



Title	複雑ネットワークにおけるパーコレーション伝播を考慮した振動子の同期現象
Author(s)	岩根, 慎司; 鈴木, 育男; 山本, 雅人 他
Citation	情報処理北海道シンポジウム講演論文集, 2009, 41-44
Issue Date	2009-10-03
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/51056">https://hdl.handle.net/2115/51056</a>
Rights	ここに掲載した著作物の利用に関する注意 本著作物の著作権は情報処理学会に帰属します。本著作物は著作権者である情報処理学会の許可のもとに掲載するものです。ご利用に当たっては「著作権法」ならびに「情報処理学会倫理綱領」に従うことをお願いいたします。
Type	journal article
File Information	Hokkaidosympo20094144.pdf



# 複雑ネットワークにおけるパーコレーション伝播を考慮した 振動子の同期現象

岩根慎司\* 鈴木育男 山本雅人 古川正志

(北大情報科学)†

## 1. はじめに

同期現象は生物学や物理学, 社会科学等の幅広い分野で観測することができ, これに関連した様々な研究が行われている. この同期現象は構成要素間の相互作用により同期と呼ばれる全体作用が創発されることから, 還元的手法を用いた構成要素自体の解析だけでは同期のメカニズムを解明することは困難であるとされている. 実際に, 生物学の分野における代表的な同期現象には, 東南アジアの蛍の同期発光等[1]が挙げられるが, このメカニズムはいまだに多くの部分が謎に包まれている.

同期現象に関する研究では, 構成要素を振動子としてモデル化する手法が一般的に用いられている. 代表的な振動子モデルは蔵本モデル[2,3]である. 蔵本モデルでは, 全ての独立した振動子間には二つの振動子間の位相差の正弦関数として与えられる相互作用により, 同期現象が創発される. 一方, 現実世界で同期現象を生み出す系においては, このように全ての要素間につながりを持つことは極めて稀であると考えられる. 実際に, 東南アジアの蛍を例に考えると, 各蛍は自分以外の全ての蛍と発光のタイミングを合わせているとは考え難く, 自分の極めて近くに居る蛍の発光のみの発光のタイミングに合わせていると考えるのが自然である.

振動子ネットワークモデル[4]は, 相互作用を及ぼしあう条件として, 現実世界のネットワークを模倣した複雑ネットワークを適用し, ネットワーク内でのノード間のつながりを振動子間のつながりと定義するモデルである. 振動子ネットワークモデルによる研究により, ネットワーク構造と同期の安定性の関係は明らかにされてきているが, ネットワーク構造の変化に対して振動子の挙動がどのように変化するかを調査した研究事例はほとんど存在しない. 実際に, インターネットや社会ネットワークに代表される現実世界のネットワーク構造は, 常時成長, 結合, 消滅, 切断といった変化を続けている. こうしたネットワーク構造の変化と同期の安定性の関係の調査も同期現象のメカニズムを解明するためには重要であると考えられる.

本研究の目的はネットワーク構造の変化に対する振動子の挙動を調査することである. このようなネットワークの構造の変化の中でも, 特にネットワークの成長に焦点を当てる. ネットワークの成長には, 複雑ネットワーク上でのパーコレーションを情報伝播の過程として

モデル化する. 実際に, 本研究における数値計算実験において, 構造の異なる四種類のネットワークモデル(二次元格子ネットワーク, レギュラーネットワーク, スモールワールドネットワーク (WS モデル), スケールフリーネットワーク (BA モデル))を潜在ネットワークとし, それらにパーコレーションを適用した. その際に, 時間経過と共に形成されるクラスターを振動子が形成するネットワークとし, 振動子ネットワークモデルに基づき振動子の支配方程式の数値積分を行うことで, 変化するネットワーク上での振動子の挙動の変動を調査した.

## 2. 振動子ネットワーク

蔵本モデルでは,  $N$  個の振動子で構成される系において,  $j$  番目の振動子の位相  $\theta_j$  は以下の方程式に従う.

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \frac{K}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (1)$$

式(1)において,  $\omega_j$  は  $j$  番目の振動子の固有振動数である. また,  $K$  は結合強度であり, すべての振動子間で同じ値をとる.

更に, 振動子全体の同期の強さを表す指標には以下の式で定義される秩序パラメータ  $r(t)$  と  $\phi(t)$  を用いる.

