Title	ファジィ構造モデリング法に関する研究
Author(s)	三田村, 保
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第3639号
Issue Date	1995-03-24
DOI	https://doi.org/10.11501/3082642
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/50167
Type	doctoral thesis
File Information	000000285093.pdf

ファジィ構造モデリング法に関する研究

三田村　保

1

ファジィ構造モデリング法に関する研究

三田村　保

目次

表目次

図目次

第 1 章

序論

本研究はファジィ構造モデリング法に関する研究である．ファジィ構造モデリング法とは曖昧模糊とした複雑な対象をファジィ二項関係を用いて分類，整理する手法である．本論文では，従来のファジィ構造モデリング法に関する問題点を整理し，これらの問題点を解決するために，基礎理論としてファジィ部分可到達行列理論を提案し，この理論を用いて柔軟なファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy を提案する．さらに知識獲得支援法への応用を通して FISM/fuzzy の有用性を述べる．

1.1　背景・目的

科学技術の進歩・発展に伴い，対象とするシステムは，自然科学，社会学，人文科学の領域に限らず，これらの実際面への応用分野においても，ますます大規模化，複雑化しつつ

あり，またその一方で精緻化も求められている．例えば，大規模な物的生産システム，経営管理システム，交通・輸送に関するネットワークシステム，住宅，医療，福祉に関する社会システムである．

このようなシステムを解析することは，極めて困難である．そこには政治的，経済的，技術的な要因や構成員の意識や価値観の多様性等の要因が潜在的，顕在的に複雑に絡み合って相互的に作用するからである．これらの問題を解決するためには，その問題を分析し，合目的に構造化する必要がある．

このような問題を取り扱う方法論として代表的な手法の一つに構造モデリング法が提案されている．構造モデリング法とは，対象を構成要素集合とその上に定義される二項関係に注目し，分類，整理する方法である．構造モデリング法の代表的なものに，KJ 法や ISM や DEMATEL などがある [1][2].

本論文では，これらの構造モデリング法のなかでも，ISM(Interpretive Structural Modeling) に注目する．ISM は Warfield によって開発された構造モデリング法である．ISM ではシステム構成要素集合とその上の反射的かつ推移的二項関係 (擬順序関係) に着目し，要素間の一対比較によって求められる要素間の従属関係から全体の構造を把握しようとする．ISM は工学の問題や社会問題，教育問題等の様々な分野で利用され，その効果が定着している．しかしながら，このような応用が広がるにつれて，利用者の立場からより使い易いツールへの要求，或いは更に高度な機能への要求が高まって来た．つまり，人間の思考過程の柔軟性，人間の判断の曖昧性を考慮したシステムの開発である．しかし，従来の ISM の理論の枠組みではこれらの要求に対処することが出来なかった．

これらの要求を満たすべく，人間の自由な思考や柔軟な発想を考慮して従来の ISM にはない機能を付加した，構造モデリング法 FISM(Flexible ISM)[3] ~ [8] が開発された．FISM は要素を引き出すこと (発散思考) とこれらの要素を整理し，体系化を行うこと (収束思考) を相補的に支援する構造モデリング法である．FISM において新たに付加された機能とは，関係の修正，要素の追加，削除の機能，同一の問題について複数の構造モデルが得られた場合の合意形成の機能が挙げられる．

また，人間の判断の曖昧さを考慮したシステムが開発されている．即ち，ある要素二項対が "関係にある，ない" の二値的判断から関係の度合いを考慮するというものである．要素間の二項関係の有無を従属関係の曖昧さを許容し，ファジィ化したファジィ構造モデリング法の代表的なものとしては Tazaki の FSM[9, 10] が考案されている．FSM ではファジィ二項関係を導入することにより ISM に比較して利用上の制約を緩和し，多元的価値が錯綜する対象の構造化を行うことが可能となった．しかし FSM は，ファジィ二項関係に特別な条件は要求されない代わりに，ファジィ二項関係の推移性を利用した無矛盾な具象化や一対比較の効率化は考慮されていない．

そこで，本論文では，従来のファジィ構造モデリング法にはない思考過程支援機能を付加した，FISM のファジイ版への自然な拡張としてのファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy を提案する [11] ~ [20].

FISM/fuzzy においては要素間の二項関係のファジィ化することに加えて FISM のもつ構造化における柔軟性をも実現しようとする．FISM/fuzzy 過程は，問題設定，関係定義，具象化，構造化，描画の五つの過程からなる．このうちの重要な部分を占めるのが具象化

過程である．FISM/fuzzy の具象化過程においては原則的に構造モデル作成者が要素間の一対比較を行って要素間の関係を入力する．しかし，大規模かつ複雑な問題の構造化においては一対比較の回数が膨大となり，それらのすべてをモデル作成者が入力するのは実際には不可能といっても良い．一対比較の回数の削減が可能となるような構造化の方法の開発が大規模問題への適用には必要不可欠である．

本論文では，従来のファジィ構造モデリング法に関する問題点を整理し，これらの問題点を解決するために，基礎理論としてファジィ部分可到達行列理論を提案し，この理論を用いて柔軟なファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy を提案する．さらに知識獲得支援法への応用を通して FISM/fuzzy の有用性を述べる．

1.2　論文の構成

本論文の構成は以下の通りである．

第 2 章では数学的準備として，本研究が基礎を置くファジィ二項関係，特にファジィ構造モデリング法において利用される反射的かつ推移的な性質を持つファジィ可到達関係について概説し，本論文で用いる諸定義，諸記号について述べる．さらに本論文の基礎となる構造モデリング法 FISM とファジィ構造モデリング法 FSM について述べ，ファジィ構造モデリング法における問題点について検討する．

第 3 章ではファジィ構造モデリング法で取り扱うファジィ可到達行列について述べ，その含意関係を明らかにする．ファジィ可到達行列は，その反射的かつ推移的な性質より，行

列要素間に互いの値を制約する含意関係が存在する．本章において，その行列要素間の含意関係を解明し，更に対話的にファジィ可到達行列を生成するための理論として，ファジィ部分可到達行列とファジィ部分可到達行列更新のための含意規則について検討する．ファジィ部分可到達行列は，FISM の基礎理論となる部分可到達行列をファジィ化した行列であり，ファジィ可到達行列の拡張である．含意規則は，ファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えたときに，新たな行列が再びファジィ部分可到達行列となるために，他の行列要素の値を決定する規則である．ファジィ部分可到達行列と含意規則を利用することによって，柔軟にファジィ可到達行列を生成することが可能となる．

第 4 章ではファジィ部分可到達行列と含意規則を利用した，ファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy の構成，機能について述べる．FISM/fuzzy によるモデリングの実行を“FISM/fuzzy セッション” と呼ぶ．FISM/fuzzy セッションにおいては対象を有限集合 S と $S \times S$ 上のファジィ二項関係 R の組 $< S, R >$ としてモデリングする．FISM/fuzzy セッションは問題設定，関係定義，具象化，構造化，描画の五つのプロセスより構成される．更にセッションの効率的かつ柔軟に行うための戦略として，要素対選択戦略を述べ，更に実験を通して戦略の有用性を検討する．

第 5 章では知識獲得支援法への FISM/fuzzy の応用について述べる．エキスパート・システムなどの知識ベースを構築するためには，知識源である専門家からの知識獲得が必要である．専門家が，その専門領域の問題解決を行う際に利用している知識は，断片的に保持され，必要に応じて適宜利用していると思われる．このような断片的な知識を抽出し，断片的な知識の関係を分析・整理することで，専門家の高次な知識を獲得することが可能

となる．知識獲得とは，専門家に自己の持つ知識の発想させ，知識の整理を行うことであるが，この専門家からの知識獲得は困難な作業であり，知識ベース構築のボトルネックとなっていて，種々の知識獲得支援法が提案されている．従来の知識獲得支援法からの問題点として，いかに専門家に問題領域に関連する必要な断片的知識を発想させ，知識の関係を整理するかということが挙げられる．この知識の発想，知識間の関係の整理は，知識の欠落，矛盾を招くとともに，専門家の知識獲得に対する負担が大きい．FISM/fuzzy は，利用者が柔軟に知識構造をモデル化することが可能であり，入力作業の削減効果が大きいことから，知識獲得支援法への応用が考えられる．本章では知識獲得支援法への応用を通して FISM/fuzzy の有用性を述べる．

第 6 章では本論文の内容を総括する．本研究の全体的なまとめと FISM/fuzzy における今後の課題について述べている．

第 2 章

数学的準備

本章では数学的準備として，本研究が基礎を置くファジィ二項関係，特にファジィ構造モデリング法において利用される反射的かつ推移的な性質を持つファジィ可到達関係について概説し，本論文で用いる諸定義，諸記号について述べる．さらに本論文の基礎となる構造モデリング法 FISM とファジィ構造モデリング法 FSM について述べ，ファジィ構造モデリング法における問題点について検討する．

2.1 ファジィ関係

2.1.1 ファジィ関係

本研究で扱うファジィ構造モデリングはその基をファジィ理論に置いている．そこで，本節ではファジィ理論のうち，本研究に密接に関連するファジィ関係とその行列表現である

ファジィ関係行列について概説する [21, 22].

ファジィ関係は物と物との間の曖昧な関係をファジィ集合として記述したものである．これに対して，非ファジィ(クリスプ) 関係は物と物との明確な関係を非ファジィ集合として記述したものである．ファジィ関係は数学におけるこの関係概念をファジィ化したものである．例えば，日常生活で普通に用いられる人間同士の "親しい"，"似ている" など，或いは，多様な場面で用いられる "順序"，"因果" などの関係の概念の多くは一般に曖昧なものであり，必ずしも関係の "有る無し" という二値的な意味で用いられているわけではない．即ち，日常的に使用されている関係という言葉の多くは関係の強さや度合いといった曖昧な概念を含んでいると考えられる．一方，数学における関係の概念にはそのような曖昧な概念は含まれておらずその定義は明確である．以下にそれを示す．

定義 2.1.1 (関係)

集合 X, Y に対して，直積 $X \times Y$ の部分集合 R を X と Y の間の (二項) 関係という．$X = Y$ ならば，$X \times X$ の部分集合 R を X 上の関係という．なお，$(x, y) \in R, x \in X, y \in Y$ のとき，xRy と書くこともある．特性関数 χ_R を用いて書けば，

$$\chi_R(x, y) = \begin{cases} 1 : (x, y) \in R \\ 0 : (x, y) \notin R \end{cases} \tag{2.1}$$

となる．

次に，ファジィ関係の定義を示す．

定義 2.1.2 (ファジィ関係)

集合 $X=\{x\}$ と 集合 $Y=\{y\}$ との間のファジィ関係 R は, 直積 $X\times Y$ 上のファジィ集合であり, そのメンバーシップ関数μは

$$\mu_R\ :\ X\times Y\ \rightarrow\ [0,1] \tag{2.2}$$

のように表される．XとYの任意の元xとyに対するRのメンバーシップ値 $\mu_R(x,y)$ は閉区間 $[0,1]$ の中の適当な実数値をもち，x と y との間の関係の度合いを意味する．即ち，1 に近ければ近いほどファジィ関係 R が満たされる度合いが高く，0 に近いほど満たされない度合いが高いことを示している．

ファジィ関係は，行列によって表すことができる．

定義 2.1.3 (ファジィ関係行列)

$X\times Y$におけるファジィ関係をRとし，$\mu_R(x,y)$, $(x\in X,\ y\in Y)$ なるメンバーシップ関数で特性づけらているとする．ここで，X,Yがそれぞれ $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}, Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ なる有限集合とすると，$X\times Y$におけるファジィ関係 Rは次のような $m\times n$ 型行列のファジィ関係行列 Mによって表すことができる．行列 Mの各要素 m_{ij}は，$R(i,j)$ のメンバーシップ関数$\mu_R(i,j)$ の値であり， $[0,1]$ の実数値をとる．

$$M=[m_{ij}] \tag{2.3}$$

本論文では，特に断らない限りファジィ関係はファジィ関係行列で取り扱う．

2.1.2　ファジィ関係の演算

ファジィ関係に対しては以下のような種々の演算が定義される．

定義 2.1.4 (**ファジィ関係の和** $R1 \cup R2$)

$$R1 \cup R2 = [\max(r1_{ij}, r2_{ij})] \tag{2.4}$$

定義 2.1.5 (**ファジィ関係の合成** $R1 \circ R2$)

$$R1 \circ R2 = [\max_k(\min(r1_{ik}, r2_{kj}))] \tag{2.5}$$

本論文では特に断らない限りファジィ関係の合成，ファジィ行列の積は $\max - \min$ 合成を用いる．

定義 2.1.6 (**ファジィ関係の包含** $R1 \subseteq R2$)

$X \times Y$ におけるファジィ関係 $R1, R2$ において，

$$r1_{ij} \leq r2_{ij} \tag{2.6}$$

$R1 \subseteq R2$ のとき，$R1$ は $R2$ に含まれるという．

定義 2.1.7 (α**−レベル関係** r_α)

$X \times Y$ 上のファジィ関係 R に対し，次式で定義される $X \times Y$ 上の非ファジィ関係である．

$$R_\alpha = \{(x, y) | \mu_R(x, y) \geq \alpha\} \tag{2.7}$$

2.1.3　ファジィ関係の性質

本項では，ファジィ関係に対する幾つかの性質を定義する．これらの法則はすべて通常の場合の性質の一般化になっている．以下では，関係 R を $X \times X$におけるファジィ二項関係とする．

定義 2.1.8 (反射性)

ファジィ関係 R が反射的であるとは

$$r_{ij} = 1 \tag{2.8}$$

が成立することである．

定義 2.1.9 (推移性)

ファジィ関係 R が推移的であるとは

$$r_{ij} \geq \min(r_{ik}, r_{kj}) \tag{2.9}$$

が成立することである．

ファジィ推移性は，関係の連鎖が長くなるほど関係の強さが小さくなるという性質を反映したものである．

定義 2.1.10 (対称性)

ファジィ関係 R が対称的であるとは

$$r_{ij} = r_{ji} \tag{2.10}$$

が成立することである．

定義 2.1.11 (反対称性)

ファジィ関係 R が反対称的であるとは

$$r_{ij} > 0, r_{ji} > 0 \implies i = j \tag{2.11}$$

言い換えれば

$$r_{ij} > 0, i \neq j \implies r_{ji} = 0 \tag{2.12}$$

が成立することである．

2.1.4　特別なファジィ関係

ファジィ二項関係 Rを考えると，前述の性質に基づく特別なファジィ関係が存在する．工学的応用において特に重要な類似関係，相似関係，ファジィ半順序関係，ファジィ擬順序関係を定義する．

定義 2.1.12 (類似関係)

反射的，対称的かつ推移的であるファジィ関係を類似関係といい，これは通常の関係における同値関係の一般化である．

定義 2.1.13 (相似関係)

反射的かつ対称的であるファジィ関係を相似関係という．

定義 2.1.14 (ファジィ半順序関係)

反射的，推移的かつ反対称的であるファジィ関係をファジィ半順序関係という．

定義 2.1.15 (ファジィ擬順序 (前順序) 関係)

反射的かつ推移的なファジィ関係をファジィ擬順序 (前順序) 関係という.

本研究で扱うファジィ関係は，ファジィ擬順序関係を基本とする.

2.2　諸定義・諸記号

本節では，本論文で使用する諸定義，諸記号を述べる.

定義 2.2.1 (システム構成要素集合)

$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$: システム構成要素集合である.

定義 2.2.2 (添字集合)

$N = \{1, 2, \cdots, n\}$: Sに対応する添字の集合である.

定義 2.2.3 (直積)

$J = N \times N$: Nの直積.

定義 2.2.4 (二項関係)

$R = \{(i, j) | i, j \in N\} \subseteq J$: N上の反射的かつ推移的ファジィ二項関係（ファジィ擬順序関係またはファジィ前順序関係）.

