



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	無限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題について
Author(s)	久保田, 肇
Citation	Discussion Paper, Series B, 108, 1-34
Issue Date	2012-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51118
Type	departmental bulletin paper
File Information	DPB108.pdf



Discussion Paper, Series B, No. 2012-108

無限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題について

久保田 肇

2012 年 12 月

北海道大学大学院経済学研究科

060-0809 札幌市北区北 9 条西 7 丁目

無限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補 題について¹

北海道大学大学院経済学研究科

久保田肇

2012年12月28日

¹本稿は、数理経済学研究センターの研究集会「経済の数理解析」、平成24年12月7日～9日、法政大学市ヶ谷キャンパスで開催、に用意したものである。なお、本稿は科学研究費補助金基盤研究(C) 課題番号23530212による支援を受けた研究の一部としてまとめられたものである。

概要

Gale(1955) と Nikaido(1956a) は独立にゲール・二階堂の補題を証明し、それを利用して n 次元ユークリッド空間 R^n を財空間とする経済における競争均衡の存在証明を行った。そして、ドブリュー (1959、第 5 章) では、ゲール・二階堂の補題を用いる Gale(1955) と Nikaido(1956a) の議論に沿って、 R^n を財空間とする経済における競争均衡の存在証明を行い、一般均衡理論の文献においてゲール・二階堂の補題を著名にした。Nikaido(1956b,57b,59) では、更に、 R^n におけるゲール・二階堂の補題をノルム空間や局所凸線形位相空間にまで一般化した。この、有限次元空間におけるゲール・二階堂の補題を証明した直後に無限次元空間までゲール・二階堂の補題を一般化したという事実は、驚くべき事である。無限個の財がある経済における競争均衡の存在問題は Peleg-Yarri(1970) と Bewley(1972) から開始されたのであるが、Debreu(1954) 同様に、これらよりも 10 年以上先に既に無限個の財がある経済を取り上げていたのである。そこで本稿の目的は Nikaido(1956b,57b,59) による無限次元空間のゲール・二階堂の補題を再考して、1 つの一般化の方向を議論する事である。

Gale(1955) and Nikaido(1956a) proved independently Gale-Nikaido's lemma for the proof of the existence of a competitive equilibrium in economies with n -dimensional Euclidean space R^n as the commodity space. Then Debreu(1959, Ch.5) follows this procedure of Gale(1955) and Nikaido(1956a) employing Gale-Nikaido's lemma for proving the existence of a competitive equilibrium in economies with R^n as the commodity space, and it makes Gale-Nikaido's lemma popular in the GE literature. Nikaido(1956b,57b,59) extend the Gale-Nikaido's lemma in R^n to the one in some infinite dimensional spaces such as normed spaces and locally convex topological vector spaces. This is surprising since Gale-Nikaido's lemma is generalized to the infinite dimensional spaces just after Gale-Nikaido's

lemma in R^n is established. Since the literature on the existence of competitive equilibrium in economies with infinite number of commodities starts after Peleg-Yarri(1970) and Bewley(1972), Nikaido(1956,57,59) precedes at least one decade as Debreu(1954) does. The purpose of this paper, then, is to reconsider the Nikaido(1956b,57b,59)'s generalization of Gale-Nikaido's lemma to the infinite dimensional spaces and to consider its slight generalization.

1 はじめに

Walras(1874-77)によって構築された市場経済モデルは、ワルラス自身は市場均衡(または競争均衡)として表現されるモデル内の整合的な解の存在という事を示せずにいたが、1930年代のWald(1935、36)は、Cassel(1924)によって簡略に表現されたワルラスモデルに、その整合的な解が存在する事を示した。その後、1950年代になって、Arrow-Debreu(1954)、McKenzie(1954)、Gale(1955)、Nikaido(1956)によって、より一般的なワルラスモデルにおいてその整合的な解である競争均衡が存在する事が示された。アロー・ドブリュー(1954)による証明では、抽象ゲーム形式における解の存在問題へ変換し、このゲームに(ナッシュ)均衡解が存在するというドブリュー(1952)による結果を利用して、競争均衡の存在証明を行った。アロー・ドブリューが利用したドブリュー(1952)の抽象経済におけるナッシュ均衡の存在証明は、角谷の不動点定理より一般的なアレンベルグ・モントゴメリー・ビーグルの不動点定理を用いて証明されている。¹ McKenzie(1954)では、国際貿易における多数国多数財モデルであるグレサムモデルという枠組みにおいて、超過需要の符号に応じて価格が変動するという価格調整機構に基づく写像と角谷の不動点定理を利用して、このモデルの競争均衡である自由貿易均衡の存在を直接的に証明した。² これらの点から鑑みると、Arrow-Debreu(1954)が扱ったような市場経済モデルにおける競争均衡の存在定理の証明に対して、直接的にブラウワーや角谷の不動点定理が利用可能であると予想されて当然であり、それがGale(1955)やNikaido(1956a)による競争均衡の存在証明である。実際、Gale(1955)では最も重要な補題としてゲール・二階堂の補題が述べられてKKMの補題に基づいて証明されており、Nikaido(1956)では、明示的には補題として独立した命題の形にはしていない

¹アロー・ドブリューで必要となる抽象経済のナッシュ均衡の存在定理は、ベルジュの最大値定理による最適解の上半連続性より最適戦略対応が上半連続的となるので、実際には角谷の不動点定理を利用すればよく、アロー・ドブリューが利用したDebreu(1952)の抽象経済のナッシュ均衡の存在定理よりも容易に示せるのである。

²Nash(1950)による非協力ゲームにおけるナッシュ均衡の存在証明では角谷の不動点定理を利用し、また、Nash(1951)ではブラウワーの不動点定理を利用する形に修正されている。

が、ゲール・二階堂の補題の結果を述べてそれを角谷の不動点定理を利用して証明している。³ 特に二階堂による証明は、その後の一般均衡理論の古典的著書である Debreu(1959,p.82) におけるゲール・二階堂の補題の証明として利用されており、また、Nikaido(1960,p.316) でも、ゲール・二階堂の定理の証明として取り入れられている。そして、ゲール・二階堂の補題ではユークリッド空間の非負象限が用いられたが、この条件をより一般的な閉凸錐へ拡張したのが Debreu(1956) であり、これらの結果は通常ゲール・二階堂・ドブリューの補題と呼ばれている。

ところで、以上で考察している市場経済においては、財の数が有限個のケースと想定されているので、それは Debreu(1959) によって議論されているように、財の特性、取引される場所や時点、そして不確実性の状態が全て有限になっている。したがって、取引される時点や不確実性の状態が無数個あるような市場経済には、上記の結果を適応してその競争均衡の存在を示す事はできない。ただし、Debreu(1954) では、無数個の財が存在するケースも含む一般的な線形空間における厚生経済学の基本定理の証明を行ったが、この無数個の財が存在する経済における競争均衡の存在証明は行っていない。⁴ そして、この無数個の財が存在する経済における競争均衡の存在問題は、点列の集合 s を財空間とした Peleg-Yarri(1970) や本質的に有界な可測関数族 L_∞ を財空間とした Bewley(1972) によって取り上げられ、これらの無数個の財が存在する市場経済における競争均衡の存在が証明された。その後、この問題は無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在問題として、1980 年代の一般均衡理論の 1 つの主要な話題として取り上げられて議論された。Peleg-Yarri(1970) ではコアの非空性に関する

³Gale(1955) によるゲール・二階堂の補題の証明は、KKM の補題と、角谷がその不動点定理の証明で利用したブラウワーの不動点定理による近似の手法を利用している。詳しくは久保田 (2012) 参照。

⁴Debreu(1954) は、一般的な線形位相空間における厚生経済学の第二基本定理を、後に問題となる生産集合の内部の非空性に基づいて、凸集合の分離定理を利用して証明している。Nikaido(1957b) が Nikaido(1956b) へ触れている部分の内容から、二階堂 (1956b) から Nikaido(1957b) への拡張はこの点にあったように思われる。この点は後に触れる。なお、この Debreu(1954) では、Nikaido(1956b,57b,59) はその参考文献に掲載されていない。

Scarf(1967) の定理と Debreu-Scarf(1963) によるコアと競争均衡に関する極限定理を利用してその存在証明を行い、一方 Bewley(1972) では、本来の次元が無限である無限次元財空間経済の競争均衡が、(実現可能集合との価格集合の * 弱コンパクト性によって) 有限個の財を持つ次元が有限と解釈可能な有限次元財空間経済の競争均衡からなる (有向) 点列の極限になるという事を用いて、その存在証明を行っている。

この無限次元財空間モデルにおける競争均衡の存在問題は、で述べた有限個の財が存在する市場経済における競争均衡で行ったような、ゲール・二階堂の補題に基づいてその存在証明を行うという事も考えられる。そのためには、もちろん、無限次元財空間でのゲール・二階堂の補題を証明する必要があるが、それが Nikaido(1956 b、57b、59) である。前二者は無限次元ノルム空間を利用し、後者は更に局所凸線形位相空間へ拡張している。⁵ 前二者では、無限次元財空間経済の超過供給対応の像の (* 弱) コンパクト性に基づいて、有限個の財を持つ有限次元財空間経済の競争均衡集合族に対して成立する有限交差性を利用して、元来の無限次元財空間経済の均衡集合の非空性を証明している。この証明は大変に簡易で理解しやすく、Bewley(1972) とある意味で同様である。Bewley(1972) では、有限次元部分経済に有限次元財空間モデルの均衡存在定理を利用し、一方、Nikaido(1956 b、57b) では、有限次元部分経済に有限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題を利用している。そして、Nikaido(1959) では、一般的な線形位相空間におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理等を含むかなり一般的な結果を証明してからその結果を利用して、前二者と同様な手法でその証明を行っているが、最初の一般的な結果の証明はかなり煩雑である。⁶

1980 年代以降に発展した無限次元財空間モデルの議論では、不思議な事に

⁵Nikaido(1956b) は Nikaido(1957a、59) の参考文献で揚げられているが、残念ながら筆者はその現物を目にしてはいない。ただし、Nikaido(1957b) では、この論文が Nikaido(1956b) の改訂版であると述べている事と Nikaido(1956b) に触れている内容から、Nikaido(1956b) の内容を伺い知る事が出来る。この内容については後に触れている。

⁶Nikaido(1957b) の注 2) において、そこで用いたノルム空間のケースの結果が容易に一般的線形位相空間にまでも拡張できると述べているが、Nikaido(1959) ではこの線に沿って Nikaido(1957b) の証明をそのまま拡張するという方針は取られなかった。

Nikaido(1956b, 57b, 59)には全く触れられていないのである。⁷ 理由として幾つかあると思われる。まずは、Nikaido(1956b, 57b)がディスカッションペーパーであってどの雑誌にも掲載されて発表されなかった事である。次に、Nikaido(1959)は日本の英文の数学雑誌には掲載されたが、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題の証明をその主要な結果としているのではなく、一般的な線形位相空間におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理等を含むより一般的で煩雑な結果を示してから、その結果に基づいて無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題を証明していて、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題それ自身を主要な題材とはしていない事である。更には、無限次元財空間で表される経済モデルを明示的に議論して、論文の題名が無限次元財空間における競争均衡の存在問題と関連したものになっていなかった事である。⁸ したがって、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題の結果と証明と共に、その結果を利用して証明できる無限次元財空間を持つ経済モデルの例を取り上げるような論文も作成されていれば、後の無限次元財空間モデルの発展にとって、もっと望ましかったと考えられる。⁹ もちろん、経済モデルの例に触れてはいないが、有限次元空間における競争均衡の存在が示された直

⁷Florenzano(1983)、Yannelis(1985)、そして、Mehta - Tara f da r (1987)が無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の議論を行っているが、Nikaido(1956b,57b,59)には何ら触れていない。最近の Urai(2000)だけが二階堂 (1956b,57b,59)に触れている唯一の例外である。第6節において、これら Florenzano(1983)、Yannelis(1985)、Mehta - Tara f da r (1987)等の結果に触れる。

⁸実際、無限次元財空間における均衡の存在というような題名を持つ Bojan(1974)や Elbarkoky(1977)(原文ロシア語)といった論文は、Mas-Colell-Zame(1991)の概説論文も含めて、この分野の1980年代以降の文献の参考文献に度々引用されている。Nikaido(1968)では、参考文献にはNikaido(1959)が引用されているが、その中で扱われていた無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題については触れていない。Nikaido(1968)はその出版後に一般均衡理論の1つの著名なテキストとなったので、参考文献にNikaido(1956b, 57b)が挙げられていれば、無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂・ドブリューの補題が二階堂先生によって議論されている事が周知される事となっていたと思われる。

⁹実際、Nikaido(1959)の第5節では、その無限次元のゲール・二階堂の補題の経済モデルへの応用に触れているが、消費者の消費集合や選好そして生産者の生産集合に基づいて具体的に構成された無限次元財空間モデルを、残念ながら、構成していない。