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (2)$$

式(2)において,  $r(t)$  と  $\phi(t)$  はそれぞれ時刻  $t$  における振動子の位相場における平均振幅と平均位相である. 特に平均振幅  $r(t)$  はコヒーレンスと呼ばれる.  $r(t)$  が大きいと全体の同期は強くなる. また,  $r(t)$  は時刻  $t$  の関数であるため, ある結合強度  $K$  における挙動の評価には, 以下の式で定義される  $r(t)$  の時間平均を用いる.

$$\bar{r} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r(t) dt \quad (3)$$

また, 式(1)で定義される蔵本モデルの位相方程式を複雑ネットワークに適用する振動子ネットワークモデルは以下の式で定義される.

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \frac{K}{k_j} \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (4)$$

式(4)において,  $k_j$  は  $j$  番目の振動子の次数を,  $a_{jk}$  はネットワークの隣接行列  $\mathbf{A}$  の  $(j, k)$  成分を表す.  $a_{jk}=1$  のときノード間にリンクがあり,  $a_{jk}=0$  のときノード間にリンクが存在しない. 式(4)を用いることにより, 蔵本モデルによって定義された振動子系は, ネットワーク上で結合している振動子のみ影響を受ける振動子ネット

\* iwane@complex.eng.hokudai.ac.jp

†札幌市北区北14条西9丁目北海道大学大学院情報科学研究科

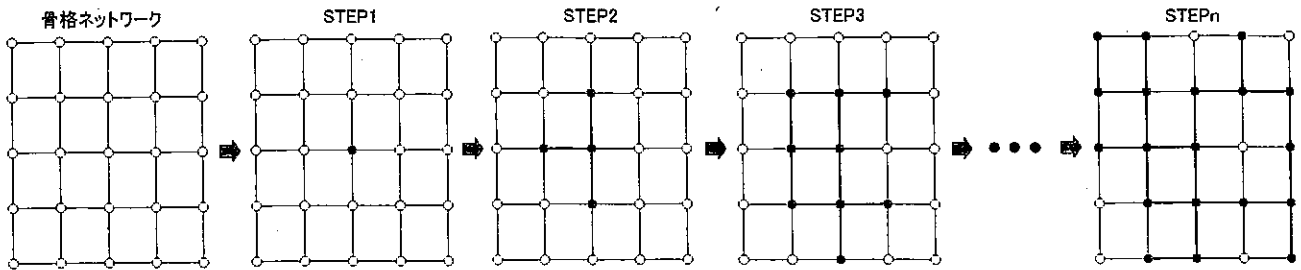


Fig.1 An example of cluster networks

ワークとしてモデル化することができる。

### 3. ネットワークの成長モデル

複雑ネットワーク上の情報伝播をパーコレーションによってモデル化することの有意性に関しては石岡ら[5]の研究によって明らかにされている。そこで、複雑ネットワーク上でパーコレーションを試行した際に形成されるクラスターを情報伝播によって形成されるクラスターネットワークとして、情報伝播によるネットワークの成長を以下に示す過程によって定義する。ネットワーク中の各ノード、各リンクは潜在と顕在の2状態をとる。その際、顕在状態のノードとリンクの集合で形成されるネットワークをクラスターネットワークと定義する。

#### ネットワーク上でのボンドパーコレーションの定義

- 1) 潜在ネットワークを用意する  
初期状態として、潜在ネットワーク内の全てのノード、リンクは潜在状態に設定する
- 2) ランダムに選択した一つのノードをパーコレーションの基点とし、顕在化する。
- 3) 全ての基点のノードに対して、接続している潜在化状態のリンクをパーコレーション確率  $p$  で顕在化し、 $1-p$  で消滅させる
- 4) 顕在化されたリンクを通して繋がるノードを顕在化し、次のステップでのパーコレーションの基点とする。
- 5) 3) と 4) をクラスターネットワークが成長しなくなるまで繰り返し行う。

実際に、形成されるクラスターネットワークの一例を Fig.1 に示す。

### 4. 数値計算実験

#### 4.1 実験方法

本研究では、様々なネットワークモデルを第3章で定義したネットワーク上でのボンドパーコレーションの潜在ネットワークとし、パーコレーションステップ毎に成長を続けるクラスターネットワークに式(4)で定義した振動子ネットワークモデルを適用する。その際、クラスターネットワーク内の振動子の挙動が安定状態に移

