)}{2} \sin \frac{cP}{2} / \sin \frac{c}{2} \quad (5.90)$$

$$\sum_{p=1}^P \sin cp = \sin \frac{c(P+1)}{2} \sin \frac{cP}{2} / \sin \frac{c}{2} \quad (5.91)$$

を用いて式(5.86)～(5.89)の右辺の各項を変形すると

$$\sum_{p=1}^P \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] = \cos \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} \frac{(P+1)}{2} \right] \sin[\pi(n+l)] / \sin \left[\frac{\pi(n+l)}{P} \right] \quad (5.92)$$

$$\sum_{p=1}^P \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] = \cos \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} \frac{(P+1)}{2} \right] \sin[\pi(n-l)] / \sin \left[\frac{\pi(n-l)}{P} \right] \quad (5.93)$$

$$\sum_{p=1}^P \sin \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} p \right] = \sin \left[\frac{2\pi(n+l)}{P} \frac{(P+1)}{2} \right] \sin[\pi(n+l)] / \sin \left[\frac{\pi(n+l)}{P} \right] \quad (5.94)$$

$$\sum_{p=1}^P \sin \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} p \right] = \sin \left[\frac{2\pi(n-l)}{P} \frac{(P+1)}{2} \right] \sin[\pi(n-l)] / \sin \left[\frac{\pi(n-l)}{P} \right] \quad (5.95)$$

となる。ここで、式(5.94), (5.95)は n, l の組合せによらず常に 0 であり、したがって f_{sc} , f_{cs} も 0 であることが分かる。また、式(5.92), (5.93)から、 k を $0 \leq k$ な

る任意の整数とすると, f_{cc} , f_{ss} は周方向波数成分 n , l の組合せにより次の 3 通りの値をとることが示される.

$$(1) \quad n \pm l = kP \text{ のとき, } f_{cc} = P, f_{ss} = 0.$$

$$(2) \quad n + l = kP \text{ かつ } n - l \neq k'P \text{ のとき, } f_{cc} = f_{ss} = P/2.$$

または, $n + l \neq kP$ かつ $n - l = k'P$ のとき,

$$f = P/2, f_{ss} = -P/2. \quad (k' \text{ は } 0 \leq k' \leq k \text{ なる任意整数})$$

$$(3) \quad n \pm l \neq kP \text{ のとき, } f_{cc} = f_{ss} = 0.$$

これらを満たす n , l の組合せから, ディスクの振動形は接続されるブレードの本数 P に対して次のような $[P/2]+1$ 通り ($[x]$ は x を超えない最大の整数) のグループに分かれることが示される.

(a) P が奇数の場合,

$$n, l = kP \text{ のとき } f_{cc} = P, f_{ss} = 0 \text{ (S 型)}.$$

$$n, l = kP \pm i \text{ のとき } f_{cc} = P/2, f_{ss} = \pm P/2 \text{ (D 型)}. \quad (i = 1, 2, \dots, (P-1)/2)$$

ただし, $0 \leq n, 0 < P-1$.

(b) P が偶数の場合,

$$n, l = kP \text{ のとき } f_{cc} = P, f_{ss} = 0 \text{ (S S' 型)},$$

$$\text{または, } n, l = (2k+1)P/2 \text{ のとき } f_{cc} = P, f_{ss} = 0 \text{ (S A' 型)}.$$

$$n, l = kP \pm i \text{ のとき } f_{cc} = P/2, f_{ss} = \pm P/2 \text{ (D 型)}. \quad (i = 1, 2, \dots, (P-2)/2)$$

ただし, $0 \leq n, 0 < P-2$.

表 5-1 にこれらの結果をまとめて示す. なお, S 型モードは対称軸に関して対称なモードを表し, S', A' はとなりあった 2 本のブレードの間の角度を 2 等分する直径に関して対称, 逆対称なモードを表す. また, D 型モードは縮退したモードである.

表 5-1 ブレードの本数, 周方向波数成分とディスク・ブレード連成系のモード形との関係

P	n, l	f_{cc}	f_{ss}	f_{sc}	f_{cs}	Mode Type
odd	kP	P	0	0	0	symmetrical(S-type)
	$kP \pm i, (i=1, 2, \dots, (P-1)/2, 1 < P)$	$P/2$	$\pm P/2$	0	0	degenerated(D-type)
	another number	0	0	0	0	no coupled vibrations occur
even	kP	P	0	0	0	symmetrical(SS'-type)
	$(2k+1)P/2$	P	0	0	0	symmetrical(SA'-type)
	$kP \pm i, (i=1, 2, \dots, (P-2)/2, 2 < P)$	$P/2$	$\pm P/2$	0	0	degenerated(D-type)
	another number	0	0	0	0	no coupled vibrations occur

5.5 数値計算と考察

ここでは、式(5.67)で与えられる振動数方程式を用いて、周期対称性を有する系に対して数値計算を行う。前章までは無次元化されたパラメータを与えて数値計算を行ってきたが、本章では有限要素法との比較も行うため、その際に用いる入力データを表5-2に示し、特に断らない限りこれらの値を用いて数値計算を行う（前章までの無次元パラメータも、この表に示すような値を想定したものである）。この表から、各無次元パラメータは $\beta=0.3$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174\times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290\times 10^{-2}$ となり、8本のブレードを持つ系の場合、ディスクに対するブレードの質量比は $\mu=3.61\times 10^{-2}$ となる。また、各ブレードは同一でディスクの外周部に等間隔で接続されているものとし、1番目のブレードの取り付け位置は $\theta_1=0$ とする。また、ブレードの取り付け角 ϕ_p は $\phi_p=0$ の場合のみを扱う。

5.5.1 数値計算精度の検討

表5-3にディスクの半径方向の試験関数 Φ_m の項数 M による振動数パラメータ Λ の収束状況を示す。この計算は厳密解との比較を行うためにブレードを持たない一様なディスクについて行った。ここで、表中の m_c , n_d はそれぞれ節円数、節直径数を表している。本章では、ディスクの半径方向の試験関数に直交多項式を用いているが、この表より得られる解の精度、収束性はともに良好であることが分かる。以下の計算では $M=6$ を用いることとする。

表5-4は、ディスクの周方向の試験関数（余弦関数、正弦関数）の項数 N とディスクとブレードの接続点における仮想ばねのばねこわさによるディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ の収束状況を示す。この表から、 N の値による収束状況はモードにより異なることが分かるが、これはモードによって関与する周方向波数成分が異なるためである。この点については次節で考察を行う。以下の計算には $N=32$, $kT_p=kR_p=10^6$ を採用する。なお、ブレードの試験関数 Ψ の項数には第2章2.4.2節の表2-5から判断して、 $R_p=10$ を採用する。

表 5 - 2 計算に用いるディスク・ブレード連成系の形状寸法と材料定数

Disk	Blades ($p=1,2,\dots,P$)
$a=0.5$ [m]	$l_p=0.5$ [m]
$b=0.15$ [m]	$b_p=6.45\times 10^{-3}$ [m]
$h=2.15\times 10^{-3}$ [m]	$h_p=2.15\times 10^{-3}$ [m]
$\rho_d=7.9\times 10^3$ [kg/m ³]	$\rho_{bp}=7.9\times 10^3$ [kg/m ³]
$E_d=2.1\times 10^2$ [GPa]	$E_{bp}=2.1\times 10^2$ [GPa]
$\nu=0.3$	$\phi_p=0$ [deg.]

表5-3 ブレードを持たないディスクの振動数パラメータ Λ の収束状況

【 $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\nu=0.3$ 】

Mode		M				Exact
m_c	n_d	4	5	6	7	
0	1	2.561	2.560	2.560	2.560	2.560
0	0	2.581	2.581	2.581	2.581	2.581
0	2	2.824	2.821	2.821	2.821	2.821
0	3	3.647	3.644	3.644	3.644	3.644
0	4	4.701	4.699	4.698	4.698	4.698
0	5	5.795	5.793	5.793	5.793	5.793

表5-4 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ の収束状況

【 $P=8, \Omega_0=0, \beta=0.3, \mu=3.61 \times 10^{-2}, \phi_p=0, \alpha_p=1, \varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2},$
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}, kZ_p=k\theta_p=0, \nu=0.3, M=6, R_p=10$ 】

Mode	N	$kT_p=kR_p$			
		10^2	10^4	10^6	10^7
SS'-1	8	1.772	1.773	1.773	1.772
	16	1.769	1.770	1.770	1.770
	24	1.767	1.768	1.768	1.768
	32	1.766	1.767	1.767	1.767
	36	1.766	1.767	1.767	1.767
SA'-1	8	1.807	1.808	1.808	1.808
	16	1.802	1.803	1.803	1.802
	24	1.800	1.801	1.801	1.801
	32	1.798	1.799	1.799	1.799
	36	1.797	1.798	1.798	1.798
SS'-2	8	2.601	2.601	2.601	2.601
	16	2.601	2.601	2.601	2.601
	24	2.601	2.601	2.601	2.601
	32	2.601	2.601	2.601	2.601
	36	2.601	2.601	2.601	2.601
SA'-2	8	4.242	4.249	4.249	4.249
	16	4.234	4.242	4.242	4.242
	24	4.231	4.239	4.239	4.239
	32	4.229	4.237	4.237	4.237
	36	4.228	4.236	4.236	4.236

5.5.2 周方向波数成分と固有ベクトルのノルム

図5-4(a)~(y)に、8本のブレードを持つ系の振動数パラメータと対応するディスクの変位関数中の係数 A_{mn}^c 、 A_{mn}^s のノルムを示す。ここでは、シュラウドばねのばねこわさは $kz_p=k\theta_p=0$ ($p=1,2,\dots,8$)とし、回転速度は $\Omega_0=0$ とした。このノルムはディスクの各振動モードにおける周方向波数成分の関与の度合いを示し、

$$\|A_{mn}^c\| = \sum_{m=1}^M |A_{mn}^c|, \quad (n=0,1,\dots,N) \quad (5.96)$$

$$\|A_{mn}^s\| = \sum_{m=1}^M |A_{mn}^s|, \quad (n=1,\dots,N) \quad (5.97)$$

より求められる。ただし、最大値が1となるように正規化してある。また、 h_N はディスク部分と、ブレード部分の固有ベクトルのノルムの最大値の比

$$h_N = \frac{\max_n \{\|A_{mn}^c\|, \|A_{mn}^s\|\}}{\max_p \|B_{r_p}\|} \quad (5.98)$$

ただし、

$$\|B_{r_p}\| = \sum_{r_p=1}^{R_p} |B_{r_p}|, \quad (p=1,2,\dots,P) \quad (5.99)$$

であり、ディスクの振幅とブレードの振幅の大小関係を大まかに知る目安として示してある。この図で、アミを掛けてあるグラフは A_{mn}^c のノルムを表し、アミが掛かっていないグラフは A_{mn}^s のノルムを表している。これらの図より、表5-1に示されるような周方向波数成分どうしのみが各モードに関与していることが分かる。この図で、(a)~(h)は片持ばりとしてのブレードの1次の主振動モード群、(i)~(o)はディスクの主振動モード群、(p)と(y)はディスクとブレードが共に大きく振動する強連成モードであり、(q)~(w)は片持ばりとしてのブレードの2次の主振動モード群である。さらに、(x)は8本のブレードの取り付け位置がディスクの4本の節直径と一致するために連成振動が起らないでディスクのみが振動するモードである。また、本章では余弦関数と正弦関数の両方をディスクの周方向

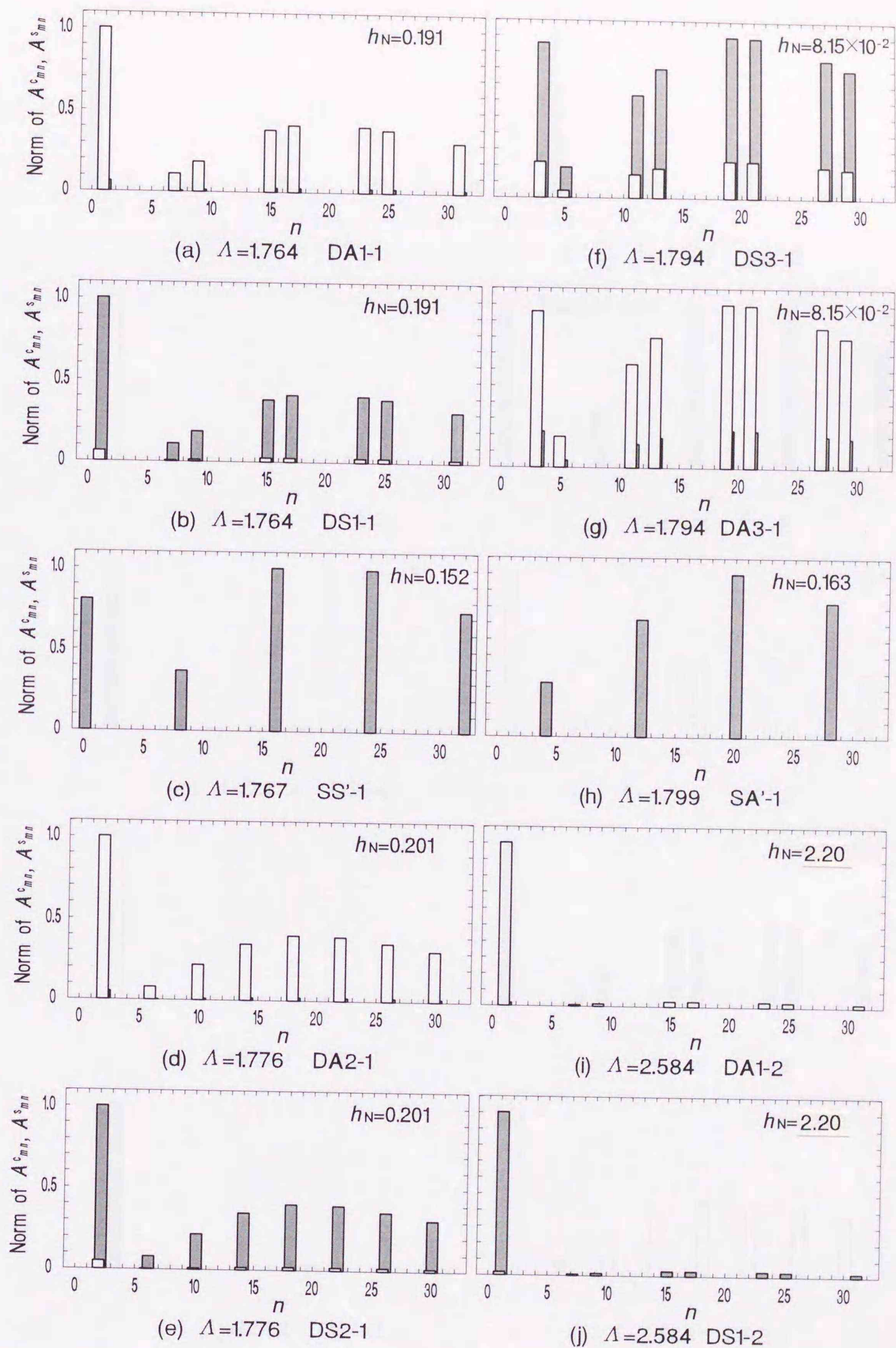


図5-4 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム (ブレード8本, $\Omega_0=0$: その1)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\square$: A_{mn}^c , $\square$: A_{mn}^s 】

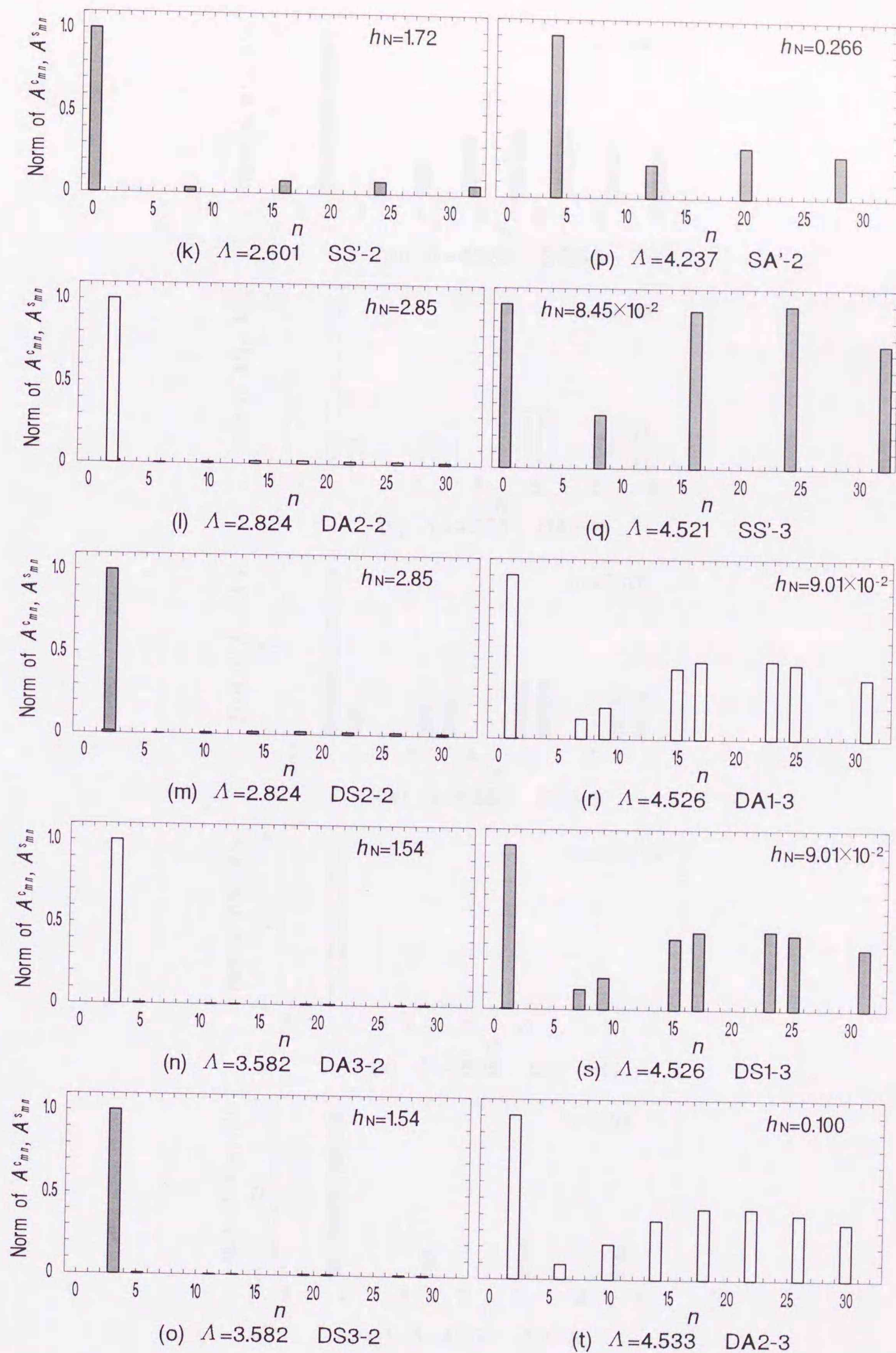


図 5-4 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム (ブレード 8 本, $\Omega_0=0$: その 2)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\blacksquare$: A^c_{mn} , $\square$: A^s_{mn} 】

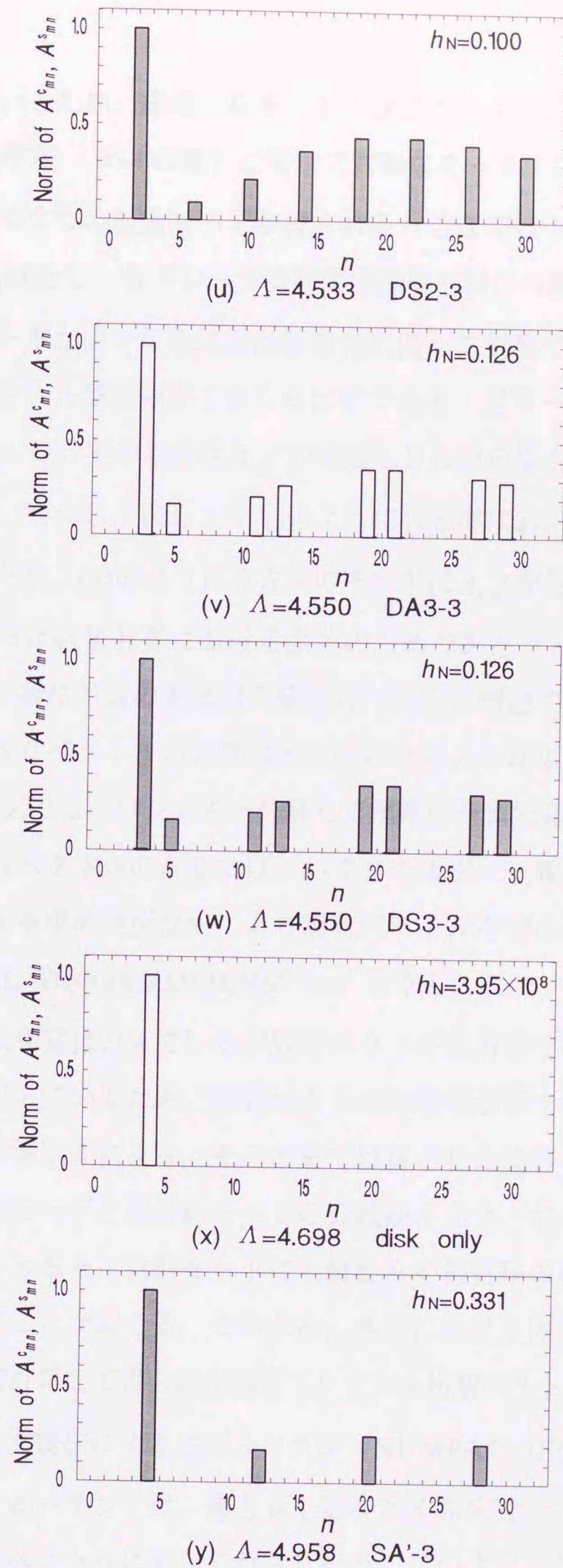


図5-4 ディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム (ブレード8本, $\Omega_0=0$: その3)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\square$: A_{mn}^c , $\square$: A_{mn}^s 】

試験関数に用いているため、縮退したモード（D型モード）には同じ振動数に対して、設定した基準軸（ $\theta=0$ の軸）に関して対称なモード（DS型）と逆対称なモード（DA型）の2つの振動モードが得られる。ここでは1番目のブレードの取り付け位置を $\theta_1=0$ とし、各ブレードは等間隔に取り付けられているとしているため、全てのブレードが同一ならば系は基準軸に関して対称であり、そのため自由振動ではDS型とDA型は独立に生じるはずである。図5-4をみると大部分のD型モードでは、DS型の場合は A_{mn}^c が卓越しDA型の場合は A_{mn}^s が卓越していることが分かる。しかし、図5-4(f)のようにDS型においても A_{mn}^s がかなりの大きさで混入したり、(g)のようにDA型のモードに A_{mn}^c が混入している場合も認められる。これらは数値計算における誤差のためであろうと考えられる。

これに関して、一般に多数の重複固有値を持つ固有値問題を精度よく解くには困難が伴い、また固有ベクトルの計算は固有値の計算より収束性が悪いといわれている⁽⁸⁴⁾⁽⁸⁵⁾。本論文では、コレスキー分解して標準固有値問題に帰着させた係数行列の固有値、固有ベクトルの計算には、ハウスホルダー三重対角化の後に二分法を適用して固有値を求め逆反復法により固有ベクトルを求めるサブルーチンを使用している（MSL-DEIGAB, DEIGRS⁽⁸⁶⁾）。しかし、このサブルーチンでは固有値に対しての収束判定は行っているが固有ベクトルに対しては逆反復法の反復計算を2回で打ち切っているため、固有ベクトルの収束が不十分であることに起因すると思われる計算誤差により、そのままでは得られた固有ベクトルのノルムはD型モードの対称モードと逆対称モードの分離が不完全となる。その場合、振動モード形を描いてみると、対称モードにも関わらず節直径の位置が対称軸からずれるなどといったことが起こる。そのため、本章における固有ベクトルの計算には一度DEIGRSで計算して得られた固有ベクトルを初期ベクトルとして用いて、ジェニングスの同時反復法によるサブルーチン（NUMPAC-JENNFD⁽⁸⁷⁾）を使用している。このサブルーチンでは、繰り返し数を多く指定でき、また収束判定を固有値ではなく固有ベクトルに対して行っている。このような繰り返し計算を行うことによりD型モードの固有ベクトルは図5-4に示されているようにほぼ分離できたが、まだ一部は図5-4(f)と(g)のように完全に分離していないものも残っている。なお、固有値に関してはDEIGRSによる解とJENNFDによる繰り返

し計算後の解とで差はみられなかった。

さらに、図5-4を第3章の図3-2と比べてみると、(i)~(o)のディスクの主振動モードでは対応する節直径数に一致する周方向波数成分のノルムが卓越しているのは同様であるが、それ以外の各モードとも高次の周方向波数成分の関与が大きくなっていることが分かる。この違いはディスクの半径方向試験関数に直交多項式を用いたことから生じたものであるが、そのためにここでは用いる周方向波数成分の数(N の値)を第3章の場合より多くとって $N=32$ としている。なお、第3章でも述べたようにモードごとに関与する周方向波数成分のみ用いれば計算するマトリクスのサイズを縮小することができるが、以下では $n=0\sim 32$ まで全ての成分を用いて計算を行う。

図5-5(a)~(y)に図5-4と同じ系で回転速度が $\Omega_0=5$ の場合の固有ベクトルのノルムを対応する振動数パラメータと h_N の値とともに示す。回転している場合でも各モードに関与する周方向波数成分は表5-1に示されている組合せになっていること、D型モードの A_{mn}^c と A_{mn}^s との分離の状況など、静止の場合(図5-4)と同様の傾向がみられる。ただし回転すると各モードとも振動数パラメータは上昇するが、その上昇の割合がモードごとに異なるためモードの入れ替わりが生じ、例えば静止時にはDA1-1、DS1-1モードが最低次のモードであったのに対し、 $\Omega_0=5$ の場合ではSS'-1モードが最低次の振動モードとなっている。