後に、無限次元空間において超過供給対応を想定してそれに対するゲール・二階堂の補題の定式化とその証明を行ったという点で、Nikaido(1956b、57b、59)の貢献や意義は何ら損なわれない。

本論文では、Nikaido(1956b、57b、59)の無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題を再考し、Nikaido(1959)の無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題の証明を、超過供給対応が凸値となるケースにおいて、Nikaido(1956b、57b)と同様な簡潔で直接的な手法で行う。

2 無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の補題：モデル

二階堂(1959)による線形位相空間のケースでのゲール・二階堂の補題の証明は、二階堂(1957b)の証明をそのまま拡張したというよりは、抽象経済におけるナッシュ均衡の存在やミニマックス定理をその特殊ケースとして含むような一般的な結果を利用して、その結果を証明をしている。本稿では、Nikaido(1957b)の注(2)に沿う事で、Nikaido(1959)でのような線形位相空間のケースの結果を、特に超過供給対応が凸値となるケースにおいて、Nikaido(1957b)の証明方法に沿ってより簡潔にその証明を与える。

まず、この節ではNikaido(1959、第5節)に沿ってモデルを述べて解説して行く。本稿では必要に応じてNikaido(1957b)で触れられた議論も取り入れる。 E をここで取り扱うモデルの無限次元財空間とし、それを実ハウスドルフ局所凸線形位相空間とする。¹⁰ この線形位相を τ とすると、この線形位相については、凸平衡な集合から構成される原点の基本近傍系が存在する。¹¹ そして、 E

¹⁰Nikaido(1956b,57b)では E として(無限次元)ノルム空間が使われていたが、Nikaido(1959)ではより一般的な線形位相空間が使われる事になった。数理経済学の文献で最初に線形位相空間を用いたのはDebreu(1954)と思われるが、弱位相や*弱位相等その線形位相の性質については明示的に述べていない。一方、Nikaido(1956b,57b)では(無限次元)ノルム空間を利用してはいるが、その弱位相($\sigma(E, E^*)$)や*弱位相($\sigma(E^*, E)$)を用い、更には、双対空間の単位球が*弱位相でコンパクトになるというバナッハ・アラオグルー定理も利用している。

¹¹線形位相なので、線形空間としてのベクトル演算がこの位相に関して連続となるが、局所

上の τ に関して連続な線形汎関数の集合である E の双対空間を E^* とする。この時、 $(\cdot, \cdot) : E \times E^* \rightarrow R, (x, p) \in E \times E^* \rightarrow x \cdot p$ を、 $E \times E^*$ 上で定義された双線形関数とすれば、 $p \in E^*$ に対して $(\cdot, p) : E \rightarrow R$ を連続にするような E 上の最弱の線形位相が E の弱位相 $\sigma(E, E^*)$ であり、同様に、対応する E^* 上の最弱の線形位相、つまり、 $x \in E$ に対して $(x, \cdot) : E^* \rightarrow R$ を連続にするような E^* 上の最弱の線形位相が E^* の $*$ 弱位相 (または汎弱位相) $\sigma(E^*, E)$ である。¹²

τ -閉凸錐 $P(\subset E)$ に対して、その双対錐 P^* を $\{p \in E^* : \text{任意の } x \in P \text{ に対して } x \cdot p \geq 0 \text{ となる}\}$ とする。更に、 P の第二双対錐 P^{**} を $\{x \in E : \text{任意の } p \in P^* \text{ に対して } x \cdot p \geq 0 \text{ となる}\}$ とする。 E における一つの凸錐 P に対して、 $\langle P^* \rangle = P^* \setminus \{0\}$ として非ゼロな $p \in P^*$ の集合とする。

そして、局所凸線形位相空間 E をその財空間として、その市場経済モデルにおける超過供給対応を $\phi : \langle P^* \rangle \rightarrow E \setminus \{0\}$ とする。すると問題は、有限次元のケースと同様にしてどのような条件の下である $\bar{p} \in \langle P^* \rangle$ が存在して $(\phi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となるかという事である。そして、その条件を与えるのが本稿で考察する Nikaido(1956b, 57b, 59) のゲール・二階堂の補題である。これらがどのような条件であるかは後に述べる。ここでは、各 $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $\phi(p) \neq \emptyset$ としている事を述べておく。¹³

3 幾つかの補題

この節では、局所凸線形位相空間のケースのゲール・二階堂の補題を証明するために必要となる、幾つかの補題を確立する。局所凸線形位相空間 E に対して以下の結果が成立する。

凸線形位相は半ノルム族によって生成される位相として特徴付けられる。

¹² $\sigma(E, E^*)$ は E 上の半ノルム族として $\{|x \cdot p| : p \in E^*\}$ を利用して生成される線形位相であり、同様に、 $\sigma(E^*, E)$ は E^* 上の半ノルム族として $\{|x \cdot p| : x \in E\}$ を利用して生成される線形位相である。

¹³無限次元財空間モデルでは、(超過) 需要関数が価格集合全体で定義されず、ある価格に対して需要点が決められないような例が様々な文献で指摘されている。

補題 1: E と同一でない $(\tau-)$ 閉凸錐 P の P^* は 0 以外の点を含む。¹⁴

補題 2: P を E における一つの凸錐とすると、 $x \in cl_\tau(P)$ となる必要十分条件は任意の $p \in P^*$ に対して $x \cdot p \geq 0$ となる事である。¹⁵

補題 3: E における凸錐 P の内点 (τ に関する) を u とすると、任意の非 0 な $p \in P^*$ に対して $u \cdot p > 0$ となる。¹⁶

E または E^* における凸錐 P は、それが 0 を除いては x と $-x$ を同時に含まない時に尖っている (*Pointed*) といわれる。つまり、凸錐が原点を通る直線を含まず、 $P \cap (-P) = \{0\}$ という事である。するとこの時に以下の結果が成り立つ。

補題 4: もしも E における凸錐 P の (τ に関する) 内部が非空ならば、 P^* は尖っている。¹⁷

証明. $p \in P^* \setminus \{0\}$ とし、また、 P の内点の一つ u を取る。すると、補題 3 より $-u \cdot p < 0$ となって、 $-u \notin P^*$ であり、 P^* は尖っている。□

補題 5: もしも E における凸錐 P の内部 (τ に関する) が非空でしかも $cl_\tau(P)$ が E と同一でないならば、 $\langle P^* \rangle$ は非空で凸である。¹⁸

証明. $cl_\tau(P)$ が E と同一でないので補題 1 より $\langle (cl_\tau(P))^* \rangle \neq \emptyset$ となる。 $P \subset cl_\tau(P)$ より $(cl_\tau(P))^* \subset P^*$ なので、 $p \in \langle (cl_\tau(P))^* \rangle$ とすれば $p \neq 0$ で $p \in P^*$ となって、 $p \in \langle P^* \rangle \neq \emptyset$ となる。次に、 $p, q \in \langle P^* \rangle, \lambda \in (0, 1)$ とする。まず P^* の凸性によって、 $\lambda p + (1-\lambda)q \in P^*$ となる。そして、 $u \in int_\tau(P)$ とすると、補題 3 より $u \cdot p > 0, u \cdot q > 0$ となるので、 $u \cdot (\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda(u \cdot p) + (1-\lambda)(u \cdot q) > 0$ となり、故に、 $\lambda p + (1-\lambda)q \neq 0$ で $\lambda p + (1-\lambda)q \in \langle P^* \rangle$ となって、 $\langle P^* \rangle$ は凸である。□

P を E における $(\tau-)$ 閉凸錐で $P \cap (-P) \neq P$ となっているとする。 $P \cap (-P)$

¹⁴凸集合に関する分離定理の一形式による。Nikaido(1957b、補題 2)、Nikaido(1959、補題 4)。

¹⁵凸錐と第二双対錐に関する双対定理より $cl_\tau(P) = P^{**}$ である。Nikaido(1957b、補題 3)、Nikaido(1959、補題 5)。

¹⁶ $p(\neq 0) \in P^*$ に対して $u \cdot p = 0$ とすると、 $(\cdot, p)$ の (τ に関する) 連続性と $u \in int_\tau(P)$ より、ある $u' \in P$ に対して $u' \cdot p < 0$ となって $p \in P^*$ に矛盾するからである。Nikaido(1957b、補題 1)、Nikaido(1959、補題 6)。

¹⁷Nikaido(1957b、補題 4)、Nikaido(1959、補題 7)

¹⁸Nikaido(1959、補題 8) では $int_\tau(P)$ が E と同一でないとしているが、ここでは $cl_\tau(P)$ が E と同一ではないと変更した。この変更によっても以降の議論には影響しない。

は P に含まれる最大の線形部分空間なので、この条件は P が線形部分空間でない事を表している。また、もしも P が (E における) 内点を含んでいれば、この事は $P \neq E$ と同値になる。しかし、以下では $P \cap (-P) \neq P$ となっている一般的な P が、非空な $(\tau-)$ 内部を持ち E と一致しないような凸錐によって近似される事を示す。 $u \in P \setminus (P \cap (-P))$ を任意に 1 つ選ぶ。この時、 $u \neq 0$ である。すると、 $-u \notin P$ と P の $(\tau-)$ 閉性より、0 のある凸平衡近傍 U を選べば、 $(-u + U) \cap P = \emptyset$ となる。そこで、 $V(\subset U)$ となる 0 の任意の凸平衡近傍 V に対して $Q(V)$ を $u + V$ によって張られる凸錐 $\cup_{\lambda > 0} \lambda(u + V)$ として、 $P(V) = cl_{\tau}(P + Q(V))(\cap P)$ とする。¹⁹ すると、 $P(V)$ は $\tau-$ 閉であり、しかも $(u + V) \subset Q(V) \subset P(V)$ なので $P(V)$ の $(\tau-)$ 内部は非空となる。この時、次の補題が成立する。

補題 6: (i) 0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)$ に対して、 $-u \notin P(V)$ 、(ii) $P = \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V(\subset U)\}$ 。²⁰

証明. (i) の証明: $-u \in P(V)$ としてみる。すると、ある $x \in P, \lambda \geq 0, a, b \in V$ に対して $-u = x + \lambda(u + a) + b$ となる。したがって、 $-u = x/(1 + \lambda) + \lambda a/(1 + \lambda) + b/(1 + \lambda)$ となる。この時、 P が錐なので $x/(1 + \lambda) \in P$ で、更に、 V の凸性によって $[\lambda a/(1 + \lambda) + b/(1 + \lambda)] \in V$ である。故に、 V の平衡性により $(-u + V) \cap P \neq \emptyset$ となって、 $V \subset U$ より $(-u + U) \cap P \neq \emptyset$ となるが、これは U の選び方に矛盾する。

(ii) の証明: 0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)$ に対して $P(V)$ の定義より $P(V) \supset P$ なので $P \subset \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V(\subset U)\}$ である。そこで、0 の任意の凸平衡近傍 $V(\subset U)$ に対して $y \in P(V)$ となるが $y \notin P$ となるとする。まず、 $y \in P(V)$ より、ある $x_V \in P, \lambda_V \geq 0, a_V, b_V \in V$ に対して $y = x_V + \lambda_V(u + a_V) + b_V$ となる。すると、 $y - (x_V + \lambda_V u) = \lambda_V a_V + b_V = c_V$ となるが、 P が凸錐なので $x_V + \lambda_V u \in P$ である。 $y \notin P$ なので P の $(\tau-)$ 閉性より、0 のある凸平衡的近傍

¹⁹ このような $P + Q(V)$ と同様に構成される開凸錐が、内点条件が満たされない無限次元財空間のケースを考察した Mas - Colell(1986) でもプロパーネス (properness) 条件として利用されている。

²⁰ Nikaido(1957b、補題 7)、Nikaido(1959、補題 8)。

$W \subset U$ を選んで、 $(y+W) \cap P = \emptyset$ とできる。この時、 $y+c_V = (x_V+\lambda_V u) \in P$ なので、 $c_V \notin W$ である。この時、最初に、 $\lambda_V \rightarrow \infty (V \rightarrow 0)$ を示す。 n を任意に固定して、任意の $V \subset W/n$ に対して $\lambda_V > n-1$ を示せばよい。 V の凸性によって $c_V/(1+\lambda_V) = [\lambda_V a_V/(1+\lambda_V)] + b_V/(1+\lambda_V) \in V \subset W/n$ であり、故に、 $c_V \in W(1+\lambda_V)/n$ となる。しかし、 $c_V \notin W$ なので、 $(1+\lambda_V)/n > 1$ でなくてはならず、 $\lambda_V > n-1$ となる。そして、 $c_V/(1+\lambda_V) \in V$ なので $c_V/\lambda_V = y/\lambda_V - (x_V/\lambda_V + u) \in (1+1/\lambda_V)V$ であり、 $x_V/\lambda_V + u \in y/\lambda_V + (1+1/\lambda_V)V$ となる。そして、 $V \rightarrow 0$ とすると $\lambda_V \rightarrow \infty$ となるので $y/\lambda_V + (1+1/\lambda_V)V \rightarrow 0$ となり、故に、 $x_V/\lambda_V + u \rightarrow 0$ 、つまり、 $\lim_{V \rightarrow 0} x_V/\lambda_V = -u$ となる。すると、 P が錐なので $x_V \in P$ より $x_V/\lambda_V \in P$ となるので、故に、 $\lim_{V \rightarrow 0} x_V/\lambda_V = -u \in cl_\tau(P) = P$ となるが、これは $-u \notin P$ に矛盾する。したがって、 $P \supset \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V(\subset U)\}$ となって、故に、 $P = \cap \{P(V) : 0 \text{ の任意の凸平衡近傍 } V(\subset U)\}$ となる。□

