



Title	積層複合円筒殻の振動に関する研究
Author(s)	太田, 佳樹
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第2909号
Issue Date	1991-03-25
DOI	https://doi.org/10.11501/3052793
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51143
Type	doctoral thesis
File Information	000000237925.pdf



積層複合円筒殻の振動

に関する研究

太田佳樹

目次

主な記号

第1章 緒論

1.1	本研究の目的と意義	1
1.2	積層複合円筒殻の研究概要	4
1.3	各章の概要	7

第2章 積層複合円筒殻の定式化

2.1	まえがき	9
2.2	基礎理論	11
2.2.1	積層複合円筒殻の形状と座標系	11
2.2.2	一次せん断変形理論	14
2.2.3	ラミナの構成方程式	21
2.2.4	積層複合円筒殻の剛性	23
2.3	積層複合円筒殻に関する基礎式	26
2.3.1	エネルギー評価	26
2.3.2	変分原理による運動方程式の導出	28
2.4	古典殻理論に基づく定式化	30
2.5	積層複合円筒殻の各種剛性	33

第3章 クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動

3.1	まえがき	40
3.2	伝達マトリックス法	44
3.2.1	基礎方程式	44
3.2.2	伝達マトリックス	45
3.2.3	振動数方程式の誘導	50
3.2.4	古典殻理論に基づく解析	51
3.3	固有振動数と振動モード	56
3.3.1	数値計算精度の検討	56
3.3.2	支持条件の影響	58
3.3.3	ラミナの積層形態の影響	65
3.3.4	ラミナの材料特性の影響	68
3.3.5	理論の違いによる固有振動数の比較	72
3.4	本章のまとめ	78

第4章 アングルプライ積層複合円筒殻の自由振動

4.1	まえがき	80
4.2	リッツ法	84
4.2.1	基礎式	84
4.2.2	変位関数	86
4.2.3	振動数方程式の誘導	88
4.2.4	古典殻理論に基づく解析	91
4.3	固有振動数と振動モード	96
4.3.1	数値計算精度の検討	96
4.3.2	支持条件の影響	103
4.3.3	積層数と殻の厚さの影響	122
4.3.4	理論の違いによる固有振動数の比較	131
4.4	各種積層複合円筒殻の固有振動数	136
4.5	本章のまとめ	143

七五〇号

第 5 章 結 論 146

謝 辞 149

参 考 文 献 150

主な記号

R	: 殻の回転軸から中央面までの距離 (半径)
L, l	: 殻の長さ, 長さ比 (L/R)
H, h	: 殻の厚さ, 厚さ比 (H/R)
(x, θ, z)	: 円筒座標
(ξ, θ, η)	: 無次元円筒座標
α, α_k	: ラミナの繊維配向角
N	: ラミナの積層数
u, v, w	: 殻の任意の点における x, θ, z 方向変位
u_0, v_0, w_0	: 殻の中央面における x, θ, z 方向変位
ψ_x, ψ_θ	: 殻の中央面における θ, x 軸まわりの回転角
E_1, E_2	: ラミナの縦弾性係数
G_{12}, G_{23}, G_{31}	: ラミナの横弾性係数
ν_{12}, ν_{21}	: ラミナのポアソン比
V_f	: ラミナの繊維体積含有率
\bar{Q}_{ij}	: ラミナの弾性係数
N_x, N_θ	: 殻の垂直力
$N_{x\theta}, N_{\theta x}$: 殻の面内せん断力
$Q_{\theta z}, Q_{zx}$: 殻の面外せん断力
M_x, M_θ	: 殻の曲げモーメント
$M_{x\theta}, M_{\theta x}$: 殻のねじりモーメント
T_x, S_x	: 等価せん断力

- [A_{ij}] : 伸び剛性マトリックス
- [B_{ij}], [C_{ij}] : 伸び-曲げカップリング剛性マトリックス
- [D_{ij}] : 曲げ剛性マトリックス
- [E_{ij}] : 面外せん断剛性マトリックス
- [$T(\xi, \xi_0)$] : 殻の伝達マトリックス
- { $Z_f(\xi)$ }, { $Z_c(\xi)$ } : 殻の状態量ベクトル
- [U_f], [U_c] : 係数マトリックス
- [I] : 単位マトリックス
- [K_f], [K_c] : 剛性マトリックス
- [M_f], [M_c] : 質量マトリックス
- $\bar{I}_i, \bar{I}_i, I_i$: 殻の慣性量
- U : ひずみエネルギー
- T : 運動エネルギー
- n : 円周方向波数
- $X_{ij}(\xi)$: 軸方向試験関数
- $Y_i(\theta)$: 円周方向試験関数
- λ : 無次元振動数パラメータ ($\lambda^2 = \rho_0 R^2 \omega^2 / E_0$)
- E_0 : 無次元化の際に基準となる縦弾性係数
- ρ_0 : 無次元化の際に基準となる密度
- ω : 円振動数 (rad/sec)
- κ^2 : せん断修正係数

第1章 緒 論

1.1 本研究の目的と意義

近年、社会の要求に対応した機械技術の進歩には目を見張るものがあり、航空機から自動車、ロボット、情報機器に至る産業の各分野において機械の高性能化、高速化が急速に進んでいる。一方、省資源、省エネルギーあるいは生産コストの低減のために機械構造の軽量化が図られ、その結果、構造の剛性低下による振動・騒音など多くの問題が生じている。そこで、今日、これらの問題解決のための技術開発が精力的に進められており、その中でも特に構造物の振動制御や最適設計、並びに新しい構造材料の開発に多くの関心が寄せられている。そして、このような機械の高性能化や軽量化を実現するために開発された材料が、現在様々な分野で関心が寄せられている“軽くて強い”複合材料である。

この複合材料は従来から用いられている材料を適切に組み合わせ、所望の力学的特性を持たせるように設計できる新しい材料であり、その最も代表的なものにGFRPやCFRPなどの繊維強化プラスチック(Fiber Reinforced Plastic: 以下、FRPと称する)を挙げることができる。これはガラスやカーボンなどの長い繊維を強化材として一方向に配列し、そのまわりをエポキシなどのプラスチック系樹脂(母材)で固めたものである。このFRPを構造材料として用いた場合の第一の利点は、通常温度域において従来の金属材料に比べて比強度(強度/密度)と比剛性(剛性/密度)が極めて高いため、構造部材の大幅な軽量化が可能となることである。そして、第

二はFRPが持ち合わせている異方性をうまく利用して、FRPの材料特性や積層構成を適切に選ぶことにより、構造部材に使用目的に適した力学的特性を与えることが可能な点にある。このような理由により、構造の軽量化が直接、性能向上につながる航空・宇宙や自動車などの分野においてFRPの機械構造物への適用が多く見受けられるようになってきている。しかしながら、FRPは強い異方性をもつ材料であるために、それらを用いた構造の静的・動的特性は従来の金属材料を用いた場合と大きく異なる。それゆえ、FRP積層構造物の静的・動的特性を開発・設計の段階から正確に把握することが重要となっている。さらに、これまでのFRPの構造材料としての適用においては、先に述べた第一の特徴を利用した構造物の軽量化を主たる目的としたものが圧倒的に多く、FRPの異方性をうまく活かした適用例は航空機における前進翼やローターブレード、そして宇宙構造物などに見られる程度である。しかしながら、今後、これまで以上の厳しい高性能化、軽量化などの要求に対応するため、複合材料のもつ異方性を有効に活かした構造の最適設計が望まれる。したがって、構造の最適設計を実現するため、構造物の支持条件やFRPラミナの積層数、積層順序、繊維の角度などの各種パラメータがFRP積層構造物の力学的特性に与える影響を正確に把握することが必要となってきている。

本論文では、このような状況を踏まえて、人工衛星のスラストチューブや各種圧力容器などの基本構造部材として多く用いられてきている積層複合円筒殻に着目し、理論的に解析すると共にその解析結果に基づく数値計算を実施し、様々な支持条件、積層形態を有する殻について固有振動数と振動モードを求めて各種パラメータが積層複合円筒殻の振動特性に与える影響を定量的に明らかにする。そのため、まず殻を構成しているFRPラミナ(単層板)の繊維方向が殻の軸、円周方向と一致していて、最も基本的な積層形態と考えら

れるクロスプライ積層複合円筒殻の自由振動を一次せん断変形理論に基づいて理論的に解析し、殻の支持条件やラミナの積層形態の違いがその振動特性に与える影響を調べると共に、クロスプライ積層複合円筒殻に対する古典殻理論の適用範囲を明らかにする。続いて主にフィラメント・ワインディング法によって成形されるアングルプライ積層複合円筒殻や、面内擬似等方性と考えられる積層形態を有する積層複合円筒殻に着目し、殻の厚さ、支持条件およびラミナの積層形態の違いが振動特性に及ぼす影響を定量的に明らかにすると共に、殻の基本振動数を最大(最適)にする最適な積層形態について検討する。

今後、益々厳しくなる機械構造物への要求に対応するため、構造材料としての複合材料の果たす役割は益々大きくなっていくと考えられ、本研究で得られた研究成果が構造設計における設計資料として十分価値を有すると同時に、積層構造物の最適設計の実現のために有用な指針を与えるものであると確信する。

1.2 積層複合円筒殻の研究概要

最初の繊維強化複合材料は1942年に開発されたガラス繊維ポリエステルであるが、複合材料が構造材料として実質的に用いられたのはカーボン繊維が開発された1970年以降である。したがって、積層複合円筒殻に関する研究に関心が寄せられたのもこの頃であり、Kapania¹は今日までの論文の中からおよそ150篇の文献を紹介している。以下において、これまでに発表された研究のうち、本研究に関連が深いと判断されるもののいくつかを紹介する。

クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動に関しては、これまでにいくつかの研究がなされているが、その基礎となる研究は異なる等方性材料を積層した複合円筒殻の自由振動に関する研究^{2~5}であり、FRPラミナから構成される積層複合円筒殻の振動解析を初めて扱ったのはDong⁶である。Dongは直交異方性円筒殻(クロスプライ積層複合円筒殻)の自由振動についてDonnell型の古典殻理論を用いた解析によって殻の形状の振動特性に与える影響を示した。また、Bert⁷やStavskyとLoewy⁸は両端単純支持されたクロスプライ積層複合円筒殻の自由振動についてDonnellとLoveの両殻理論から求まる固有振動数の比較を行っており、それと同時にBertはアングルプライ積層円筒殻についても近似的に固有振動数を求めている。その後、DongとTso⁹は積層複合円筒殻においてはせん断剛性が面内の伸び剛性や曲げ剛性に比べて低下するとして、殻の厚さ方向のせん断変形を考慮するために、面内変位を一次関数で展開する一次せん断変形理論を用いて固有振動数を求めると共に、三次元弾性論¹⁰や古典殻理論から求まる固有振動数との比較を行っている。また、WhitneyとSun^{12~14}は殻の厚さ方向のせん断変形だけでなく、厚さ方向の伸び変形も考慮して解析を行っており、JonesとMorgan¹⁵はクロスプライ逆対称積層複合円筒殻の曲げ振動について、ラミナの積層数が少な

い場合にはその基本振動数が低下することを指摘している。クロスプライ積層複合円筒殻の動的安定性に関しては、GreenbergとStavsky^{16, 17}が面内圧縮荷重の固有振動数に与える影響を調べている。さらに、ReddyとLiu¹⁹, KhdeirとReddy²⁰は殻の面内変位を三次曲線で展開する高次せん断変形理論を積層複合偏平殻に適用して、高次せん断変形理論、一次せん断変形理論¹⁸および古典殻理論から求まる静たわみや固有振動数について比較、検討を行っている。このように、クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動に関しては比較的多くの研究が行われているが、これらのほとんどは殻の両端が単純支持された場合に限られており、その他の支持条件を有する積層複合円筒殻に関する研究は見当たらない。

ついで、アングルプライ積層複合円筒殻の自由振動に関しては、理論解析が複雑となるため、クロスプライ積層の場合ほど研究されてない。植村²¹は振動モードを仮定して近似的に基本振動数を求めており、GreenbergとStavsky²²はLoveの第一近似理論に基づいて複素有限フーリエ変換を用いてアングルプライ積層複合円筒殻の固有振動数を求め、積層形態(繊維の角度)の適切な選択によって基本振動数が高めることができることを指摘している。それに対して小林と長島²³は殻が非常に薄く、FRPラミナの積層数が少ない場合には殻の基本振動数が大幅に低下する場合もあると報告している。また、SheinmanとGreif²⁴, SheinmanとWeissman²⁵は有限要素法(FEM)を用いて円周方向の変位関数にフーリエ級数を用いた場合の級数の単純化を検討している。さらに、GreenbergとStavsky²⁶は殻の動的安定性を議論しており、Soldatos²⁷は両端単純支持された逆対称積層円筒パネルを取扱っている。このように、アングルプライ積層複合円筒殻に関する研究についても、そのほとんどのものは殻が両端単純支持されている場合や、取扱いが簡単となる逆対称な積層構成を有する場合に限られており、実際の積層複合円筒殻において多く

見られる対称積層の複合円筒殻に関する研究はほとんどない。

さらに、積層複合円筒殻の応答を解析したものとしては、両端単純支持されたクロスプライ積層複合円筒殻の過渡応答を扱った Cederbaum と Heller²⁸, Elishakoff と Cederbaum²⁹ および Reddy と Khdeir³⁰ の研究がある。なお、クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動^{31, 32}に関する解析や積層複合円筒殻、円筒パネルの非線形振動問題に関するいくつかの研究^{33~38}が行われている。

以上から明らかなように、これまでの積層複合円筒殻の振動に関する研究においては、そのほとんどが殻が両端単純支持された場合や逆対称な積層構成を有する場合を扱ったものに限られており、そのほかの支持条件、積層形態を有する積層複合円筒殻の振動特性に関する研究が十分に行われているとはいえない。

1.3 各章の概要

本論文は5つの章から構成されており、以下に各章の概要を具体的に述べる。

第2章では基礎理論に基づいて積層複合円筒殻の定式化を行い、第3章、第4章の解析において用いる基礎方程式を誘導する。はじめに、殻の厚さ方向のせん断変形を考慮した一次せん断変形理論を用いて殻の変形を記述し、異方性弾性論と積層理論に基づいて殻の構成要素となる各FRPラミナの弾性係数と積層複合円筒殻の合応力、合モーメントおよび各種剛性を求めると共に、殻の各種剛性の積層形態の違いによる変化を検討する。次にこれらの基礎式を用いて殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを解析的に評価し、これらより求まるラグランジュ関数に変分原理を適用して、積層複合円筒殻に関する運動方程式と境界条件を導出する。また、積層複合円筒殻に対する古典殻理論の適用限界を明らかにするため、古典殻理論に基づく同様な定式化も行っている。

第3章では殻を構成している各ラミナの繊維方向が殻の軸方向、あるいは円周方向と一致しているクロスプライ積層複合円筒殻の自由振動問題を伝達マトリックス法を用いて解析する。この解析においては第2章で誘導した基礎方程式の解の変数分離を行った後、殻の軸方向の伝達マトリックスを導入して基礎方程式を伝達マトリックスに関するマトリックス形一階常微分方程式に書き直す。伝達マトリックスはこれを数値積分することによって求められ、殻の支持条件を適用することによってクロスプライ積層複合円筒殻に関する振動数方程式が導出される。そして、この解析結果に基づいて数値計算を実施して殻の固有振動数と振動モードを求め、殻の支持条件やラミナの積層構成の違いが振動特性に与える影響を明らかにす

る。さらに、古典殻理論および近似一次せん断変形理論に基づく同様な解析、並びに数値計算を実施してクロスプライ積層円筒殻に対する各理論の適用範囲を示している。

第4章においては、主に圧力容器等に用いられているアングルプライ積層複合円筒殻や、面内擬似等方性と考えられる積層形態を有する積層複合円筒殻の自由振動問題について、エネルギー法の一つであるリッツ法を用いて解析する。このために、殻の変位を近似する試験関数として、殻の両端での幾何学的境界条件を満足すべき級数(軸方向)とフーリエ級数(円周方向)を導入する。この変位関数はパラメータの指定によってどのような幾何学的境界条件も満足させることが可能であり、これにより殻が任意の幾何学的境界条件を有する場合に対して本解析法の適用が可能となる。次に第2章で誘導した積層複合円筒殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを用いて殻のラグランジュ関数を求め、これにエネルギーの停留原理を適用することによって積層複合円筒殻に関する振動数方程式を誘導する。そして、この解析結果に基づいて数値計算を実施して様々な支持条件や積層形態を有する積層複合円筒殻の固有振動数と振動モードを求め、殻の支持条件や積層形態の違いが振動特性に及ぼす影響を定量的に明らかにすると共に、積層複合円筒殻の基本振動数の最大化(最適化)のための最適な積層形態について検討する。

第5章は結論であり、本論文において得られた研究成果を取りまとめている。

第2章 積層複合円筒殻の定式化

2.1 ま え が き

本論文で取扱う積層複合円筒殻とは、複合材料の一つであるFRPラミナ(単層板)を何枚か積層して成形される円筒殻を指しており、これらは炭素繊維が普及し始めた1970年代以来、人工衛星のスラストチューブや各種圧力容器などの基本構造部材として広く用いられている。また、ラミナの材料であるFRPは連続した長い繊維を強化材として一方向に配列し、そのまわりをプラスチック系の母材(マトリックス)で固めたもので、近年多くの関心が寄せられている複合材料の一つである。そして、現在、繊維強化材には主にガラス、ボロン、グラファイト繊維等が用いられており、樹脂(母材)には熱硬化性樹脂のポリエステル、エポキシ等や熱可塑性樹脂のポリアラミド、ポリカーボネート等が使われている。そして、このFRPラミナは強い異方性をもっているため、それから構成される積層複合円筒殻の静的・動的特性は従来の金属材料(等方性材料)の場合とは明らかに異なる。したがって、積層複合円筒殻の振動特性を明らかにすることは工学的に重要となってきた。

そこで、本論文ではこの積層複合円筒殻の振動特性を明らかにするために、代表的な積層構成を有する複合円筒殻について理論的に解析すると共に、数値計算を実施してその固有振動数や振動モードを求め、積層複合円筒殻の各種パラメータがその振動特性に与える影響を明らかにする。そのために、本章では基礎理論に基づいて積層複合円筒殻の定式化を行い、次章以降の解析において用いる積層

複合円筒殻に関する基礎式を誘導する。

はじめに、積層複合円筒殻を構成する各ラミナ間のすべりや殻全体の変形に対していくつかの仮定を適用し、積層複合円筒殻を従来の殻理論の適用が可能となる異方単層円筒殻にモデル化する。FRPラミナから構成される積層複合円筒殻においては、殻のせん断剛性が面内の伸び剛性や曲げ剛性に比べて低くなるために、本論文では殻の厚さ方向(以下では面外方向と称する)のせん断変形を考慮した一次せん断変形理論に基づいて殻の変形を記述する。そして、殻を構成する各ラミナの巨視的な材料定数(ラミナ全体としての繊維方向の縦弾性係数、横弾性係数、ポアソン比等)を用いて、異方弾性論より各ラミナの弾性係数を求め、積層理論に基づいて殻の伸び変形、曲げ変形、伸び-曲げ連成、(面外の)せん断変形に関する殻の各種剛性を求める。

次に積層複合円筒殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを解析的に評価し、これより求まるラグランジュ関数に変分原理を適用することによって積層複合円筒殻の運動方程式と境界条件式を導出する。また、面外のせん断変形を考慮しない古典殻理論の積層複合円筒殻に対する適用範囲を示すために、古典殻理論に基づく場合についても定式化を行っておく。さらに、第4章で取扱うアングルプライ積層複合円筒殻に関する各種剛性を計算し、ラミナの積層形態の違いによる剛性の変化を検討する。

2.2 基礎理論

本論文の理論解析のために用いた仮定は以下のとおりである。

- ① 積層複合円筒殻を構成している個々のラミナは完全に接着して
いてラミナ間の相対的なすべりは生じない。また、各ラミナ間
の接着層(成形法によっては存在しない場合もある)は非常に薄
く、殻全体の力学的特性には影響を与えない。
- ② 積層複合円筒殻の厚さは他の寸法、例えば曲率半径や殻の長さ
に比べて小さく、殻の面外方向の垂直応力は他の応力に比べて
微小となり無視できる。また、殻の厚さは一様で変化しない。

以下の積層複合円筒殻の定式化においては、これらの仮定を適用す
ることにより殻の変位量を面外方向に連続な関数を用いて表すこと
ができ、積層複合円筒殻を異方性を有する単層円筒殻と考えると殻理
論の適用が可能となる。

2.2.1 積層複合円筒殻の形状と座標系

積層複合円筒殻の幾何学的形状と座標系を図2-1に示す。図のよ
うに座標 (x, θ, z) をとり、殻の任意の点における各方向変位をそ
れぞれ u, v, w とする。また、殻の長さを L 、厚さを H とし、殻の
回転軸から中央面までの距離(半径)を R とする。ここで、殻の中央
面とは図2-2に示すように殻の内外面から等距離にあって幾何学的
に中央となる円筒面を指す。また、同図は N 枚のラミナから構成さ
れる積層複合円筒殻の断面図を表している。この図のように中央面
から z_{k-1} 離れた第 k 番目のラミナの繊維方向と殻の軸方向のなす角
(以下、繊維配向角と呼ぶ)を α_k とし、各ラミナにおいて繊維方向、
面外方向、そしてそれらに垂直な方向にそれぞれ1軸、3軸、2軸をと
る。

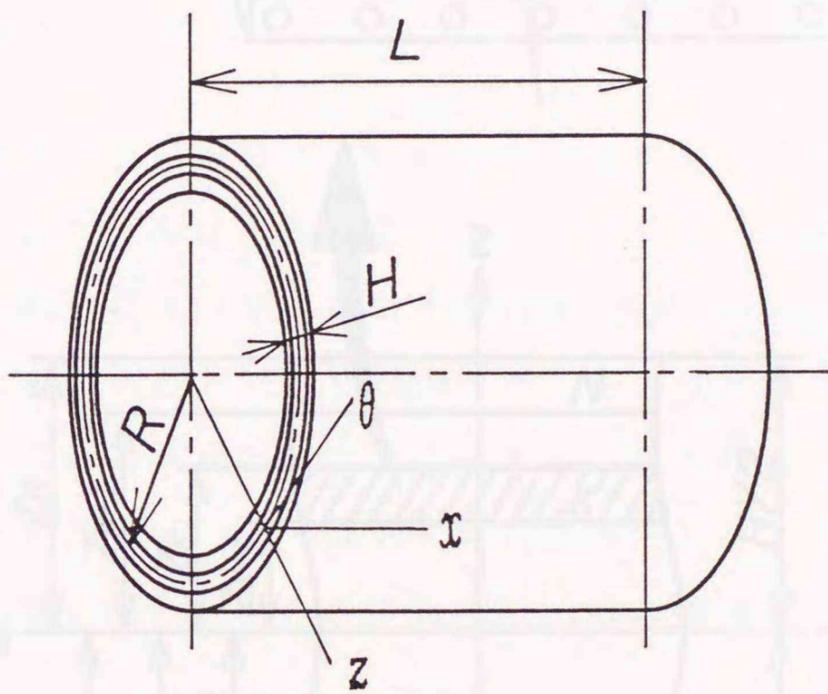


図2-1 積層複合円筒殻の幾何学的形状と座標系

2.2.2 一次せん断変形理論

積層複合円筒殻の厚さは他の寸法に比べて小さいため、殻の変形を中央面における変位量を用いて記述することを考える。そこで、殻の変位 u, v, w を中央面 ($z=0$) のまわりにべき級数展開して M 次まで採用すると

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + \sum_{m=1}^M z^m \alpha_m(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) + \sum_{m=1}^M z^m \beta_m(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) + \sum_{m=1}^M z^m \gamma_m(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots (2.1)$$

となる。ここで、上式中の u_0, v_0, w_0 は中央面における各方向変位を表しており、 $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ は未知変数である。そして、上式の第1, 2式における右辺第2項は中央面に対する法線(直線)の変形を M 次曲線で近似することに対応しており(図2-3)、第3式における右辺第2項は殻の面外方向の伸びに関する項である。殻の厚さが薄い薄肉円筒殻を取扱う場合には、Loveの第一近似理論として知られている古典(薄肉)殻理論を用いる場合が多い。Flüggeの殻理論^{5,6}においては変位場を

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, \theta, z, t) &= \frac{R+z}{R} v_0(x, \theta, t) - \frac{z}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots (2.2)$$

と与えており、これは式(2.1)において

$$M=1 : \alpha_1 = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{R} \left[\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right], \quad \gamma_1 = 0 \quad \dots (2.3)$$

と簡単化した場合に対応する。この変位場は変形前の法線が変形後

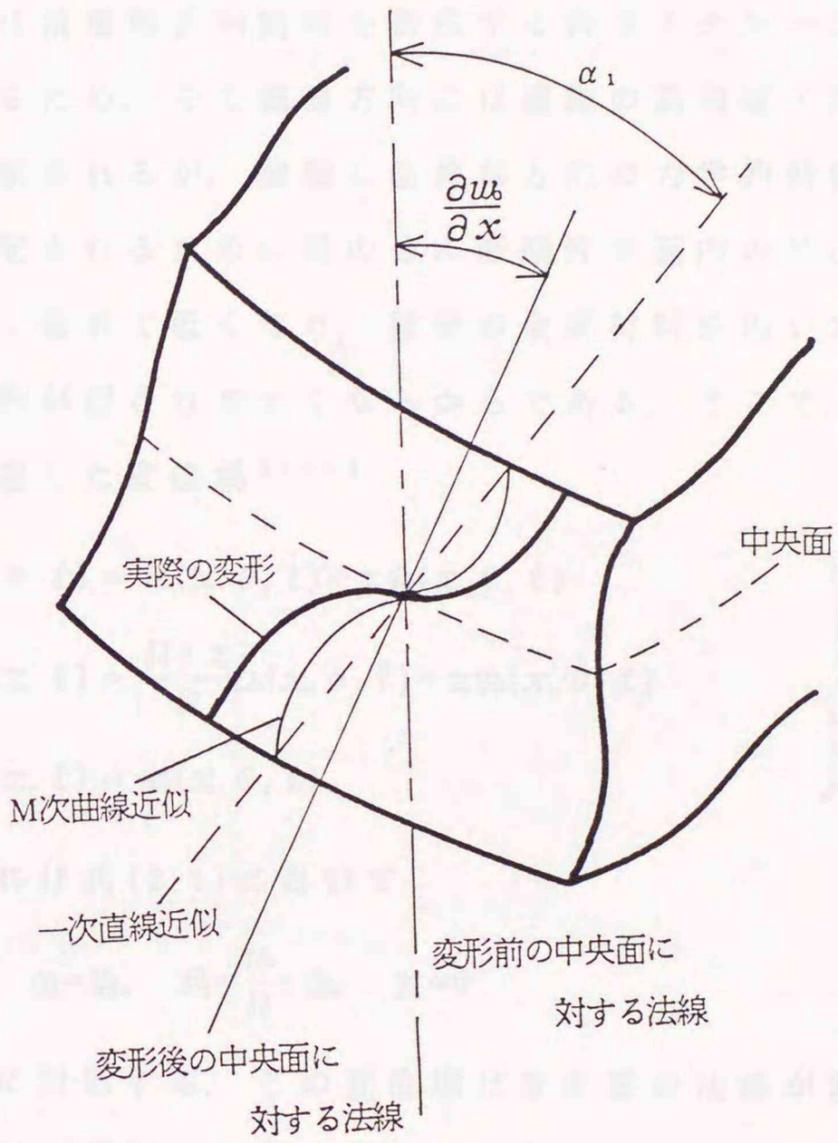


図2-3 積層複合円筒殻の变形

も直線を保ち、変形後の中央面に対しても法線となることを表しており(図2-4)、面外のせん断変形は考慮されていない。しかしながら、殻の厚さの影響が無視できない場合や高次の振動を対象とする場合には、面外のせん断変形や回転慣性の効果が大きくなるため、これらの影響を考慮しなければならない。また、一般にFRP積層構造物を取扱う場合においてもこれらを考慮した解析が必要とされている。これは積層複合円筒殻を構成する各ラミナが一方向に繊維強化されているため、その繊維方向には繊維の高強度・高剛性な力学的特性に支配されるが、繊維に直角な方向の力学的特性は主に母材の樹脂に支配されるために殻のせん断剛性が面内の伸び剛性や曲げ剛性に比べて極めて低くなり、従来の金属材料を用いた場合に比べてせん断変形が起こりやすくなるからである。そこで、面外のせん断変形を考慮した変位場^{5.1~5.3}

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= \frac{R+z}{R}u_0(x, \theta, t) + z\psi_\theta(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots (2.4)$$

を考える。これは式(2.1)において

$$M=1 : \alpha_1 = \psi_x, \quad \beta_1 = \frac{u_0}{R} + \psi_\theta, \quad \gamma_1 = 0 \quad \dots (2.5)$$

とおいた場合に対応する。この変位場は変形前の法線が変形によって直線を保ちつつ θ 軸、 x 軸まわりにそれぞれ $\psi_x, u_0/R + \psi_\theta$ だけ回転することを表しており(図2-5)、一般によく知られているTimoshenkoのはり理論やMindlin-Reissnerの平板理論と本質的に同じである。また、この変位場は z に関して一次式で展開していることから一次せん断変形理論(First-Order Shear Deformation Theory: FSDT)と呼ばれている。しかしながら、この変位場を適用すると殻の面外のせん断ひずみが面外方向に一定となるため、面外のせん断

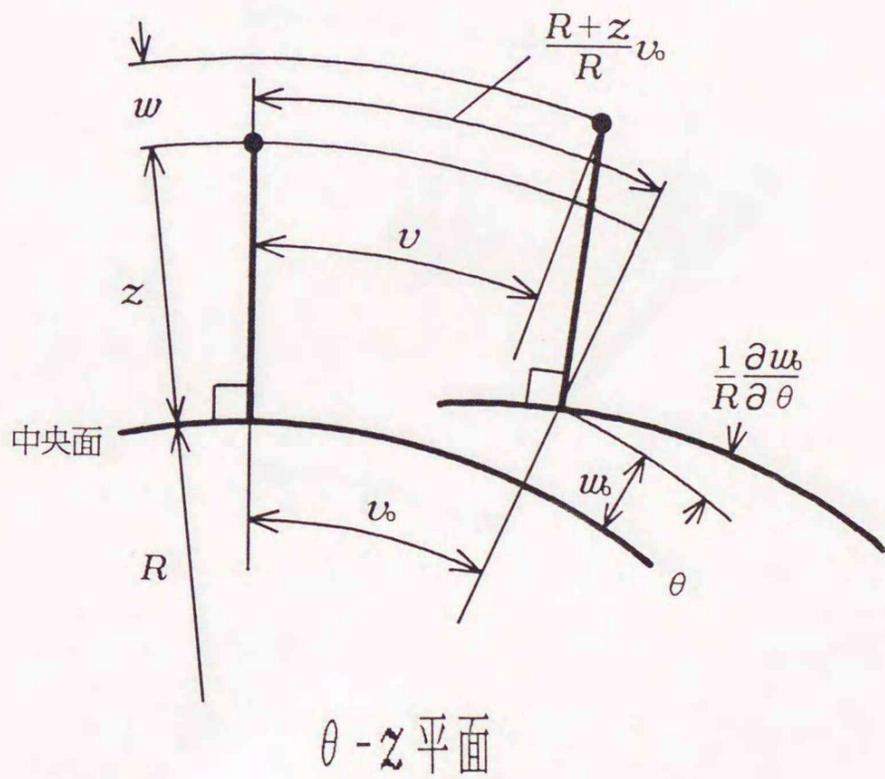
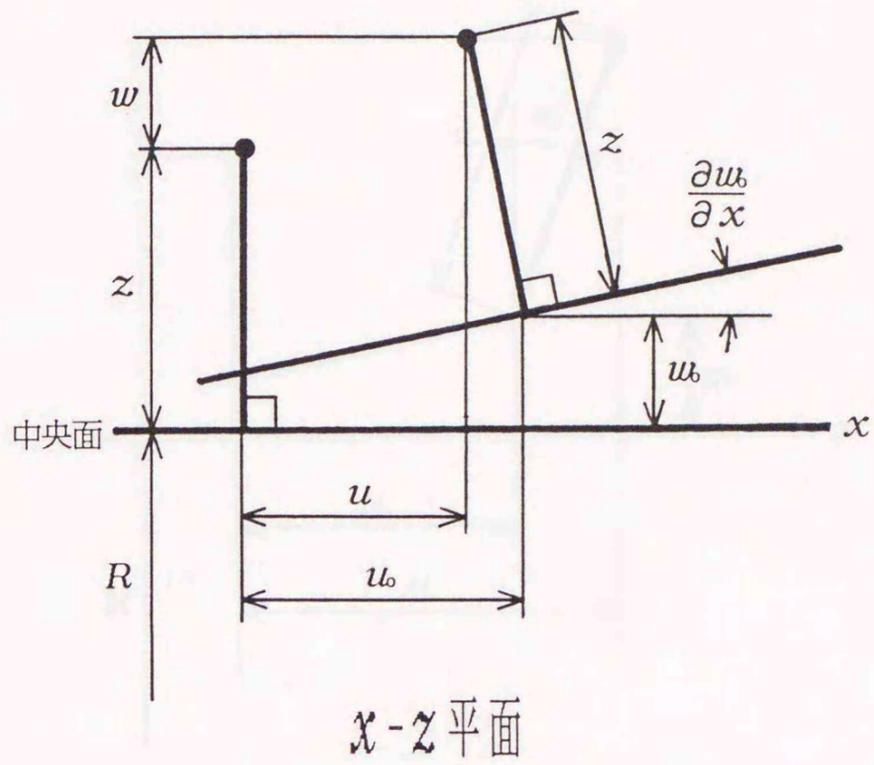


図2-4 古典殻理論に基づく殻の任意の点における変位

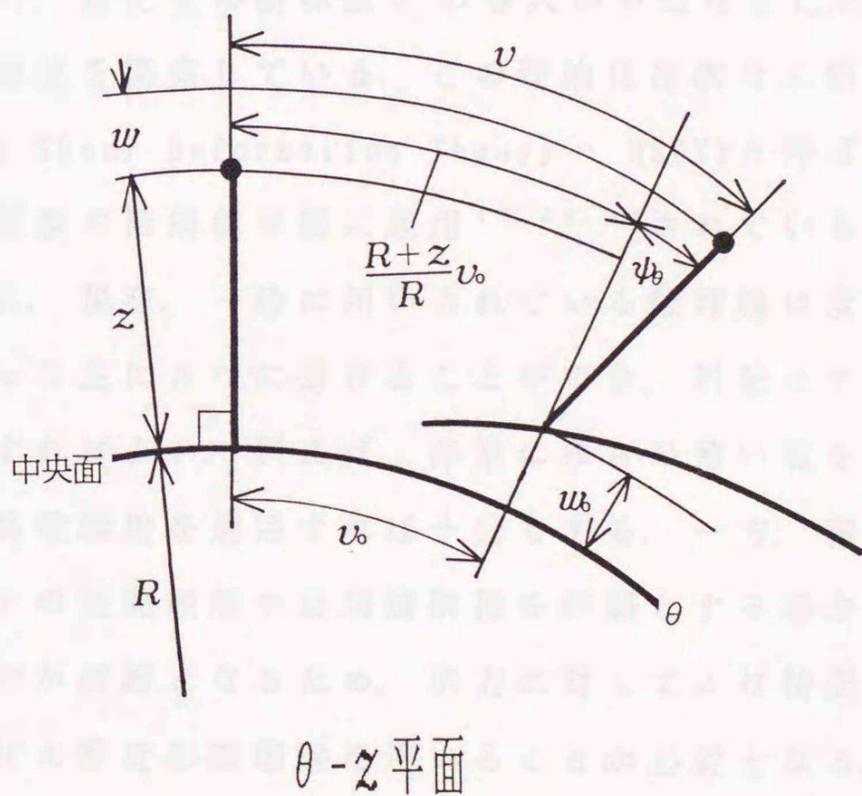
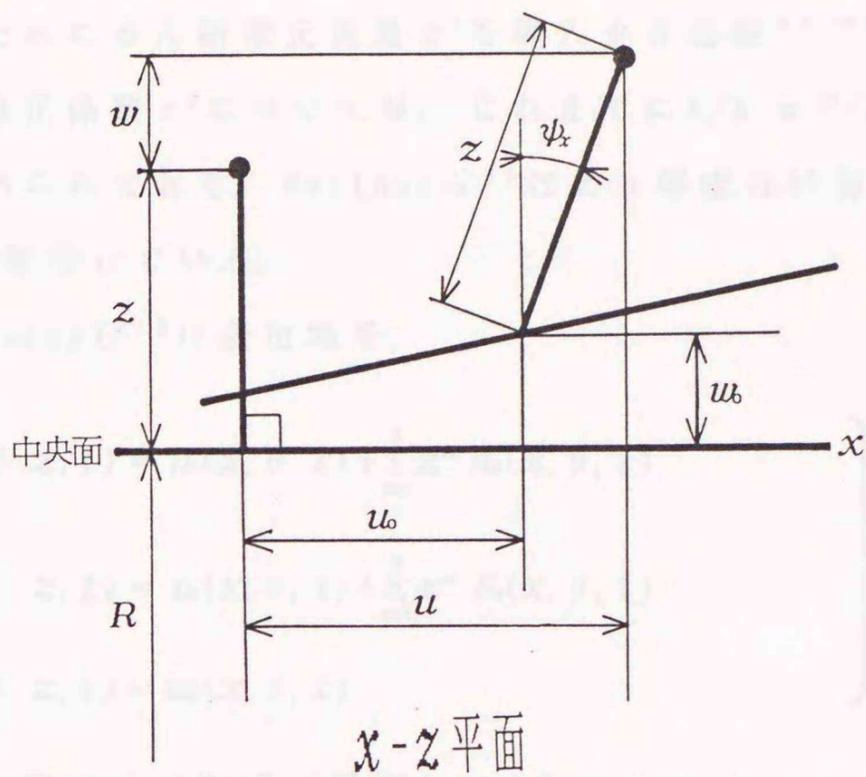


図 2-5 一次せん断変形理論に基づく殻の任意の点における変位

応力分布も一定となる。このため、この変位の仮定から生じる誤差を補正するためにせん断修正係数 κ^2 を導入する必要^{4, 8~50}が生じる。このせん断修正係数 κ^2 については、これまでに $5/6, \pi^2/12, 2/3$ といった値が用いられており、Whitneyら⁵⁰はより厳密な計算と比較して $5/6$ がよいと報告している。

さらに、Reddyら¹⁹は変位場を

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + \sum_{m=1}^3 z^m \alpha_m(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= v_0(x, \theta, t) + \sum_{m=1}^3 z^m \beta_m(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots (2.6)$$

のように z に関する三次式で展開して(式(2.1)における $M = 3, \gamma_m = 0$ の場合に相当)、修正せん断係数 κ^2 の導入が不要な自己完結型のより精度の高い理論を提案している。この理論は高次せん断変形理論(Higher-Order Shear Deformation Theory : HSDT)と呼ばれており、これまでに積層板や積層偏平殻に適用^{19, 20, 30}されている。