同様にして、8本のブレードを持ち、各ブレードの先端をシュラウドばねで綴られた系($\xi_{s_p}=0.5$)のディスク部分の固有ベクトルのノルムを図5-6、図5-7に示す。シュラウドばねのばねこわさは $kz_p=k\theta_p=10^6$ とし、図5-6は $\Omega_0=0$ の場合、図5-7は $\Omega_0=5$ の場合である。図5-6(a)はブレードの片持ばりとしての1次の主振動モード、(b)~(h)、(r)~(t)はディスクの主振動モードであり、(i)~(p)はブレードの固定-単純支持ばりとしての1次の主振動モード群、そして(q)のdisk onlyと書かれたモードはディスクの節直径がブレードの取り付け位置と一致するためにディスクのみが振動するモードである。これらの図より、シュラウドを持つ系においても表5-1に示されているような組合せの周方向波数成分のみが各振動モードに関与していることが分かる。また、D型モードの A_{mn}^c と A_{mn}^s

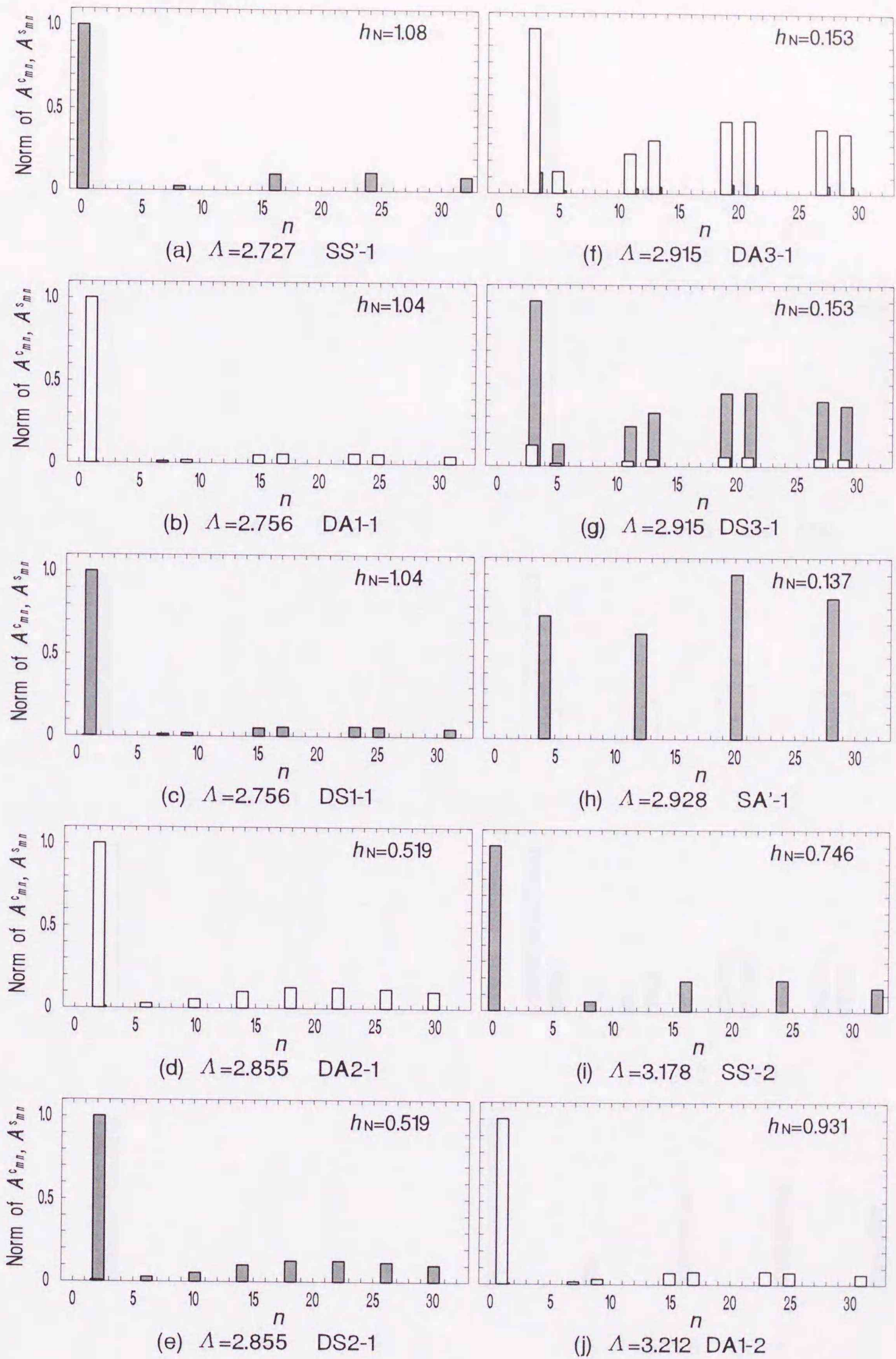


図5-5 回転するディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード8本, $\Omega_0=5$: その1)

【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\blacksquare$: A_{mn}^c , $\square$: A_{mn}^s 】

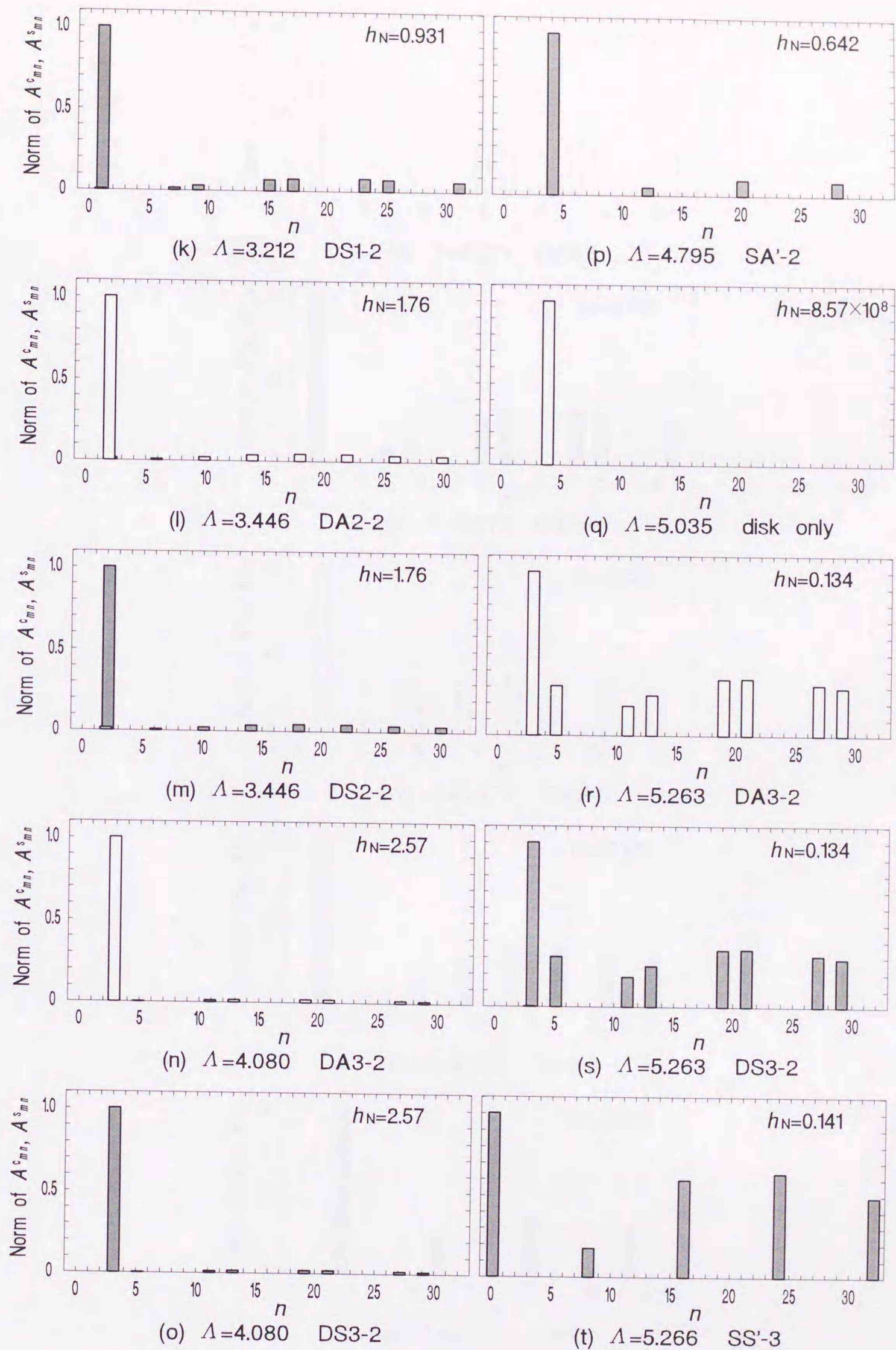
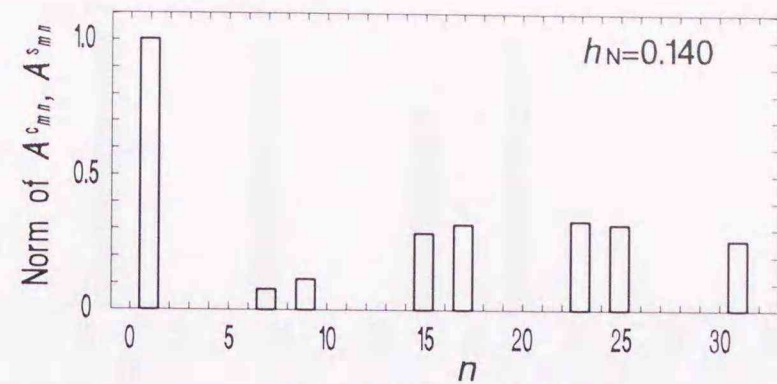
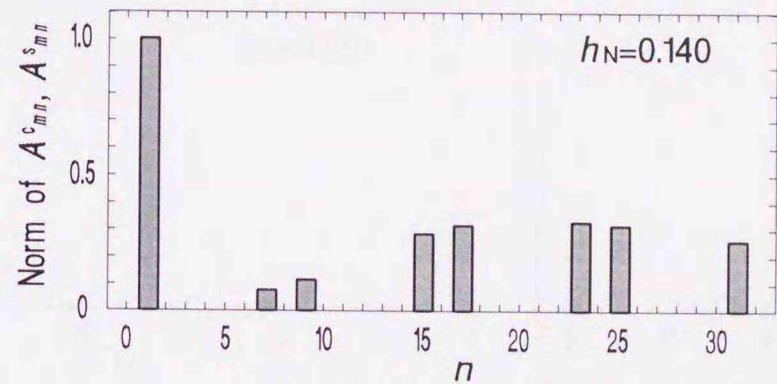


図5-5 回転するディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード8本, $\Omega_0=5$: その2)

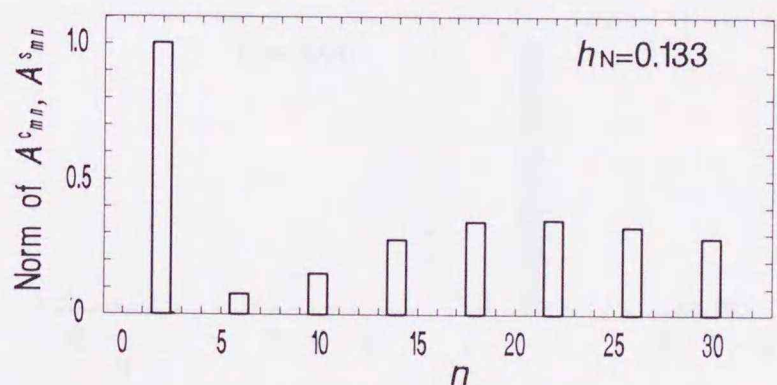
【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, : A_{mn}^c , : A_{mn}^s 】



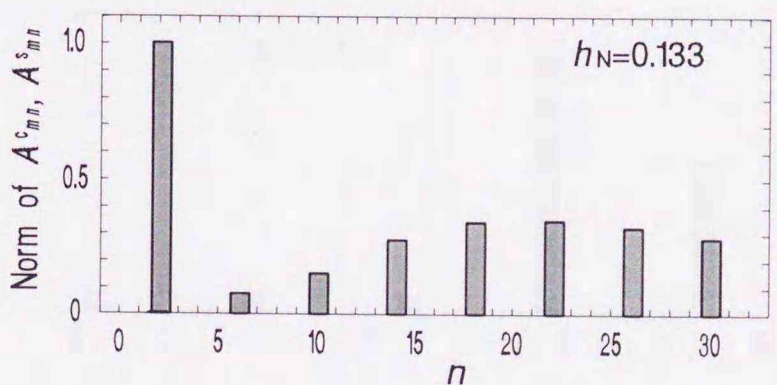
(u) $\Lambda=5.271$ DA1-3



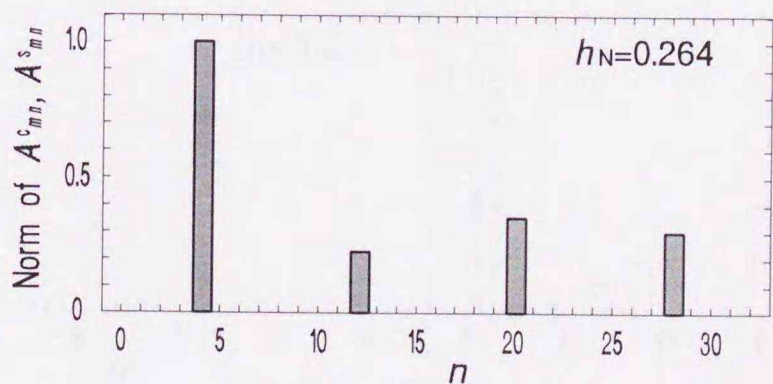
(v) $\Lambda=5.271$ DS1-3



(w) $\Lambda=5.277$ DA2-3



(x) $\Lambda=5.277$ DS2-3



(y) $\Lambda=5.534$ SA'-3

図5-5 回転するディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード8本, $\Omega_0=5$: その3)

【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$,  : A_{mn}^c ,  : A_{mn}^s 】

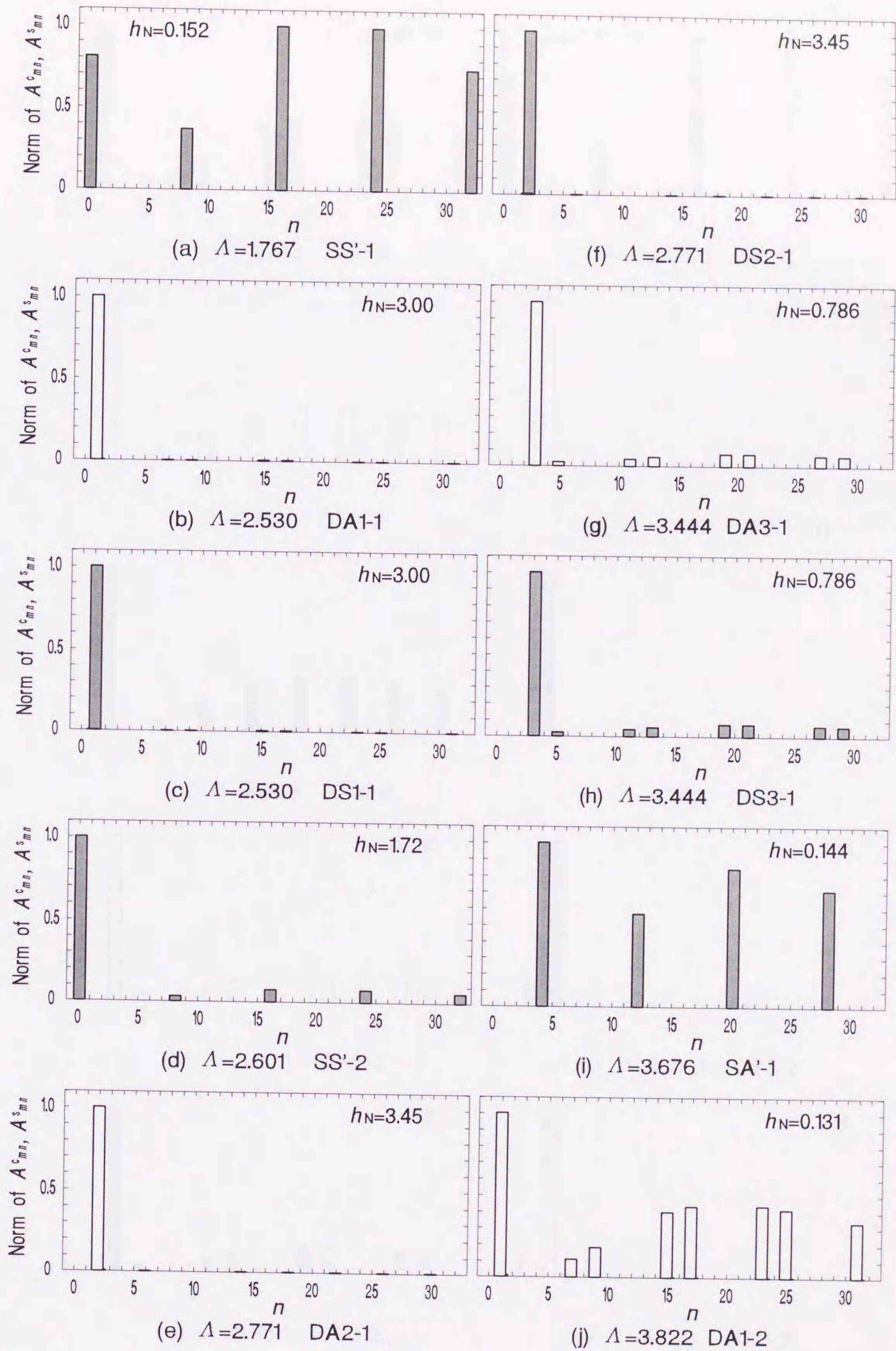


図5-6 全周にシュラウドを有するディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード8本, $\Omega_0=0$: その1)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=10^6$, $\xi_{Sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\text{shaded box} : A_{mn}^c$, $\text{white box} : A_{mn}^s$ 】

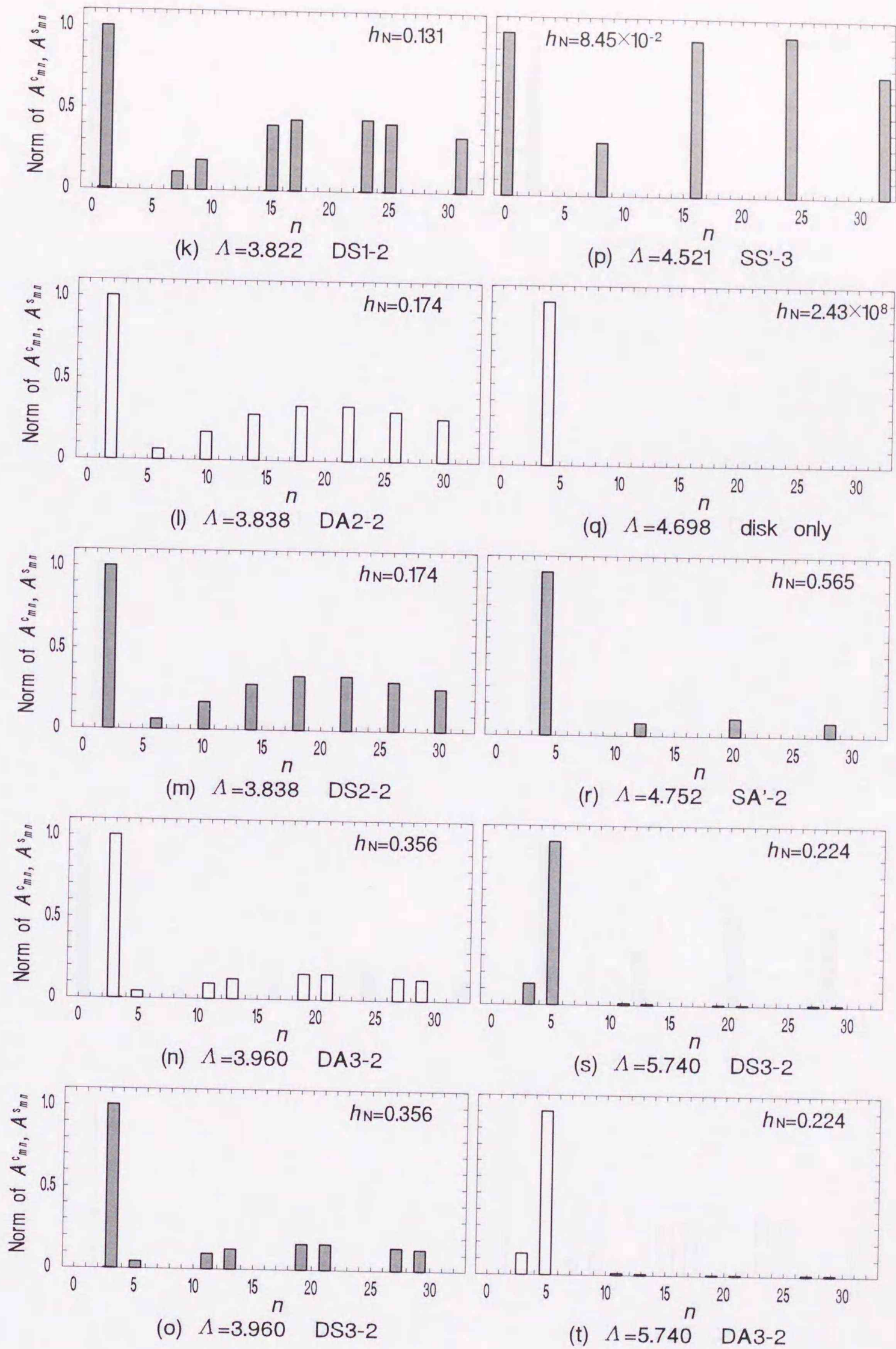


図 5-6 全周にシュラウドを有するディスク・ブレード連成系のディスク部分のノルム
(ブレード 8 本, $\Omega_0=0$: その 2)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=10^6$, $\xi_{Sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\text{hatched box} : A_{mn}^c$, $\text{white box} : A_{mn}^s$ 】

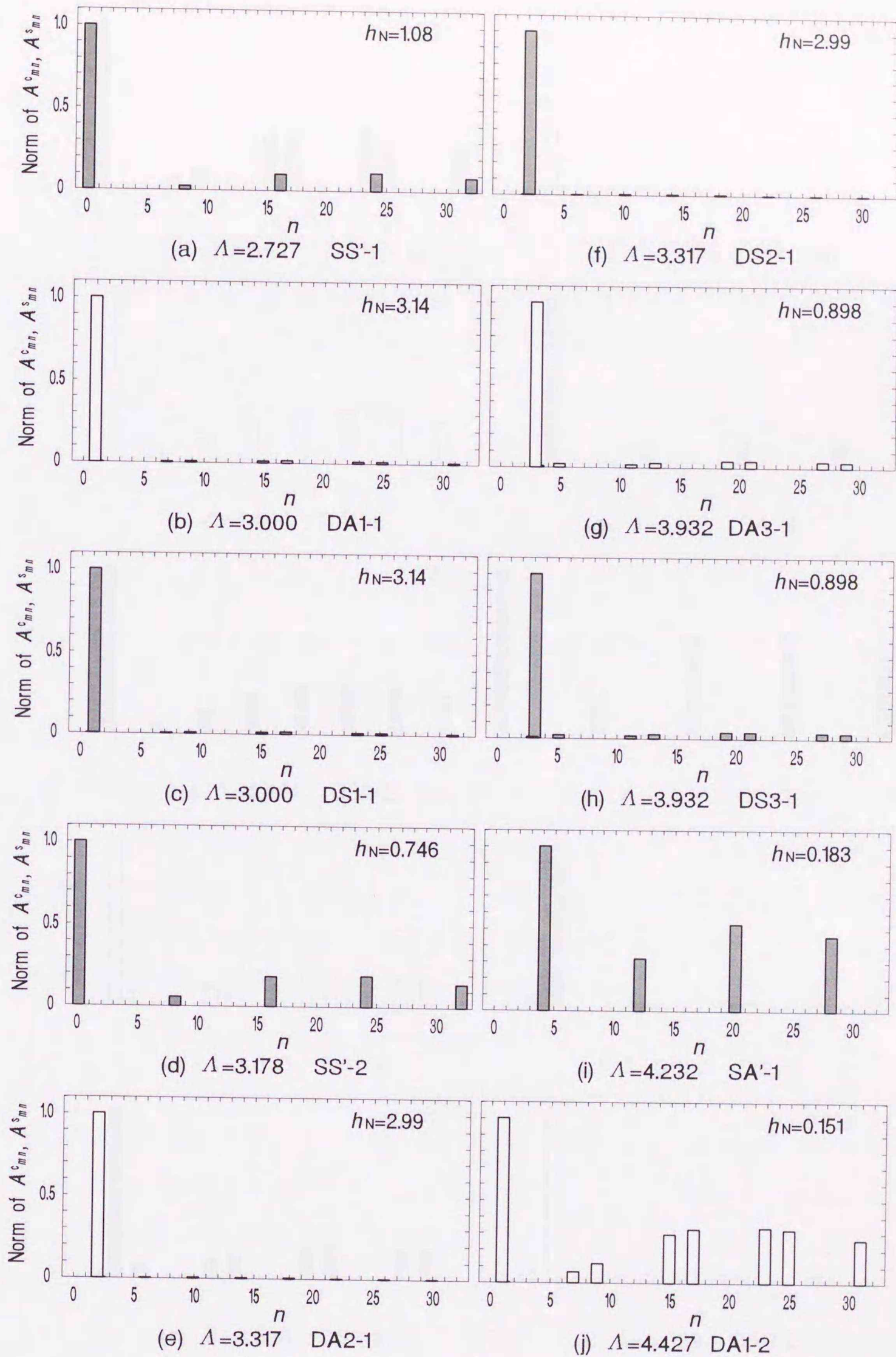


図5-7 全周にシュラウドを持ち、回転するディスク・ブレード連成系の
ディスク部分のノルム（ブレード8本， $\Omega_0=5$ ：その1）

【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=10^6$, $\xi_{sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, : A_{mn}^c , : A_{mn}^s 】