定義 2.2.5 (ファジィ二項関係)

ファジィ二項関係 R : S上のファジィ関係である．メンバシップ関数

$$\mu_R \ : \ S \times S \ \rightarrow \ [0,1] \tag{2.13}$$

によって特性づけられる．

定義 2.2.6 (ファジィ関係行列)

ファジィ行列 M : ファジィ関係 Rを表現する行列である．ファジィシステムの構造を表現する行列という意味でファジィ構造行列ということもある．各要素 m_{ij}は順序対 $(i,j) \in J$ の R への帰属度を示す．

$$0 \leq m_{ij} \leq 1, \ ^\forall \ (i,j) \tag{2.14}$$

である．

定義 2.2.7 (ファジィ行列の演算)

ファジィ行列 A, Bに対し以下の演算を定義する．ファジィ行列の和はファジィ関係の和に，ファジィ行列の積はファジィ関係の max − min 合成に対応している．演算記号の記述は，数式の記述の簡略化のため，通常の行列演算の記述に準じることとする．

$$a_{ij}b_{pq} \ = \ \min(a_{ij}, b_{pq}) \tag{2.15}$$

$$a_{ij} + b_{pq} \ = \ \max(a_{ij}, b_{pq}) \tag{2.16}$$

$$(A+B)_{ij} \ = \ \max(a_{ij}, b_{ij}) = a_{ij} + b_{ij} \tag{2.17}$$

$$(AB)_{ij} \ = \ \max_k \min(a_{ik}, b_{kj}) \tag{2.18}$$

$$(A\alpha B)_{ij} \ = \ \min_k (a_{ik} \ @ \ b_{kj}) \tag{2.19}$$

ここで，

$$a \; \alpha \; b \;=\; \begin{cases} 1 : a \leq b \\ b : a > b \end{cases} \tag{2.20}$$

である．

定義 2.2.8 (ファジィ可到達行列)

ファジィ可到達行列は以下の条件を満たすファジィ行列 M である．

$$m_{ii} \;=\; 1 \tag{2.21}$$

$$m_{ij} \;\geq\; \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{2.22}$$

言い換えればファジィ可到達行列 Mとは，反射性，推移性を共に満たすファジィ擬順序関係をファジィ行列で表現したものである．

定義 2.2.9 (α–カット行列 M_α) ファジィ行列 Mに対し，次式で定義される二値行列である．

$$M_\alpha(i,j) = \begin{cases} 1 : m_{ij} \geq \alpha \\ 0 : m_{ij} < \alpha \end{cases} \quad i,j \in N,\ \alpha \in [0,1] \tag{2.23}$$

次の定理はファジィ可到達行列が可到達行列の一般化であることを示している．

定理 2.2.1 ファジィ可到達行列 Mの要素の値が 1 または 0 であるとき，行列 Mは可到達行列である．

定理 2.2.2 ファジィ可到達行列 Mのα-カット行列 M_αは可到達行列である．

2.3 FISM

本章では，本研究の基礎となる構造モデリング「FISM」の理論について述べる．

まずクリスプな行列に関して部分可到達行列を定義する（部分可到達行列は，文献 [3] を参照）．演算は二値ブール代数である．

定義 2.3.1 (可到達行列)

可到達行列とは以下の条件を満たす正方二値行列 M である．

$$M + I = M \tag{2.24}$$

$$M^2 = M \tag{2.25}$$

定義 2.3.2 (部分的既知な二値行列)

部分的既知な二値行列とは，その要素が $\{1,0\}$，またはブール変数 x である行列である．値が 1 または 0 であるとき既知要素，それ以外を未知要素と呼ぶ．

定義 2.3.3 (部分可到達行列)

部分可到達行列 M は，部分的既知な二値行列であり，以下の反射性，無矛盾性および極大性を満たす．

反射性 :行列 M の対角要素は既知要素でかつ値が 1 である．

無矛盾性 :行列 M が無矛盾であるとは

$$M(i,j) = 0, M(i,k) = 1, M(k,j) = 1 \tag{2.26}$$

を満たす (i,j,k) が存在しないことをいう．

極大性 :行列 M が極大であるとは未知要素 (i,j) に対して

$$M(i,j)=x, M(i,k)=1, M(k,j)=1 \tag{2.27}$$

$$M(i,k)=0, M(i,j)=x, M(j,k)=1 \tag{2.28}$$

$$M(k,j)=0, M(k,i)=1, M(i,j)=x \tag{2.29}$$

のいずれの条件を満たす要素の三組 (i,j,k) が存在しないことをいう.

定義 2.3.4 (含意規則)

部分可到達行列 Mの未知要素 x_{ij}に値 0 または 1 を与えたとする. 新たな Mが再び部分可到達行列となるためには, 既知の値とこの値から他の未知要素の値を決定し, 結果が無矛盾かつ極大となるようにしなければならない. これは含意を計算することに相当する. 以下の含意が存在する.

$$if \quad m_{ij}=1, m_{li}=1, m_{jm}=1 \;\; \rightarrow \;\; m_{lm}=1 \tag{2.30}$$

$$if \quad m_{ij}=1, m_{jl}=1, m_{im}=0 \;\; \rightarrow \;\; m_{lm}=0 \tag{2.31}$$

$$if \quad m_{ij}=1, m_{mi}=1, m_{lj}=0 \;\; \rightarrow \;\; m_{lm}=0 \tag{2.32}$$

$$if \quad m_{ij}=0, m_{il}=1, m_{mj}=1 \;\; \rightarrow \;\; m_{lm}=0 \tag{2.33}$$

次の定理は部分可到達行列が可到達行列の拡張であることを示している.

定理 2.3.1 部分可到達行列 Mの全ての要素が既知要素であるとき, Mは可到達行列である.

定理 2.3.2 含意規則を用いて更新された新たな行列 Mは再び部分可到達行列となる.

以上の諸定理から部分可到達行列は，可到達行列のある種の拡張であることがいえる．部分可到達行列の未知要素数は，対角要素以外はすべて未知要素であるとき最大で $n(n-1)$，すべての要素が既知要素のとき最小でゼロである．また部分可到達行列の定義から，次の系は容易に証明できる．

系 **2.3.1** 要素の追加・削除

部分可到達行列 M に以下のいずれの操作を施しても M は，部分可到達行列となる．

(1)[要素の追加]：S に新たに要素を 1 個追加し，M の対応する行列の値を $[0,1]$ とする．ただし，対角要素は既知要素とし，値を 1 とする．

(2)[要素の削除]：S から要素を 1 個削除し，M の対応する行および列を削除し，M を圧縮する．

2.4 FSM

本章では，ファジィ構造モデリング法 FSM(Fuzzy Structural Modeling) の理論について概説する．

FSM は人間の思考の曖昧性を考慮し，項目間にあいまい二項関係を導入するとともに，その演算にはあいまい代数を利用する．よって多元的価値が錯綜するシステムの構造同定に，より有効と考えられる手法である．

まず，FSM の利用するファジィ理論に関する性質について示す．ある空間 $S=\{S\}$ において，その要素のメンバーシップ関数 μ_A により特性付けられる集合 A を次のように表

し，これをあいまい集合とする．

$$A = \{S|\mu_A\} \tag{2.34}$$

ここで，$\mu_A : S \to [0,1]$ とする．また，ファジィ集合 A の補集合$\overline{A}$の要素は，次のメンバーシップ関数$\overline{\mu_A}$によって特性付けられる．

$$\overline{\mu_A} = \frac{1-\mu_A}{1+\lambda\mu_A} \tag{2.35}$$

ここで，$-1 < \lambda < \infty$ はパラメータである．さらに，任意のファジィベクトルY，ファジィ行列B，およびそれらの合成Cを次のように表す．

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \tag{2.36}$$

ここで，$0 \leq y_i \leq 1$, i =1, 2, $\cdots$, n であり，添字Tは転置を表す．

$$B = [b_{ij}] \tag{2.37}$$

ここで，$0 \leq b_{ij} \leq 1$, i =1, 2, $\cdots$, m，j =1, 2, $\cdots$, n である．

$$C = B \circ Y \Leftrightarrow c_i = \max(\min(b_{ij}, y_i)) \tag{2.38}$$

さらに，集合Sの要素間のファジィ二項関係に関するメンバーシップ関数 f_r, $f_{\overline{r}}$ をそれぞれ次のように定義する．

$$f_r : S \times S \to [0,1] \tag{2.39}$$

$$f_{\overline{r}} : S \times S \to [0,1] \tag{2.40}$$

ここで，$S=\{S_1,S_2,\cdots,Sn\}$ とし，f_r, $f_{\overline{r}}$ との関係を次のように与える．

$$f_{\overline{r}}=\frac{1-f_r}{1+\lambda f_{\overline{r}}} \tag{2.41}$$

ただし，$-1<\lambda<\infty$ はパラメータである．

いま p をあらかじめ与えられた半開区間 $(0,1]$ の実数とする時，次の定義をする．

定義 2.4.1 (あいまい非反射律)

$\forall(S_i,S_i)\in S\times S$ に対して，$f_r(S_i,S_i)\leq p$ が満足されるならば，あいまい非反射律が成り立つ．

定義 2.4.2 (あいまい非対称律)

$\forall(S_i,S_j)\in S\times S(i\neq j)$ に対して，$f_r(S_i,S_j)<p$ あるいは $f_r(S_j,S_i)<p$ の少なくともどちらか一方が成り立つならば，あいまい非対称律が成り立つ．

定義 2.4.3 (あいまい非推移律)

$\forall(S_i,S_j)$, $\forall(S_j,S_k)$, $\forall(S_i,S_k)$, $\in S\times S(i\neq j,j\neq k,i\neq k)$ に対して，

$M=\max(\min(f_r(S_i,S_j),f_r(S_j,S_k))\geq p$

の時，$f_r(S_i,S_k)\geq M$が満足されるならば，あいまい非推移律が成り立つ．

FSM の計算手順については以下に示すとおりである (詳細は文献 [9, 10] を参照)．

1. 要素 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ の選出
2. しきい値 p，パラメータλの設定

3. あいまい従属行列 A の設定 $(0 \leq a_{ij} \leq 1)$

4. あいまい半推移律を満足していない場合，行列 A の修正計算

5. 階層化

FSM はあいまい半推移律を満足していない場合，利用者が入力した行列 A より修正行列 A'を生成し，行列 A'より階層構造を抽出する．以下に修正行列生成アルゴリズムを記述する．

[FSM による修正行列生成アルゴリズム]

行列 A の修正行列 A'を作成する．

1. 行列 Mのファジィ可到達行列 A^*を作成する．

2. $A' = A$

3. if $\quad p > a_{ij} \quad$ and $\quad p < a^*_{ij} \quad$ then

$a'_{ij} = a^*_{ij} \qquad \forall(i,j) \in J$

つぎにファジィ可到達行列生成の一般的なアルゴリズムである Fuzzy Warshall アルゴリズムを以下に述べる．

[Fuzzy Warshall アルゴリズム]

ファジィ行列 Mからファジィ可到達行列 M^*を生成する．

1. $M^* = M$

2. for　k = 1　to　n

$$m^*_{ij} = \max(m^*_{ij}, \min(m^*_{ik}, m^*_{kj}))$$

つまり FSM の修正行列は，しきい値 p において推移律が満足していれば，行列要素の値を保存し，満足していない場合はファジィ可到達行列の値を代入する．その結果，修正行列はしきい値 p において二値的な推移性は満足している．しかし，修正行列全体としてはファジィ推移性は満たしていない．

2.5　ファジィ構造モデリング法における問題点

従来のファジィ構造モデリング法 FSM はあいまい従属行列 A について，しきい値 p を変えて構造同定を行う．よって ISM と比較すると幾組かの (p, λ) を与えることによって種々の階層構造を示すことができ，かなり自由度のある構造同定を行うことができる．したがって FSM を用いることにより，本来人間のもっている複雑な状況下でのあいまい性をもった意識構造を示すことができ，対象の最適な階層構造を得ることができる．しかし，ISM と FSM に共通した問題点として，利用者の入力した初期行列と階層構造化する修正行列とが異なる点が挙げられる．通常，初期行列は，人間が直接入力するためすべての要素間の推移性が満たされていない．よって階層化のために初期行列を，ISM においては可到達行列，FSM においては修正行列に変更し分析するため，利用者が実際に入力した情報と異なる．よって得られる階層構造は利用者のイメージしたものとは必ずしも合致しない．

また利用者が初期行列の行列要素をすべて入力するため，入力作業の負担が大きい．要

素数が n の場合，入力する要素間の関係は n^2 に比例する．そのため対象が大規模の場合，その入力は不可能である．

一方構造モデリング法 ISM を改良した FISM は，人間の思考過程の柔軟性を考慮した技法であり，利用者のモデリングに対する負担を軽減することが可能である．その理由として，利用者が入力した情報から関係の推移的性質を考慮して，入力されていない要素間の関係を含意するからである．このため要素数が大きくなっても ISM,FSM に比べて入力作業の負担が軽減される．しかし，FISM では入力する情報が関係の二値的判断によるもののみであることから，FSM に比べて多元的価値が錯綜する対象のモデル化を行うことができない．

よって本論文では，FISM をファジィ化した柔軟なファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy (Fuzzy Flexible Interpretive Structural Modeling) を提案する．次章では，ファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy で取り扱うファジィ二項関係であるファジィ可到達行列における構成要素間の含意関係について解明し，基礎理論となるファジィ部分可到達行列理論を提案する．

第 3 章

ファジィ部分可到達行列理論

ファジィ構造モデリング法は，システムの構成要素集合とその上に定義されるファジィ二項関係に注目し，システムの構造をファジィ行列を用いて分類・整理するものである．さらにファジィ二項関係が反射的かつ推移的性質を持つファジィ擬順序（ファジィ前順序）関係である場合にはその性質を利用して効率よく対象を解析することができる．

従来のファジィ構造モデリング法 FSM において，ファジィ二項関係における帰属度の同定が本質的な問題として存在する．また，その帰属度決定において一対比較の手間が生じる．一対比較数は構成要素数 n に対して n^2 に比例して増大する．

本章ではこれらの問題点を解決するためにファジィ部分可到達行列理論を提案する．まず，ファジィ可到達行列の各行列要素間の含意関係を明らかにする．更にファジィ可到達行列を柔軟に無矛盾に生成するために，部分的既知なファジィ部分行列を提案し，その部分的既知なファジィ行列がファジィ擬順序関係に矛盾することがない行列モデルとしてファ

ジィ部分可到達行列を提案する．更に，ファジィ部分可到達行列更新のための含意規則を提案する．

3.1　ファジィ可到達行列の含意関係

ファジィ可到達行列における含意関係について考察する．行列 M がファジィ可到達行列であるとは定義 2.2.8 より

$$m_{ii} = 1 \tag{3.1}$$

$$m_{ij} \geq \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{3.2}$$

が成り立つことである．

以下にファジィ可到達行列における行列要素間の含意関係について考察する．

式 (3.1) の反射性は，対角要素のみ値が 1 であればよい．よって以下は推移性がもたらす要素間の制約条件である含意関係について述べる．

式 (3.2) の推移性より，三項 (i, j, k) において，行列要素 (m_{ij}, m_{ik}, m_{kj}) の間で，以下の六通りの含意が生じる．

1 − 1 含意

$$m_{ik} \rightarrow m_{ij} \geq \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{3.3}$$

$$m_{kj} \rightarrow m_{ij} \geq \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{3.4}$$