以上のように、現在、一般に用いられている殻理論は変形の近似の度合いによって主に3つに分けることができ、対象とする問題に合わせて選択すればよい。例えば、非常に厚さの薄い殻を対象とする場合には古典殻理論を適用すれば十分である。一方、積層構造物におけるラミナの層間剥離や最弱層破損を問題とする場合にはラミナに生じる応力が問題となるため、応力に対してより精度の高い解を与える高次せん断変形殻理論を用いることが必要となる。ここで本論文で取扱う積層複合円筒殻の自由振動問題に限定すると、古典殻理論に基づく解析より求められた固有振動数は三次元弾性論より得られた振動数に比べてかなり高い値となるが、一次せん断変形理論より得られた固有振動数はそれに対して最大数パーセントの誤差しか生じないことが報告⁹されている。また、Reddyら¹⁹は積層円筒

パネルについて高次せん断変形理論，一次せん断変形理論および古典殻理論を用いて理論解析を行っているが，古典殻理論より求まる固有振動数とはかなり差があるものの，一次せん断変形理論と高次せん断変形理論より得られる固有振動数はほぼ一致している。

以上の研究結果を参考にして，本論文においては一次せん断変形理論を用いて理論解析を行うこととする。したがって，積層複合円筒殻の各変位を

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) + z\psi_x(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, z, t) &= \frac{R+z}{R}u_0(x, \theta, t) + z\psi_\theta(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots (2.4)$$

で記述する。ここで，上式における ψ_x, ψ_θ は図2-5に示したように θ 軸， x 軸まわりの回転角を表している。

次に，微小変形理論に基づくと殻のひずみ-変位の関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R+z} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right] \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R+z} \left[\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right] \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (2.7)$$

で与えられる。ただし，上式のひずみは工学ひずみである。

これより式(2.4)を式(2.7)に代入すると

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + z\kappa_{x0}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta 0} + \frac{1}{1+z/R} \varepsilon_{\theta 1} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta 1}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{1+z/R} \gamma_{\theta z 0}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx 0}$$

$$\gamma_{x\theta} = \left[1 + \frac{z}{R} \right] \gamma_{x\theta 0} + \frac{1}{1+z/R} \gamma_{x\theta 1} \\ + z \kappa_{x\theta 0} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{x\theta 1}$$

ただし

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{\theta 0} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{\theta 1} = \frac{u_1}{R}$$

$$\gamma_{\theta z 0} = \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \psi_0, \quad \gamma_{zx 0} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x$$

$$\gamma_{x\theta 0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \gamma_{x\theta 1} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \quad \kappa_{x0} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$\kappa_{\theta 1} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \quad \kappa_{x\theta 0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}, \quad \kappa_{x\theta 1} = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}$$

... (2.8)

となり、積層複合円筒殻の任意の点におけるひずみが中央面における変位、またはひずみを用いて表せる。

2.2.3 ラミナの構成方程式

図2-2からわかるように、各ラミナは1, 2, 3軸のいずれの軸に関しても対称面をもつ直交異方性材料であることがわかる。したがって、異方弾性論における一般化されたフックの法則より第k番目のラミナにおける応力-ひずみ関係式は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{44} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & Q_{55} & 0 \\ & & & & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad \dots (2.9)$$

で与えられる。ただし、仮定②を用いて各ラミナにおける垂直応力

σ_3 と伸びひずみ ε_3 は考慮してない。なお、上式中の弾性係数 $Q_k^{(k)}$ は第 k 番目のラミナの縦弾性係数 E_i 、横弾性係数 G_i 、ポアソン比 ν_{ij} を用いて

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{E_1 \nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{31}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \right\} \dots (2.10)$$

で与えられる。ここで、上式における添字 1, 2, 3 はそれぞれ 1, 2, 3 軸方向の諸量を意味しており、 E_i と ν_{ij} の間には $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ ($i, j = 1, 2$) の関係が成り立つ。また、各ラミナの材料主軸上における応力-ひずみ関係式 (2.9) を図 2-1 に示した円筒座標 (x, θ, z) における関係式に座標変換すると

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ \text{Sym.} & & & \bar{Q}_{55} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (2.11)$$

ただし

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + Q_{22}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(m^4 + n^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= Q_{11}m^3n - Q_{22}mn^3 - mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + Q_{22}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 \\ \bar{Q}_{26} &= Q_{11}mn^3 - Q_{22}m^3n + mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2, & \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= Q_{66}(m^2 - n^2)^2 + (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 \end{aligned}$$

$$m = \cos \alpha_k, \quad n = \sin \alpha_k$$

となる。ただし、上式中においてひずみに関する添字 k は省略してある。これは式(2.8)から明らかのように、各ひずみが積層複合円筒殻の面外方向に連続でラミナの配向に関係なく殻全体に対して共通となるからである。しかしながら、式(2.11)における弾性係数 \bar{Q}_{ij} は個々のラミナの配向によって異なるために添字 k を付してあり、それに対応して応力も面外方向に不連続となるため添字 k を付してある。

2.2.4 積層複合円筒殻の剛性

積層複合円筒殻の単位幅あたりの合応力，合モーメントをそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_{x\theta} \\ Q_{zx} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz = \sum_{k=1}^N \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ \begin{Bmatrix} N_\theta \\ N_{\theta x} \\ Q_{\theta z} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz = \sum_{k=1}^N \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \\ \begin{Bmatrix} M_\theta \\ M_{\theta x} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_{\theta x} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_{\theta x} \end{Bmatrix} z dz \end{aligned} \right\} \dots (2.12)$$

と定義する。ここで、上式においてそれぞれ最初の式は単層複合円筒殻に適用でき、2番目の式は N 層のラミナにそれぞれ異なった材料を用いた場合や異なった繊維配向角で積層した場合の積層複合円筒殻に適用できる。そこで、上式に式(2.8), (2.11)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \{N\} &= [A]\{\varepsilon_1\} + [B]\{\kappa\} \\ \{M\} &= [C]\{\varepsilon_1\} + [D]\{\kappa\} \\ \{Q\} &= \kappa^2 [E]\{\varepsilon_2\} \end{aligned} \right\}$$

ただし

$$\{N\}^T = \{N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}\}$$

$$\{M\}^T = \{M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}\}$$

$$\{Q\}^T = \{Q_{\theta z}, Q_{zx}\}$$

$$\{\varepsilon_1\}^T = \{\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{\theta0}, \varepsilon_{\theta1}, \gamma_{x\theta0}, \gamma_{x\theta1}\}$$

$$\{\kappa\}^T = \{\kappa_{x0}, \kappa_{\theta1}, \kappa_{x\theta0}, \kappa_{x\theta1}\}$$

$$\{\varepsilon_2\}^T = \{\gamma_{\theta z0}, \gamma_{zx0}\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & A_{12} & \bar{A}_{16} + \frac{\bar{B}_{16}}{R} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{22}^* & \bar{A}_{26} & A_{26}^* \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{26} & A_{26} & \bar{A}_{66} + \frac{\bar{B}_{66}}{R} & A_{66} \\ A_{16} & A_{26} & A_{26}^* & \bar{A}_{66} & A_{66}^* \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & B_{12} & \bar{B}_{16} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22}^* & B_{26} & B_{26}^* \\ \bar{B}_{16} & B_{26} & \bar{B}_{66} & B_{66} \\ B_{16} & B_{26}^* & B_{66} & B_{66}^* \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & B_{12} & \bar{B}_{16} + \frac{\bar{D}_{16}}{R} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{22}^* & \bar{B}_{26} & B_{26}^* \\ \bar{B}_{16} & \bar{B}_{26} & B_{26} & \bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} & B_{66} \\ B_{16} & B_{26} & B_{26}^* & \bar{B}_{66} & B_{66}^* \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & D_{12} & \bar{D}_{16} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22}^* & D_{26} & D_{26}^* \\ \bar{D}_{16} & D_{26} & \bar{D}_{66} & D_{66} \\ D_{16} & D_{26}^* & D_{66} & D_{66}^* \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} A_{44}^* & A_{45} \\ A_{45} & \bar{A}_{55} \end{bmatrix}$$

.....(2.13)

となり，殻の合応力，合モーメントが中央面におけるひずみ量を用

いて表せる。ただし、上式において κ^2 はせん断修正係数である。

また、 $\bar{A}_{ij}, A_{ij}^*, A_{ij}, \bar{B}_{ij}, B_{ij}^*, B_{ij}, \bar{D}_{ij}, D_{ij}^*, D_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 4, 5, 6$) は積層複合円筒殻の剛性を表しており、式(2.11)で与えられる第 k 番目のラミナの弾性係数 $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= A_{ij} + \frac{B_{ij}}{R}, \quad \bar{B}_{ij} = B_{ij} + \frac{D_{ij}}{R}, \quad \bar{D}_{ij} = D_{ij} + \frac{E_{ij}}{R} \\ (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_z \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3) dz \\ (A_{ij}^*, B_{ij}^*, D_{ij}^*) &= \sum_{k=1}^N \int_z \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} (1, z, z^2) dz \\ &\quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \end{aligned} \right\} \dots (2.14)$$

で与えられる。なお、式(2.13)における $[A]$ は面内合応力 $\{N\}$ と中央面ひずみ $\{\varepsilon_1\}$ を関係づける伸び(面内)剛性マトリックス、 $[D]$ は合モーメント $\{M\}$ と曲率、捩率 $\{\kappa\}$ を関係づける曲げ(面外)剛性マトリックスと呼ばれている。また、 $[B], [C]$ はそれぞれ $\{N\}$ と $\{\kappa\}, \{M\}$ と $\{\varepsilon_1\}$ を関係づける伸び-曲げカップリング(面内-面外カップリング)剛性マトリックスであり、 $[E]$ は面外のせん断剛性である。

2.3 積層複合円筒殻に関する基礎式

2.3.1 エネルギー評価

積層複合円筒殻のひずみエネルギー U と運動エネルギー T はそれぞれ次式のように評価できる。

$$U = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} \right] (R+z) dx d\theta dz \quad \dots\dots (2.15)$$

$$T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \rho_m \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] (R+z) dx d\theta dz \quad \dots\dots (2.16)$$

ただし、上式における ρ_m は積層複合円筒殻の平均密度であり、 (\cdot) は時間微分を表している。次に式(2.15)に式(2.8), (2.11)を代入して厚さ(z)方向に積分すると、殻のひずみエネルギー U は

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \bar{A}_{11} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \right]^2 + \frac{A_{66}^*}{R^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right]^2 \right. \\
 & + \left[\bar{A}_{66} + \frac{2}{R} \bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R^2} \right] \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \right]^2 + \frac{A_{22}^*}{R^2} w^2 + \bar{D}_{11} \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right]^2 \\
 & + \frac{D_{22}^*}{R^2} \left[\frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{2 D_{12}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \bar{D}_{66} \left[\frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \right]^2 + \frac{D_{66}^*}{R^2} \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \right]^2 \\
 & + \frac{2 A_{12}}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} w + \frac{2 A_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} w + \frac{2 \bar{A}_{66}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
 & + \frac{2 \bar{A}_{12}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2 D_{66}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \\
 & + \frac{2 A_{16}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2}{R} \left[\bar{A}_{26} + \frac{\bar{B}_{26}}{R} \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2 A_{26}^*}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} w \\
 & + 2 \left[\bar{A}_{16} + \frac{\bar{B}_{16}}{R} \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2 A_{26}}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{2 \bar{A}_{26}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} w \\
 & + 2 \bar{D}_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} + \frac{2 D_{16}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\
 & + \frac{2 D_{26}}{R} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 D_{26}^*}{R^2} \frac{\partial \psi_x}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \left. \right\} \quad (a) \\
 & \left. \left. \left. \right\} \quad (b) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \right\} \quad (c) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa^2 \left[A_{44} - \frac{B_{44}}{R} + \frac{D_{44}^*}{R^2} \right] \psi_b^2 + \kappa^2 \frac{A_{44}^*}{R^2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial \theta} \right)^2 \\
& + \frac{2 \kappa^2}{R} \left[A_{44} - \frac{B_{44}^*}{R} \right] \frac{\partial w_b}{\partial \theta} \psi_b + \kappa^2 \bar{A}_{55} \psi_x^2 + 2 \kappa^2 \bar{A}_{55} \frac{\partial w_b}{\partial x} \psi_x \\
& + \kappa^2 \bar{A}_{55} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right)^2 + 2 \kappa^2 A_{45} \psi_x \psi_b + \frac{2 \kappa^2}{R} A_{45} \frac{\partial w_b}{\partial \theta} \psi_x \\
& + 2 \kappa^2 A_{45} \frac{\partial w_b}{\partial x} \psi_b + \frac{2 \kappa^2}{R} A_{45} \frac{\partial w_b \partial w_b}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{2 B_{22} \partial u_b \partial \psi_b}{R^2 \partial \theta \partial \theta} + \frac{2 B_{12} \partial \psi_x}{R w_b \partial x} + \frac{2 B_{26} \partial \psi_b}{R w_b \partial x} \\
& + \frac{2 B_{26}^* \partial \psi_x}{R^2 w_b \partial \theta} + 2 \left[\bar{B}_{16} + \frac{\bar{D}_{16}}{R} \right] \frac{\partial u_b \partial \psi_x}{\partial x \partial x} + \frac{2 \bar{B}_{26} \partial u_b \partial \psi_b}{R \partial \theta \partial x} \\
& + \frac{2 B_{26} \partial u_b \partial \psi_x}{R^2 \partial \theta \partial \theta} + \frac{2 \bar{B}_{26} \partial u_b \partial \psi_b}{R \partial x \partial \theta} + \frac{2 \bar{B}_{12} \partial u_b \partial \psi_x}{R \partial \theta \partial x} \\
& + 2 \left[\bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} \right] \frac{\partial u_b \partial \psi_b}{\partial x \partial x} + \frac{2 \bar{B}_{66} \partial u_b \partial \psi_x}{R \partial x \partial \theta} + \frac{2 B_{22}^* \partial \psi_b}{R^2 w_b \partial \theta} \\
& + 2 \bar{B}_{11} \frac{\partial u_b \partial \psi_x}{\partial x \partial x} + \frac{2 B_{66} \partial u_b \partial \psi_b}{R \partial \theta \partial x} + \frac{2 B_{66}^* \partial u_b \partial \psi_x}{R^2 \partial \theta \partial \theta} \\
& + \frac{2 B_{12} \partial u_b \partial \psi_b}{R \partial x \partial \theta} + \frac{2 B_{16} \partial u_b \partial \psi_x}{R \partial \theta \partial x} + \frac{2 B_{16} \partial u_b \partial \psi_x}{R \partial x \partial \theta} \\
& + 2 \bar{B}_{16} \frac{\partial u_b \partial \psi_b}{\partial x \partial x} + \frac{2 B_{26}^* \partial u_b \partial \psi_b}{R^2 \partial \theta \partial \theta} \Big] dx d\theta
\end{aligned}
\tag{d}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \tag{e} \\
& \dots \dots \dots (2.17)
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、上式中の(a)の項は伸び、面内のせん断、曲げ、ねじり変形によるひずみエネルギーを表しており、(b)と(c)はそれぞれ伸びと面内のせん断、曲げとねじり変形のカップリングを表す項である。また、(d)は面外のせん断変形に対応しており、(e)は面内変形と面外変形のカップリングによるひずみエネルギーである。

一方、殻の運動エネルギー T は式 (2.16) より

$$T = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\bar{I}_1 \dot{u}_0^2 + \left(\bar{I}_1 + \frac{2}{R} \bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_3}{R^2} \right) \dot{u}_0^2 + \bar{I}_1 \dot{u}_0^2 \right. \\ \left. + \bar{I}_3 \dot{\psi}_x^2 + \bar{I}_3 \dot{\psi}_\theta^2 + 2 \bar{I}_2 \dot{u}_0 \dot{\psi}_x + 2 \left(\bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_3}{R} \right) \dot{u}_0 \dot{\psi}_\theta \right] dx d\theta \quad \dots (2.18)$$

となる。ただし、上式中の \bar{I}_i は慣性質量、慣性モーメント等に相当する殻の慣性量であり、第 k 番目のラミナの密度を $\rho^{(k)}$ を用いて

$$\bar{I}_1 = I_1 + \frac{I_2}{R}, \quad \bar{I}_2 = I_2 + \frac{I_3}{R}, \quad \bar{I}_3 = I_3 + \frac{I_4}{R} \\ (I_1, I_2, I_3, I_4) = \sum_{k=1}^N \int_z \rho^{(k)} (1, z, z^2, z^3) dz \quad \dots (2.19)$$

で与えられる。

2.3.2 変分原理による運動方程式の導出

ここでは、積層複合円筒殻のラグランジュ関数に変分原理を適用することによって殻の運動方程式と境界条件を導出する。積層複合円筒殻に関するラグランジュ関数は

$$L = T - U \quad \dots (2.20)$$

で与えられ、これにハミルトンの原理を適用すると

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \\ = R \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - \bar{I}_1 \ddot{u}_0 - \bar{I}_2 \ddot{\psi}_x \right] \delta u_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \bar{I}_1 \ddot{v}_0 - \bar{I}_2 \ddot{\psi}_\theta \right] \delta v_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta - \bar{I}_1 \ddot{w}_0 \right] \delta w_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_{zx} - \bar{I}_2 \ddot{u}_0 - \bar{I}_3 \ddot{\psi}_x \right] \delta \psi_x \right. \right. \\ \left. \left. \dots (2.21) \right. \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \left[\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_{\theta z} - T_2 \ddot{u}_0 - T_3 \ddot{\psi}_\theta \right] \delta \psi_\theta \Bigg\} dx d\theta \\
 & - \int_0^{2\pi} \left[N_x \delta u_0 + T_x \delta u_\theta + Q_{zx} \delta w + M_x \delta \psi_x + M_{x\theta} \delta \psi_\theta \right]_{x=0}^{x=L} d\theta \Bigg] dt = 0
 \end{aligned} \right\}$$

となる。ただし、上式における T_x は等価面内せん断力

$$T_x = N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} \quad \dots\dots (2.22)$$

であり、慣性量 T_i は式 (2.19) で与えられる I_i を用いて

$$T_1 = I_1 + \frac{3}{R} I_2 + \frac{3}{R^2} I_3 + \frac{I_4}{R^3}, \quad T_2 = I_2 + \frac{2}{R} I_3 + \frac{I_4}{R^2} \quad \dots\dots (2.23)$$

で与えられる。したがって、これより積層複合円筒殻の運動方程式

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= T_1 \ddot{u}_0 + T_2 \ddot{\psi}_x \\
 \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} &= T_1 \ddot{u}_0 + T_2 \ddot{\psi}_\theta \\
 \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta &= T_1 \ddot{w}_0 \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_{zx} &= T_2 \ddot{u}_0 + T_3 \ddot{\psi}_x \\
 \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_{\theta z} &= T_2 \ddot{u}_0 + T_3 \ddot{\psi}_\theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.24)$$

が求まり、殻の両端 ($x=0, L$) における境界条件が

$$\left. \begin{aligned}
 u_0 &= 0 \quad \text{または} \quad N_x = 0 \\
 u_\theta &= 0 \quad \text{または} \quad T_x = N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} = 0 \\
 w &= 0 \quad \text{または} \quad Q_{zx} = 0 \\
 \psi_x &= 0 \quad \text{または} \quad M_x = 0 \\
 \psi_\theta &= 0 \quad \text{または} \quad M_{x\theta} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.25)$$

で与えられる。

2.4 古典殻理論に基づく定式化

古典殻理論は一次せん断変形理論において殻の面外方向のせん断変形を無視した場合に対応するので、本節では古典殻理論を適用する際に書き改める必要のある基礎式のみを示す。

式(2.8)においてせん断ひずみ $\gamma_{\theta z}$, γ_{zx} を恒等的に 0 とすると、殻の中央面における回転角 ψ_x , ψ_θ は

$$\psi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \psi_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \quad \dots\dots (2.26)$$

で与えられる。これより殻の変位場は

$$\left. \begin{aligned} u(x, \theta, z, t) &= u_0(x, \theta, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, \theta, z, t) &= \frac{R+z}{R} v_0(x, \theta, t) - \frac{z}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \\ w(x, \theta, z, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \right\} \dots (2.27)$$

と書き直される。また、式(2.26)を適用すると式(2.8)で与えられるひずみ-変位関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z \kappa_{x0} \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_{\theta 0} + \frac{1}{1+z/R} \varepsilon_{\theta 1} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{\theta 1} \\ \gamma_{x\theta} &= \left[1 + \frac{z}{R} \right] \gamma_{x\theta 0} + \frac{1}{1+z/R} \gamma_{x\theta 1} \\ &\quad + z \kappa_{x\theta 0} + \frac{z}{1+z/R} \kappa_{x\theta 1} \end{aligned} \right\} \dots (2.28)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{\theta 0} &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta}, & \varepsilon_{\theta 1} &= \frac{w_0}{R} \\ \gamma_{x\theta 0} &= \frac{\partial v_0}{\partial x}, & \gamma_{x\theta 1} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}, & \kappa_{x0} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\kappa_{\theta 1} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2}, \quad \kappa_{x\theta 0} = \kappa_{x\theta 1} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial \theta}$$

と書き直される。なお、各ラミナの構成方程式、殻の合応力、合モーメントに関しては、面外方向のせん断応力 $\tau_{\theta z}$, τ_{zx} , せん断合応力 $Q_{\theta z}$, Q_{zx} を除くと式(2.9)~(2.14)をそのまま適用できる。

次に、積層複合円筒殻のひずみエネルギーと運動エネルギーは殻の回転慣性を無視するとそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} \right] (R+z) dx d\theta dz \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\bar{A}_{11} \left(\frac{\partial u_b}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial u_b}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial v_b}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{A_{22}^*}{R^2} w_b^2 \right. \\ &\quad + \left[\bar{A}_{66} + \frac{2\bar{B}_{66}}{R} + \frac{\bar{D}_{66}}{R^2} \right] \left(\frac{\partial v_b}{\partial x} \right)^2 + \bar{D}_{11} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{D_{22}^*}{R^4} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{2D_{12}}{R^2} \frac{\partial^2 w_b \partial^2 w_b}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\bar{D}_{66} + 2D_{66} + D_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \\ &\quad + \frac{2A_{22}}{R^2} \frac{\partial v_b}{\partial \theta} w_b + \frac{2A_{12}}{R} \frac{\partial u_b}{\partial x} w_b \\ &\quad + \frac{2\bar{A}_{66}}{R} \frac{\partial u_b \partial v_b}{\partial \theta \partial x} + \frac{2\bar{A}_{12}}{R} \frac{\partial u_b \partial v_b}{\partial x \partial \theta} \\ &\quad + \frac{2A_{16}}{R} \frac{\partial u_b \partial v_b}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{R} \left[\bar{A}_{26} + \frac{\bar{B}_{26}}{R} \right] \frac{\partial u_b \partial v_b}{\partial x \partial \theta} + \frac{2A_{26}}{R^2} \frac{\partial u_b \partial v_b}{\partial \theta \partial \theta} \\ &\quad + 2 \left[\bar{A}_{16} + \frac{\bar{B}_{16}}{R} \right] \frac{\partial u_b \partial v_b}{\partial x \partial x} + \frac{2\bar{A}_{26}}{R} \frac{\partial v_b}{\partial x} w_b + \frac{2A_{26}^*}{R^2} \frac{\partial u_b}{\partial \theta} w_b \\ &\quad + 2 \frac{\bar{D}_{16} + D_{16}}{R} \frac{\partial^2 w_b \partial^2 w_b}{\partial x^2 \partial x \partial \theta} + 2 \frac{D_{26} + D_{26}^*}{R^3} \frac{\partial^2 w_b \partial^2 w_b}{\partial \theta^2 \partial x \partial \theta} \\ &\quad - \frac{2B_{22}^*}{R^3} \frac{\partial^2 w_b}{\partial \theta^2} w_b - \frac{2B_{12}}{R} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} w_b - 2 \frac{B_{26} + B_{26}^*}{R^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial \theta} w_b \\ &\quad - 2 \left[\bar{B}_{16} + \frac{\bar{D}_{16}}{R} \right] \frac{\partial v_b \partial^2 w_b}{\partial x \partial x^2} - 2 \frac{\bar{B}_{26} + B_{26}}{R^2} \frac{\partial v_b \partial^2 w_b}{\partial \theta \partial x \partial \theta} \\ &\quad - \frac{2\bar{B}_{26}}{R^2} \frac{\partial v_b \partial^2 w_b}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{2\bar{B}_{12}}{R} \frac{\partial v_b \partial^2 w_b}{\partial \theta \partial x^2} - \frac{2B_{22}}{R^3} \frac{\partial v_b \partial^2 w_b}{\partial \theta \partial \theta^2} \end{aligned} \quad \dots (2.29)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{R} \left[2\bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - 2\bar{B}_{11} \frac{\partial u_0 \partial^2 w_0}{\partial x \partial x^2} \\
& - 2 \frac{B_{66} + B_{66}^*}{R^2} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{2B_{12}}{R^2} \frac{\partial u_0 \partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial u_0 \partial^2 w_0}{\partial \theta \partial x^2} \\
& - 2 \frac{\bar{B}_{16} + B_{16}}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{2B_{26}^*}{R^3} \frac{\partial u_0 \partial^2 w_0}{\partial \theta \partial \theta^2} \Big] dx d\theta \\
T &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \rho_m \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] (R+z) dx d\theta dz \\
&= \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \bar{I}_1 \left[\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2 \right] dx d\theta \quad \dots (2.30)
\end{aligned}$$

また、これらより求まるラグランジュ関数に変分原理を適用すると、積層複合円筒殻に関する運動方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= \bar{I}_1 \ddot{u}_0 \\
\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} &= \bar{I}_1 \ddot{v}_0 \\
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} N_\theta &= \bar{I}_1 \ddot{w}_0
\end{aligned} \quad \dots (2.31)$$

が導出され、殻の両端 ($x=0, L$) における境界条件が

$$\begin{aligned}
u_0 &= 0 \quad \text{または} \quad N_x = 0 \\
v_0 &= 0 \quad \text{または} \quad T_x = N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} = 0 \\
w_0 &= 0 \quad \text{または} \quad S_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} = 0 \\
\frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0 \quad \text{または} \quad M_x = 0
\end{aligned} \quad \dots (2.32)$$

で与えられる。ただし、上式中の S_x は等価面外せん断力である。

2.5 積層複合円筒殻の各種剛性

ここでは積層形態の異なる積層複合円筒殻の各種剛性を調べる。はじめに、現在多く用いられてる代表的なFRPの材料特性を表2-1に示す。この表中のFRPはそれぞれEガラス繊維、ボロン繊維および高強度グラファイト繊維で強化されたエポキシ樹脂であり、構造材料として広く用いられているものである。なお、表中の V_f は繊維の体積含有率であり、 E_1/E_2 は各FRPの異方性の度合いを表している。これよりEガラス繊維、ボロン繊維、高強度グラファイト繊維の順に異方性が強くなることがわかる。また、グラファイト繊維を用いたFRPについては高い弾性率を有する高弾性グラファイト繊維で強化されたものも近年開発されており、用途に応じて使い分けられている。なお、以下の数値計算において用いるラミナの材料特性は、航空機などの構造材料として最も多く用いられている高強度グラファイト/エポキシ材を参考にして

$$E_1 = 20E_2, \quad G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

なる代表数値を採用した。

表2-1 代表的なFRPの材料定数

	E_1^*	E_2^*	G_{12}^*	ν_{12}	V_f	E_1/E_2
E-Glass /Epoxy	60.7	24.8	12.0	0.23	0.72	2.45
Boron /Epoxy	209	19.0	6.40	0.21	0.67	11.0
Graphite /Epoxy	138	6.90	4.50	0.30	0.67	20.0

*GPa

図2-6は同じ材料特性を有するラミナから構成される3層($\alpha / -\alpha / \alpha$), 2層($\alpha / -\alpha$)アングラプライ積層複合円筒殻の伸び剛性と繊維配向角 α の関係を表している。ここで、各剛性は縦弾性係数 E_2 と殻の半径 R を用いて無次元化されており、図中の実線、破線はそれぞれ3層対称積層(殻を構成するラミナの材料特性、繊維配向、位置が中央面に対して対称となる積層形態)と2層逆対称積層の場合に対応している。図からわかるように、伸び剛性 $\bar{A}_{11}, A_{22}^*, \bar{A}_{12}, \bar{A}_{66} + \bar{B}_{66}/R$ は積層形態の違いによらずほぼ一致している。そして、これらの曲線はそれぞれ $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ において最大となっており、 \bar{A}_{11} と A_{22}^* は $\alpha = 45^\circ$ に関して対称な関係にあり、 \bar{A}_{12} と $\bar{A}_{66} + \bar{B}_{66}/R$ は $\alpha = 45^\circ$ に関して対称となる。また、一般に曲率をもたない逆対称積層平板においては、式(2.11)(2.14)からわかるように伸び剛性 $\bar{A}_{26}, A_{26}^*, \bar{A}_{16} + \bar{B}_{16}/R = 0$ となるために伸び変形と面内のせん断変形、または曲げ変形とねじり変形が連成すること(クロスエラスティシティ効果)はないが、逆対称積層複合円筒殻の場合には、殻が曲率をもつために $\bar{A}_{26}, A_{26}^*, \bar{A}_{16} + \bar{B}_{16}/R \neq 0$ となって殻の伸び変形と面内のせん断変形が連成することがわかる。

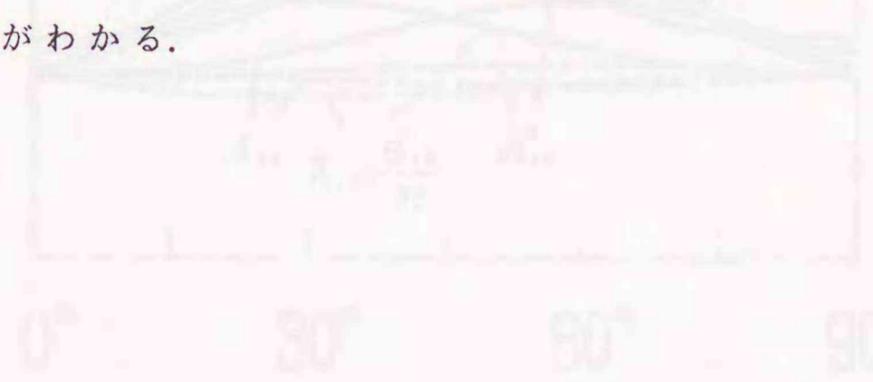
図2-7は3層($\alpha / -\alpha / \alpha$), 2層($\alpha / -\alpha$)のアングラプライ積層複合円筒殻の曲げ剛性と繊維配向角 α の関係を表しており、図中の実線、破線はそれぞれ3層、2層積層の場合に対応している。図からわかるように、曲げ剛性 $\bar{D}_{11}, D_{22}^*, D_{12}, \bar{D}_{66}$ に関しては、図2-6に示した伸び剛性と同じような傾向があるものの、積層形態の違いによってクロスエラスティシティ効果に関与する曲げ剛性 \bar{D}_{16}, D_{26}^* の分布が図2-6の場合と比べて大きく異なっている。

図2-8は同様に3層($\alpha / -\alpha / \alpha$), 2層($\alpha / -\alpha$)のアングラプライ積層複合円筒殻の伸び-曲げカップリング剛性と繊維配向角 α の関係を表しており、図中の実線、破線はそれぞれ3層、2層の場合に対応している。一般に対称積層平板においては式(2.14)からわかる

ようにこれらの剛性は0となるのに対して、積層複合円筒殻においては殻の曲率のために常にこれらの剛性をもつ。すなわち、円筒殻においては積層形態によらず面内変形と面外変形が連成するという自明の結果を与えている。また、カップリング剛性 \bar{B}_{26}, B_{26}^* , $\bar{B}_{16} + \bar{C}_{16}/R$ は積層形態の違いによって大きく異なり、対称積層に比べて逆対称積層の場合にはそれらはかなり大きくなり、殻の面内変形と面外変形の連成が強くなることを示している。

図2-9は3層 ($\alpha / -\alpha / \alpha$), 2層 ($\alpha / -\alpha$) のアングルプライ積層複合円筒殻の面外せん断剛性と繊維配向角 α の関係を表しており、図中の実線、破線はそれぞれ3層、2層の場合に対応している。図からわかるように、面外せん断剛性 A_{44}^* , \bar{A}_{55} は積層形態の違いによらずほぼ一致しているが、剛性 A_{45} は積層形態の違いによってわずかに異なり式(2.11), (2.14)より対称積層のときは0となる。

以上の計算結果よりアングルプライ積層複合円筒殻においては、対称積層の場合にはクロスエラスティシティ効果が大きくなり、逆対称の場合には面内と面外の変形の連成度合いが大きくなることわかる。一方、面外のせん断剛性は積層形態の違いにはあまり影響されないことがわかる。



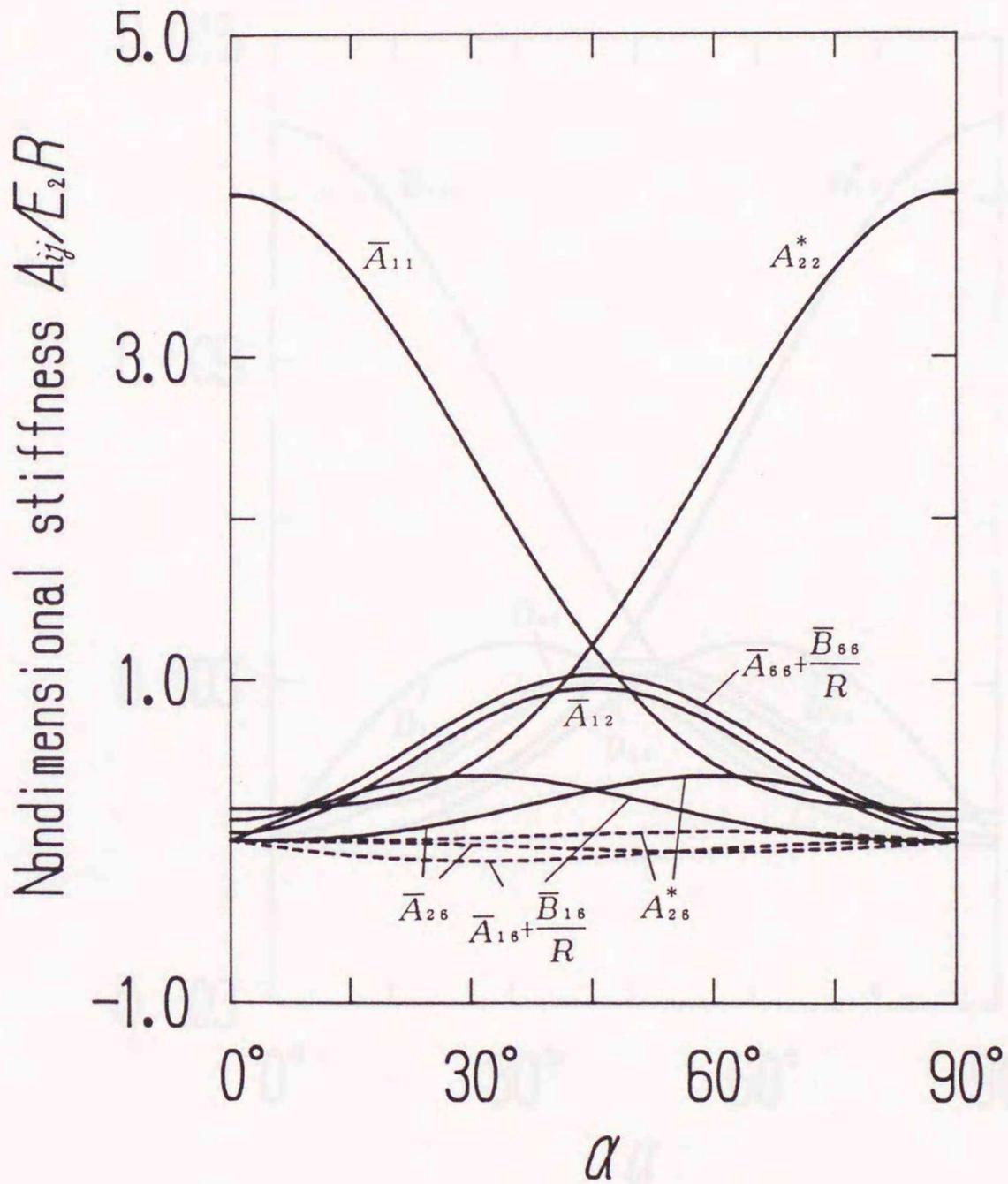


図 2-6 アングルプライ積層複合円筒殻の
伸び剛性と繊維配向角の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, h=0.2, \\ \text{—— } \alpha/-\alpha/\alpha, \quad \text{----- } \alpha/-\alpha. \end{array} \right]$$

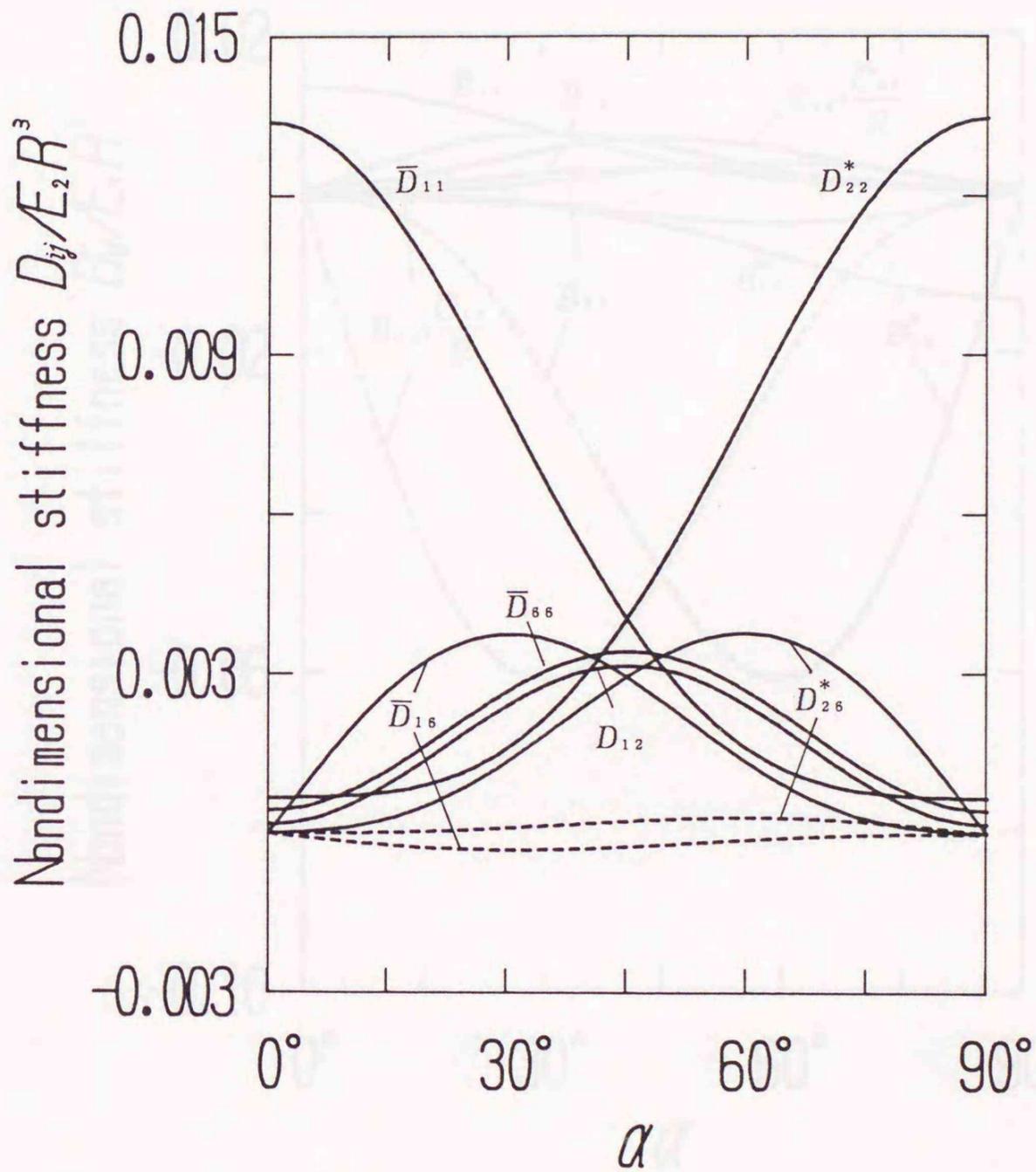


図2-7 アングルプライ積層複合円筒殻の
曲げ剛性と繊維配向角の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, \quad G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \quad \nu_{12}=0.25, \quad h=0.2, \\ \text{— } \alpha/-\alpha/\alpha, \quad \text{----- } \alpha/-\alpha. \end{array} \right]$$