補題6においては、 $P(V)$ は τ -閉であり、しかも $-u \notin P(V)$ なので $P(V) \neq E$ であり、したがって、 $P(V)$ に対して補題5が適応可能になる事に注意する。

ここで、対応(多価写像)の上半連続性と閉性に関して議論する。 S と X を二つのハウスドルフ空間として $\varphi : S \rightarrow X \setminus \{\emptyset\}$ を対応(多価写像)とする。この時、(1) 任意の $p \in S$ と任意の開近傍 $U(\varphi(p))$ に対して p のある開近傍 $V(p)$ が存在して任意の $q \in V(p)$ に対して $\varphi(q) \subset U(\varphi(p))$ となる時に、 φ は上半連続(*u.h.c.*)と呼ばれる。²¹ (2) φ のグラフ $G_\varphi = \{(p, x) \in S \times X : x \in \varphi(p)\}$ が $S \times X$ の直積位相で閉集合となる時に、 φ は閉(*closed*)と呼ばれる。連続関数の定義より、連続関数はそれを対応とみなすと上半連続であり、また、二つの上半連続対応の合成写像もまた上半連続である。これらの上半連続性と閉性と

²¹ $\varphi(p)$ を含む任意の開近傍 $U(\varphi(p))$ に対してではなくて、 $\varphi(p)$ を含む任意の開半空間 $H(\varphi(p))$ に対して同様な結果が成立する時に、 φ は *upper demi-continuous(u.d.c.)* といわれ、Yannelis(1985)において用いられた。 $\varphi(p)$ を含む任意の開半空間は $\varphi(p)$ を含む閉集合なので、*u.s.c.* ならば *u.d.c.* である。Yannelis(1985)では、本稿で扱う上半連続のケースの無限次元財空間のゲール・二階堂の補題を、凸錐 P の内部の非空性を仮定した状況で、*u.d.c.*のケースへ拡張している。

いう条件は一般には同値という訳ではないが、条件を付け加える事によって両者をより関連付ける事が出来る。

補題 7: S をコンパクトとする。すると、次の二つの条件は同値である。(a) : φ は上半連続であり、全ての $\varphi(p)$ がコンパクトである。(b) : φ は閉であり、 X のコンパクト集合 T が存在して全ての $\varphi(p)$ が T に含まれる。²²

証明. (a) $\rightarrow$ (b) : $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p)$ として、 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を T の開被覆とする。任意の $p \in S$ に対してある V_{λ_p} が存在して $\varphi(p) \subset V_{\lambda_p}$ となるが、すると φ の上半連続性から p のある開近傍 U_p が存在して、 $q \in U_p \rightarrow \varphi(q) \subset V_{\lambda_p}$ となる。この時、 $\{U_p\}_{p \in S}$ は S の開被覆なので、ある有限個の $p_1, \dots, p_m \in S$ が存在して $S \subset \bigcup_{i=1}^m U_{p_i}$ となる。すると、 $q \in U_{p_i} \rightarrow \varphi(q) \subset V_{\lambda_{p_i}}$ によって $q \in S \subset \bigcup_{i=1}^m U_{p_i} \rightarrow \varphi(q) \subset \bigcup_{i=1}^m V_{\lambda_{p_i}}$ となるので、 $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p) \subset \bigcup_{i=1}^m V_{\lambda_{p_i}}$ となり、 T には $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の有限開被覆 $\{V_{\lambda_{p_i}}\}_{i=1}^m$ が存在するので $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p)$ はコンパクトである。²³ 次に、 $(p, x) \in cl_\tau(G_\varphi) \setminus (G_\varphi)$ とする。 $x \notin \varphi(p)$ によって、 p の開近傍 W_p と $\varphi(p)$ の開近傍 $V(\varphi(p))$ の二つが存在して、 $V(\varphi(p)) \cap \varphi(W_p) = \emptyset$ となる。 φ の上半連続性から p の開近傍 U_p が存在して $q \in U_p \rightarrow \varphi(q) \subset V(\varphi(p))$ となる。 $(p, x) \in cl_\tau(G_\varphi)$ なので $(p, x) \in [(U_p \cap W_p) \times V(\varphi(p))]$ によってある $(q, y) \in [(U_p \cap W_p) \times V(\varphi(p)) \cap G_\varphi]$ が存在するが、 $q \in W_p, y \in [V(\varphi(p)) \cap \varphi(q)]$ なので $V(\varphi(p)) \cap \varphi(W_p) \neq \emptyset$ となって矛盾が起こる。したがって、 $cl_\tau(G_\varphi) \setminus (G_\varphi) = \emptyset$ となって $(G_\varphi) = cl_\tau(G_\varphi)$ となり、 φ は閉対応である。

(b) $\rightarrow$ (a) : $x \in cl_\tau(\varphi(p)) (\subset T)$ とすると、 x の任意の開近傍 V に対して $(z_V \in) (V \cap \varphi(p)) \neq \emptyset$ となる。そこで、 p の任意の開近傍を U とすると、 $(p, x) \in U \times V, ((p, z_V) \in) [(U \times V) \cap G_\varphi] \neq \emptyset$ となって $(p, x) \in cl_\tau(G_\varphi) = G_\varphi$ となるので、 $x \in \varphi(p)$ であり、 $\varphi(p)$ は τ -閉である。故に、 T のコンパクト性 $\varphi(p) \subset T$ より $\varphi(p)$ は τ -コンパクトになる。次に、 φ が p で上半連続でないとする、 $\varphi(p)$ のある開近傍 V が存在して、 p の任意の開近傍 U に対して、ある $p_U \in U$ と $x_U \in V$ が存在して $x_U \notin V$ となる。そこで、 $U \subset U' \leftrightarrow U' \leq U$ によって与えられる半

²²Nikaido(1957b、補題 8)、Nikaido(1959、補題 3)

²³これは $\varphi : S \rightarrow X$ が上半連続で S がコンパクトであれば、 $T = \bigcup_{p \in S} \varphi(p)$ がコンパクトである事を示している。

順序を利用した有向点列 (ネット) $(p_U), (x_U)$ を考えると、まず $p_U \rightarrow p$ であり、また、 $(x_U) \subset T$ で T がコンパクトなので、 (x_U) には収束部分有向点列 (サブネット) (x_{U_λ}) が存在して $x_{U_\lambda} \rightarrow y \in T$ となる。そして、 $x_U \notin V$ と V^c の閉性から $y \notin V$ となる。ところで、 $(p_{U_\lambda}, x_{U_\lambda}) \in G_\varphi, (p_{U_\lambda}, x_{U_\lambda}) \rightarrow (p, y)$ 、そして、 φ の閉性によって、 $(p, y) \in G_\varphi$ となって $y \in \varphi(p) \subset V$ となるが、これは $y \notin V$ に矛盾し、故に、 φ は p で上半連続である。 $\square$

本稿では Nikaido(1957b) の証明に従っているが、そこでは Nikaido(1956a) で示された、 n -次元ユークリッド空間 (有限次元部分空間) での結果であるゲール・二階堂の補題を利用している。まず、この n -次元ユークリッド空間における結果を与える。 S^n を n -次元ユークリッド空間 R^n の基本単体 $\{p \in R^n : p \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ 、また、 R_+^n を R^n の非負象限 $\{x \in R^n : x \geq 0\}$ として、更に、超過供給対応を $\phi : S^n \rightarrow R^n \setminus \{\emptyset\}$ とする。

補題 8(ゲール・二階堂： R^n のケース)：超過供給対応を $\phi : S^n \rightarrow R^n \setminus \{\emptyset\}$ が非空コンパクト凸値で上半連続であり、 $p \in S^n$ に対して $x \in \phi(p) \rightarrow p \cdot x \geq 0$ (弱ワルラス法則) を満たすとする。するとある $\bar{p} \in S^n$ が存在して $\phi(\bar{p}) \cap R_+^n \neq \emptyset$ となり、故に、ある $\bar{x} \in \phi(\bar{p})$ に対して $\bar{x} \geq 0$ となる。²⁴

証明. S^n がコンパクトで ϕ が上半連続でコンパクト値なので、補題 7 の証明で示した事によって $T = \bigcup_{p \in S^n} \phi(p)$ はコンパクトになり、故に T を含む十分に大きな矩形の 1 つを Δ とすれば任意の $p \in S^n$ に対して $\phi(p) \subset \Delta$ と出来る。もちろん、補題 7 より ϕ は閉対応になる。対応 $\theta : \Delta \rightarrow S^n \setminus \{\emptyset\}$ を $\theta(x) = \{p \in S^n : \text{任意の } q \in S^n \text{ に対して } p \cdot x \leq q \cdot x\}$ によって定義する。まず、内積 $\cdot$ の連続性と S^n のコンパクト性から $\theta(x) \neq \emptyset$ である。また、内積 $\cdot$ の線形性から $\theta(x)$ は凸である。そして、補題 7 より θ の閉性と上半連続性は同値である。 $(x^m, p^m) \in G_\theta, x^m \rightarrow x \in \Delta, p^m \rightarrow p \in S^n$ とすると、 $\theta(\cdot)$ の作り方から任意に固定した $q \in S^n$ に対して $p^m \cdot x^m \leq q \cdot x^m$ となるので、内積 $\cdot$ の連続性より $m \rightarrow \infty$ とすると $p \cdot x \leq q \cdot x$ となって $p \in \theta(x)$ 、つまり、 $(x, p) \in G_\theta$ となり、 θ は閉であり、故に上半連続である。次に対応 $\chi : S^n \times \Delta \rightarrow (S^n \times \Delta) \setminus \{\emptyset\}$ を $\chi(p, x) = \theta(x) \times \phi(p)$

²⁴Nikaido(1957b, 補助定理)

によって定義すると、 $\theta(x) \times \phi(p)$ はコンパクトで凸である。更に、 θ と ϕ の閉性から χ も閉になり、故に、 $S^n \times \Delta$ のコンパクト性と補題7から χ は上半連続である。したがって、 χ は $S^n \times \Delta$ からそれ自身の凸コンパクト集合へ写す上半連続対応であるので、角谷の不動点定理によって、ある不動点 $(\bar{p}, \bar{x}) \in S^n \times \Delta$ が存在して $(\bar{p}, \bar{x}) \in \chi(\bar{p}, \bar{x})$ となる。まず、 $\bar{x} \in \phi(\bar{p}) \subset \Delta, \bar{p} \in \theta(\bar{x})$ となるので、ワルラス法則によって任意の $q \in S^n$ に対して $0 \leq \bar{p} \cdot \bar{x} \leq q \cdot \bar{x}$ となるが、 $q = e^i = (0, \dots, 0, 1(i \text{ 座標}), 0, \dots, 0)$ とすれば $0 \leq e^i \cdot \bar{x} = \bar{x}_i, i = 1, \dots, n$ となって、 $(\bar{x} \in)(\phi(\bar{p}) \cap R_+^n) \neq \emptyset$ となる。□

4 無限次元財空間モデルにおけるゲール・二階堂の

補題：証明

この節では、Nikaido(1957b, 59) で示された、無限次元 (局所凸線形位相空間) のゲール・二階堂の補題の証明を、特に超過供給対応が凸値としたケースで行い、その内容について議論する。まず最初にその定理を述べる。今まで同様に、 E を局所凸線形位相空間で P を E の τ -閉凸錐で $(-P \cap P) \neq P$ とする。

定理 (Nikaido(1959)：凸値のケース)： $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が次の条件を満たすとする。(i) 任意の $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $\varphi(p)$ は非空凸で弱 $(\sigma(E, E^*)-)$ コンパクトである。(ii) L を P^* の任意の有限次元の凸部分錐として $\langle P^* \rangle \cap L$ には $*$ -弱位相 $(\sigma(E^*, E))$ 、 E には弱位相 $(\sigma(E, E^*))$ を用いて、 φ を $\langle P^* \rangle \cap L$ に制限した対応 $\varphi : \langle P^* \rangle \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が上半連続である。(iii) φ による $\langle P^* \rangle$ の像である $\cup_{p \in \langle P^* \rangle} \varphi(p)$ が弱コンパクトである。(iv) $p \in S^n$ に対して $x \in \phi(p) \rightarrow p \cdot x \geq 0$ (弱ワルラス法則) を満たす。この時、ある $\bar{p} \in \langle P^* \rangle$ が存在して $\phi(\bar{p}) \cap P \neq \emptyset$ となる。