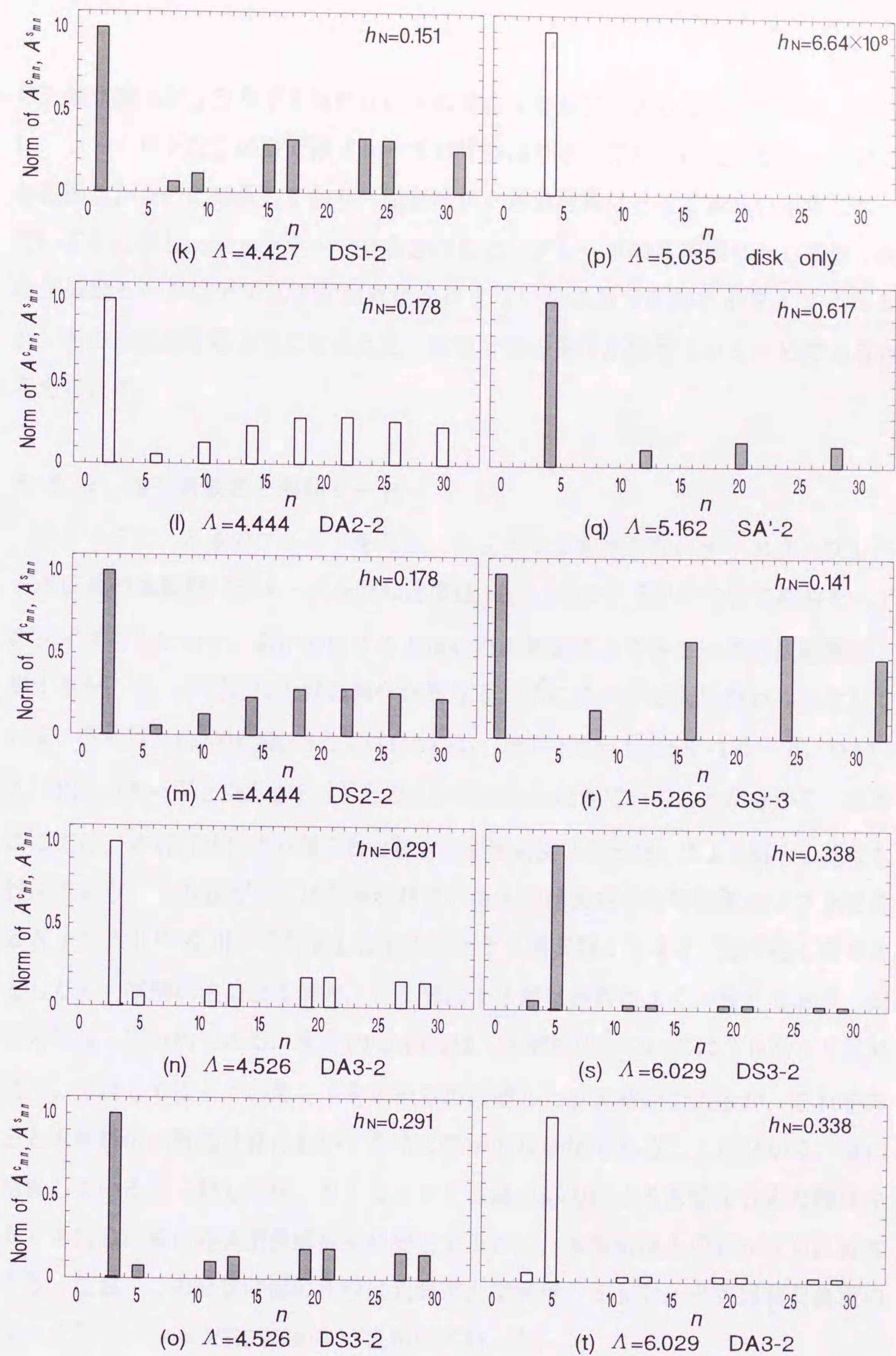


図5-7 全周にシュラウドを持ち、回転するディスク・ブレード連成系の
ディスク部分のノルム (ブレード8本, $\Omega_0=5$: その2)

【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{z_p}=k_{\theta_p}=10^6$, $\xi_{s_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$, $\text{shaded box} : A_{mn}^c$, $\text{white box} : A_{mn}^s$ 】

の分離状況はシュラウドを持たない系の場合より良好であることが分かる。これは、シュラウドなしの系ではブレードの片持ばりとしての1次主振動モード群の各振動数が互いに接近しており、固有ベクトルの計算にとって厳しい条件になっているのに対し、シュラウドで全周を綴ると、ブレードの片持ばりとしての1次の主振動モードはディスクが節直径を持たないかさ型で振動するタイプ（SS'型）とのみ連成するようになるため、数値計算の条件が緩和されるためであると考えられる。

5.5.3 固有振動数と振動モード

表5-5に、8本のブレードを有し、シュラウドを持たないディスク・ブレード連成系の振動数パラメータを回転速度 $\Omega_0=0,3,5$ のそれぞれについて振動モードのタイプごとに示す。系が回転すると遠心力の影響により各モードの振動数は上昇するが、モードごとに上昇の割合が異なるためにモードの入れ替わりが生じている。例えば、 $\Omega_0=0$ と $\Omega_0=3$ とではDA1-1、DS1-1モードとSS'-1モード、DA1-2、DS1-2モードとSS'-2モードとの入れ替わりが起きていることが分かる。またここでは、本解析法により得られた解と有限要素法（FEM）による解との比較も行っており、この表でFEMと書かれているものは汎用の有限要素法ソフトであるNISA II⁽⁸⁸⁾を用いて計算したものである（要素数1344、節点数1544とした）。本解析法による解と、FEMによる解は非常によく一致しており、両者の差は1%以内である。またCPU timeは、本解析法については30次、FEMについては36次までのモードを求めるのに要した計算時間であるが、これを見ると本解析法が数値計算において非常に効率的な手法であることが分かる。特に回転している系に対しては、NISA IIでは遠心応力による影響を含んだ剛性マトリクスの計算に非線型静解析を必要とするため、本解析法との差がさらに拡大する。なお、この計算時間の比較は北海道大学汎用シミュレータ共同利用施設のワークステーションHP9000/755を用いて行った。

表5-6に、8本のブレードを持ち各ブレードの先端を全周にわたって綴られた系の振動数パラメータを回転速度 $\Omega_0=0,3,5$ のそれぞれについて振動モードのタイプごとに示す。表の中でC-F 1st、C-S 1stと書かれた振動数はそれぞれ片持ば

表 5-5 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ の

有限要素法による解との比較

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $kT_p=kR_p=10^6$, $kZ_p=k\theta_p=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

Mode	Ω_0					
	0		3		5	
	Present	FEM	Present	FEM	Present	FEM
DA1-1	1.764	1.762	2.331	2.333	2.756	2.767
DS1-1	1.764	1.762	2.331	2.333	2.756	2.767
SS'-1	1.767	1.765	2.329	2.332	2.727	2.742
DA2-1	1.776	1.774	2.370	2.370	2.855	2.858
DS2-1	1.776	1.774	2.370	2.370	2.855	2.858
DS3-1	1.794	1.792	2.404	2.403	2.915	2.915
DA3-1	1.794	1.792	2.404	2.403	2.915	2.915
SA'-1	1.799	1.797	2.411	2.410	2.928	2.927
DA1-2	2.584	2.588	2.839	2.849	3.212	3.223
DS1-2	2.584	2.588	2.839	2.849	3.212	3.223
SS'-2	2.601	2.605	2.822	2.834	3.178	3.190
DA2-2	2.824	2.826	3.087	3.093	3.446	3.453
DS2-2	2.824	2.826	3.087	3.093	3.446	3.453
DA3-2	3.582	3.585	3.785	3.790	4.080	4.083
DS3-2	3.582	3.585	3.785	3.790	4.080	4.083
SA'-2	4.237	4.253	4.480	4.498	4.795	4.817
SS'-3	4.521	4.553	4.828	4.862	5.266	5.292
DA1-3	4.526	4.555	4.838	4.865	5.271	5.296
DS1-3	4.526	4.555	4.838	4.865	5.271	5.296
DA2-3	4.533	4.563	4.849	4.874	5.277	5.301
DS2-3	4.533	4.563	4.849	4.874	5.277	5.301
DA3-3	4.550	4.578	4.844	4.872	5.263	5.283
DS3-3	4.550	4.578	4.844	4.872	5.263	5.283
disk only	4.698	4.707	4.833	4.831	5.035	5.026
SA'-3	4.958	4.984	5.178	5.206	5.534	5.560
CPU time [sec]	81.2	1089.8	81.3	1522.5	81.3	1538.1

表5-6 全周をシュラウドで綴られたディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $kT_p=kR_p=10^6$, $kZ_p=k\theta_p=10^6$, $\xi_{s_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

Mode	Ω_0			
	0		3	5
	Present	Uniform Beam	Present	Present
SS'-1	1.767	1.838	2.329	2.727
DA1-1	2.530	(C-F 1st)	2.730	3.000
DS1-1	2.530		2.730	3.000
SS'-2	2.601		2.822	3.178
DA2-1	2.771		3.004	3.317
DS2-1	2.771		3.004	3.317
DA3-1	3.444		3.647	3.932
DS3-1	3.444		3.647	3.932
SA'-1	3.676		3.913	4.232
DA1-2	3.822		4.077	4.427
DS1-2	3.822		4.077	4.427
DA2-2	3.838	3.849	4.093	4.444
DS2-2	3.838	(C-S 1st)	4.093	4.444
DA3-2	3.960		4.193	4.526
DS3-2	3.960		4.193	4.526
SS'-3	4.521		4.833	5.266
disk only	4.698		4.828	5.035
SA'-2	4.752		4.910	5.162
DS3-2	5.740		5.850	6.029
DA3-2	5.740		5.850	6.029

り、固定－単純支持ばりの1次固有振動数である。この場合は前節でも述べたように、ブレードが片持ばりとしての1次モードの振動形状で振動するモードがSS'-1モードのみとなる。そして、ブレードが固定－単純支持ばりの1次の振動形で振動するモード群がC-S 1stの固有振動数の付近に生じる。また、この場合でも静止している場合の振動モードの順序が回転することにより入れ替わる現象がみられ、 $\Omega_0=3$ ではSS'-3モードとディスクのみが振動するモードが入れ替わっており、 $\Omega_0=5$ となるとさらにSS'-3モードとSA'-2モードが入れ替わっている。

次に8本のブレードを有する系の振動モードを図5-8～5-11に示す。それぞれの図の各モードは、図5-4～5-7の固有ベクトルに対応したモード形である。ここで、図5-8(a)～(y)はシュラウドなし、回転速度 $\Omega_0=0$ の場合のものであり、図5-9(a)～(y)はシュラウドなし、回転速度 $\Omega_0=5$ の場合のものである。また、図5-10(a)～(t)はシュラウドで各ブレードの先端を全周にわたって綴られた系の回転速度 $\Omega_0=0$ の場合のモード形を示し、図5-11(a)～(t)は同じ系で $\Omega_0=5$ の場合である。図ではディスクの中心を通り紙面の左右方向の水平線を角度の基準軸にとり、ブレードはディスクの右半分の基準軸上にあるものから順に反時計まわりに1,2,...,8としている。ここで、図5-8(f),(g), 図5-9(f),(g)はそれぞれ図5-4(f),(g), 図5-5(f),(g)に示されているように A_{mn}^c と A_{mn}^s の分離状況がよくないモードであるが、本来ならディスクの節直径上にあるはずの1番目と5番目のブレードがわずかに変位していることから節直径の位置がずれていることが分かる。また、回転による振動モード形状への影響はあまりみられず図5-8と5-9のそれぞれ対応するモードの振動形は類似の形状となっている。図5-10, 5-11で、点線は振動していないディスクの面に平行な仮想のリングであり、この仮想リングが各ブレードの先端を通ることから、ブレード先端間の相対的な変位がほとんど0であることが分かる。シュラウドを持つ場合にも回転によるモード形への影響はほとんど認められず、図5-10と図5-11の対応するモードの振動形は類似の形状となっている。

次に、表5-7に8本のブレードを持ちシュラウドのない系の振動数パラメータを低次から順に様々な回転速度について示す。これは最低次のモードから、ブレードが片持ばりとしての2次モードで振動するモード（ディスクとブレードの

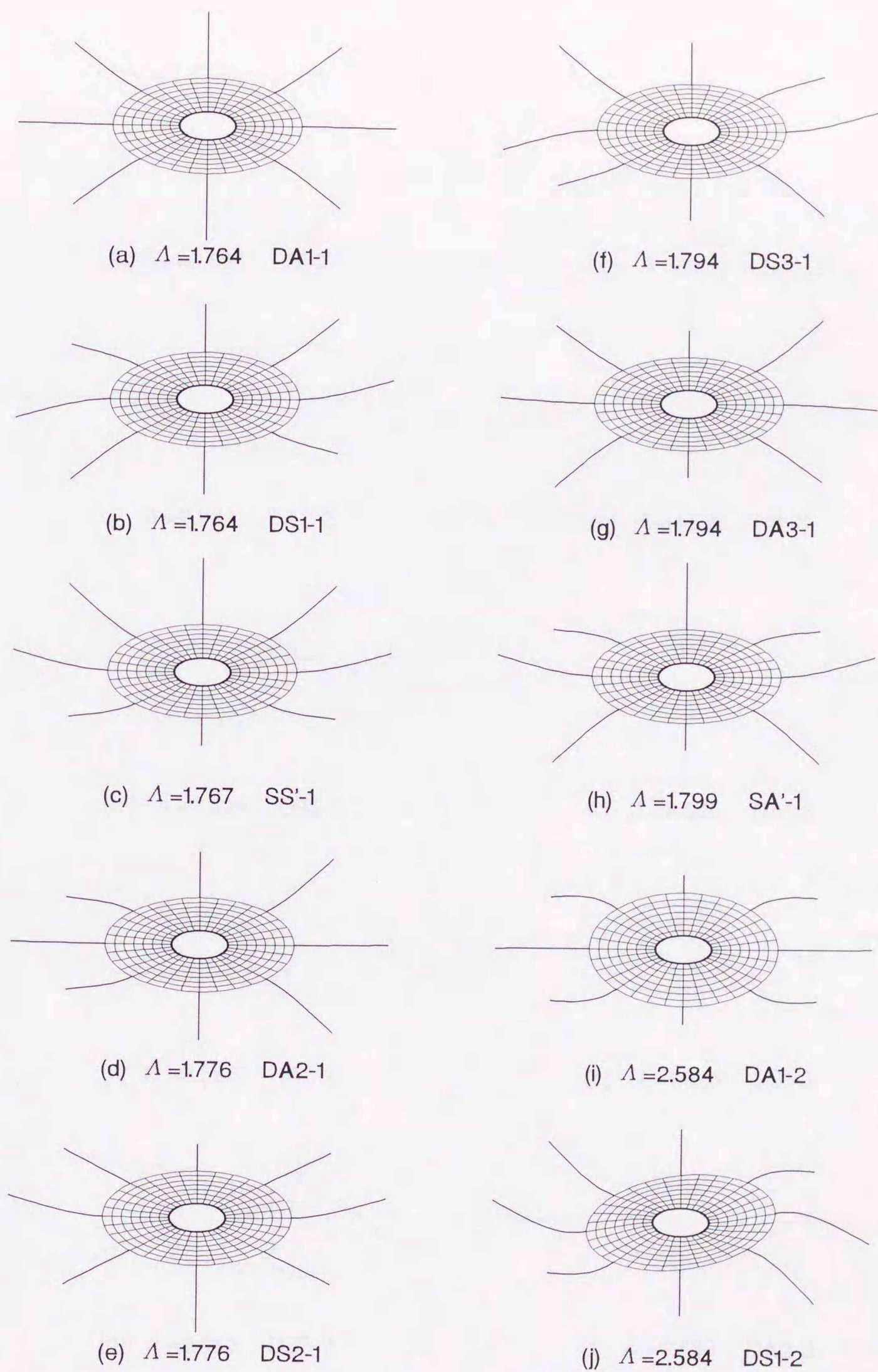


図5-8 8本のブレードを持つディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=0$: その1)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

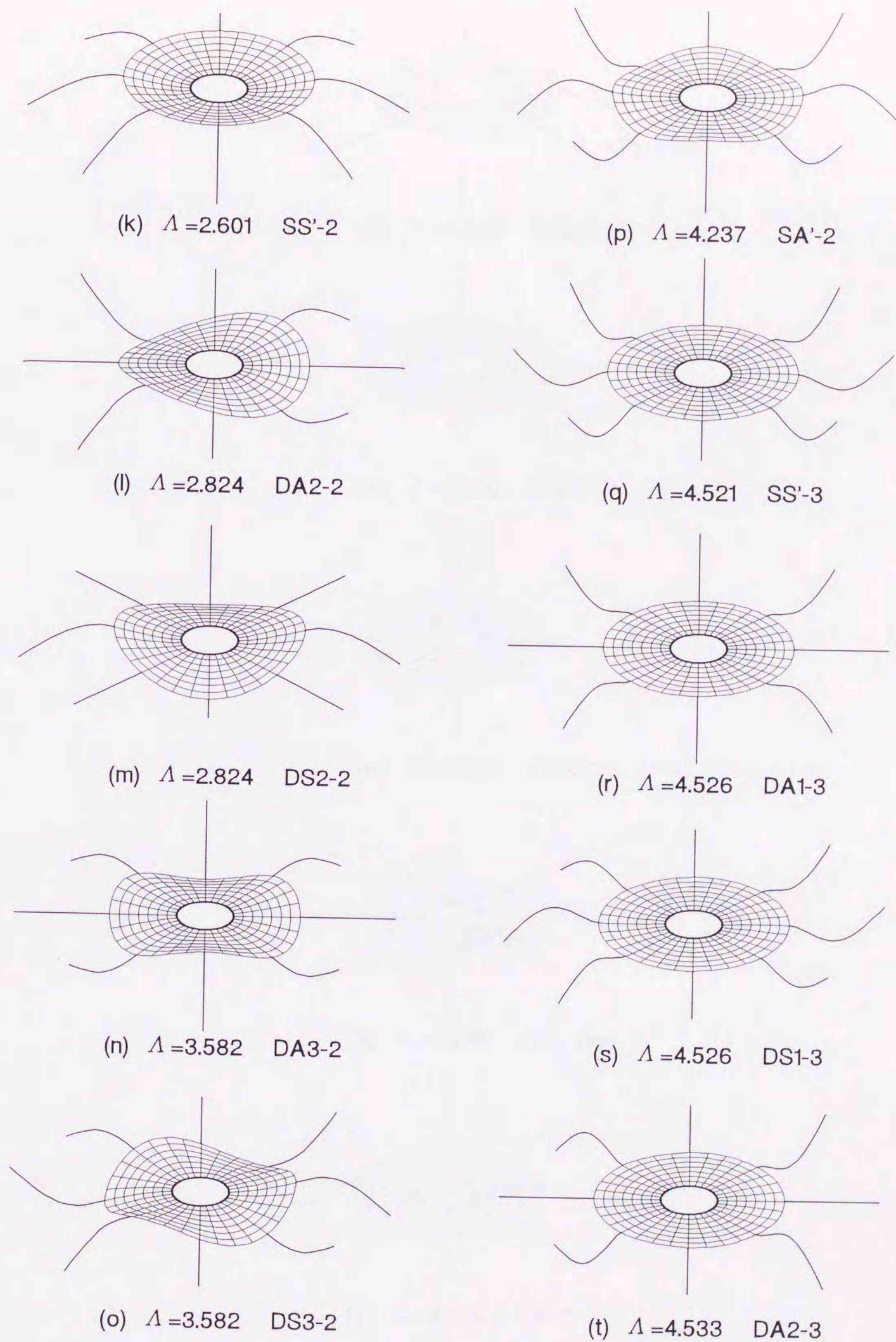
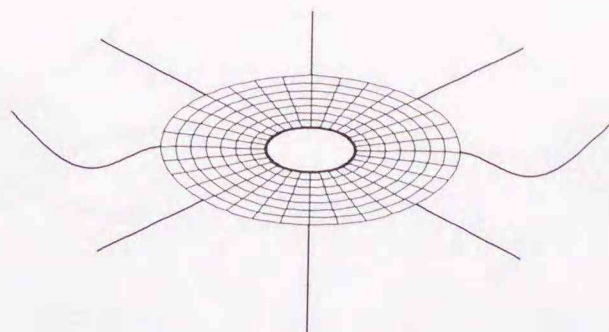
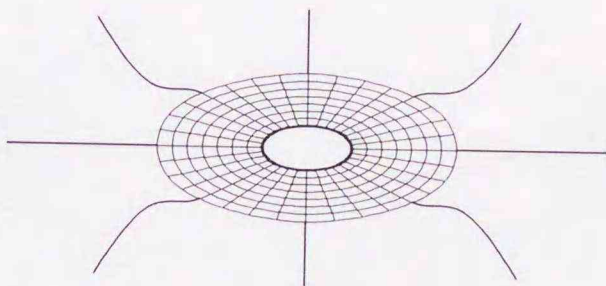


図 5-8 8本のブレードを持つディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=0$: その2)

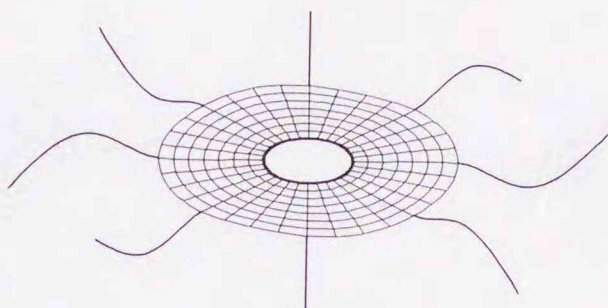
【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】



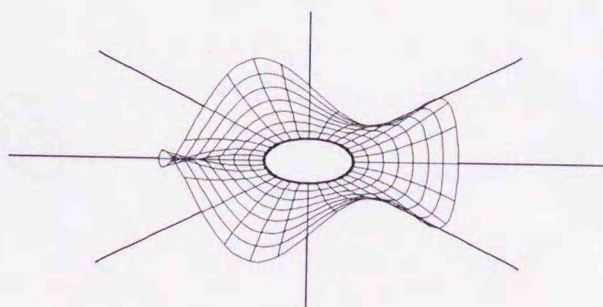
(u) $\Lambda = 4.533$ DS2-3



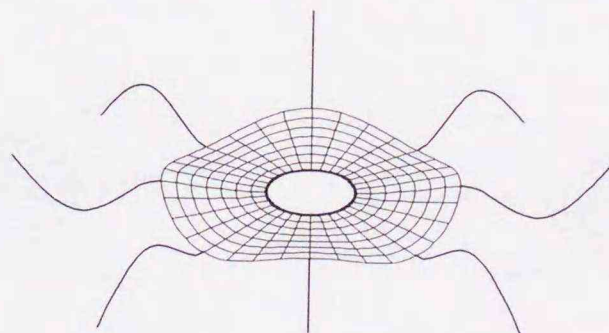
(v) $\Lambda = 4.550$ DA3-3



(w) $\Lambda = 4.550$ DS3-3



(x) $\Lambda = 4.698$ disk only



(y) $\Lambda = 4.958$ SA'-3

図 5 - 8 8本のブレードを持つディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=0$: その3)

【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

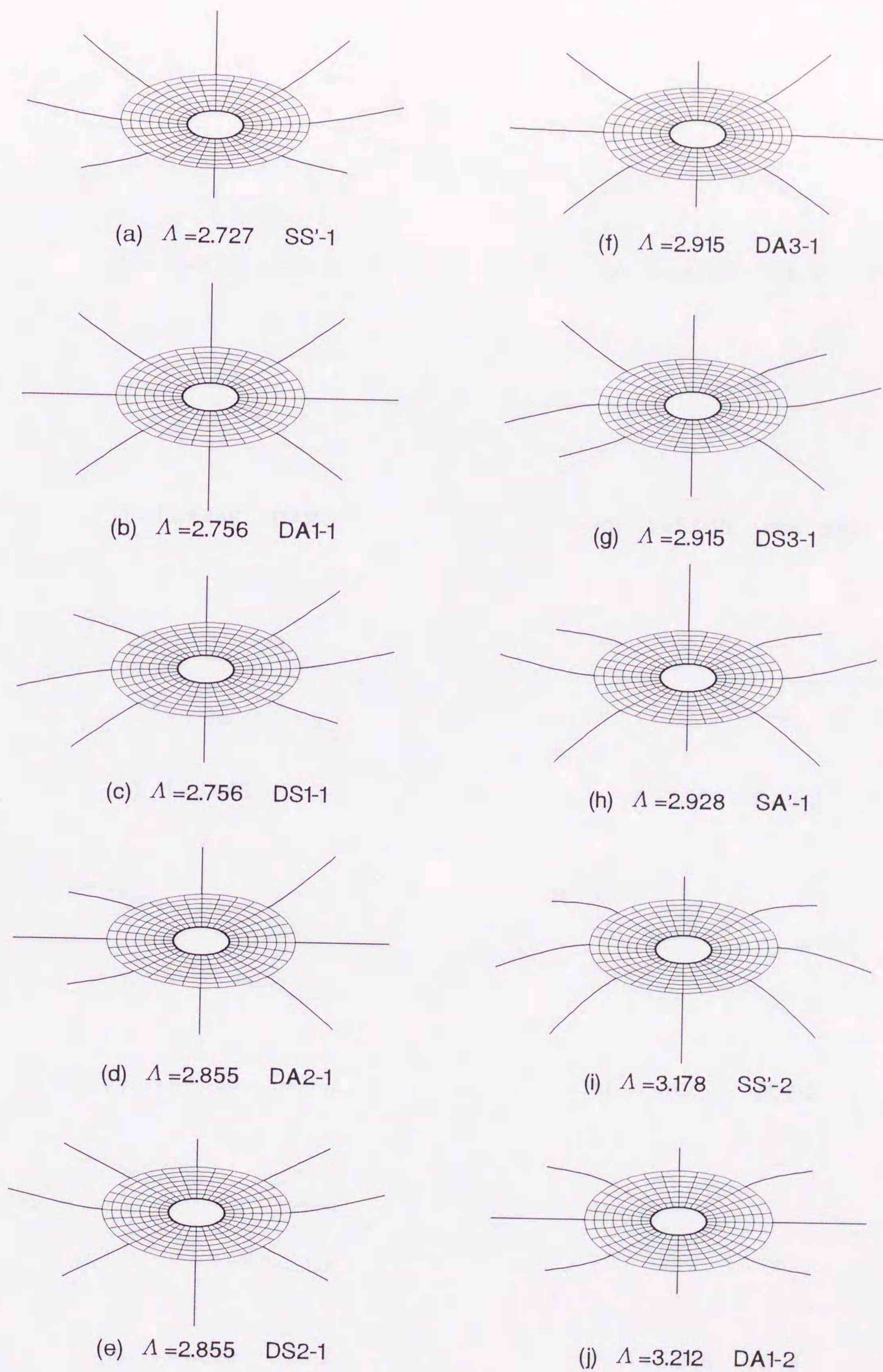


図 5-9 8本のブレードを持ち、回転するディスク・ブレード連成系の固有振動モード
($\Omega_0=5$: その1)