行したときに、パーコレーションを1STEP進める。安定状態の判別には、各振動子の角速度が一定になるほど振動子全体は安定であるという条件を用い、以下に示す条件式を定義する。

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{d^2 \theta_j}{dt^2} < \alpha \quad (5)$$

式(5)における  $\alpha$  の値は、小さい値に設定するほど振動子の安定化への条件が厳しくなるため、一般的には小さい値であるほど振動子の安定度は高くなるが、この値が小さすぎると振動子系は安定条件を満たせず、安定状態への移行が行われな場合がある。

以上で定義する実験により、クラスターネットワークの成長の中で、クラスターネットワーク内の振動子全体の挙動を時系列で観測し、ネットワークの成長に対する同期の安定性の変化に関する調査を行う。

#### 4.2 実験設定

本実験の設定として、パーコレーションを試行する潜在ネットワークは、ノード数  $N=100$ 、平均次数  $\langle k \rangle \geq 4$  に統一した、二次元格子ネットワーク、レギュラーネットワーク、スモールワールドネットワーク (WSモデル)、スケールフリーネットワーク (BAモデル) の四種類とする。また、パーコレーション確率は  $p=0.8$  とする。振動子の挙動の評価には式(3)で定義される振動子系の位相分布におけるコヒーレンスの時間平均を使用するが、各試行において安定条件を満たすまでの時間  $T$  が異なるため、実際には以下の式で定義する評価式を用いる。

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt \quad (6)$$

振動子の挙動の安定条件は式(5)で定義した条件を  $\alpha=0.002$  に設定し使用する。その際、固有振動数の設定やクラスターネットワークの統計的な性質のばらつきに関する誤差をなくすために、それぞれ 50 回の平均をとる。

#### 4.3 実験結果と考察

以上の条件で、数値計算実験を行った際の結果を Fig.2 に示す。Fig.2 では各潜在ネットワークにおいて  $K=1,2,3,4,5$  の異なる結合強度におけるコヒーレンスの時間平均、クラスターサイズの値をパーコレーションステップ毎にプロットする。