前節の補題8の有限次元部分空間のケースの条件と比べてみると、一番大きな違いは、有限次元部分空間のケースのように φ の上半連続を定義域である $\langle P^* \rangle$ 全体で成立するというしているのではなくて、その有限次元凸部分錐 $L(\cap \langle P^* \rangle)$ 上でのみ成立するとしている事である。 P^* の有限次元凸部分錐 L

は P^* の有限個の一時独立なベクトル $\{p_1, \dots, p_m\}$ によって生成される線形部分空間 $[p_1, \dots, p_m]$ と P^* の共通集合であり、有限部分空間上では局所凸線形位相空間は m -次元ユークリッド空間の位相と同値という意味で一意的であり、また、 m -次元ユークリッド空間 R^n の双対空間 $(R^n)^*$ に対しては $(R^n)^* = R^n$ が成立するので、ある意味で、有限次元部分空間のケースの条件が各有限次元凸部分錐 $L(\cap < P^* >)$ 上で成立すると想定していると考えられる。もちろん、 φ の上半連続が $< P^* >$ 全体で成立するすれば、有限凸部分錐 $L(\cap < P^* >)$ 上で成立するのは言うまでもないが、この逆は一般には言えない。

定理の証明. 補題6の P を少し広げた $P(V)$ に対しては $P \subset P(V)$ となっているので、 $P(V)^* \subset P^*$ となる。また、全ての $P(V)$ は u を共通の $(\tau-)$ 内点として含んでいるが、どれも $-u$ は含んでいない。したがって、 $P(V)$ は補題5の条件を満たしているので、 $< P(V)^* >$ は非空で凸となる。そこで、 $< P(V)^* >$ から任意に選んで固定した有限集合を $F = \{p_1, \dots, p_m\}$ とする。 $< P(V)^* >$ の凸性から F の凸包に対して $co(F) \subset < P(V)^* >$ となる。二つの連続関数を定義する。まず、 $\alpha : E \rightarrow R^m$ を $\alpha_i(x) = p_i(x), i = 1, \dots, m$ とする。 $p_i \in E^*$ で E 上の弱連続な汎関数なので、 $\alpha_i : E \rightarrow R$ は弱連続になり、 $\alpha : E \rightarrow R^m$ も弱連続である。次に、 $\beta : S^m \rightarrow < P(V)^* >$ を $\beta(w) = \sum_{i=1}^m w_i p_i$ とする。 β は $p_i, i = 1, \dots, m$ の1次結合なので、線形位相の性質より値域に E^* 上の $*$ -弱位相を利用すると β は連続になる。この時、 $co(F) \subset < P(V)^* >$ なので $\beta(w) \in < P(V)^* >$ である。そして、 α, β, φ の合成写像 $\alpha \circ \varphi \circ \beta$ を $\phi : S^m \rightarrow R^m$ とする。 $\phi(w) = \alpha(\varphi(\beta(w)))$ なので、 $\phi(w)$ は w を係数とした $p_1, \dots, p_m$ の凸結合 $\beta(w)$ によって与えられる超過供給ベクトル(集合) $\varphi(\beta(w))$ の各 $p_1, \dots, p_m$ での評価額ベクトル $(p_1(\varphi(\beta(w))), \dots, p_m(\varphi(\beta(w))))$ である。 $\beta(S^m) \subset (L \cap P(V)^*) = ([p_1, \dots, p_m] \cap P(V)^*)$ なので、(iii) によって φ は $\beta(S^m)$ 上で上半連続である。

この $\phi : S^m \rightarrow R^m$ が補題8の条件を満たす。まず、 $\beta(w) = q$ とすると $\varphi(q) \neq \emptyset$ なので $\varphi(q)$ の各 p_i による評価額も存在するので $\phi(w) \neq \emptyset$ である。次に、 $r, r' \in \phi(w), \gamma \in (0, 1)$ に対して $r'' = \gamma r + (1 - \gamma)r'$ とする。 $r, r' \in \phi(w)$ よりある $y, y' \in \varphi(\beta(w))$ が存在して $r = \alpha(y), r' = \alpha(y')$ となる。 $\varphi(\beta(w))$ は凸なので

$\gamma y + (1-\gamma)y' \in \phi(w)$ で $\alpha(\gamma y + (1-\gamma)y') \in \phi(w)$ である。そして、 α は線形なので $\alpha(\gamma y + (1-\gamma)y') = \gamma\alpha(y) + (1-\gamma)\alpha(y') = \gamma r + (1-\gamma)r' = r'' \in \phi(w)$ となって、 $\phi(w)$ は凸である。そして、 $\varphi(q)$ は弱コンパクトで各 p_i は弱連続なので、ワイエルシュトラスの定理より $p_i(\varphi(q))(\subset R)$ もコンパクトであり、故に、 $\phi(w)(\subset R^m)$ はコンパクトである。 ϕ の上半連続性は、 α, β が連続関数なので対応として考えると上半連続であり、上半連続対応の合成写像が上半連続になる事によって、成立する。最後に弱ワルラス法則について考える。 $r \in \phi(w)$ とすると、ある $z \in \varphi(\beta(w))$ が存在して $r = \alpha(z) = (p_1(z), \dots, p_m(z))$ となる。すると、(iv) より $[\beta(w)](z) \geq 0$ となるが、 $w \cdot r = \sum_{i=1}^m p_i(z)w_i = (\sum_{i=1}^m w_i p_i)(z) = [\beta(w)](z) \geq 0$ となって、 ϕ に対しても弱ワルラス法則が成立する。

したがって、 $\phi: S^m \rightarrow R^m$ は補題8の条件を満たすので、ある $\bar{w} \in S^m$ が存在して $\phi(\bar{w}) \cap R_+^m \neq \emptyset$ となり、ある $\bar{x} \in \varphi(\beta(\bar{w}))$ に対して $(p_1(\bar{x}), \dots, p_m(\bar{x})) \geq 0$ となる。この時、 $\beta(w) \in \langle P(V)^* \rangle$ なので $\bar{x} \in \varphi(\beta(\bar{w})) \subset \Delta = \bigcup_{p \in \langle P(V)^* \rangle} \varphi(p)$ であり、 $P(V, F) = \{x \in E : p_i(x) \geq 0, p_i \in F\} = \{x \in E : p_i(x) \geq 0, i = 1 \dots, m\}$ とすると、 $\bar{x} \in P(V, F)$ であり、 $(P(V, F) \cap \Delta) \neq \emptyset$ となる。²⁵ $P(V, F)$ は p_i が弱連続なので弱閉である。この結果は $\langle P(V)^* \rangle$ の任意の有限集合 F について成立するが、そのような F について $P(V, F)$ の族 $\{P(V, F) : F \subset \langle P(V)^* \rangle, \#F < \infty\}$ を考えると、その族が Δ に対して有限交差性を満たす事になり、また、仮定から Δ は弱コンパクトなので、 $[(\bigcap_{F \subset \langle P(V)^* \rangle} P(V, F)) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となる。すると、 $P(V)$ は凸錐で τ -閉なので弱閉であり、補題2より $P(V) = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in P(V)^*\} = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in \langle P(V)^* \rangle\} \subset P(V, F) (= \{x \in E : p(x) \geq 0, p \in F, \#F < \infty\})$ となるので、 $P(V) \subset (\bigcap_{F \subset \langle P(V)^* \rangle} P(V, F))$ となる。しかし、 $p \in P(V)^*$ に対して $F = \{p\}$ とすれば $(\bigcap_{F \subset \langle P(V)^* \rangle} P(V, F)) \subset (\bigcap_{\{p\} \subset \langle P(V)^* \rangle} P(V, \{p\})) = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in \langle P(V)^* \rangle\} = P(V)$ となるので、結局、 $P(V) = (\bigcap_{F \subset \langle P(V)^* \rangle} P(V, F))$ となる。

²⁵ この結果に関する Nikaido(1959) の本来の証明は、より一般的な $\varphi(x)$ が非循環的 (acyclic) なケースにおいて、ナッシュ均衡の存在定理やミニマックス定理を包含するより一般的な結果を用いてその結果の帰結としてこの結果が得られるとしている。しかし、ここでのように $\varphi(x)$ が凸なケースの証明は、Nikaido(1957b) の証明方法に従えばより簡明にこの結果が得られる。

したがって、 $[(\cap_{F \subset \langle P(V)^* \rangle} P(V, F)) \cap \Delta] \neq \emptyset$ より $[P(V) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となる。そして、これが 0 の任意の近傍 V について成立するが、 $P(V)$ の族 $\{P(V) : V \text{ は } 0 \text{ の近傍}\}$ を考えると、近傍の性質よりこの族が Δ に対して再び有限交差性を満たす事になるので $[(\cap_{V \in N(0)} P(V)) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となり、故に、補題 6(ii) より $(\cap_{V \in N(0)} P(V)) = P$ なので $(P \cap \Delta) \neq \emptyset$ となり、ある $\bar{p} \in \langle P(V)^* \rangle$ が存在して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる。これが求めていた結果である。□

この定理に関して以下で幾つか議論する。まず、 P を E の τ -閉凸錐で $(-P \cap P) \neq P$ を満たすように選んでいるが、この条件が満たされないと、 $\bar{p} \in \langle P(V)^* \rangle$ が存在して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ という帰結が成立しない事がある。今、 $E = R^3$ として、 P を原点 0 を通る 1 つの線形部分空間 M とすると、 P^* は M と直交する原点を通る直線 l であり、故に、 $\langle P(V)^* \rangle = P(V)^* \setminus \{0\}$ はこの直線の l から原点 0 を除いた $l \setminus \{0\}$ ものになる。すると、 $\langle P(V)^* \rangle$ は M によって二つの (原点 0 を含まない) 半直線 l_1 と l_2 になる。そして、 $x_1 \in l_1$ と $x_2 \in l_2$ を任意に選んで固定して、 $\varphi(p) = x_1(x_2)(p \in l_1(l_2) \text{ の時})$ とすれば、 φ は定理の条件 (i) – (iv) を満たす。特に、 φ の (上半) 連続性は l_1 と l_2 が原点 0 で繋がっていないので、 φ の値が原点 0 で x_1 と x_2 の間でジャンプ出来る事より成立する。しかし、 φ の作り方から $(\varphi(\langle P(V)^* \rangle) \cap M) = (\varphi(l \setminus \{0\}) \cap M) = \emptyset$ なので、定理の帰結は成立しない。

次に、(ii) と (iii) について議論する。 $E = R^m$ の有限次元のケースでは、 $(R^m)^* = R^m$ によって $P^* \subset R^m$ となるので、(ii) は φ の P^* 全体上での上半連続性になる。そして、 $\psi : \langle P^* \rangle \rightarrow R^m$ を $\psi(p) = \varphi(p/\|p\|)$ によって定義すれば、 $B^m = \{p \in R^m : \|p\| = 1\}$ を R^m の単位球として、 φ は $B^m \cap P^*$ に制限される事になるが、 B^m は R^m でコンパクトなので $B^m \cap P^*$ もコンパクトになり、故に、補題 7 によって、 $\psi(\langle P^* \rangle) = \cup_{p \in \langle P^* \rangle} \psi(p) = \cup_{q \in (B^m \cap P^*)} \varphi(q) = \varphi(B^m \cap P^*)$ はコンパクトになる。 $p/\|p\|$ は $\langle P^* \rangle$ 上で連続であり、上半連続な対応の合成も上半連続なので、 ψ は $\langle P^* \rangle$ 上で上半連続であり、更に、仮定から (i)(iv) も成立するので、結局、 $\psi : \langle P^* \rangle \rightarrow R^m$ は定理の条件 (i) – (iv) を満たす。したがって、 $\bar{p} \in \langle P(V)^* \rangle$ が存在して $(\psi(\bar{p}) \cap P) = (\varphi(\bar{p}/\|\bar{p}\|) \cap P) \neq \emptyset$ とな

り、 $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow R^m$ が (i), (ii), (iv) を満たすだけ $\bar{p}/\|\bar{p}\| \in \langle P^* \rangle$ に対して $(\varphi(\bar{p}/\|\bar{p}\|) \cap P) \neq \emptyset$ となる。したがって、 $E = R^m$ の有限次元のケースでは φ に対しては条件 (iii) は仮定しなくていい。そして、 P^* が閉で尖っていれば P^{**} は内点を持つので、最初に閉で尖っている P^* を用いて、それに対応する P^{**} を P として用いるとすると、Debreu(1956) によるゲール・二階堂の補題 7 の S^m から尖がっている閉凸錐 P^* への一般化が得られる。²⁶