1 − 0 含意

$$m_{ik} \quad \rightarrow \quad m_{kj} \leq m_{ik} \alpha m_{ij} \tag{3.5}$$

$$m_{kj} \quad \rightarrow \quad m_{ik} \leq m_{kj} \alpha m_{ij} \tag{3.6}$$

$0-0$ 含意

$$m_{ij} \quad \rightarrow \quad m_{kj} \leq m_{ik} \alpha m_{ij} \tag{3.7}$$

$$m_{ij} \quad \rightarrow \quad m_{ik} \leq m_{kj} \alpha m_{ij} \tag{3.8}$$

式 (3.3) は，m_{ik}より，m_{ij}は $m_{ij} \geq \min(m_{ik}, m_{kj})$ となることを意味する．

三項間の含意をまとめると，四項 (i, j, l, m) における行列要素 (m_{ij}, m_{lm}) 間の含意となり，以下に表す．式 (3.3)，式 (3.4) より

$$m_{ij} \quad \rightarrow \quad m_{lm} \geq \min(m_{ij}, m_{li}, m_{jm}) \tag{3.9}$$

式 (3.3)，式 (3.6) または式 (3.6)，式 (3.8) より

$$m_{ij} \quad \rightarrow \quad m_{lm} \leq m_{ij} \alpha (m_{jl} \alpha m_{im}) \tag{3.10}$$

式 (3.4)，式 (3.5) または式 (3.5)，式 (3.7) より

$$m_{ij} \quad \rightarrow \quad m_{lm} \leq m_{ij} \alpha (m_{mi} \alpha m_{lj}) \tag{3.11}$$

式 (3.7)，式 (3.8) より

$$m_{ij} \quad \rightarrow \quad m_{lm} \leq \min(m_{il}, m_{mj}) \alpha m_{ij} \tag{3.12}$$

これを更にまとめてファジィ可到達行列の推移性による四項における行列要素間の含意を基本含意とする．

定義 3.1.1 (基本含意)

ファジィ可到達行列において行列要素 (m_{ij}, m_{lm}) 間では，以下の制約条件が生じる．

$$m_{ij} \;\rightarrow\; m_{lm} \geq \min(m_{ij}, m_{li}, m_{jm}) \tag{3.13}$$

$$m_{ij} \;\rightarrow\; m_{lm} \leq m_{ij}\alpha \min(m_{jl}\alpha m_{im}, m_{mi}\alpha m_{lj}) \tag{3.14}$$

$$m_{ij} \;\rightarrow\; m_{lm} \leq \min(m_{il}, m_{mj})\alpha m_{ij} \tag{3.15}$$

定理 3.1.1 基本含意は，三項含意を含んでいる．

[証明]

式 (3.13) は，$j = m$ のとき

$$m_{ij} \;\rightarrow\; m_{lm} \geq \min(m_{ij}, m_{li}, m_{jj}) \tag{3.16}$$

$$m_{ij} \;\rightarrow\; m_{lm} \geq \min(m_{ij}, m_{li}) \tag{3.17}$$

となり式 (3.3) と等価となる．同様に $i = l$ のとき，式 (3.4) を満たす．式 (3.14) は，$j = l$ のとき，式 (3.5) となり，$i = m$ のとき，式 (3.6) となる．式 (3.15) は，$j = m$ のとき，式 (3.7) となり，$i = l$ のとき，式 (3.8) となる．

Q.E.D.

3.2　含意行列

基本含意は行列モデルで表現することができる．ここで

$$c_i \;=\; [m_{i1}, \cdots, m_{in}] : \text{第 } i \text{ 行セルベクトル} \tag{3.18}$$

$$c \;=\; c_1 \circ \cdots \circ c_n : c_1 \sim c_n \text{の連接行ベクトル} \tag{3.19}$$

とする．ファジィ可到達行列の含意は，垂直添字ベクトル c^T と水平添字ベクトル c とをもつ行列 P_{11}, P_{10}, P_{00} により表される．P_{11}, P_{10}, P_{00} を M の含意行列と呼ぶ．含意行列 P_{11}, P_{10}, P_{00} は以下で表される．

$$P_{11}(m_{ij}, m_{lm}) \;=\; \min(m_{li}, m_{jm}) \tag{3.20}$$

$$P_{00}(m_{ij}, m_{lm}) \;=\; \min(m_{il}, m_{mj}) \tag{3.21}$$

$$P_{10}(m_{ij}, m_{lm}) \;=\; \min(m_{jl} \alpha m_{im}, m_{mi} \alpha m_{lj}) \tag{3.22}$$

含意行列を用いるとファジィ可到達行列は，以下の制約が生じる．

$$c \;\geq\; cP_{11} \tag{3.23}$$

$$c^T \;\leq\; P_{00} @ c^T \tag{3.24}$$

$$c \;\leq\; c @ P_{10} \tag{3.25}$$

以上より部分的既知なファジィ可到達行列としてファジィ部分可到達行列を定義する．

3.3 部分的既知なファジィ行列

ファジィ二項関係を用いた構造モデリングにおいて帰属度の同定が本質的な問題として存在する．しかしモデリングの一段階で，モデル生成者が帰属度を一意に決定できない場合でも，ある範囲までは現段階で言明することが可能な場合がある．つまり現段階では”0.7”

と特定できないが，"0.6 から 0.8 までで一意に定まるであろう"という場合である．この種の問題を解決すべく，以下に帰属度を柔軟に表現することが可能である部分的既知なファジィ行列を定義する．

定義 3.3.1 (部分的既知なファジィ行列)

部分的既知なファジィ行列とは，その行列の要素が最大値と最小値をもつ行列である．行列 M の (i,j) 要素の最小値を $\underline{m}_{ij}$，最大値を $\overline{m}_{ij}$ と書く．ただし，$0 \leq \underline{m}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \leq 1$ である．すなわち

$$M = [\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}] \tag{3.26}$$

定義 3.3.2 (既知要素と未知要素)

部分的既知なファジィ行列に対して要素を未知要素と既知要素に分ける．ただし未知要素と既知要素を以下で定義する．

$$M(i,j) = \begin{cases} \text{未知要素} & : \underline{m}_{ij} < \overline{m}_{ij} \text{のとき} \\ \text{既知要素} & : \underline{m}_{ij} = \overline{m}_{ij} \text{のとき} \end{cases} \tag{3.27}$$

部分的既知なファジィ行列の (i,j) 要素が既知要素であるとき，その要素の値は，従来のファジィ行列と同様にファジィ擬順序関係 iRj の帰属度を示す．一方 (i,j) 要素が未知要素であるときは，iRj の帰属度が $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ で一意に決定することができない状態を示す（図 3.1, 3.2）．

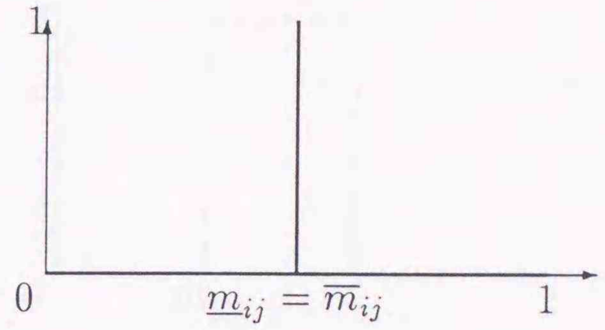


図 3.1: 既知な関係 $M(i,j)$

3.3.1　他の行列モデルとの関係

部分的既知なファジィ行列と他の行列モデル（ファジィ行列 [22]，部分的既知な二値行列 [3]，二値行列）との関係について述べる．

次の定理は部分的既知なファジィ行列がファジィ行列の拡張であることを示している．

定理 3.3.1 部分的既知なファジィ行列 M の全ての要素が既知要素であるとき，行列 M はファジィ行列である．

次の諸定理は部分的既知な二値行列 M の未知要素 x を部分的既知なファジィ行列 M の未知要素 [0,1] に対応させると，ファジィ部分可到達行列が部分可到達行列の拡張であるこ

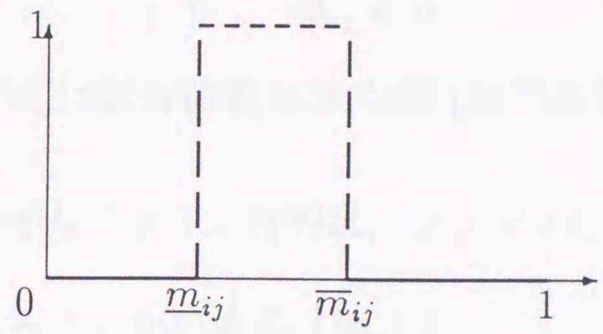


図 3.2: 部分的既知な関係 $M(i,j)$

とを示す.

定理 3.3.2 行列 Mが部分的既知な二値行列とする．その (i,j) 要素の値を以下のように行列 Mに対応させると，行列 Mは部分的既知なファジィ行列となる.

$$M(i,j) = \begin{cases} [1,1] & : \ M(i,j) = 1 \text{ のとき} \\ [0,0] & : \ M(i,j) = 0 \text{ のとき} \\ [0,1] & : \ M(i,j) = x \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.28}$$

定理 3.3.3 部分的既知なファジィ行列 M の $\alpha-$ レベル行列 M_α を

$$M_\alpha(i,j) = \begin{cases} 1 & : \ \underline{m}_{ij} \geq \alpha \\ x & : \ \underline{m}_{ij} < \alpha \leq \overline{m}_{ij} \\ 0 & : \ \overline{m}_{ij} < \alpha \end{cases} \tag{3.29}$$

とするとき，$\alpha-$ レベル行列 M_α は部分的既知な二値行列である．

以上の諸定理から部分的既知なファジィ行列は，ファジィ行列，部分的既知な二値行列，二値行列のある種の拡張であることがいえる（図 3.3）．

3.4　ファジィ部分可到達行列

部分的既知なファジィ行列を用いながら，ファジィ可到達行列を生成するための道具としてファジィ部分可到達行列を定義する．

定義 3.4.1 (ファジィ部分可到達行列)

行列 M がファジィ部分可到達行列であるとは，行列 M が部分的既知なファジィ行列でかつ以下のファジィ反射性とファジィ部分可到達性を有する．

ファジィ反射性：行列 M がファジィ反射性を有するとき対角要素は既知で値は 1 である．

ファジィ部分可到達性：行列 M がファジィ部分可到達であるとは，

$$\underline{m}_{ij} \ < \ \min(\underline{m}_{ik}, \underline{m}_{kj}) \tag{3.30}$$

$$\overline{m}_{ij} \ < \ \min(\overline{m}_{ik}, \underline{m}_{kj}) \tag{3.31}$$

$$\overline{m}_{ij} \ < \ \min(\underline{m}_{ik}, \overline{m}_{kj}) \tag{3.32}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{ファジィ行列} \arrow[dl] & \\
\text{二値行列} & & \text{部分的既知なファジィ行列} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \text{部分的既知な二値行列} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

図 3.3: 行列モデル間の関係

のいずれの条件をも満たす要素の三組 (i, j, k) が存在しないことをいう.

[例]

図 3.4の M', M'', M''', M''''はすべて部分的既知なファジィ行列でかつファジィ反射性を満たす．ただし，最大値と最小値が等しい既知要素は値を 1 つのみ表示する.

M'はファジィ部分可到達性を満たす.

M''は式 (3.30) よりファジィ部分可到達性を満たさない（$\underline{m''}_{12} = 0.5, \underline{m''}_{23} = 0.3$ より $\underline{m''}_{13} \geq 0.3$ でなければならない）.

M'''は式 (3.31) よりファジィ部分可到達性を満たさない（$\overline{m'''}_{31} = 0.3, \underline{m'''}_{21} = 0.5$ より $\overline{m'''}_{32} \leq 0.3$ でなければならない）.

M''''は式 (3.32) よりファジィ部分可到達性を満たさない（$\overline{m'''}_{31} = 0.3, \underline{m'''}_{32} = 0.4$ より $\overline{m'''}_{21} \leq 0.3$ でなければならない）.

よって M'のみファジィ部分可到達行列である.

言い換えると部分的既知なファジィ行列 Mがファジィ部分可到達行列であるとは，ファジィ行列のファジィ反射性を満たし，推移的矛盾になる可能性がない状態を考慮している．推移的矛盾可能な状態とは，任意の未知要素を既知要素に変更した際に，他のいかなる未知要素の値を既知要素に変更しても，推移的に矛盾する状態をいう.

(1) 式 (3.30) の場合．$m_{ij} = \underline{m}_{ij}$としたら他の m_{ik}, m_{kj}がそれぞれ $[\underline{m}_{ik}, \overline{m}_{ik}]$, $[\underline{m}_{kj}, \overline{m}_{kj}]$ のいかなる値をとっても

$$m_{ij} < \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{3.33}$$

となり，推移的に矛盾が生じてしまう.

(2) 式 (3.31) の場合．$m_{ik} = \overline{m}_{ik}$としたら他の m_{ij}, m_{kj}がそれぞれ既知の値に変更しても推移的に矛盾が生じてしまう.

(3) 式 (3.32) の場合．$m_{kj} = \overline{m}_{kj}$としたら他の m_{ij}, m_{ik}がそれぞれ既知の値に変更しても推移的に矛盾が生じてしまう.

$$M' = \begin{array}{c|lll} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0.2,0.5] \\ 2 & [0.3,1] & 1 & [0.2,0.7] \\ 3 & [0,0.3] & [0,0.4] & 1 \end{array}$$

$$M'' = \begin{array}{c|lll} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0.2,0.5] \\ 2 & [0.3,1] & 1 & [0.3,0.7] \\ 3 & [0,0.3] & [0,0.4] & 1 \end{array}$$

$$M''' = \begin{array}{c|lll} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0.2,0.5] \\ 2 & [0.5,1] & 1 & [0.2,0.7] \\ 3 & [0,0.3] & [0,0.4] & 1 \end{array}$$

$$M'''' = \begin{array}{c|lll} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0.5 & [0.2,0.5] \\ 2 & [0.3,1] & 1 & [0.2,0.7] \\ 3 & 0.3 & [0.4,0.5] & 1 \end{array}$$

図 3.4: 部分的既知なファジィ行列

3.4.1　可到達行列モデルとの関係

次の定理はファジィ部分可到達行列がファジィ可到達行列の拡張であることを示している．

定理 3.4.1 ファジィ部分可到達行列 M の全ての要素が既知要素であるとき，行列 Mは
ファジィ可到達行列である．

[証明]

ファジィ部分可到達行列 Mの全ての要素が既知要素であるとき，任意の (i,j) 要素の値は一つとなり

$$\underline{m}_{ij} = \overline{m}_{ij} = m_{ij} \tag{3.34}$$

とおくことができる．定義3.4.1のファジィ反射性より Mの対角要素は

$$m_{ii} = 1 \tag{3.35}$$

であるから，定義2.2.8の式 (2.21) を満足する．

また定義3.4.1のファジィ部分可到達性は，任意の (i,j) 要素について

$$m_{ij} \; < \; \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{3.36}$$

$$m_{ik} \; < \; \min(m_{ij}, m_{jk}) \tag{3.37}$$

$$m_{kj} \; < \; \min(m_{ki}, m_{ij}) \tag{3.38}$$

のいずれかの条件を満たす要素の三組 (i,j,k) が存在しないこととなる．これら三式は添字が違うだけで

$$m_{ij} < \min(m_{ik}, m_{kj}) \tag{3.39}$$

にまとめられる．これは定義2.2.8の式 (2.22) が満たされない場合である．よって全ての要素が既知であるファジィ部分可到達行列はファジィ可到達行列である．　Q.E.D.