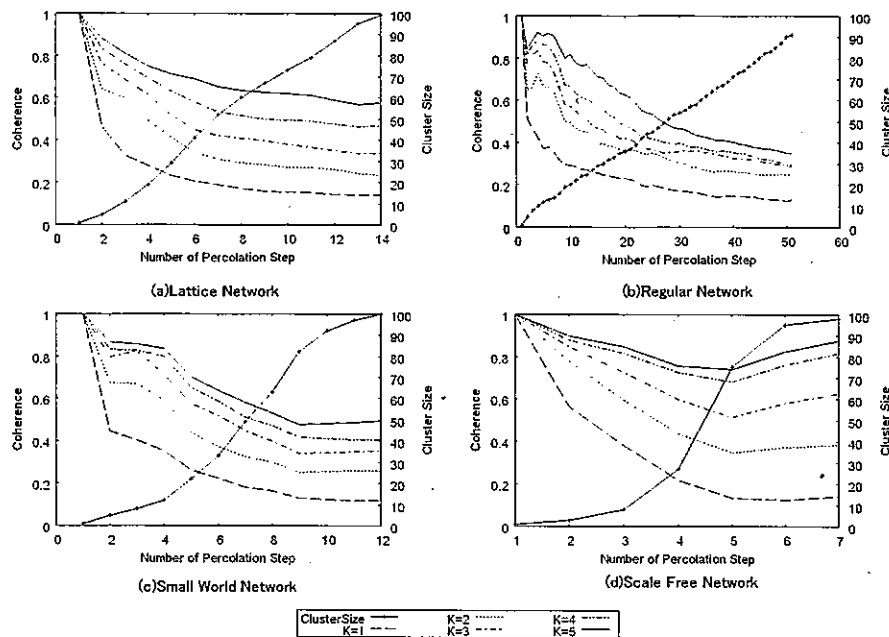


Fig.2 Coherence of the oscillators for the growth of cluster networks

#### 4.3.1 振動子系全体での挙動の観測

まず, Fig.2(a)に示す潜在ネットワークの構造を二次元格子ネットワークとした場合, Fig.2(c)に示す潜在ネットワークをスモールワールドネットワークとした場合は結合強度の増加に伴い振動子全体のコヒーレンスは大きくなっているのがわかる。また, クラスタネットワークが大きくなっていくにつれて振動子全体のコヒーレンスは減少しており, ネットワークが成長していくにつれて振動子系の同期は起こりづらくなっていると考えられる。次に, Fig.2(d)に示す潜在ネットワークをスケールフリーネットワークとした場合は, クラスタサイズの増加に伴う振動子の挙動の変化が上記で述べた二つの潜在ネットワークとは異なり, 成長途中のクラスタネットワークよりも最終段階のクラスタネットワークのほうが高いコヒーレンスの値を示している。これはスケールフリーネットワーク上でのパーコレーションが, 潜在ネットワーク全体にクラスタが広がる過程を経て, ハブ周辺のリンク密度が大きくなるといったネットワーク構造の変化を行うためであると考えられる。最後に, Fig.2(b)に示す潜在ネットワークをレギュラーネットワークとした場合は基本的には二次元格子ネットワーク, スモールワールドネットワークの二つの潜在ネットワーク上での挙動と変わらないが, クラスタサイズが大きな領域において, 結合強度の増加に伴う振動子全体のコヒーレンスの増加が微小であり, 振動子全体のコヒーレンスが全体的に低い値となっている。このように振動子全体のコヒーレンスが低い値となるのはクラスタネットワーク内における振動子間のパス長が平均して大きくなるといった性質が関係していると考えられる。しかし, このような潜在ネットワークをレギュラーネットワークとした場合の振動子の挙動にお

いては近傍の振動子との同期といった観点から見ると, その他のネットワークと大きな相違はなく, 振動子全体のコヒーレンスの値が小さいことと同期が起きていないことが等価ではないといえる。

#### 4.3.2 振動子系の局所的な挙動の観測

そこでこのような近傍ノードとの同期の強さを測る指標を定義する。まず, 振動子  $j$  を中心にネットワークを見ると, 全ての振動子は振動子  $j$  からのパス長によって第  $m$  次近傍の振動子と分類することができる。ここで, 以下の式で示すように, 振動子  $j$  の第  $m$  次近傍内の振動子のみでコヒーレンスを計算すると振動子  $j$  の第  $m$  次近傍内コヒーレンスといった値が定義できる。

$$r_{mj} e^{i\phi_{mj}} = \frac{1}{|B_m|} \sum_{k \in B_m} e^{i\theta_k} \quad (7)$$

式(7)における  $B_m$  は振動子  $j$  の  $m$  次近傍内にある振動子とその要素とする集合である。更に, この値を各振動子で平均化することにより, 振動子系における第  $m$  次近傍内コヒーレンスを式(7)として定義できる。

$$r_m = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_{mk} \quad (8)$$

Fig.2 に示した結果において, 結合強度  $K=3$  の際の振動子の挙動を式(8)で定義した振動子系の第  $m$  次近傍内コヒーレンス  $r_1, r_2, r_3$  で観測した結果を Fig.3 に示す。第  $m$  次近傍内コヒーレンスの観測結果から, 第  $m$  次近傍内コヒーレンスには共通の性質が存在することがわかる。まず, 各潜在ネットワークにおける第  $m$  次近傍内コヒーレンスもクラスタサイズの増加に伴う値の変化が, 振動子全体でのコヒーレンスと異なり, ほぼ一定値を保っている。このことから, 第  $m$  次近傍内コヒーレンスはクラスタサイズの増加による影響を受けず, 近傍