E が無限次元の一般的な局所凸線形位相空間であり、更に、 $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ で $(ii)' \in \langle P^* \rangle$ には $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ 位相、 E には弱 $\sigma(E, E^*)$ 位相を用いて、 $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ が $\langle P^* \rangle$ 上で上半連続となるケースを考える。²⁷ 勿論、 $(ii)' \rightarrow (ii)$ である。まず、 $u \in \text{int}_\tau(P)$ を 1 つ固定して $C_u = \{p \in P^* : p(u) = 1\}$ とする。そして、 u が P の τ -内点なので、原点 0 のある凸平衡近傍 W が存在して $(u + W) \subset P$ なる。故に、 W の平衡性によって任意の $w \in W$ と $p \in P^*$ に対して $p(u + w) \geq 0, p(u - w) \geq 0$ となる。もちろん、 $p(u) \geq 0$ であるが、特に、 $w \neq 0, p \neq 0$ とすると $p(w) \neq 0$ となるので、 $p(u) = 0$ とならず、 $p \in \langle P^* \rangle$ に対して $p(u) > 0$ となり、 $p/p(u) \in C_u$ となる。また、 $w \in W$ を任意の 1 つ固定すると、任意の $q \in C_u$ に対して $q(u + w) = q(u) + q(w) = 1 + q(w) \geq 0$ となるので $q(w) \geq -1$ となる。そして、 W の平衡性によって $-w \in W$ でもあるので、同様にして、 $q(-w) \geq -1$ となって $q(w) \leq 1$ となり、故に、 $|q(w)| \leq 1$ となる。これは C_u が W の極集合 W° に含まれる事を示している。また、アラオグルー・ブルバキの定理より W° は $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトで、 C_u は $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ -閉なので、故に、 C_u も $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトになる。²⁸ そこで、 $\psi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ を $\psi(p) = \varphi(p/p(u))$ によって定義すれば、 $\psi(\langle P^* \rangle) = \varphi(C_u)$ となるが、 C_u が $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトで φ が C_u 上でも $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ 位相で上半連続なので、補題 7 によって $\varphi(C_u)$ は $*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトになる。

²⁶Nikaido(1968、定理 3.13 (ii))

²⁷二階堂 (1959) では、このケースをノルム空間においてしか考察していないが、実際にはここでのように局所凸線形位相空間において考察可能である。

²⁸アラオグルー・ブルバキの定理によると、 U を E の原点の近傍とすると、 $U^\circ = \{p \in E^* : |p \cdot x| \leq 1\}$ (U の極) が $*$ -弱位相 ($*$ 弱 $\sigma(E^*, E)$) でコンパクトになる。

$p/p(u)$ は $\langle P^* \rangle$ 上で $*\text{弱}\sigma(E^*, E)$ 位相で連続なので ψ は $\langle P^* \rangle$ 上で $*\text{弱}\sigma(E^*, E)$ 位相で上半連続であり、更に、仮定より (i)(iv) も成立するので、結局、 $\psi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ は定理の条件 (i) – (iv) を満たす。したがって、 $\bar{p} \in \langle P(V)^* \rangle$ が存在して $(\psi(\bar{p}) \cap P) = (\varphi(\bar{p}/\bar{p}(u)) \cap P) \neq \emptyset$ となり、 $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ が (i), (ii)', (iv) を満たすだけ $\bar{p}/\bar{p}(u) \in \langle P^* \rangle$ に対して $(\varphi(\bar{p}/\bar{p}(u)) \cap P) \neq \emptyset$ となる。したがって、この場合にも φ に対しては条件 (iii) は仮定しなくてよい。

そして、 E が局所凸線形位相空間で $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ のケースで $\varphi : C_u \rightarrow E$ が (i), (ii)', (iv) を満たす時に、ある $\bar{p}/\bar{p}(u) \in C_u$ に対して $(\varphi(\bar{p}/\bar{p}(u)) \cap P) \neq \emptyset$ を示したのが Florenzano(1983) である。²⁹ ただし、Florenzano(1983) の結果は $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ の時に成立するのであるが、上の結果は $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ が成立しなくても $(P \cap -P) \neq P$ であれば成立するので、より一般的な結果である。

そして、Nikaido(1957b) において Nikaido(1956b)(筆者未見)に触れている点から察すると、後者は E が無限次元ノルム空間、 $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ 、そして、(ii)' : $\langle P^* \rangle$ には $*\text{弱}\sigma(E^*, E)$ 位相、 E には $\text{弱}\sigma(E, E^*)$ 位相を用いて $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ が上半連続、という条件の下でのゲール・二階堂の補題の一般化を示しているように思われる。³⁰ そして、その証明はここでのような有限次元のゲール・二階堂の補題の利用した近似であったのではないかと思われる。ただし、 $\varphi : \langle P^* \rangle \rightarrow E$ に対する本節での定理の証明では、この Nikaido(1956b) や Florenzano(1983) の証明とは違って、価格集合 C_u の $*\text{弱}\sigma(E^*, E)$ –コンパクト性は一切利用せず、代わりに $\Delta = \cup_{p \in \langle P(V)^* \rangle} \varphi(p)$ の $*\text{弱}\sigma(E^*, E)$ –コンパクト性という (iii) を利用している。

²⁹Florenzano(1983、系 1、p.213-4) で、その元の結果である Florenzano(1983、補題 1、p.212) の証明はここでの証明とほぼ同一で、有限次元のゲール・二階堂の補題による近似を用いている。ただし、フロレンザーノの無限次元のゲール・二階堂の補題における位相の取り方は、 l_∞ のようなバナッハ先双対空間を財空間とするケースへ応用する事を前提にしているために、やや工夫がされていて、Nikaido(1956b、57b、59) とは微妙に異なっている。無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題は、Yannelis(1985) や Mehta - Tarafdar(1987) によって更に一般化されている。また、Aliprantis – Brown(1983) は、線形位相束を財空間とする経済の超過需要関数を考えて、そのモデルにける市場均衡の存在問題を扱った。そして、これらの結果は Urai(2000) によって更に一般化されている。

³⁰二階堂 (1957b、p.4、Remark 2、p.11-2) においてである。

5 1つの一般化：弱 $\sigma(E, E^*)$ -相対コンパクト値対応のケース

この節では、前節の定理1の (iii) : $\Gamma = \bigcup_{p \in \langle (-P)^* \rangle} \varphi(p)$ の弱 $\ast(\sigma(E^*, E))$ -コンパクト性を (iii)' : $\Gamma = \bigcup_{p \in \langle (-P)^* \rangle} \varphi(p)$ の弱 $\ast(\sigma(E^*, E))$ -相対コンパクト性にしたケースを取り扱う。³¹ この結果の証明では、前節で扱った (ii) に基づく有限次元近似を用いた定理1の証明と同様の手法を用いるが、若干違いがある。定理1の証明では (iii) より直接的に $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる $\bar{p} \in \langle (P)^* \rangle$ の存在を示したが、A(iii)の代わりに (iii)' を用いる時には、 $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる $\bar{p} \in \langle (P)^* \rangle$ の存在を、間接的に価格のネットの極限として示す。この目的のためには価格集合を $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクト集合とする必要があり、そのためここでは、財空間として $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ となる τ -閉凸錐を持つような局所凸線形位相空間を用いる。³² 補題6用いる議論は有限次元のケースでは上手く進められるが、前節で扱った無限次元空間のケースとは異なってこの節で扱う無限次元空間では上手く行かず、以下で見るように、 $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ が必要となる。³³

まず、 $u \in \text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ を一つ選んで $\Delta^* = \{p \in P^* : p \cdot u = 1\}$ を価格集合とすると、前節の最後で述べたように、 Δ^* は $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトになる。既に触れたように、 Δ^* における均衡価格の存在は直接的ではなくて、均衡価格が Δ^* におけるネットの極限という意味で間接的である。これによって市場超過供給対応のグラフにおけるネットの極限を考える必要が起こり、元の市場超過供給

³¹Florenzano(1983) も E を別の線形位相空間 (G, τ^G) の双対空間になっていて $E = (G, \tau^G)^*$ となるケースを扱っていて、 $G = l_1, E = l_\infty$ とするようなケースである。

³²Nikaido(1957b) において Nikaido(1956b) に触れている所から察するに、 $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ となっている無限次元財空間において E に弱位相 $\sigma(E, E^*)$ を想定して、ゲール・二階堂の補題を示す事になったように思われる。もしも二階堂先生が l_∞ を財空間とするような経済を想定して競争均衡の存在を考えていれば、Nikaido(1957b, 59) とは異なった方向に、更に、無限次元空間のゲール・二階堂の補題を発展させていたと思われる。

³³もちろん、市場超過供給対応が有限次元のケースのように $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトな価格集合上で定義されていれば、補題6と (ii) に基づく有限次元による近似の議論は依然として利用可能である。

給対応のグラフにおけるネットの極限を含むように元の市場超過供給対応のグラフを上手く拡張する必要が起こる。

(S, τ) と (X, τ_X) を二つの (ハウスドルフ) 位相空間として、 $\varphi : S \rightarrow X \setminus \{\emptyset\}$ を S から X への対応とする。 φ のグラフ $G_\varphi = \{(p, x) \in S \times X : x \in \varphi(p)\}$ の $S \times X$ における直積位相 $\tau \times \tau_X$ に関する閉包 $cl_{\tau \times \tau_X}(G_\varphi) (\subset S \times X)$ を考えて、 $x \in S \rightarrow \tilde{\varphi}(p) = \{x \in X : (p, x) \in cl_{\tau \times \tau_X}(G_\varphi)\}$ によって対応 $\tilde{\varphi} : S \rightarrow X \setminus \{\emptyset\}$ を定義する。定義より $(p, x) \in G_\varphi \subset cl_{\tau \times \tau_X}(G_\varphi)$ なので $x \in \varphi(p) \subset \tilde{\varphi}(p) \ \forall p \in \Delta^*$ となり、 $\tilde{\varphi} : S \rightarrow X \setminus \{\emptyset\}$ は $\varphi : S \rightarrow X \setminus \{\emptyset\}$ の拡張である。一般には $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p)$ となるとは限らず、たとえば $\varphi(p)$ が τ_X -閉でも $\tilde{\varphi}(p) \supset \varphi(p)$ となるだけである。前節の最後の部分のように、 $\varphi : \Delta^* \rightarrow E$ が Δ^* 上で *u.h.c.* ならば、補題 7 と Δ^* の $*$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクト性より $\varphi(\Delta^*)$ の弱 $(\sigma(E, E^*))$ -コンパクト性が成立して $cl_{\sigma(E^*, E) \times \sigma(E, E^*)}(G_\varphi) = G_\varphi$ となる。この時には $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p) \ \forall p \in \Delta^*$ となって $\varphi : \Delta^* \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ を用いるだけで十分で、 φ の拡張 $\tilde{\varphi} : \Delta^* \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ を用いる必要はない。

定理 1 の一般化として、市場超過供給対応が弱 $(\sigma(E, E^*))$ -相対コンパクト値のケースを考える。 (E, τ) を局所凸線形位相空間として、 $P (\neq E)$ を弱 $(\sigma(E, E^*))$ -閉凸錐で $int_\tau(P) \neq \emptyset$ とする。ある所与の $u \in int_\tau(P)$ に対して価格集合 Δ^* を $\{p \in P^* : p \cdot u = 1\}$ として、 $\varphi : \Delta^* \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ を市場超過供給対応とする。 Δ^* は $*$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトである。この時の無限次元空間におけるゲール・二階堂の補題は以下である。

Theorem 2 (凸かつ弱 $\sigma(E, E^*)$ -相対コンパクト値のケース) 市場超過供給対

応 $\varphi : \Delta^* \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が以下の 4 条件を満たすとする：(i)' $\varphi(p)$ は非空凸弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクト $\forall p \in \Delta^*$, (ii)" L を $(P^* \cap E^*)$ における任意の有限次元部分錐として、 $\Delta^* \cap L$ には $*$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ 位相、 E には弱 $\sigma(E, E^*)$ 位相を与えて、 φ を $\Delta^* \cap L$ に制限すると、対応 $\varphi : \Delta^* \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ は *u.h.c.* である, (iii)' $\bigcup_{p \in \Delta^*} \varphi(p)$, φ による Δ^* の像はある弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクト集合 Ψ に含まれる, (iv) $\forall p \in \Delta^*, x \in \phi(p) \rightarrow p \cdot x \geq 0$ (弱ワルラス法則)。この時、 φ の拡張 $\tilde{\varphi} : \Delta^* \rightarrow \Psi$ を $p \in \Delta^* \rightarrow \tilde{\varphi}(p) = \{x \in \Psi : \exists x \in$

$E, (p, x) \in cl_{\sigma(E^*, E) \times \sigma(E, E^*)}(G_\varphi)\}$ によって定義すると、 $\tilde{\varphi}(\bar{p}) \cap P \neq \emptyset$ となる $\tilde{p} \in \Delta^*$ が存在する。³⁴