定理 3.4.2 行列 Mが部分可到達行列とする．その (i,j) 要素の値を定理 *3.3.2*と同様に行列 Mに対応させると，行列 Mはファジィ部分可到達行列となる．

定理 3.4.3 ファジィ部分可到達行列 Mの$\alpha-$レベル行列 M_αは部分可到達行列である．

以上の諸定理からファジィ部分可到達行列は，ファジィ可到達行列，部分可到達行列，可到達行列のある種の拡張であることがいえる（図3.5）．

ファジィ部分可到達行列の未知要素数は，対角要素以外はすべて未知要素であるとき最大で $n(n-1)$，すべての要素が既知要素のとき最小でゼロである．またファジィ部分可到達行列の定義から，次の系は容易に証明できる．

系 **3.4.1** 要素の追加・削除

ファジィ部分可到達行列 Mに以下のいずれの操作を施しても Mは，ファジィ部分可到達行列となる．

(1)[要素の追加]：Sに新たに要素を 1 個追加し，Mの対応する行列の値を $[0,1]$ とする．ただし，対角要素は既知要素とし，値を 1 とする．

(2)[要素の削除]：Sから要素を 1 個削除し，Mの対応する行および列を削除し，Mを圧縮する．

$$
\begin{tikzcd}
& \text{ファジィ可到達行列} \arrow[dl] & \\
\text{可到達行列} & & \text{ファジィ部分可到達行列} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
& \text{部分可到達行列} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}
$$

図 3.5: 可到達行列モデル間の関係

3.5　ファジィ部分可到達行列における含意関係

本項では，ファジィ部分可到達行列の含意関係について検討する．行列 M は，ファジィ部分可到達行列であるから，ファジィ反射性とファジィ部分可到達性を満足しなければならない．このうち反射性については定義 3.4.1 より恒等的に成立するので，以下では M がファジィ部分可到達性より生じる行列要素間の含意について考察する．

式 (3.30) ～ 式 (3.32) より以下の含意が得られる．

$$\underline{m}_{ik} \rightarrow \underline{m}_{ij} \text{含意} \ : \ \underline{m}_{ij} \geq \min(\underline{m}_{kj}, \underline{m}_{ik}) \tag{3.40}$$

$$\underline{m}_{kj} \rightarrow \underline{m}_{ij} \text{含意} \ : \ \underline{m}_{ij} \geq \min(\underline{m}_{ik}, \underline{m}_{kj}) \tag{3.41}$$

$$\overline{m}_{ij} \rightarrow \overline{m}_{ik} \text{含意} \ : \ \overline{m}_{ik} \leq \underline{m}_{kj} \alpha \overline{m}_{ij} \tag{3.42}$$

$$\underline{m}_{kj} \rightarrow \overline{m}_{ik} \text{含意} \ : \ \overline{m}_{ik} \leq \underline{m}_{kj} \alpha \overline{m}_{ij} \tag{3.43}$$

$$\overline{m}_{ij} \rightarrow \overline{m}_{kj} \text{含意} \ : \ \overline{m}_{kj} \leq \underline{m}_{ik} \alpha \overline{m}_{ij} \tag{3.44}$$

$$\underline{m}_{ik} \rightarrow \overline{m}_{kj} \text{含意} \ : \ \overline{m}_{kj} \leq \underline{m}_{ik} \alpha \overline{m}_{ij} \tag{3.45}$$

例として式 (3.30) の$\underline{m}_{ik} \rightarrow \underline{m}_{ij}$ 含意は$\underline{m}_{ij}$の値が$\underline{m}_{ik}$の値から制約をうけることである．式 (3.40) ~(3.45) は構成要素組 (i, j, k) 間の含意である．これらの含意を組み合わせると，四要素組 (i, j, l, m) 間の要素 (i, j) 要素から (l, m) 要素への含意が得られる．

式 (3.40)，式 (3.41) より

$$\underline{m}_{ij} \rightarrow \underline{m}_{lm} \text{含意} \ : \ \underline{m}_{lm} \geq \min(\underline{m}_{li}, \underline{m}_{jm}, \underline{m}_{ij}) \tag{3.46}$$

式 (3.42)，式 (3.44) より

$$\overline{m}_{ij} \rightarrow \overline{m}_{lm} \text{含意} \ : \ \overline{m}_{lm} \leq (\min(\underline{m}_{il}, \underline{m}_{mj})) \alpha \overline{m}_{ij} \tag{3.47}$$

式 (3.40)，式 (3.45) または式 (3.45)，式 (3.44) より

$$\begin{aligned} \underline{m}_{ij} \rightarrow \overline{m}_{lm} \text{含意} : \overline{m}_{lm} &\leq \min((\min(\underline{m}_{ij}, \underline{m}_{jl}) \alpha \overline{m}_{im}), (\underline{m}_{jl} \alpha (\underline{m}_{ij} \alpha \overline{m}_{im}))) \\ &\leq \underline{m}_{ij} \alpha (\underline{m}_{jl} \alpha \overline{m}_{im}) \end{aligned} \tag{3.48}$$

式 (3.41)，式 (3.43) または式 (3.43)，式 (3.42) より

$$\begin{aligned} \underline{m}_{ij} \to \overline{m}_{lm} \text{含意} : \overline{m}_{lm} &\leq \min((\min(\underline{m}_{ij}, \underline{m}_{mi})\alpha\overline{m}_{lj}), (\underline{m}_{mi}\alpha(\underline{m}_{ij}\alpha\overline{m}_{lj}))) \\ &\leq \underline{m}_{ij}\alpha(\underline{m}_{mi}\alpha\overline{m}_{lj}) \end{aligned} \tag{3.49}$$

式 (3.48), 式 (3.49) より

$$\underline{m}_{ij} \to \overline{m}_{lm} \text{含意} : \overline{m}_{lm} \leq \underline{m}_{ij}\alpha(\min((\underline{m}_{jl}\alpha\overline{m}_{im}), (\underline{m}_{mi}\alpha\overline{m}_{lj}))) \tag{3.50}$$

更に式 (3.48) と式 (3.49) をまとめて，ファジィ部分可到達行列 M における二要素間含意として定義する．

定義 3.5.1 (要素間含意)

行列 M がファジィ部分可到達行列であるとき，行列の二要素対である (i, j) 要素と (l, m) 要素との間に以下のような含意が生じる．

$$\underline{m}_{ij} \to \underline{m}_{lm} \text{含意} : \underline{m}_{lm} \geq \min(\underline{m}_{li}, \underline{m}_{jm}, \underline{m}_{ij}) \tag{3.51}$$

$$\overline{m}_{ij} \to \overline{m}_{lm} \text{含意} : \overline{m}_{lm} \leq (\min(\underline{m}_{il}, \underline{m}_{mj}))\alpha\overline{m}_{ij} \tag{3.52}$$

$$\underline{m}_{ij} \to \overline{m}_{lm} \text{含意} : \overline{m}_{lm} < \underline{m}_{ij}\alpha((\underline{m}_{jl}\alpha\overline{m}_{im})(\underline{m}_{mi}\alpha\overline{m}_{lj})) \tag{3.53}$$

行列 M がファジィ部分可到達行列である場合，以上の要素間含意を満たしている．これらの含意は，行列 M の未知要素を既知要素に変更したときの行列 M の更新に有効である．

3.5.1　含意規則

ファジィ部分可到達行列の更新を目的とした含意規則について定義する．含意規則とは，ファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えたときに，新たな行列が再びファジィ部分可到達性を満たすために，他の未知要素の値を決定する規則である．

定義 3.5.2 (添字対集合 W)

未知要素である (i,j) 要素の値に依存して決定される要素を表す添字の二項対集合で，以下のように与えられる．

$$W_1(i,j) \;=\; \{(l,m)|\underline{m}_{lm} < \min(\underline{m}_{ij}, \underline{m}_{li}, \underline{m}_{jm})\} \tag{3.54}$$

$$W_2(i,j) \;=\; \{(l,m)|\overline{m}_{im} < \min(\overline{m}_{lm}, \underline{m}_{ij}, \underline{m}_{jl})\} \tag{3.55}$$

$$W_3(i,j) \;=\; \{(l,m)|\overline{m}_{lj} < \min(\overline{m}_{lm}, \underline{m}_{ij}, \underline{m}_{mi})\} \tag{3.56}$$

$$W_4(i,j) \;=\; \{(l,m)|\overline{m}_{ij} < \min(\overline{m}_{lm}, \underline{m}_{il}, \underline{m}_{mj})\} \tag{3.57}$$

以上の諸集合は簡単のため W_1, W_2, W_3, W_4 と記す．

上述の添字対集合 W は後で示すように含意規則によって値が変更対象となる未知要素を示すものである．含意規則とは，ファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えたときに新たな行列が再びファジィ部分可到達性を満たすために他の未知要素の値を決定する規則である．

定義 3.5.3 (含意規則) 未知要素 $M(i,j)$ の値 $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ を $[\underline{m'}_{ij}, \overline{m'}_{ij}]$ としたとき，以下の 3 通りの規則を適用すれば，(l,m) 要素の値 $[\underline{m}_{lm}, \overline{m}_{lm}]$ は新たな値 $[\underline{m'}_{lm}, \overline{m'}_{lm}]$ となる．た

だし，$0 \leq \underline{m}_{ij} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \overline{m'}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \leq 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
&\text{規則 } 1 : if && \underline{m}_{ij} < \underline{m'}_{ij}\ then && \\
& && \underline{m'}_{lm} = \min(\underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{li}, \underline{m}_{jm}) && \forall(l,m) \in W_1 \\
&\text{規則 } 2 : if && \underline{m}_{ij} < \underline{m'}_{ij}\ then && \\
& && \overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{im} && \forall(l,m) \in W_2 \\
&\text{規則 } 3 : if && \underline{m}_{ij} < \underline{m'}_{ij}\ then && \\
& && \overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{lj} && \forall(l,m) \in W_3 \\
&\text{規則 } 4 : if && \overline{m'}_{ij} < \overline{m}_{ij}\ then && \\
& && \overline{m'}_{lm} = \overline{m'}_{ij} && \forall(l,m) \in W_4
\end{aligned}
$$

含意規則をファジィ部分可到達行列に適用すると，既知要素の値が変更されることはない．規則によって得られる未知要素 (l,m) の値は適用前後で

$$0 \leq \underline{m}_{lm} \leq \underline{m'}_{lm} \leq \overline{m'}_{lm} \leq \overline{m}_{lm} \leq 1$$

となる．

次の定理は，これらの含意規則により更新された行列 M は再びファジィ部分可到達行列となることを保証するものである．

定理 3.5.1 含意規則を用いて更新された新たな行列 M は再びファジィ部分可到達行列となる．

また含意規則は添字集合を用いることなく以下のように定義できる．

定義 3.5.4 (含意規則)

未知要素 $M(i,j)$ の値 $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ を $[\underline{m'}_{ij}, \overline{m'}_{ij}]$ と変更したとき，以下の 4 通りの規則を適用すれば，(l,m) 要素の値 $[\underline{m}_{lm}, \overline{m}_{lm}]$ は新たな値 $[\underline{m'}_{lm}, \overline{m'}_{lm}]$ となる．ただし，$0 \leq \underline{m}_{ij} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \overline{m'}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \leq 1$ とする．

min − min 含意 :

$$\underline{m'}_{lm} = \underline{m}_{lm} + (\underline{m}_{li}\underline{m}_{jm}\underline{m'}_{ij}) \tag{3.58}$$

max − max 含意 :

$$\overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{lm}((\underline{m}_{il}\underline{m}_{mj})\alpha\overline{m'}_{ij}) \tag{3.59}$$

min − max 含意 (1) :

$$\overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{lm}(\underline{m'}_{ij}\alpha(\underline{m}_{jl}\alpha\overline{m}_{im})) \tag{3.60}$$

min − max 含意 (2) :

$$\overline{m'}_{lm} = \overline{m}_{lm}(\underline{m'}_{ij}\alpha(\underline{m}_{mi}\alpha\overline{m}_{lj})) \tag{3.61}$$

含意規則をファジィ部分可到達行列 M に適用しても，既知要素の値が変更されることはない．含意規則によって修正される未知要素 (l,m) の値は

$$0 \leq \underline{m}_{lm} \leq \underline{m'}_{lm} \leq \overline{m'}_{lm} \leq \overline{m}_{lm} \leq 1$$

である．またファジィ部分可到達行列の含意された値は，各規則の適用順序に依存することはない．次の定理は，これらの含意規則により更新された行列 M は再びファジィ部分

可到達行列となることを保証するものである [18]．この規則を繰り返し適用すれば，ファジィ部分可到達行列の要素全体が既知であるファジィ可到達行列が得られることが可能である．含意規則の計算量は，任意の (l, m) 要素の値が (i, j) 要素の値より，それぞれ最小値，最大値を変更するので $O(n^2)$ である．またファジィ部分可到達行列の必要記憶容量も $\theta(n^2)$ である．

定理 3.5.2 含意規則を用いて更新された新たな行列 M はファジィ部分可到達行列となる．

[証明]

含意規則により $M(i, j)$ の値より $M(p, q)$ の値が決定する場合，(i, j, p, q) の組においては明らかに部分可到達性を満たす．よって $M(p, q)$ の値と任意の要素 r を追加した (p, q, r) の組に部分可到達性に矛盾していると仮定する．

(1) 規則 1 によって (p, q) 要素の値が得られたとき，(p, q, r) の組で矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)} & \underline{m}_{rq} & < & \min(\underline{m}_{rp}, \underline{m'}_{pq}) \\
\text{(b)} & \underline{m}_{pr} & < & \min(\underline{m'}_{pq}, \underline{m}_{qr}) \\
\text{(c)} & \overline{m}_{rq} & < & \min(\overline{m}_{rp}, \underline{m'}_{pq}) \\
\text{(d)} & \overline{m}_{pr} & < & \min(\underline{m'}_{pq}, \overline{m}_{qr})
\end{array}$$

$\underline{m'}_{pq} = \min(\underline{m}_{pi}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jq})$ を代入して

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \underline{m}_{rq} \;<\; \min(\underline{m}_{rp}, \underline{m}_{pi}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jq}) \\
&\text{(b)} \quad \underline{m}_{pr} \;<\; \min(\underline{m}_{pi}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jq}, \underline{m}_{qr}) \\
&\text{(c)} \quad \overline{m}_{rq} \;<\; \min(\overline{m}_{rp}, \underline{m}_{pi}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jq}) \\
&\text{(d)} \quad \overline{m}_{pr} \;<\; \min(\underline{m}_{pi}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jq}, \overline{m}_{qr})
\end{aligned}
$$

ファジィ部分可到達性より，各条件において

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \underline{m}_{ri} \;\geq\; \min(\underline{m}_{rp}, \underline{m}_{p1}) \\
&\text{(b)} \quad \underline{m}_{jr} \;\geq\; \min(\underline{m}_{jq}, \underline{m}_{qr}) \\
&\text{(c)} \quad \overline{m}_{rj} \;<\; \overline{m}_{rp} \qquad\qquad (\overline{m}_{rq} < \underline{m}_{jq}) \\
&\text{(d)} \quad \overline{m}_{ir} \;<\; \overline{m}_{pr} \qquad\qquad (\overline{m}_{lr} < \underline{m}_{li}\text{より})
\end{aligned}
$$

が成立する．これより以下の式が導かれる．

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \underline{m}_{rq} \;<\; \min(\underline{m}_{ri}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jq}) \\
&\text{(b)} \quad \underline{m}_{pr} \;<\; \min(\underline{m}_{pi}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jr}) \\
&\text{(c)} \quad \overline{m}_{rj} \;<\; \min(\overline{m}_{rp}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{pi}) \\
&\text{(d)} \quad \overline{m}_{ir} \;<\; \min(\overline{m}_{qr}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jm})
\end{aligned}
$$

上記の 4 通りはそれぞれ (a) $(r,q) \in W_1$，(b) $(p,r) \in W_1$，(c) $(r,p) \in W_3$，(d) $(q,r) \in W_2$ となり，それぞれ規則 1,2,3 が適用されており，ファジィ部分可到達性が満たされる値が与えられている．よって規則 1 を適用してもファジィ部分可到達性を満たさない (p,q,r) の組は存在しない．

(2) 規則 2 も規則 1 と同様に，(p, q) 要素の値が得られたとき，(p, q, r) の組で矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

$$\text{(a)} \quad \overline{m'}_{pq} \quad < \quad \min(\underline{m}_{pr}, \overline{m}_{rq})$$

$$\text{(b)} \quad \overline{m'}_{pq} \quad < \quad \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{rq})$$