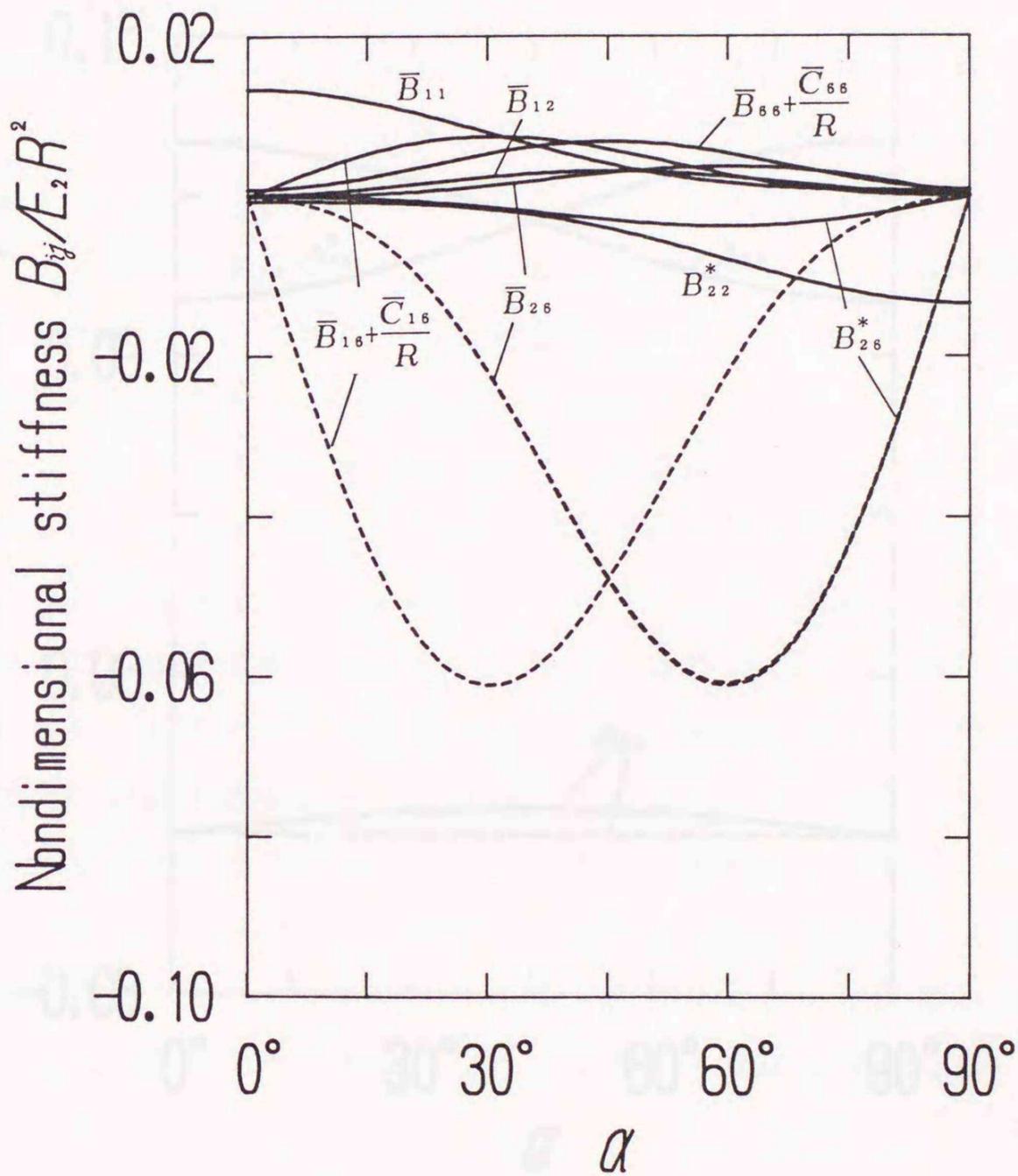


図2-8 アングルプライ積層複合円筒殻の伸び-曲げ
カップリング剛性と繊維配向角の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, \quad G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \quad \nu_{12}=0.25, \quad h=0.2, \\ \text{—— } \alpha/-\alpha/\alpha, \quad \text{----- } \alpha/-\alpha. \end{array} \right]$$

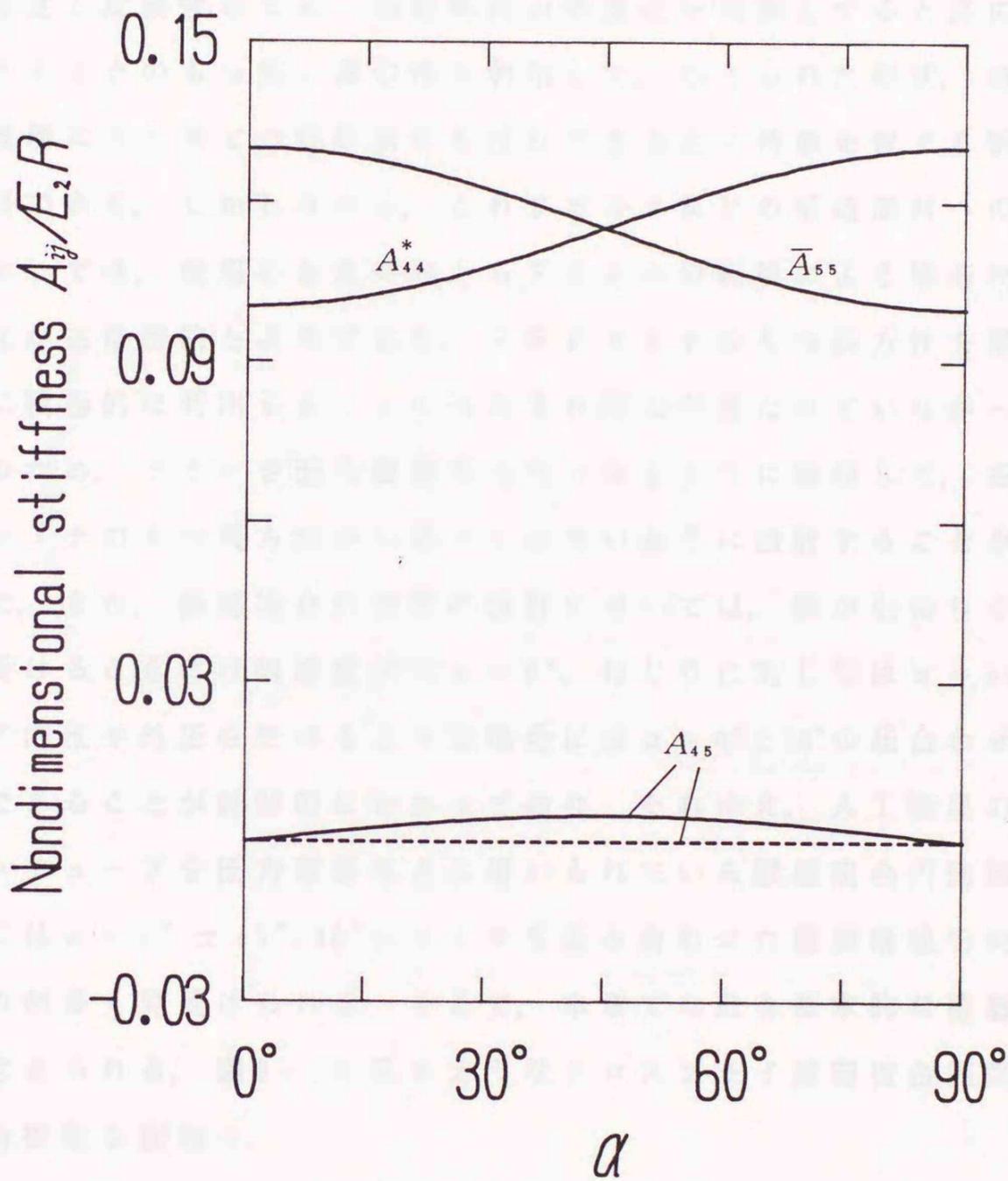


図2-9 アングルプライ積層複合円筒殻の面外のせん断剛性と繊維配向角の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, h=0.2, \\ \text{—— } \alpha/-\alpha/\alpha, \quad \text{----- } \alpha/-\alpha. \end{array} \right)$$

第3章 クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動

3.1 まえがき

最近、様々な分野で関心が寄せられているFRPは、その高い比強度と比剛性のため、構造部材の軽量化を可能とすると共に、FRPラミナのもつ高い異方性を利用して、与えられた形状、荷重条件、環境に合わせて力学的特性を設計できる点に特徴を有する新しい材料である。しかしながら、これまでのFRPの構造部材への適用においては、慣用の金属材料からFRPへの転換による構造物の軽量化が主な目的とされており、FRPラミナのもつ異方性を構造設計に積極的に利用することにはあまり関心が持たれていなかった。このため、ラミナを面内擬似等方性となるように積層して、各FRPラミナのもつ異方性が出るべく出ないように設計することが多かった。また、積層複合円筒殻の設計においては、殻が引張りや曲げを受けるときには繊維配向角 $\alpha = 0^\circ$ 、ねじりに対しては $\alpha = 45^\circ$ 、そして内圧や外圧を受けるような場合には $\alpha = 0^\circ$ と 90° の組み合わせが有効であることが経験的にわかっており、それゆえ、人工衛星のスラストチューブや圧力容器などに用いられている積層複合円筒殻においては $\alpha = 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ のラミナを組み合わせた積層構成を有するものが多く見受けられる。そこで、本章では最も基本的な積層形態と考えられる、図3-1に示すようなクロスプライ積層複合円筒殻の自由振動を取扱う。

クロスプライ積層複合円筒殻の場合、図3-1に示すように殻を構成している各ラミナの方法主軸が殻の軸、円周方向と一致しているために殻全体としても直交異方性を有している。これより理論解析の際、基礎方程式の解の変数分離が可能となって理論的取扱いがその他の積層形態を有する場合に比べて容易となる。このため、カー

この構造は、繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。

しかしながら、繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。

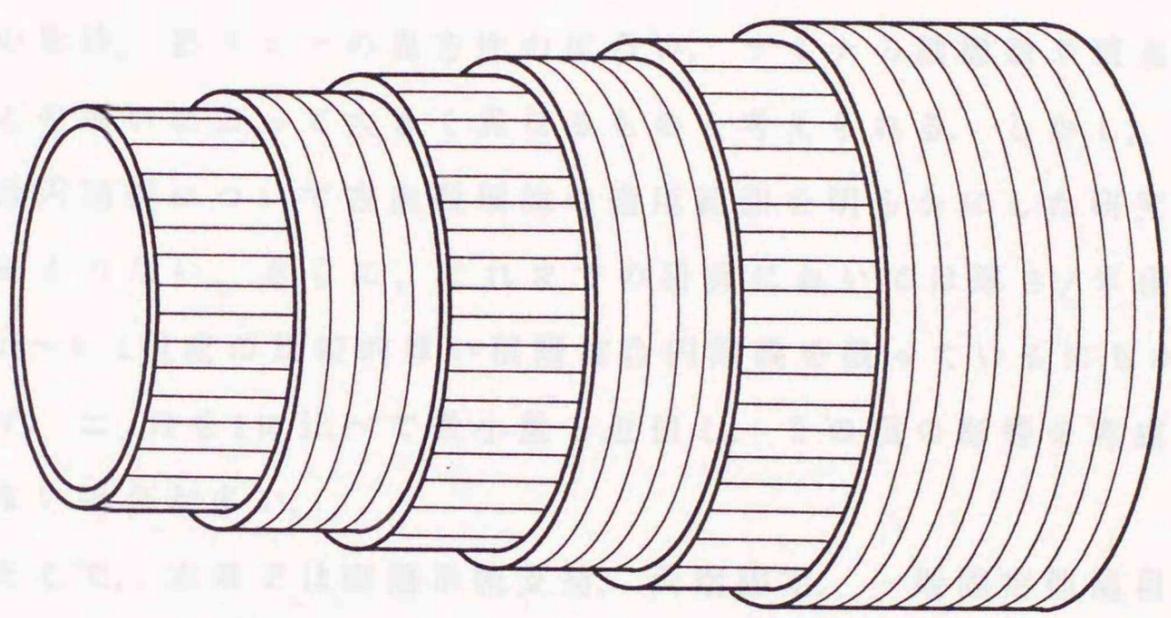


図3-1 クロスプライ積層複合円筒殻

この構造は、繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。

この構造は、繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。繊維の配向が異なる層を交互に積層して構成されている。

ボン繊維が普及し始めた1970年以降、クロスプライ積層複合円筒殻に関しては様々な研究^{6~20}が行われている。

しかしながら、クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動に関する研究においては、そのほとんどが殻の両端が単純支持された場合に限られており、その他の支持条件を有する場合の研究はあまり見当たらない。また、殻構造物の振動解析においては、殻の厚さが薄く面外のせん断変形や回転慣性の影響が無視できる場合には古典殻理論による解析で十分とされているが、積層複合円筒殻においては、従来の金属材料からなる円筒殻と比べその影響を無視できる範囲が殻の形状、各ラミナの異方性の度合い、ラミナの積層数や積層順序などの違いによって大きく異なるものと考えられる。しかし、積層複合円筒殻について古典殻理論の適用範囲を明らかにした研究報告はあまりない。さらに、これまでの研究においては厚さ/半径比が0.05~0.2程度の比較的厚い積層複合円筒殻を扱っているにもかかわらず、 z/R を1に比べて微小量と近似し、その項の影響を考慮していない場合が多い。

そこで、本章では両端単純支持、両端固定、一端固定他端自由の支持条件を有するクロスプライ積層複合円筒殻に対して、ラミナの異方性の度合い、積層数や積層順序を変化させた場合について数値計算を実施し、殻の両端の支持条件や積層形態の違いがクロスプライ積層複合円筒殻の振動特性に与える影響を明らかにする。さらに、面外のせん断変形や回転慣性を考慮しない古典殻理論や厚さ比 z/R を近似した理論(以下では近似一次せん断変形理論と呼ぶ)のクロスプライ積層複合円筒殻に対する適用限界を明らかにする。

この研究のために、まず第2章において誘導した基礎方程式をクロスプライ積層複合円筒殻に関する基礎式に書き改める。そして、解の変数分離を行うと共に殻の軸方向の伝達マトリックスを導入して、基礎方程式を伝達マトリックスに関するマトリックス形常微分

3.2 伝達マトリックス法

3.2.1 基礎方程式

クロスプライ積層複合円筒殻の自由振動に対して円振動数 ω の調和振動を考えると、殻の各変位量は

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, \theta, t) &= U_0(x, \theta) \sin \omega t \\ v_0(x, \theta, t) &= V_0(x, \theta) \sin \omega t \\ w_0(x, \theta, t) &= W_0(x, \theta) \sin \omega t \\ \psi_x(x, \theta, t) &= \Psi_x(x, \theta) \sin \omega t \\ \psi_\theta(x, \theta, t) &= \Psi_\theta(x, \theta) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots (3.1)$$

で与えられ、式(2.24)における N_x, M_θ, Q_{zx} 等を最大振幅とみなすと、積層複合円筒殻に関する運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + \omega^2 (T_1 U_0 + T_2 \Psi_x) &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \omega^2 (T_1 V_0 + T_2 \Psi_\theta) &= 0 \\ \frac{\partial Q_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} N_\theta + \omega^2 T_1 W_0 &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_{zx} + \omega^2 (T_2 U_0 + T_3 \Psi_x) &= 0 \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_{\theta z} + \omega^2 (T_2 V_0 + T_3 \Psi_\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3.2)$$

と書き直せる。クロスプライ積層複合円筒殻の場合、各ラミナの繊維配向角 α は 0° または 90° となるので、式(2.11)で与えられる各ラミナの弾性係数 $\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}, \bar{Q}_{45}$ は恒等的に 0 となり、それらから求まる各種剛性 (A_{16}, B_{16} 等) も 0 となる。したがって、式(2.13)で与えられる殻の合応力、合モーメントはそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned}
N_x &= \bar{A}_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{A}_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + A_{12} \frac{W_0}{R} + \bar{B}_{11} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \\
N_\theta &= A_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + A_{22}^* \frac{W_0}{R} + B_{12} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + B_{22}^* \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \\
N_{x\theta} &= A_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \left[\bar{A}_{66} + \frac{\bar{B}_{66}}{R} \right] \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \bar{B}_{66} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\
N_{\theta x} &= A_{66}^* \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \bar{A}_{66} \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_{66}^* \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + B_{66} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\
M_x &= \bar{B}_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{B}_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + B_{12} \frac{W_0}{R} + \bar{D}_{11} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \\
M_\theta &= B_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + B_{22}^* \frac{W_0}{R} + D_{12} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + D_{22}^* \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \\
M_{x\theta} &= B_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \left[\bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} \right] \frac{\partial V_0}{\partial x} + D_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \bar{D}_{66} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\
M_{\theta x} &= B_{66}^* \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \bar{B}_{66} \frac{\partial V_0}{\partial x} + D_{66}^* \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + D_{66} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\
Q_{zx} &= \kappa^2 \bar{A}_{55} \left[\frac{\partial W_0}{\partial x} + \Psi_x \right] \\
Q_{\theta z} &= \kappa^2 A_{44}^* \left[\frac{1}{R} \frac{\partial W_0}{\partial \theta} + \Psi_\theta \right]
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

そして、式(2.22)で与えられる等価面内せん断力 T_x

$$T_x = N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} \tag{3.4}$$

を導入する。

3.2.2 伝達マトリックス

上記の基礎方程式における各変数は次のように変数分離できる。

$$\begin{aligned}
(U, W_0) &= H(\bar{U}, \bar{W}_0) \cos n\theta, \quad V_0 = H\bar{V}_0 \sin n\theta \\
\Psi_x &= (H/R)\bar{\Psi}_x \cos n\theta, \quad \Psi_\theta = (H/R)\bar{\Psi}_\theta \sin n\theta \\
(N_x, N_\theta, Q_{zx}) &= E_0 R(\bar{N}_x, \bar{N}_\theta, \bar{Q}_{zx}) \cos n\theta \\
(N_{x\theta}, N_{\theta x}, T_x, Q_{\theta z}) &= E_0 R(\bar{N}_{x\theta}, \bar{N}_{\theta x}, \bar{T}_x, \bar{Q}_{\theta z}) \sin n\theta
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

$$\left. \begin{aligned} (M_x, M_\theta) &= E_0 R^2 (\bar{M}_x, \bar{M}_\theta) \cos n\theta \\ (M_{x\theta}, M_{\theta x}) &= E_0 R^2 (\bar{M}_{x\theta}, \bar{M}_{\theta x}) \sin n\theta \end{aligned} \right\}$$

ここで、上式中の n は円周方向波数、記号 $\bar{\quad}$ を付した変数は無次元変数を表し、 E_0 は無次元化の際に基準となる縦弾性係数である。

さらに、解析を簡単化するために次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x/L, \quad \eta = z/H, \quad (l, h) = (1/R)(L, H) \\ \lambda^2 &= \rho_0 R^2 \omega^2 / E_0 \\ (\bar{a}_{ij}, a_{ij}, a_{ij}^*) &= (1/E_0 R) (\bar{A}_{ij}, A_{ij}, A_{ij}^*) \\ (\bar{b}_{ij}, b_{ij}, b_{ij}^*) &= (1/E_0 R^2) (\bar{B}_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^*) \\ (\bar{d}_{ij}, d_{ij}, d_{ij}^*) &= (1/E_0 R^3) (\bar{D}_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^*) \\ (\bar{i}_k, \bar{i}_k) &= (1/\rho_0 R^k) (\bar{T}_k, T_k) \\ &\quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6, \quad k = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \dots (3.6)$$

ここで、 λ は無次元振動数パラメータを表し、 ρ_0 は無次元化の際に基準となる密度である。そして、式(3.2)～(3.4)より変数 $N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, M_\theta, M_{\theta x}, Q_{\theta z}$ を消去することにより、上記の基礎方程式は次のような連立の一階常微分方程式に変形できる。

$$\frac{d}{d\xi} \{Z_\theta(\xi)\} = l [U_\theta] \{Z_\theta(\xi)\} \dots (3.7)$$

ここで、 $\{Z_\theta(\xi)\}$ は状態量ベクトル

$$\{Z_\theta(\xi)\} = \{\bar{U}, \bar{V}_\theta, \bar{W}_\theta, \bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_\theta, \bar{M}_{x\theta}, \bar{M}_x, \bar{Q}_{zx}, \bar{T}_x, \bar{N}_x\}^T \dots (3.8)$$

であり、係数マトリックス $[U_\theta]$ の零でない要素は

$$\left. \begin{aligned} U_\theta(1,2) &= n(\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\ U_\theta(1,3) &= (a_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}b_{12}) / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\ U_\theta(1,5) &= n(b_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}d_{12}) / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\ U_\theta(1,7) &= U_\theta(4,10) = \bar{b}_{11}/h / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\ U_\theta(1,10) &= -\bar{d}_{11}/h / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
U_f(2, 1) &= n(\bar{b}_{66}b_{66} - a_{66}\bar{d}_{66})/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(2, 4) &= n(\bar{b}_{66}d_{66} - b_{66}\bar{d}_{66})/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(2, 6) &= (\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})/h/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(2, 9) &= -\bar{d}_{66}/h/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(3, 4) &= -U_f(7, 8) = -1 \\
U_f(3, 8) &= 1/h/\bar{a}_{55} \\
U_f(4, 2) &= n(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U_f(4, 3) &= (\bar{a}_{11}b_{12} - a_{12}\bar{b}_{11})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U_f(4, 5) &= n(\bar{a}_{11}d_{12} - \bar{b}_{11}b_{12})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U_f(4, 7) &= -\bar{a}_{11}/h/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U_f(5, 1) &= n\{a_{66}(\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) - b_{66}(\bar{a}_{66} + \bar{b}_{66})\} \\
&\quad /(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(5, 4) &= n\{b_{66}(\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) - d_{66}(\bar{a}_{66} + \bar{b}_{66})\} \\
&\quad /(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(5, 6) &= -(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})/h/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(5, 9) &= (\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})/h/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) \\
U_f(6, 2) &= h[n^2\{b_{12}(\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) \\
&\quad + d_{12}(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
&\quad - (\bar{i}_2\lambda^2 - n^2b_{22})] \\
U_f(6, 3) &= nh[\{b_{12}(a_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}b_{12}) \\
&\quad + d_{12}(\bar{a}_{11}b_{12} - a_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
&\quad - (a_{44}^* - b_{22}^*)] \\
U_f(6, 5) &= h[n^2\{b_{12}(b_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}d_{12}) \\
&\quad + d_{12}(\bar{a}_{11}d_{12} - \bar{b}_{11}b_{12})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
&\quad - (\bar{i}_3\lambda^2 - a_{44}^* - n^2d_{22}^*)] \\
U_f(6, 7) &= n(\bar{b}_{11}b_{12} - \bar{a}_{11}d_{12})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U_f(6, 10) &= n(\bar{b}_{11}d_{12} - b_{12}\bar{d}_{11})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})
\end{aligned}$$

$$U_f(7, 1) = h[n^2\{b_{66}(a_{66}\bar{d}_{66} - \bar{b}_{66}b_{66}) + d_{66}(\bar{a}_{66}b_{66} - a_{66}\bar{b}_{66})\}/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) - (\bar{i}_2\lambda^2 - n^2b_{66}^*)]$$

$$U_f(7, 4) = h[n^2\{b_{66}(b_{66}\bar{d}_{66} - \bar{b}_{66}d_{66}) + d_{66}(\bar{a}_{66}d_{66} - \bar{b}_{66}b_{66})\}/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66}) - (\bar{i}_3\lambda^2 - n^2d_{66}^*)]$$

$$U_f(7, 6) = n\{d_{66}(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) - \bar{b}_{66}(\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})\}/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66})$$

$$U_f(7, 9) = n\{\bar{b}_{66}\bar{d}_{66} - d_{66}(\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})\}/(\bar{b}_{66}^2 - \bar{a}_{66}\bar{d}_{66})$$

$$U_f(8, 2) = nh[a_{22} + \{a_{12}(\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) + b_{12}(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})]$$

$$U_f(8, 3) = h[\{a_{12}(a_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}b_{12}) + b_{12}(\bar{a}_{11}b_{12} - a_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) - \{\bar{i}_1\lambda^2 - (a_{22}^* + n^2a_{44}^*)\}]$$

$$U_f(8, 5) = nh[\{a_{12}(b_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}d_{12}) + b_{12}(\bar{a}_{11}d_{12} - \bar{b}_{11}b_{12})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) - (a_{44}^* - b_{22}^*)]$$

$$U_f(8, 7) = (a_{12}\bar{b}_{11} - \bar{a}_{11}b_{12})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})$$

$$U_f(8, 10) = (\bar{b}_{11}b_{12} - a_{12}\bar{d}_{11})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})$$

$$U_f(9, 2) = h[n^2\{\bar{a}_{12}(\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) + \bar{b}_{12}(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) - \{\bar{i}_1\lambda^2 - n^2(a_{22} + b_{22})\}]$$

$$U_f(9, 3) = nh[\{\bar{a}_{12}(a_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}b_{12}) + \bar{b}_{12}(\bar{a}_{11}b_{12} - a_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) + (a_{22}^* + b_{22}^*)]$$

$$U_f(9,5) = h[n^2\{\bar{a}_{12}(b_{12}\bar{d}_{11}-\bar{b}_{11}d_{12}) + \bar{b}_{12}(\bar{a}_{11}d_{12}-\bar{b}_{11}b_{12})\}/(\bar{b}_{11}^2-\bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) - \{\bar{i}_2\lambda^2-n^2(b_{22}^*+\bar{d}_{22}^*)\}]$$

$$U_f(9,7) = n(\bar{a}_{12}\bar{b}_{11}-\bar{a}_{11}\bar{b}_{12})/(\bar{b}_{11}^2-\bar{a}_{11}\bar{d}_{11})$$

$$U_f(9,10) = n(\bar{b}_{11}\bar{b}_{12}-\bar{a}_{12}\bar{d}_{11})/(\bar{b}_{11}^2-\bar{a}_{11}\bar{d}_{11})$$

$$U_f(10,1) = h[n^2\{\bar{a}_{66}(a_{66}\bar{d}_{66}-\bar{b}_{66}b_{66}) - a_{66}b_{66}(\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66})+b_{66}^2(\bar{a}_{66}+\bar{b}_{66})\} /(\bar{b}_{66}^2-\bar{a}_{66}\bar{d}_{66})-(\bar{i}_1\lambda^2-n^2a_{66}^*)]$$

$$U_f(10,4) = h[n^2\{b_{66}(\bar{a}_{66}\bar{d}_{66}+\bar{b}_{66}d_{66}) - \bar{a}_{66}d_{66}^2-b_{66}^2(\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66})\} /(\bar{b}_{66}^2-\bar{a}_{66}\bar{d}_{66})-(\bar{i}_2\lambda^2-n^2b_{66}^*)]$$

$$U_f(10,6) = n\{b_{66}(\bar{a}_{66}+2\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66})-\bar{a}_{66}(\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66})\} /(\bar{b}_{66}^2-\bar{a}_{66}\bar{d}_{66})$$

$$U_f(10,9) = n\{\bar{a}_{66}\bar{d}_{66}-b_{66}(\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66})\} /(\bar{b}_{66}^2-\bar{a}_{66}\bar{d}_{66})$$

.....(3.9)

で与えられる。式(3.7)を満たす解析的な解を得ることは困難であるので、ここでは殻の伝達マトリックスを導入して解析を行う。

一般に殻の状態量ベクトルは軸方向の伝達マトリックス $[T(\xi, \xi_0)]$ を用いて

$$\{Z_f(\xi)\} = [T(\xi, \xi_0)]\{Z_f(\xi_0)\} \quad \dots\dots(3.10)$$

と表せる。これを式(3.7)に代入することによって伝達マトリックスに関するマトリックス形一階常微分方程式

$$\frac{d}{d\xi}[T(\xi, \xi_0)] = l[U_f][T(\xi, \xi_0)] \quad \dots\dots(3.11)$$

を導くことができる。これより伝達マトリックスは上式を出発値 $[T(\xi_0, \xi_0)] = [I]$ (単位マトリックス)のもとで直接積分することによって得られる。本論文の数値計算においては、伝達マトリク

スをRunge-Kutta-Gill法を用いて数値的に求めている。なお、円筒殻が特に厚さが薄い場合や長さが長い場合にはこの数値計算が困難となることがあるが、その場合には殻をいくつかの部分に分割し、それぞれの部分について伝達マトリックスを求めることによって回避することができる。その際、殻全体の伝達マトリックスは各々の部分の伝達マトリックスの積で与えられる。

3.2.3 振動数方程式の誘導

本章で用いた伝達マトリックス法は、任意の支持条件をもつクロスプライ積層複合円筒殻に適用できる。例えば、殻が両端で単純支持されている場合、殻の両端($\xi = 0, 1$)における境界条件は

$$\bar{V}_0 = \bar{W}_0 = \bar{\Psi}_0 = \bar{M}_x = \bar{N}_x = 0 \quad \dots\dots(3.12)$$

と書ける。したがって、これを式(3.10)に代入すると

$$\begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} & T_{26} & T_{28} & T_{29} \\ T_{31} & T_{34} & T_{36} & T_{38} & T_{39} \\ T_{51} & T_{54} & T_{56} & T_{58} & T_{59} \\ T_{71} & T_{74} & T_{76} & T_{78} & T_{79} \\ T_{101} & T_{104} & T_{106} & T_{108} & T_{109} \end{bmatrix}_{(1,0)} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{\Psi}_x \\ \bar{M}_{x\theta} \\ \bar{Q}_{zx} \\ \bar{T}_x \end{bmatrix}_{(0)} = 0 \quad \dots\dots(3.13)$$

なる連立同次方程式が得られ、これが自明でない解をもつための条件として

$$\begin{bmatrix} T_{21} & T_{24} & T_{26} & T_{28} & T_{29} \\ T_{31} & T_{34} & T_{36} & T_{38} & T_{39} \\ T_{51} & T_{54} & T_{56} & T_{58} & T_{59} \\ T_{71} & T_{74} & T_{76} & T_{78} & T_{79} \\ T_{101} & T_{104} & T_{106} & T_{108} & T_{109} \end{bmatrix}_{(1,0)} = 0 \quad \dots\dots(3.14)$$

なる振動数方程式が導かれる。

また、殻の両端が固定されている場合、一端が固定されていて他端が支持されていない場合(固定-自由)の境界条件はそれぞれ

両端固定：

$$\bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \bar{\Psi}_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi = 0, 1) \quad \dots\dots(3.15)$$

固定 - 自由：

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = \bar{\Psi}_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi = 0) \\ \bar{M}_{x0} = \bar{M}_x = \bar{Q}_{zx} = \bar{T}_x = \bar{N}_x = 0 \quad (\xi = 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.16)$$

と書け、これらを式(3.10)に代入するとそれぞれの場合に対して

両端固定：

$$\begin{vmatrix} T_{16} & T_{17} & T_{18} & T_{19} & T_{110} \\ T_{26} & T_{27} & T_{28} & T_{29} & T_{210} \\ T_{36} & T_{37} & T_{38} & T_{39} & T_{310} \\ T_{46} & T_{47} & T_{48} & T_{49} & T_{410} \\ T_{56} & T_{57} & T_{58} & T_{59} & T_{510} \end{vmatrix}_{(1,0)} = 0 \quad \dots\dots(3.17)$$

固定 - 自由：

$$\begin{vmatrix} T_{66} & T_{67} & T_{68} & T_{69} & T_{610} \\ T_{76} & T_{77} & T_{78} & T_{79} & T_{710} \\ T_{86} & T_{87} & T_{88} & T_{89} & T_{810} \\ T_{96} & T_{97} & T_{98} & T_{99} & T_{910} \\ T_{106} & T_{107} & T_{108} & T_{109} & T_{1010} \end{vmatrix}_{(1,0)} = 0 \quad \dots\dots(3.18)$$

なる振動数方程式を誘導できる。したがって、振動数方程式を満たす振動数パラメータ λ を求めることによってクロスプライ積層複合円筒殻の固有振動数が定まり、その振動数パラメータ(固有値)に対応する状態量ベクトル(固有ベクトル)を求め、式(3.10)を用いることによって振動モード形を決定することができる。

3.2.4 古典殻理論に基づく解析

古典殻理論に基づく解析においても、解析手法は一次せん断変形理論の場合とほとんど同じであるので、ここでは古典殻理論を用いる場合に書き改める必要のある基礎式のみを示す。古典殻理論に基づく、積層複合円筒殻に関する運動方程式は式(2.31)より

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + \omega^2 T_1 U_0 &= 0 \\
 \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \omega^2 T_1 V_0 &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} N_\theta + \omega^2 T_1 W_0 &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots (3.19)$$

で与えられ、合応力、合モーメントはそれぞれ

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= \bar{A}_{11} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \bar{A}_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + A_{12} \frac{W_0}{R} - \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} \\
 N_\theta &= A_{12} \frac{\partial U_0}{\partial x} + A_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + A_{22}^* \frac{W_0}{R} - B_{12} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - B_{22}^* \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} \\
 N_{x\theta} &= A_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \left[\bar{A}_{66} + \frac{\bar{B}_{66}}{R} \right] \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\bar{B}_{66} + B_{66}}{R} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial \theta} \\
 N_{\theta x} &= A_{66}^* \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \bar{A}_{66} \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{B_{66} + B_{66}^*}{R} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial \theta} \\
 M_x &= \bar{B}_{11} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \bar{B}_{12} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + B_{12} \frac{W_0}{R} - \bar{D}_{11} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} \\
 M_\theta &= B_{12} \frac{\partial U_0}{\partial x} + B_{22} \frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + B_{22}^* \frac{W_0}{R} - D_{12} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} - D_{22}^* \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} \\
 M_{x\theta} &= B_{66} \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \left[\bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} \right] \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\bar{D}_{66} + D_{66}}{R} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial \theta} \\
 M_{\theta x} &= B_{66}^* \frac{1}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} + \bar{B}_{66} \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{D_{66} + D_{66}^*}{R} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial \theta}
 \end{aligned} \right\} \dots (3.20)$$

と書き直される。また、 θ 軸まわりの回転角 Ψ_x は

$$\Psi_x = - \frac{\partial W_0}{\partial x} \dots (3.21)$$

で与えられ、式(2.32)で与えられる等価せん断力 T_x, S_x

$$\left. \begin{aligned}
 T_x &= N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} \\
 S_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta}
 \end{aligned} \right\} \dots (3.22)$$

を導入する。

次に一次せん断変形理論を用いた場合と同様に、基礎方程式における各変数を

$$\begin{aligned}
 (\bar{U}, \bar{W}) &= H(\bar{U}_0, \bar{W}_0) \cos n\theta, \quad V_0 = H\bar{V}_0 \sin n\theta \\
 \bar{\Psi}_x &= (H/R)\bar{\Psi}_x \cos n\theta \\
 (N_x, N_\theta, S_x) &= E_0 R (\bar{N}_x, \bar{N}_\theta, \bar{S}_x) \cos n\theta \\
 (N_{x\theta}, N_{\theta x}, T_x) &= E_0 R (\bar{N}_{x\theta}, \bar{N}_{\theta x}, \bar{T}_x) \sin n\theta \\
 (M_x, M_\theta) &= E_0 R^2 (\bar{M}_x, \bar{M}_\theta) \cos n\theta \\
 (M_{x\theta}, M_{\theta x}) &= E_0 R^2 (\bar{M}_{x\theta}, \bar{M}_{\theta x}) \sin n\theta
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (3.23)$$

と変数分離して、無次元量

$$\begin{aligned}
 \xi &= x/L, \quad \eta = z/H, \quad (l, h) = (1/R)(L, H) \\
 \lambda^2 &= \rho_0 R^2 \omega^2 / E_0, \quad \bar{I}_1 = I_1 / \rho_0 R \\
 (\bar{a}_{ij}, a_{ij}, a_{ij}^*) &= (1/E_0 R) (\bar{A}_{ij}, A_{ij}, A_{ij}^*) \\
 (\bar{b}_{ij}, b_{ij}, b_{ij}^*) &= (1/E_0 R^2) (\bar{B}_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^*) \\
 (\bar{d}_{ij}, d_{ij}, d_{ij}^*) &= (1/E_0 R^3) (\bar{D}_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^*) \\
 &\quad (i, j = 1, 2, 6)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (3.24)$$

を導入すると、上記の基礎方程式は次のような連立の一階常微分方程式に書き直される。

$$\frac{d}{d\xi} \{Z_c(\xi)\} = l [U_c] \{Z_c(\xi)\} \quad \dots \dots (3.25)$$

ここで、 $\{Z_c(\xi)\}$ は状態量ベクトル

$$\{Z_c(\xi)\} = \{\bar{U}, \bar{V}_0, \bar{W}, \bar{\Psi}_x, \bar{M}_x, \bar{S}_x, \bar{T}_x, \bar{N}_x\}^T \quad \dots \dots (3.26)$$