【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

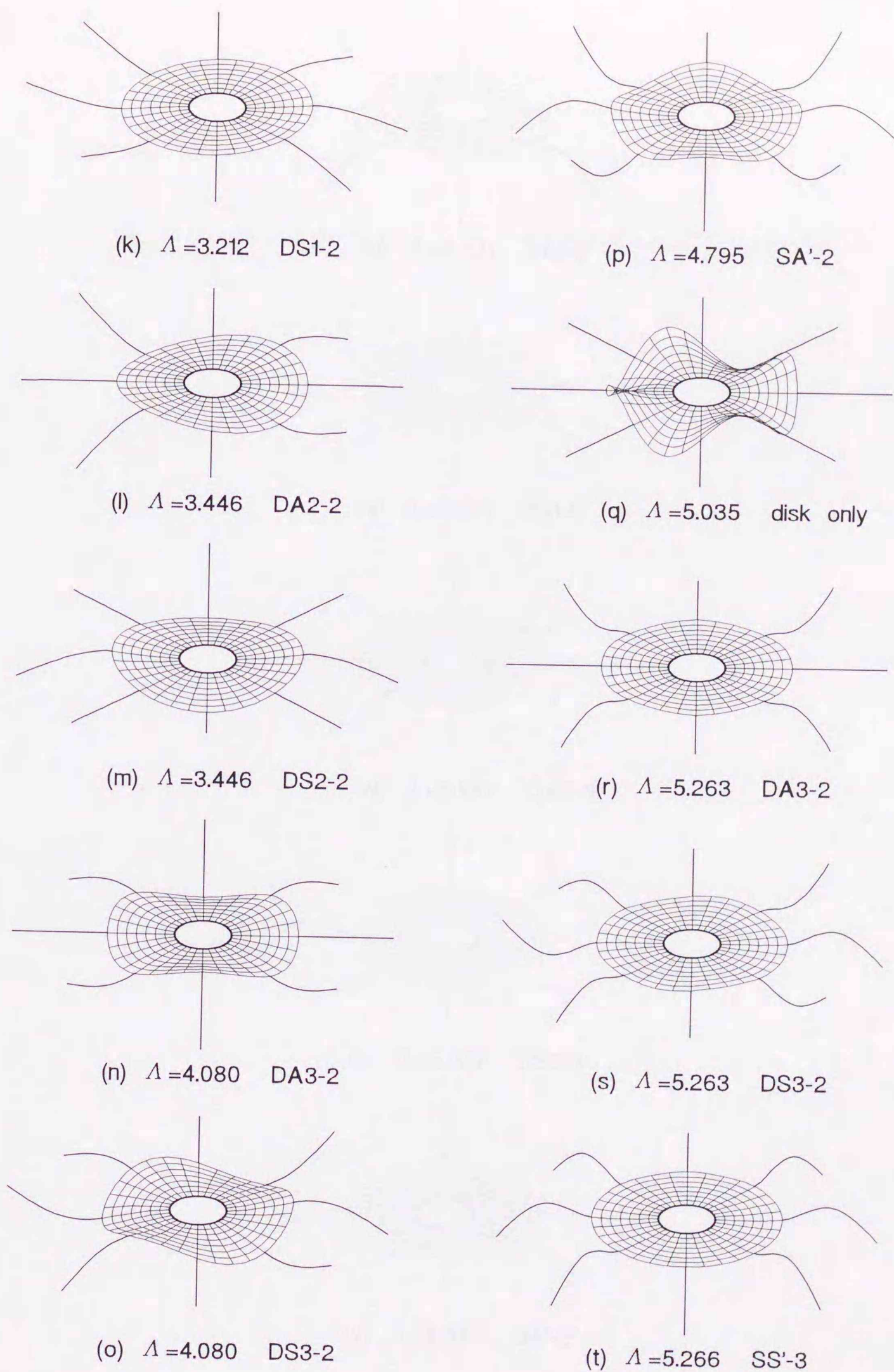
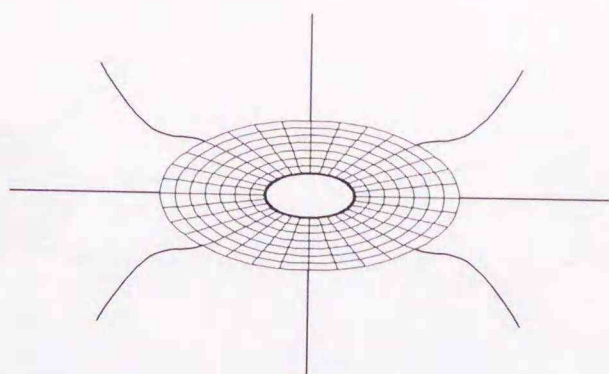
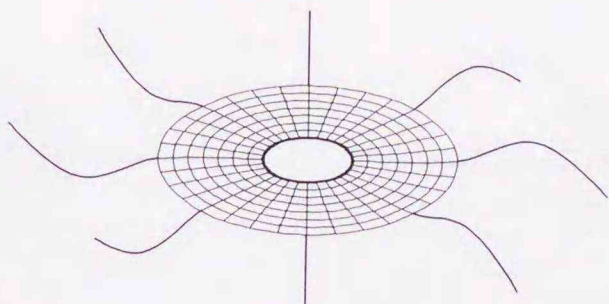


図 5-9 8本のブレードを持ち、回転するディスク・ブレード連成系の固有振動モード
($\Omega_0=5$: その2)

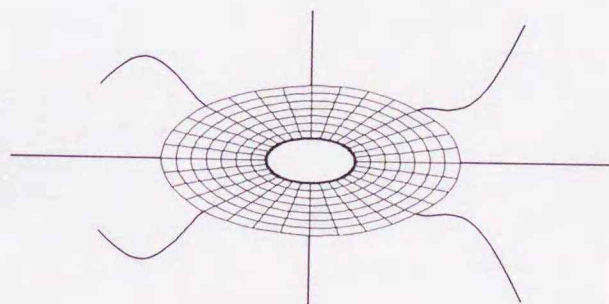
【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】



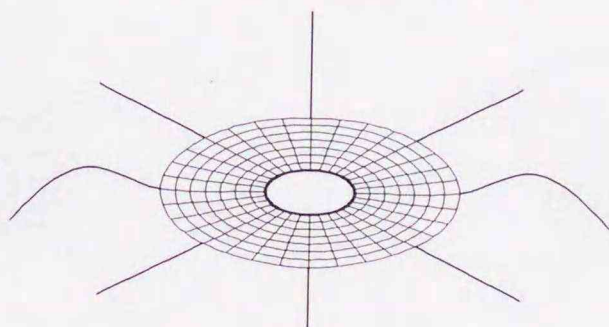
(u) $\Lambda = 5.271$ DA1-3



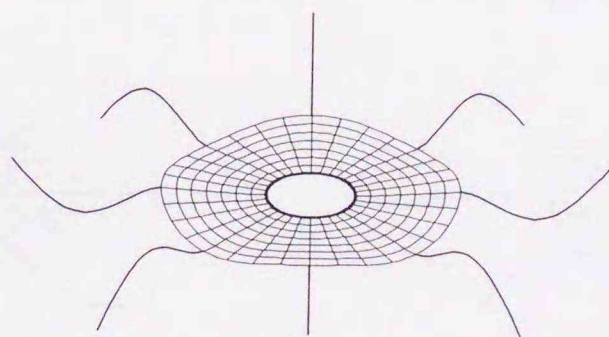
(v) $\Lambda = 5.271$ DS1-3



(w) $\Lambda = 5.277$ DA2-3



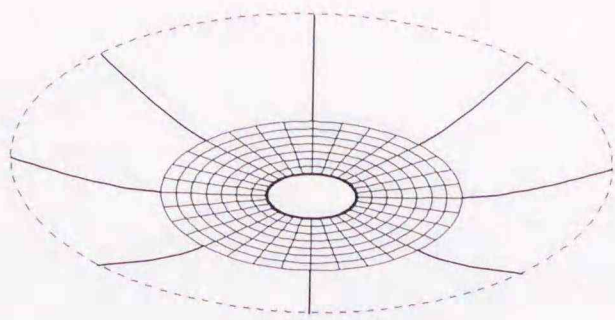
(x) $\Lambda = 5.277$ DS2-3



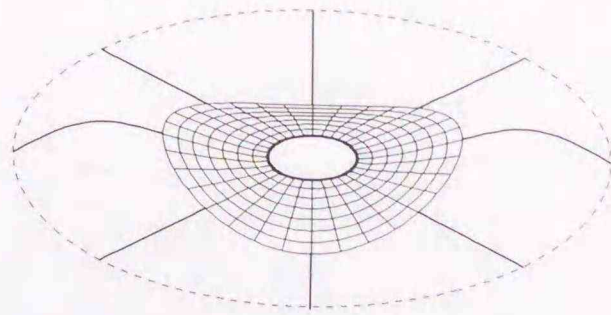
(y) $\Lambda = 5.534$ SA'-3

図 5-9 8本のブレードを持ち、回転するディスク・ブレード連成系の固有振動モード
($\Omega_0=5$: その3)

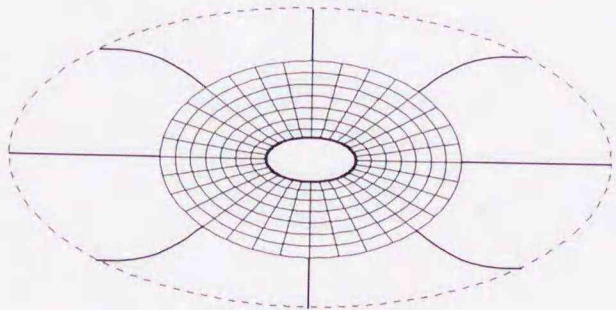
【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{z_p}=k_{\theta_p}=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】



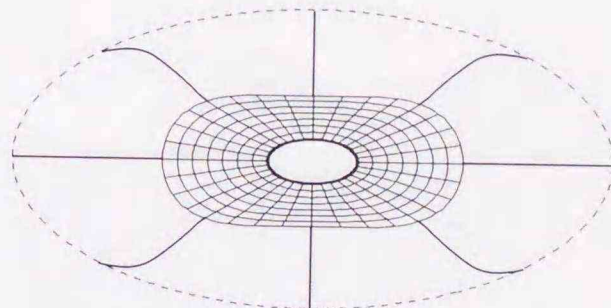
(a) $\Lambda = 1.767$ SS'-1



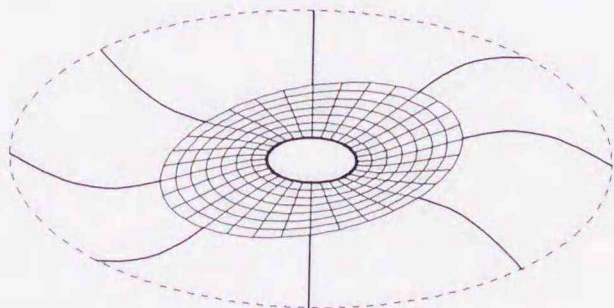
(f) $\Lambda = 2.771$ DS2-1



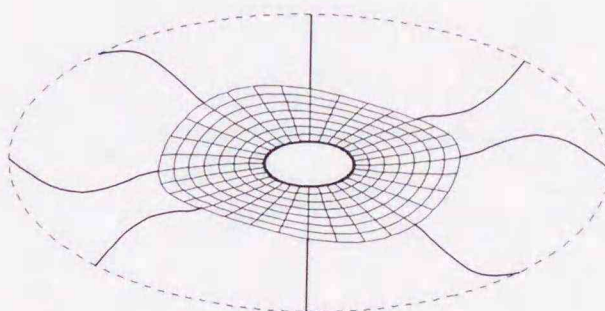
(b) $\Lambda = 2.530$ DA1-1



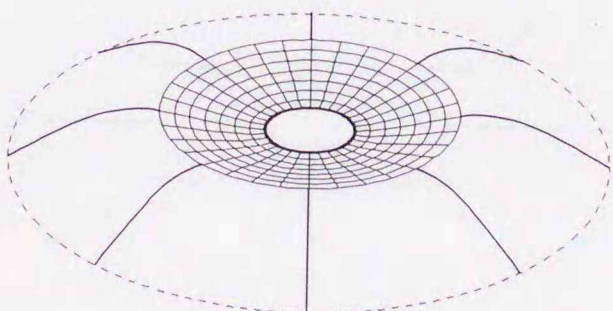
(g) $\Lambda = 3.444$ DA3-1



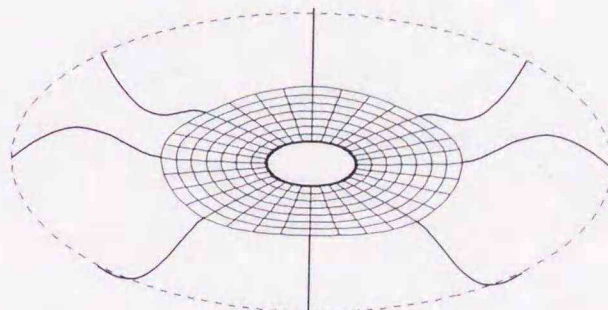
(c) $\Lambda = 2.530$ DS1-1



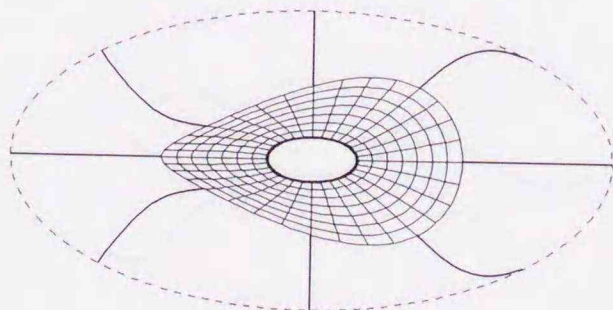
(h) $\Lambda = 3.444$ DS3-1



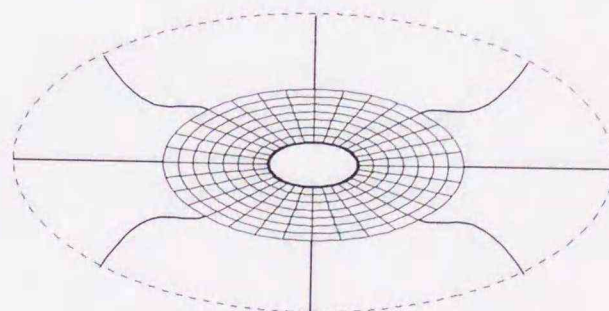
(d) $\Lambda = 2.601$ SS'-2



(i) $\Lambda = 3.676$ SA'-1



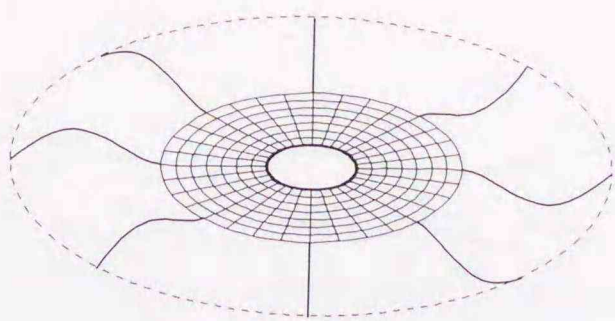
(e) $\Lambda = 2.771$ DA2-1



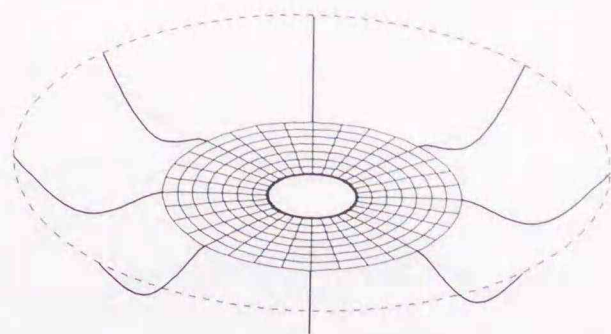
(j) $\Lambda = 3.822$ DA1-2

図 5-10 8本のブレードを持ち、全周にシュラウドを有する
ディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=0$: その1)

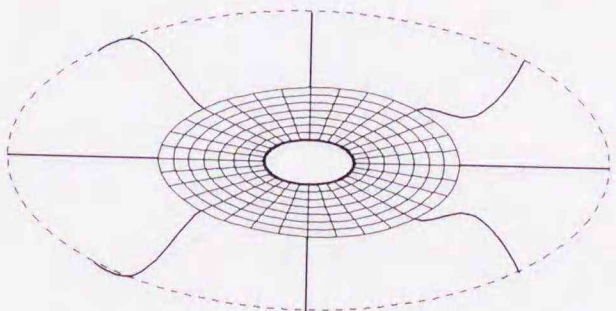
【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=10^6$, $\xi_{s_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】



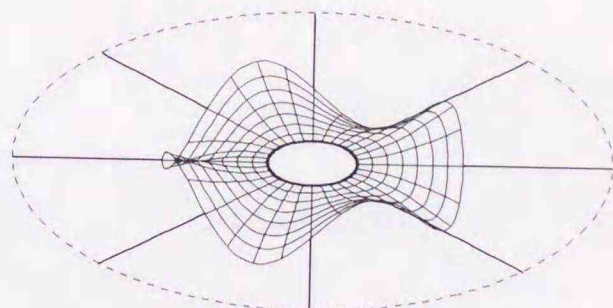
(k) $\Lambda = 3.822$ DS1-2



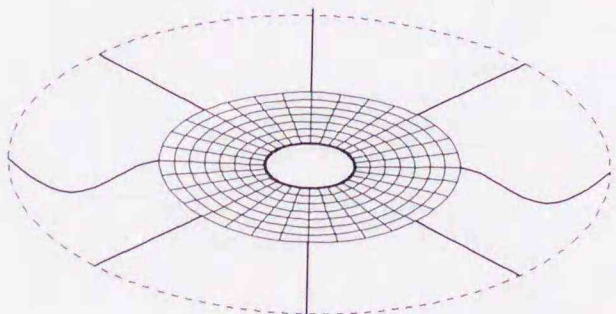
(p) $\Lambda = 4.521$ SS'-3



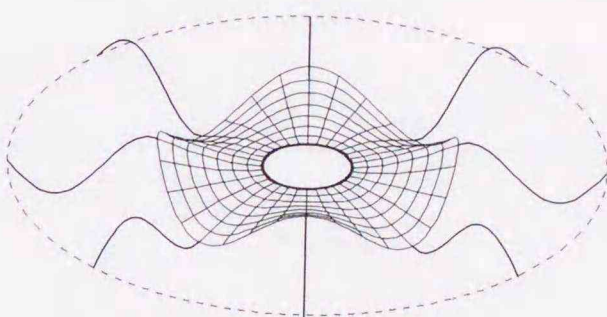
(l) $\Lambda = 3.838$ DA2-2



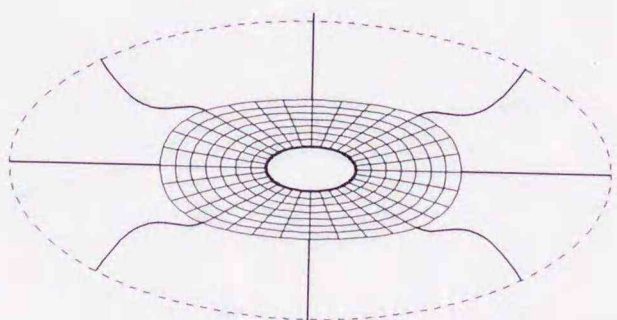
(q) $\Lambda = 4.698$ disk only



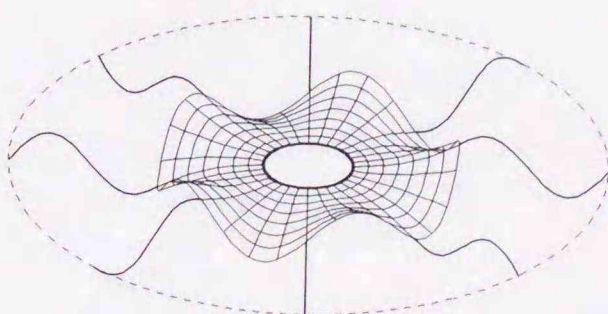
(m) $\Lambda = 3.838$ DS2-2



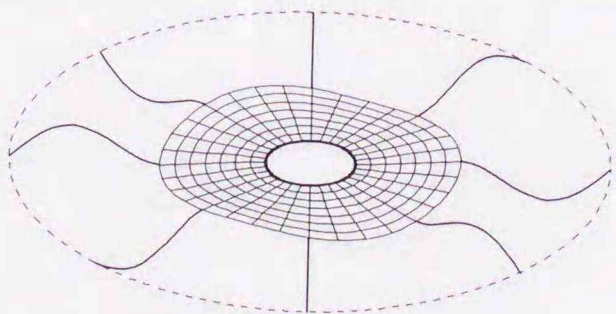
(r) $\Lambda = 4.752$ SA'-2



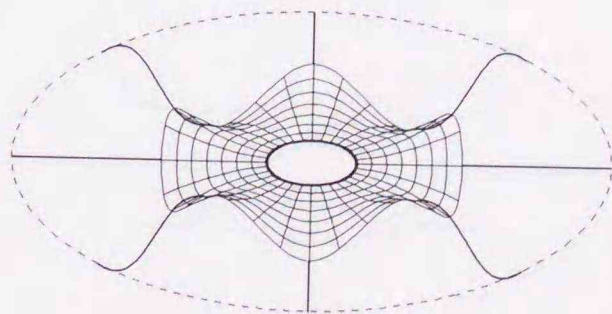
(n) $\Lambda = 3.960$ DA3-2



(s) $\Lambda = 5.740$ DS3-2



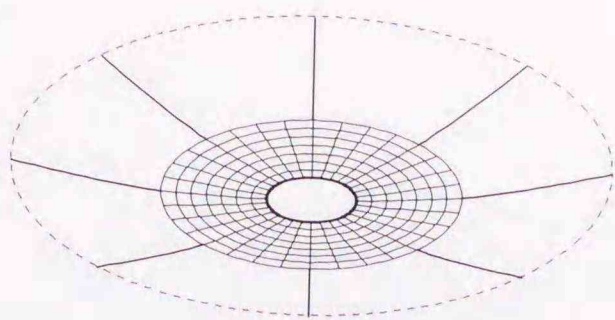
(o) $\Lambda = 3.960$ DS3-2



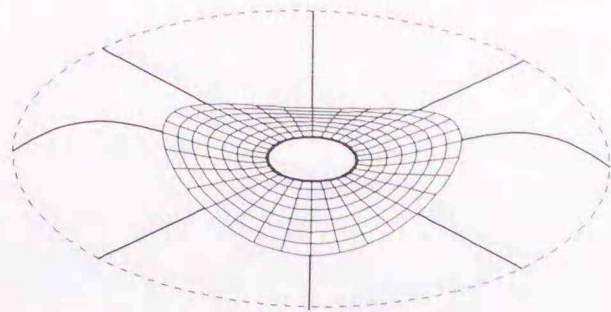
(t) $\Lambda = 5.740$ DA3-2

図5-10 8本のブレードを持ち、全周にシュラウドを有する
ディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=0$: その2)

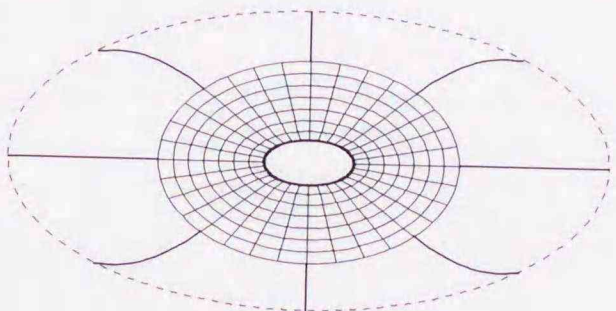
【 $P=8$, $\Omega_0=0$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=10^6$, $\xi_{sp}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】