$\overline{m'}_{pq} = \overline{m}_{ip}$を代入して

$$\text{(a)} \quad \overline{m}_{iq} \quad < \quad \min(\underline{m}_{pr}, \overline{m}_{rq})$$

$$\text{(b)} \quad \overline{m}_{iq} \quad < \quad \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{rq})$$

ファジィ部分可到達性より，各条件のもとで

$$\text{(a)} \quad \underline{m}_{jr} \quad \geq \quad \min(\underline{m}_{jp}, \underline{m}_{pr})$$

$$\text{(b)} \quad \overline{m}_{ir} \quad < \quad \overline{m}_{iq} \qquad\qquad (\overline{m}_{iq} < \underline{m}_{rq}\text{より})$$

が成立する．これより以下の式が導かれる．

$$\text{(a)} \quad \overline{m}_{iq} \quad < \quad \min(\overline{m}_{rq}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jr})$$

$$\text{(b)} \quad \overline{m}_{ir} \quad < \quad \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{jp})$$

上記の 2 通りはそれぞれ (a) $(r, q) \in W_2$，(b) $(p, r) \in W_2$となるので，規則 2 によって値が得られており，ファジィ部分可到達性を満たさない条件は存在しない．

(3) 規則 3 の場合，(p, q, r) の組で矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

$$\text{(a)} \quad \overline{m'}_{pq} \quad < \quad \min(\underline{m}_{pr}, \overline{m}_{rq})$$

$$\text{(b)} \quad \overline{m'}_{pq} \quad < \quad \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{rq})$$

$\overline{m'}_{pq} = \overline{m}_{pj}$を代入して

$$\text{(a)} \quad \overline{m}_{pj} \quad < \quad \min(\underline{m}_{pr}, \overline{m}_{rq})$$

$$\text{(b)} \quad \overline{m}_{pj} \quad < \quad \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{rq})$$

ファジィ部分可到達性より，各条件において

$$(a)\ \ \overline{m}_{rj} \ < \ \overline{m}_{pj} \qquad\qquad (\overline{m}_{pj} < \underline{m}_{pr}\text{より})$$
$$(b)\ \ \underline{m}_{ri} \ \geq \ \min(\underline{m}_{rq}, \underline{m}_{qi})$$

が成立する．これより以下の式が導かれる．

$$(a)\ \ \overline{m}_{rj} \ < \ \min(\overline{m}_{rq}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{qi})$$
$$(b)\ \ \overline{m}_{pr} \ < \ \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m'}_{ij}, \underline{m}_{ri})$$

上記の 2 通りはそれぞれ (a) $(r,q) \in W_3$，(b) $(p,r) \in W_3$ となるので，規則 3 によって値が決定されており，ファジィ部分可到達性を満たさない条件は存在しない．

(4) 規則 4 の場合，矛盾していると仮定すると，以下の場合が存在する．

$$(a)\ \ \overline{m'}_{pq} \ < \ \min(\underline{m}_{pr}, \overline{m}_{rq})$$
$$(b)\ \ \overline{m'}_{pq} \ < \ \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{rq})$$

$\overline{m'}_{pq} = \overline{m'}_{ij}$ を代入して

$$(a)\ \ \overline{m'}_{ij} \ < \ \min(\underline{m}_{pr}, \overline{m}_{rq})$$
$$(b)\ \ \overline{m'}_{ij} \ < \ \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{rq})$$

ファジィ部分可到達性より

$$(a)\ \ \underline{m}_{ir} \ \geq \ \min(\underline{m}_{ip}, \underline{m}_{pr})$$
$$(b)\ \ \underline{m}_{rj} \ \geq \ \min(\underline{m}_{rq}, \underline{m}_{qj})$$

が成立する．これより以下の式が導かれる．

$$(a)\ \ \overline{m'}_{ij} \ < \ \min(\overline{m}_{rq}, \underline{m}_{ir}, \underline{m}_{qj})$$
$$(b)\ \ \overline{m'}_{ij} \ < \ \min(\overline{m}_{pr}, \underline{m}_{ip}, \underline{m}_{rj})$$

上記の 2 通りはそれぞれ (a) $(r, q) \in W_4$，(b) $(p, r) \in W_4$となるので，含意規則によって値が決定されており，ファジィ部分可到達性を満たさない条件は存在しない．

(1),(2),(3),(4) より更新された行列 Fはにおいて矛盾が仮定される (p, q, r) の組は存在せず，よって更新後の行列 Fはファジィ部分可到達行列である．　Q.E.D.

第 4 章

FISM/fuzzy

本章では，前章で提案したファジィ部分可到達行列理論を利用し，柔軟なファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy を提案する．FISM/fuzzy は対象を構成要素集合上のファジィ擬順序関係として捉え，ファジィ可到達行列としてモデル化するものである．ファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy の構成・機能について述べ，具象化プロセスにおける要素対選択戦略を効率性と柔軟性から検討する．具体的には 7 つの要素対選択方法を検討し，一対比較回数を数値実験により比較評価を行い，有効な具象化戦略を提案する．

4.1 FISM/fuzzy セッション

FISM/fuzzy によるモデリングの実行を “FISM/fuzzy セッション” と呼ぶ．セッションは問題設定，関係定義，具象化，構造化，描画の五つのプロセスから構成される．

以下に FISM/fuzzy セッションの概略を示す.

1. 問題設定：構造化を行う対象を明確にする.
2. 関係定義：対象を構造化するためのファジィ擬順序関係 Rを定義する.
3. 具象化
   (a) 要素抽出：対象問題に対する要素集合 Sを抽出する.
   (b) 一対比較によるモデル生成：利用者が満足するモデルとなるまで以下を繰り返す.
      i. 未知要素対 (i, j) の選択.
      ii. ファジィ二項関係 iRjの帰属度の入力.
      iii. 含意規則を用いて M の更新.
4. 構造化
   (a) レベル分解：しきい値αを設定し，部分可到達行列とする.
   (b) 階層構造の抽出：有向グラフ表示のため，レベル分解行列に対して，強連結成分の縮約，パート分割，階層レベル分割等の計算を実行する.
5. 描画：結果を出力する．その表現形式を階層グラフで表現する．この階層グラフを問題の構造モデルと呼ぶ.

FISM/fuzzy セッションは，構造化を行う対象を明確にし（問題設定プロセス），対象を構造化するためのファジィ擬順序関係 Rを定義し (関係定義プロセス)，対象を有限集合 Sと S上のファジィ擬順序関係 Rの組$< S, R >$としてモデリングを行い (具象化プロセス)，ファジィ関係から階層構造を抽出し (構造化プロセス)，階層構造を有向グラフ等で出力する (描画プロセス).

関係定義プロセスでは，対象を構造化するために，構成要素間のファジィ二項関係 Rを明らかにする．ここで Rは，ファジィ反射性とファジィ推移性を満たすファジィ擬順序関係（ファジィ前順序）であると仮定する．ファジィ擬順序関係の性質を満たす主な関係の一覧を図 4.1に示す.

具象化プロセスは，モデル生成者の対象に対するあいまいな認識を，ファジィ部分可到達行列と含意規則を用いて対話的に具象化する過程である．具象化とは，対象システムの有限集合 Sと S上のファジィ二項関係 Rの組$< S, R >$としてモデリングすることである.

ファジィ擬順序の性質を利用して，ファジィ部分可到達行列，含意規則を用い，一対比較の回数を減少させ，効率よくモデルを決定する事ができる.

[要素対選択] は，利用者にまだ決定されていない要素対の関係を決定させるために未知要素を提示する．この場合, 利用者が任意に未知要素を選択してもよいし，計算機が適当な未知要素対を選択, 提示してもよい．どの要素対を選択するかによって一対比較の回数に影響を及ぼすが, 要素対選択戦略を利用することによって，効率的なモデル生成が可能である [20].

[帰属度入力] では，選択された未知要素対 (i, j) の帰属度を決定する．ただしその場合,

- 因果関係： A は B の原因である.
- 影響関係： A は B に影響する.
- 貢献関係： A は B のために役立つ (必要である).
- 優劣関係： A は B より優れている (重要である).
- 選好関係： A より B を選ぶ.
- 包含関係： A は B に含まれる.
- 依存関係： A は B に依存している.
- 手順関係： A の前に B を行う必要がある.
- 空間関係： A は B の東にある.
- 大小関係： A は B より大きい.

図 4.1: 関係定義例

これらの値は既に制約されている区間値内の値でなければならない.

[行列更新] では，決定された要素対 (i, j) の帰属度と含意規則を用いて行列 M を更新する.

以上より [モデル生成] は，(i)[要素対選択]，(ii)[帰属度入力] と (iii)[行列更新] を順次行い，行列 M の要素が全て既知となるまで繰り返し，ファジィ可到達行列を生成する.

4.2 例題

具象化プロセスの例として“学生の就職に対する意思決定”を取り上げる．学生が就職するにあたり”どのような情報を重要視するか”という観点から学生の就職に対するあいまいな認識をモデル化する．ある学生に関しては，以下のようになった．

1. 前処理

構成要素集合 N の要素は”学生が就職に関して重要視している情報”とする．構成要素の抽出はブレーンストーミング，KJ 法などによる．本例では，

$N = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

s_1：安定性のある企業に入る．

s_2：高収入な職につく．

s_3：福利厚生のよい企業に入る．

s_4：地方に住む．

とする．関係 R は，構成要素間を比較するものとして”〜は〜より重要である”とする．ファジィ部分可到達行列 M

$$M(i, j) = [\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}] \tag{4.1}$$

の要素 $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ は” s_i は s_j より重要である”ことの帰属度を表すものである．初期化として対角要素を既知で値を 1，それ以外の要素を未知とし，最小値を 0，最大値を 1 とする．前処理後の行列 M は図 4.2となる．

2. モデル生成

$$M = \begin{array}{c|cccc} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline s_1 & 1 & [0,1] & [0,1] & [0,1] \\ s_2 & [0,1] & 1 & [0,1] & [0,1] \\ s_3 & [0,1] & [0,1] & 1 & [0,1] \\ s_4 & [0,1] & [0,1] & [0,1] & 1 \\ \hline \end{array}$$

図 4.2: 前処理

(a) 関係の帰属度の入力は，選択された要素対に対してモデル生成者が解答する．要素対の選択は生成者が任意に指定して入力してもよいし，計算機が適当な要素対を選択して，その要素対の関係の帰属度を質問してきてもよい．後者の場合，モデル生成者は質問に対し，解答を保留して次の質問を促すことが可能である．この場合計算機が次の要素対を選択し，質問する．

質問に対して，モデル生成者は要素間の重要度を図 4.3の 5 段階より選択する．行列 M には選択された重要度を $[0,1]$ の値で入力する．

例えば

計算機　：　” s_iは s_jより重要ですか?”

モデル生成者　：　” 少し (0.2)”

この場合，行列 M には (i,j) 要素に 0.2 を入力する．行列 M を入力された (i,j) の値よ

極めて	かなり	ある程度	少し	全くない
1.0	0.7	0.5	0.2	0

図 4.3: 関係の帰属度

り含意規則を用いて再び行列 M がファジィ部分可到達行列となるように更新する．この過程はモデル生成者にとって満足するモデルになるまで繰り返す．本例では，以下の 9 ステップとなる．

ステップ 1~3

モデル生成者が $M(1,2)=0.2$, $M(2,1)=0$, $M(4,3)=0.5$ の情報を順次入力し，含意規則を適用した時点で行列は図 4.4の M'になり，ファジィ部分可到達行列である．この場合含意規則によって新たに値が変更となった未知要素は存在しない．

ステップ 4

$M(2,3)=0.7$ の情報を入力すると，以下の未知要素の値が決定される．

$$\underline{m}_{13}=0.2 \quad (W_1(2,3)=\{(1,3)\})$$

$$\overline{m}_{31}=0 \quad (W_2(2,3)=\{(3,1)\})$$

$$\overline{m}_{42}=0.5 \quad (W_3(2,3)=\{(4,2)\})$$

新たな M は M'' の通りであり，ファジィ部分可到達行列である．

ステップ 5

次に $M(2,4)=0.2$ の情報を入力すると，以下の未知要素の値が決定される．

$$\underline{m}_{14}=0.2 \quad (W_1(2,4)=\{(1,4)\})$$
$$\overline{m}_{41}=0 \qquad (W_2(2,4)=\{(4,1)\})$$
$$\overline{m}_{34}=0.2 \quad (W_4(2,4)=\{(3,4)\})$$

新たな M は図 4.5の M'''の通りであり，ファジィ部分可到達行列である．

ステップ 6~9

さらに $M(4,2)=0.2$, $M(1,4)=1$, $M(1,3)=0.5$, $M(3,2)=0.2$, を順次入力し，含意規則を適用し行列 Mを更新すると，最終的に行列は M''''となりファジィ可到達行列が生成される．この行列を解析することによって学生の個々の情報間に対する重要性が明確になる．

4.3　推移的具象化過程における要素対の選択戦略

本項では，効果的なモデリングを試行するために，要素対の選択方法を検討し，柔軟性と効率性の両面を満足する選択戦略を提案する．

以下では，考えられる 7 つの選択戦略を提案し，計算機による比較実験を行うことにより，有効な選択方法を検討する．

$$M' = \begin{array}{c|cccc|} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline s_1 & 1 & 0.2 & [0,1] & [0,1] \\ s_2 & 0 & 1 & [0,1] & [0,1] \\ s_3 & [0,1] & [0,1] & 1 & [0,1] \\ s_4 & [0,1] & [0,1] & 0.5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$M'' = \begin{array}{c|cccc|} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline s_1 & 1 & 0.2 & [0.2,1] & [0,1] \\ s_2 & 0 & 1 & 0.7 & [0,1] \\ s_3 & 0 & [0,1] & 1 & [0,1] \\ s_4 & [0,1] & [0,0.5] & 0.5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

図 4.4: 行列 M の更新 (1)

4.3.1　方法 1:選好入力

この方法は，要素対の選択を利用者の意志に任せて自由に選択し，要素間の関係 iRj の度合いを決定していく方法である (図 4.6(a)).

$$M''' = \begin{array}{c|llll} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline s_1 & 1 & 0.2 & [0.2,1] & [0.2,1] \\ s_2 & 0 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ s_3 & 0 & [0,1] & 1 & [0,0.2] \\ s_4 & 0 & [0,0.5] & 0.5 & 1 \end{array}$$

$$M'''' = \begin{array}{c|llll} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline s_1 & 1 & 0.2 & 0.5 & 1 \\ s_2 & 0 & 1 & 0.7 & 0.2 \\ s_3 & 0 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ s_4 & 0 & 0.2 & 0.5 & 1 \end{array}$$

図 4.5: 行列 Mの更新 (2)

4.3.2　方法 2：逐次行 (列) 入力

ファジィ部分可到達行列を 1 行 (列) ごと決定していく方法である．逐次行入力方法は，$1R2$, $1R3$, $1R4$, $\cdots$, $1Rn$ と順次入力し，次に $2R1$, $2R3$, $2R4$, $\cdots$, $2Rn$ と入力する方法である．逐次列入力は，逐次行入力と対称な入力方法で，$2R1$,$3R1$,$\cdots$,$nR1$, と列方向に入力していく．これら方法は，利用者がある要素から他の全ての要素への関係を連続して入力するため，この要素から他の要素への関係を相対的に判断することができる (図 4.6(b)).