であり、係数マトリックス $[U_c]$ の零でない要素は

$$\begin{aligned}
 U_{(1,2)} &= n(\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
 U_{(1,3)} &= \{a_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}b_{12} + n^2(b_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}d_{12})\} \\
 &\quad / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
 U_{(1,5)} &= \bar{b}_{11}/h / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
U(1, 8) &= -\bar{d}_{11}/h/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(2, 1) &= n\bar{a}_{66}/(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
U(2, 4) &= n(2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})/(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
U(2, 7) &= 1/h/(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
U(3, 4) &= -U(5, 6) = -1 \\
U(4, 2) &= n(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(4, 3) &= \{\bar{a}_{11}b_{12} - a_{12}\bar{b}_{11} + n^2(\bar{a}_{11}d_{12} - \bar{b}_{11}b_{12})\} \\
&\quad /(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(4, 5) &= -\bar{a}_{11}/h/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(4, 8) &= \bar{b}_{11}/h/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(5, 1) &= n^2h\{b_{66} + b_{66}^* - \bar{a}_{66}(2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})\} \\
&\quad /(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
U(5, 4) &= n^2h\{\bar{d}_{66} + 2d_{66} + d_{66}^* - (2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})^2\} \\
&\quad /(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
U(5, 7) &= -n(2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})/(\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
U(6, 2) &= nh[a_{22} + n^2b_{22} + \{(a_{12} + n^2b_{12}) \\
&\quad (\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) + (b_{12} + n^2d_{12}) \\
&\quad (\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})] \\
U(6, 3) &= h[a_{22}^* + 2n^2b_{22}^* + n^4d_{22}^* \\
&\quad + \{\bar{d}_{11}(a_{12} + n^2b_{12})^2 + \bar{a}_{11}(b_{12} + n^2d_{12})^2 \\
&\quad - 2\bar{b}_{11}(a_{12} + n^2b_{12})(b_{12} + n^2d_{12})\} \\
&\quad /(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) - \bar{i}_1\lambda^2] \\
U(6, 5) &= \{\bar{b}_{11}(a_{12} + n^2b_{12}) - \bar{a}_{11}(b_{12} + n^2d_{12})\} \\
&\quad /(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(6, 8) &= \{\bar{b}_{11}(b_{12} + n^2d_{12}) - \bar{d}_{11}(a_{12} + n^2b_{12})\} \\
&\quad /(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11}) \\
U(7, 2) &= n^2h[\bar{a}_{22} + \{\bar{a}_{12}(\bar{a}_{12}\bar{d}_{11} - \bar{b}_{11}\bar{b}_{12}) \\
&\quad + \bar{b}_{12}(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} - \bar{a}_{12}\bar{b}_{11})\}/(\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11}\bar{d}_{11})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{i}_1 h \lambda^2 \\
U(7,3) &= nh[a_{22}^* + (1+n^2)b_{22}^* + n^2 d_{22}^* \\
& + \{(a_{12} + n^2 b_{12})(\bar{a}_{12} \bar{d}_{11} - \bar{b}_{11} \bar{b}_{12}) \\
& + (b_{12} + n^2 d_{12})(\bar{a}_{11} \bar{b}_{12} - \bar{a}_{12} \bar{b}_{11})\} \\
& / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11} \bar{d}_{11})] \\
U(7,5) &= n(\bar{a}_{12} \bar{b}_{11} - \bar{a}_{11} \bar{b}_{12}) / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11} \bar{d}_{11}) \\
U(7,8) &= n(\bar{b}_{11} \bar{b}_{12} - \bar{a}_{12} \bar{d}_{11}) / (\bar{b}_{11}^2 - \bar{a}_{11} \bar{d}_{11}) \\
U(8,1) &= h[n^2 \{a_{66}^* - \bar{a}_{66}^2 / (\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})\} \\
& - \bar{i}_1 \lambda^2] \\
U(8,4) &= n^2 h \{b_{66} + b_{66}^* - \bar{a}_{66} (2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}) \\
& / (\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})\} \\
U(8,7) &= -n \bar{a}_{66} / (\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66})
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

で与えられる。以下、一次せん断変形理論の場合と同様な手順でクロスプライ積層複合円筒殻に関する振動数方程式が導出でき、数値計算によって殻の固有振動数と振動モード形を求めることができる。

3.5.1 三次せん断変形理論の適用

表 3-1 は本節前節の振動数計算に用いた、各層のせん断変形係数とせん断変形係数 (以下では「せん断係数」と呼ぶ) のせん断変形係数計算式について、せん断係数とせん断変形係数の計算式を比較して示している。表 3-1 のせん断係数とせん断変形係数の計算式を比較して示している。表 3-1 のせん断係数とせん断変形係数の計算式を比較して示している。

本章の振動数計算に用いた、せん断係数とせん断変形係数の計算式を比較して示している。表 3-1 のせん断係数とせん断変形係数の計算式を比較して示している。

3.3 固有振動数と振動モード

本章においては、同じ厚さと材料特性をもつラミナから構成されるクロスプライ積層複合円筒殻の曲げ振動に着目して数値計算を実施した。以下では積層数 N の異なる積層複合円筒殻の振動数パラメータを比較しているが、この場合の各ラミナの厚さは積層した殻全体の厚さが常に一定となるように与えている。すなわち、 N 層の場合には各ラミナの厚さは H/N で与えている。そして、数値計算において用いたラミナの材料特性は第2章で示した高強度グラファイト/エポキシ材を参考にして

$$E_1 = 20E_2, \quad G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

とし、せん断修正係数 κ^2 には $5/6$ を用いた。なお、振動数パラメータ λ はラミナの縦弾性係数 E_2 を用いて無次元化($E_0 = E_2$)している。また、以下ではラミナの積層構成を $\alpha_1/\alpha_2/\dots/\alpha_N$ なる表示を用いて表す。この表示は殻の内側から繊維配向角 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ の N 枚のラミナから構成される殻を意味している。

3.3.1 数値計算精度の検討

表3-1は本解析法の妥当性を調べるために、従来の金属材料からなる円筒殻(以下ではこれを等方性円筒殻と呼ぶ)の最低次の振動数パラメータ λ について、本解析法より得られた結果と白川⁶⁵の計算結果の比較を行ったものである。表より本解析法より求まる振動数は白川の結果に比べてわずかに高いが、両者は非常によい一致をしている。この結果より本解析法の妥当性が確認できる。

本章の数値計算においては、伝達マトリックス $[T(\xi, \xi_0)]$ を求めるためにRunge-Kutta-Gill積分法を用いているが、その計算精度は数値積分の分割数に依存する。表3-2は3層積層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)、2層積層($0^\circ/90^\circ$)の複合円筒殻に対して、 $\xi = 0 \sim 1$ の積分区間の分割数を変化させたときの振動数パラメータの収束状況を示している。

この表よりわかるように、分割数40を採用すれば振動数パラメータ λ は有効数字4桁の範囲内で一定値に収束している。したがって、以下の数値計算においては分割数40を採用して数値積分を実施した。

表3-1 等方性円筒殻の最低次の振動数パラメータの比較

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = E_2/2(1 + \nu_{12}), \\ \nu_{12} = 0.3, h = 0.2, \kappa^2 = \pi^2/12, \text{S.S. - S.S.} \end{array} \right)$$

l	n	Present	Sirakawa[55]
1.0	1	1.043	1.043
	2	0.9664	0.9662
	5	1.666	1.664
2.0	1	0.6145	0.6144
	2	0.4429	0.4427
	5	1.337	1.335

表3-2 クロスプライ積層円筒殻の振動数パラメータの収束状況

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, l = 1.0, h = 0.2, n = 2, \text{S.S. - S.S.} \end{array} \right)$$

Lamination	Mode	Number of divisions				
		10	20	30	40	50
0°/90°/0°	1st	1.881	1.881	1.881	1.881	1.881
	2nd	4.263	4.258	4.258	4.258	4.258
	3rd	6.622	6.592	6.589	6.589	6.589
0°/90°	1st	1.407	1.407	1.407	1.407	1.407
	2nd	3.453	3.448	3.448	3.448	3.448
	3rd	5.760	5.730	5.728	5.727	5.727

3.3.2 支持条件の影響

図3-2はクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と円周方向波数 n の関係を示しており、図(a)、(b)はそれぞれ3層対称($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)、2層逆対称($0^\circ/90^\circ$)積層複合円筒殻に対応している。また、各図における実線、破線、一点鎖線はそれぞれ両端単純支持(SS)、両端固定(CC)、一端固定他端自由(CF)の支持条件を有する場合に対応しており、各円周方向波数に対して軸方向三次の振動数まで示している。これらの図よりいずれの支持条件、積層形態の場合においても、円周方向波数 $n=2$ のときに振動数は最小となることがわかる。また、殻が両端単純支持された場合と両端固定の場合について振動数パラメータを比較すると、対称積層に比べて逆対称積層の方が支持条件の違いによる振動数の差が大きく、これは次数の高い振動においても認められる。さらに、両端単純支持と一端固定他端自由の場合を比較すると、一端固定他端自由の場合の方が全体的に振動数が低くなることがわかる。

図3-3は図3-2における $n=2$ に対応する振動モードを示す。図中の実線、破線、一点鎖線はそれぞれ面外方向変位 \bar{w} 、円周方向変位 \bar{v} 、軸方向変位 \bar{u} の軸方向分布を表しており、各図の変位量の最大値で基準化してある。また、図(a)、(b)、(c)はそれぞれ両端単純支持、両端固定、一端固定他端自由の支持条件を有する場合に対応している。まず、対称積層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)と逆対称積層($0^\circ/90^\circ$)の場合の変位分布を比較すると、いずれの支持条件、振動モード形においても変位 \bar{w} と変位 \bar{v} の分布はそれぞれよく似ているが、変位 \bar{u} に関しては逆対称積層の方が対称積層の場合に比べて変位量が大きいことが認められ、逆対称積層の場合には面内(伸び)変形と面外(曲げ)変形の連成が強くなることを示している。次に、殻が両端単純支持された場合と両端固定された場合を比べると、いずれの積層形態の場合でも変位 \bar{w} と変位 \bar{v} の分布の大きな変化はなく、両端付近において

支持条件の影響が認められる程度である。しかしながら、変位 \bar{u} については、対称積層に比べて逆対称積層の方が変形量が大きいため、支持条件が両端単純支持から両端固定に変化すると、殻の両端で軸方向の変形が拘束されるため、変位分布に比較的大きな変化が生じているものと考えられる。これは対称積層に比べると逆対称積層円筒殻の固有振動数の方が支持条件の変化に伴って大きく変化すること(図3-2)に対応している。また、一端固定他端自由の場合においても、対称積層に比べて逆対称積層の方が軸方向の変形が大きいことが認められる。

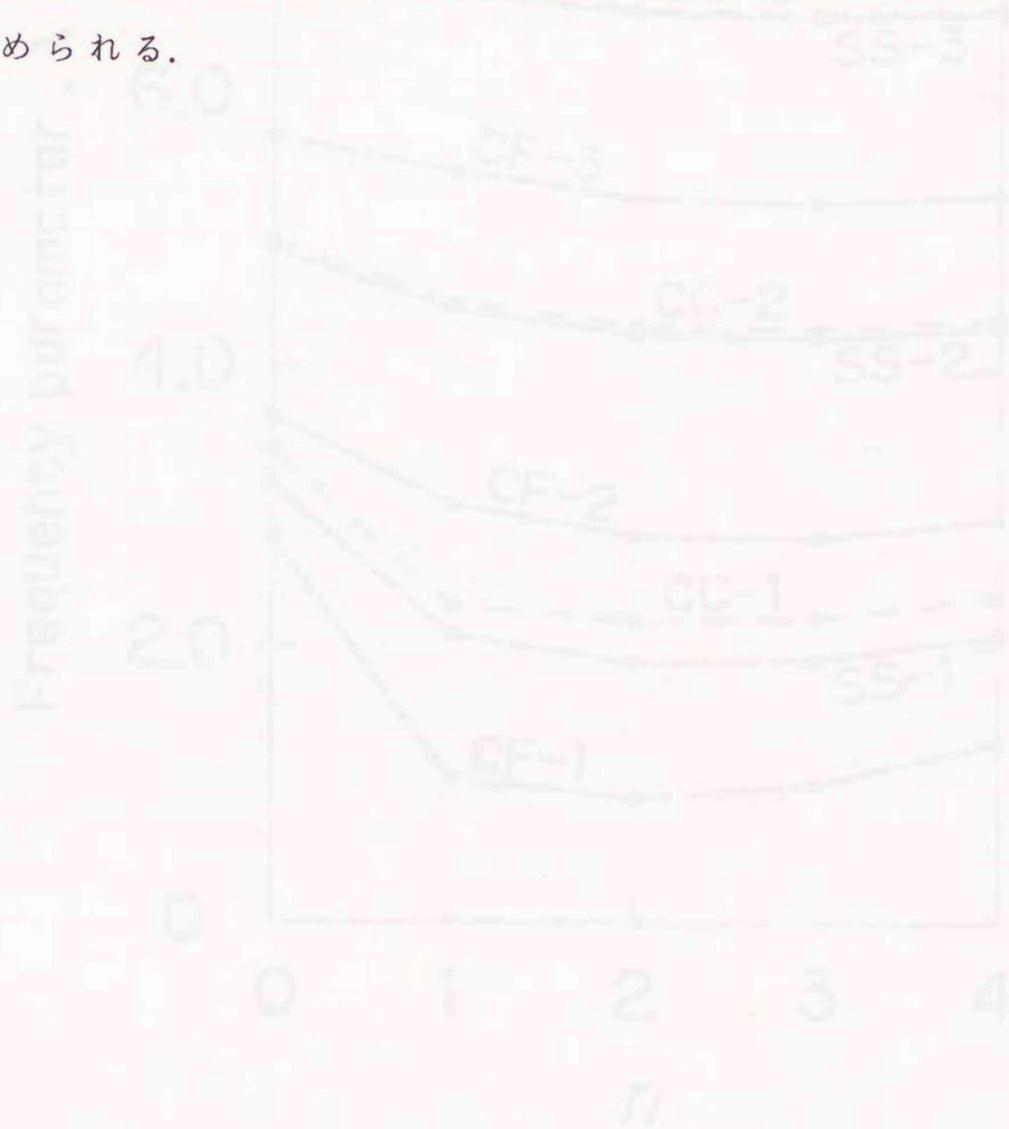


図3-2 (a) 対称積層・逆対称積層の固有振動数とモード番号との関係 (対称積層・逆対称積層の固有振動数とモード番号との関係)

($K_1=0, K_2=0, K_3=0, K_4=0, K_5=0, K_6=0$)
($U_1=0, U_2=0, U_3=0, U_4=0, U_5=0, U_6=0$)

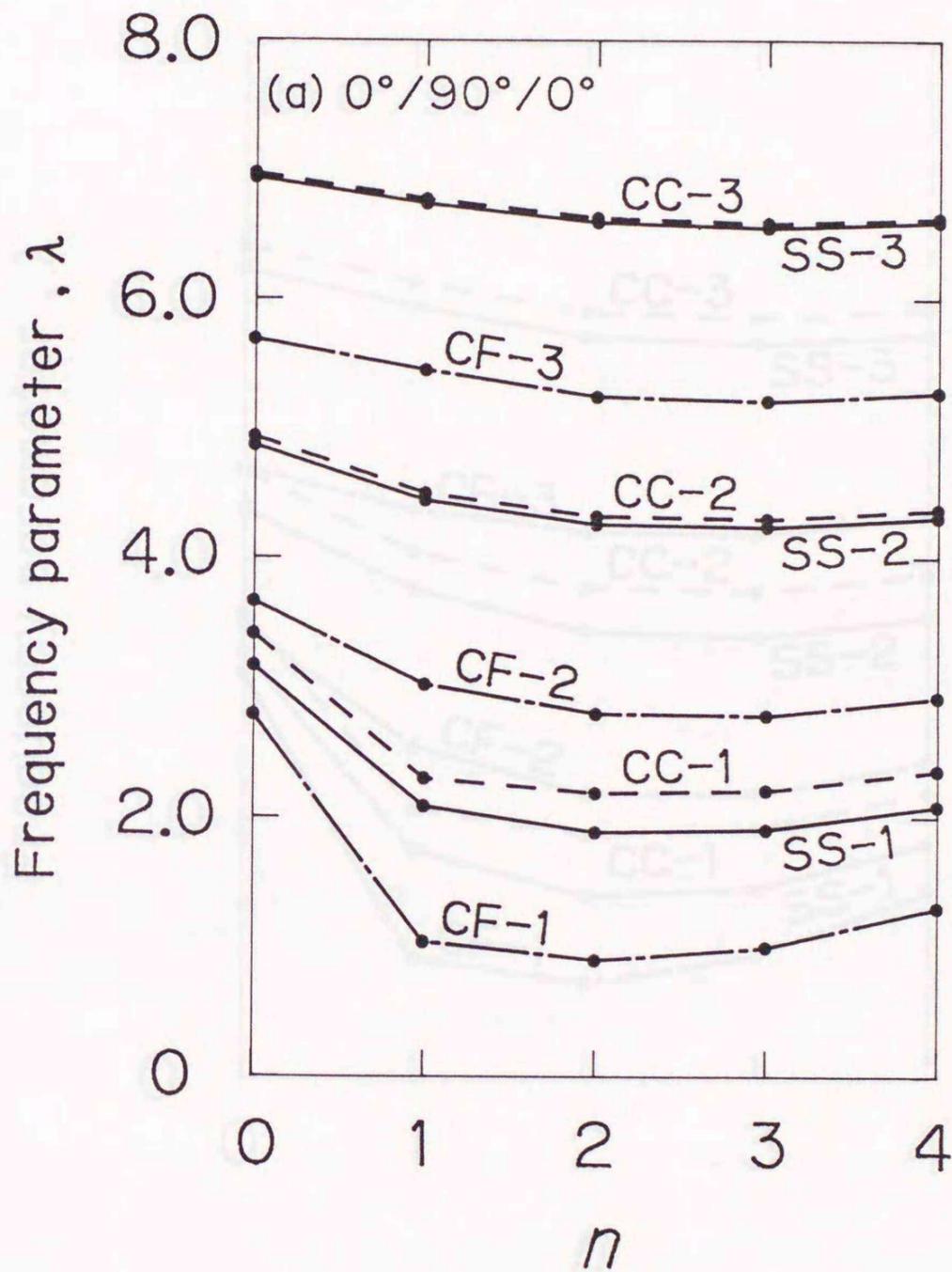


図3-2(a) 3層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)クロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と円周方向波数 n の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

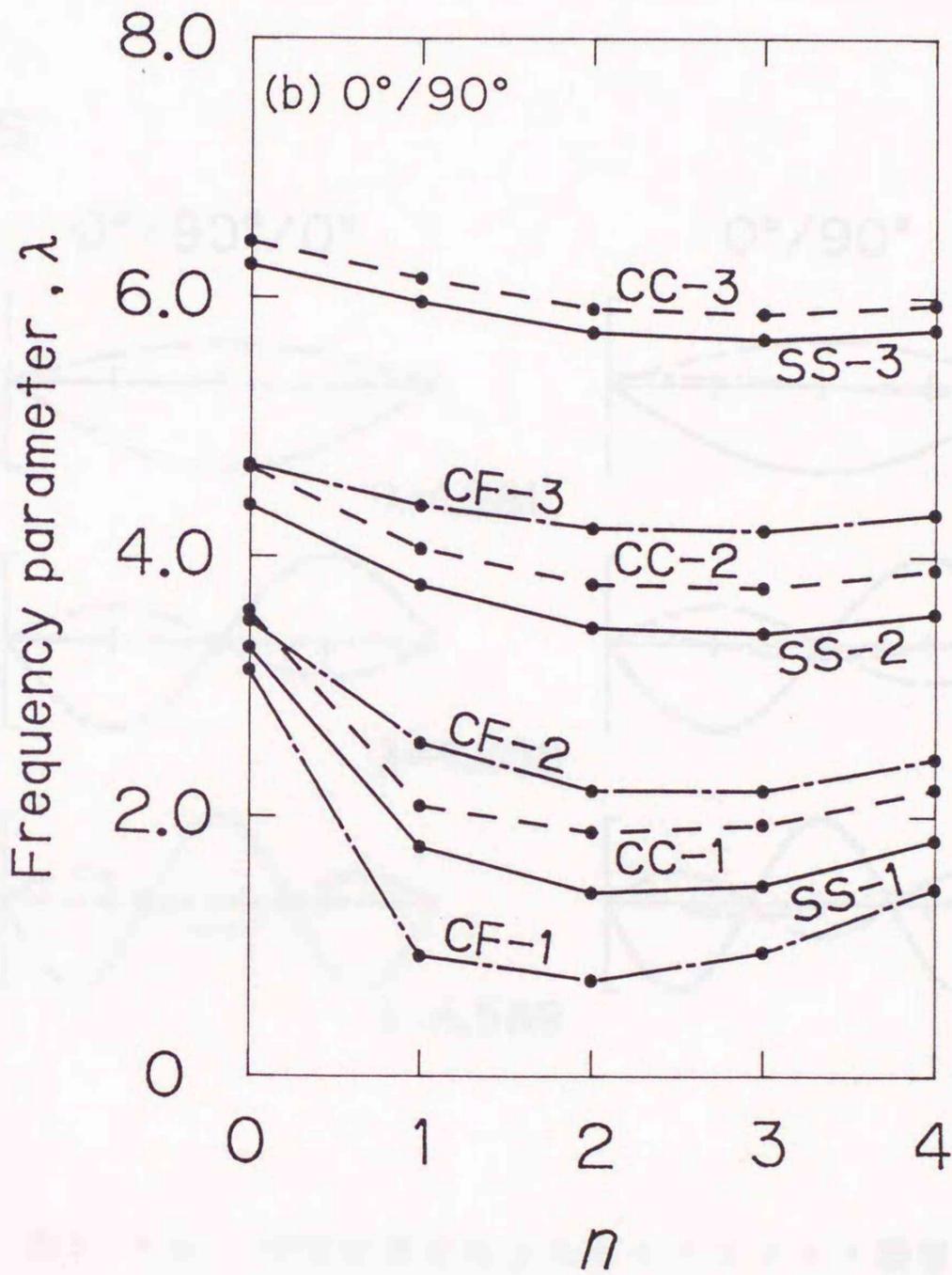


図3-2(b) 2層(0°/90°)クロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータλと円周方向波数nの関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

(a) S-S

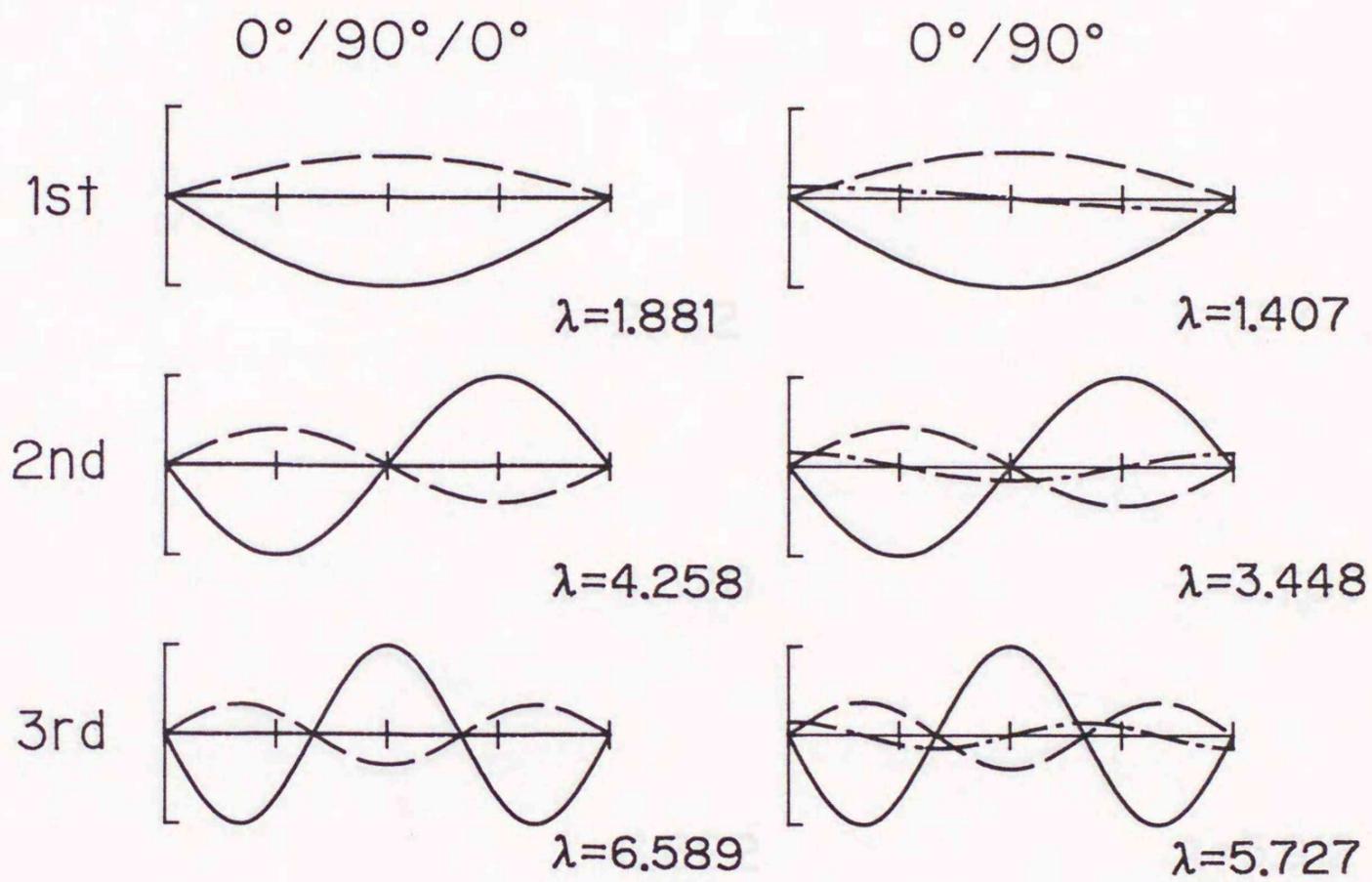


図 3-3(a) 両端単純支持されたクロスプライ積層
複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0, h=0.2, n=2. \end{array} \right)$$

(b) C-C

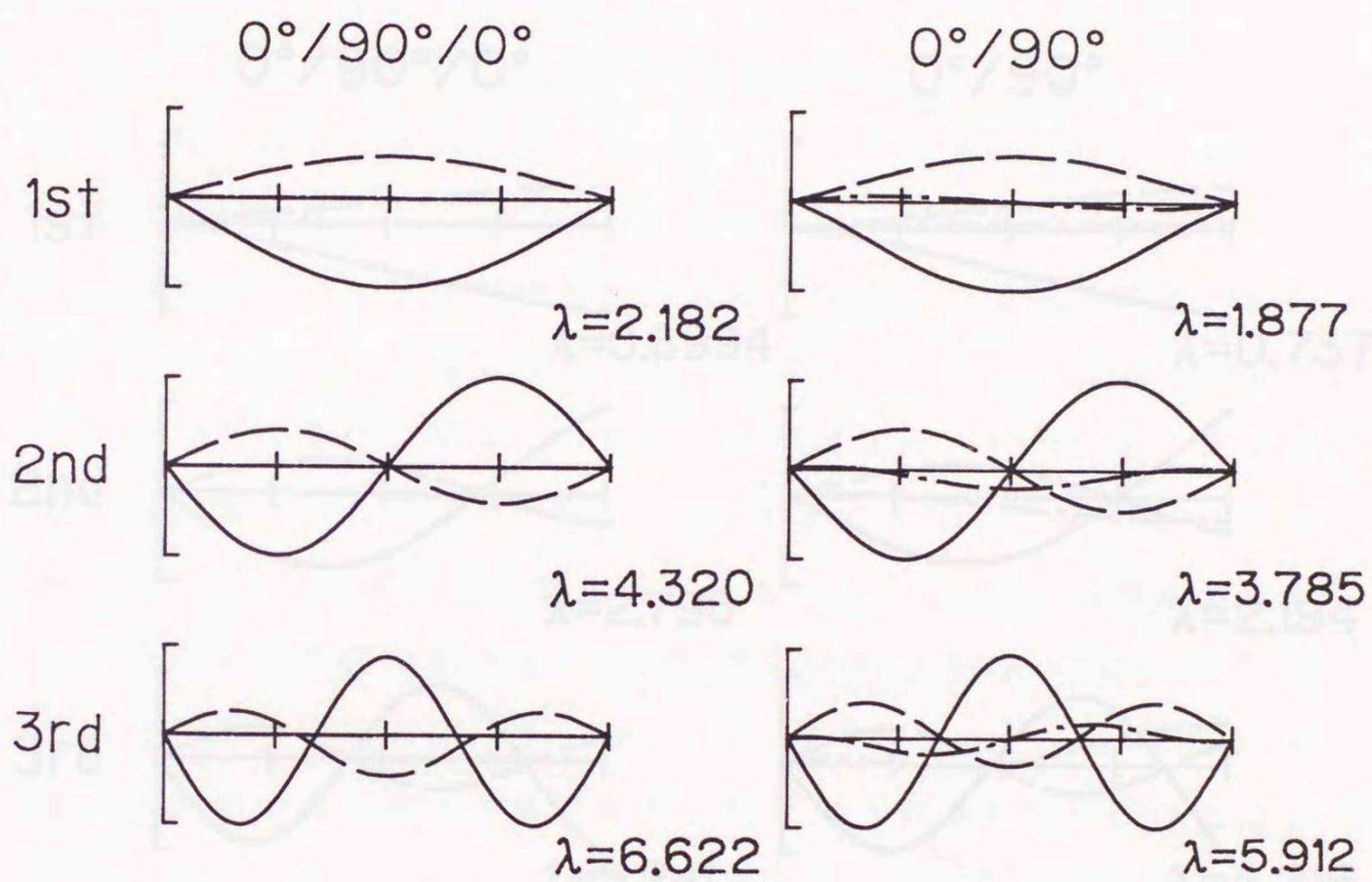


図 3-3(b) 両端固定されたクロスプライ積層
複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0, h=0.2, n=2. \end{array} \right)$$

(c) C-F

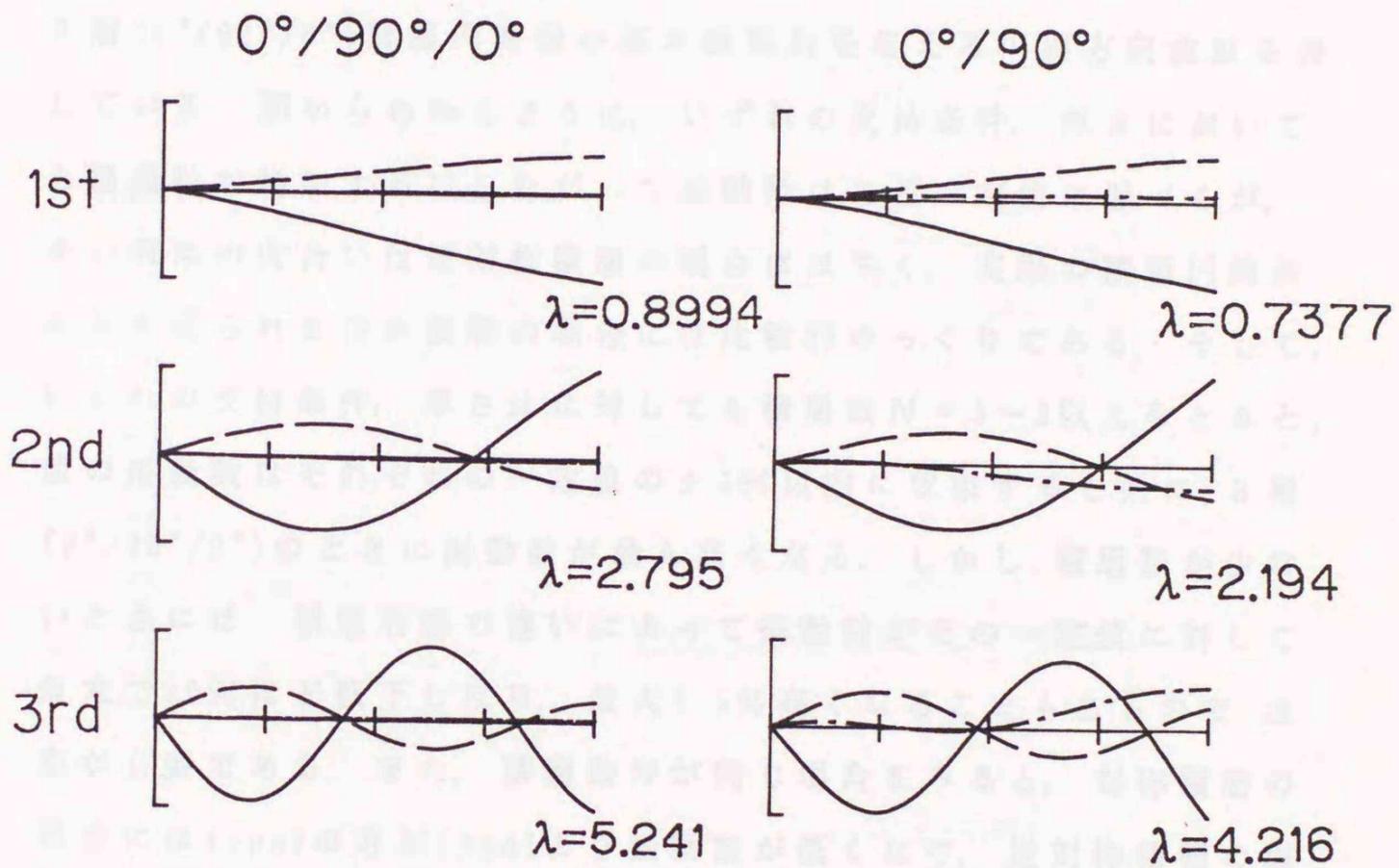


図3-3(c) 片持ちクロスプライ積層複合円筒殻の振動モード

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0, h=0.2, n=2. \end{array} \right]$$

3.3.3 ラミナの積層形態の影響

図3-4はクロスプライ積層複合円筒殻の最低次の振動数パラメータ λ と積層数 N の関係を示しており、図(a), (b)はそれぞれ殻が両端単純支持、両端固定された場合に対応している。図において、実線は殻の内側からラミナを $\alpha = 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, \dots$ と積層した場合(type1)の対称積層殻(奇数積層数)と逆対称積層殻(偶数積層数)の振動数をそれぞれ結んだものであり、破線は $\alpha = 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, \dots$ とした場合(type2)に対応している。また、 n はそれぞれの厚さ比 h に対して、3層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)積層円筒殻の基本振動数を与える円周方向波数を表している。図からわかるように、いずれの支持条件、厚さにおいても積層数が増加するにしたがって振動数はある一定値に近づくが、その収束の度合いは逆対称積層の場合にははやく、実際の積層円筒殻に多く見られる対称積層の場合には比較的ゆっくりである。そして、いずれの支持条件、厚さ比に対しても積層数 $N = 5 \sim 8$ 以上をとると、殻の振動数はそれぞれの一定値の $\pm 5\%$ 以内に収束すると共に、3層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)のときに振動数が最も高くなる。しかし、積層数が少ないときには、積層形態の違いによって振動数がその一定値に対して最大で20%ほど低下したり、最大7.5%高くなることもあるので、注意が必要である。また、積層数 N が同じ場合をみると、対称積層の場合にはtype2の方がtype1より振動数が低くなり、逆対称積層の場合にはその逆の関係があることがわかる。つまり、奇数積層数の対称積層の場合には、円周方向に繊維の通っているラミナ($\alpha = 90^\circ$)の数が多いほど、そして逆対称積層の場合にはこのラミナが殻のより外側に積層されるほど円筒殻の振動数が低くなる。このように、クロスプライ積層複合円筒殻においては、ラミナの積層数、積層順序の違いによって固有振動数には最大25%の差が生じ、積層形態の適当な選択によって殻の固有振動数の最大化(最適化)を実現することができる。

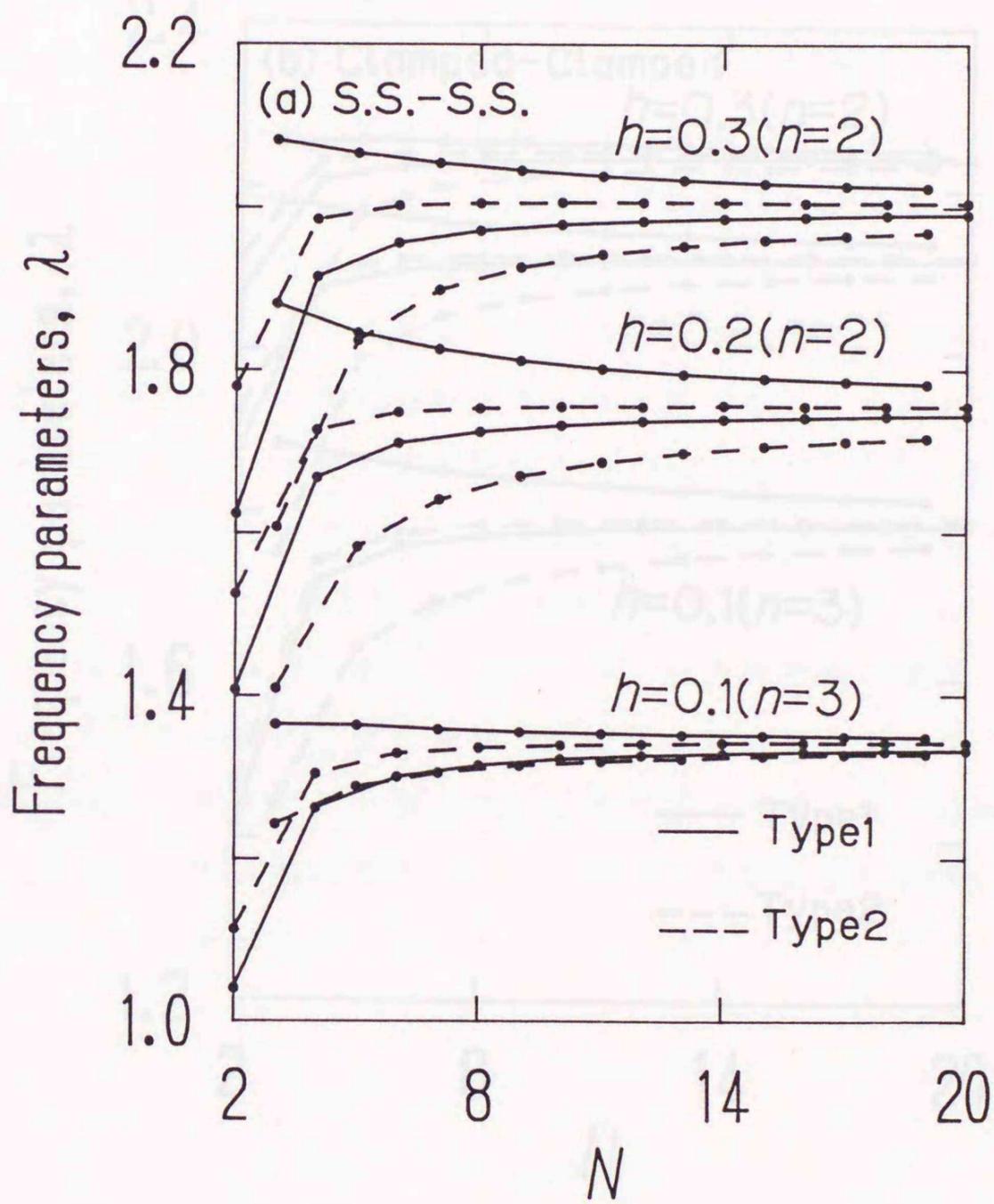


図 3-4(a) 両端単純支持されたクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ とラミナの積層数 N の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0. \end{array} \right)$$