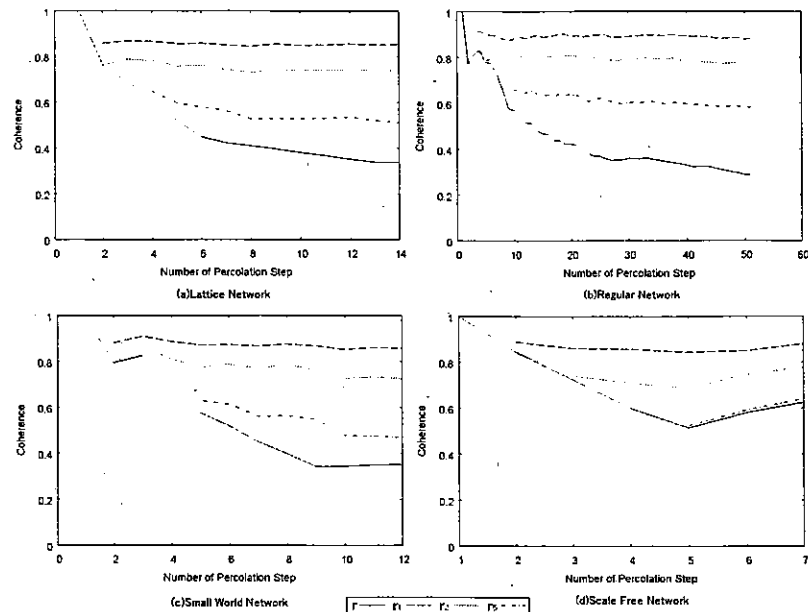


Fig.3 Neighborhood coherence of the oscillators for the growth of cluster networks

ノードとの同期の強さはネットワーク構造の変化に依存しないことがわかる。また、Fig.4に同一条件における近傍半径  $m$  と第  $m$  次近傍内コヒーレンスの値を潜在ネットワーク別に示す。Fig.4 から近傍半径  $m=1\sim 5$  の少ない近傍半径においては第  $m$  次近傍内コヒーレンスがネットワーク構造によらずほぼ同じ値となり、更に単調減少となっている。近傍半径  $m$  が大きくなるにつれてネットワーク構造により第  $m$  次近傍内コヒーレンスの値が振動子全体でのコヒーレンスの値に収束していくことがわかる。この振動子全体でのコヒーレンスの値はネットワーク上の最大近傍半径が大きくなっていくほど低い値になり、振動子間で大きなパス長を持つ振動子対の数が大きくなることが振動子全体でのコヒーレンスの値を下げているということがわかる。したがって、大きなパス長を持つ振動子対は振動子全体でのコヒーレンスの値を減少させる原因となるということが第  $m$  次近傍内コヒーレンスを観測することにより明らかにされた。

## 5. おわりに

本研究では、情報伝播によるネットワークの成長モデルをパーコレーションによって実装する手法を提案し、ネットワーク構造の変化に対して、振動子の同期の挙動が有する性質の調査を行った。その結果として以下に記述する事項が明らかになった。

- 1) 成長するネットワークにおける振動子の挙動はクラスターネットワークの有する構造によって変化する。
- 2) 近傍の振動子との同期は、ネットワークの成長やネットワーク構造にほぼ依存しない。

今後の課題としては、大規模なネットワークでの調査を行うことと、ネットワーク構造の変化のバリエーション

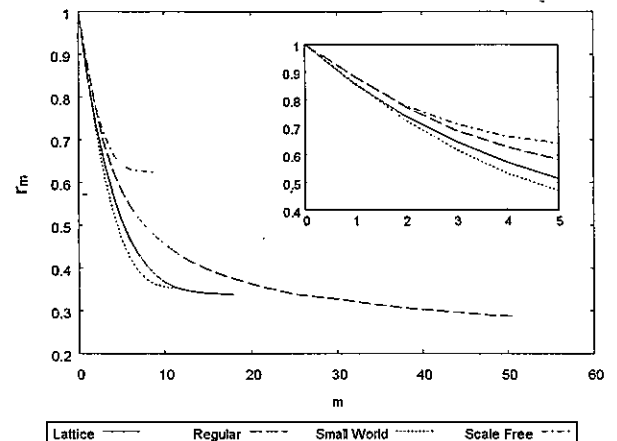


Fig.4 Neighborhood coherence for the neighborhood radius

を増やすことが挙げられる。更に、ネットワーク構造のみではなく固有振動数の分布に関しても振動子の挙動との関係性を調査する必要があると考えられる。

## 参考文献

- [1] Steven H. Strogatz, "SYNC なぜ自然はシンクロしたがるのか", 早川書房, 2005
- [2] Y.Kuramoto: Chemical Oscillations, Wave and Turbulence. Springer, Newyork, (1984)
- [3] J.A.Acebróm, L.L.Bonilla, C.J.P.Vicente, F.Ritort, and R.Spigler: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. Phys. Rev. Vol.77, pp.137-185, (2005)
- [4] H.Hong, M.Y.Choi: Synchronization on small-world networks. Phys. Rev. E 65, 026139(2002)
- [5] 石岡卓也, 米田貴雄, 吉井伸一郎, 古川正志: ネットワーク構造によって決定付けられるブログ上の情報伝播規模解析. 日本知能情報フレンジ学会誌, Vol.19, No.6, pp.680-688(2007)