4.3.3　方法 3：逐次混合入力

この方法は，まず要素 1 と他の要素への関係，$1Ri,iR1$ を入力する．次に要素 2 と 1 を除く他の要素との関係を決定するというように，ある要素と他の要素の双方向の関係を連続して入力する方法である (図 4.6(c))．

4.3.4　方法 4：推移的拡大

要素を順次追加し，ファジィ部分可到達行列を拡大する方法である．最初は，2 要素から始める．$2{\times}2$ のファジィ可到達行列を作成した後，要素 3 を追加し，$3Ri,iR3$ の関係を入力する．$3{\times}3$ のファジィ可到達行列を作成した後，要素 4 を追加する，という方法である．この方法は，既に決定された要素集合と新たに追加される要素との関係を質問するものである (図 4.6(d))．

4.3.5　方法 5：推移的結合

この方法は，まず要素集合 S を 2 つの要素集合 S_1, S_2 に分割する．S_1, S_2 上のファジィ二項関係を表す関係行列をそれぞれ A, B とする (図 4.6(e))．まず A, B を決定し，その後，A と B を結合するために X, Y を決定する方法である．ここでサブシステム A, B の作成，結合時の X, Y の作成は方法 1 とする．この方法は利用者にサブシステムを分割させ，対象領域を制限させることによって，関係の決定を促進させる目的がある．

4.3.6　方法 6：含意率による選択戦略

この方法は，できる限り他の要素対の値を含意することが可能と思われる要素対を選択することによって，一対比較回数を削減することを目的とする．

定義 3.5.4の含意規則を検討することによって，未知要素と未知要素における含意予測が可能となる．

$\min - \min$ 含意の場合は，(i, j) 要素の最小値$\underline{m}_{ij}$を $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ の範囲で$\underline{m'}_{ij}$に変更すると，(l, m) 要素の最小値$\underline{m}_{lm}$は太線に沿って変更される (図 4.7(a))．すなわち

$$\underline{m'}_{lm} = \begin{cases} \underline{m}_{ij} & : \underline{m}_{ij} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \underline{m}_{lm} \\ \underline{m'}_{ij} & : \underline{m}_{lm} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \underline{m}_{li}\underline{m}_{jm} \\ \underline{m}_{li}\underline{m}_{jm} & : \underline{m}_{li}\underline{m}_{jm} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \end{cases} \tag{4.2}$$

となる．同様に，他の含意規則について考察すると，

$\max - \max$ 含意の場合，図 4.7(b) より

$$\overline{m'}_{lm} = \begin{cases} \overline{m}_{lm} & : \underline{m}_{ij} \leq \overline{m'}_{ij} < \underline{m}_{il}\underline{m}_{mj} \\ \overline{m'}_{ij} & : \underline{m}_{il}\underline{m}_{mj} \leq \overline{m'}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \end{cases} \tag{4.3}$$

$\min - \max$ 含意 (1) の場合，図 4.7(c) より

$$\overline{m'}_{lm} = \begin{cases} \overline{m}_{lm} & : \underline{m}_{ij} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \underline{m}_{jl} \circledast \overline{m}_{im} \\ \underline{m}_{jl} \circledast \overline{m}_{im} & : \underline{m}_{jl} \circledast \overline{m}_{im} < \underline{m'}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \end{cases} \tag{4.4}$$

min − max 含意 (2) の場合，図 4.7(d) より

$$\overline{m'}_{lm} = \begin{cases} \overline{m}_{lm} & : \underline{m}_{ij} \leq \underline{m'}_{ij} \leq \underline{m}_{il} \circledast \overline{m}_{mj} \\ \underline{m}_{il} \circledast \overline{m}_{mj} & : \underline{m}_{il} \circledast \overline{m}_{mj} < \underline{m'}_{ij} \leq \overline{m}_{ij} \end{cases} \tag{4.5}$$

となる．

図 4.7は，(i,j) 要素の (l,m) 要素に対する含意予測を示すものである．図 4.7の網かけで示されている部分が (i,j) 要素の値$\overline{m}_{ij}(\underline{m}_{ij})$ を決定したときに，(l,m) 要素の値$\overline{m}_{lm}(\underline{m}_{lm})$ が変更される場合である．

よって，各含意規則における網かけの面積の合計を (i,j) 要素のとり得る範囲 $(\overline{m}_{ij} - \underline{m}_{ij})$ で割った値を，(l,m) 要素に対する (i,j) 要素の含意率$\rho_{lm}(i,j)$ として

$$\rho_{lm}(i,j) = \frac{\text{網かけ部分の面積の合計}}{\overline{m}_{ij} - \underline{m}_{ij}} \tag{4.6}$$

と定義すると，含意率が高い要素対を選択し，利用者に提示することで一対比較の減少を計ろうとするものである．

例として，

$$M = \begin{array}{c|cccc|} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline s_1 & 1 & 0.2 & [0,1] & [0,1] \\ s_2 & 0 & 1 & [0,1] & [0,1] \\ s_3 & [0,1] & [0,1] & 1 & [0,1] \\ s_4 & [0,1] & [0,1] & 0.5 & 1 \\ \hline \end{array} \tag{4.7}$$

表 4.1: 含意率

	M(1,3)	M(1,4)	M(2,3)	M(2,4)	M(3,1)	M(3,2)	M(3,4)	M(4,1)	M(4,2)	合計
M(1,3)	1	0.375	0.18	0.18	0	0.64	0	0.25	0	2.625
M(1,4)	0.375	1	0	0.18	0	0.64	0	0	0.64	2.835
M(2,3)	0.18	0	1	0.375	1	0	0	0	0.25	2.805
M(2,4)	0.18	0.18	0.375	1	1	0	0	1	0	3.735
M(3,1)	0	0	1	1	1	0.18	0	0.375	0.18	3.735
M(3,2)	0.64	0.64	0	0	0.18	1	0	0	0.375	2.835
M(3,4)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
M(4,1)	0.25	0	0	1	0.375	0	0	1	0.18	2.805
M(4,2)	0	0.64	0.25	0	0.18	0.375	0	0.18	1	2.625

とするとき，含意率は表 4.1となる．よって，$(3,1)$ 要素または $(2,4)$ 要素に対し値を入力すると他の要素対の関係がより含意される．この戦略では提示された要素対に対して利用者は，解答を保留することが可能である．その場合，計算機は次善の要素対を提示することが可能である．

4.3.7　方法 7：選好入力と含意率による混合戦略

この方法は，方法 6 の効率性にモデリングの柔軟性を加味した選択方法である．利用者の一対比較の負担を軽減し，柔軟性を高めるためには，ある程度まで方法 1 により利用者

の意志にまかせて要素対を選択，決定し，未知要素が減少した後に方法 6 によって要素対を選択する方法が効果的と思われる．さらに選択戦略によって提示された要素対 (i,j) の関係の決定後，その対称要素対 (j,i) も提示する．これは，含意規則より対称である要素対を同時に決定することにより，要素対の決定が容易であることからである．

実験手順は，まず要素対の選択を選好入力により決定する．未知要素数が初期状態の未知要素数のおよそ 1/3 以下になった時点で方法 6 の含意率計算による要素対選択を行い，関係の決定を行う．全体を通して，対称の関係も同時に入力する．

4.4　実験結果と考察

実験方法は，対角要素の値は 1 でその他は [0,1] となるように，ファジィ部分可到達行列を初期化する．

前節で提案した各種の方法により要素対を選択し，その要素対の最大値と最小値の間の数値で，{ 0.0, 0.2, 0.5, 0.7, 1.0 } のとり得る値をランダムに選択する．これを繰り返し，最終的にファジィ可到達行列になるまでの入力回数を数える．入力率とは，全入力回数を行列の対角要素を除く数 $n(n-1)$ で割った値である．数値実験結果を表 4.2に示す．表 4.2 では列に要素数 n，行には各種の選択方法，行列値は要素数における各種の選択方法の入力率を示す．実験の結果，以下のことが判明した．

1. 入力率は要素数が多くなるほど減少する．これは，要素数が増加するほど，一つの関係からより多くの他の要素間の関係が含意されるためである．よって FISM/fuzzy の

推移的具象化は，他の構造モデリングに比べて大規模な構造モデリングに対して特に有効であると考えられる．

2. 方法 2 に比べて方法 3,4,5 の入力率が低い理由として，要素間の双方向の関係を決定している点が挙げられる．これは含意規則による他の関係への含意が，要素間の双方向の関係が決定されている方が，より含意されやすいからである．

3. 方法 2 から方法 5 は，要素対選択を規則的に行っているため，含意される要素数が限定される．したがって要素数が多くなるにしたがって，モデリングの効率が方法 1 と同等以下となる．

4. 方法 6 が他の方法と比較して，余り効果的ではない理由は，初めから含意率を計算し，その時点で最適であると思われる要素対を選択するが，その選択された要素対は，初期状態に対する含意率の高いものであるがゆえに，ある特定領域に決定された要素対が集まってしまう傾向にある．

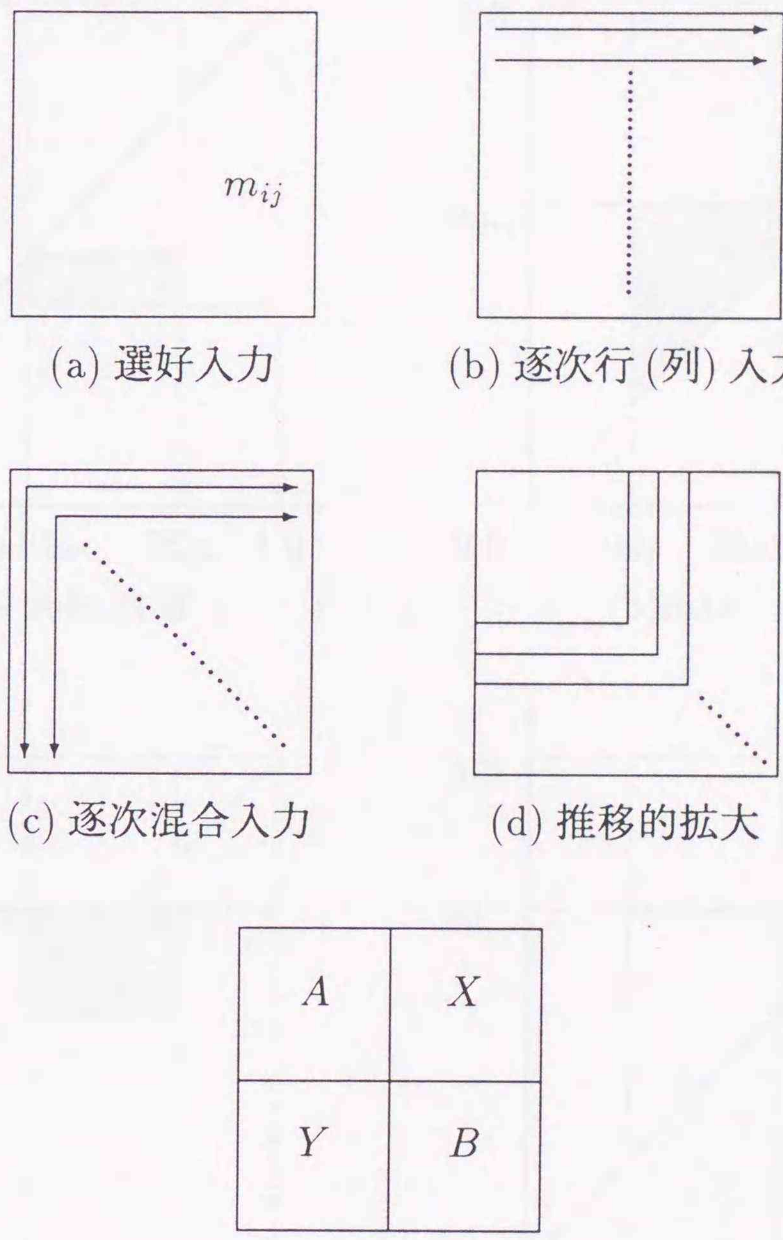
   また，含意率計算の必要記憶容量と計算時間は，ファジィ部分可到達行列の未知要素数の 2 乗に比例するため，モデリングの初期の状態では，未知要素が大部分を占めるうえ，必要記憶容量と計算時間が膨大でかつ，計算効率が良くない．よって，含意率計算による方法は，決定されている要素間の関係がある程度広範囲に広がっている場合に効果的となる．

5. 利用者のモデリングにおける柔軟性の点からすると，方法 2 から方法 6 は計算機から提示される要素対の値のみを決定するので，利用者の意志が反映されない．

6. 方法 7 による推移的具象化の実験は表 4.2に示すように，他の方法と比較して効率的であることがわかる．またこの方法は，利用者も要素対の選択を自由に行うことができ，柔軟なモデリングが可能である．

表 4.2: 入力方法による入力率

	10	20	30	40	50
方法 1(選好入力)	0.51	0.34	0.30	0.26	0.24
方法 2(逐次入力)	0.53	0.43	0.38	0.34	0.32
方法 3(逐次混合入力)	0.45	0.34	0.30	0.27	0.25
方法 4(推移的拡大)	0.46	0.34	0.29	0.26	0.24
方法 5(推移的結合)	0.45	0.35	0.30	0.25	0.24
方法 6(含意率計算)	0.44	0.36	0.32	0.28	0.24
方法 7(混合戦略)	0.41	0.26	0.20	0.17	0.16



(a) 選好入力　(b) 逐次行 (列) 入力

(c) 逐次混合入力　(d) 推移的拡大

(e) 推移的結合

図 4.6: 要素対選択戦略

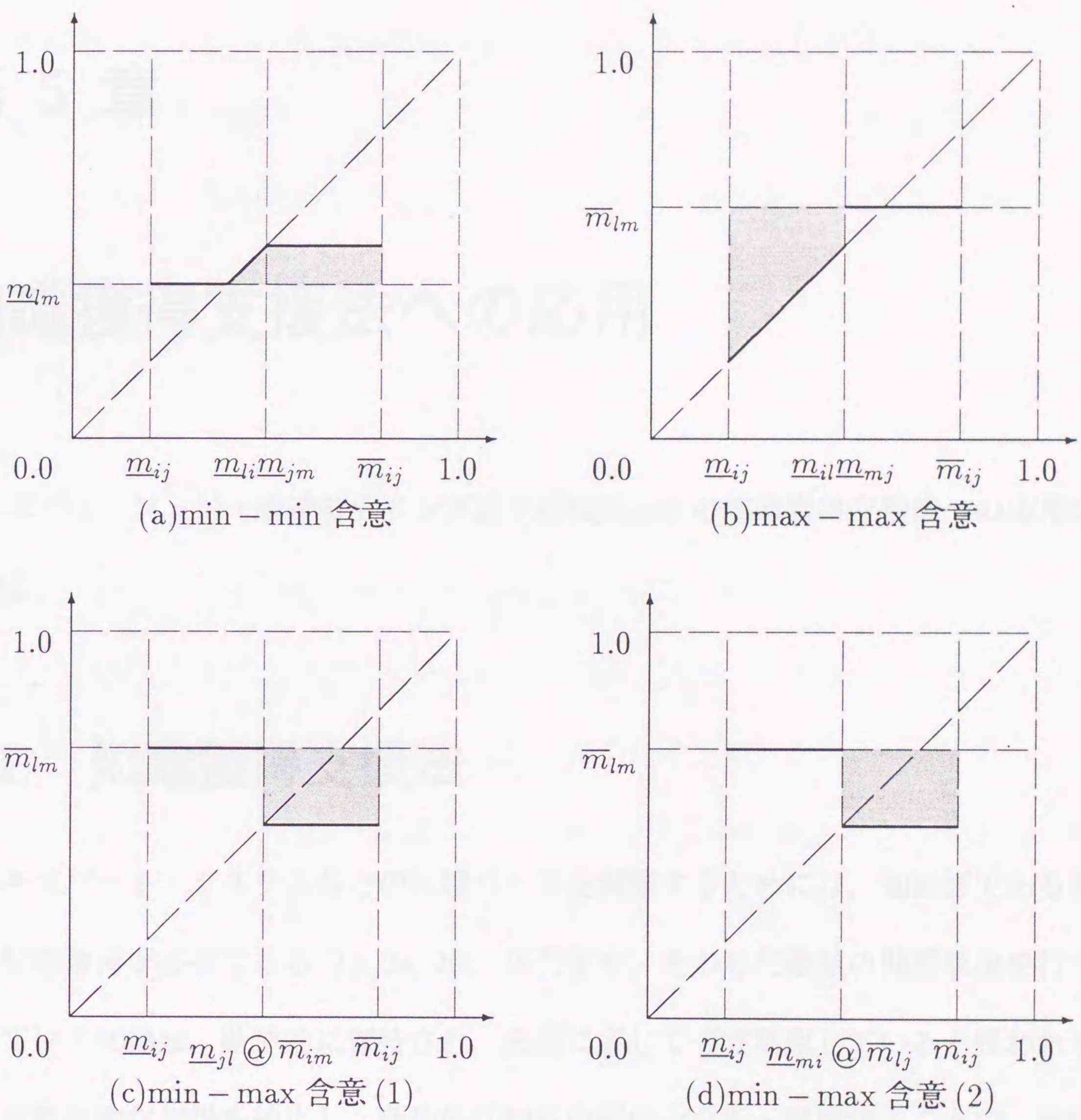

1.0
$\underline{m}_{lm}$
0.0
$\underline{m}_{ij}$
$\underline{m}_{li}\underline{m}_{jm}$
$\overline{m}_{ij}$
1.0
(a)min − min 含意
1.0
$\overline{m}_{lm}$
0.0
$\underline{m}_{ij}$
$\underline{m}_{il}\underline{m}_{mj}$
$\overline{m}_{ij}$
1.0
(b)max − max 含意
1.0
$\overline{m}_{lm}$
0.0
$\underline{m}_{ij}$
$\underline{m}_{jl}$ @ $\overline{m}_{im}$
$\overline{m}_{ij}$
1.0
(c)min − max 含意 (1)
1.0
$\overline{m}_{lm}$
0.0
$\underline{m}_{ij}$
$\underline{m}_{mi}$ @ $\overline{m}_{lj}$
$\overline{m}_{ij}$
1.0
(d)min − max 含意 (2)