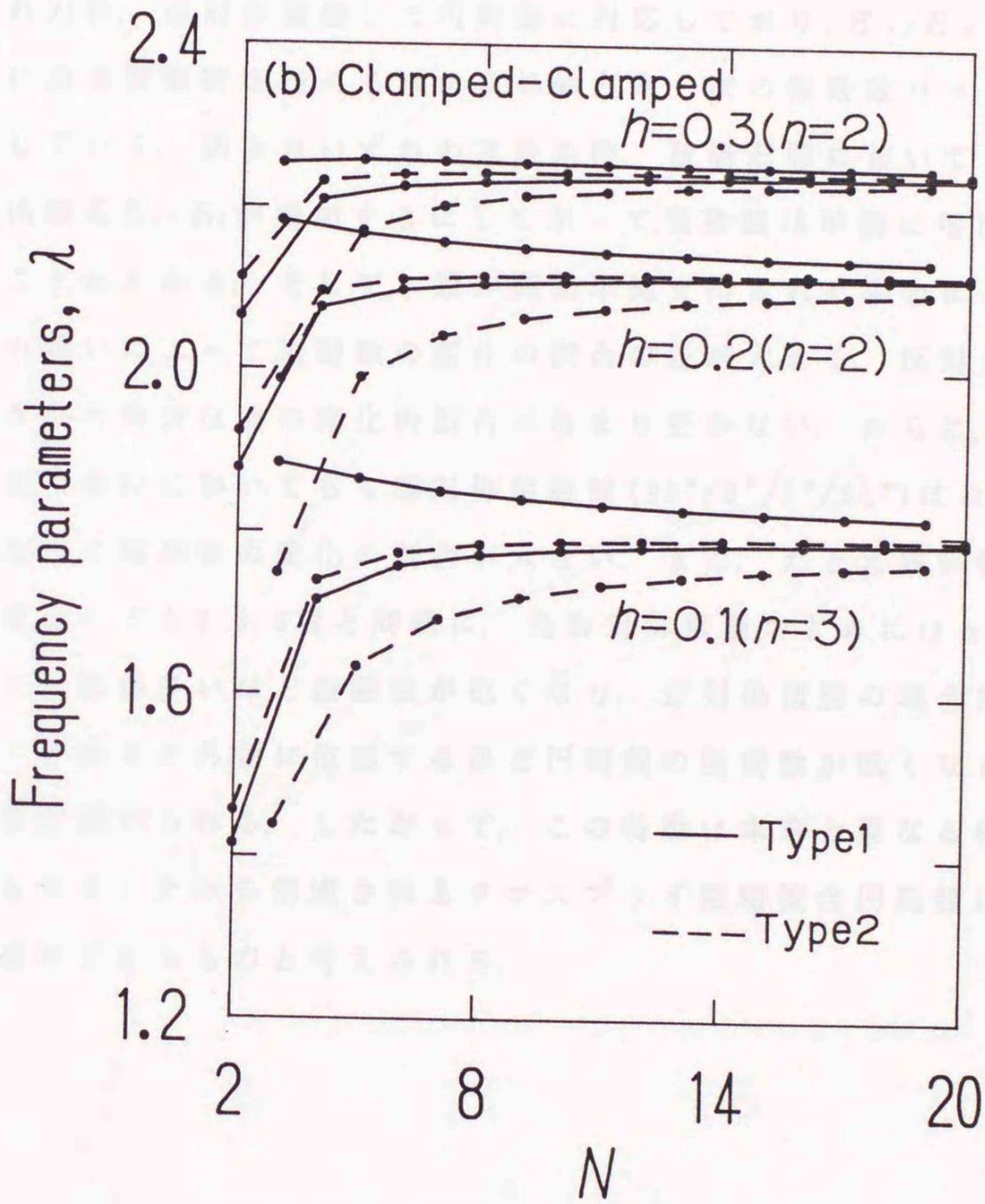


図 3-4(b) 両端固定されたクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ とラミナの積層数 N の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=1.0. \end{array} \right)$$

3.3.4 ラミナの材料特性の影響

図3-5はクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と各ラミナの縦弾性係数比 E_1/E_2 の関係を示しており、図(a), (b), (c)はそれぞれ殻が両端単純支持、両端固定、一端固定他端自由の支持条件を有する場合に対応している。また、図中の実線、破線はそれぞれ対称、逆対称積層した円筒殻に対応しており、 $E_1/E_2 = 20$ のときに基本振動数を与える $n = 2$ の軸方向一次の振動数パラメータを示している。図よりいずれの支持条件、積層形態においても、縦弾性係数比 E_1/E_2 が増加するにしたがって振動数は単調に増加していることがわかる。そして、殻が両端単純支持された場合には積層形態の違いによって振動数の変化の割合の差が大きく、反対に両端固定された場合はその変化の割合にあまり差がない。さらに、いずれの支持条件においても4層対称積層殻($90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$)はほかの場合に比べて振動数の変化の割合が大きい。また、たとえ縦弾性係数比が変化しても3.3.3項と同様に、奇数対称積層のときには $\alpha = 90^\circ$ のラミナ数が多いほど振動数が低くなり、逆対称積層の場合にはこのラミナがより外側に位置するほど円筒殻の振動数が低くなるという特徴が認められる。したがって、この特徴は本章と異なる材料特性をもつラミナから構成されるクロスプライ積層複合円筒殻に対しても適用できるものと考えられる。

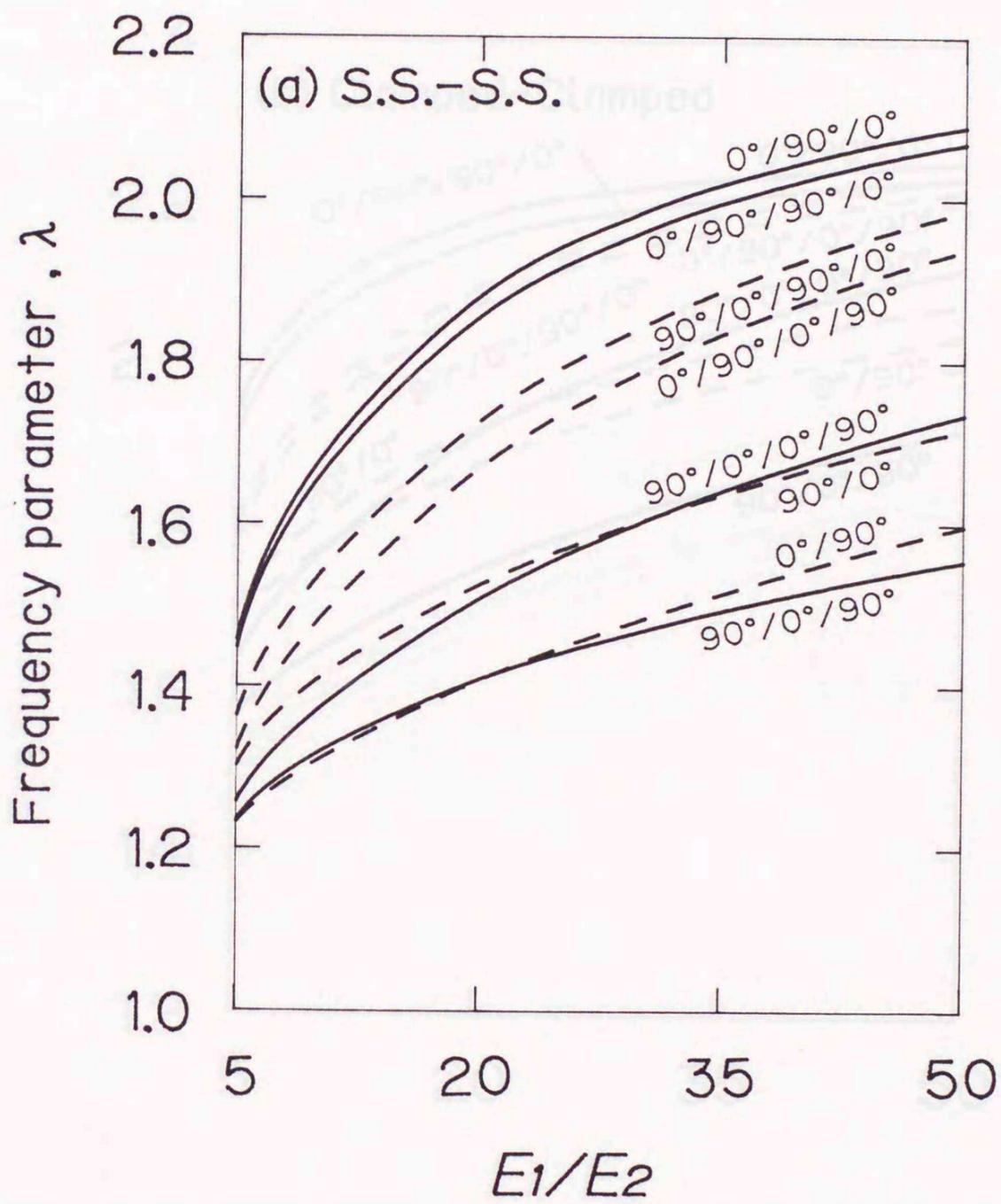


図 3-5(a) 両端単純支持されたクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ とラミナの縦弾性係数比の関係

$$\left(\begin{array}{l} G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, \\ l=1.0, h=0.2, n=2. \end{array} \right)$$

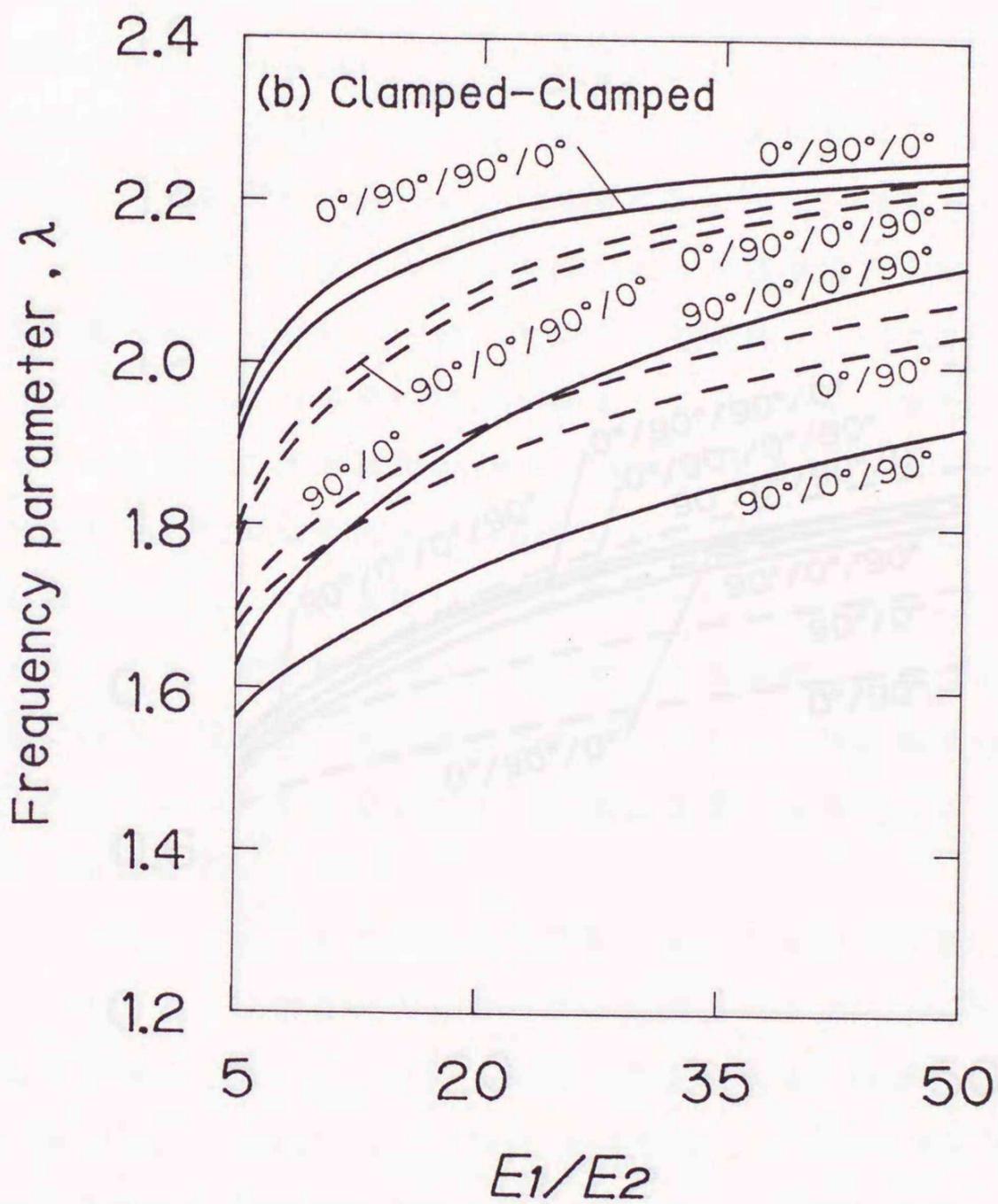


図3-5(b) 両端固定されたクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ とラミナの縦弾性係数比の関係

$$\left(\begin{array}{l} G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \quad G_{23}=0.5E_2, \quad \nu_{12}=0.25, \\ l=1.0, \quad h=0.2, \quad n=2. \end{array} \right)$$

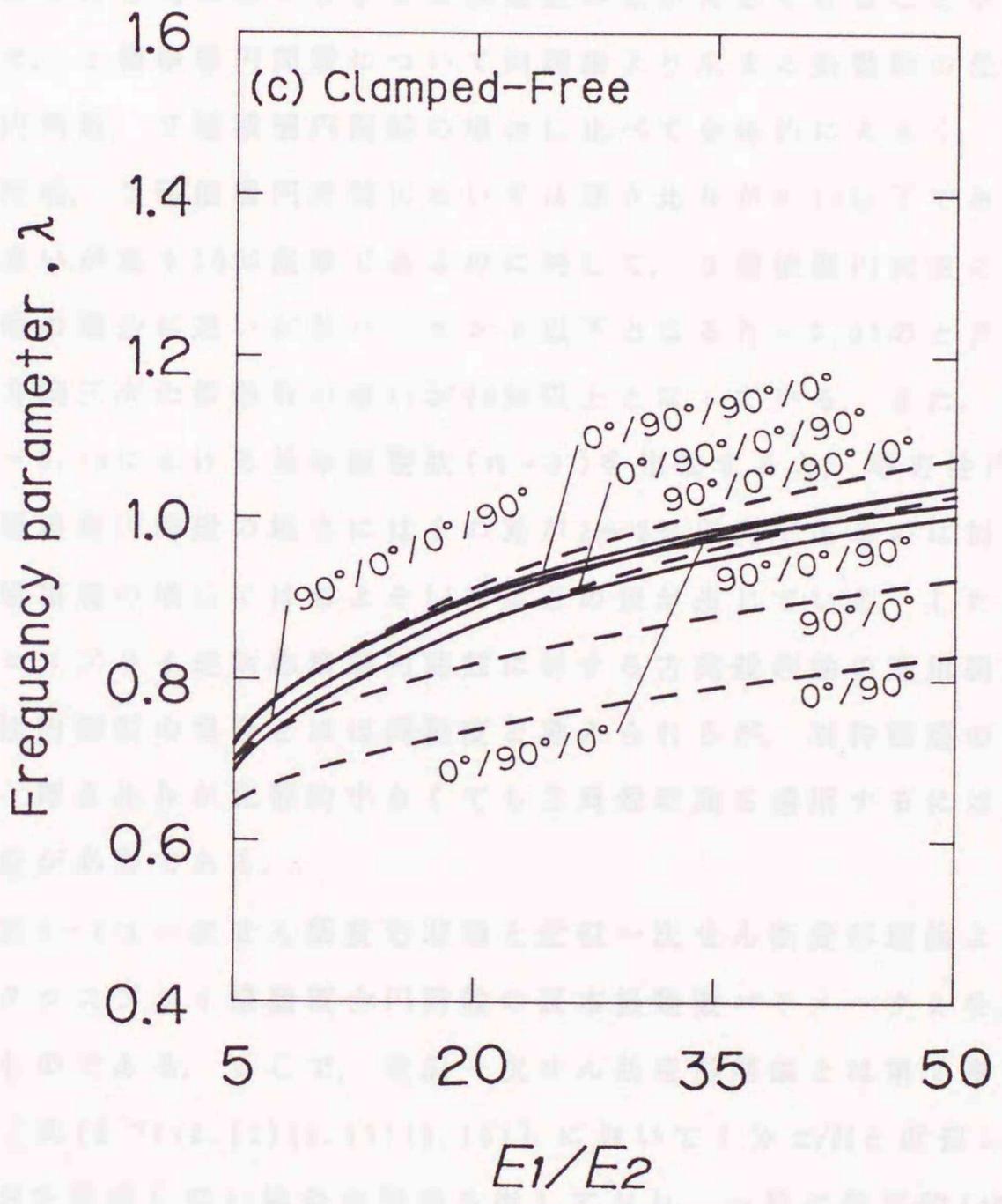


図3-5(c) 片持ちのクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ とラミナの縦弾性係数比の関係

$$\left(\begin{array}{l} G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \quad G_{23}=0.5E_2, \quad \nu_{12}=0.25, \\ l=1.0, \quad h=0.2, \quad n=2. \end{array} \right)$$

3.3.5 理論の違いによる固有振動数の比較

表3-3, 表3-4, 表3-5はそれぞれ等方性円筒殻, 3層対称積層円筒殻, 2層逆対称積層円筒殻について, 一次せん断変形理論と古典殻理論より求まる振動数パラメータ λ を比較したものである。それぞれの表において殻の厚さが厚くなるほど, または振動の次数が高くなるほど両理論より求まる振動数の差が大きくなることがわかる。また, 3層積層円筒殻について両理論より求まる振動数の差は等方性円筒殻, 2層積層円筒殻の場合に比べて全体的に大きく, 等方性円筒殻, 2層積層円筒殻においては厚さ比 h が0.10以下であればその違いが高々10%程度であるのに対して, 3層積層円筒殻の場合には他の場合に違いが数パーセント以下となる $h=0.05$ のときですら, 軸方向三次の振動数の違いが20%以上となっている。また, 厚さ比 $h=0.10$ における基本振動数($n=3$)を比較すると, 等方性円筒殻, 2層積層円筒殻の場合にはその差が2~3%以内であるのに対して, 3層積層の場合にはおよそ11%ほどの差が生じている。したがって, クロスプライ逆対称積層円筒殻に対する古典殻理論の適用範囲は等方性円筒殻の場合とほぼ同程度と考えられるが, 対称積層の場合には, 厚さ比 h が比較的小さくても古典殻理論を適用するには十分な注意が必要である。

表3-6は一次せん断変形理論と近似一次せん断変形理論より求まるクロスプライ積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ を比較したものである。ここで, 近似一次せん断変形理論とは第2章の定式化[式(2.7)(2.12)(2.15)(2.16)]において $1 \gg z/R$ と近似して項 z/R を考慮しない場合の理論を指しており, 一般に偏平殻(パネル)に対して適用される偏平殻理論と本質的に同じものである。この表より殻が長く厚い場合には両理論より求まる振動数の差が大きいことがわかる。また, 逆対称積層円筒殻に対しては対称積層の場合に比べてその振動数の差が大きく, 近似理論より求まる振動数は一次

せん断変形理論で求めたそれに比べて最大13%ほど大きな値になっている。これは逆対称積層の場合には対称積層に比べて殻の伸び変形と曲げ変形の連成が強くなり、 z/R の影響を無視した近似理論ではその連成効果を十分に算入できず振動数を過大評価しているものと考えられる。したがって、逆対称な積層構成を有するクロスプライ積層複合円筒殻に対する近似一次せん断変形理論の適用には注意が必要である。

R	n	Theory	1. 31	1. 32	1. 33
0.10	0	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
	1	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
	2	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
	3	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
4	FSDT	1.313	1.317	1.311	
	CTST	1.313	1.311	1.311	
	Diff'er.	0.0	0.0	0.0	

R	n	Theory	1. 31	1. 32	1. 33
0.10	0	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
	1	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
	2	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
	3	FSDT	1.313	1.317	1.311
		CTST	1.313	1.311	1.311
		Diff'er.	0.0	0.0	0.0
4	FSDT	1.313	1.317	1.311	
	CTST	1.313	1.311	1.311	
	Diff'er.	0.0	0.0	0.0	

FSDT : First-order Shear Deformation Theory
 CTST : Classical Shell Theory
 Diff'er. : (FSDT - Classical Shell Theory) (%)

表3-3 一次せん断変形理論と古典殻理論より求まる
等方性円筒殻の振動数パラメータ

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = E_2/2(1+\nu_{12}), \\ \nu_{12} = 0.3, l = 1.0, \text{S.S. - S.S.} \end{array} \right)$$

n	h	Theory	1 st	2 nd	3 rd
0	0.01	FSDT	0.9954	1.006	1.034
		CTST	0.9954	1.006	1.035
		Differ.	0.0	0.0	0.1
	0.05	FSDT	1.004	1.153	1.625
		CTST	1.005	1.161	1.671
		Differ.	0.1	0.7	2.8
	0.10	FSDT	1.031	1.483	2.531
		CTST	1.036	1.549	2.856
		Differ.	0.5	4.5	12.8
	0.15	FSDT	1.072	1.831	3.243
		CTST	1.085	2.035	4.132
		Differ.	1.2	11.1	27.4
	0.20	FSDT	1.121	2.136	3.754
		CTST	1.149	2.563	5.427
		Differ.	2.5	20.0	44.6

h	n	Theory	1 st	2 nd	3 rd
0.10	0	FSDT	1.031	1.483	2.531
		CTST	1.036	1.549	2.856
		Differ.	0.5	4.5	12.8
	1	FSDT	0.9321	1.484	2.548
		CTST	0.9370	1.553	2.879
		Differ.	0.5	4.6	13.0
	2	FSDT	0.7750	1.496	2.597
		CTST	0.7817	1.576	2.949
		Differ.	0.9	5.3	13.6
	3	FSDT	0.7112	1.545	2.683
		CTST	0.7247	1.645	3.071
		Differ.	1.9	6.5	14.5
	4	FSDT	0.7891	1.649	2.810
		CTST	0.8177	1.781	3.250
		Differ.	3.6	8.0	15.7

FSDT : First-order Shear Deformation Theory
 CTST : Classical Thin Shell Theory
 Differ.: $(\lambda_{CTST} - \lambda_{FSDT}) / \lambda_{FSDT} \times 100$ (%)

表3-4 一次せん断変形理論と古典殻理論より求まる
クロスプライ3層積層円筒殻の振動数パラメータ

$$\left(E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \right. \\ \left. \nu_{12}=0.25, l=1.0, 0^\circ/90^\circ/0^\circ, S.S.-S.S. \right)$$

n	h	Theory	1 st	2 nd	3 rd
0	0.01	FSDT	2.714	2.756	2.930
		CTST	2.714	2.757	2.937
		Differ.	0.0	0.0	0.2
	0.05	FSDT	2.775	3.472	5.071
		CTST	2.783	3.692	6.257
		Differ.	0.3	6.3	23.4
	0.10	FSDT	2.915	4.275	6.329
		CTST	2.986	5.695	11.59
		Differ.	2.4	33.2	83.1
	0.15	FSDT	3.057	4.675	6.755
		CTST	3.296	7.981	17.11
		Differ.	7.8	70.7	153.3
	0.20	FSDT	3.168	4.873	6.934
		CTST	3.686	10.35	22.63
		Differ.	16.4	112.4	226.4

h	n	Theory	1 st	2 nd	3 rd
0.10	0	FSDT	2.915	4.275	6.329
		CTST	2.986	5.695	11.59
		Differ.	2.4	33.2	83.1
	1	FSDT	1.828	3.909	6.173
		CTST	1.899	5.041	11.64
		Differ.	3.9	29.0	88.6
	2	FSDT	1.470	3.644	6.003
		CTST	1.584	5.047	11.81
		Differ.	7.8	38.5	96.7
	3	FSDT	1.365	3.546	5.925
		CTST	1.509	5.097	12.38
		Differ.	10.5	43.7	108.9
	4	FSDT	1.408	3.544	5.914
		CTST	1.577	5.184	11.04
		Differ.	12.0	46.3	86.7

FSDT : First-order Shear Deformation Theory
 CTST : Classical Thin Shell Theory
 Differ. : $(\lambda_{CTST} - \lambda_{FSDT}) / \lambda_{FSDT} \times 100$ (%)

表 3-5 一次せん断変形理論と古典殻理論より求まる
クロスプライ 2 層積層円筒殻の振動数パラメータ

$$\left(E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \right. \\ \left. \nu_{12}=0.25, l=1.0, 0^\circ/90^\circ, \text{S.S.}-\text{S.S.} \right)$$

n	h	Theory	1 st	2 nd	3 rd
0	0.01	FSDT	3.243	3.255	3.295
		CTST	3.243	3.256	3.297
		Differ.	0.0	0.0	0.1
	0.05	FSDT	3.243	3.423	4.030
		CTST	3.246	3.449	4.169
		Differ.	0.1	0.8	3.4
	0.10	FSDT	3.254	3.778	5.101
		CTST	3.269	3.960	6.018
		Differ.	0.5	4.8	18.0
	0.15	FSDT	3.274	4.125	5.816
		CTST	3.312	4.652	8.031
		Differ.	1.2	12.8	38.1
	0.20	FSDT	3.299	4.399	6.251
		CTST	3.374	5.424	9.934
		Differ.	2.3	23.3	58.9

h	n	Theory	1 st	2 nd	3 rd
0.10	0	FSDT	3.254	3.778	5.100
		CTST	3.269	3.960	6.018
		Differ.	0.5	4.8	18.0
	1	FSDT	1.669	3.156	4.842
		CTST	1.677	3.320	5.709
		Differ.	0.5	5.2	17.9
	2	FSDT	1.172	2.665	4.530
		CTST	1.184	2.857	5.419
		Differ.	1.0	7.2	19.6
	3	FSDT	1.040	2.478	4.381
		CTST	1.067	2.707	5.326
		Differ.	2.6	9.2	21.6
4	FSDT	1.174	2.492	4.369	
	CTST	1.235	2.770	5.378	
	Differ.	5.2	11.2	23.1	

FSDT : First-order Shear Deformation Theory
 CTST : Classical Thin Shell Theory
 Differ. : $(\lambda_{\text{CTST}} - \lambda_{\text{FSDT}}) / \lambda_{\text{FSDT}} \times 100$ (%)

表3-6 一次せん断変形理論と近似一次せん断変形理論より求まる
クロスプライ積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ

$$\left[\begin{array}{l} E_1=40E_2, G_{12}=G_{31}=0.6E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, \text{S.S.}-\text{S.S.} \end{array} \right]$$

h	l	$0^\circ/90^\circ/0^\circ$		$0^\circ/90^\circ$	
		FSDT	AFSDT	FSDT	AFSDT
0.2	1.0	1.994	2.005	1.512	1.579
	2.0	0.8617	0.8873	0.6833	0.7742
0.1	1.0	1.567	1.577	1.132	1.186
	2.0	0.6656	0.6750	0.5710	0.6079

FSDT : First-order Shear Deformation Theory
AFSDT : Approximate FSDT

3.4 本章のまとめ

本章では最も基本的な積層形態を有するクロスプライ積層複合円筒殻に着目し、伝達マトリックス法を用いてその振動特性を明らかにした。その際、第2章で誘導した基礎方程式をクロスプライ積層複合円筒殻に関する基礎式に書き改め、伝達マトリックス法を用いて解析し、殻の支持条件を適用して振動数方程式を導いた。そして、解析結果に基づいて数値計算を実施し、殻の振動数パラメータと振動モードを求め、殻の両端における支持条件やラミナの積層形態の違いが振動特性に与える影響を検討した。さらに、古典殻理論や近似一次せん断変形理論を用いた同様の理論解析、並びに数値計算も合わせて行い、クロスプライ積層複合円筒殻に対する両理論の適用範囲を示した。その結果を要約すると以下のようなになる。

- ① 殻の支持条件の違いによる振動特性の変化は積層形態によって大きく異なり、これは積層形態の違いによる面内変形と面外変形の連成度合の違いに起因する。例えば、逆対称積層殻の場合は対称積層殻に比べて殻の軸方向の変形が大きくなるために、両端での軸方向変位の拘束によって振動特性が大きく変化する。
- ② クロスプライ積層複合円筒殻の固有振動数はラミナの積層数を増やすにつれて一定値に近づき、殻の支持条件、厚さによって異なるものの積層数5~8程度で振動数は一定値の±5%以内に収束する。また、積層数が少ないときは積層順序の違いにより最大25%以上の差が振動数に生じるが、3層対称積層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)を選択することによって固有振動数の最大化が可能となる。

- ③ 同じ数のラミナから構成される場合，奇数積層数のクロスプライ対称積層円筒殻については円周方向に繊維の通っているラミナの数が多いほど固有振動数が低くなり，クロスプライ逆対称積層円筒殻の場合にはこのラミナが殻のより外側に位置するほど振動数が低くなる。
- ④ クロスプライ積層複合円筒殻の固有振動数は各ラミナの縦弾性係数比が増加するにつれて単調に増加するが，積層形態の違いによってその変化の割合に差が生じる。なお，縦弾性係数比が変化した場合でも結論③の特徴が確認でき，これよりこの特徴はここで扱った材料特性と異なる特性を有する場合に対しても適用できるものと考えられる。
- ⑤ クロスプライ逆対称積層円筒殻に対する古典殻理論の適用範囲は等方性円筒殻の場合とほぼ同程度であるが，対称積層の場合には殻の厚さが比較的小さい場合でも固有振動数を過大評価する傾向がある。また， z/R を微小量と考えた近似一次せん断変形理論を用いた場合には，殻が長く厚いほど固有振動数を過大評価する傾向があり，特に逆対称積層の場合にはその傾向が顕著となるためにこの近似理論の適用には注意が必要となる。

第4章 アングルプライ積層複合円筒殻の自由振動

4.1 まえがき

これまでのFRPの構造材料としての適用においては、FRPラミナのもつ異方性の影響が出ないように積層して、構造の軽量化を主たる目的とした設計が少なくなかった。しかしながら、近年、航空機の前進翼やタービンブレードなどに代表されるように、ラミナのもつ異方性を積極的に利用するテーラーリング技術の開発が進められている。これはラミナのもつ材料特性、積層順序、積層数、繊維配向角等を適切に選択することにより、使用目的に合った力学的特性を構造部材に与えるという今までよりも一歩進んだFRPの適用方法である。したがって、今後、益々厳しくなる高性能化、軽量化の要求に対応するため、このようなFRPの異方性をうまく活かした構造の最適設計が望まれている。また、実際に用いられている積層複合円筒殻には繊維配向角 $\alpha = 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ のラミナから構成されるものも多く見受けられるが、この繊維配向角の選択は実験的研究によることが多く、この組み合わせが殻の静的強度、固有振動数、座屈荷重などに対して最適なものであるかどうかについては必ずしも明らかでない。さらに、ラミナのもつ異方性の影響が出ないようにと考えられた従来の設計においては、殻を構成するラミナの積層数を多く用いているが、異方性を積極的に利用する場合、それが適切かどうかについても明らかではない。したがって、構造の最適設計実現のために、ラミナの繊維配向角、積層数などの各種積層パラメータが積層複合円筒殻の振動特性に与える影響を正確に把握することは重要となっている。

しかし、これまでの積層複合円筒殻の振動に関する研究においては、第3章で取扱ったクロスプライ積層複合円筒殻に関するものが

ほとんどであり、その他の積層形態、例えば各ラミナの繊維配向角が殻の軸方向、円周方向と一致しないアングルプライ積層複合円筒殻(図4-1)を取扱った研究報告は少ない。また、実際に多く見受けられる繊維配向角 0° , $\pm 45^\circ$, 90° のラミナから構成される積層複合円筒殻に関する研究もあまりない。そこで、本章ではアングルプライ積層複合円筒殻や面内擬似等方性と考えられる積層構成(繊維配向角 0° , $\pm \alpha$, 90° のラミナからなる積層構成)からなる複合円筒殻(図4-2)に着目し、それらが様々な支持条件、積層数、積層順序を有する場合について固有振動数と振動モードを求め、殻の支持条件、積層形態の違いが積層円筒殻の振動特性に与える影響を定量的に明らかにする。さらに、数値結果に基づいて積層複合円筒殻の基本振動数の最大化(最適化)のために最適な積層構成について検討する。

この研究のために、第2章で誘導した積層複合円筒殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを用いてエネルギー法の一つであるリッツ法により積層複合円筒殻に関する振動数方程式を導出する。ここで、殻の変位を近似する試験関数には殻の両端における幾何学的境界条件を満足するべき級数(軸方向)とフーリエ級数(円周方向)を用いる。この変位関数はパラメータの指定によってどのような幾何学的境界条件も満足させることが可能であって、これにより殻が任意の幾何学的境界条件を有する場合に対して本解析法の適用が可能となる。そして、この解析結果に基づいて数値計算を実施し、積層複合円筒殻の振動特性を明らかにすると共に殻の基本振動数を最大にする最適な積層構成について考察を加える。

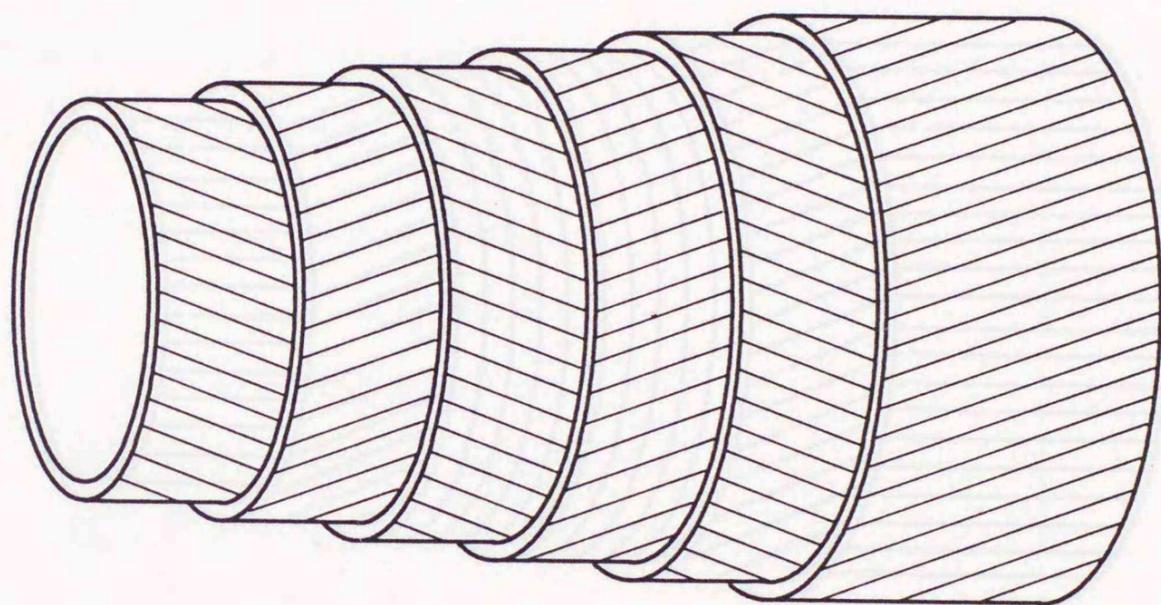


図4-1 アングルプライ積層複合円筒殻

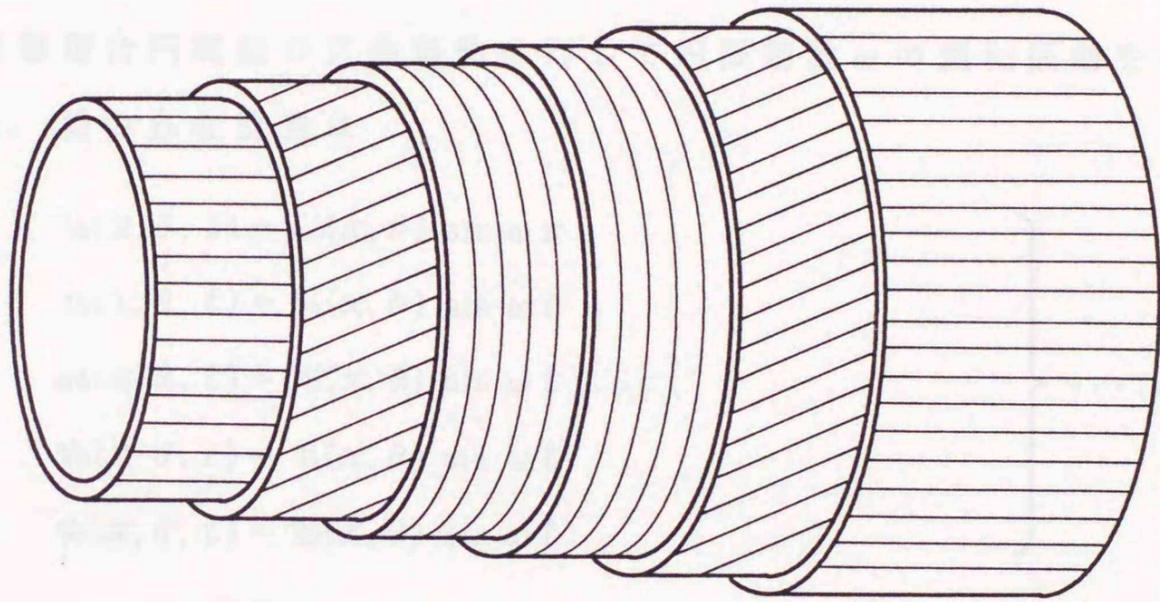


图 4-2 擬似等方性積層複合円筒殻

4.2 リッツ法

本章で取扱う積層複合円筒殻の解析においては、第3章のクロスプライ積層複合円筒殻の場合と異なり解の変数分離が困難となるので、ここではエネルギー法の一つであるリッツ法を用いて殻の振動数方程式を誘導する。この解法はエネルギーの停留原理に基づく解法であって殻の幾何学的境界条件を満足する変位関数を用いると、近似解は真の解に高い値から収束することが知られている。