前節の定理 1 と同様に、 φ は Δ^* 全体上で *u.h.c.* というのではなくて有限次元部分錐 $L \cap \Delta^*$ 上でのみ *u.h.c.* である。 $\langle P^* \rangle$ の有限次元部分錐 L と Δ^* の共通集合 $L \cap \Delta^*$ は $\langle P^* \rangle$ における有限個の一次独立な点 $\{p_1, \dots, p_m\}$ によって生成される有限次元線形部分空間 $[p_1, \dots, p_m]$ と Δ^* の共通集合であり、 $\{p_1, \dots, p_m\}$ を適宜比例的に伸縮した $\{p'_1, \dots, p'_m\}$ が Δ^* に属するようにすれば、 $L \cap \Delta^*$ は $co\{p'_1, \dots, p'_m\}, \{p'_1, \dots, p'_m\}$ の凸包である。 $\Gamma = \cup_{p \in \Delta^-} \varphi(p)$ を弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクトとした定理 1 とは違って、ここでは $\Gamma = \cup_{p \in \Delta^-} \varphi(p)$ をある弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクト集合 Ψ に含まれるとしている。市場超過供給対応 φ は Δ^* 上で定義されているが、定理 1 と同様に、(ii)'' より補題 7 の条件が有限次元部分錐 L 上で成立するので、有限次元空間のケースでの補題 7 の結果が成立する。しかし、これより市場超過供給対応 φ が $\Delta^* \times \Psi$ において閉グラフを持つという事にはならず、実際、以下で見るように、均衡価格 $(\tilde{p}, \tilde{x})$ は Δ^* における $(p_V, x_V) \in G_\varphi$ となるネット $(p_V, x_V)_{\prec}$ の極限、つまり、 $(p_V, x_V) \rightarrow (\tilde{p}, \tilde{x}) (\prec \uparrow)$ として得られるが、 $(\tilde{p}, \tilde{x}) \in G_\varphi$ となるとは限らず、 $(\tilde{p}, \tilde{x}) \in cl_{\sigma(E^*, E) \times \sigma(E, E^*)}(G_\varphi)$ となるだけである。また、 $\varphi(\bar{p}) \cap P \neq \emptyset$ となるとは限らないが、 G_φ を $\Delta^* \times \Psi$ 上で $\tilde{\varphi}$ に拡張すると $\tilde{\varphi}(\bar{p}) \cap P \neq \emptyset$ となる。

定理 2 の証明. $F = \{p_1, \dots, p_m\}$ を Δ^* の任意の有限集合とする。 Δ^* は凸なので F の凸包 $co(F)$ は Δ^* に含まれる。二つの連続関数を定義する。最初に、 $\alpha : E \rightarrow R^m$ を $\alpha_i(x) = p_i(x), i = 1, \dots, m$ によって定義する。 $p_i \in E^*$ は弱 $\sigma(E, E^*)$ -連続線形汎関数なので、 $\alpha_i : E \rightarrow R$ もまた弱 $\sigma(E, E^*)$ -連続であり、故に、 $\alpha : E \rightarrow R^m$ も弱 $\sigma(E, E^*)$ -連続である。次に、 $\beta : S^m \rightarrow \Delta^*$ を $\beta(w) = \sum_{i=1}^m w_i p_i$ によって定義する。 β は $p_i, i = 1, \dots, m$ の凸結合なので線形位相の基本性質より β は E^* 上の $*$ 弱位相 $\sigma(E^*, E)$ に関して連続である。 $co(F) \subset \Delta^*$ より $\beta(w) \in \Delta^*$ である。 $\phi : S^m \rightarrow R^m$ を α, β, φ の合成写像とすると、 $\phi(w) = \alpha(\varphi(\beta(w)))$ より $\phi(w) = (p_1(\varphi(\beta(w))), \dots, p_m(\varphi(\beta(w))))$ であ

³⁴ この結果は Florenza(1983, lemma 1, pp212-3) に対応している。

る。これは、 w をウェイトした $p_1, \dots, p_m$ の凸結合価格 $\beta(w)$ で評価した市場超過供給集合 $\varphi(\beta(w))$ を $p_1, \dots, p_m$ で各々評価したベクトルである。 $\beta(S^m) = co(F) \subset \Delta^*$ なので (iii) より ϕ は $\beta(S^m)$ 上で $u.h.c.$ である。定理1の証明と同様にして、 ϕ は補題8の条件を満たすので、 $\exists \bar{w}_F \in S^m, \phi(\bar{w}_F) \cap (R_+^m) \neq \emptyset$ となつて、 $\exists \bar{x}_F \in \varphi(\beta(\bar{w}_F))$ に対して $(p_1(\bar{x}_F), \dots, p_m(\bar{x}_F)) \geq 0$ となり、 $P(F) = \{x \in E : p_i(x) \geq 0, p_i \in F\} = \{x \in E : p_i(x) \geq 0, i = 1 \dots, m\}$ とすると $\bar{x}_F \in P(F)$ となる。 $\beta(\bar{w}_F) \in \Delta^*$ より $\bar{x}_F \in \varphi(\beta(\bar{w}_F)) \subset \Gamma = \cup_{p \in \Delta^*} \varphi(p) \subset \Psi$ で、 Ψ は弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクトなので、 $\bar{x}_F \in \Gamma \subset \bar{\Gamma} = cl_{\sigma(E, E^*)}(\Gamma) \subset \Psi$ である。故に、 $\bar{x}_F \in (\Gamma \cap P(F)) \subset (\bar{\Gamma} \cap P(F)) \neq \emptyset$ となる。³⁵各 p_i が弱 $(\sigma(E, E^*)$ -連続なので、 $i = 1 \dots, m$ 、 $P(F)$ は弱 $\sigma(E, E^*)$ -閉である。

この結果は Δ^* の任意の有限集合に対して成立する。そこで集合族 $\{P(F) : F \subset \Delta^*, \#F < \infty\}$ を考えると、有限集合の和集合も有限集合であり、この集合族は $\bar{\Gamma}$ 上で有限交差性を満たす。 Ψ は弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクトなので、 $\bar{\Gamma}$ も弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクトであり、コンパクト集合の性質より $\cap \{\bar{\Gamma} \cap P(F) : F \subset \Delta^*, \#F < \infty\} = [(\cap_{F \subset \Delta^*, \#F < \infty} P(F)) \cap \bar{\Gamma}] \neq \emptyset$ となる。 P は弱 $\sigma(E, E^*)$ -閉凸錐なので、補題2より E に弱 $\sigma(E, E^*)$ 位相を与えると $P^* = \{p \in E^* : p \cdot x \leq 0, \forall p \in P\}$ となり、 $P = \{x \in E : p(x) \leq 0, \forall p \in P^*\} = \{x \in E : p(x) \leq 0, \forall p \in \langle P^* \rangle\} \subset \{x \in E : p(x) \leq 0, p \in F, \#F < \infty, F \subset \Delta^*\}$ となつて、 $P \subset (\cap_{F \subset \Delta^*, \#F < \infty} P(F))$ となる。しかし、 $p \in \Delta^*$ に対して $F = \{p\}$ とすれば $(\cap_{F \subset \Delta^*, \#F < \infty} P(F)) \subset (\cap_{\{p\} \subset \Delta^*} P(\{p\})) = \{x \in E : p(x) \geq 0, \forall p \in \langle P^* \rangle\} = P$ となつて $(\cap_{F \subset \Delta^*, \#F < \infty} P(F)) \subset P$ となる。故に、 $P = (\cap_{F \subset \Delta^*, \#F < \infty} P(F))$ となり、 $[(\cap_{F \subset \Delta^*, \#F < \infty} P(F)) \cap \bar{\Gamma}] \neq \emptyset$ より $(P \cap \bar{\Gamma}) \neq \emptyset$ となる。

$N^*(0)$ を原点0の弱 $\sigma(E, E^*)$ 凸平衡近傍系として、 $\bar{x} \in (P \cap \bar{\Gamma})$ とする。 $\bar{x} \in \bar{\Gamma}$ より $\forall V \in N^*(0), [(\bar{x} + V) \cap \Gamma] \neq \emptyset$ となつて、 $\forall V \in N^*(0), \exists x_V \in \Gamma, x_V \in (\bar{x} + V)$ となる。 $x_V \in \Gamma = \cup_{p \in \Delta^*} \varphi(p)$ より $\exists p_V \in \Delta^*, x_V \in \varphi(p_V)$ となる。ここで、 $V \prec V' \iff V' \subset V$ によって有向集合 $(N^*(0), \prec)$ を定義すると、 $(p_V, x_V)_{\prec}$

³⁵ここまでは Nikaido(1956b, 57b, 59) の証明も Florenzano(1983) の証明も同じであるが、これ以降に両者の違いが現れる。Florenzano(1983) の証明の部分については、後に触れる。

は順序 $\prec$ に沿ったネットとなる。 $\forall V \in N^*(0), \exists x_V \in \Gamma, x_V \in (\bar{x} + V)$ となっているので $x_V \rightarrow \bar{x}(\prec\uparrow)$ となる。更に、 Δ^* と $\bar{\Gamma}$ は各々 $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトと弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクトなので、ネット $(p_V, x_V)_{\prec}$ は収束部分ネットを持ち、それを単純化のために再び $(p_V, x_V)_{\prec}$ と記すと、 $(p_V, x_V) \rightarrow (\bar{\pi}, \bar{x}) \in \Delta^* \times \bar{\Gamma}(\prec\uparrow)$ となる。 $x_V \in \varphi(p_V)$ と $p_V \in \Delta^*$ より $(p_V, x_V) \in G_r(\varphi)$ なので $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in (cl_{\sigma(E^*, E) \times \sigma(E, E^*)}(G_r(\varphi))) (\subset \Delta^* \times \bar{\Gamma})$ となり、故に、 $\bar{x} \in \tilde{\varphi}(\bar{\pi})$ となる。すると、 $\bar{x} \in (P \cap \bar{\Gamma})$ より $\bar{x} \in (\tilde{\varphi}(\bar{\pi}) \cap P)$ となり、故に、 $\exists \bar{\pi} \in \Delta^*, (\bar{x} \in) (\tilde{\varphi}(\bar{\pi}) \cap P) \neq \emptyset$ となる。これが示すべき事であった。 $\square$

定理1では Γ の弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクト性を利用したが、一方上記の証明は、定理1の証明同様に、Nikaido(1957b,59) で用いられた手法に従ってはいるが、 Δ^* の $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E^*)$ -コンパクト性を利用した。その結果として $\bar{\pi} \in \Delta^*$ は依然として成立するが、 $\bar{x} \in (\varphi(\bar{\pi}) \cap P)$ は成立するとは限らない。 $int_{\tau}(P) \neq \emptyset$ の代わりに $(P \cap -P) \neq P$ を用いて Δ^* が $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E^*)$ -コンパクトとは限らない時には、 $(P \cap \bar{\Gamma}) \neq \emptyset$ は示せて、 $\exists x \in P, \forall V \in N^*(0), \exists p_V \in \Delta^*, (\varphi(p_V) \cap (x + V)) \neq \emptyset$ となる。 $x_V \in (\varphi(p_V) \cap (x + V)), \forall V \in N^*(0)$ とすると、 $x_V \rightarrow x$ とはなるが、 Δ^* が $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E^*)$ -コンパクトではないので、 $(p_V)_{V \in N^*(0)}$ は収束部分ネットを持つとは限らない。

そこで、 $\Delta_V = \{p \in (P(V))^* : p \cdot u = 1\} (\subset \Delta^*), \forall V \in N^*(0)$ とすると Δ_V は $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトで $V \supset V' \iff \Delta_V \subset \Delta_{V'}$ であり、 Δ^* は $\{\Delta_{V'} : V \in N^*(0)\}$ によって内側から近似されるが、 $V' \subset V \iff V' \prec V$ によって順序 $\prec$ を与えると、 $p_V \in \Delta_V, V \in N^*(0)$ によって $(\cup_{V \in N^*(0)} \Delta_{V'}) \subset \Delta^*$ におけるネット $(p_V)_{\prec}$ が得られても、 $\cup_{V \in N^*(0)} \Delta_{V'}$ や Δ^* が $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトとは限らないので、このネット $(p_V)_{\prec}$ は $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -極限を持つとは限らない。このために、 $u \in int_{\tau}(P)$ という仮定をして Δ^* を $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトにする事で、ネット $(p_V)_{\prec}$ から Δ^* の極限を持つような収束部分ネットを取り出せるようにしているのである。

有限次元のケースでは、単位球 $B = \{p \in R^n : \|p\| = 1\}$ のコンパクト性より、たとえ P が外側から P_V によって近似されるにしても、 $\|p_V\| = 1$ により

$p_V \rightarrow \bar{p}$ となる収束部分列があって $\|\bar{p}\| = 1$ となり、無限次元空間のケースとは異なって、このような $\bar{p}$ が存在するのである。