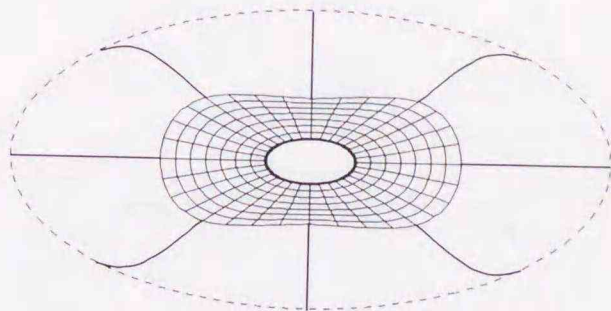
(a) $\Lambda = 2.727$ SS'-1



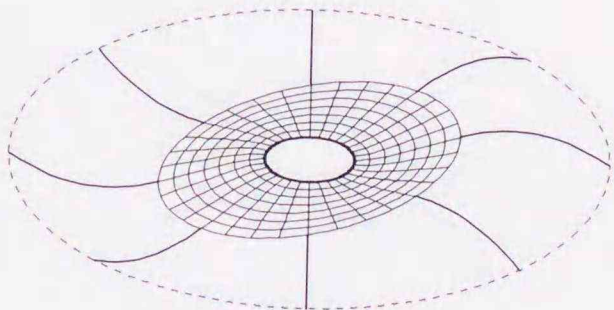
(f) $\Lambda = 3.317$ DS2-1



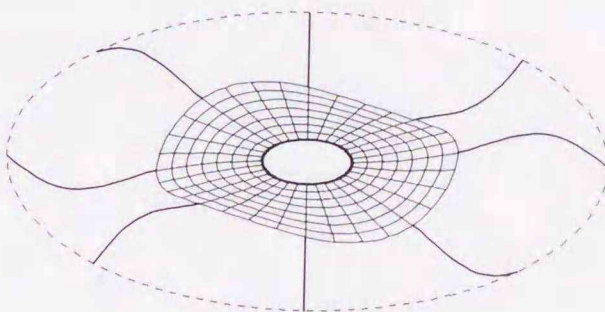
(b) $\Lambda = 3.000$ DA1-1



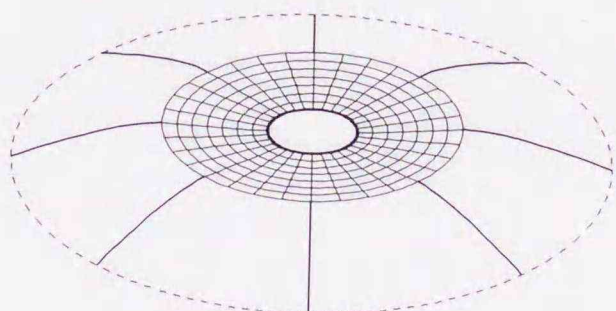
(g) $\Lambda = 3.932$ DA3-1



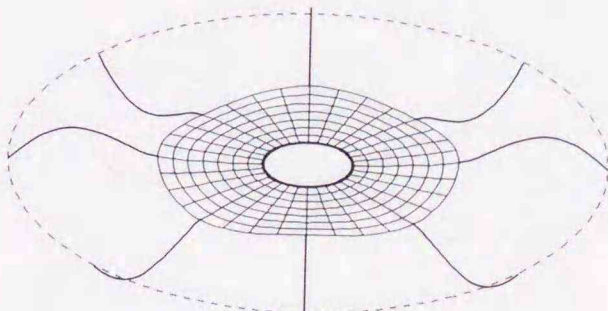
(c) $\Lambda = 3.000$ DS1-1



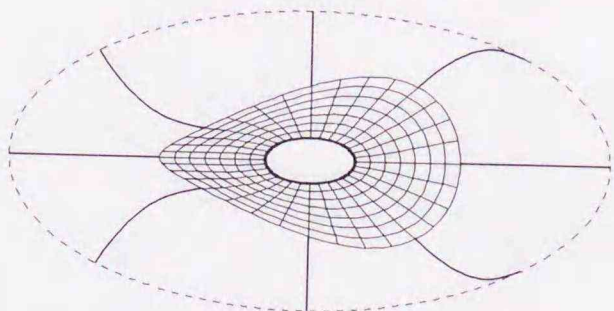
(h) $\Lambda = 3.932$ DS3-1



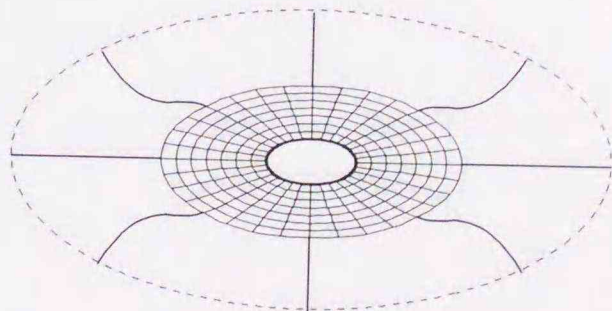
(d) $\Lambda = 3.178$ SS'-2



(i) $\Lambda = 4.232$ SA'-1

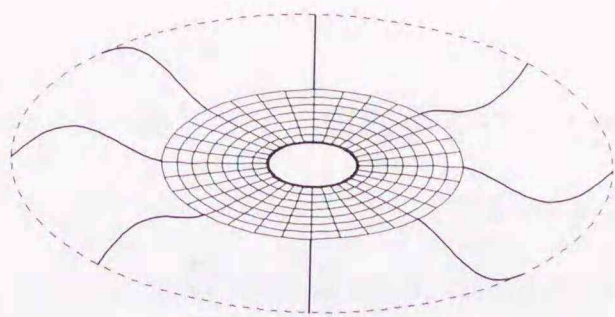


(e) $\Lambda = 3.317$ DA2-1

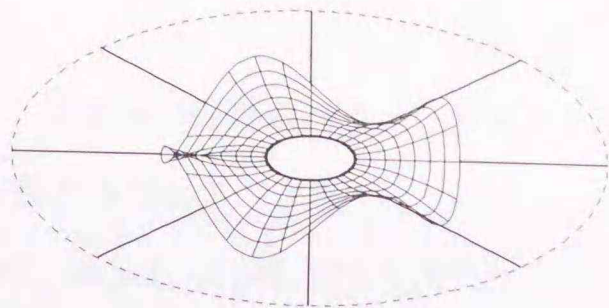


(j) $\Lambda = 4.427$ DA1-2

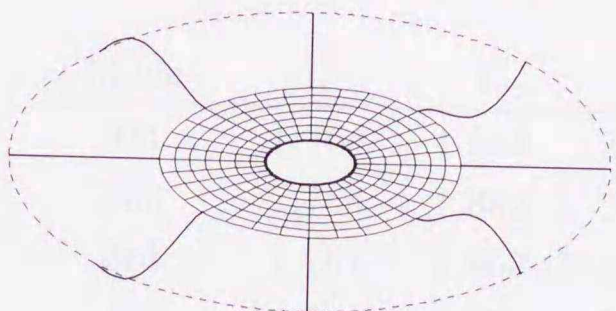
図5-11 8本のブレードを持ち、全周にシュラウドを有する
回転するディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=5$: その1)
【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=10^6$, $\xi_{s_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】



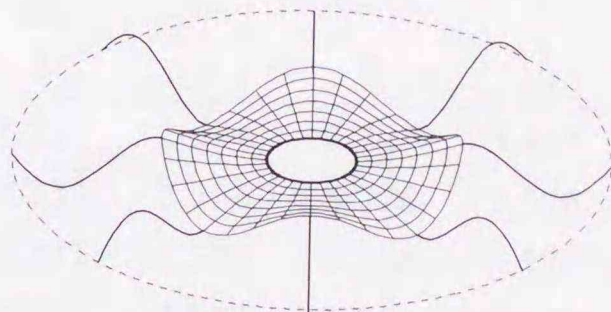
(k) $\Lambda = 4.427$ DS1-2



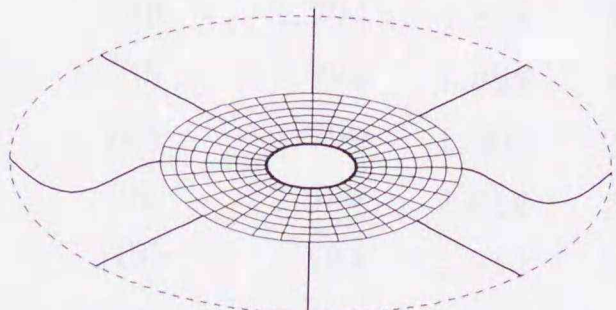
(p) $\Lambda = 5.035$ disk only



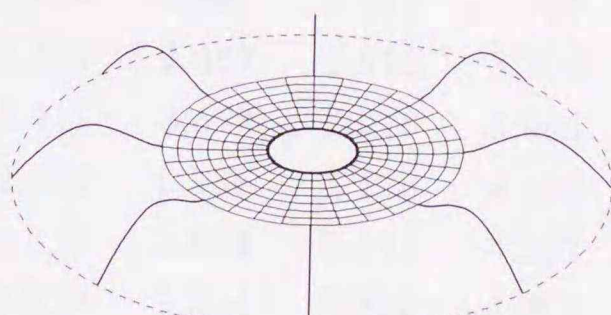
(l) $\Lambda = 4.444$ DA2-2



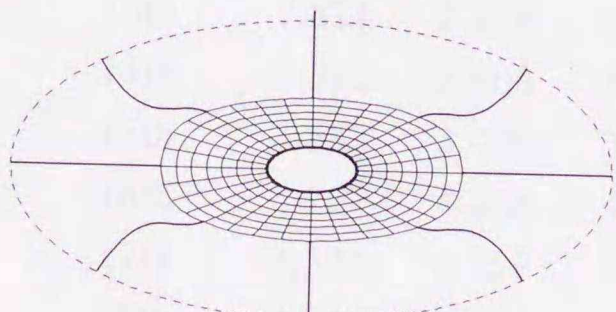
(q) $\Lambda = 5.162$ SA'-2



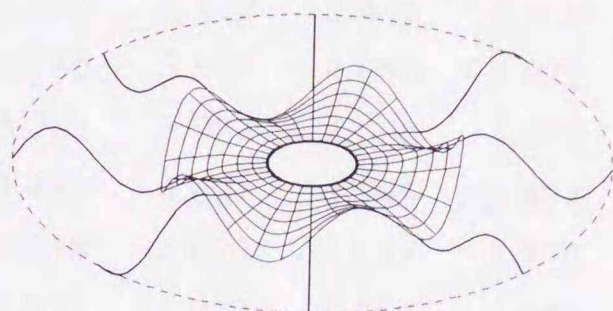
(m) $\Lambda = 4.444$ DS2-2



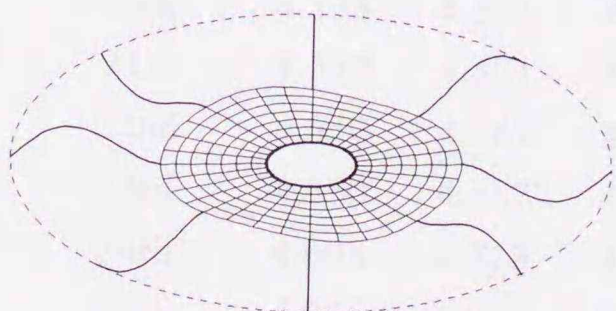
(r) $\Lambda = 5.266$ SS'-3



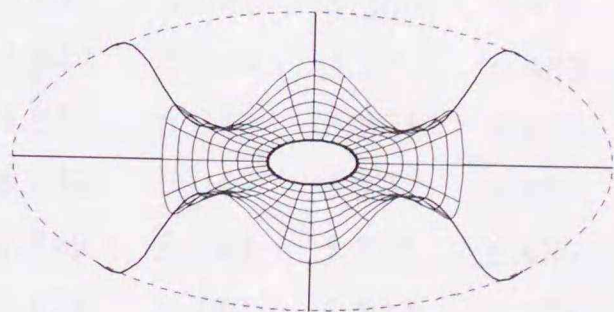
(n) $\Lambda = 4.526$ DA3-2



(s) $\Lambda = 6.029$ DS3-2



(o) $\Lambda = 4.526$ DS3-2



(t) $\Lambda = 6.029$ DA3-2

図 5-11 8本のブレードを持ち、全周にシュラウドを有する
回転するディスク・ブレード連成系の固有振動モード ($\Omega_0=5$: その2)

【 $P=8$, $\Omega_0=5$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$, $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$,
 $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=10^6$, $\xi_{s_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

表5-7 回転するディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Δ

(ブレード8本, シュラウドなし)

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $kT_p=kR_p=10^6$, $kZ_p=k\theta_p=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

Mode	Ω_0						
	0	1	2	3	4	5	10
1st	1.764	1.865	2.087	2.329	2.544	2.727	3.455
2nd	1.764	1.865	2.087	2.331	2.556	2.756	3.576
3rd	1.767	1.867	2.089	2.331	2.556	2.756	3.576
4th	1.776	1.879	2.109	2.370	2.622	2.855	3.821
5th	1.776	1.879	2.109	2.370	2.622	2.855	3.821
6th	1.794	1.898	2.134	2.404	2.667	2.915	3.939
7th	1.794	1.898	2.134	2.404	2.667	2.915	3.939
8th	1.799	1.903	2.140	2.411	2.678	2.928	3.963
9th	2.584	2.614	2.701	2.822	2.986	3.178	4.168
10th	2.584	2.614	2.702	2.839	3.014	3.212	4.207
11th	2.601	2.626	2.702	2.839	3.014	3.212	4.207
12th	2.824	2.856	2.948	3.087	3.257	3.446	4.418
13th	2.824	2.856	2.948	3.087	3.257	3.446	4.418
14th	3.582	3.606	3.677	3.785	3.923	4.080	4.972
15th	3.582	3.606	3.677	3.785	3.923	4.080	4.972
16th	4.237	4.268	4.354	4.480	4.631	4.795	5.674
17th	4.521	4.559	4.668	4.828	4.922	5.034	5.770
18th	4.526	4.564	4.673	4.833	5.037	5.263	6.364
19th	4.526	4.564	4.673	4.838	5.042	5.263	6.364
20th	4.533	4.571	4.680	4.838	5.042	5.266	6.471
21st	4.533	4.571	4.680	4.844	5.044	5.271	6.483
22nd	4.550	4.587	4.690	4.844	5.044	5.271	6.483
23rd	4.550	4.587	4.690	4.849	5.049	5.277	6.489
24th	4.698	4.713	4.757	4.849	5.049	5.277	6.489
25th	4.958	4.983	5.057	5.178	5.340	5.534	6.701

強連成モードも含む)まで示したものである。ブレードが8本接続されている場合、表5-1より8種類のD型モードが存在する。表5-7の1次から8次までがブレードが片持ばりとしての1次の振動形で振動するモード群であるが、この8種類のモードの振動数群の幅を1次の振動数バンド ΔA_1 と呼ぶことにすると、回転速度とともに1次の振動数バンドは拡大することが分かる。一方、16次から25次モードはブレードが片持ばりの2次モードで振動するモード群(ディスクとブレードの強連成モードも含む)であり、この振動数群の幅を2次の振動数バンド ΔA_2 と呼ぶことにすると、2次の振動数バンドは回転速度によりあまり変化をしていないことが分かる。同様に、シュラウドを持たず、ブレードが16本接続されている系の振動数パラメータを表5-8に示す。この場合はD型モードは16種類存在し、1次から16次までがブレードが片持ばりとしての1次の振動形で振動するモード群、24次から41次までがブレードが片持ばりとしての2次の振動形で振動するモード群(強連成モードも含む)である。このときの1次の振動数バンドは回転速度とともに拡大しており、また、ブレードが8本の場合と比べても各回転速度において広がっている。一方、2次の振動数バンドは回転数、ブレード本数による変化があまりみられない。

ブレードの数が多くなるとD型モードの種類が増えるために1次、2次の各振動数モード群に含まれるモードの数が多くなり、また各モード群に含まれるモードの振動数パラメータの値は互いに接近する。そのため、それらの値を表で示すと煩雑になるので、振動数パラメータの値ではなく振動数バンドを図示したものが図5-12である。この図で横軸はブレードの本数、縦軸は振動数バンドであり、丸、四角、三角印はそれぞれ回転速度 $\Omega_0=0,3,5$ の場合に対応し、各印の黒塗りは1次の振動数バンド、白抜きは2次の振動数バンドである。この図から、1次の振動数バンドは回転速度とともに拡大するが、ブレード枚数による変化は P がある程度になると鈍くなることが分かる。一方、2次の振動数バンドは回転速度による変化は少ないが、ブレードの本数による変化は比較的大きい。また、2次の振動数バンドはブレードの本数が8本と16本のときでは差がほとんどなかったのが、32本以上になると増加していることが分かる。これは、この場合の2次の振動数バンドは分化した振動数の幅(第3章で述べたヴィーリングの幅)である

表5-8 回転するディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ

(ブレード16本, シュラウドなし)

【 $P=16$, $\beta=0.3$, $\mu=7.22 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $kT_p=kR_p=10^6$, $kZ_p=k\theta_p=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

Mode	Ω_0						
	0	1	2	3	4	5	10
1st	1.724	1.822	2.038	2.268	2.474	2.657	3.409
2nd	1.724	1.822	2.038	2.272	2.489	2.688	3.524
3rd	1.728	1.826	2.040	2.272	2.489	2.688	3.524
4th	1.746	1.848	2.074	2.328	2.572	2.800	3.757
5th	1.746	1.848	2.074	2.328	2.572	2.800	3.758
6th	1.783	1.887	2.121	2.388	2.648	2.892	3.907
7th	1.783	1.887	2.121	2.388	2.648	2.892	3.907
8th	1.799	1.903	2.140	2.412	2.678	2.929	3.970
9th	1.799	1.903	2.140	2.412	2.678	2.929	3.970
10th	1.806	1.910	2.148	2.421	2.690	2.944	3.999
11th	1.806	1.910	2.148	2.421	2.690	2.944	3.999
12th	1.809	1.914	2.152	2.426	2.696	2.951	4.013
13th	1.809	1.914	2.152	2.426	2.696	2.951	4.013
14th	1.8107	1.915	2.153	2.428	2.6986	2.954	4.020
15th	1.8107	1.915	2.153	2.428	2.6986	2.954	4.020
16th	1.8111	1.916	2.154	2.429	2.6994	2.955	4.022
17th	2.603	2.640	2.741	2.886	3.069	3.272	4.271
18th	2.603	2.640	2.745	2.905	3.099	3.310	4.326
19th	2.616	2.648	2.745	2.905	3.099	3.310	4.326
20th	2.826	2.864	2.972	3.132	3.324	3.532	4.562
21st	2.826	2.865	2.972	3.132	3.324	3.532	4.562
22nd	3.534	3.563	3.645	3.772	3.929	4.107	5.080
23rd	3.534	3.563	3.645	3.772	3.929	4.107	5.080
24th	4.237	4.268	4.357	4.488	4.647	4.820	5.750
25th	4.237	4.268	4.357	4.488	4.647	4.820	5.750
26th	4.438	4.476	4.582	4.743	4.941	5.160	6.275
27th	4.438	4.476	4.582	4.743	4.941	5.160	6.275
28th	4.483	4.522	4.631	4.798	5.003	5.233	6.445
29th	4.483	4.522	4.631	4.798	5.003	5.233	6.445
30th	4.499	4.537	4.648	4.816	5.023	5.255	6.467
31st	4.499	4.537	4.648	4.816	5.023	5.255	6.490
32nd	4.503	4.542	4.652	4.820	5.028	5.261	6.490
33rd	4.538	4.575	4.683	4.845	5.047	5.273	6.494
34th	4.550	4.588	4.695	4.859	5.061	5.288	6.494
35th	4.550	4.588	4.695	4.859	5.061	5.288	6.501
36th	4.579	4.617	4.724	4.889	5.093	5.322	6.550
37th	4.579	4.617	4.724	4.889	5.093	5.322	6.550
38th	4.649	4.685	4.790	4.950	5.151	5.378	6.613
39th	4.649	4.685	4.790	4.950	5.151	5.378	6.613
40th	4.958	4.984	5.060	5.184	5.348	5.544	6.713
41st	4.958	4.984	5.060	5.184	5.348	5.544	6.713

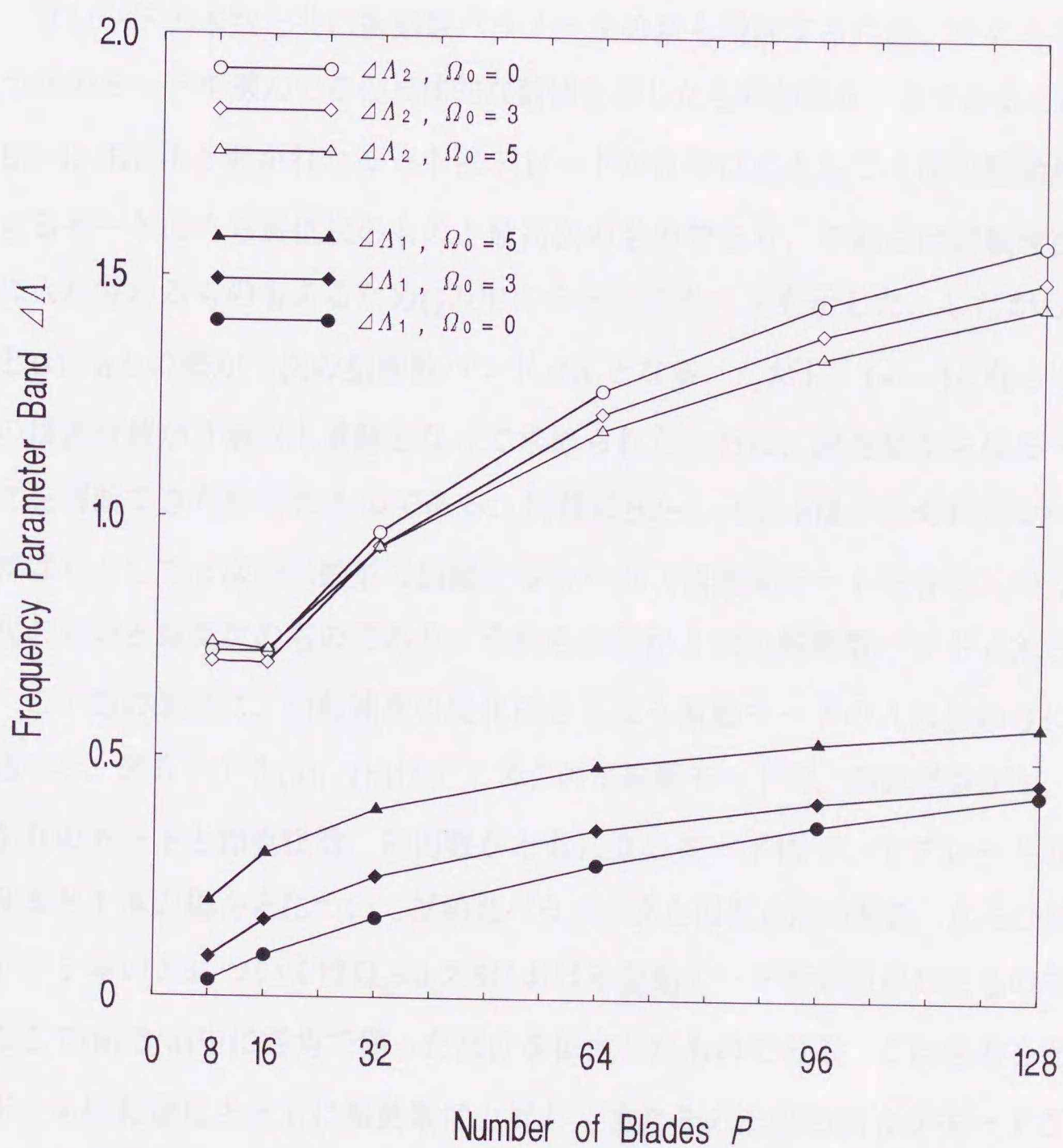


図 5 - 1 2 ブレードの本数, 回転速度による振動数パラメータの変化

【 $\beta = 0.3, \phi_p = 0, \alpha_p = 1, \varepsilon_p = 1.179 \times 10^{-2}, \gamma_p = 1.290 \times 10^{-2},$
 $k_{T_p} = k_{R_p} = 10^6, k_{Z_p} = k_{\theta_p} = 0, \nu = 0.3, M = 6, R_p = 10$ 】

が、 P が少ないときには振動数バンド内のモードの種類が少ないために振動数バンドと片持ばりの2次モードの振動数付近に密集して生じる振動数との間に間隔があるが、 P が多くなり振動数バンド内のモードの種類が増加すると、分化したそれぞれの振動数の幅は増加した密集振動数によって拡大されることを示している。