4.2.1 基礎式

積層複合円筒殻の自由振動に対して円振動数 ω の調和振動を考えると、殻の各変位量は

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, \theta, t) &= U_0(x, \theta) \sin \omega t \\ v_0(x, \theta, t) &= V_0(x, \theta) \sin \omega t \\ w_0(x, \theta, t) &= W_0(x, \theta) \sin \omega t \\ \psi_x(x, \theta, t) &= \Psi_x(x, \theta) \sin \omega t \\ \psi_\theta(x, \theta, t) &= \Psi_\theta(x, \theta) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots (4.1)$$

で与えられる。これより積層複合円筒殻の最大ひずみエネルギー U_{max} は式(2.17)より次式のように書き改められる。

$$\begin{aligned} U_{max} = & \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\bar{A}_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ & + \left[\bar{A}_{66} + \frac{2}{R} \bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R^2} \right] \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_{22}^*}{R^2} W_0^2 + \bar{D}_{11} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \right)^2 \\ & + \frac{D_{22}^*}{R^2} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{2 D_{12}}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \bar{D}_{66} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{D_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} \right)^2 \\ & + \frac{2 A_{22}}{R^2} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} W_0 + \frac{2 A_{12}}{R} \frac{\partial U_0}{\partial x} W_0 + \frac{2 \bar{A}_{66}}{R} \frac{\partial U_0}{\partial \theta} \frac{\partial V_0}{\partial x} \\ & \left. + \frac{2 \bar{A}_{12}}{R} \frac{\partial U_0}{\partial x} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} + \frac{2 D_{66}}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2A_{16}}{R} \frac{\partial U \partial U}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{R} \left[\bar{A}_{26} + \frac{\bar{B}_{26}}{R} \right] \frac{\partial V_0 \partial V_0}{\partial x \partial \theta} + \frac{2A_{26}^*}{R^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} W_0 \\
& + 2 \left[\bar{A}_{16} + \frac{\bar{B}_{16}}{R} \right] \frac{\partial U \partial V_0}{\partial x \partial x} + \frac{2A_{26}}{R^2} \frac{\partial U \partial V_0}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{2\bar{A}_{26}}{R} \frac{\partial V_0}{\partial x} W_0 \\
& + 2\bar{D}_{16} \frac{\partial \Psi_r \partial \Psi_\theta}{\partial x \partial x} + \frac{2D_{16}}{R} \frac{\partial \Psi_r \partial \Psi_r}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{2D_{26}}{R} \frac{\partial \Psi_\theta \partial \Psi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{2D_{26}^*}{R^2} \frac{\partial \Psi_r \partial \Psi_\theta}{\partial \theta \partial \theta} \\
& + \kappa^2 \left[A_{44} - \frac{B_{44}}{R} + \frac{D_{44}^*}{R^2} \right] \Psi_\theta^2 + \kappa^2 \frac{A_{44}^*}{R^2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \theta} \right)^2 \\
& + \frac{2\kappa^2}{R} \left[A_{44} - \frac{B_{44}^*}{R} \right] \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \Psi_\theta + \kappa^2 \bar{A}_{55} \Psi_r^2 + 2\kappa^2 \bar{A}_{55} \frac{\partial W_0}{\partial x} \Psi_r \\
& + \kappa^2 \bar{A}_{55} \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)^2 + 2\kappa^2 A_{45} \Psi_r \Psi_\theta + \frac{2\kappa^2}{R} A_{45} \frac{\partial W_0}{\partial \theta} \Psi_r \\
& + 2\kappa^2 A_{45} \frac{\partial W_0}{\partial x} \Psi_\theta + \frac{2\kappa^2}{R} A_{45} \frac{\partial W_0 \partial W_0}{\partial x \partial \theta} \\
& + \frac{2B_{22}}{R^2} \frac{\partial V_0 \partial \Psi_\theta}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{2B_{12}}{R} W_0 \frac{\partial \Psi_r}{\partial x} + \frac{2B_{26}}{R} W_0 \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\
& + \frac{2B_{26}^*}{R^2} W_0 \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} + 2 \left[\bar{B}_{16} + \frac{\bar{D}_{16}}{R} \right] \frac{\partial V_0 \partial \Psi_r}{\partial x \partial x} + \frac{2\bar{B}_{26}}{R} \frac{\partial V_0 \partial \Psi_\theta}{\partial \theta \partial x} \\
& + \frac{2B_{26}}{R^2} \frac{\partial V_0 \partial \Psi_r}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{2\bar{B}_{26}}{R} \frac{\partial V_0 \partial \Psi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{2\bar{B}_{12}}{R} \frac{\partial V_0 \partial \Psi_r}{\partial \theta \partial x} \\
& + 2 \left[\bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} \right] \frac{\partial V_0 \partial \Psi_\theta}{\partial x \partial x} + \frac{2\bar{B}_{66}}{R} \frac{\partial V_0 \partial \Psi_r}{\partial x \partial \theta} + \frac{2B_{22}^*}{R^2} W_0 \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} \\
& + 2\bar{B}_{11} \frac{\partial U \partial \Psi_r}{\partial x \partial x} + \frac{2B_{66}}{R} \frac{\partial U \partial \Psi_\theta}{\partial \theta \partial x} + \frac{2B_{66}^*}{R^2} \frac{\partial U \partial \Psi_r}{\partial \theta \partial \theta} \\
& + \frac{2B_{12}}{R} \frac{\partial U \partial \Psi_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial U \partial \Psi_r}{\partial \theta \partial x} + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial U \partial \Psi_r}{\partial x \partial \theta} \\
& + 2\bar{B}_{16} \frac{\partial U \partial \Psi_\theta}{\partial x \partial x} + \frac{2B_{26}^*}{R^2} \frac{\partial U \partial \Psi_\theta}{\partial \theta \partial \theta} \Big] dx d\theta
\end{aligned}$$

.....(4.2)

また、式(2.18)より殻の最大運動エネルギー T_{max} は

$$T_{max} = \frac{R\omega^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\bar{I}_1 U^2 + \left(\bar{I}_1 + \frac{2}{R} \bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_3}{R^2} \right) V_0^2 + \bar{I}_1 W^2 \right. \\ \left. + \bar{I}_3 \Psi_x^2 + \bar{I}_3 \Psi_\theta^2 + 2 \bar{I}_2 U \Psi_x + 2 \left(\bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_3}{R} \right) V_0 \Psi_\theta \right] dx d\theta \quad \dots (4.3)$$

と書き直される。

4.2.2 変位関数

ここでは殻の両端における任意の幾何学的境界条件を満足する変位関数を導入する。まず、以下の解析を簡単化するために次の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \xi = x/L, \quad \eta = z/H, \quad (l, h) &= (1/R)(L, H) \\ (\bar{U}, \bar{V}_0, \bar{W}) &= (1/H)(U, V_0, W) \\ (\bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_\theta) &= (H/R)(\Psi_x, \Psi_\theta) \\ \lambda^2 &= \rho_0 R^2 \omega^2 / E_0 \\ (\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3) &= (1/\rho_0 R)(\bar{I}_1, \bar{I}_2/R, \bar{I}_3/R^2) \\ (\bar{a}_{ij}, a_{ij}, a_{ij}^*) &= (1/E_0 R)(\bar{A}_{ij}, A_{ij}, A_{ij}^*) \\ (\bar{b}_{ij}, b_{ij}, b_{ij}^*) &= (1/E_0 R^2)(\bar{B}_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^*) \\ (\bar{d}_{ij}, d_{ij}, d_{ij}^*) &= (1/E_0 R^3)(\bar{D}_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^*) \\ & \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \end{aligned} \quad \dots (4.4)$$

ここで、 λ は無次元振動数パラメータを表し、 ρ_0, E_0 はそれぞれ無次元化の際に基準となる密度、縦弾性係数である。

次に殻の変位量 $\bar{U}, \bar{V}_0, \bar{W}, \bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_\theta$ を次のようにべき級数(軸方向)とフーリエ級数(円周方向)を用いて表す。

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij} X_{1i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{V}_0(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J V_{ij} X_{2i}(\xi) Y_j(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_0(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J W_{ij} X_{3i}(\xi) Y_j(\theta) \\
\bar{\Psi}_x(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \Psi_{xi j} X_{4i}(\xi) Y_j(\theta) \\
\bar{\Psi}_\theta(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \Psi_{\theta i j} X_{5i}(\xi) Y_j(\theta) \\
X_{mi}(\xi) &= \xi^{\alpha_m} (\xi - 1/2)^{i-1} (\xi - 1)^{\beta_m} \\
Y_j(\theta) &= \begin{cases} \cos \frac{j-1}{2} \theta & (j : \text{奇数}) \\ \sin \frac{j}{2} \theta & (j : \text{偶数}) \end{cases}
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (4.5)$$

ここで、上式中の $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, \Psi_{xi j}, \Psi_{\theta i j}$ はそれぞれ未定係数である。また、上式で与えられる試験関数 $X_{mi}(\xi)$ は、べき乗の指数 $\alpha_m, \beta_m (m = 1, 2, 3, 4, 5)$ を適切に指定することによって、殻の両端における幾何学的境界条件を満足させることができる。例えば、殻の右端 ($\xi = 1$) において変位 \bar{U} が拘束されている殻 ($\bar{U} = 0$) を扱う場合には $\beta_1 = 1$ とし、拘束されていない場合 ($\bar{U} \neq 0$) には $\beta_1 = 0$ と与えればよい。すなわち、数値計算の際にこの指数 α_m, β_m を適宜指定することによって、任意の幾何学的境界条件を有する積層円筒殻に対して本解析法の適用が可能となる。

いま、積層複合円筒殻の両端での支持条件が両端単純支持、両端固定、一端固定他端自由の場合、殻の境界条件はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{両端単純支持}} : \\
&\quad N_x = \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = M_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi = 0, 1) \\
&\underline{\text{両端固定}} : \\
&\quad \bar{U}_0 = \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = \bar{\Psi}_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi = 0, 1)
\end{aligned}
\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots (4.6)$$

固定 ($\xi = 0$) - 自由 ($\xi = 1$):

$$\bar{U}_0 = \bar{V}_0 = \bar{W}_0 = \bar{\Psi}_x = \bar{\Psi}_\theta = 0 \quad (\xi=0)$$

$$N_x = T_x = Q_{zx} = M_x = M_{x\theta} = 0 \quad (\xi=1)$$

で与えられるので、各場合に対して α_m, β_m を

両端単純支持:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_4 = \beta_4 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_5 = \beta_5 = 1$$

両端固定:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \alpha_4 = \beta_4 = \alpha_5 = \beta_5 = 1$$

固定 ($\xi = 0$) - 自由 ($\xi = 1$):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$$

..... (4.7)

と指定することによって殻の両端における幾何学的境界条件を満足させることができる。

4.2.3 振動数方程式の誘導

次に殻のラグランジュ関数に関する停留条件を用いて積層複合円筒殻の振動数方程式を誘導する。このために式(4.4), (4.5)を式(4.2), (4.3)に代入し、殻のラグランジュ関数 $L = T_{max} - U_{max}$ に停留条件式

$$\frac{\partial L}{\partial U_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial V_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial W_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \Psi_{xmn}} = \frac{\partial L}{\partial \Psi_{\theta mn}} = 0 \quad \dots\dots (4.8)$$

$$(m=1, 2, \dots, I; n=1, 2, \dots, J)$$

を適用する。その結果、連立同次方程式

$$\left[\begin{matrix} [K_{ij}^{(m,n)}] - \lambda^2 [M_{ij}^{(m,n)}] \\ \left\{ \begin{matrix} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{ij} \\ \Psi_{xij} \\ \Psi_{\theta ij} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right] = 0 \quad \dots\dots (4.9)$$

$$(i, m=1, 2, \dots, I; j, n=1, 2, \dots, J)$$

が得られ、これが有意な解をもつための条件として振動数方程式

$$\left| \left[K_f^{(m,n)} \right] - \lambda^2 \left[M_f^{(m,n)} \right] \right| = 0 \quad \dots\dots (4.10)$$

$$(i, m=1, 2, \dots, I; j, n=1, 2, \dots, J)$$

が求まる。ただし、上式における剛性マトリックス $[K_f]$ 、質量マトリックス $[M_f]$ の各要素は

$$\left[K_f^{(m,n)} \right] = \begin{bmatrix} K_{f11} & K_{f12} & K_{f13} & K_{f14} & K_{f15} \\ & K_{f22} & K_{f23} & K_{f24} & K_{f25} \\ & & K_{f33} & K_{f34} & K_{f35} \\ & & & K_{f44} & K_{f45} \\ \text{Sym.} & & & & K_{f55} \end{bmatrix}$$

$$\left[M_f^{(m,n)} \right] = \begin{bmatrix} M_{f11} & 0 & 0 & M_{f14} & 0 \\ & M_{f22} & 0 & 0 & M_{f25} \\ & & M_{f33} & 0 & 0 \\ & & & M_{f44} & 0 \\ & & & & M_{f55} \end{bmatrix}$$

$$K_{f11} = \frac{\bar{a}_{11}}{l^2} f_{11m1}^{11} g_{nj}^{00} + a_{66}^* f_{11m1}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{a_{16}}{l} \left[f_{11m1}^{10} g_{nj}^{01} + f_{11m1}^{01} g_{nj}^{10} \right]$$

$$K_{f12} = \frac{\bar{a}_{66}}{l} f_{12m1}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{\bar{a}_{12}}{l} f_{12m1}^{10} g_{nj}^{01} + \frac{\bar{a}_{16} + \bar{b}_{16}}{l^2} f_{12m1}^{11} g_{nj}^{00} + a_{26} f_{12m1}^{00} g_{nj}^{11}$$

$$K_{f13} = \frac{a_{12}}{l} f_{13m1}^{10} g_{nj}^{00} + a_{26}^* f_{13m1}^{00} g_{nj}^{10}$$

$$K_{f14} = \frac{\bar{b}_{11}}{l^2} f_{14m1}^{11} g_{nj}^{00} + b_{66}^* f_{14m1}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{b_{16}}{l} \left[f_{14m1}^{01} g_{nj}^{10} + f_{14m1}^{10} g_{nj}^{01} \right]$$

$$K_{f15} = \frac{b_{66}}{l} f_{15m1}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{b_{12}}{l} f_{15m1}^{10} g_{nj}^{01}$$

$$+\frac{\bar{b}_{16}}{l^2}f_{15m1}^{11}g_{nj}^{00}+b_{26}^*f_{15m1}^{00}g_{nj}^{11}$$

$$K_{f22} = \bar{a}_{22}f_{22m1}^{00}g_{nj}^{11} + \frac{\bar{a}_{66}+2\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66}}{l^2}f_{22m1}^{11}g_{nj}^{00} \\ + \frac{\bar{a}_{26}+\bar{b}_{26}}{l}\left[f_{22m1}^{10}g_{nj}^{01}+f_{22m1}^{01}g_{nj}^{10}\right]$$

$$K_{f23} = a_{22}f_{23m1}^{00}g_{nj}^{10} + \frac{\bar{a}_{26}}{l}f_{23m1}^{10}g_{nj}^{00}$$

$$K_{f24} = \frac{\bar{b}_{16}+\bar{d}_{16}}{l^2}f_{24m1}^{11}g_{nj}^{00}+b_{26}f_{24m1}^{00}g_{nj}^{11} \\ + \frac{\bar{b}_{12}}{l}f_{24m1}^{01}g_{nj}^{10} + \frac{\bar{b}_{66}}{l}f_{24m1}^{10}g_{nj}^{01}$$

$$K_{f25} = \frac{\bar{b}_{66}+\bar{d}_{66}}{l^2}f_{25m1}^{11}g_{nj}^{00}+b_{22}f_{25m1}^{00}g_{nj}^{11} \\ + \frac{\bar{b}_{26}}{l}\left[f_{25m1}^{01}g_{nj}^{10}+f_{25m1}^{10}g_{nj}^{01}\right]$$

$$K_{f33} = a_{22}^*f_{33m1}^{00}g_{nj}^{00}+a_{44}^*f_{33m1}^{00}g_{nj}^{11} \\ + \frac{\bar{a}_{55}}{l^2}f_{33m1}^{11}g_{nj}^{00} + \frac{a_{45}}{l}\left[f_{33m1}^{10}g_{nj}^{01}+f_{33m1}^{01}g_{nj}^{10}\right]$$

$$K_{f34} = \frac{b_{12}}{l}f_{34m1}^{01}g_{nj}^{00}+b_{26}^*f_{34m1}^{00}g_{nj}^{01} \\ + \frac{\bar{a}_{55}}{l}f_{34m1}^{10}g_{nj}^{00}+a_{45}f_{34m1}^{00}g_{nj}^{10}$$

$$K_{f35} = \frac{b_{26}}{l}f_{35m1}^{01}g_{nj}^{00}+b_{22}^*f_{35m1}^{00}g_{nj}^{01} \\ + (a_{44}-b_{44}^*)f_{35m1}^{00}g_{nj}^{10} + \frac{a_{45}}{l}f_{35m1}^{10}g_{nj}^{00}$$

$$K_{f44} = \frac{\bar{d}_{11}}{l^2}f_{44m1}^{11}g_{nj}^{00}+d_{66}^*f_{44m1}^{00}g_{nj}^{11} \\ + \frac{d_{16}}{l}\left[f_{44m1}^{10}g_{nj}^{01}+f_{44m1}^{01}g_{nj}^{10}\right] + \bar{a}_{55}f_{44m1}^{00}g_{nj}^{00}$$

$$K_{f45} = \frac{d_{12}}{l}f_{45m1}^{10}g_{nj}^{01} + \frac{d_{66}}{l}f_{45m1}^{01}g_{nj}^{10} + \frac{\bar{d}_{16}}{l^2}f_{45m1}^{11}g_{nj}^{00}$$

$$\begin{aligned}
& + d_{26}^* f_{45ml}^{00} g_{nj}^{11} + a_{45} f_{45ml}^{00} g_{nj}^{00} \\
K_{f55} = & d_{22}^* f_{55ml}^{00} g_{nj}^{11} + (a_{44} - b_{44} + d_{44}^*) f_{55ml}^{00} g_{nj}^{00} \\
& + \frac{\bar{d}_{66}}{l^2} f_{55ml}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{d_{26}}{l} \left[f_{55ml}^{10} g_{nj}^{01} + f_{55ml}^{01} g_{nj}^{10} \right] \\
M_{f11} = & \bar{i}_1 f_{11ml}^{00} g_{nj}^{00}, \quad M_{f14} = \bar{i}_2 f_{14ml}^{00} g_{nj}^{00} \\
M_{f22} = & (\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + \bar{i}_3) f_{22ml}^{00} g_{nj}^{00} \\
M_{f25} = & (\bar{i}_2 + \bar{i}_3) f_{25ml}^{00} g_{nj}^{00}, \quad M_{f33} = \bar{i}_1 f_{33ml}^{00} g_{nj}^{00} \\
M_{f44} = & \bar{i}_3 f_{44ml}^{00} g_{nj}^{00}, \quad M_{f55} = \bar{i}_3 f_{55ml}^{00} g_{nj}^{00} \\
f_{mnl}^{ij} = & \int_0^1 \frac{\partial^{(i)} X_{mk}}{\partial \xi^{(i)}} \frac{\partial^{(j)} X_{nl}}{\partial \xi^{(j)}} d\xi \\
g_{kl}^{ij} = & \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{(i)} Y_k}{\partial \theta^{(i)}} \frac{\partial^{(j)} Y_l}{\partial \theta^{(j)}} d\theta
\end{aligned}$$

.....(4.11)

で与えられる。したがって、式(4.10)で与えられる一般化固有値問題を解くことによって積層複合円筒殻の固有振動数(固有値)が求まり、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めることにより、式(4.5)を用いて振動モードが決定できる。

4.2.4 古典殻理論に基づく解析

古典殻理論に基づく解析においても、解析手法は一次せん断変形理論の場合とほとんど同じであるので、ここでは古典殻理論を用いる場合に書き改める必要のある基礎式のみを示す。殻の最大ひずみエネルギーと最大運動エネルギーは式(2.29), (2.30)よりそれぞれ

$$\begin{aligned}
U_{max} = & \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\bar{A}_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{A_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\bar{A}_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{A_{22}^*}{R^2} W_0^2 \right. \\
& \left. + \left[\bar{A}_{66} + \frac{2\bar{B}_{66}}{R} + \frac{\bar{D}_{66}}{R^2} \right] \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right)^2 + \bar{D}_{11} \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{D_{22}^*}{R^4} \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 D_{12} \partial^2 W_0 \partial^2 W_0}{R^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\bar{D}_{66} + 2 D_{66} + D_{66}^*}{R^2} \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \\
& + \frac{2 A_{22} \partial V_0}{R^2 \partial \theta} W_0 + \frac{2 A_{12} \partial U}{R \partial x} W_0 \\
& + \frac{2 \bar{A}_{66} \partial U \partial V_0}{R \partial \theta \partial x} + \frac{2 \bar{A}_{12} \partial U \partial V_0}{R \partial x \partial \theta} \\
& + \frac{2 A_{16} \partial U \partial U}{R \partial x \partial \theta} + \frac{2 \left[\bar{A}_{26} + \frac{\bar{B}_{26}}{R} \right] \partial V_0 \partial V_0}{R \partial x \partial \theta} + \frac{2 A_{26} \partial U \partial V_0}{R^2 \partial \theta \partial \theta} \\
& + 2 \left[\bar{A}_{16} + \frac{\bar{B}_{16}}{R} \right] \frac{\partial U \partial V_0}{\partial x \partial x} + \frac{2 \bar{A}_{26} \partial V_0}{R \partial x} W_0 + \frac{2 A_{26}^* \partial U}{R^2 \partial \theta} W_0 \\
& + 2 \frac{\bar{D}_{16} + D_{16} \partial^2 W_0}{R \partial x^2 \partial x \partial \theta} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2 \partial x \partial \theta} + 2 \frac{D_{26} + D_{26}^* \partial^2 W_0}{R^3 \partial \theta^2 \partial x \partial \theta} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2 \partial x \partial \theta} \\
& - \frac{2 B_{22}^* \partial^2 W_0}{R^3 \partial \theta^2} W_0 - \frac{2 B_{12} \partial^2 W_0}{R \partial x^2} W_0 - 2 \frac{B_{26} + B_{26}^* \partial^2 W_0}{R^2 \partial x \partial \theta} W_0 \\
& - 2 \left[\bar{B}_{16} + \frac{\bar{D}_{16}}{R} \right] \frac{\partial V_0 \partial^2 W_0}{\partial x \partial x^2} - 2 \frac{\bar{B}_{26} + B_{26} \partial V_0}{R^2 \partial \theta \partial x \partial \theta} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2 \partial x \partial \theta} \\
& - \frac{2 \bar{B}_{26} \partial V_0 \partial^2 W_0}{R^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{2 \bar{B}_{12} \partial V_0 \partial^2 W_0}{R \partial \theta \partial x^2} - \frac{2 B_{22} \partial V_0 \partial^2 W_0}{R^3 \partial \theta \partial \theta^2} \\
& - \frac{2}{R} \left[2 \bar{B}_{66} + \frac{\bar{D}_{66}}{R} \right] \frac{\partial V_0 \partial^2 W_0}{\partial x \partial x \partial \theta} - 2 \bar{B}_{11} \frac{\partial U \partial^2 W_0}{\partial x \partial x^2} \\
& - 2 \frac{B_{66} + B_{66}^* \partial U \partial^2 W_0}{R^2 \partial \theta \partial x \partial \theta} - \frac{2 B_{12} \partial U \partial^2 W_0}{R^2 \partial x \partial \theta^2} - \frac{2 B_{16} \partial U \partial^2 W_0}{R \partial \theta \partial x^2} \\
& - 2 \left[\frac{\bar{B}_{16} + B_{16} \partial U \partial^2 W_0}{R \partial x \partial x \partial \theta} - \frac{2 B_{26}^* \partial U \partial^2 W_0}{R^3 \partial \theta \partial \theta^2} \right] dx d\theta \\
T_{max} &= \frac{R \omega^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L T_1 \left[U^2 + V_0^2 + W_0^2 \right] dx d\theta
\end{aligned}$$

..... (4.12)

で与えられる。また，解析の簡単化のために無次元量

$$\begin{aligned}
\xi &= x/L, \quad \eta = z/H, \quad (l, h) = (1/R)(L, H) \\
(\bar{U}, \bar{V}_0, \bar{W}_0) &= (1/H)(U, V_0, W_0) \\
\lambda^2 &= \rho_0 R^2 \omega^2 / E_0, \quad \bar{t}_1 = T_1 / \rho_0 R \\
(\bar{a}_{ij}, a_{ij}, a_{ij}^*) &= (1/E_0 R)(\bar{A}_{ij}, A_{ij}, A_{ij}^*)
\end{aligned}$$

..... (4.13)

$$\left. \begin{aligned} (\bar{b}_{ij}, b_{ij}, b_{ij}^*) &= (1/E_0 R^2) (\bar{B}_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^*) \\ (\bar{d}_{ij}, d_{ij}, d_{ij}^*) &= (1/E_0 R^3) (\bar{D}_{ij}, D_{ij}, D_{ij}^*) \\ &(i, j=1, 2, 6) \end{aligned} \right\}$$

を導入し、殻の各変位 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} を

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J U_{ij} X_{1i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{v}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J V_{ij} X_{2i}(\xi) Y_j(\theta) \\ \bar{w}(\xi, \theta) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J W_{ij} X_{3i}(\xi) Y_j(\theta) \end{aligned} \right\} \dots (4.14)$$

を用いて表す。ここで、上式中の試験関数 $X_{mi}(\xi)$, $Y_j(\theta)$ はそれぞれ式(4.5)で与えたべき級数とフーリエ級数であり、面内変位 \bar{u} , \bar{v} に関する α_m, β_m ($m=1, 2$) の指定方法も同じである。しかし、面外変形に関しては、式(2.32)に示したように殻の幾何学的境界条件が変位 \bar{w} と勾配 $\partial \bar{w} / \partial \xi$ で与えられるので、面外変形が非拘束である場合(自由)、変位 \bar{w} が拘束されていて勾配 $\partial \bar{w} / \partial \xi$ が拘束されていない場合(単純支持)、そして変位と勾配の両方が拘束されている場合(固定)に対して α_s, β_s をそれぞれ 0, 1, 2 とを指定すればよい。

そして、殻のラグランジュ関数 $L = T_{max} - U_{max}$ に関する停留条件によって殻の振動数方程式

$$\left| \left[K_c^{(m,n)} \right]_{i,j} - \lambda^2 \left[M_c^{(m,n)} \right]_{i,j} \right| = 0 \quad \dots (4.15)$$

$$(i, m=1, 2, \dots, I; j, n=1, 2, \dots, J)$$

が誘導できる。ただし、上式における剛性マトリックス $[K_c]$, 質量マトリックス $[M_c]$ の各要素は

$$\begin{bmatrix} (m, n) \\ K_{c i, j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{c11} & K_{c12} & K_{c13} \\ & K_{c22} & K_{c23} \\ \text{Sym.} & & K_{c33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (m, n) \\ M_{c i, j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{c11} & 0 & 0 \\ & M_{c22} & 0 \\ \text{Sym.} & & M_{c33} \end{bmatrix}$$

$$K_{c11} = \frac{\bar{a}_{11}}{l^2} f_{11mi}^{11} g_{nj}^{00} + a_{66}^* f_{11mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{a_{16}}{l} \left[f_{11mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{11mi}^{01} g_{nj}^{10} \right]$$

$$K_{c12} = \frac{\bar{a}_{66}}{l} f_{12mi}^{01} g_{nj}^{10} + \frac{\bar{a}_{12}}{l} f_{12mi}^{10} g_{nj}^{01} + \frac{\bar{a}_{16}}{l^2} f_{12mi}^{11} g_{nj}^{00} + a_{26} f_{12mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{\bar{b}_{16}}{l^2} f_{12mi}^{11} g_{nj}^{00}$$

$$K_{c13} = \frac{a_{12}}{l} f_{13mi}^{10} g_{nj}^{00} + a_{26}^* f_{13mi}^{00} g_{nj}^{10} - \frac{\bar{b}_{11}}{l^3} f_{13mi}^{12} g_{nj}^{00} - \frac{b_{12}}{l} f_{13mi}^{10} g_{nj}^{02} - \frac{b_{16}}{l^2} f_{13mi}^{02} g_{nj}^{10} - b_{26}^* f_{13mi}^{00} g_{nj}^{12} - \frac{b_{66} + b_{66}^*}{l} f_{13mi}^{01} g_{nj}^{11} - \frac{\bar{b}_{16} + b_{16}}{l^2} f_{13mi}^{11} g_{nj}^{01}$$

$$K_{c22} = \bar{a}_{22} f_{22mi}^{00} g_{nj}^{11} + \frac{\bar{a}_{66} + 2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}}{l^2} f_{22mi}^{11} g_{nj}^{00} + \frac{\bar{a}_{26} + \bar{b}_{26}}{l} \left[f_{22mi}^{10} g_{nj}^{01} + f_{22mi}^{01} g_{nj}^{10} \right]$$

$$K_{c23} = a_{22} f_{23mi}^{00} g_{nj}^{10} - \frac{\bar{b}_{16}}{l^3} f_{23mi}^{12} g_{nj}^{00} - \frac{b_{26}}{l} f_{23mi}^{10} g_{nj}^{02} - \frac{\bar{b}_{26} + b_{26}}{l} f_{23mi}^{01} g_{nj}^{11} - \frac{2\bar{b}_{66} + \bar{d}_{66}}{l^2} f_{23mi}^{11} g_{nj}^{01} - \frac{\bar{b}_{12}}{l^2} f_{23mi}^{02} g_{nj}^{10} - b_{22} f_{23mi}^{00} g_{nj}^{12} + \frac{\bar{a}_{26}}{l} f_{23mi}^{10} g_{nj}^{00} - \frac{\bar{d}_{16}}{l^3} f_{23mi}^{12} g_{nj}^{00} - \frac{d_{26}}{l} f_{23mi}^{10} g_{nj}^{02}$$

$$K_{c33} = a_{22}^* f_{33mi}^{00} g_{nj}^{00} + \frac{d_{12}}{l^2} \left[f_{33mi}^{20} g_{nj}^{02} + f_{33mi}^{02} g_{nj}^{20} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{d}_{11}}{l^4} f_{33mi}^{22} g_{nj}^{00} + \frac{\bar{d}_{66} + 2d_{66} + d_{66}^*}{l^2} f_{33mi}^{11} g_{nj}^{11} \\
& + d_{22}^* f_{33mi}^{00} g_{nj}^{22} - b_{22}^* \left[f_{33mi}^{00} g_{nj}^{02} + f_{33mi}^{00} g_{nj}^{20} \right] \\
& - \frac{b_{12}}{l^2} \left[f_{33mi}^{02} g_{nj}^{00} + f_{33mi}^{20} g_{nj}^{00} \right] \\
& + \frac{\bar{d}_{16} + d_{16}}{l^3} \left[f_{33mi}^{21} g_{nj}^{01} + f_{33mi}^{12} g_{nj}^{10} \right] \\
& - \frac{b_{26} + b_{26}^*}{l} \left[f_{33mi}^{01} g_{nj}^{01} + f_{33mi}^{10} g_{nj}^{10} \right] \\
& + \frac{d_{26} + d_{26}^*}{l} \left[f_{33mi}^{01} g_{nj}^{21} + f_{33mi}^{10} g_{nj}^{12} \right]
\end{aligned}$$

$$M_{c11} = \bar{i}_1 f_{11mi}^{00} g_{nj}^{00}, \quad M_{c22} = \bar{i}_1 f_{22mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

$$M_{c33} = \bar{i}_1 f_{33mi}^{00} g_{nj}^{00}$$

.....(4.16)

で与えられる。以下、一次せん断変形理論を用いた場合と同様な手順によって積層複合円筒殻の固有振動数と固有振動モードを求めることができる。

4.3 固有振動数と振動モード

本章においては、同じ厚さと材料特性をもつラミナから構成されるアングルプライ積層複合円筒殻と繊維配向角 0° , $\pm\alpha$, 90° のラミナを対称積層した複合円筒殻について数値計算を実施した。以下では、第3章のときと同様にラミナの積層数 N の異なる積層複合円筒殻の振動数パラメータを比較しているが、この場合の各ラミナの厚さは積層した殻全体の厚さが常に一定となるように与えている。また、数値計算において用いたラミナの材料特性は、クロスプライ積層複合円筒殻(第3章)の場合と同様に

$$E_1 = 20E_2, \quad G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_{12} = 0.25$$

とし、せん断修正係数 κ^2 には $5/6$ を用いた。なお、振動数パラメータ λ はラミナの縦弾性係数 E_2 を用いて無次元化($E_0 = E_2$)している。

4.3.1 数値計算精度の検討

本解析法の計算精度は式(4.5)における試験関数 $X_{mi}(\xi)$, $Y_j(\theta)$ の項数 I , J に依存するので、採用した項数による振動数パラメータ λ の収束状況を調べる必要がある。表4-1, 表4-2はそれぞれ3層($45^\circ/-45^\circ/45^\circ$), 2層($45^\circ/-45^\circ$)のアングルプライ積層複合円筒殻について、項数 I , J を変化させたときの振動数パラメータの収束状況を示している。ここで、表中の振動数パラメータ λ の右上の数字は振動モード形を調べることで求まる円周方向の波数(以下、円周方向波数と呼ぶ)を表している。表からわかるように、支持条件、積層形態、振動の次数の違いによって収束状況はいくらか異なるが、いずれの場合に対しても軸方向の試験関数 $X_{mi}(\xi)$ について $I=8$ とすれば十分な精度で振動数が求まる。一方、円周方向の試験関数 $Y_j(\theta)$ については、9項($J=9$)採用した場合と項数 J をより多く採用した場合の計算結果はよく一致しており、9項($J=9$)で十分な精

度で振動数が求まることがわかる。これは表に示した最低次から五次までの振動が円周方向波数の比較的小さい振動モード形に対応するためと考えられる。以上の結果より項数 $I \times J = 8 \times 9$ を用いて以下の数値計算を行った。

$$\left(\begin{array}{l} I=20, N=11, E=70K, \nu=0.3 \\ \rho=0.0078, G=2.45K, \omega=615 \end{array} \right)$$

$I \times J$	1st	2nd	3rd	4th	5th
1 × 1	0.45107	1.01307	0.15107	0.00117	0.00017
1 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
1 × 19	0.45107	1.01304	0.15108	0.00114	0.00018
2 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
2 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
2 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
3 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
3 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
3 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
4 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
4 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
4 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
5 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
5 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
5 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
6 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
6 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
6 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
7 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
7 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
7 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
8 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
8 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
8 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
9 × 11	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
9 × 17	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018
9 × 19	0.45110	1.01311	0.15111	0.00114	0.00018

表4-1 3層(45°/-45°/45°)アングラプライ積層複合円筒殻の
振動数パラメータの収束状況

$$\left(\begin{array}{l} l=4.0, h=0.2, E_1=20E_2, G_{12}=G_{31} \\ =0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25. \end{array} \right)$$

$I \times J$	1st	2nd	3rd	4th	5th
S. S. - S. S.					
4 × 9	0.4619 ²	0.6128 ¹	0.8580 ³	0.9935 ⁰	1.290 ²
5 × 11	0.4593	0.6127	0.8388	0.9935	1.078
6 × 13	0.4583	0.6124	0.8350	0.9932	1.078
7 × 15	0.4578	0.6124	0.8345	0.9932	1.074
8 × 17	0.4575	0.6124	0.8337	0.9932	1.074
9 × 19	0.4575	0.6124	0.8335	0.9932	1.074
5 × 9	0.4593	0.6127	0.8388	0.9935	1.078
6 × 9	0.4583	0.6124	0.8350	0.9932	1.078
7 × 9	0.4578	0.6124	0.8345	0.9932	1.074
8 × 9	0.4575	0.6124	0.8337	0.9932	1.074
9 × 9	0.4575	0.6124	0.8335	0.9932	1.074
Clamped - Clamped					
4 × 9	0.6572 ²	0.9030 ³	1.031 ¹	1.108 ⁰	1.373 ³
5 × 11	0.6547	0.8924	1.027	1.099	1.335
6 × 13	0.6527	0.8908	1.025	1.097	1.322
7 × 15	0.6519	0.8903	1.024	1.096	1.319
8 × 17	0.6514	0.8900	1.023	1.096	1.319
9 × 19	0.6513	0.8900	1.023	1.096	1.318
Clamped - Free					
4 × 9	0.2243 ¹	0.3217 ²	0.5987 ⁰	0.6897 ²	0.7132 ³
5 × 11	0.2226	0.3172	0.5962	0.6798	0.7069
6 × 13	0.2218	0.3156	0.5949	0.6746	0.7028
7 × 15	0.2214	0.3145	0.5942	0.6738	0.7006
8 × 17	0.2212	0.3142	0.5939	0.6730	0.6994
9 × 19	0.2212	0.3140	0.5939	0.6727	0.6988

表4-2 2層(45°/-45°)アングラプライ積層複合円筒殻の
振動数パラメータの収束状況

$$\left(\begin{array}{l} l=4.0, h=0.2, E_1=20E_2, G_{12}=G_{31} \\ =0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25. \end{array} \right)$$

$I \times J$	1st	2nd	3rd	4th	5th
S. S. - S. S.					
4 × 9	0.3742 ²	0.6165 ¹	0.7403 ³	0.9933 ⁰	1.176 ²
5 × 11	0.3739	0.6102	0.7400	0.9933	1.006
6 × 13	0.3738	0.6094	0.7400	0.9931	1.001
7 × 15	0.3737	0.6075	0.7399	0.9931	0.9972
8 × 17	0.3736	0.6074	0.7399	0.9931	0.9961
9 × 19	0.3736	0.6074	0.7398	0.9931	0.9959
5 × 9	0.3739	0.6102	0.7400	0.9933	1.006
6 × 9	0.3738	0.6094	0.7400	0.9931	1.001
7 × 9	0.3737	0.6075	0.7399	0.9931	0.9972
8 × 9	0.3736	0.6074	0.7399	0.9931	0.9961
9 × 9	0.3736	0.6074	0.7398	0.9931	0.9959
Clamped - Clamped					
4 × 9	0.5873 ²	0.7814 ³	1.059 ¹	1.100 ⁰	1.176 ³
5 × 11	0.5853	0.7805	1.053	1.089	1.146
6 × 13	0.5833	0.7796	1.050	1.085	1.140
7 × 15	0.5821	0.7792	1.048	1.084	1.139
8 × 17	0.5819	0.7792	1.048	1.084	1.138
9 × 19	0.5818	0.7791	1.048	1.084	1.138
Clamped - Free					
4 × 9	0.2255 ¹	0.2747 ²	0.6081 ²	0.6016 ⁰	0.6778 ³
5 × 11	0.2234	0.2723	0.5993	0.5984	0.6746
6 × 13	0.2224	0.2709	0.5954	0.5963	0.6725
7 × 15	0.2217	0.2703	0.5938	0.5951	0.6712
8 × 17	0.2215	0.2699	0.5934	0.5948	0.6703
9 × 19	0.2214	0.2698	0.5931	0.5947	0.6700