図 4.7: 含意予測図

第 5 章

知識獲得支援法への応用

本章では，ファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy の知識獲得支援法への応用について述べる．

5.1 知識獲得支援法

エキスパート・システムなどの知識ベースを構築するためには，知識源である専門家からの知識獲得が必要である [23, 24, 25]．専門家が，その専門領域の問題解決を行う際に利用している知識は，断片的に保持され，必要に応じて適宜利用していると思われる．このような断片的な知識を抽出し，断片的な知識の関係の分析・整理することで，専門家の高次の知識を獲得することが可能となる．知識獲得とは，専門家に自己の持つ知識を発想させ，知識の整理を行うことである．しかし，この専門家からの知識獲得は困難な作業であ

り，知識ベース構築のボトルネックとなっていて種々の知識獲得支援法が提案されている．主な知識獲得支援ツールとしては，ETS, MORE などがある [26]~[29].

従来の知識獲得支援法からの問題点として，いかに専門家に問題領域に関連する必要な断片的知識を発想させ，知識の関係を整理するかということが挙げられる．この知識の発想，知識間の関係の整理は，知識の欠落，矛盾を招くとともに，専門家の知識獲得に対する負担が大きい．主に知識獲得支援法に求められている機能として，以下の二点が挙げられる．

1. 発散的「発想」支援機能
2. 収束的「体系化」支援機能

発散的「発想」支援とは，専門家が問題領域に関連の深い断片的知識を列挙させる作業である．しかし，専門家が問題に関連の深い知識を最初からすべて列挙することは通常困難である．よって，専門家に知識を想起させることが重要となる．

収束的「体系化」支援とは，発想によって得られた断片的知識に対して関係づけを行い，そこに内在している階層構造を抽出する作業である．その際，問題となるのは，階層構造の同定において一対比較の問題がある．知識間の関係の一対比較を行うことは，知識の欠落，矛盾を招くとともに，専門家の知識獲得に対する負担が増大する．また，関係の曖昧性という問題がある．一般に優れた能力を持つ専門家は，知識処理における曖昧性のはたす役割の重要性が指摘されている．実際，専門家は，問題解決で，数値データを基に判断していることはもちろん，数値データに現れない主観的な評価概念にも基づいて判断して

いる．その場合，通常の関係の有無による二値の二項関係では，人間の思考の曖昧性を表現することが困難である．

本章では，FISM/fuzzy を利用して知識の「発想」,「体系化」を効率的に支援する知識獲得支援法を提案する．本システムの特徴は，先に述べた知識獲得に関する問題の対処すべく，知識を階層的に捉え，分類モデルと知識モデルに分けて考えることで対応している．分類モデルとは，分類対象となる事例と，その事例を評価する評価概念との関係が記述されている知識である．知識モデルとは，評価概念間の関係が記述されている知識である．前者は，比較的表層的な知識で，容易に専門家から獲得できるのに対して，後者は深層的な知識で，専門家の頭の中に隠されていて獲得することが容易ではない．よって分類モデルを獲得することによって，分類に必要な評価概念が事例との比較により獲得できると同時に，知識モデルの類推に利用することができる．

知識モデルの獲得は，分類モデルから得られた知識モデルの仮説を，専門家に提供することによって，専門家が納得する知識モデルを獲得する．その際に一対比較の削減が可能な手続きをとる．その結果，問題領域に重要とされる評価概念のみを抽出し，その階層構造を効果的に獲得することが可能となる．

5.2 FISM/fuzzy を利用した知識獲得支援法の構成

本章では FISM/fuzzy を利用した知識獲得支援システムについて述べる．本システムは，専門家に積極的に働きかけ，自己の持つ知識の発想，整理を支援することを目的としたシステムである．

知識獲得支援工程は以下の手順で進める．

1. 分類モデル獲得
2. 知識モデル推定
3. 知識モデル同定
4. 知識モデル構造分析

以下では各工程について述べる．

5.2.1 分類モデル獲得

分類モデルの獲得は，分類対象の事例集合，事例を評価するための評価概念集合の獲得，及び事例と評価概念との関係を獲得することである．

事例集合を

$$S_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\} \tag{5.1}$$

とし，評価概念集合を

$$S_T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \tag{5.2}$$

とする．事例は問題領域に実存するものであり，評価概念は事例間を区別し，評価することのできる特性である．分類モデルは列に実例集合，行に評価概念集合から構成されている行列である．

$$D = [d_{ij}] \quad i \in S_T, j \in S_I \tag{5.3}$$

と表す．

分類モデルの作成手順は，まず問題領域に実在する事例を挙げる．次に三事例を比較することによって問題領域に内在する評価概念の抽出を行う．比較する対象の事例は，あらかじめ事例が属性値として保持する数値によりクラスター分析を行い，カテゴリーの同一な二実例と，異なるカテゴリーに属する一事例を専門家に提示する．専門家は，提示された三事例を比較して，同一カテゴリーの実例に共通に特徴があり，その他の実例には特徴がない評価概念を入力する．

この手順による評価概念の抽出は，問題領域に関連の深い重要なキー概念となる評価概念のみが抽出されることになる．分類モデルの値には，各評価概念の各事例に対する尺度づけされた値を入力する．行列の要素 d_{ij} の値は，1 に近いほど評価概念 i が事例 j との関係が明確であり，値が 0 であれば関係がないということになる．

5.2.2　知識モデルの仮説生成

次に分類モデルより，知識モデルの仮説を導出する．専門家に導出された仮説を検証しながら，専門家が確信できる知識モデルの部分構造を順次入力することによって，矛盾のない知識モデルを構築するものである．

分類モデルから評価概念集合上のファジィ含意関係の仮説を推定し，部分的ファジィ関係行列として表現する．

推定される知識モデルを

$$M = [\underline{m}_{ij} \quad \overline{m}_{ij}], i, j \in S_T \tag{5.4}$$

と表す．

推定方法として，評価概念 i と評価概念 j のファジィ含意関係のメンバーシップのグレードを，各事例 e における評価概念 i から評価概念 j へのファジィ含意関係の上限と下限をとることにより求める．I は [0,1] × [0,1] → [0,1] をとる含意関数である．

$$\underline{m}_{ij} = \min_e(\mathrm{I}(g_{ie}, g_{je})) \tag{5.5}$$

$$\overline{m}_{ij} = \max_e(\mathrm{I}(g_{ie}, g_{je})) \tag{5.6}$$

ファジィ含意関数は現在様々なものが提案されており代表的な関数を図 5.1に示す．専門家は，自己の概念に合うファジィ含意関数を使用することによって，推定される知識構造がより自己の専門知識に近づいたモデルが推定されると考えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_m(a,b) &= \max(\min(a,b), 1-a) && \text{(Zadeh)}\\
\mathrm{I}_a(a,b) &= \min(1, 1-a+b) && \text{(Lukasiewicz)}\\
\mathrm{I}_c(a,b) &= \min(a,b) && \text{(Mamdani)}\\
\mathrm{I}_g(a,b) &= \begin{cases} 1 & (a \le b) \\ b & (a > b) \end{cases} && \text{(Gödel)}\\
\mathrm{I}_\sharp(a,b) &= \max(1-a, b) && \text{(Dienes)}\\
\mathrm{I}_\triangle(a,b) &= \begin{cases} 1 & (a \le b) \\ b/a & (a > b) \end{cases} && \text{(Goguen)}\\
\mathrm{I}_\Box(a,b) &= \begin{cases} 1 & (a \ne 1 or b = 1) \\ 0 & others \end{cases} && \\
\mathrm{I}_*(a,b) &= \max(0, b-a) &&
\end{aligned}
$$

図 5.1: 含意関数

5.2.3　知識モデル獲得

専門家は，類推された知識モデルの仮説を参考にしながら，知識モデルの構造同定を試行する．その際に効率的な構造同定の道具として，ファジィ部分可到達行列理論を利用する．

知識モデルの初期モデルは，仮説として導出された知識モデルである部分的既知なファジィ行列を参考とし，評価概念集合上のファジィ擬順序関係を決定する．これには，ファ

ジィ部分可到達行列及び含意規則を用いる [15].

具体的には専門家が決定すべき要素対を選択する．要素対の選択は，利用者が行ってもよいし，ある基準により計算機が自動的に選択してもよい．

評価概念上のファジィ擬順序関係 iRjの帰属度の入力は専門家が行う．帰属度の決定は，行列要素対がすでに推定された最小値と最大値を利用して決定する．これにより，専門家は，ファジィ擬順序関係の決定をある程度限定してから試行することになるので，利用者の負担が軽減され，無理なモデリングにはならない．

決定された帰属度と含意規則によって他の未知要素を論理的に決定する．この場合他の未知要素は既知要素になる場合もあるが，上限値または下限値のみ変更される場合もある．よって，知識モデルであるファジィ部分可到達行列の未知要素に値を与えて，含意規則を繰り返し適用すれば，最終的にファジィ部分可到達行列の要素全体が既知となり，評価概念間のファジィ擬順序関係 Rを表すファジィ可到達行列が得られる．

FISM/fuzzy を応用した知識獲得支援法は，知識獲得を柔軟に試行できると考えられる．

知識を構造的に把握する場合，知識間の二項関係 Rは，問題により反射性と推移性等の性質を仮定する場合が多い．このようなことから仮定される二項関係は擬順序関係 (前順序関係) であると考えられる．擬順序関係は半順序関係と同値関係に共通な性質を持つことより構造同定には必要な関係である．具体的な擬順序関係の例としては，if-then ルール，is-a 関係, has-part 関係が挙げられる．この場合，関係づけの効率化と無矛盾化を考慮したアルゴリズムを構築することができる．

人間の思考モデルを構築するためには，思考の曖昧性及び思考過程を支援することが必

要である．思考の曖昧性とは，人間の自由な思考を表現する際に，関係の有無を二値的に決めていくのが困難な場面がある．例えば,「A から B へ関係がありそうだ.」,「A から B への関係より B から C への関係の方が強い.」などである．一般に優れた能力を持つ専門家は，知識処理における曖昧性のはたす役割の重要性が指摘されている．実際，専門家は，問題解決で，数値データを基に判断していることはもちろん，数値データに現れない主観的な評価概念にも基づいて判断している．その場合，通常の関係の有無による二値の二項関係では，人間の思考の曖昧性を表現することが困難である．

ファジィ部分可到達行列は，このようなモデルを表現することに適している．また，専門家が主観的な概念間の関係を決定することは困難な作業である．専門家が概念間の関係の一対比較を行うことは，専門家の知識獲得への負担につながるとともに，知識の矛盾，漏れが生じる原因となる．含意規則は，計算機が専門家の入力した部分的な構造より，理論上明らかであるところを専門家に提示することによって，専門家は全ての知識構造を決定する必要がなくなり，構造同定の負担を軽減することができる．含意規則の計算量は要素数を n とすると，$O(n^2)$ であり，含意規則を用いた一対比較は，数値実験において削減は著しいものとなっている．

5.2.4　知識モデルの構造分析

知識モデル構造分析過程では，獲得された知識モデルを分析し，同値性や階層性を抽出し，マクロ的に把握する．構造化過程は六つのフェイズからなる．

1. レベル分解：ファジィ可到達行列をα-レベル分解し，二値行列とする．

2. 階層構造の抽出：有向グラフ表示のために，レベル分解行列に対し，同値類，パート分割，レベル分割等の一連の計算を実行する．

3. リダクション：構造化した結果から，冗長な関係をすべて取り除き，要素間の関係を最小の有効辺で表現するためのリダクションと呼ぶ計算を実行する．

4. グラフ表現：構造化過程で抽出した同値関係，階層関係の結果をハッセ図で表し，視覚的に表現する．

5.3 例題

FISM/fuzzy を利用した知識獲得支援法の例題として，医療施設類型化問題を取り上げる．医療施設類型化問題は，地域医療計画の一環として，各医療圏内での既存医療施設の資源能力を効率的にかつ効果的に運営するために重要な分析である．

医療施設を類型化するためには，医療施設の有する目的，評価基準が曖昧であることが多い．そのために類型化を行う専門家（医療関係者）に，自己の類型化に関する知識を獲得する必要がある．

(1) ステップ: 客観的評価基準による医療施設の分析

医療施設を客観的評価基準を基にクラスター分析を行う．対象施設は 612 施設で，客観的評価基準は図 5.2の通りである．これらの施設をクラスター分析を行った結果，代表され

る 7 施設施設を抽出した.

医師数
正看護婦数
准看護婦数
老人収容率
平均在院日数

図 5.2: 客観的評価基準

(1) ステップ: 領域モデルの獲得.

まず専門家は，実例集合 $S_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_5\}$ を決定する．この場合，実例は分類対象となる医療施設である．これはあらかじめ分類対象となる医療施設より，類型化に関して重要であると思われている属性値を参考に，クラスター分析を行い，典型的な医療施設を提示する.

次に任意の三実例を比較し，属性要素集合 $S_T = \{t_1, t_2, \cdots, t_6\}$ を決定する (図 5.3).

要素集合と実例集合の比較により領域モデルの値を決定する (図 5.4).

(2) ステップ:

領域モデルを解析し，専門家の知識モデルの仮説を領域モデルより推定する．(図 5.5).
本論文では，ファジィ含意関数として I_gを用いた.

(3) ステップ:

領域モデルより抽出された知識モデルを専門家に提供しながら，専門家が知識モデルを

t_1	スタッフの有能性
t_2	地域性
t_3	高度医療
t_4	診療バランス
t_5	老人病院
t_6	総合評価

図 5.3: 属性要素集合

同定する．初期行列として，対角要素を既知とし，値を 1 とする．その他の要素は，未知とし，値を [0,1] とする．利用者が任意の属性要素間の関係を決定し，順次含意規則を適用し，知識モデルを更新する．専門家の入力が以下の様に実行したとする．

(3-1)$m_{12} = 0.3$, 含意規則の計算.

(3-2)$m_{21} = 0.3$, 含意規則の計算.

(3-3)$m_{31} = 1.0$ 含意規則の計算.

(3-4)$m_{56} = 0.3$ 含意規則の計算.