ところで、上の証明の $(P(F) \cap \bar{\Gamma}) \neq \emptyset$ から先の部分に、代わりに Florenzano(1983, p213) で用いられた方法を用いると次のようになる。集合族 $F = \{F : F \subset \Delta^-, \#F < \infty, (P(F) \cap \bar{\Gamma}) \neq \emptyset\}$ を考えて、 $F \prec F' \iff F \subset F'$ による順序 $\prec$ で有向集合 $(F, \prec)$ を与えると、 $\overline{x_F} \in (P(F) \cap \Psi), \beta(\overline{w_F}) \in \Delta^*$ を満たす $(\overline{x_F}, \beta(\overline{w_F}))_{\prec}$ はネットになる。 Δ^* と Ψ は各々 $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ -コンパクトと弱 $\sigma(E, E^*)$ -コンパクトなので $(\overline{x_F}, \beta(\overline{w_F}))_{\prec}$ は収束部分ネットを持ち、 $(\overline{x_F}, \beta(\overline{w_F})) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\pi}) \in \Psi \times \Delta^*$ となる。 $\overline{x_F} \in \varphi(\beta(\overline{w_F}))$ と $\beta(\overline{w_F}) \in \Delta^*$ により $(\beta(\overline{w_F}), \overline{x_F}) \in G_r(\varphi)$ なので $(\bar{\pi}, \bar{x}) \in cl_{\sigma(E^*, E) \times \sigma(E, E^*)}(G_r(\varphi))$ となって、 $\bar{x} \in \tilde{\varphi}(\bar{\pi})$ となる。 $\bar{x} \in P$ を示す必要があるので $\bar{x} \notin P$ とすると、 P の弱 $\sigma(E, E^*)$ -閉性と補題2によって $\exists q \in (P)^* \setminus \{0\}, q \cdot \bar{x} < 0 \leq q \cdot y \ \forall y \in P$ となる。 $q \in P^* \setminus \{0\}$ より $q \cdot u > 0$ となるので、 $q \in \Delta^*$ と出来る。 $\ast$ -弱 $\sigma(E^*, E)$ 位相の定義と $\overline{x_F} \rightarrow \bar{x} (\prec \uparrow)$ より $q \cdot \overline{x_F} \rightarrow q \cdot \bar{x} < 0 (\prec \uparrow)$ となるので、 $q \in F'$ となるような、順序 $\prec$ の意味で十分に大きい F' に対して $q \cdot \overline{x_{F''}} > 0$ となり、このような F' に対して $x_{F'} \notin P(F')$ となる。しかしながら、これは Δ^* におけるどのような有限集合 F に対しても $\overline{x_F} \in P(F)$ となる事に矛盾するので $\bar{x} \in P$ となり、 $\exists \bar{\pi} \in \Delta^*$ に対して $(\bar{x} \in) (\tilde{\varphi}(\bar{\pi}) \cap P) \neq \emptyset$ となる。この Florenzano(1983) の議論は集合族として $F = \{F : F \subset \Delta^*, \#F < \infty, (P(F) \cap \bar{\Gamma}) \neq \emptyset\}$ を利用するが、一方上記の定理2の証明では、原点 0 の凸平衡弱 $\sigma(E, E^*)$ -近傍系 $N^*(0)$ を利用している。

6 1980年代における無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の一般化: Yannelis(1985)や Mehta-Tarafdar(1987)

この節では、Florenzano(1983) 続いて、Yannelis(1985) や Mehta-Tarafdar(1987) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の一般化について議論す

る。Yannelis(1985) では、 E が局所凸線形位相空間で $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ となっていて、 $u \in \text{int}_\tau(P)$ を 1 つ固定して $C_u = \{p \in P^* : p(u) = 1\}$ として、

(ii)" E^* に $*$ -弱位相を用いて、 $\varphi : C_u \rightarrow E$ が $u.d.c.$ となる、

ケースを考える。³⁶ 勿論、 $(ii)' \rightarrow (ii)''$ である。 E が局所凸線形位相空間で $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ となっているケースで、 $\varphi : C_u \rightarrow E$ が (i), (ii)", (iv) を満たす時に、ある $\bar{p} \in C_u$ に対して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となるのを示したのが、Yannelis(1985) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の一般化である。その証明は連続選択子定理とチコノフの不動点定理を用いていて、有限次元による近似の手法にも基づいていない。ただし、この Yannelis(1985) の証明は n -次元ユークリッド空間でも勿論利用できるが、 $\varphi : C_u \rightarrow E$ の $u.d.c.$ 性が (ii) のように、 L を P^* の任意の有限次元の凸部分錐を L として対応 $\varphi : \langle P^* \rangle \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ を $u.d.c.$ としても、前節の定理の証明で利用した α, β, φ の合成写像 $\alpha \circ \varphi \circ \beta = \phi : S^m \rightarrow R^m$ が $u.d.c.$ となるとは限らないので、対応 $\varphi : \langle P^* \rangle \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ を $u.d.c.$ として Yannelis(1985) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の更なる一般化を試みようとしても、前節の定理の証明方法では証明できず、したがって、(ii)" となっているケースしか扱えない。ただし、Yannelis(1985) の証明では $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ としてその証明を進めているので、前節の定理の証明方法に沿って補題 6 を利用すれば、 $\text{int}_\tau(P) = \emptyset$ のケースへは一般化できる。実際、上で述べた Yannelis(1985) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題によって $[P(V) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となるが、これが 0 の任意の近傍 V について成立するので、 $P(V)$ の族 $\{P(V) : V \text{ は } 0 \text{ の近傍}\}$ を考えると近傍の性質よりこの族が Δ に対して再び有限交差性を満たす事になり、故に、 $[(\cap_{V \in N(0)} P(V)) \cap \Delta] \neq \emptyset$ となる。すると、補題 6(ii) より $(\cap_{V \in N(0)} P(V)) = P$ なので $(P \cap \Delta) \neq \emptyset$ となり、ある $\bar{p} \in \langle P(V)^* \rangle$ が存在して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となるからである。したがって、ヤネリス (1985) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題は $\text{int}_\tau(P) = \emptyset$ であっても P が補題 7 の条件である $(P \cap -P) \neq P$ を満たすケースでは成立す

³⁶ $u.d.c.$ については、補題 7 の前の上半連続性に関する脚注を参照。

るが、対応 $\varphi : \langle P^* \rangle \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が *u.d.c.* となるというケースまでは一般化できていない。

また、Yannelis(1985) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題は、更に、Mehta-Tarafdar(1987) によって、Yannelis(1985) と同様に、 E が局所凸線形位相空間で $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ となっていて、 $u \in \text{int}_\tau(P)$ を 1 つ固定して $C_u = \{p \in P^* : p(u) = 1\}$ として、

(ii)''' $\{\bar{q} \in C_u : \bar{q}(x) > 0 \ \forall x \in \varphi(\bar{p})\} \neq \emptyset$ となる $\bar{p} \in C_u$ に対して、ある $q \in C_u$ が存在して $\bar{p} \in \text{int}_{w^*}\{p \in C_u : q(x) > 0 \ \forall x \in \varphi(p)\}$ となる

ケースへ一般化された。³⁷そして、 $\varphi : C_u \rightarrow E$ が (i), (ii)''', (iv) を満たす時に、ある $\bar{p} \in C_u$ に対して $(\varphi(\bar{p}) \cap P) \neq \emptyset$ となる事を示した。Mehta-Tarafdar(1987) は (ii)'' $\rightarrow$ (ii)''' を示し、故に、Yannelis(1985) の結果を一般化している。この Mehta-Tarafdar(1987) の結果は彼らが利用した不動点定理を利用すれば n -次元ユークリッド空間でも成立するので、(ii)''' を (ii) のように、 L を P^* の任意の有限次元の凸部分錐を L として、対応 $\varphi : C_u \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ が $C_u \cap L$ 上で (ii)''' で用いた条件を満たすとしても、やはり、前節の定理の証明で利用した α, β, φ の合成写像 $\alpha \circ \varphi \circ \beta = \phi : S^m \rightarrow R^m$ が (ii)''' で用いた条件を満たすとは限らない。故に、対応 $\varphi : C_u \cap L \rightarrow E \setminus \{\emptyset\}$ を $C_u \cap L$ 上で (ii)''' で用いた条件を満たすとして Mehta-Tarafdar(1987) による無限次元財空間におけるゲール・二階堂の補題の更なる一般化を試みようとしても、前節の定理の証明方法では証明できず、したがって、(ii)''' となっているケースしか扱えないように思われる。また、Mehta-Tarafdar(1987) では $\text{int}_\tau(P) \neq \emptyset$ としていて、前節の定理の証明方法に沿うと、 $V' \subset V$ ならば $\text{int}_\tau(P(V')) \neq \emptyset$, $(P \subset) P(V') \subset P(V)$, $P(V)^* \subset P(V')^* \subset P^*$ であるが、 C_u に対して仮定した (ii)''' が、 $C_u(V) = \{p \in P(V)^* : p(u) = 1\}$ に対しても同様な条件を成立させると限らないので、Yannelis(1985) のケースのように $\text{int}_\tau(P) = \emptyset$ のケースへは一般化できないと思われる。

Aliprantis-Brwon(1983) は、無限次元財空間モデルにおいて超過需要関数を考えて、そのモデルにける市場均衡の存在問題を扱った。 (E, E') をリース双対

³⁷Urai(2000) でもこの結果の一般化が試みられている。

系として、価格単体 Π を $\tilde{E}_+$ の非空凸 $*$ -弱コンパクト集合で、 Π の強正な要素の集合 $S = \{p \in \Pi : p \gg 0\}$ は Π で $*$ -弱稠密であり、 S によって生成された錐 $= \cup_{\lambda \geq 0} \lambda S$ は $\tilde{E}_+$ で $*$ -弱稠密であるという条件が満たすとする。そして、 $(\tilde{E}_+)$ の凸部分集合 $D (\subset \Pi)$ 上で定義されて E へ移す超過需要関数 $\varphi : D \rightarrow E$ が、(1) : D は Π における $*$ -弱稠密部分集合 (稠密条件)、(2) : D の点を全て連続にするような E 上の局所凸線形位相 τ が存在し、 $\varphi : (D, *-\text{弱}) \rightarrow (E, \tau)$ は連続 (連続条件)、(3) : もしも有向点列 $\{p^\alpha\} \subset D$ が $p^\alpha \rightarrow p (*-\text{弱で}) \in \Pi \setminus D$ ならば、ある $q \in D$ が存在して、 $\limsup_{\alpha \uparrow} q \cdot \varphi(p^\alpha) > 0$ となる (境界条件)、(4) : $p \in D$ ならば $p \cdot \varphi(p) = 0$ (ワルラス法則)、満たすならば、 $\varphi(p) \leq 0$ となる均衡価格の集合が非空で $*$ -弱コンパクトである事を示している。³⁸

7 終わりに

以上で、Nikaido(1957b, p.4, 注(2))において、そこで用いたノルム空間のケースの結果が用意に一般的線形位相空間にまでも拡張できると述べている事に基づいて、Nikaido(1959)で示された局所凸線形位相空間のケースへのゲール・二階堂の補題の一般化の凸値の特殊例の簡潔な証明と若干の一般化、そして、その後の無限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題の発展との関連を、終えた事になる。Nikaido(1959)が日本の数学雑誌に掲載された事と対応の非循環値性 (Acyclic-valued) を利用した証明が複雑であった事によって、その後の無限次元財空間における競争均衡の存在問題において全く触れられなかった。少なくとも、本稿のように、対応の凸値性を利用して、Nikaido(1957b)のノルム空間で行ったのと同様な有限次元のゲール・二階堂の補題による近似という簡明な証明を用いた結果が独立した論文として作成されて専門雑誌に掲載されていれば、Bewley(1972)以降に一般均衡理論の1つの大きな話題となった無限次元財空間における競争均衡の存在問題に対して、著しい貢献をしていたと考えら

³⁸アリプランティス・ブラウン (1983, p.198, 定理 3.6) であり、浦井 (2000) でもこの結果の一般化が試みられている。

れる。その結果として、無限次元財空間における競争均衡の存在問題の先駆的な研究として、Debreu(1954)と共に、言及される事となったと思われる。³⁹

ただし、Bewley(1956b, 57b, 59)では、それらで扱った超過供給対応を満たすような無限次元財空間モデルの例を1つも与えていないので、Debreu(1954)のように、例にして l_∞ をその財空間とする無限期間純粋交換経済モデルを考えて、この経済がどのような条件を満たす時に、その超過供給(需要)対応がNikaido(1956b, 57b, 59)で仮定した条件を満たすのかといった議論も入れておいてよかったと考えられる。⁴⁰ 実際、Gale(1955)、Nikaido(1956a)、そして、Debreu(1959)は、与えられた経済モデルから導出された超過供給対応が、ゲール・二階堂の補題の条件を満たすので、その結果として競争均衡が存在するという議論の流れになっていて、ゲール・二階堂の補題それ自身を分析の対象としている訳ではないのである。そして、 l_∞ を財空間とする経済モデルから得られた超過供給対応が前節の定理の仮定を満たさない場合には、Florenzano(1983)での議論に基づいて、Nikaido(1956b, 57b, 59)における無限次元のゲール・二階堂の補題で用いる線形位相を、補題1から補題6までが依然として成立するように上手く選択すれば、無限次元のゲール・二階堂の補題が上記のように証明できるので、そのケースの結果を l_∞ が財空間となっているケースの超過供給