また、本解析法の妥当性を確認するために、いくつかの既知の結果との比較を行う。表4-3は比較的厚い($h=0.2$)クロスプライ積層複合円筒殻について、本解析法(リッツ法)と第3章の伝達マトリックス法より得られた振動数パラメータ λ の比較を行ったものである。表からわかるように、本解析法は近似解法であるにもかかわらず、本解析法より得られる計算結果は数値的に直接積分して求めた伝達マトリックス法の結果と非常によく一致している。

表4-4は薄肉($h=0.0025$)のクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ について、古典殻理論を用いた本解析法(リッツ法)より求まる計算結果と小林ら²³が求めた結果の比較を行ったものである。この表よりわかるように、両端が固定された殻の場合には両者に0.5%程度の差があるもののよい一致をしている。

表4-5は3層($45^\circ/-45^\circ/45^\circ$), 2層($45^\circ/-45^\circ$)のアンギュラプライ薄肉($h=0.01$)積層複合円筒殻について、一次せん断変形理論と古典殻理論より得られた振動数パラメータ λ を比較したものである。一次せん断変形理論より求まる計算結果は殻の面外のせん断変形を考慮しているため、古典殻理論から得られる結果に比べてわずかに低い振動数を与えているが、両者はよく一致している。

以上の計算結果より本解析法の妥当性が確認できる。

表4-3 一次せん断変形理論より求まるクロスプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータの比較

$$\left[\begin{array}{l} l=1.0, h=0.2, E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, \text{S.S.}-\text{S.S.}, I \times J=7 \times 15. \end{array} \right]$$

Lamination	Method	1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th
0°/90°/0°	Ritz	1.881 ²	1.901 ³	2.085 ⁴	2.086 ¹	2.410 ⁵
	Transfer	1.881	1.901	2.085	2.086	2.410
0°/90°	Ritz	1.407 ²	1.470 ³	1.762 ¹	1.819 ⁴	2.340 ⁵
	Transfer	1.407	1.470	1.762	1.819	2.340

Ritz : The Ritz method (chapter 4)

Transfer : The Transfer Matrix method (chapter 3)

表4-4 古典殻理論より求まるクロスプライ積層複合円筒殻の基本振動数パラメータの比較

$$\left[\begin{array}{l} l=2.0, h=0.0025, E_1=15.59E_2, \\ G_{12}=0.5366E_2, \nu_{12}=0.32 \end{array} \right]$$

Support Conditions	Lamination	Present	Kobayashi -Nagashima [23]
S.S. - S.S.	90°/0°	0.1246 ⁸	0.1245
	0°/90°	0.1200 ⁸	0.1200
	0°/90°/0°/90°	0.1412 ⁷	0.1412
	90°/0°/90°/0°	0.1431 ⁷	0.1430
	0°/90°/90°/0°	0.1170 ⁸	0.1170
	90°/0°/0°/90°	0.1649 ⁶	0.1648
C - C	90°/0°	0.1535 ⁸	0.1526
	0°/90°	0.1517 ⁸	0.1509

表4-5 一次せん断変形理論と古典殻理論より求まるアングル
 プライ積層複合円筒殻の振動数パラメータの比較

$$\left[\begin{array}{l} l=4.0, h=0.01, E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, \\ G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, \text{S.S.}-\text{S.S.} \end{array} \right]$$

Mode	45°/-45°/45°		45°/-45°	
	FSDT	CTST	FSDT	CTST
1 st	0.1188 ³	0.1188	0.0944 ⁴	0.0944
2 nd	0.1246 ⁴	0.1247	0.1097 ³	0.1097
3 rd	0.1694 ⁵	0.1697	0.1233 ⁵	0.1234
4 th	0.2180 ²	0.2180	0.1719 ⁶	0.1721
5 th	0.2255 ⁶	0.2260	0.2037 ⁵	0.2038

FSDT : First-Order Shear Deformation Theory
 CTST : Classical Thin Shell Theory

4.3.2 支持条件の影響

ここでは殻の支持条件が振動特性に与える影響について検討する。図4-3は両端単純支持されたアングラプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示しており、図(a)、(b)はそれぞれ3層積層($\alpha / -\alpha / \alpha$)と2層積層($\alpha / -\alpha$)の場合に対応している。また、図中の曲線は最低次から五次までの振動数(振動数の低い方から順に並べた振動数)を各次数ごとに結んだものであり、図中の(・)印を付した箇所に示す数字は対応する振動モード形の円周方向波数を表している。また、図中の $0_u, 0_v$ はそれぞれ軸方向変位 \bar{u} の卓越する伸び振動、円周方向変位 \bar{v} の卓越するねじり振動を表している。図からわかるように、繊維配向角 α が増加するにつれて振動数パラメータは大きく変化し、振動数が接近している付近において振動モード形の移り変わりが起こっている。そして、3層対称積層の場合には2層逆対称積層に比べて振動数が全体的に高くなる。一方、見方を変えて振動モード形別に振動数パラメータと繊維配向角の関係を見ると、図中の振動モードは繊維配向角 α の増加と共に振動数パラメータが高くなり $\alpha = 90^\circ$ のときに振動数が最も高くなるものと、繊維配向角 $\alpha = 30^\circ$ 近傍において振動数が極大となる振動モードに分けることができる。図においては、 $n = 2, 3$ の軸方向一次の振動モードが前者に相当し、 $n = 0_u, 1$ の一次および $n = 2$ の二次が後者に属する。

図4-4、図4-5はそれぞれ両端固定、一端固定他端自由(片持ち)のアングラプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示したものであり、各図(a)、(b)はそれぞれ3層積層($\alpha / -\alpha / \alpha$)と2層積層($\alpha / -\alpha$)の場合に対応している。図からわかるように、繊維配向角が変化したときの振動数の変化の傾向は両端単純支持された場合とよく似ており、振動モード形の移り変わりも確認できる。しかしながら、両端固定された場合(図4-4)における

$\alpha = 30^\circ \sim 60^\circ$ の $n = 1$ の曲げ振動と $\alpha = 80^\circ$ 近傍での $n = 0$ の伸び振動においては、3層対称積層に比べて2層逆対称積層円筒殻の振動数がいくぶん高くなることが認められる。また、同様に一端固定他端自由の場合には $\alpha = 20^\circ \sim 40^\circ$ のねじり振動 ($n = 0_v$) においても同様な特徴が確認できる。さらに、両端単純支持された場合と同様にこれらの支持条件の場合においても、振動モード形別にみた場合、前述のような2つの振動形に分類することができる。

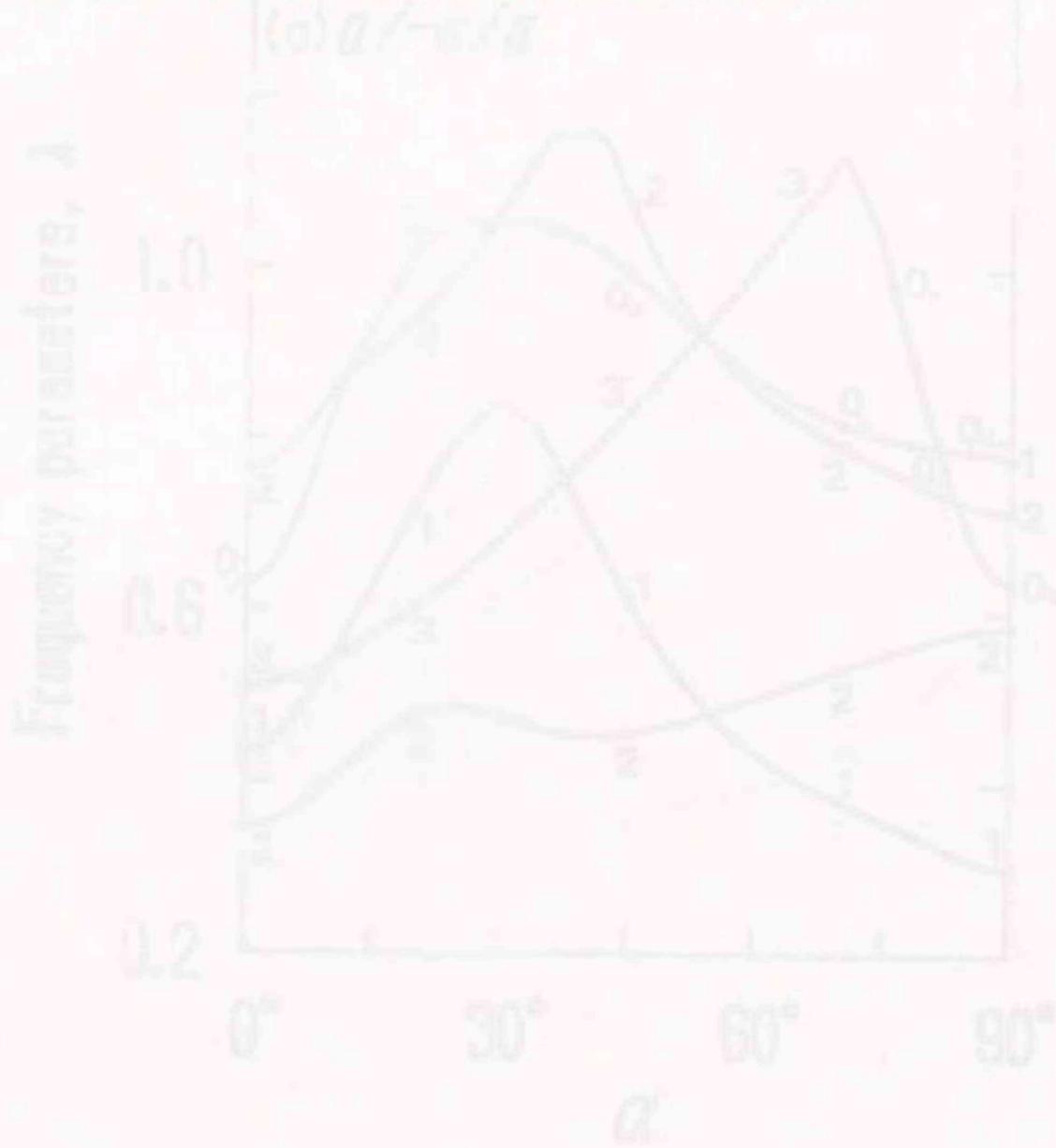


図11-11 両端単純支持された円筒殻の固有振動数の変化 (対称積層殻の場合) (対称積層殻の場合) (対称積層殻の場合)

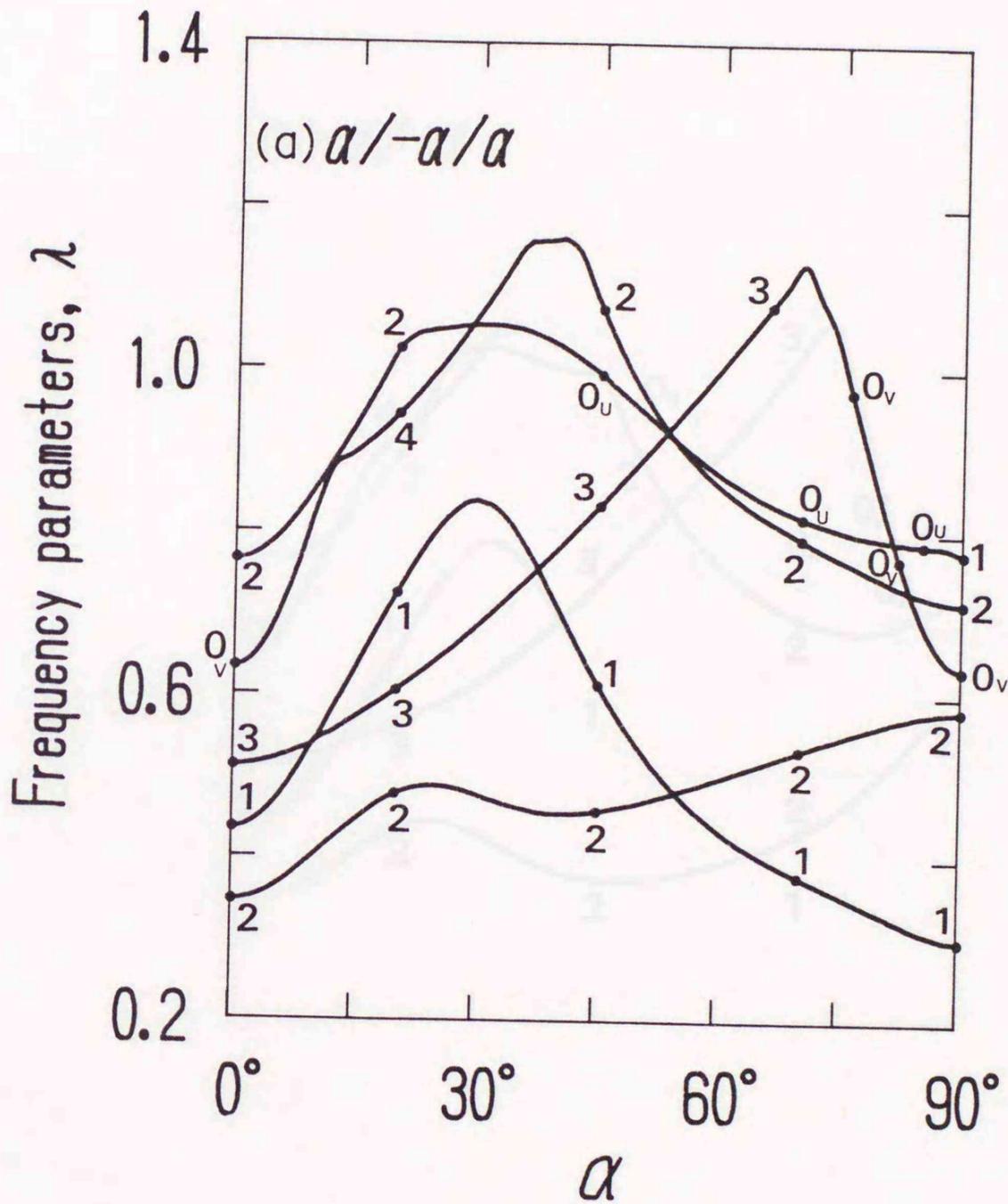


図4-3(a) 両端単純支持された3層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係
 $\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right]$

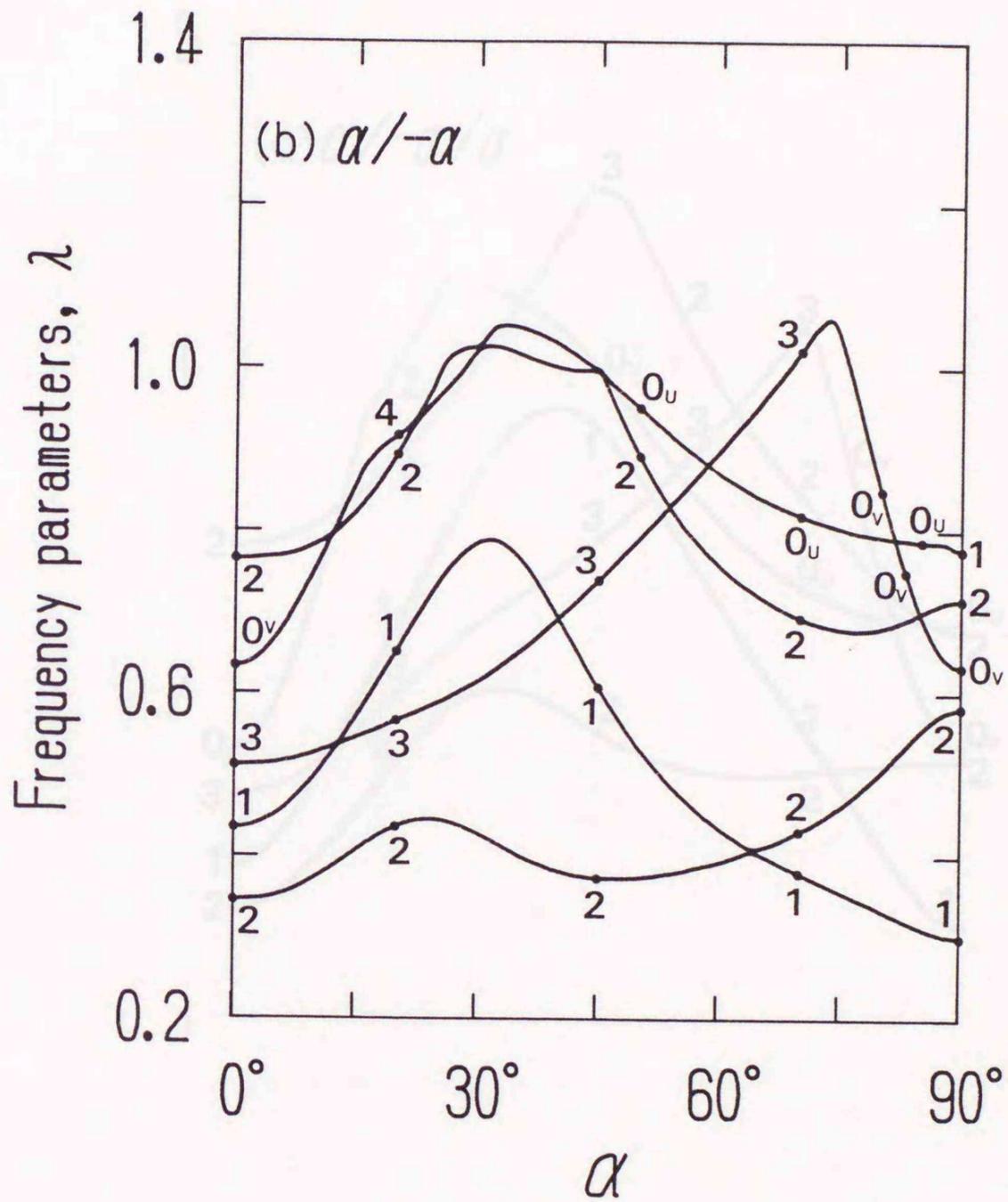


図4-3(b) 両端単純支持された2層アングラプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係
 $\left(E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \right.$
 $\left. \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \right)$

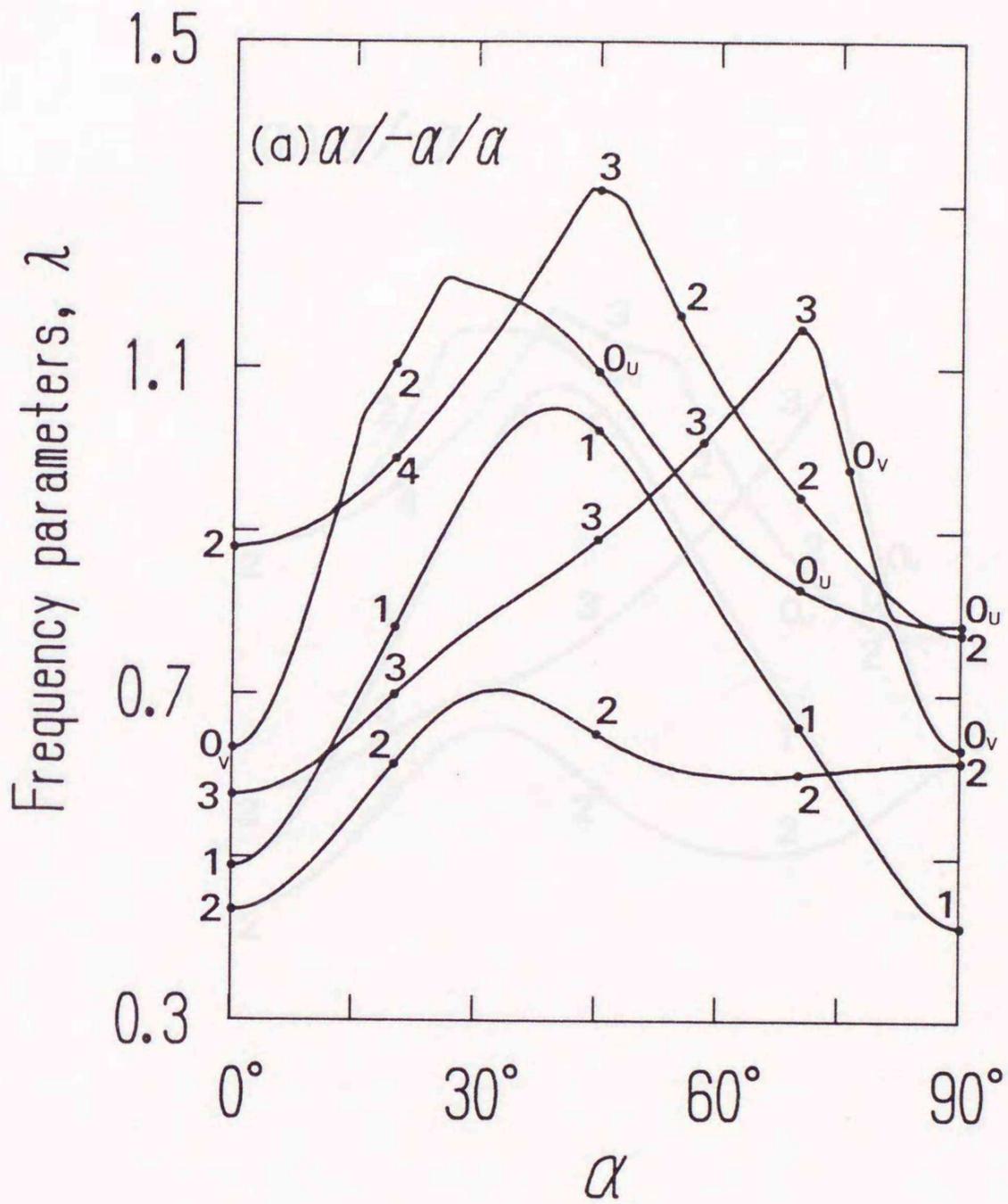


図4-4(a) 両端固定された3層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

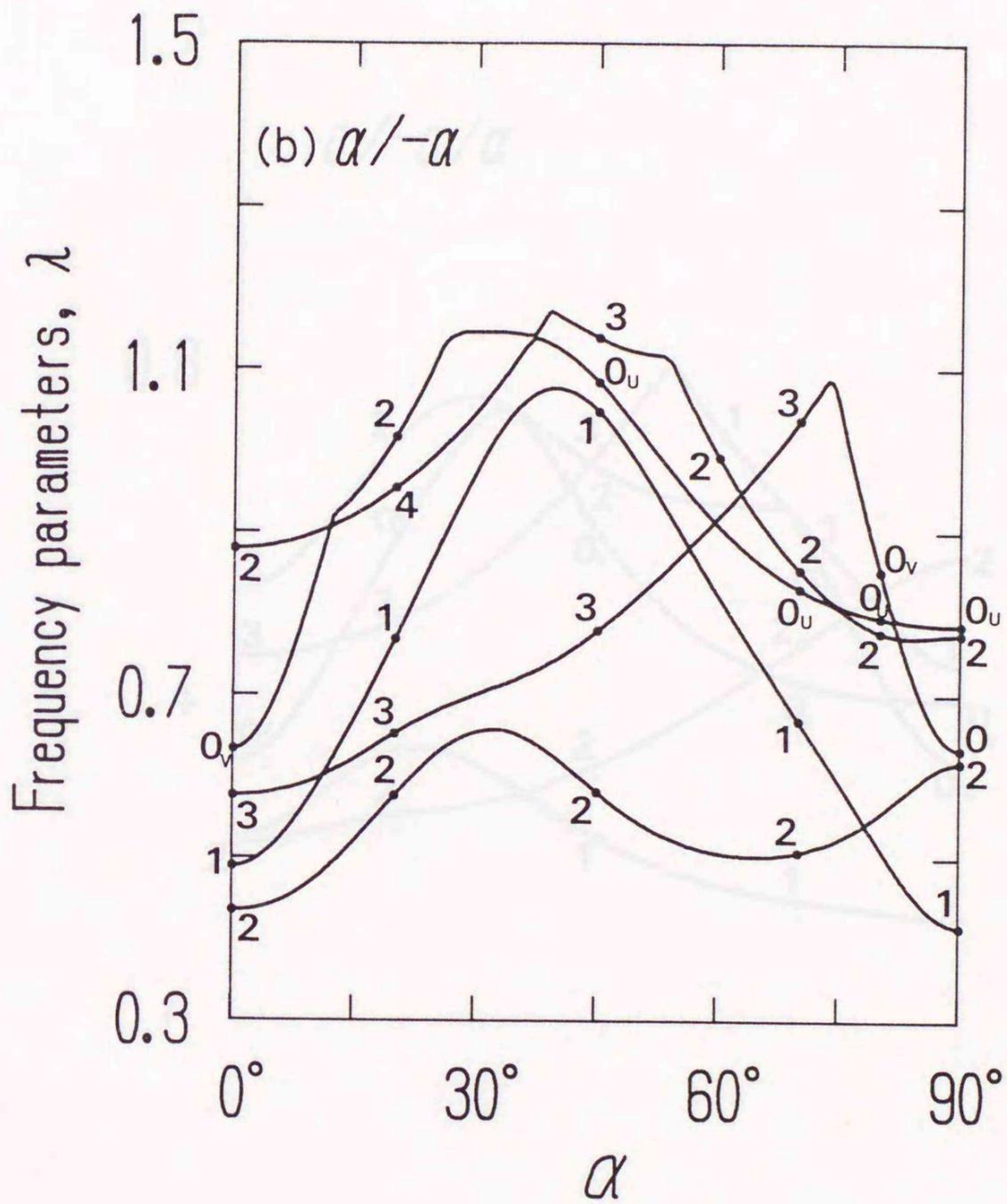


図4-4(b) 両端固定された2層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right]$$

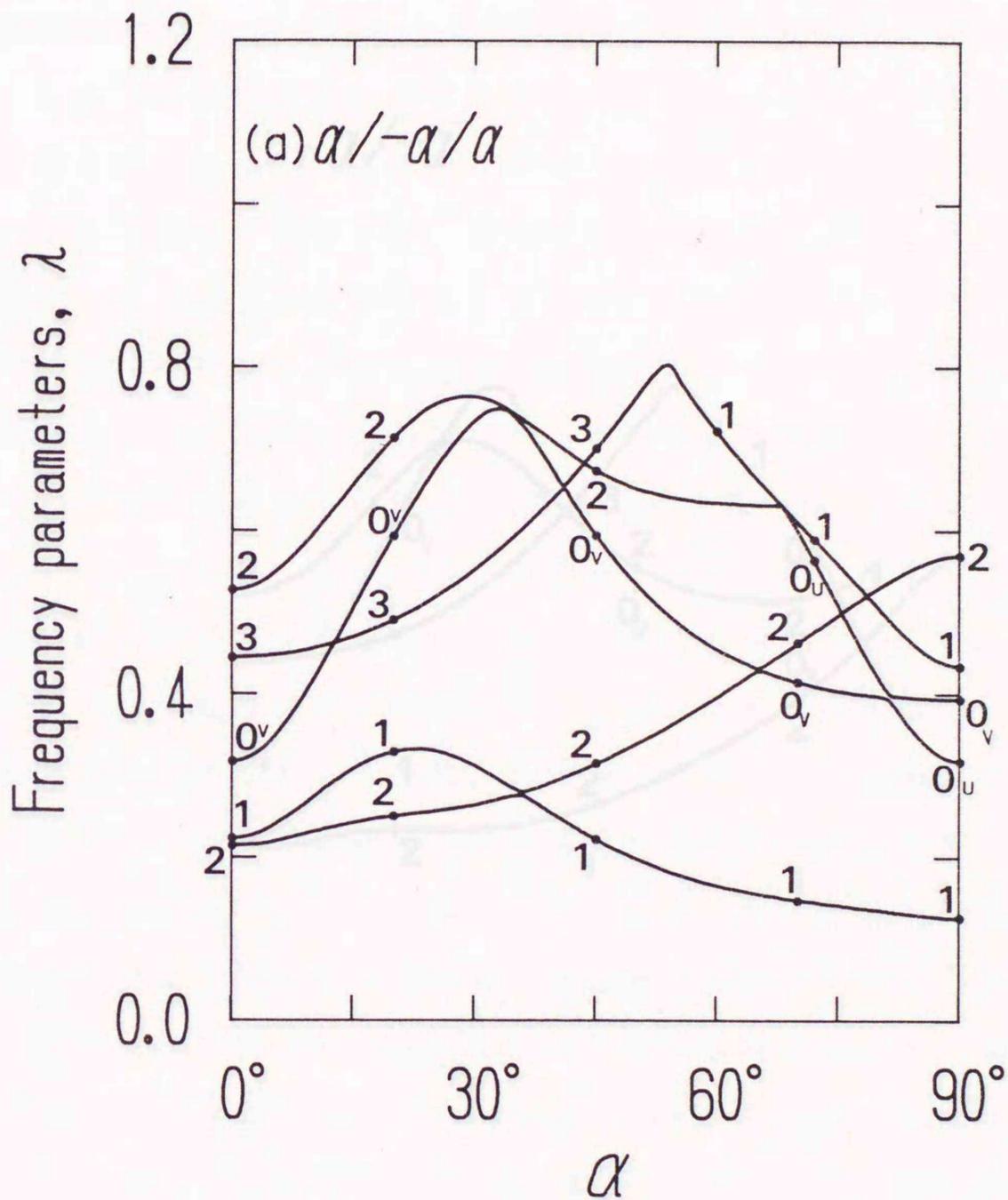


図4-5(a) 片持ちの3層アングラプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

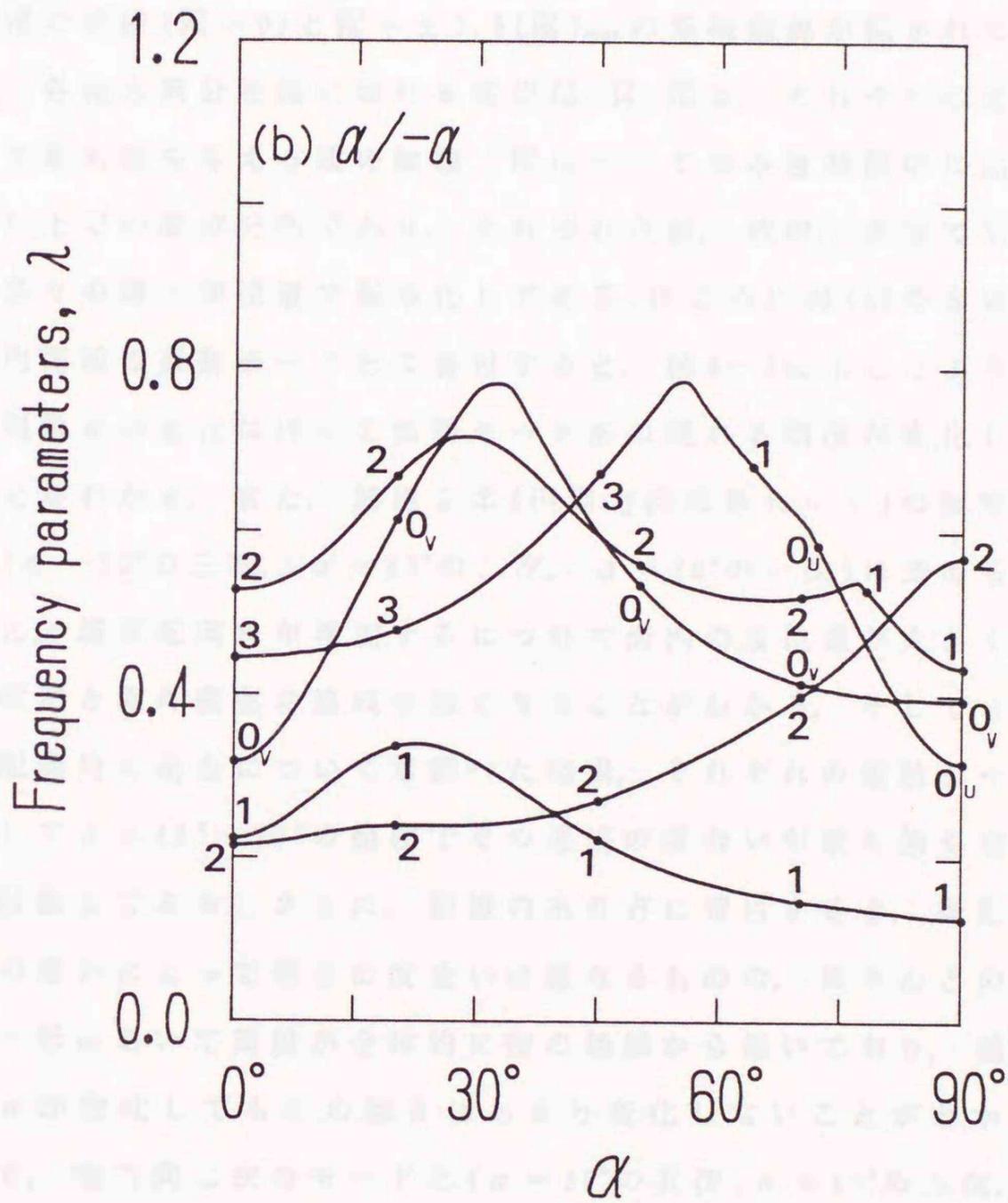


図4-5(b) 片持ちの2層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

次にアングラプライ積層複合円筒殻の振動モード形について考察する。図4-6は両端単純支持されたアングラプライ積層複合円筒殻の振動モードを示しており、図(a)と(b)はそれぞれ3層積層($\alpha / -\alpha / \alpha$)、2層積層($\alpha / -\alpha$)に対応している。また、各々の図には変位 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} の軸方向分布、図4-7に示すような円筒殻の展開面に面外変位 \bar{w} の節線($\bar{w} = 0$)と $\bar{w} = \pm 0.5(\bar{w})_{max}$ の等振幅線が描かれている。なお、各軸方向分布図における変位 \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} は、それぞれの変位に対して最大値を与える殻の軸線(\bar{w} についてのみ展開図中に点線で示す)上での変位分布であり、それぞれ点線、破線、実線で示すと共に各々の最大変位量で基準化してある。はじめに図(a)の3層対称積層円筒殻の振動モード形に着目すると、図4-3に示したように繊維配向角 α の変化に伴って振動モード形の現れる順序が変化していることがわかる。また、節線2本(円周方向波数 $n = 1$)の振動モード形($\alpha = 20^\circ$ の三次、 $\alpha = 45^\circ$ の二次、 $\alpha = 70^\circ$ の一次)に認められるように、繊維配向角が増加するにつれて面内の変位量が大きくなり、面内変形と面外変形の連成が強くなることがわかる。そして、他の繊維配向角の場合についても調べた結果、それぞれの振動モード形に対して $\alpha = 45^\circ \sim 70^\circ$ の範囲でその連成の度合いが最も強くなることを確認してある。さらに、節線のあり方に着目すると、振動モード形の違いによって傾きの度合いは異なるものの、ほとんどの振動モード形において節線が全体的に殻の軸線から傾いており、繊維配向角 α が変化してもその傾きはあまり変化しないことがわかる。そして、軸方向二次のモード形($\alpha = 20^\circ$ の五次、 $\alpha = 45^\circ$ の五次、 $\alpha = 70^\circ$ の三次)においては、等方性円筒殻やクロスプライ積層円筒殻において現れる軸方向の節線と円周方向の節線が交差することなく一本の節線を形成する。次に逆対称積層円筒殻(図(b))については、対称積層の場合と同様な特徴が認められるものの節線の傾き度合いは対称積層の場合ほど大きくなく、節線の少ないモード形($\alpha = 20^\circ$

の一次と三次, $\alpha = 45^\circ$ の二次と五次)においては殻の両端付近において節線が大きく曲がることわかる。

図4-8, 図4-9はそれぞれ両端固定, 一端固定他端自由(片持ち)のアンギュラプライ積層複合円筒殻の振動モードを示しており, 各々の図における図(a), (b)はそれぞれ3層積層($\alpha / -\alpha / \alpha$), 2層($\alpha / -\alpha$)積層円筒殻に対応している。図より殻の支持条件が両端固定, 一端固定他端自由の場合においても両端単純支持のときと同様な特徴が認められる。しかしながら, 両端固定された2層逆対称積層の場合(図4-8(b))においては, 他の支持条件の場合と異なって節線が対称積層の場合と同程度傾く。これは逆対称積層のときには対称積層に比べて面内と面外の変形の連成度合いが強くなるが, 支持条件が両端固定の場合は両端における変形が拘束されるために, その連成の影響が他の支持条件の場合に比べて強くなるためと考えられる。また, これらの支持条件の場合には両端単純支持の場合と異なり, 対称積層のときに殻の両端において節線が曲がっている。

最後にラミナの積層数, 支持条件の異なるアンギュラプライ積層複合円筒殻について, 基本(最低次の)振動数パラメータと繊維配向角との関係を調べる。図4-10は1層~4層のアンギュラプライ積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示している。図において実線, 破線, 点線はそれぞれ両端単純支持, 両端固定, 一端固定他端自由(片持ち)の支持条件を有する場合に対応しており, 図中の N は積層しているラミナの数である。すなわち, $N = 2$ は($\alpha / -\alpha$), $N = 3$ は($\alpha / -\alpha / \alpha$), そして $N = 4_s, 4_A$ はそれぞれ4層の対称積層($\alpha / -\alpha / -\alpha / \alpha$), 逆対称積層($\alpha / -\alpha / \alpha / -\alpha$)を示している。この図からいずれの支持条件の場合においても, 積層数 N が増加するにしたがって振動数は全体的に高くなり, 積層数 $N = 4$ 程度において振動数はほぼある値に収束することがわかる。また, 両端単純支持された $N = 4_s$ の積層円筒殻に着目すると, 繊維配向角