(3-5)$m_{36} = 0.0$ 含意規則の計算.

(3-6)$m_{63} = 0.5$ 含意規則の計算.

この結果の知識モデルは，図 5.6の上図となる．

(3-7) さらに，$m_{24} = 0.7$ の情報を入力し，含意規則を実行し，行列 Mを更新すると，以下の未知要素の値が決定される (図 5.6).

$\underline{m}_{14} = 0.3,$

$\underline{m}_{34} = 0.3,$

$\overline{m}_{41} = 0.3,$

$\overline{m}_{45} = 0,$

$\overline{m}_{46} = 0.$

以下順次，関係の入力，含意規則の適用による更新を繰り返すことによって，最終的に知識モデルであるファジィ部分可到達行列の行列要素が全て既知となり，要素集合上のファジィ関係を表現したファジィ可到達行列が作成される (図 5.7).

この結果を構造分析過程では，しきい値α =0.5 で分解し，有向グラフで表すと，図 5.8 のようになる.

本章では，FISM/fuzzy を利用した知識獲得支援法を提案した．現在，提案したプロトタイプを，Work Station 上でインプリメントしている．今後の課題としては，複数の個人またはグループから獲得した知識を統合し，一つの知識モデルにする合意機能などを実現する必要がある.

	A 病院	B 病院	C 病院	D 病院	E 病院

	A 病院	B 病院	C 病院	D 病院	E 病院
t_1					

	A 病院	B 病院	C 病院	D 病院	E 病院
t_1					
t_2					
t_3					
t_4					
t_5					
t_6					

	A 病院	B 病院	C 病院	D 病院	E 病院
t_1	1.0	1.0	0.5	0.7	0.3
t_2	0.5	0.7	1.0	0.3	1.0
t_3	0.5	0.5	0.3	0.5	0.0
t_4	0.7	0.5	1.0	0.3	1.0
t_5	0.7	0.7	1.0	0.0	0.5
t_6	0.7	0.5	0.7	0.0	0.3

図 5.4: 分類モデル作成

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
t_1	1	[0.3,1]	[0,0.5]	[0.3,1]	[0,1]	[0,1]
t_2	[0.3,1]	1	[0,1]	[0.5,1]	[0,1]	[0,1]
t_3	1	[0.3,1]	1	[0.3,1]	[0,1]	[0,1]
t_4	[0.3,1]	[0.5,1]	[0,1]	1	[0,1]	[0,1]
t_5	[0.3,1]	[0.5,1]	[0,1]	[0.5,1]	1	[0.3,1]
t_6	[0.5,1]	[0.5,1]	[0,1]	1	1	1

図 5.5: 知識モデル推論

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
t_1	1	0.3	[0,1]	[0,1]	0	0
t_2	0.3	1	[0,0.3]	[0,1]	0	0
t_3	1	[0.3,1]	1	[0,1]	0	0
t_4	[0,1]	[0,1]	[0,1]	1	[0,1]	[0,1]
t_5	[0.3,1]	[0.3,1]	[0.3,1]	[0,1]	1	0.3
t_6	[0.5,1]	[0.3,1]	0.5	[0,1]	[0,1]	1

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
t_1	1	0.3	[0,1]	[0.3,1]	0	0
t_2	0.3	1	[0,0.3]	0.7	0	0
t_3	1	[0.3,1]	1	[0.3,1]	0	0
t_4	[0,0.3]	[0,1]	[0,1]	1	0	0
t_5	[0.3,1]	[0.3,1]	[0.3,1]	[0.3,1]	1	0.3
t_6	[0.5,1]	[0.3,1]	0.5	[0.3,1]	[0,1]	1

図 5.6: 知識モデルの構築

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
t_1	1	0.3	0.3	0.3	0	0
t_2	0.3	1	0.3	0.7	0	0
t_3	1	0.3	1	0.3	0	0
t_4	0.3	0.7	0.3	1	0	0
t_5	0.5	0.7	0.5	1	1	0.3
t_6	0.7	1	0.5	1	1	1

図 5.7: 知識モデル

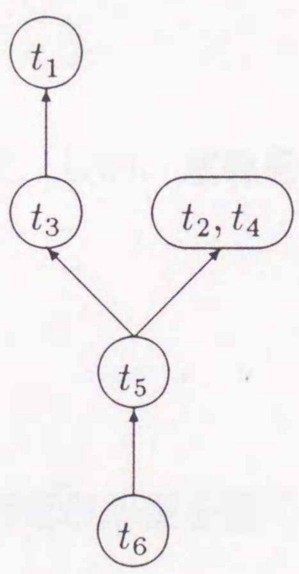


図 5.8: 構造グラフ $\alpha = 0.5$

第 6 章

結論

6.1　各章の要約

6.1.1　第 1 章

第 1 章は序論であり，本研究の背景，目的，意義を述べている．

6.1.2　第 2 章

第 2 章では数学的準備として，本研究が基礎を置くファジィ二項関係，特にファジィ構造モデリング法において利用される反射的かつ推移的な性質を持つファジィ可到達関係について概説し，本論文で用いる諸定義，諸記号について述べた．さらに本論文の基礎となる構造モデリング法 FISM とファジィ構造モデリング法 FSM について述べ，ファジィ構

造モデリング法における問題点について検討した．

6.1.3　第 3 章

第 3 章ではファジィ構造モデリング法で取り扱うファジィ可到達行列について述べ，その含意構造を検討した．本章において，その行列要素間の含意関係を解明し，更に対話的にファジィ可到達行列を生成するための理論として，ファジィ部分可到達行列とファジィ部分可到達行列更新のための含意規則について検討した．

6.1.4　第 4 章

第 4 章ではファジィ部分可到達行列と含意規則を利用したファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy の構成，機能について述べた．更に FISM/fuzzy セッションの効率的かつ柔軟に行うための戦略として，要素対選択戦略を述べ，更に実験を通して戦略の有用性を検討した．

6.1.5　第 5 章

第 5 章では知識獲得支援法への FISM/fuzzy の応用について述べた．FISM/fuzzy は，利用者が柔軟に知識構造をモデル化することが可能であり，入力作業の削減効果が大きいことから，知識獲得支援法への応用が考えられる．本章では知識獲得支援法への応用を通して FISM/fuzzy の有用性を述べた．

6.2　まとめ

本論文では，従来のファジィ構造モデリング法に関する問題点を整理し，これらの問題点を解決するために，基礎理論としてファジィ部分可到達行列理論を提案し，この理論を用いて柔軟なファジィ構造モデリング法 FISM/fuzzy を提案した．さらに知識獲得支援法への応用を通して FISM/fuzzy の有用性を述べた．更に具象化過程において要素対選択戦略を用いて，マンパワーを要する要素間の一対比較の回数を低減し，効率的に対象のモデル化を図ることができる．

今後の課題としては，既知要素の修正，複数のモデルが得られた場合の合意形成などの支援機能を付加し，より柔軟なシステムの構造化を可能にすること，或いは大規模問題に適用してその有効性を検証することが考えられる．

謝　辞

本論文作成に当たり御指導を頂いた北海道大学工学部情報工学科システム工学講座大内東教授，有益な御助言を頂いた北海道大学工学部情報工学科宮本衛市教授，佐藤義治教授，精密工学科嘉数侑昇教授，様々な面で御協力を頂いたシステム工学講座の栗原正仁助教授，遠藤聡志助手，並びに学生諸君に厚く御礼申し上げます．

最後に，両親と妻の理恵子に深く感謝します．

参考文献

[1] J. N. Warfield : "*Societal Systems–Planning, Policy and Complexity*", John Wiley & Sons(1976)

[2] J. N. Warfield : " Implication Structures for System interconnection Matrices", *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC–6, pp18–24 (1976)

[3] A. Ohuchi, M. Kurihara and I. Kaji :" A Theorem and a Procedure for the Complete Implication Matrix of System Interconnection Matrices", *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC–14, pp545-550 (1984)

[4] A. Ohuchi, M. Kurihara, and I. Kaji : Implication Theory and Algorithm for Reachability Matrix Model, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-16, No 8, pp. 610-616 (1986)

[5] 大内, 河野: システム計画構築技法の新展開, 電気学会雑誌, Vol. 108, No. 1, pp. 21-28 (1988)

[6] 大内, 栗原, 加地 : 知識構造モデリング法の構成と具象化ルール, 人工知能学会誌,

Vol 3, No 5, pp. 599-606 (1988)

[7] Ohuchi, A. and Kaji, I. : Correction Procedures for Flexible Interpretive Structural Modeling, *IEEE Trans. SMC*, Vol. SMC-19, No 1, pp. 85-94 (1989)

[8] 大内，栗原: FISM による合意モデル構築支援，情報処理学会論文誌，Vol.32, No.2, pp.256-264 (1991)

[9] E.Tazaki and M.Amagasa : " Structural Modeling in a Class of Systems Using Fuzzy Sets Theory", *International Journal for Fuzzy Sets and Systems*, Vol 2. No.1, pp1–17(1979)

[10] 天笠：システム構成論, 森山書店 (1986)

[11] 大内，若林，三田村：FISM/FUZZY:柔軟なファジィ構造モデリング，第 9 回ファジィシステムシンポジウム論文集 (1993)

[12] Ohuchi, A., Wakabayashi, T., Mitamura, T. : FISM/fuzzy:Fuzzy Interpretive Structural Modeling, Proc. First Asian Fuzzy Systems Symposium, pp. 301-306 (1993)

[13] 若林，大内：ファジィシステム構造行列の推移的結合，情処論, Vol. 33, No 5, pp. 620-627 (1992)

[14] 若林，大内：ファジィシステム構造モデリングにおける推移的結合問題の特殊解，日本ファジィ学会誌, Vol. 5, No 6, pp. 1302-1311 (1993)

[15] 三田村，大内：ファジィ部分可到達行列の更新アルゴリズム，第45回情報処理学会全国大会論文集,(1992)

[16] 三田村，大内：ファジィ可到達行列モデルの推論構造，第9回ファジィシステムシンポジウム論文集 (1993)

[17] 三田村，若林，大内：FISM/fuzzy:柔軟なファジィ構造モデリング，計測自動制御学会第19回システムシンポジウム，第18回知能システムシンポジウム，合同シンポジウム論文集 (1993)

[18] 三田村，大内：ファジィ構造モデリングにおけるファジィ推移的具象化の理論とアルゴリズム，情処論, Vol. 35, No 2, pp. 301-308(1994)

[19] Mitamura, T. & Ohuchi, A.: FISM/fuzzy:Interactive Fuzzy Structural Modeling, Proc of The Second National Conference on Fuzzy Theory and Applications, pp. 301-306 (1994)

[20] 三田村，大内：FISM/fuzzy の推移的具象化における戦略の検討，日本ファジィ学会誌，Vol. 7, No. 3(1995)(掲載予定)

[21] 日本ファジィ学会編："講座ファジィ第2巻　ファジィ集合", 日刊工業新聞社 (1992)

[22] 水本：ファジィ理論とその応用，サイエンス社 (1988)

[23] 溝口　他：知識獲得システム，情報処理, Vol 3, No 6, pp.732-740(1988)

[24] 上野：エキスパート・システム概論，情報処理，Vol.28, No. 2, pp.147-157 (1987)

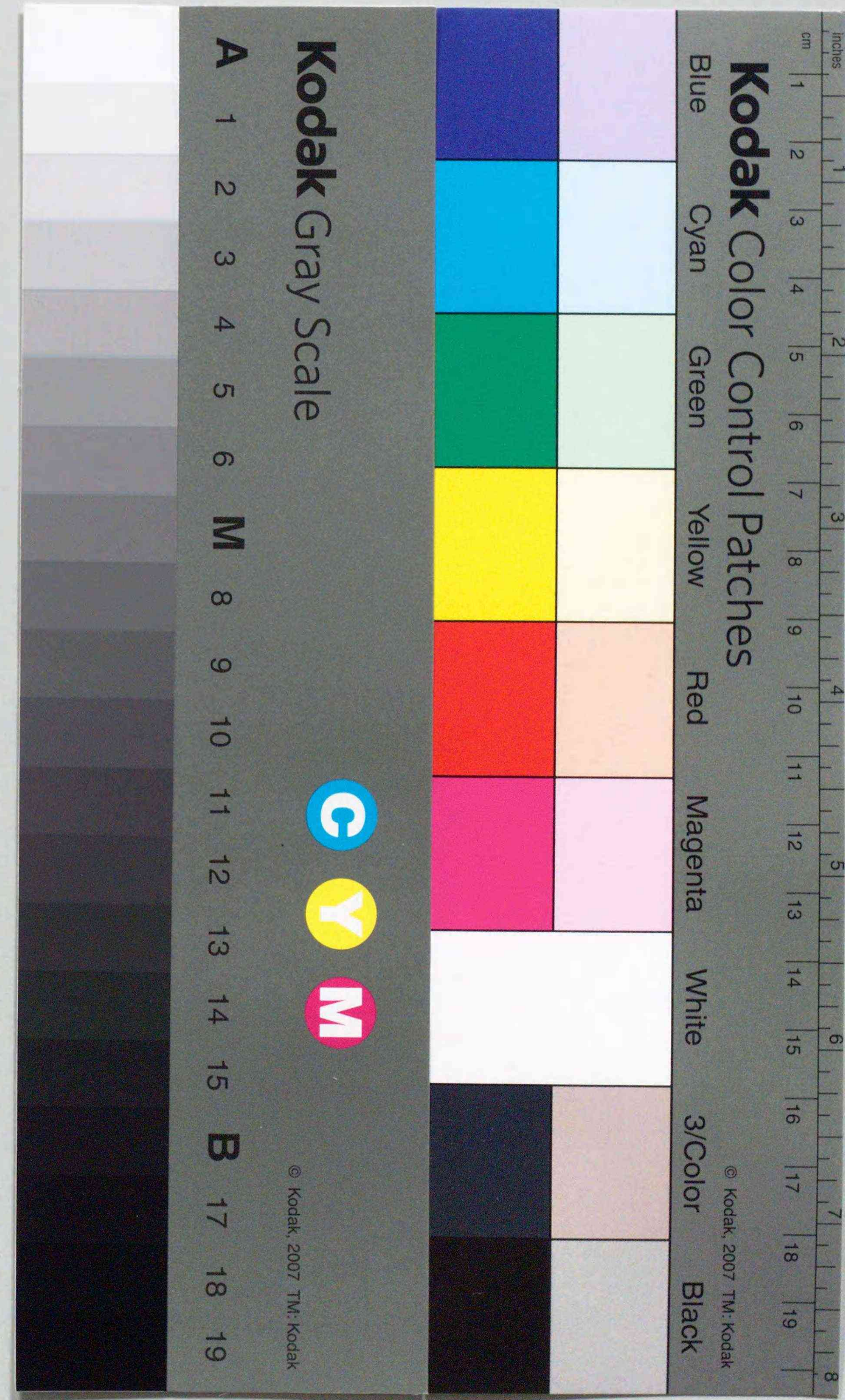
[25] 渡辺正信：エキスパートシステムにおける知識獲得，情報処理, Vol 28, No 2, pp.167-176(1987)

[26] J.H.Boose : A knowledge acquisition program for expert system based on Personal Construct Psychology, International Journal of Man-Machine Studies, 23, pp.495-525 (1985)

[27] J.H.Boose and J.M.Bradshaw : Expertise transfer and complex problems : using AQUINAS as a knowledge–acquisition workbench for knowledge–based systems, International Journal of Man-Machine Studies, 26, pp.3-28(1987)

[28] B.R.Gaines and M.L.G.Shaw : Induction of inference rules for expert systems, Fuzzy Set and Systems,18, pp.315-328 (1986)

[29] G.A.Kelly : The Psychology of Personal Constructs, Norton, New York (1955)


Kodak Color Control Patches
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Kodak Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
C
Y
M
© Kodak, 2007 TM: Kodak