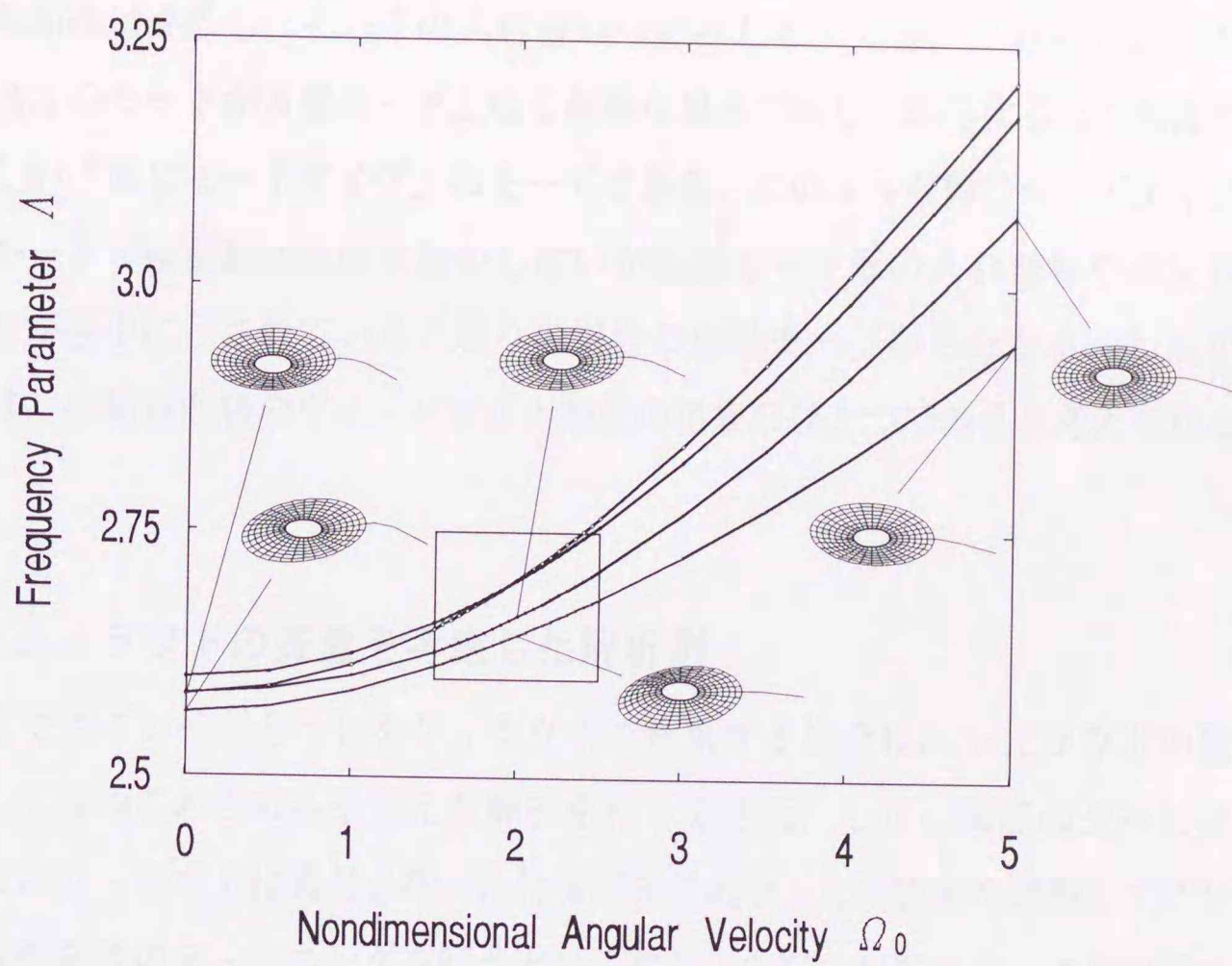
ブレードの本数と共に振動数パラメータの数も増加するため、そのうちのいくつかのモードを選んでその具体的な数値を示したものが表5-9である。表中で、B1-l, B1-hと書かれたモードはブレードが片持ばりとして1次の振動形で振動するモードのうち最低次のものと最高次のものであり、それらは回転速度とともに入れ替わるものもあるため()の中にモードのタイプを示した。したがってB1-lとB1-hとの差が1次の振動数バンド ΔA_1 となる。ただし、(---)となっているものは固有値が3個以上重解となって求められたために、固有値からはモードタイプを判断できなかったものである。同様にB2-l, B2-hはそれぞれブレードが片持ばりとして2次の振動形で振動するモード(強連成モードを含む)のうち最低次のものと最高次のものであり、それらの差が2次の振動数バンド ΔA_2 となる。

この節の最後に、回転速度の変化にともなう振動モードの入れ替わりについて述べる。図5-13(a), (b)はディスクの主振動モードで、節直径数が1, 節円数が0のモードと節直径数, 節円数がともに0のモードについてブレードの本数が8本と1本の場合とについて振動数パラメータと回転速度の関係、ならびにブレードが1本の系については $\Omega_0=0, 2, 5$ における振動モードをを図示したものである。ここで(b)は(a)中に四角で囲った部分を拡大したものである。これをみると各モードとも回転速度とともに振動数は上昇し、またその上昇の割合がモードごとに異なるためにブレードが8本の場合の振動数曲線は $\Omega_0=1.95$ 付近で交差しているのに対して、ブレードが1本の場合の振動数曲線は交差していない。これについて、第3章のブレードの長さ比の変化による振動数曲線のヴィーリングと同様に考えることができる。すなわち、8本のブレードを持つ系の場合は表5-1より、ディスクの節直径が1本のモードはDA1型またはDS1型モードであり、節直径を持たないモードはSS'型である。したがって図5-13に示されているものは $P=8$ に対してはDA1-2(DS1-2)モードとSS'-2モードであり、それらのモードは互いに無関係(関与する周方向波数成分の組合わせが異なる)なモードどうしであるの

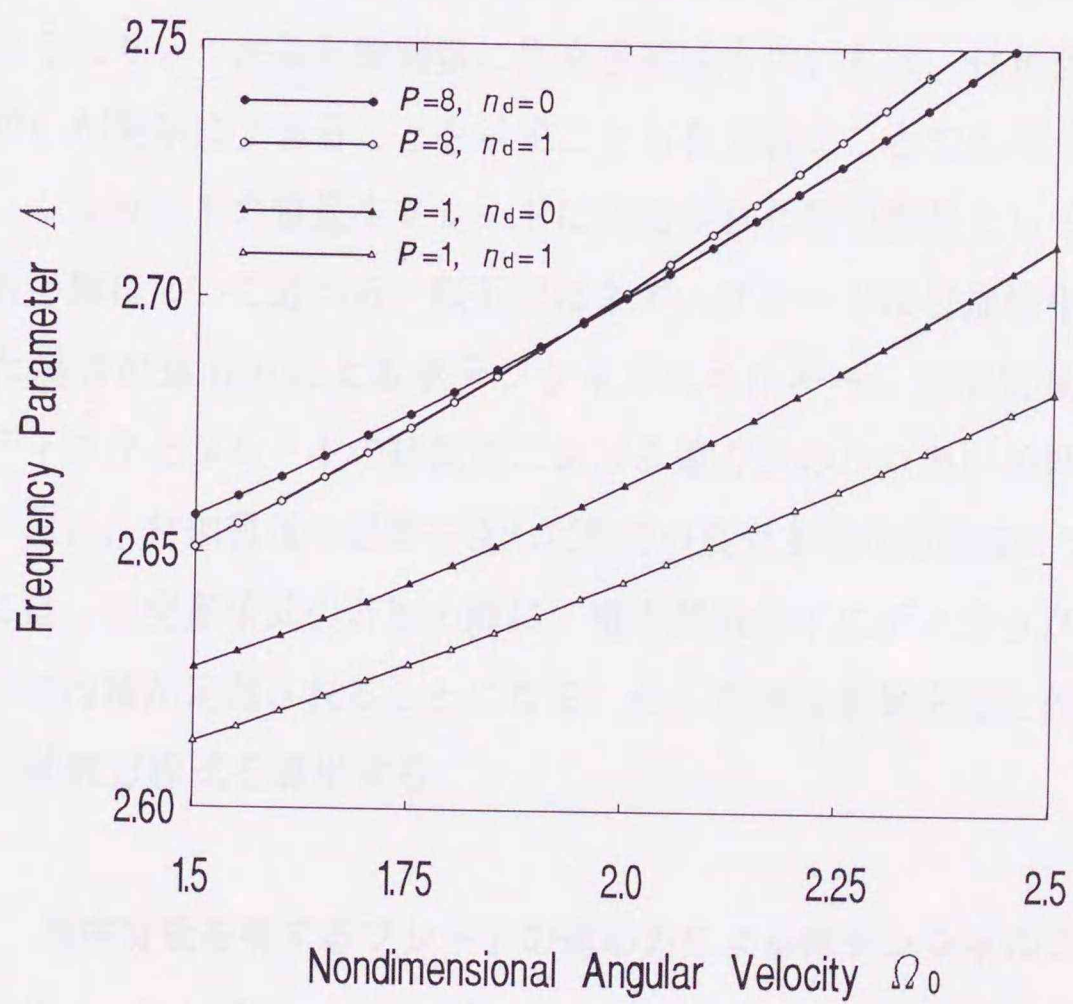
表5-9 ディスク・ブレード連成系の振動数パラメータ Λ (シュラウドなし)

【 $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $kT_p=kR_p=10^6$, $kZ_p=k\theta_p=0$, $\nu=0.3$, $M=6$, $R_p=10$ 】

Ω_0	Mode	P					
		8	16	32	64	96	128
0	B1-l	1.764 (DA1-1)	1.724 (DA1-1)	1.652 (DA1-1)	1.541 (DA1-1)	1.460 (DA1-1)	1.397 (DA1-1)
	B1-h	1.799 (SA'-1)	1.811 (SA'-1)	1.818 (SA'-1)	1.821 (SA'-1)	1.825 (---)	1.827 (---)
	DA1-2	2.584	2.603	2.631	2.661	2.676	2.681
	SS'-2	2.601	2.616	2.639	2.665	2.676	2.683
	B2-l	4.237 (SA'-2)	4.237 (D4-2)	4.095 (DA4-2)	3.907 (DA4-2)	3.785 (DA4-2)	3.695 (DA4-2)
	B2-h	4.958 (SA'-3)	4.958 (D4-3)	5.065 (DA4-3)	5.174 (DA4-3)	5.233 (DA4-3)	5.269 (DA4-3)
3	B1-l	2.329 (SS'-1)	2.268 (SS'-1)	2.185 (SS'-1)	2.087 (SS'-1)	2.029 (SS'-1)	1.989 (SS'-1)
	B1-h	2.411 (SA'-1)	2.429 (SA'-1)	2.436 (SA'-1)	2.439 (---)	2.442 (---)	2.444 (---)
	DA1-2	2.839	2.905	2.990	3.085	3.139	3.173
	SS'-2	2.822	2.886	2.967	3.056	3.106	3.138
	B2-l	4.480 (SA'-2)	4.488 (DA4-2)	4.369 (DA4-2)	4.224 (DA4-2)	4.137 (DA4-2)	4.078 (DA4-2)
	B2-h	5.178 (SA'-3)	5.184 (DA4-3)	5.309 (DA4-3)	5.443 (DA4-3)	5.523 (DA4-3)	5.577 (DA4-3)
5	B1-l	2.727 (SS'-1)	2.657 (SS'-1)	2.574 (SS'-1)	2.487 (SS'-1)	2.438 (SS'-1)	2.406 (SS'-1)
	B1-h	2.928 (SA'-1)	2.955 (SA'-1)	2.966 (SA'-1)	2.970 (SA'-1)	2.973 (---)	2.976 (---)
	DA1-2	3.212	3.310	3.431	3.566	3.646	3.702
	SS'-2	3.178	3.272	3.386	3.513	3.589	3.640
	B2-l	4.795 (SA'-2)	4.820 (DA4-2)	4.742 (DA4-2)	4.654 (DA4-2)	4.605 (DA4-2)	4.574 (DA4-2)
	B2-h	5.534 (SA'-3)	5.544 (DA4-3)	5.680 (DA4-3)	5.839 (DA4-3)	5.943 (DA4-3)	6.020 (DA4-3)



(a)



(b)

図 5 - 1 3 回転速度による振動数パラメータの変化
 $[\beta=0.3, \phi_p=0, \alpha_p=1, \varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}, \gamma_p=1.290 \times 10^{-2}, k_{Tp}=k_{Rp}=10^6, k_{Zp}=k_{\theta p}=0, \nu=0.3, M=6, N=32, R_p=10]$

で振動数曲線は交差し、モードの入れ替わりが生じる。一方、ブレードが1本の場合は全てのモードがS型モードとなる特別な場合であり、関与する周方向波数成分が等しい「同じモードタイプ」のモードである。このような同じモードタイプに属するモードの振動数曲線は交差をしないが振動モード形の入れ替わりは生じていることが図中に示されている三通りの場合の振動モードから分かる。したがってこれは、振動数曲線のヴィーリングと類似の現象のひとつであると考えられる。

5.6 シュラウドの質量を考慮した解析例

ここまではブレードどうしをシュラウドで拘束する場合に、シュラウドの質量は無視してばねこわさのみを考えた解析を行ってきた。しかし実際のタービンブレードではシュラウドは質量を持った付加部材であり、その質量を調整してブレードの固有振動数のチューニングを行うといったこともなされており、より実機に近いモデル化を行うにはその質量を考慮することが必要になる。また、第3章でも述べたようにリッツ法の試験関数に直交多項式を用いれば、付加質量を有する系の取り扱いが簡単にできることを示すことも有意義なことであろう。そこでこの節では、シュラウドの質量をブレードに付加された集中質量としてモデル化し、その解析手順について述べる。以下ではまず、ブレードに付加集中質量が取り付けられた場合の遠心力によるポテンシャルエネルギー、付加質量の運動エネルギー、ディスクとブレードの接続点における遠心力のつりあい条件、などの評価を行う。次に、付加質量の影響を含んだ形での直交多項式の構成について述べる。具体的には、直交多項式の計算の際に、重み関数の中にディラックの δ 関数が含まれる形で内積が定義されることになる。そして後は前節までと同様にリッツ法により振動数方程式を導出する。

5.6.1 集中質量を有するブレードの遠心力によるポテンシャルエネルギーと運動エネルギー、およびディスクとブレードの接続点における面内応力のつりあい条件

図5-14にシュラウドの質量を考慮したディスク・ブレード連成系を示す。シュラウドの質量はブレードに付加された集中質量として扱い、図のように p 番目のシュラウド（ p 番目のブレードと $p+1$ 番目ブレード間のシュラウド）の質量を

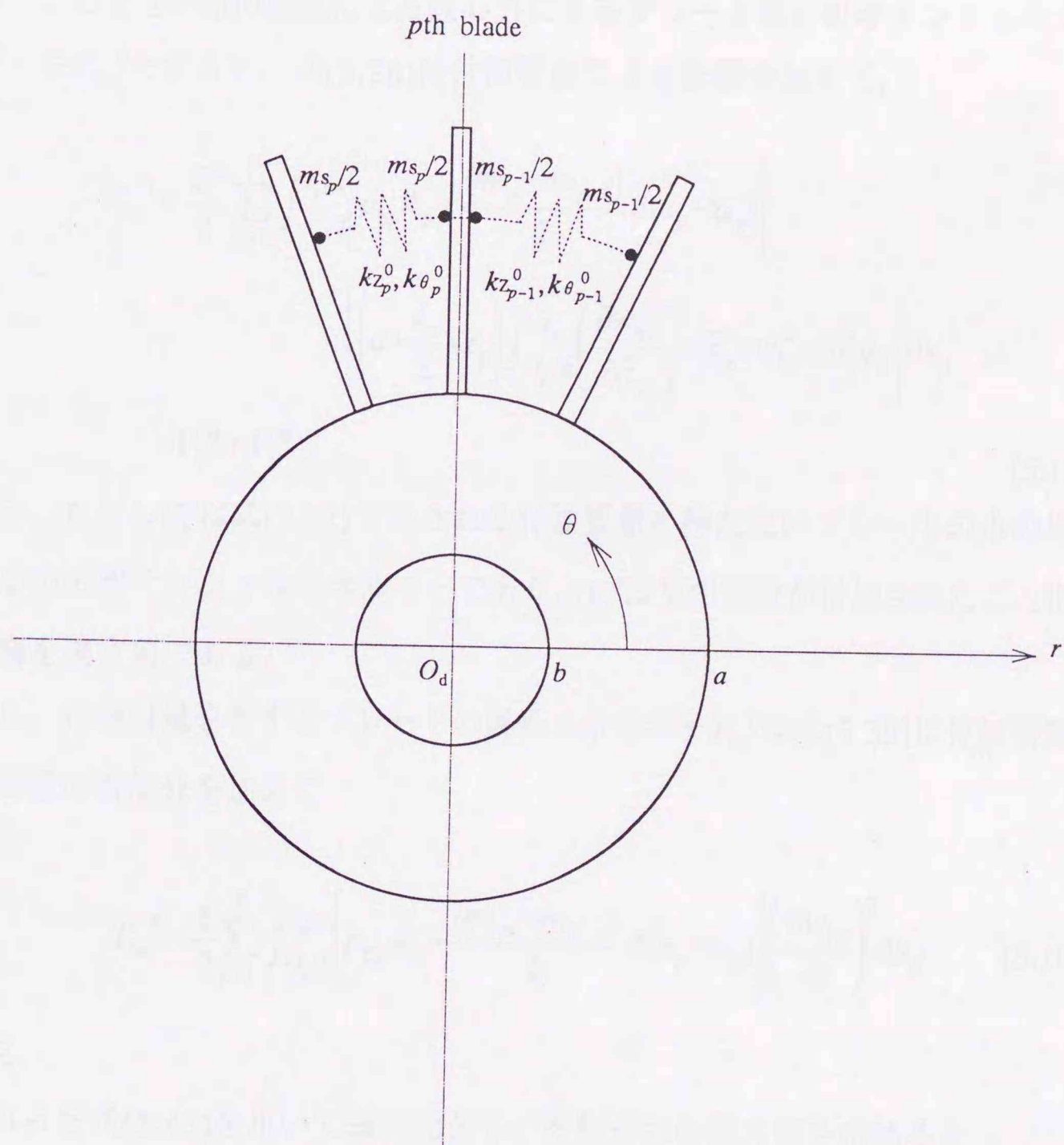


図 5-14 シュラウドの質量を考慮したディスク・ブレード連成系

m_{s_p} と表すとき、その質量は p 番目のブレードと $p+1$ 番目ブレードに $m_{s_p}/2$ ずつ付加されるものとする。すなわち、全周をシュラウドで綴られた系の場合、 p 番目のブレードには $(m_{s_p}+m_{s_{p-1}})/2$ の集中質量が付加されることになる。ただし、 $m_{s_0}=m_{s_p}$ とする。このときの系の回転による遠心力によるブレード部分のポテンシャルエネルギーを V_{bs}^0 とすると、式(5.26)に付加質量による影響を加えて、

$$\begin{aligned}
 V_{bs}^0 &= \frac{\Omega^2}{2} \sum_{p=1}^P \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\rho_{bp} A_p + \frac{(m_{s_p}+m_{s_{p-1}})}{2} \delta(x_p - x_{s_p}) \right] \\
 &\quad \times \left[\left(a + \frac{l_p}{2} + x_p \right) \int_{-l_p/2}^{x_p} \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial \bar{x}_p} \right)^2 d\bar{x}_p - w_{bp}^2 \sin^2 \phi_p \right] dx_p \\
 &= V_b^0 + V_s^0
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

となる。ただし V_b^0 は式(5.32)で表される付加質量を持たないブレードのみの場合の遠心力のポテンシャルエネルギーであり、 V_s^0 は集中質量が付加されたことによる影響を表す項である。

また、付加質量を有するブレードの運動エネルギー T_{bs}^0 は式(5.39)に付加質量による質量の増加分を加えて

$$T_{bs}^0 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \int_{-l_p/2}^{l_p/2} \left[\rho_{bp} A_p + \frac{(m_{s_p}+m_{s_{p-1}})}{2} \delta(x_p - x_{s_p}) \right] \left(\frac{\partial w_{bp}}{\partial t} \right)^2 dx_p \tag{5.101}$$

となる。

これらを式(5.45)を用いて無次元化し、それぞれの最大値を求めると

$$\begin{aligned}
 V_{s \max} &= \frac{\Omega_0^2}{2} \sum_{p=1}^P \alpha_p \gamma_p \frac{1}{2} \frac{(m_{s_p}+m_{s_{p-1}})}{M_{bp}} \\
 &\quad \times \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\xi_p - \xi_{s_p}) \left[\left(1 + \frac{\alpha_p}{2} + \xi_p \right) \int_{-1/2}^{\xi_p} \left(\frac{dW_{bp}}{d\bar{\xi}_p} \right)^2 d\bar{\xi}_p - W_{bp}^2 \sin^2 \phi_p \right] d\xi_p \\
 &= \frac{\Omega_0^2}{2} \sum_{p=1}^P \alpha_p \gamma_p \frac{1}{2} \frac{(m_{s_p}+m_{s_{p-1}})}{M_{bp}} \left[\left(1 + \frac{\alpha_p}{2} + \xi_{s_p} \right) \int_{-1/2}^{\xi_{s_p}} \left(\frac{dW_{bp}}{d\bar{\xi}_p} \right)^2 d\bar{\xi}_p - W_{bp}^2(\xi_{s_p}) \sin^2 \phi_p \right]
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

$$\begin{aligned}
T_{bs \max} &= \frac{1}{2} \Lambda^4 \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p \int_{-1/2}^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(m_{s_p} + m_{s_{p-1}})}{M_{bp}} \delta(\xi_p - \xi_{s_p}) \right] W_{bp}^2 d\xi_p \\
&= \frac{1}{2} \Lambda^4 \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p \int_{-1/2}^{1/2} \left[1 + \mu_{bs} \delta(\xi_p - \xi_{s_p}) \right] W_{bp}^2 d\xi_p
\end{aligned} \quad (5.103)$$

となる。ただし $M_{bp} = \rho_{bp} A_p l_p$ は p 番目のブレードの質量、 $\mu_{bs} = (m_{s_p} + m_{s_{p-1}})/2 \rho_{bp} A_p l_p$ は p 番目のブレードに付加されるシュラウドの質量と p 番目のブレードの質量との比である。また

$$\delta(\xi_p - \xi_{s_p}) = l_p \delta(x_p - x_{s_p}) \quad (5.104)$$

の関係を用いた。

さて、次にブレードに集中質量が付加される場合の遠心力によるディスクの面内応力場を求める。式(5.8)の定数 C_1 、 C_2 を決めるためのディスク外周 $r=a$ での境界条件は、遠心応力のつりあい式(5.40)を変更して

$$2\pi a h \sigma_r = \Omega^2 \sum_{p=1}^P \left[\rho_{bp} A_p l_p \left(a + \frac{l_p}{2} \right) + \frac{(m_{s_p} + m_{s_{p-1}})}{2} \left(a + \frac{l_p}{2} + x_{s_p} \right) \right] \quad \text{at } r=a \quad (5.105)$$

となる。ディスクは内周 $r=b$ での境界条件は式(5.41)のままである。

これらの境界条件式(5.105)、(5.41)に式(5.4)、(5.8)を代入して C_1 、 C_2 に関して解くと次式を得る。

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(1-\nu^2) \rho_d \Omega^2}{8E_d [a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)]} \left\{ (3+\nu)a^4 + (1-\nu)b^4 \right. \\
&\quad \left. + 4a^2(a^2-b^2) \left\{ \mu + \mu_{ds} + \frac{1}{2M_d a} \sum_{p=1}^P \left[\rho_{bp} A_p l_p^2 + (m_{s_p} + m_{s_{p-1}}) \left(\frac{l_p}{2} + x_{s_p} \right) \right] \right\} \right\} \quad (5.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= - \frac{(1-\nu^2) \rho_d \Omega^2 a^2 b^2}{8E_d [a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)]} \left\{ (3+\nu)a^2 - (1+\nu)b^2 \right. \\
&\quad \left. - 4(a^2-b^2) \left\{ \mu + \mu_{ds} + \frac{1}{2M_d a} \sum_{p=1}^P \left[\rho_{bp} A_p l_p^2 + (m_{s_p} + m_{s_{p-1}}) \left(\frac{l_p}{2} + x_{s_p} \right) \right] \right\} \right\} \quad (5.107)
\end{aligned}$$

ただし、 $\mu_{ds} = \Sigma (m_{s_p} + m_{s_{p-1}})/2M_d$ はシュラウドの全質量とディスクの質量との比を

表す. この式(5.106), (5.107)より式(5.54), (5.55)は以下のように書き直される.

$$S_1 = \frac{(1+\nu) \left\| (3+\nu) + (1-\nu) \beta^4 + 4 \left\{ \mu + \mu_{ds} + \sum_{p=1}^P \left[\frac{(m_{s_p} + m_{s_{p-1}})}{2M_d} \left(\frac{\alpha_p}{2} + \xi_{s_p} \right) \right] \right\} (1-\beta^2) + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p^2 \right\|}{(1+\nu) + (1-\nu) \beta^2} \quad (5.108)$$

$$S_1 = \frac{\beta^2(1-\nu) \left\| (3+\nu) - (1+\nu) \beta^2 - 4 \left\{ \mu + \mu_{ds} + \sum_{p=1}^P \left[\frac{(m_{s_p} + m_{s_{p-1}})}{2M_d} \left(\frac{\alpha_p}{2} + \xi_{s_p} \right) \right] \right\} (1-\beta^2) - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^P \gamma_p \alpha_p^2 \right\|}{(1+\nu) + (1-\nu) \beta^2} \quad (5.109)$$

これらの式を用いて5.3節と同様の手順で解析を行うことにより, シュラウドの質量を考慮したディスク・ブレード連成系の振動数方程式が式(5.67)と同様の形で得られる. 式(5.67)との相違点は

$$T_{r_p}^{(s_p)} = \alpha_p \gamma_p \int_{-1/2}^{1/2} \left[1 + \mu_{bs} \delta(\xi_p - \xi_{s_p}) \right] \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} d\xi_p \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} U_{r_p}^{d(s_p)} = & \int_{-1/2}^{1/2} \left\{ \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p^3} \Psi_{r_p}'' \Psi_{s_p}'' + \Omega_0^2 \alpha_p \gamma_p \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_p} + \frac{3}{4} \right) \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' - \left(\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{2} \right) \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \xi_p \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \xi_p^2 - \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \sin^2 \phi_p \right] \right\} d\xi_p \\ & + \Omega_0^2 \alpha_p \gamma_p \mu_{bs} \left[\left(1 + \frac{\alpha_p}{2} + \xi_{s_p} \right) \int_{-1/2}^{\xi_{s_p}} \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' d\xi_p - \Psi_{r_p}(\xi_{s_p}) \Psi_{s_p}(\xi_{s_p}) \sin^2 \phi_p \right] \\ & + \left[k_{T_p} \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \cos^2 \phi_p + \frac{1}{\alpha_p^2} k_{R_p} \Psi_{r_p}' \Psi_{s_p}' \cos^2 \phi_p \right]_{\xi_p = -1/2} \\ & + \left[(k_{z_p} + k_{z_{p-1}}) \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \cos^2 \phi_p + (k_{\theta_p} + k_{\theta_{p-1}}) \Psi_{r_p} \Psi_{s_p} \sin^2 \phi_p \right]_{\xi_p = \xi_{s_p}} \quad (5.111) \end{aligned}$$

となることと, 遠心力によるディスクの面内応力を計算する際に式(5.54), (5.55)ではなく式(5.108), (5.109)を用いることである.