³⁹Bewley(1972)が用いた有限次元空間の競争均衡の存在定理に基づく有限次元空間の競争均衡列による近似という証明と同じように、有限次元空間のゲール・二階堂の補題に基づく有限次元空間の競争均衡から成る(有向)点列による近似という手法を用いているので、Bewley(1972)の証明の先駆けと考える事もできる。また、角谷の不動点定理をユークリッド空間から局所凸線形位相空間へ一般化したファン・グリックスバーグの不動点定理の証明では、有限次元部分空間族による元空間の近似を考えてその有限次元部分空間には角谷の不動点定理を用いて不動点の(有向)点列を構成し、この列の極限が元空間の不動点であるという事を示している。これらの議論には、有限次元部分空間には角谷の不動点定理を用いて不動点の列を構成するか、有限次元部分空間にアロー・ドブリュー・マッケンジーの競争均衡の存在定理を用いて競争均衡の列を構成するか、または、有限次元部分空間にはゲール・二階堂の補題を用いて競争均衡の列を構成するか、といった共通点がある。故に、不動点定理に関して言えば、ファン・グリックスバーグの無限次元の不動点定理よりもブラウワーや角谷の有限次元の不動点定理の方が本質的であるという解釈も可能であり、二階堂先生もこのような意見を持っていたという事である。

⁴⁰内点条件が成立しないMas-Colell(1975)やJones(1984)のような製品差別化のケースへの適用可能性も興味深いと思われる。

対応に対して適用すばいいのである。⁴¹

いずれにしても、経済モデルの例に触れてはいないとはいえ、有限次元のユークリッド空間における競争均衡の存在が示された直ぐ後に無限次元空間において超過供給対応を想定し、それに対してゲール・二階堂の補題を定式化してその証明を行ったという点で、二階堂 (1956b、57b、59) の貢献や意義は何ら損なわれないのである。

参考文献

- [1] Aliprantis, C.D., and K. Border. (2007): *Infinite Dimensional Analysis*, 3rd ed. (Springer-Verlag, New York)
- [2] —————, and D.J. Brown. (1983): “Equilibria in markets with a Riesz space of commodities.” *Journal of Mathematical Economics* 11, p.189 -207.
- [3] —————, and O. Burkinshaw. (1987a): *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*. (Springer-Verlag, New York)
- [4] Aliprantis, C.D., and O. Burkinshaw. (1985): *Positive Operators*. (Academic Press, New York)
- [5] —————. (2003): *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*. (American Mathematical Society)

⁴¹ l_∞ を財空間とする経済モデルから得られた超過供給対応が前節の定理の仮定を満たさない場合には、Florenzano (1983) の議論が参考になる。それに基づけば、Nikaido (1956b、57b、59) における無限次元のゲール・二階堂の補題で用いる線形位相を、補題 1 から補題 6 までが依然として成立するように上手く選択すれば、無限次元のゲール・二階堂の補題が本稿のように証明できる。そこで、このケースの結果を l_∞ が財空間となっているケースの超過供給対応に対して適用すばいい。もちろん、この時の線形位相の選択において、前節の定理の証明において利用した合成写像 $\phi (= \alpha \circ \varphi \circ \beta) : S^m \rightarrow R^m$ に対して、有限次元のゲール・二階堂の補題の条件の成立を保証するように上手く行う必要がある。詳しくは久保田 (2007) 参照。

- [6] Arrow, K, J and G, Debreu.(1954):“Existence of an equilibrium for a competitive economy.” *Econometrica* 22, p. 265 - 290.
- [7] Begle, E.G.(1950):“A fixed point theorem.” *Annals of Mathematics* 51, p. 544 - 50.
- [8] Bewley, T.(1969,91):“A theorem on the existence of competitive equilibria in a market with a finite number of agents and whose commodity space is L_∞ .” in *Equilibrium Theory with Infinitely Many Commodities*. ed. by M. Ali Kahn and N. Yannelis. (Springer -Verlag, New York)
- [9] ———.(1972):“Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities.” *Journal of Economic Theory* 4, pp. 514 - 540.
- [10] Bojan, P.(1974):“A generalization of theorem on the existence of competitive economic equilibrium in the case of infinitely many commodities.” *Mathematica Balkanica* 4, pp.491 - 4.
- [11] Border, K.(1985):*Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. (Cambridge University Press, Oxford)
- [12] Cassel, G.(1924):*The Theory of Social Economy*. (Harcourt Bruce, New York)(邦訳『社会経済学原論』大野信三訳、岩波書店、1925年)
- [13] Debreu, G.(1952):“A social equilibrium existence theorem.” *Proceedings of National Academy of Science* 38, p. 886 - 93.
- [14] ———.(1954):“Valuation equilibrium and Pareto optimal.” *Proceedings of National Academy of Science* 40, p. 588 - 94.
- [15] ———.(1956):“Market Equilibrium.” *Proceedings of National Academy of Science* 42, pp. 876 - 8.
- [16] ———.(1959):*Theory of Value*. (Wiley, New York) (邦訳：『価値の理論』(丸山徹訳、東洋経済新報社、1977)

- [17] Dunford, N., and J. Schwartz.(1958):*Linear Operators Part 1:General Theory*. (Interscience, New York)
- [18] Eilenberg, S. and D.Montgomery.(1946):“Fixed point theorems for multi-valued transformations.” *American Journal of Mathematics* 68, p.214 - 22
- [19] Elbarkoky, R.A.(1977):“Existence of equilibrium in economics with Banach commodity space.” *Akad. Nauk.Azeraijan SSR Dokl* 33, p.8 - 12
- [20] Fan, K.(1952):“Fixed point and minimax theorem in locally convex topological linear spaces.” *Proceedings in the American Mathematical Society* 38, p.121 - 6.
- [21] Florenzano, M.(1983):“On the existence of equilibria in economies with an infinite dimensional commodity space.” *Journal of Mathematical Economics* 12, pp. 207 - 19.
- [22] Gale, D.(1955):“The law of supply and demand.” *Mathematica Scandinavica* 3, pp.155 - 69.
- [23] Glicksberg, K.(1952):“A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points.” *Proceedings in the American Mathematical Society* 38, p.170 - 4.
- [24] Jones, L.(1984):“A competitive model of commodity differentiation.” *Econometrica* 52, p.507 - 30.
- [25] ———.(1987a):“Special problem arising in the study of economies with infinitely many commodities.” in *Models of Economic Dynamics*. ed. by H. Sonnenschein. p. 184 - 205. (Springer-Verlag, New York), p. 819 - 841.
- [26] ———.(1987b):“Existence of equilibria with infinitely many commodities, Banach lattice reconsidered.” *Journal of Mathematical Economics* 16, p. 89 - 104.

- [27] ———.(1990):“Equilibrium in competitive,infinite dimensional settings.” Chapter 7 in *Advances in Economic Theory* ed. by J. Laffont. (Cambridge University Press, New York)
- [28] Kakutani,S.(1941):“A generalization of Brouwer’s fixed point theorem.” *Duke Mathematical Journal* 8, pp.457 - 9.
- [29] Kubota, H.(2007):.“Gale-Nikaido’s lemma in Infinite Dimensional Spaces: Early Attempts by Prof. Nikaido.” *Economic Journal of Hokkaido University* Vol.36 pp. 1 - 22.
- [30] 久保田肇.(2006):“Nikaido(1956,67,59) による無限次元財空間モデルのゲール・二階堂・ドブリューの補題について.”彦根論叢(滋賀大学経済学部) 第360号 pp.1 - 23.
- [31] ———.(2007):“二階堂による無限次元財空間モデルのゲール・二階堂の補題と競争均衡存在証明への適用.”*経済学研究(北海道大学)* 第56号第3巻 pp.65 - 93.
- [32] ———.(2012):“古典的有限次元財空間経済モデルにおける競争均衡の存在定理について：Nikaido(1956,57) を中心にして.”北海道大学大学院経済学研究科ディスカッション・ペーパーシリーズ.
- [33] Kuhn, H. W.(1956):“A Note on ‘The law of Supply and Demand’.” *Mathematica Scandinavica* 4, pp. 143 - 6.
- [34] McKenzie, L. W.(1954):“On equilibrium in Graham’s model of world trade and other competitive systems.” *Econometrica* 22, pp. 147 - 161.
- [35] Magill, M.(1981):“An equilibrium existence theorem.” *Journal of Mathematical Analysis And Applications* 84, p.162 - 9.
- [36] Mas-Colell, A.(1975):“A model of equilibrium with differentiated commodities.” *Journal of Mathematical Economics* 2, p. 236 - 96.

- [37] ———.(1986):“The price existence problem in topological vector lattices.” *Econometrica* 54, p.1039 - 54.
- [38] ———, and W. R. Zame.(1989):“Equilibrium theory in infinite dimensional space.” Chapter 34 in *Handbook of Mathematical Economics Vol. 4*. ed. by W. Hildenbrand and H. Sonnenschein.
- [39] Mehta,G. and E,Tarafdar.(1987):“Inifinite-dimensional Gale-Nikaido-Debreu theorem and a fixed point theorem of Tarafdar.” *Journal of Mathematical Economics* 41, pp.333 - 9.
- [40] Nash,J.(1950):“Equilibrium states in N-person games.” *Proceedings of National Academy of Science of the U.S.A.* 36, pp.876 - 8
- [41] Nash,J.(1951):“Non-cooperative games.” *Annals of Mathematics* 54, p.289 - 95.
- [42] Nikaido,H.(1956a):“On the classical multilateral exchange problem.” *Metroeconomica* 3, pp.135 - 45.
- [43] ———.(1956b):“On the existence of competitive equilibrium for infinitely many commodities.” Tech. Report, No.34, Dept. of Econ., Stanford University.
- [44] ———.(1957a):“A Supplementary note to ‘On the classical multilateral exchange problem.’” *Metroeconomica* 9, p.209 - 10
- [45] ———.(1957b):“Existence of equilibrium based on Walras’ law.” ISER Discussion Paper No.2, Institute of Socail and Economic Reserch, Osaka University, Japan.
- [46] ———.(1959):“Coincidence and some systems of inequalities.” *Journal of Mathematical Society of Japan* 11(4), pp.354 - 73.

- [47] ———.(1962):“A Technical note on the existence proof for competitive equilibrium.” *Economic Studies Quarterly* 8(1), pp.54 - 58.
- [48] ———.(1968):*Convex Structure and Economic Theory*. (Academic Press, New York)
- [49] ———.(1987):“Fixed point theorems.” in *The New Parglave:A Dictionary of Economics* Vol. 2. ed. by J. Eatwell and et. al. pp.386-7. (Macmillan, New York)
- [50] 二階堂副包.(1970)：“ワルラスの一般均衡体系 -その斉合性と社会経済像-”
一橋論叢 第63巻第4号
- [51] ———.(1980):“数理経済学 ” 『経済学大辞典 第2版』 第3巻
pp.660 - 9 東洋経済新報社
- [52] Nishimura,K.(2008):“Hukukane Nikaido” in *The New Parglave:A Dictionary of Economics, 2nd ed.* Vol. 6. ed. by Steven Durlauf and Lawrence Blume. pp.52-4, (Macmillan, New York)
- [53] Peleg, B. and M. E. Yaari.(1970):“Markets with countably many commodities.” *International Economic Review* 11, pp. 369 - 377.
- [54] Urai, K.(2000):“Fixed point theorems and the existence of economic equilibria baed on conditions for local directions of mappings.” *Advances in Mathematical Economics* 2, pp.87 - 118.
- [55] ———.(2010):*Fixed Points and Economic Equilibria*. (World Scientific, New Jersey)
- [56] Yannelis, N.(1985):“On a market equilibrium theorem with an infinite number of commodities.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 108, pp.595 - 9.

- [57] ———, and N.D.Prabhakar(1983):“Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces.” *Journal of Mathematical Theory* 12, p.233 - 45.
- [58] Wald, A.(1935,68):“On the unique non-negative solvability of the new production equation(part 1).” in *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology*. ed. by Baumol and Goldfield(LSE, London, 1968)
- [59] ———.(1936,68):“On the production equations of economic value theory(Part 2).” in *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology*. ed. by Baumol and Goldfield(LSE 1968)
- [60] Walras, L.(1874-77):*Elements d’economie politique pure ou Theorie de la richesse sociale*. (Rouge, Lausanne) (*Elements of Pure Theory of social Wealth*. translated by W. Jaffe(Allen and Unwin, London, 1954)、邦訳『純粹経済学要論』 久武雅夫訳 岩波書店 1983 年)
- [61] 安井琢磨、二階堂副包 (1958) :『経済理論における数学的方法-均衡解の存在問題-』 (< 岩波講座現代応用数学 >、岩波書店)
- [62] Zame, W. R.(1987):“Competitive equilibrium in production economies with an infinite dimensional commodity space.” *Econometrica* 55, p. 1075 - 1108.