5.6.2 シュラウドの質量を考慮した場合の数値計算例

シュラウドの質量を集中質量としてブレードに付加すると, 振動数方程式の右

辺の係数マトリクスには式(5.110)のような要素が現れるが、このマトリクスを対角行列にするためには式(5.62)のブレード部分の重み関数 $w(x)$ を

$$w(x) \equiv w(\xi_p) = 1 + \mu_{bs} \delta(\xi_p - \xi_{s_p}) \quad (5.112)$$

とするだけでよく、開始関数や漸化式などは変更する必要がない。表5-10に、 p 番目のブレードの先端 ($\xi_{s_p}=0.5$) に取り付けられたシュラウドの質量とブレードの質量との比 μ_{bs} を変えたときの $\Psi_r(\xi)$ の直交性を調べるために内積

$$I_{rs} = \int_{-1/2}^{1/2} [1 + \mu_{bs} \delta(\xi - \xi_s)] \Psi_r \Psi_s d\xi \quad (5.113)$$

を計算したものを示す。この表から、 μ_{bs} の値に関わらず $\Psi_r(\xi)$ は良好な直交性を有していることがわかる。

次に、ディスクを剛体とみなし、ブレード間のばねこわさを0として、剛体ハブに取り付けられて回転する、集中質量を有する片持ばりの計算を行った結果を表5-11に示す。この計算ではLee⁽⁸⁹⁾が有限要素法を用いて求めた結果との比較を行うために、ディスク（この場合は剛体ハブ）の半径とブレードの長さ比を $\alpha=1$ 、付加質量とブレードの質量の比は $\mu_{bs}=1$ とし、集中質量はブレード先端に付加されているものとした。本解析法により得られた結果はLeeによる結果と表に示されている桁数の範囲では完全に一致した。

図5-15に、8本のブレードを持ち、各ブレードの先端を全周にわたってシュラウドで綴られた系について、シュラウドの質量を4段階に変化させて振動数パラメータ Λ の変化を示す。図の横軸は回転速度である。ここで、SS'-1モードはブレードが片持ばりの1次の振動形で振動するブレードの主振動モード、SS'-2はディスクがかさ型（節直径、節円ともに0）で振動するディスクの主振動モード、そしてDA1-1はディスクが節直径1本、節円0で振動するディスクの主振動モードである。この図から、シュラウドの質量による振動数パラメータの変化は特にブレードの主振動モードにおいて顕著であり、また、ディスクの主振動モードにおいても回転速度が上昇するにつれて大きくなることがわかる。

次に、同じ系について、シュラウドの取り付け位置を変化させて振動数パラメータを計算した結果を図5-16と表5-12に示す。シュラウドとブレードの質

表 5 - 1 0 重み関数の変化と直交多項式の直交性の状況

r	s	μ_{bs}			
		0	0.1	0.2	1.0
1	1	1.000	1.100	1.200	2.000
1	2	-0.954×10^{-17}	0.347×10^{-16}	0.139×10^{-16}	-0.555×10^{-16}
1	3	-0.199×10^{-16}	-0.173×10^{-16}	-0.104×10^{-16}	-0.139×10^{-16}
1	4	-0.217×10^{-18}	0.434×10^{-18}	0.121×10^{-16}	0.867×10^{-17}
1	5	-0.171×10^{-17}	0.141×10^{-17}	-0.542×10^{-18}	-0.239×10^{-17}
1	6	0.234×10^{-18}	0.461×10^{-18}	-0.220×10^{-17}	-0.141×10^{-17}
1	7	0.294×10^{-18}	-0.139×10^{-18}	-0.949×10^{-18}	0.915×10^{-19}
1	8	-0.263×10^{-19}	-0.213×10^{-18}	-0.147×10^{-18}	0.672×10^{-18}
1	9	0.194×10^{-19}	-0.176×10^{-18}	0.139×10^{-18}	-0.114×10^{-18}
1	10	0.929×10^{-20}	0.299×10^{-19}	0.334×10^{-19}	-0.511×10^{-19}
2	2	0.833×10^{-1}	0.106	0.125	0.208
2	3	-0.108×10^{-18}	0.173×10^{-17}	0.867×10^{-17}	0.173×10^{-17}
2	4	-0.187×10^{-17}	-0.867×10^{-18}	-0.867×10^{-18}	0.651×10^{-18}
2	5	0.427×10^{-18}	0.217×10^{-18}	-0.705×10^{-18}	-0.117×10^{-17}
2	6	-0.169×10^{-19}	0.190×10^{-18}	-0.610×10^{-18}	0.183×10^{-18}
2	7	0.508×10^{-19}	-0.610×10^{-19}	-0.308×10^{-18}	-0.172×10^{-18}
2	8	0.129×10^{-18}	-0.158×10^{-18}	-0.618×10^{-19}	0.248×10^{-18}
2	9	0.394×10^{-20}	-0.364×10^{-19}	-0.191×10^{-20}	-0.151×10^{-19}
2	10	-0.541×10^{-19}	0.327×10^{-19}	0.376×10^{-19}	-0.235×10^{-19}
3	3	0.556×10^{-2}	0.754×10^{-2}	0.864×10^{-2}	0.111×10^{-1}
3	4	-0.745×10^{-19}	0.434×10^{-18}	-0.922×10^{-18}	-0.190×10^{-18}
3	5	-0.881×10^{-19}	-0.813×10^{-19}	-0.163×10^{-18}	0.779×10^{-19}
3	6	-0.524×10^{-20}	-0.102×10^{-19}	-0.474×10^{-19}	-0.568×10^{-19}
3	7	0.233×10^{-19}	-0.275×10^{-19}	-0.805×10^{-19}	0.394×10^{-19}
3	8	-0.334×10^{-20}	-0.220×10^{-19}	-0.226×10^{-19}	0.110×10^{-19}
3	9	0.330×10^{-20}	-0.193×10^{-19}	0.129×10^{-19}	-0.269×10^{-20}
3	10	0.217×10^{-20}	0.259×10^{-20}	0.239×10^{-20}	0.149×10^{-22}
4	4	0.357×10^{-3}	0.489×10^{-3}	0.534×10^{-3}	0.607×10^{-3}
4	5	0.508×10^{-20}	0.152×10^{-19}	0.322×10^{-19}	-0.203×10^{-19}
4	6	-0.551×10^{-20}	-0.157×10^{-19}	-0.233×10^{-19}	0.122×10^{-19}
4	7	0.635×10^{-21}	-0.519×10^{-20}	-0.109×10^{-19}	0.635×10^{-21}
4	8	0.310×10^{-20}	-0.646×10^{-20}	-0.152×10^{-20}	0.454×10^{-20}
4	9	0.830×10^{-21}	-0.622×10^{-21}	-0.357×10^{-21}	-0.821×10^{-21}
4	10	-0.211×10^{-20}	0.147×10^{-20}	0.135×10^{-20}	-0.937×10^{-21}
5	5	0.227×10^{-4}	0.305×10^{-4}	0.324×10^{-4}	0.347×10^{-4}
5	6	-0.376×10^{-20}	-0.392×10^{-20}	-0.635×10^{-20}	0.191×10^{-20}
5	7	-0.116×10^{-20}	-0.180×10^{-20}	-0.147×10^{-20}	0.110×10^{-20}
5	8	0.381×10^{-21}	-0.199×10^{-21}	0.850×10^{-21}	-0.736×10^{-22}
5	9	0.271×10^{-21}	-0.455×10^{-21}	0.414×10^{-22}	0.827×10^{-23}
5	10	0.635×10^{-22}	-0.248×10^{-22}	-0.128×10^{-21}	0.121×10^{-21}
6	6	0.143×10^{-5}	0.188×10^{-5}	0.196×10^{-5}	0.204×10^{-5}

表 5 - 1 1 先端に集中質量を持つ回転する片持ばりの振動数パラメータ Λ

【 $\mu_{bs}=1.0$, $\phi=0$, $\alpha=1$, $\varepsilon=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma=1.290 \times 10^{-2}$, $kT=kR=10^6$, $kZ=k\theta=0$, $R=10$ 】

Ω_0	1st		2nd	
	Present	Lee ⁽⁸⁹⁾	Present	Lee ⁽⁸⁹⁾
0	1.219	1.219	3.937	—
0.954	1.451	1.451	4.061	4.061
1.908	1.819	1.819	4.377	—
3.816	2.449	2.449	5.220	—
5.724	2.958	2.958	6.072	—
7.632	3.394	3.394	6.858	—
9.540	3.780	3.780	7.578	—

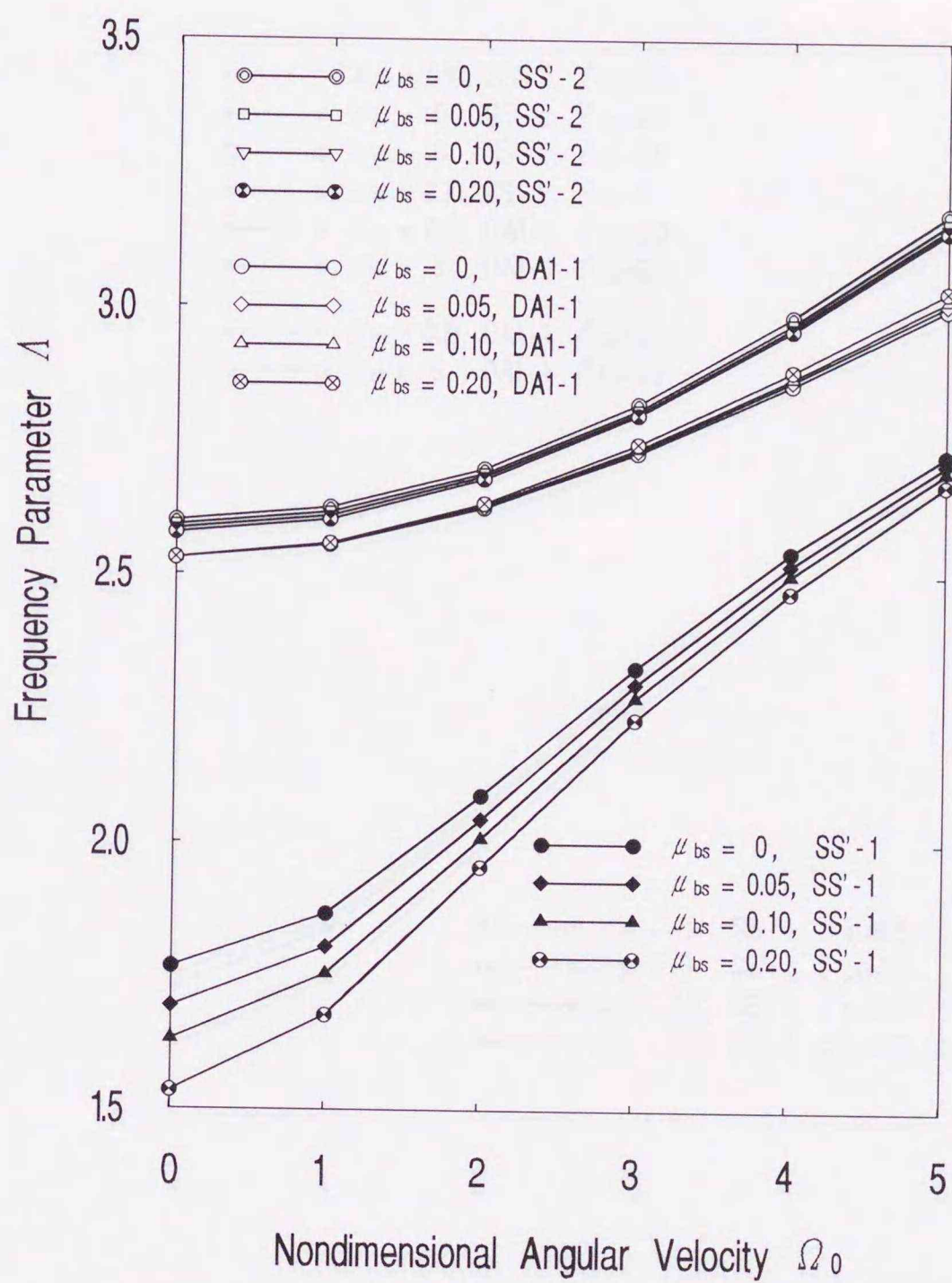


図 5 - 1 5 シュラウドの質量による回転速度 - 振動数曲線の変化
 【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{T_p}=k_{R_p}=10^6$, $k_{Z_p}=k_{\theta_p}=10^6$, $\xi_{S_p}=0.5$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

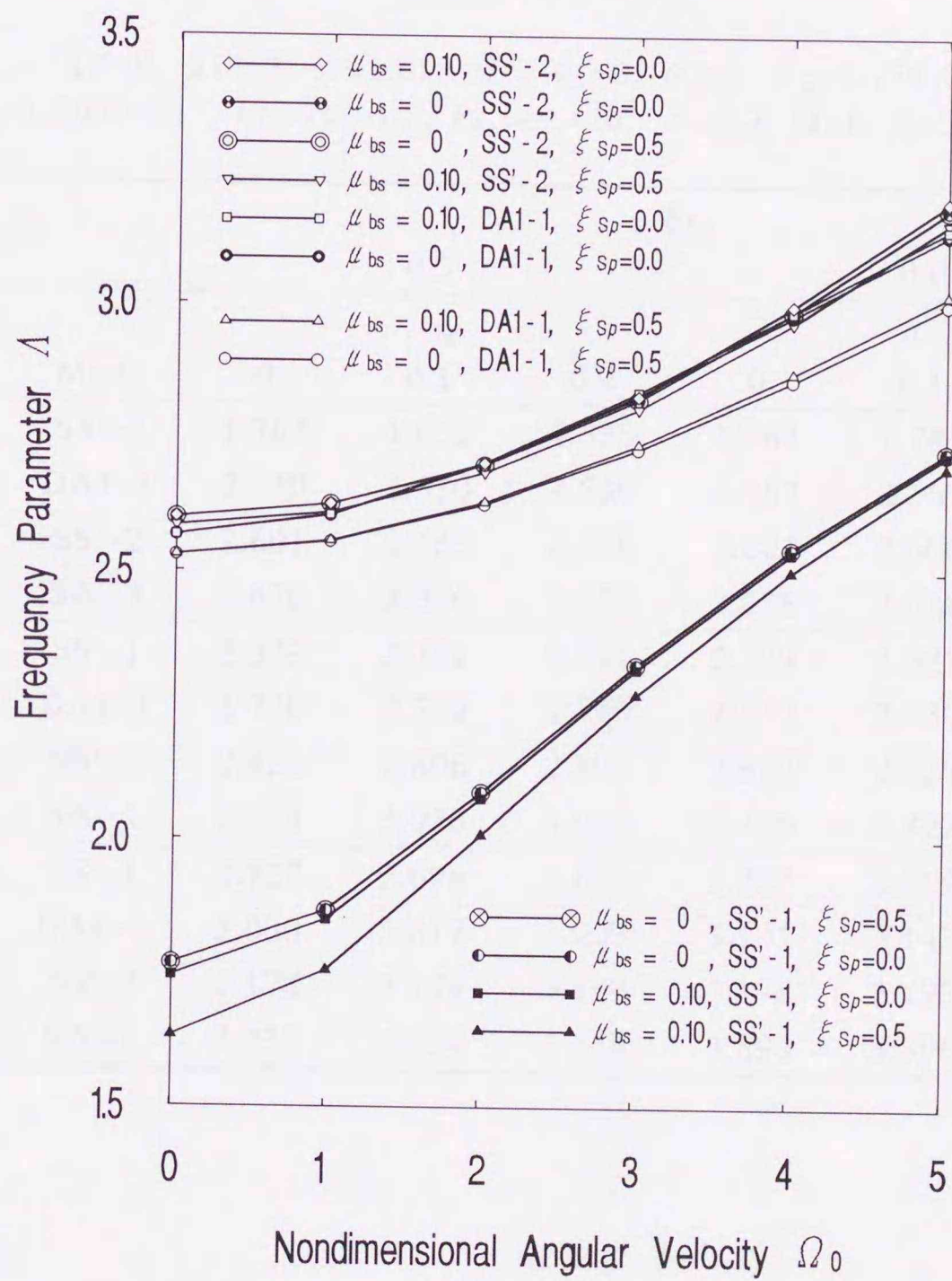


図 5 - 1 6 シュラウドの質量と取り付け位置による回転速度－振動数曲線の変化

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.179 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $k_{Tp}=k_{Rp}=10^6$, $k_{Zp}=k_{\theta p}=10^6$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

表5-12 シュラウドの質量を考慮したディスク・ブレード連成系の
振動数パラメータ Λ

【 $P=8$, $\beta=0.3$, $\mu=3.61 \times 10^{-2}$, $\phi_p=0$, $\alpha_p=1$, $\varepsilon_p=1.174 \times 10^{-2}$,
 $\gamma_p=1.290 \times 10^{-2}$, $kT_p=kR_p=10^6$, $kZ_p=k\theta_p=10^6$, $\nu=0.3$, $M=6$, $N=32$, $R_p=10$ 】

Ω_0	Mode	ξ_{s_p}					
		0.5			0.0		
		μ_{bs}	μ_{bs}		μ_{bs}	μ_{bs}	
		0	0.1	0.2	0	0.1	0.2
0	SS'-1	1.767	1.632	1.535	1.767	1.745	1.724
	DA1-1	2.530	2.530	2.530	2.567	2.567	2.567
	SS'-2	2.601	2.585	2.576	2.601	2.600	2.599
	SA'-1	3.676	3.676	3.676	3.028	3.028	3.028
3	SS'-1	2.329	2.271	2.232	2.329	2.321	2.312
	DA1-1	2.730	2.739	2.748	2.832	2.837	2.843
	SS'-2	2.822	2.806	2.801	2.822	2.829	2.836
	SA'-1	3.913	3.976	4.034	3.418	3.422	3.426
5	SS'-1	2.727	2.696	2.672	2.727	2.719	2.712
	DA1-1	3.000	3.017	3.033	3.131	3.142	3.152
	SS'-2	3.178	3.154	3.146	3.178	3.193	3.207
	SA'-1	4.232	4.354	4.456	3.890	3.896	3.902

量比は0と0.1の2通りとし、またシュラウドの取り付け位置は $\xi_{s_p}=0.5$ （ブレード先端）と $\xi_{s_p}=0$ （ブレード中央）の2通りとした。計算したモードのタイプは図5-15と同じである。図5-16をみるとSS'-1モードについては、シュラウドの質量を考慮しないと取り付け位置による差がほとんどないために振動数曲線は重なってしまっているが、シュラウドの質量を考慮すると取り付け位置による差がはっきりと現れることが分かる。これに対し、DA1-1モードではシュラウド質量を考慮する場合だけでなくしない場合にも取り付け位置による差がみられる。また、SS'-2モードに関してはシュラウド質量の有無、取り付け位置による差がほとんどみられない。

5.7 結 言

本章では、回転の効果を考慮してディスク・ブレード連成系の自由振動解析を行った。回転による効果はディスク、ブレードそれぞれについて遠心力によるポテンシャルエネルギーを評価し、それらをラグランジュ関数に取り込むことにより扱った。本章ではブレードの試験関数に加え、ディスクの半径方向試験関数にも直交多項式を用いたが、これにより解析ならびに数値計算がいっそう容易になった。また、ディスクの周方向試験関数には余弦関数だけでなく正弦関数も含んだ級数を用いたが、これにより任意のブレードにミスチューンが存在するような場合も含む、より一般的なディスク・ブレード連成系の取り扱いが可能となった。そしてこの手法により得られた振動数方程式を用いて周期対称な系に対して数値計算を実施し、様々な回転速度、ブレード本数について振動数パラメータ、振動モード形を求め、図表に示して考察を行った。それらをまとめると以下のようなになる。

- (1) ディスクの周方向試験関数に余弦関数と正弦関数の両方を用いると、対称軸に関して対称、逆対称なもの以外にもミスチューンなどがある場合も含めて一般的な取り扱いが可能となる。チューン系の場合、縮退したモード（D型モード）は対称モード（DS型）と逆対称モード（DA型）が重解となるが、本解析法により振動数パラメータについては、通常のコレス

キー分解，ハウスホルダー三重対角化，二分法の組合せによる固有値解法のサブルーチンを用いて十分な精度で計算ができる．また，振動モードについてはそのような縮退したモードについては固有ベクトルの計算精度が不十分で分離が完全でないものもあるが，適切なアルゴリズムのサブルーチンを使用することによりほぼ完全に分離することができる．ここでは，名古屋大学大型計算機センターで開発されたサブルーチンライブラリー NUMPAC-JENNFDを用いた．

- (2) 本解析法による結果と市販の有限要素法の構造解析ソフト N I S A II を用いた解析結果との比較を行い，本解析法の妥当性を確認するとともに，本解析法が計算効率の非常に高い手法であることを示した．
- (3) ブレード本数が増加すると D 型モードの種類が増加し，振動数バンドも拡大する．また，回転速度が上昇すると 1 次の振動数バンドは拡大し，2 次の振動数バンドは縮小する．
- (4) 振動数パラメータを縦軸に，回転速度を横軸にとってプロットした振動数曲線において，異なるモードの振動数曲線どうしが接近するとき，ブレードの本数により，それらが交差する場合と交差はしないが振動モード形の入れ替わりは生じる場合がある．この場合も第 3 章で述べたのと同様に，異なるモードタイプの振動数曲線は交差し，同じモードタイプの振動数曲線は交差せずにモードの入れ替わりを起こす．
- (5) シュラウドの質量をブレードに付加された集中質量として扱った解析も行い，本解析法によればシュラウドの質量を考慮したモデルに容易に拡張できることを示した．また，この場合，直交多項式を構成する際の重み関数にディラックの δ 関数が含まれるが，そのような場合でも直交多項式の構成には問題はなく，得られる多項式の直交性も良好であることを示した．そしてシュラウドの質量，取り付け位置を変化させて数値計算を行い，ブレードの主振動モードについてはシュラウド質量を考慮した場合としない場合で大きな差が生じることを明らかにした．

第6章 結 論

本研究では、複雑な形状をした機械構造物を等価な力学モデルに置き換えた「接続系」の振動問題をリッツ法を用いて解析するため、接続条件の取り扱いや、数値計算の安定性などの点から問題が多く、扱いづらいとされてきたディスク・ブレード連成系を取り上げ、その振動解析法と振動特性に関する基礎的な研究を行った。ここでは、ディスク・ブレード連成系を、内周が固定され、外周が自由な有孔円板とディスクの外周上に取り付けられ、長方形断面を有するはりとの接続系としてモデル化し、その振動をリッツ法を用いて解析した。このディスク・ブレード連成系に関してはこれまで数多くの研究がなされてきたが、それらは大胆な簡略化を行って大幅に自由度を減らしたモデルを扱ったものや、ブレードの数が少ない場合のみを扱ったものが多く、ミスチューンを含む実地的なタービンディスク・ブレードの振動問題を扱うことのできる手法が確立されているとはいえない状況である。また、リッツ法を用いて接続系の振動問題を扱ったものには、本研究で取り上げたディスク・ブレード連成系のような非常に多くのサブシステムからなる系を対象としたものは見当たらない。このように接続される構造物が多く、計算が大規模となるような系をリッツ法で解析する際には、接続条件の取り扱いに加えて、数値計算の安定性の点からも試験関数の選択に特に注意が必要である。本研究ではこれらの点について検討を行い、仮想ばねを導入して接続条件を扱う方法と直交性のある関数とを併用することで、解析ならびに数値計算上の大きなメリットが得られることを示した。本研究で行った研究の内容と得られた成果を要約すると以下ようになる。

第1章は緒論であり、本研究の目的と意義について述べると共に、ディスク・ブレード連成系の振動解析、仮想ばねを導入したリッツ法による接続系の解析、リッツ法の試験関数として直交多項式の使用、などに関するこれまでの研究動向と各章の概要を述べた。

第2章においては、接続系の振動解析をリッツ法で行う際に重要な問題となる試験関数の境界条件と接続条件の取り扱いについて述べ、変位を表す試験関数の幾何学的境界条件に接続条件を取り込む方法と接続点に仮想ばねを導入して接続条件を満たす方法とに関して、その妥当性と有効性について検討した。そして、前者に関しては、はりの接続系とディスク・ブレード連成系について、後者に関しては、はりの接続系について、それぞれ解析を行った。その結果、試験関数の幾何学的境界条件に接続条件を取り込む方法を用いると、はりの接続系に関しては、解の収束性、精度、計算の安定性ともに良好であるが、ディスク・ブレード連成系に関しては、ブレードの本数が増加すると数値計算上の問題から全ての固有値を正しく求めることが困難になることが分かった。仮想ばねを導入して接続条件を扱う方法では、境界条件や接続条件を特に意識せずに試験関数を選ぶことができ、これに加えて直交性のある関数を用いることによって運動エネルギーから導かれる係数マトリクスを完全に対角行列とすることができるため、仮想ばねの導入と直交性のある関数とを併用することはリッツ法による振動解析に際して極めて有効であることを、理論解析ならびに数値計算により示した。

第3章では、ディスク・ブレード連成系の自由振動を、仮想ばねを接続点に導入して接続条件を満足させ、変位関数の試験関数には直交性のある関数を使用することにより解析した。ここでは、試験関数としてディスクに対しては静止円板の自由振動を解いて決定され、半径方向にはベッセル関数、周方向には三角関数（ここでは余弦関数のみを考慮）を用いて表される円板の固有関数を用い、ブレードに対してはグラム・シュミットの直交化法を用いて構成される直交多項式を用いた。この方法により得られた振動数方程式は、系の運動エネルギーから得られる係数行列が対角マトリクスとなる。また、ディスク上に付加物が周期対称に配置されている場合のディスクの振動形は、周方向波数と付加物の数との間の特定の間隔を満たすような形で生じること、そのためにブレードの主振動モードの数はブレードの本数とともに増えることを示した。そして、周期対称性を有する系に対して数値計算を行い、振動数パラメータや振動モードを求め、ディスクとブレードのそれぞれ単独の固有振動数が接近している場合には振動数の分化により強連成モードが生じること、この強連成モードにはディスクとブレードが同位相

で振動するモードと逆位相で振動するモードの二つがあり、それぞれもとの固有振動数より低い値と高い値を取ることを明らかにした。また、ブレードの数が増えるとブレードの主振動振動数の幅が拡大し、強連成モードの場合には分化した固有振動数の差が大きくなることを示した。さらに、ブレードの長さやディスクの外半径との比による振動数パラメータの値をプロットすると、各モードの振動数曲線は同じモード型の振動数曲線どうしは交差せずにヴィーリングを起こすことを示し、強連成モードが生じるのは、このような振動数曲線のヴィーリング現象であることなどを明らかにした。以上のことから、本章で述べた手法によれば、ディスク・ブレード連成系に対しても数値計算を安定して行うことができることが示された。

第4章では、ディスクあるいはブレード上の一点に調和的な集中外力が作用する場合を考え、そのときの系の定常応答を解析した。そのために系の各エネルギーに加えて調和外力による仕事を求め、ラグランジュの方程式を用いて系の運動方程式を導いた。その際、ディスクとブレードそれぞれの曲げこわさを、内部減衰を考慮した複素量で近似し、また、接続条件は接続点に仮想のばねを導入して処理し、各要素の試験関数については第3章と同じものを用いて解析を行った。数値例として、8本の同一なブレードが接続された系を取り上げて数値計算を行い、励振振動数に対する系の応答曲線を求めた。そして、ブレードの主共振点付近の振動数で応答曲線のピークの数、そのときの共振振動数共に系の固有振動数とよく一致し、また、ディスク、ブレードそれぞれの主共振モードと両者がともに大きく振動する強連成モードが生じることが示された。これらのことは、シュラウドを持たない系、シュラウドを持つ系のいずれについても確認されたが、これは第3章の結果の妥当性を裏付けるものである。さらに、励振位置の変化により共振振動数はほとんど変化しないが、反共振振動数は変化することなどを明らかにするとともに、ブレードの主共振振動数のチューニングの可能性を検討した。

第5章では、実際のタービンシステムにより近いモデルとするため、回転による効果を考慮した解析、すなわち、ディスクとブレードに作用する遠心力によるポテンシャルエネルギーを考慮することにより回転の影響を取り込んだ解析を行った。まず、遠心力によるポテンシャルエネルギーの評価をディスク、ブレードそ

れぞれについて行い、その表示式を与え、その後、前章までの解析と同様にして、接続点に仮想ばねを導入し、直交性のある関数を試験関数に用いたリッツ法により振動数方程式を導いた。その際、より一般的なタービンディスク・ブレード系のモデルを考えるため、ディスクの周方向の変位関数を余弦関数と正弦関数の両者を考慮して展開したがこれにより、任意のブレードにミスチューンが存在する、より一般的なディスク・ブレード連成系の取り扱いが可能となった。また、ブレードの試験関数とともにディスクの半径方向の試験関数にもグラム・シュミットの直交化法により構成される直交多項式を用いた。これによって前章までの解析に比べて試験関数の計算がいっそう簡単になるとともに、より多くのブレードが接続された系に対しても数値計算を安定に実施することが可能となった。このようにして導かれた振動数方程式を用いて、回転速度やブレードの本数、シュラウドの有無など、さまざまな条件を変化させて数値計算を行い、それらが振動数、振動モードに与える影響について考察を行った。得られた結果の一部については、市販されている有限要素法ソフトによる計算結果との比較を行い、本解析法の妥当性を確認するとともに本解析法が数値計算において非常に効率の高い手法であることを示した。また、チューン系の場合縮退したモードは対称モードと逆対称モードが重解となるが、本解析法によれば振動数パラメータについては通常のコレスキー分解、ハウスホルダー三重対角化、二分法の組合せによる固有値解法のサブルーチンを用いて十分な精度で計算ができることを示し、振動モードについても適切なアルゴリズムの固有ベクトルの解法を用いることによりほぼ完全に分離することができることを示した。さらに、ブレード本数が増加すると縮退モードの種類が増加し、振動数バンドも拡大するが、回転速度の上昇によっても振動数バンドは拡大すること、また、回転速度による振動数パラメータの変化を示した振動数曲線において、異なるモードの振動数曲線どうしが接近するとき、第3章で述べたのと同様に、異なるモード型の振動数曲線は交差し、同じモード型の振動数曲線は交差せずにモードの入れ替わりを起こすことなどを明らかにした。

これらに加えて本章では、シュラウドの質量を、ブレードに付加された集中質量として取り扱った解析も行い、わずかな変更で容易にシュラウドの質量を考慮したモデルに拡張することができることを示した。この場合、直交多項式を構成する際の重み関数にディラックの δ 関数が含まれるが、そのような場合でも直交多

項式の構成には問題はなく，得られる多項式の直交性も良好であることを示した．そしてシュラウドの質量，取り付け位置を変化させて数値計算を行い，ブレードの主振動モードについてはシュラウド質量を考慮した場合としない場合とで大きな差異が生じることを明らかにした．

以上，本研究の概要と成果について述べてきた．ここで取り上げたディスク・ブレード連成系は，実際のタービンディスク，タービンブレードから見るとかなり簡略化したモデルとなっているが，これは本研究の主旨の一つが上述のような数多くのサブシステムを有する接続系の振動解析を効率よく行うための手法を提示することにあるためであり，本論文で提示した手法を用いれば，ブレードのねじりやディスク部分の変厚の影響をはじめとする様々な実際的な効果を含んだ系にモデルを拡張することが可能である．また各ブレードの形状や材料定数などに関するパラメータを変更することにより，ミスチューンのある系に対しても計算を行うことができる．

本論文で提示した解析法とここで得られた研究成果が，今後益々複雑化，大規模化が予想される機械構造物の振動解析法に対して大きな意義を持ち，さらに，より具体的なタービンディスク・ブレード系の振動解析に対しても重要な指針を与えるものと確信する．

謝 辞

本論文は、私が北海道大学大学院博士後期課程の3年間と修士課程の一部において行った研究の成果をまとめたものです。

本研究を行うにあたり、終始適切なご指導と多くの有益なご助言を賜るとともに、研究以外の面でも多大なお世話になった北海道大学工学部教授 山田 元先生、北海道大学工学部助教授 小林 幸徳 先生に謹んで感謝の意を表します。両先生のもとで、学部学生、大学院生として充実した6年間の学生生活を送ることができたことを幸せに感じています。

また、本論文の作成にあたり、有益なご意見とご検討を頂きました北海道大学工学部 岸田 路也 教授、三上 隆 教授に対し、深く謝意を表します。

さらに、本研究を行うきっかけを与えて下さるとともに、種々のご協力を頂いた三菱重工業株式会社高砂研究所次長 藤田 勝久氏、ならびに同研究所振動・騒音研究室の各位に謝意を表します。

最後に、大学院での研究に対する深い理解と、物心両面にわたる数々の援助を続けてくれた両親に心から感謝いたします。

参考文献

- (1) 白木・梅村・角家, “タービン長翼の振動特性(群翼の振動特性)”, 三菱重工技報, **9-5**(1972), 577-584.
- (2) 田中, “タービン翼・円板の連成振動の解析”, 三菱重工技報, **14-2**(1977), 312-320.
- (3) Huang W., “Free and Forced Vibration of Closely Coupled Turbomachinery Blades”, *AIAA Journal*, **19-7**(1981), 918-924.
- (4) 志賀, “蒸気タービン翼の固有振動特性(第2報, 群翼の振動への円板の影響)”, 日本機械学会論文集, **49-446**, C(1983), 1681-1688.
- (5) 道村・長松, “羽根車の振動(第4報, 車盤と翼の連成振動の解析・その2)”, 日本機械学会論文集, **45-399**, C(1979), 1206-1216.
- (6) 道村・長松・池内・白井, “軸流タービン翼群の車盤との連成を考慮した振動解析”, 日本機械学会論文集, **47-415**, C(1981), 242-250.
- (7) 名村, “蒸気タービン翼の振動特性(第1報, 翼とディスクの連成振動の解析)”, 日本機械学会論文集, **51-466**, C(1985), 1245-1254.
- (8) 名村, “蒸気タービン翼の振動特性(第2報, 翼とディスクの連成振動の共振条件と共振応力の計算法)”, 日本機械学会論文集, **52-474**, C(1986), 724-729.
- (9) Omprakash V. and Ramamurti V., “Natural Frequencies of Bladed Disks by a Combined Cyclic Symmetry and Rayleigh-Ritz Method”, *Journal of Sound and Vibration*, **125-2**(1988), 357-366.
- (10) Omprakash V. and Ramamurti V., “Coupled Free Vibration Characteristics of Rotating Tuned Bladed Disk Systems”, *Journal of Sound and Vibration*, **140-3**(1990), 413-435.
- (11) Balasubramanian P., Jagadeesh J. G., Suhas H. K., Srivastava A. K. and Ramamurti V., “On the Use of the Ritz-Wilson Method for the Dynamic Response Analysis of Cyclic Symmetric Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, **164-2**(1993), 193-206.
- (12) Wagner L. F. and Griffin J. H., “A Continuous Analog Model for Grouped-Blade Vibration”, *Journal of Sound and Vibration*, **165-3**(1993), 421-438.
- (13) 斎藤・名村・高住・岡部・池内, “複合周期構造を持つタービン翼の振動特性”, 日本機械学会論文集, **59-567**, C(1993), 3275-3282.

- (14) Wildheim S. J., "Excitation of Rotationally Periodic Structures" , *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, **46**(1979), 878-882.
- (15) Lueschen G. G. G. and Bergman L. A., "On the Free Vibration of Mono-Coupled Periodic Distributed Parameter Systems" , *Journal of Sound and Vibration*, **168**-3(1993), 407-427.
- (16) Ewins D. J., "The Effects of Detuning upon the Forced Vibrations of Bladed Disks" , *Journal of Sound and Vibration*, **9**-1(1969), 65-79.
- (17) Ewins D. J., "A Study of Resonance Coincidence in Bladed Discs" , *Journal of Mechanical Engineering Science*, **12**-5(1970), 305-312.
- (18) Ewins D. J., "Vibration Characteristics of Bladed Disc Assemblies" , *Journal of Mechanical Engineering Science*, **15**-3(1973), 165-186.
- (19) Ewins D. J. and Han Z. S., "Resonant Vibration Levels of a Mistuned Bladed Disk" , *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **106**(1984), 211-217.
- (20) El-Bayoumy L. E. and Srinivasan A. V., "Influence of Mistuning on Rotor-Blade Vibrations" , *AIAA Journal*, **13**-4(1975), 460-464.
- (21) Stange W. A. and MacBain J. C., "An Investigation of Dual Mode Phenomena in a Mistuned Bladed Disk" , *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **105**(1983), 402-407.
- (22) Crawley E. F., "In-Plane Inertial Coupling in Tuned and Severely Mistuned Bladed Disks" , *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power*, **105**(1983), 585-590.
- (23) Khader N. and Masoud S., "Vibration of Mistuned Bladed Disks Supported by Flexible Continuous Shafts" , *Journal of Sound and Vibration*, **149**-3 (1991), 471-488.
- (24) Rzadkowski R., "The Partial Admission of Tuned and Mistuned Bladed Disks" , *Journal of Sound and Vibration*, **171**-2(1994), 201-217.
- (25) Rzadkowski R., "The General Model of Free Vibrations of Mistuned Bladed Disks, Part I: Theory" , *Journal of Sound and Vibration*, **173**-3(1994), 377-393.
- (26) Rzadkowski R., "The General Model of Free Vibrations of Mistuned Bladed Disks, Part II: Numerical Results" , *Journal of Sound and Vibration*, **173**-3 (1994), 395-413.

- (27) 金子・間瀬・藤田・長嶋, “ミスチューンがある翼・ディスク系の応答解析”, 日本機械学会論文集, **58**-547, C(1992), 744-749.
- (28) Kaza K. R. V. and Kielb R. E., “Flutter and Response of a Mistuned Cascade in Incompressible Flow”, *AIAA Journal*, **20**-8(1982), 1120-1127.
- (29) Kaza K. R. V. and Kielb R. E., “Flutter of Turbofan Rotors with Mistuned Blades”, *AIAA Journal*, **22**-11(1984), 1618-1625.
- (30) Dugundji J. and Bundas D. J., “Flutter and Forced Response of Mistuned Rotors Using Standing Wave Analysis”, *AIAA Journal*, **22**-11(1984), 1652-1661.
- (31) Hodges C. H. and Woodhouse J., “Vibration Isolation from Irregularity in a Nearly Periodic Structures: Theory and Measurements”, *Journal of Acoustical Society of America*, **74**-3(1983), 894-905.
- (32) Valero N. A. and Bendiksen O. O., “Vibration Characteristics of Mistuned Shrouded Blade Assemblies”, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **108**(1986), 293-299.
- (33) Wei S. -T. and Pierre C., “Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part I: Free Vibrations”, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **110**(1988), 429-438.
- (34) Wei S. -T. and Pierre C., “Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part II: Forced Vibrations”, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **110**(1988), 439-449.
- (35) Bendiksen O. O., “Mode Localization Phenomena in Large Space Structures”, *AIAA Journal*, **25**-9(1987), 1241-1248.
- (36) Cornwell P. J. and Bendiksen O. O., “Localization of Vibrations in Large Space Reflectors”, *AIAA Journal*, **27**-2(1989), 219-226.
- (37) Cornwell P. J. and Bendiksen O. O., “Numerical Study of Vibration Localization in Disordered Cyclic Structures”, *AIAA Journal*, **30**-2(1992), 473-481.
- (38) Pierre C. and Cha P. D., “Strong Mode Localization in Nearly Periodic Disordered Structures”, *AIAA Journal*, **27**-2(1989), 227-241.

- (39) Yuan J. and Dickinson S. M., "On the Use of Artificial Springs in the Study of the Free Vibrations of Systems Comprised of Straight and Curved Beams" , *Journal of Sound and Vibration*, **153**-2(1992), 203-216.
- (40) Yuan J. and Dickinson S. M., "The Flexural Vibration of Rectangular Plate Systems Approached by Using Artificial Springs in the Rayleigh-Ritz Method" , *Journal of Sound and Vibration*, **159**-1(1992), 39-55.
- (41) Yuan J. and Dickinson S. M., "On the Continuity Conditions Enforced When Using Artificial Springs in the Rayleigh-Ritz Method" , *Journal of Sound and Vibration*, **161**-1(1993), 538-544.
- (42) Yuan J. and Dickinson S. M., "The Free Vibration of Circularly Cylindrical Shell and Plate Systems" , *Journal of Sound and Vibration*, **175**-2(1994), 241-263.
- (43) Cheng L. and Nicolas J., "Free Vibration Analysis of a Cylindrical Shell-Circular Plate System with General Coupling and Various Boundary Conditions" , *Journal of Sound and Vibration*, **155**-2(1992), 231-247.
- (44) Cheng L., "Fluid-Structural Coupling of a Plate-Ended Cylindrical Shell: Vibration and Internal Sound Field" , *Journal of Sound and Vibration*, **174**-5(1994), 641-654.
- (45) Bhat R. B., "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Ritz Method" , *Journal of Sound and Vibration*, **102**-4(1985), 493-499.
- (46) Bhat R. B., "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method" , *Journal of Sound and Vibration*, **105**-2(1986), 199-210.
- (47) Rajalingham C., Bhat R. B. and Xistris G. D., "Natural Frequencies and Mode Shapes of Elliptic Plates with Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials as Assumed Shape Functions" , *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, **115**(1993), 353-358.
- (48) Kim C. S. and Dickinson S. M., "On the Analysis of Laterally Vibrating Slender Beams Subject to Various Complicating Effects" , *Journal of Sound and Vibration*, **122**-3(1988), 441-455.
- (49) Kim C. S. and Dickinson S. M., "On the Lateral Vibration of Thin Annular and Circular Composite Plates Subject to Certain Complicating Effects" , *Journal of Sound and Vibration*, **130**-3(1989), 363-377.

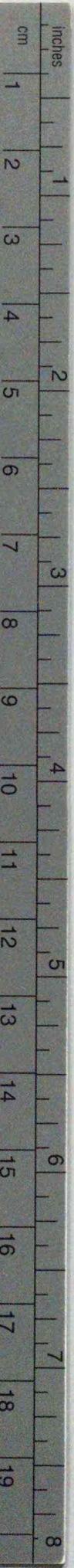
- (50) Kim C. S. and Dickinson S. M., "On the Free, Transverse Vibration of Annular and Circular, Thin, Sectorial Plates Subject to Certain Complicating Effects", *Journal of Sound and Vibration*, **134**-3 (1989), 407-421.
- (51) Lam K. Y., Hung K. C. and Chow S. T., "Vibration Analysis of Plates with Cutouts by the Modified Rayleigh-Ritz Method", *Applied Acoustics*, **28**(1989), 49-60.
- (52) Liew K. M. and Lam K. Y., "Application of Two-Dimensional Orthogonal Plate Function to Flexural Vibration of Skew Plates", *Journal of Sound and Vibration*, **139**-2(1990), 241-252.
- (53) Liew K. M. and Lam K. Y., "A Set of Orthogonal Plate Functions for Flexural Vibration of Regular Polygonal Plates", *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, **113**(1991), 182-186.
- (54) Liew K. M. and Lam K. Y., "A Rayleigh-Ritz Approach to Transverse Vibration of Isotropic and Anisotropic Trapezoidal Plates Using Orthogonal Plate Functions", *International Journal of Solids and Structures*, **27**-2 (1991), 189-203.
- (55) Liew K. M. and Lam K. Y., "Vibrational Response of Symmetrically Laminated Trapezoidal Composite Plates with Point Constraints", *International Journal of Solids and Structures*, **29**-12 (1992), 1535-1547.
- (56) Liew K. M., "Vibration of Eccentric Ring and Line Supported Circular Plates Carrying Concentrated Masses", *Journal of Sound and Vibration*, **156**-1(1992), 99-107.
- (57) Liew K. M., "Frequency Solutions for Circular Plates with Internal Supports and Discontinuous Boundaries", *International Journal of Mechanical Science*, **34**-7(1992), 511-520.
- (58) Liew K. M., "Treatments of Over-Restrained Boundaries for Doubly Connected Plates of Arbitrary Shape in Vibration Analysis", *International Journal of Solids and Structures*, **30**-3(1993), 337-347.
- (59) Lam K. Y., Liew K. M. and Chow S. T., "Use of Two-Dimensional Orthogonal Polynomials for Vibration Analysis of Circular and Elliptical Plates", *Journal of Sound and Vibration*, **154**-2(1992), 261-269.
- (60) 山田・小林・富岡・藤田・金子, "円板-はり接続系の振動解析", 日本機械学会講演論文集, No.920-55(ⅢA)(1992), 84-87.

- (61) Yamada G., Kobayashi Y. and Tomioka T., "Vibration Analysis of Cantilever Beam Systems Which Consist of Two Segments by Ritz Method with Various Combinations of the Admissible Functions", *Journal of Sound and Vibration*, **170**-2(1994), 280-288.
- (62) 山田・小林・富岡, "周期構造を有する円板-はり接続系の振動解析", 日本機械学会論文集, **60**-575, C(1994), 2213-2219.
- (63) 伏見・赤井, "直交関数系", (1981), 共立出版.
- (64) 森口・宇田川・一松, "岩波数学公式Ⅱ 級数・フーリエ解析", (1957), 岩波書店.
- (65) Irie T. and Yamada G., "The Free Vibration of a Circular Plate Elastically Supported on Some Circular Arcs", *Proceedings of the XIth Conference, Dynamics of Machines, Prague, Liblice, Czechoslovakia*, (1977), 173-178.
- (66) Irie T. and Yamada G., "Free Vibration of Circular Plate Elastically Supported at Some Points", *Bulletin of the JSME*, **21**-161(1978), 1602-1609.
- (67) 入江・山田・青村, "放射状補強材を有する有孔円板の自由振動", 日本機械学会論文集, **45**-393, C(1979), 518-525.
- (68) Irie T., Yamada G. and Aomura S., "Free Vibration of Radially Stiffened Annular Plate", *Bulletin of the JSME*, **23**-175(1980), 76-82.
- (69) Irie T., Yamada G. and Aomura S., "Vibration and Stability of Stiffened Annular Plates", *Journal of Acoustical Society of America*, **72**-2(1982), 466-471.
- (70) Irie T., Yamada G. and Tanaka K., "Free Vibration of a Circular Plate Elastically Restrained Along Some Radial Segments", *Journal of Sound and Vibration*, **89**-3(1983), 295-308.
- (71) Loewy R. G. and Khader N., "Structural Dynamics of Rotating Bladed-Disk Assemblies Coupled with Flexible Shaft Motions", *AIAA Journal*, **22**-9(1984), 1319-1327.
- (72) Shahab A. A. S. and Thomas J., "Coupling Effects of Disc Flexibility on the Dynamic Behaviour of Multi Disc-Shaft Systems", *Journal of Sound and Vibration*, **114**-3(1987), 435-452.
- (73) Jei Y. -G. and Lee C. -W., "Does Curve Veering Occur in the Eigenvalue Problem of Rotors?", *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, **114**(1992), 32-36.

- (74) Nair P. S. and Durvasula S., "On Quasi-Degeneracies in Plate Vibration Problems", *International Journal of Mechanical Science*, **15**(1973), 975-986.
- (75) Leissa A. W., "On a Curve Veering Aberration", *Journal of Applied Mathematics and Physics*(ZAMP), **25**(1974), 99-111.
- (76) Perkins N. C. and Mote C. D. Jr., "Comments on Curve Veering in Eigenvalue Problems", *Journal of Sound and Vibration*, **106**-3(1986), 451-463.
- (77) Pierre C., "Mode Localization and Eigenvalue Loci Veering Phenomena in Disordered Structures", *Journal of Sound and Vibration*, **126**-3(1988), 485-502.
- (78) Chen P. -T. and Ginsberg J. H., "On the Relationship Between Veering of Eigenvalue Loci and Parameter Sensitivity of Eigenfunctions", *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, **114**(1992), 141-148.
- (79) 富岡・山田・小林, "周期構造を有する円板-はり接続系の定常応答", 日本機械学会論文集, (1995年3月掲載決定).
- (80) Chi R. M. and Srinivasan A. V., "Some Recent Advances in the Understanding and Prediction of Turbomachine Subsonic Stall Flutter", *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **107**(1985), 408-417.
- (81) Khader N. and Loewy R. G., "Shaft Flexibility Effects on the Forced Response of a Bladed-Disk Assembly", *Journal of Sound and Vibration*, **139**-3(1990), 469-485.
- (82) Tomioka T., Kobayashi Y. and Yamada G., "Free Vibration of Rotating Disk-Blade Coupled Systems by Using Artificial Springs and Orthogonal Polynomials", *Journal of Sound and Vibration*, (to be published).
- (83) Carnegie W., "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods", *Journal of Mechanical Engineering Science*, **1**-3(1959), 235-240.
- (84) 村田, "方程式のたちの良し, 悪しと計算機", 北海道大学大型計算機センターニュース, **13**-3(1981), 17-40.
- (85) 村田, "線形代数と線形計算法序説", (1986), サイエンス社.

- (86) HITAC数値計算副プログラム・ライブラリマニュアル, “MSL 機能編, 第1分冊, 線形計算”, 8080-7-003(1974), 日立製作所.
- (87) 二宮, “ライブラリー・プログラム利用の手引き 数値計算編: N U M P A C Vol.1”, 名古屋大学大型計算機センター, (1991).
- (88) “N I S A II / D I S P L A Y III Training Manual”, C R C 総合研究所.
- (89) Lee H. -P., “Vibration on an Inclined Rotating Cantilever Beam with Tip Mass”, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, **115**(1993), 241-245.

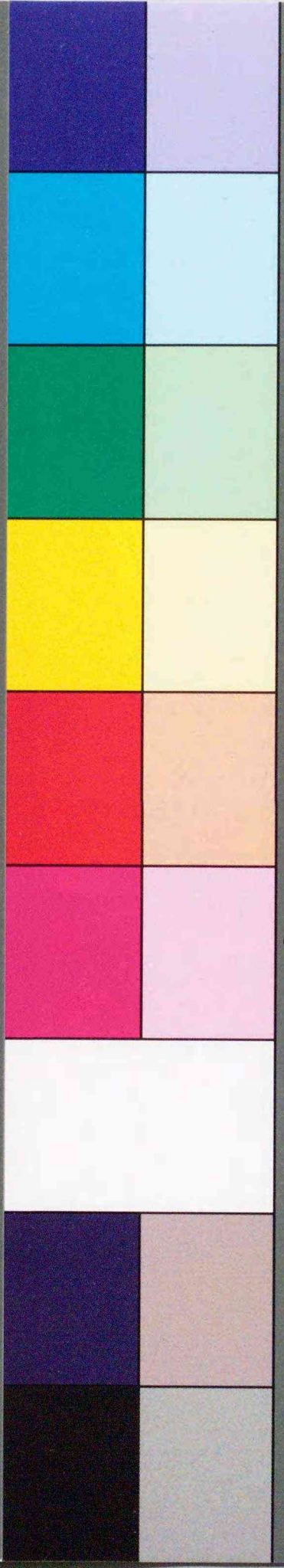
仁徳天皇の御宇



Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