(a) $\alpha / -\alpha / \alpha$

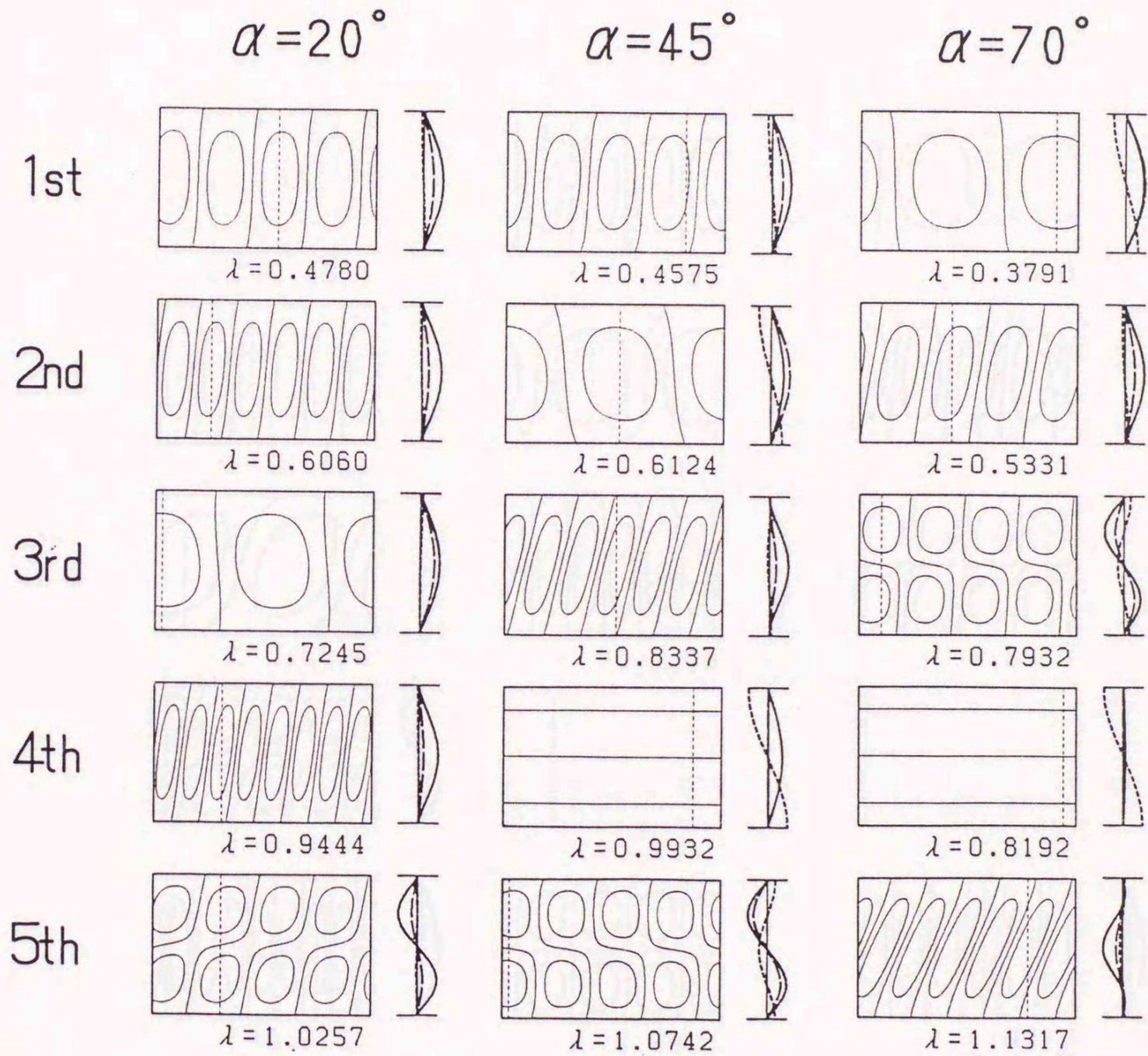


図4-6(a) 両端単純支持された3層アングルプライ
積層複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, \quad G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, \quad l = 4.0, \quad h = 0.2. \end{array} \right)$$

(b) $\alpha / -\alpha$

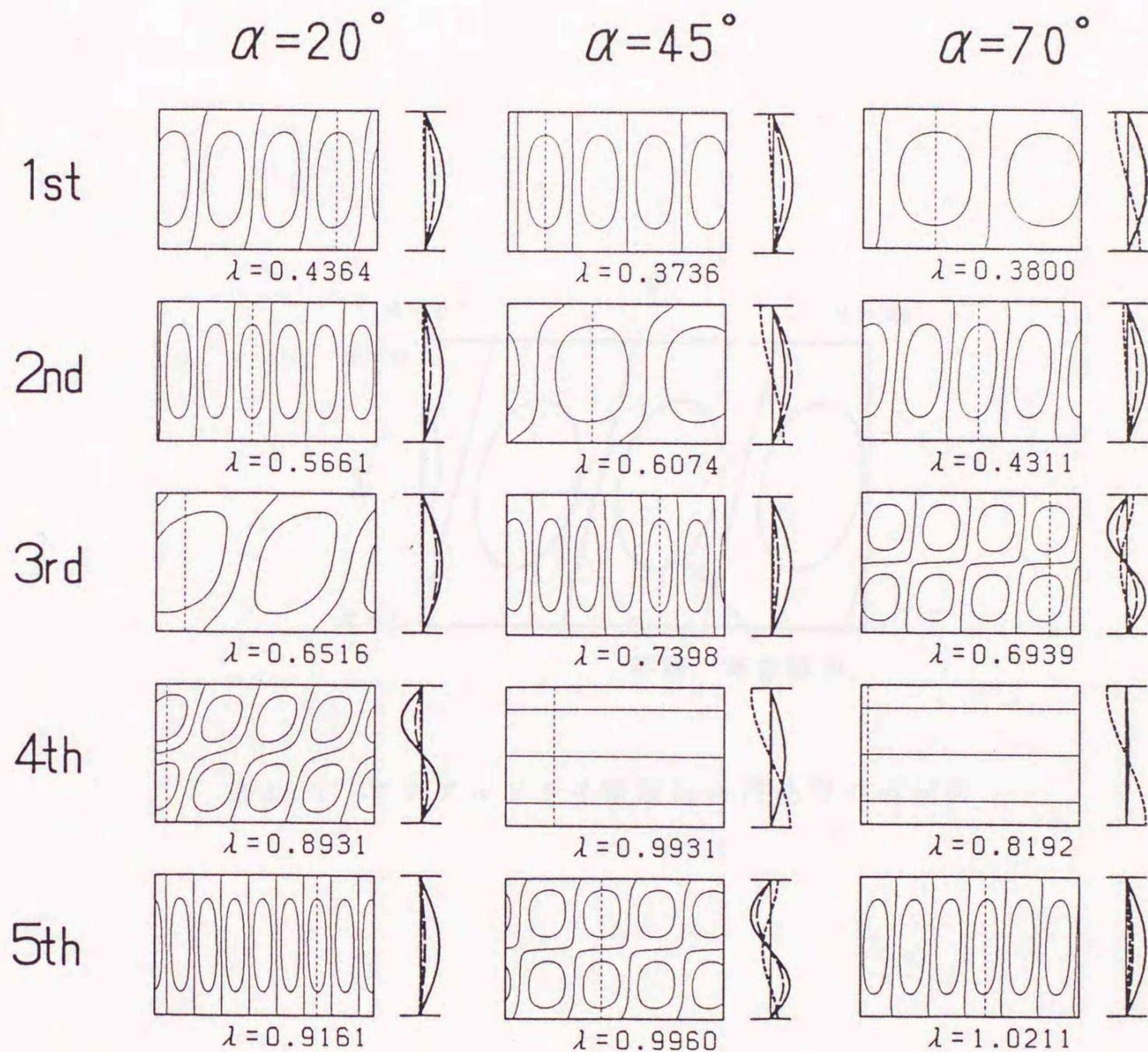


図4-6(b) 両端単純支持された2層アングルプライ積層複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, \quad G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, \quad l = 4.0, \quad h = 0.2. \end{array} \right)$$

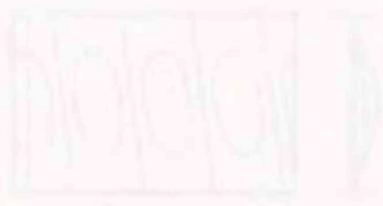
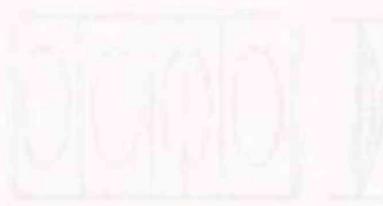
(a) $a/a - a/a$

$\alpha = 20^\circ$

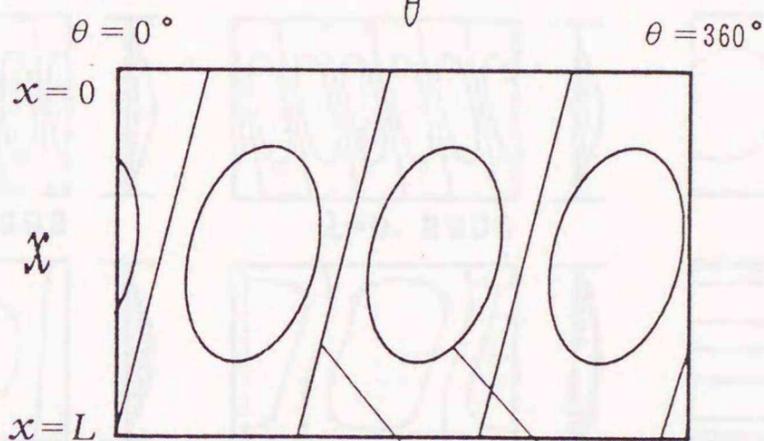
$\alpha = 45^\circ$

$\alpha = 70^\circ$

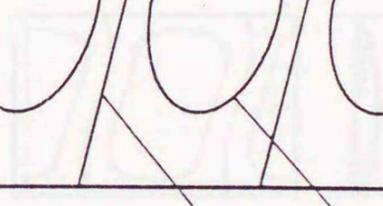
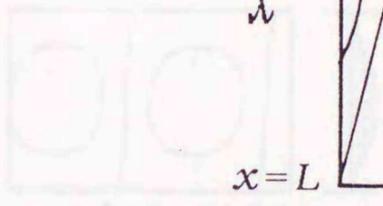
1st



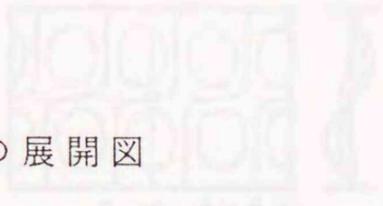
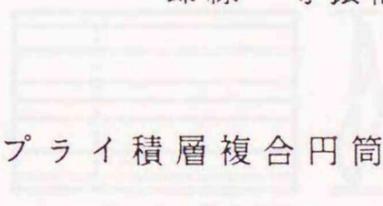
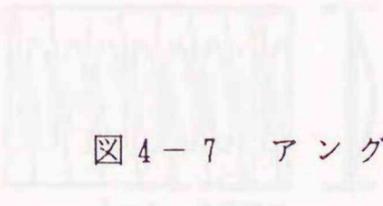
2nd



3rd



4th



5th



図4-7 アングルプライ積層複合円筒殻の展開図

図4-151 繊維質複合材料の円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{matrix} E_1 = 100, G_1 = 10, \nu_1 = 0.3 \\ E_2 = 10, G_2 = 10, \nu_2 = 0.3 \end{matrix} \right)$$

(a) $\alpha / -\alpha / \alpha$

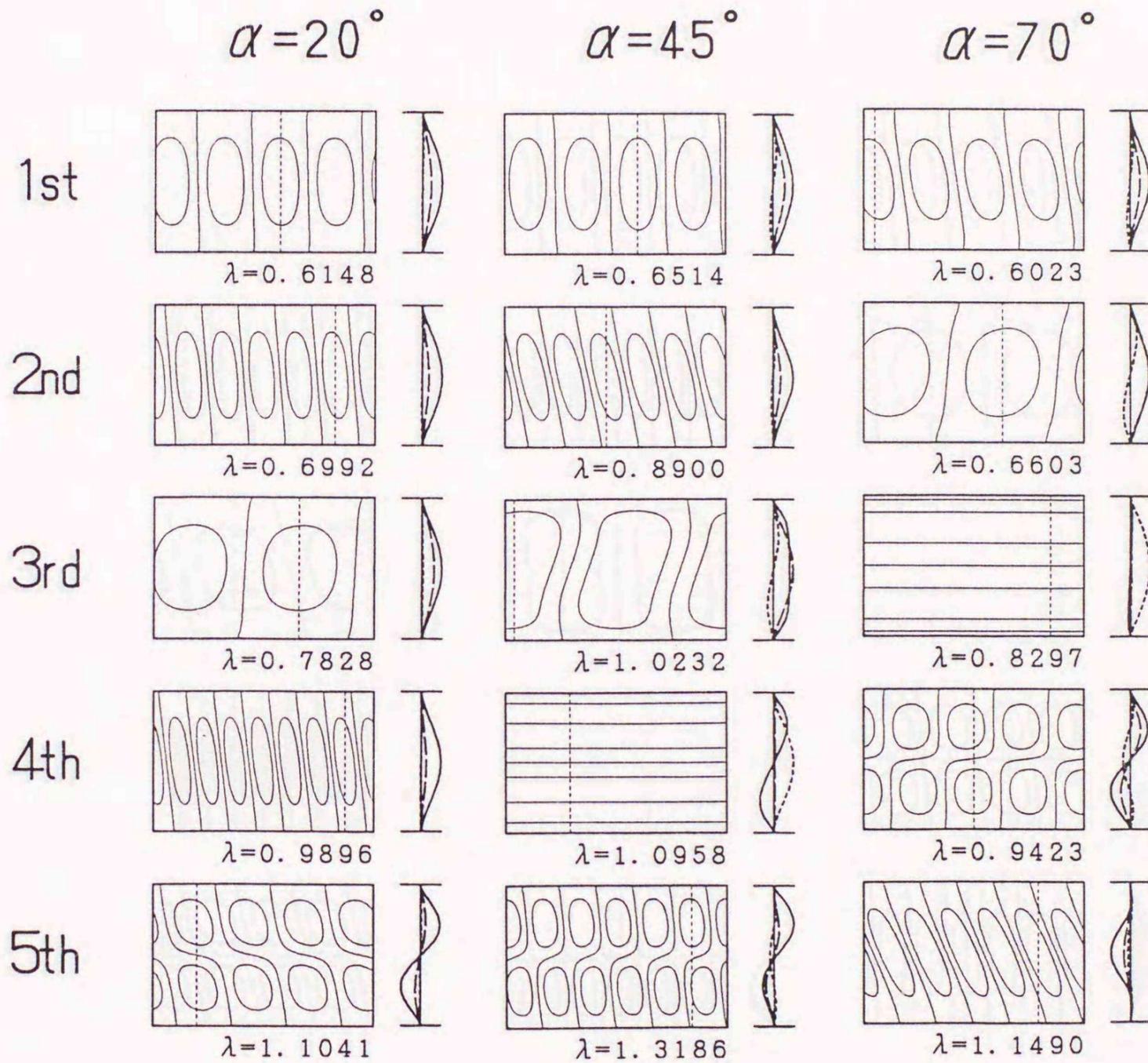


図4-8(a) 両端固定された3層アングルプライ積層複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, l = 4.0, h = 0.2. \end{array} \right)$$

(b) $\alpha / -\alpha$

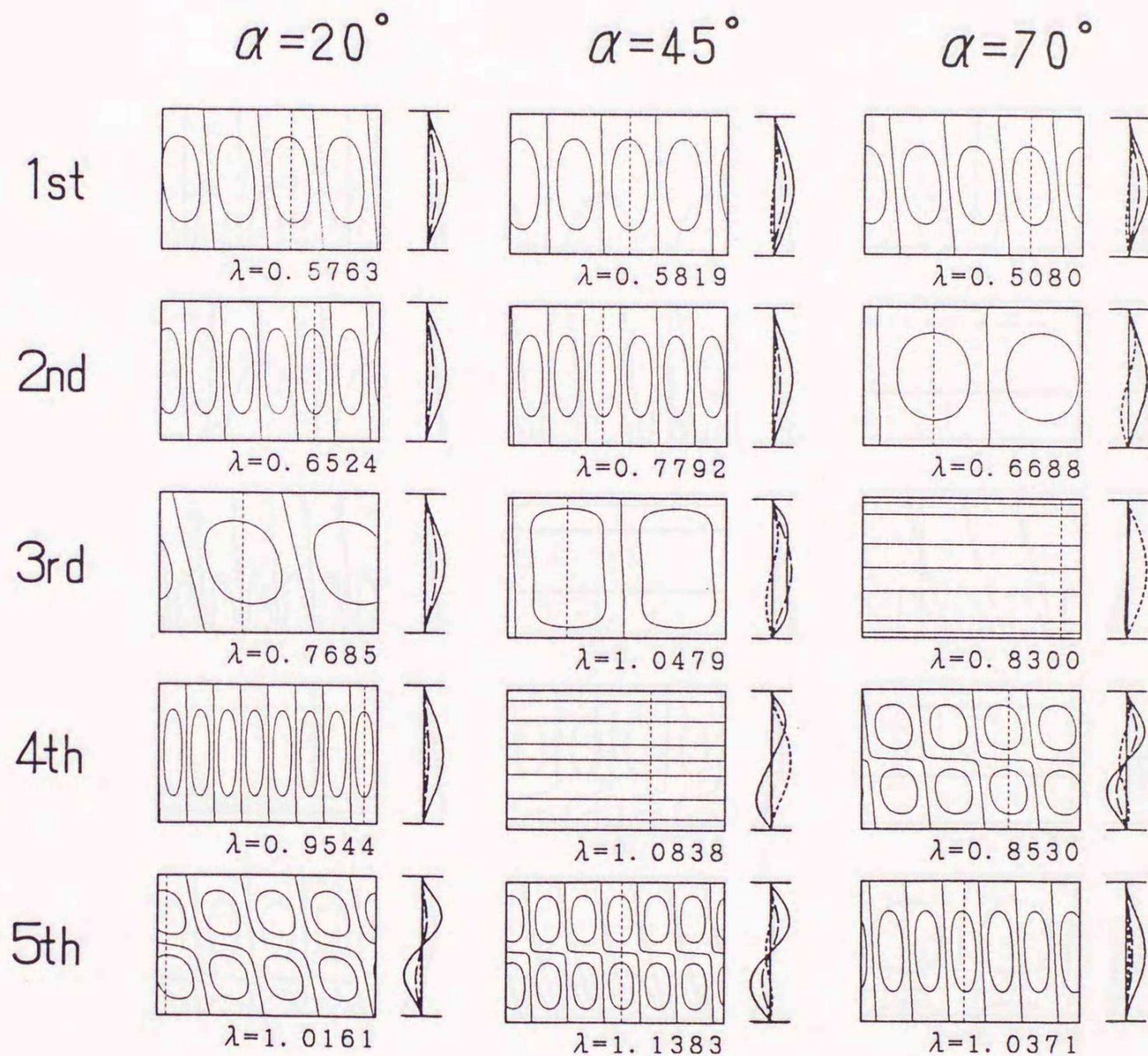


図4-8(b) 両端固定された2層アングルプライ積層複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, \quad G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, \quad l = 4.0, \quad h = 0.2. \end{array} \right)$$

(a) $\alpha / -\alpha / \alpha$

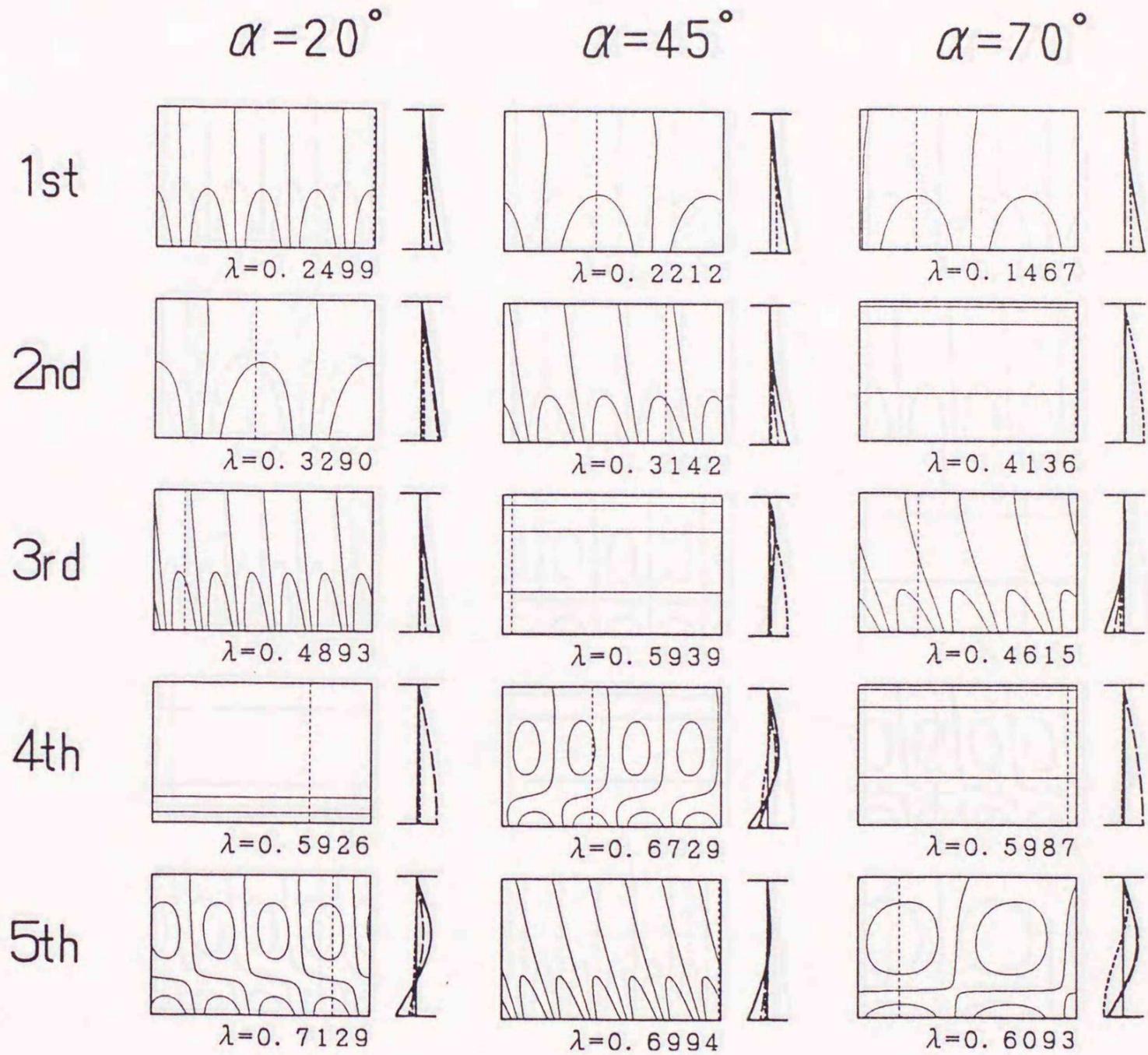


図4-9(a) 片持ちの3層アングルプライ積層
複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, l = 4.0, h = 0.2. \end{array} \right)$$

(b) $\alpha / -\alpha$

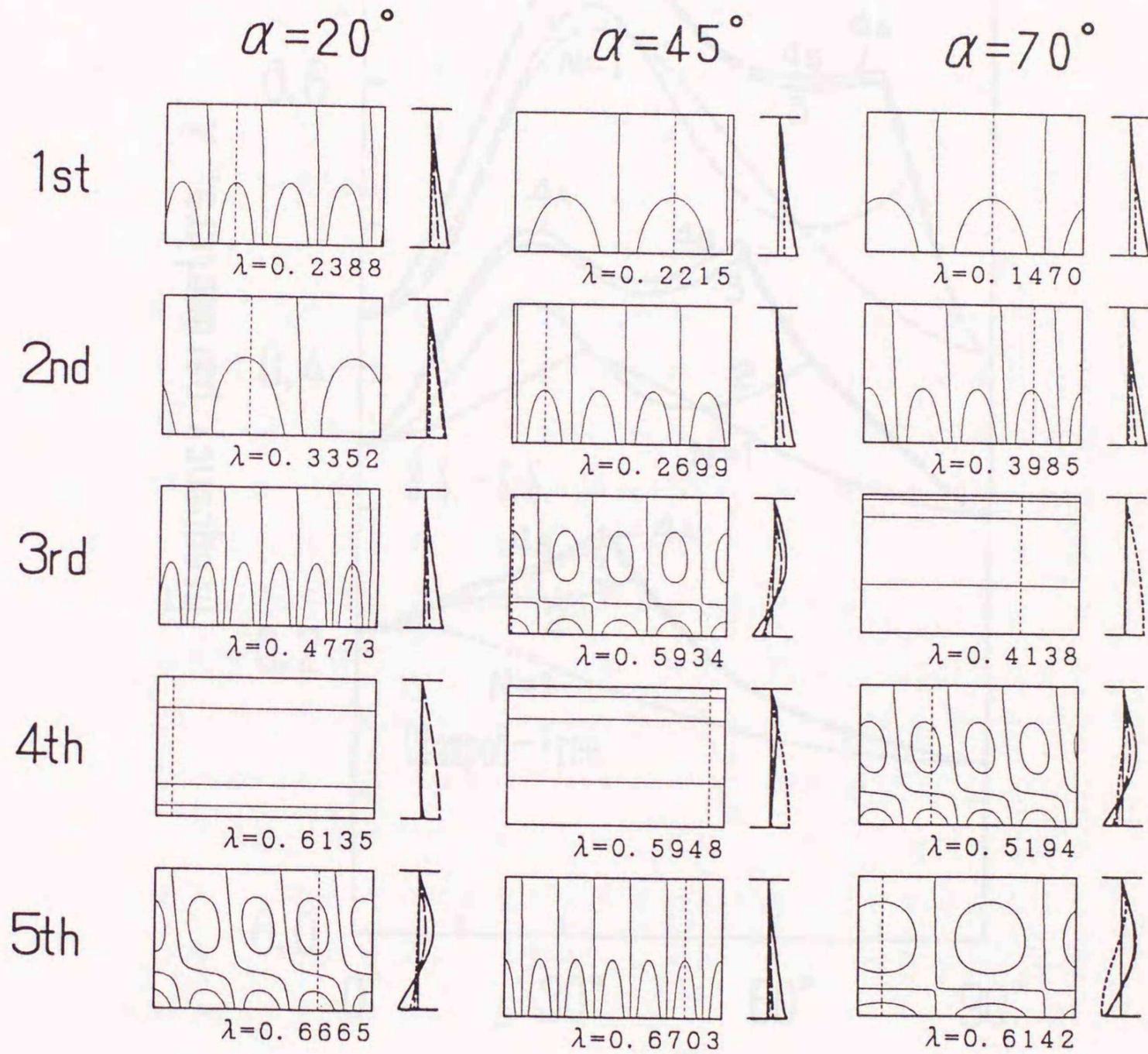


図4-9(b) 片持ちの2層アングルプライ積層
複合円筒殻の振動モード

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, l = 4.0, h = 0.2. \end{array} \right)$$

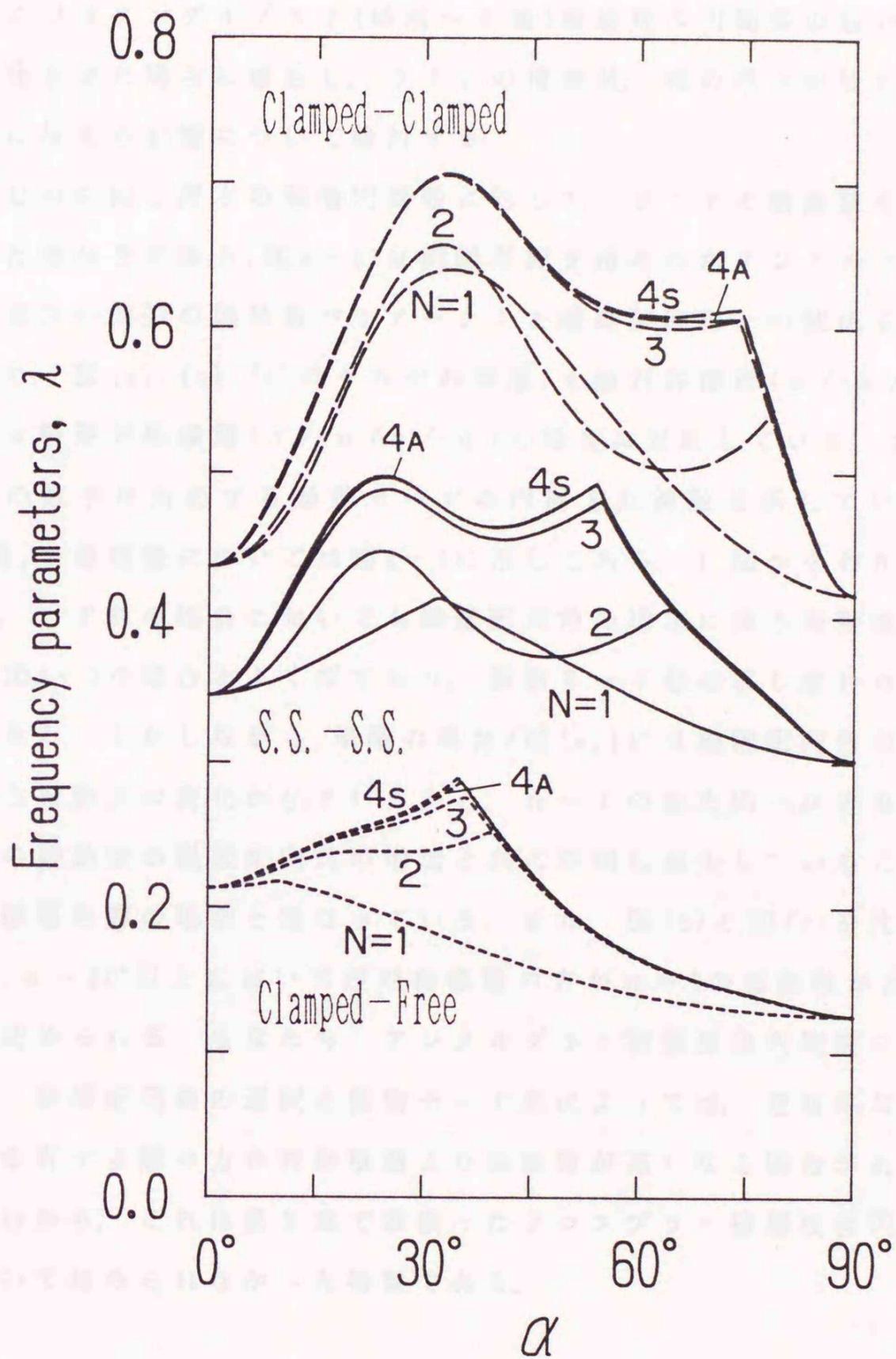


図4-10 アングルプライ積層複合円筒殻の基本振動数
パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

4.3.3 積層数と殻の厚さの影響

ここではアングルプライ(単層～4層)積層複合円筒殻の殻の厚さを変化させた場合に着目し、ラミナの積層数、殻の厚さが殻の振動特性に与える影響について検討する。

はじめに同じ厚さの積層円筒殻に対して、ラミナの積層数を変化させた場合を取扱う。図4-11は両端単純支持されたアングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示しており、図(a)、(b)、(c)はそれぞれ単層、4層対称積層($\alpha / -\alpha / -\alpha / \alpha$)、4層逆対称積層($\alpha / -\alpha / \alpha / -\alpha$)の場合に対応している。また、図中の数字は対応する振動モードの円周方向波数を示している。(2層、3層積層については図4-3に示してある。) 図からわかるように、いずれの場合においても繊維配向角の増加に伴う振動数の変化は図4-3の場合とよく似ており、振動モード形の移り変わりも確認できる。しかしながら、単層の場合(図(a))には繊維配向角の変化に伴う振動数の変化が小さいことと、 $n=1$ の軸方向一次の振動モードの振動数が繊維配向角の増加と共に単調に減少していることが他の積層形態の場合と異なっている。また、図(b)と図(c)を比較すると、 $\alpha=20^\circ$ 以上において逆対称積層の方が $n=3$ の振動数が高いことが認められる。すなわち、アングルプライ積層複合円筒殻においては、繊維配向角の選択と振動モード形によっては、逆対称な積層構成を有する殻の方が対称積層より振動数が高くなる場合があることがわかり、これは第3章で取扱ったクロスプライ積層複合円筒殻においてはみられなかった特徴である。

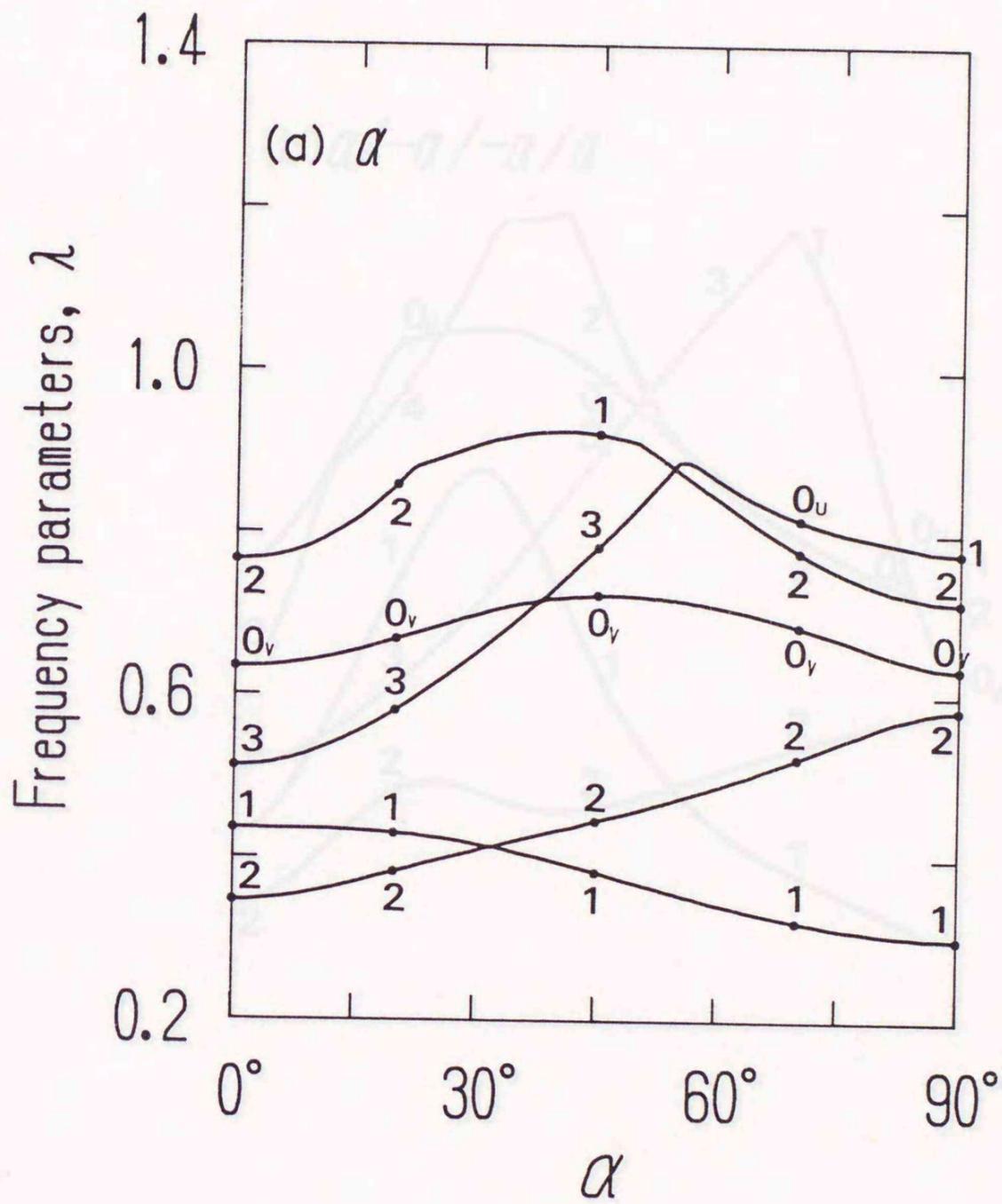


図4-11(a) 両端単純支持された単層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

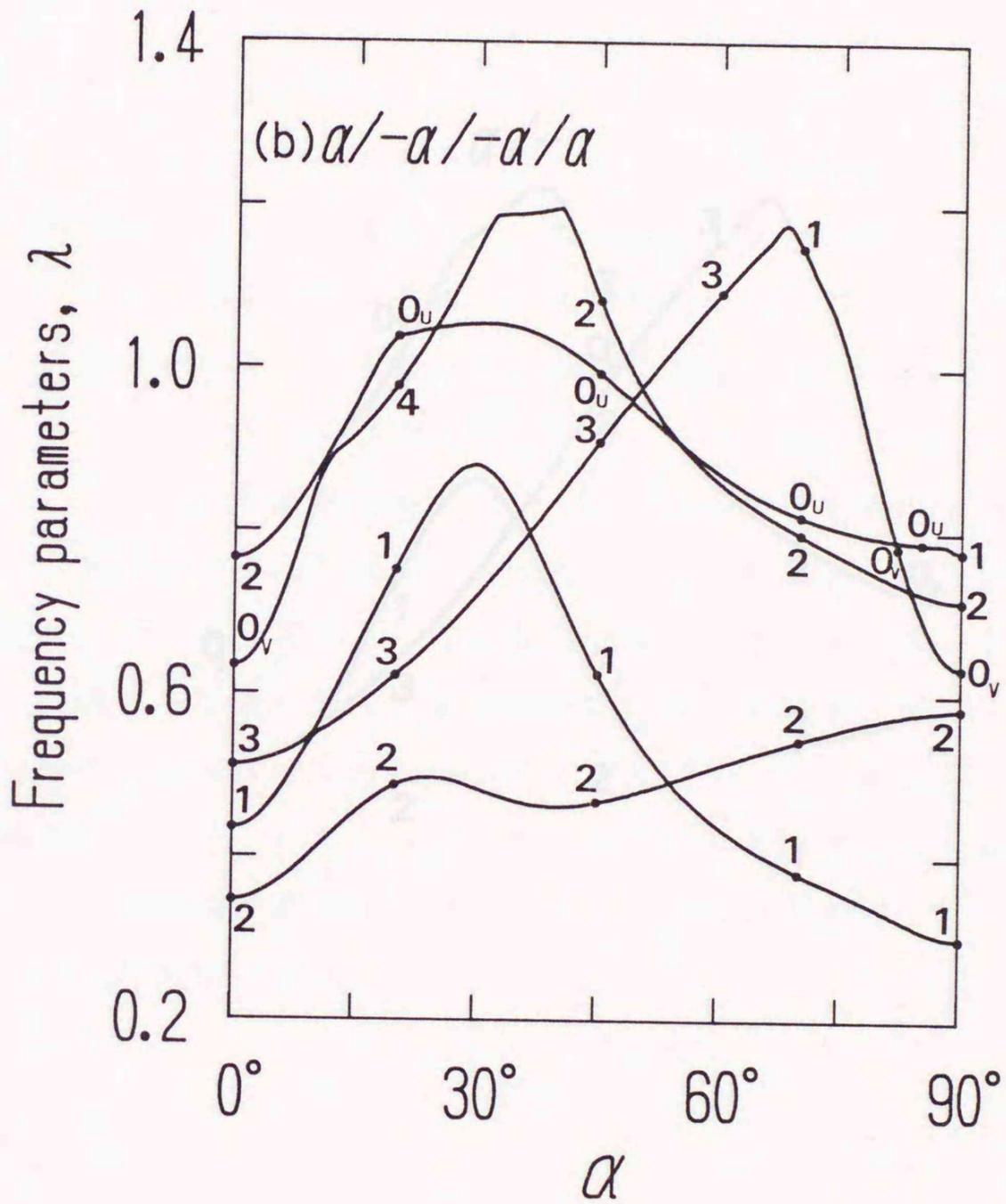


図4-11(b) 両端単純支持された対称4層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係
 $\left(E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \right)$
 $\left(\nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \right)$

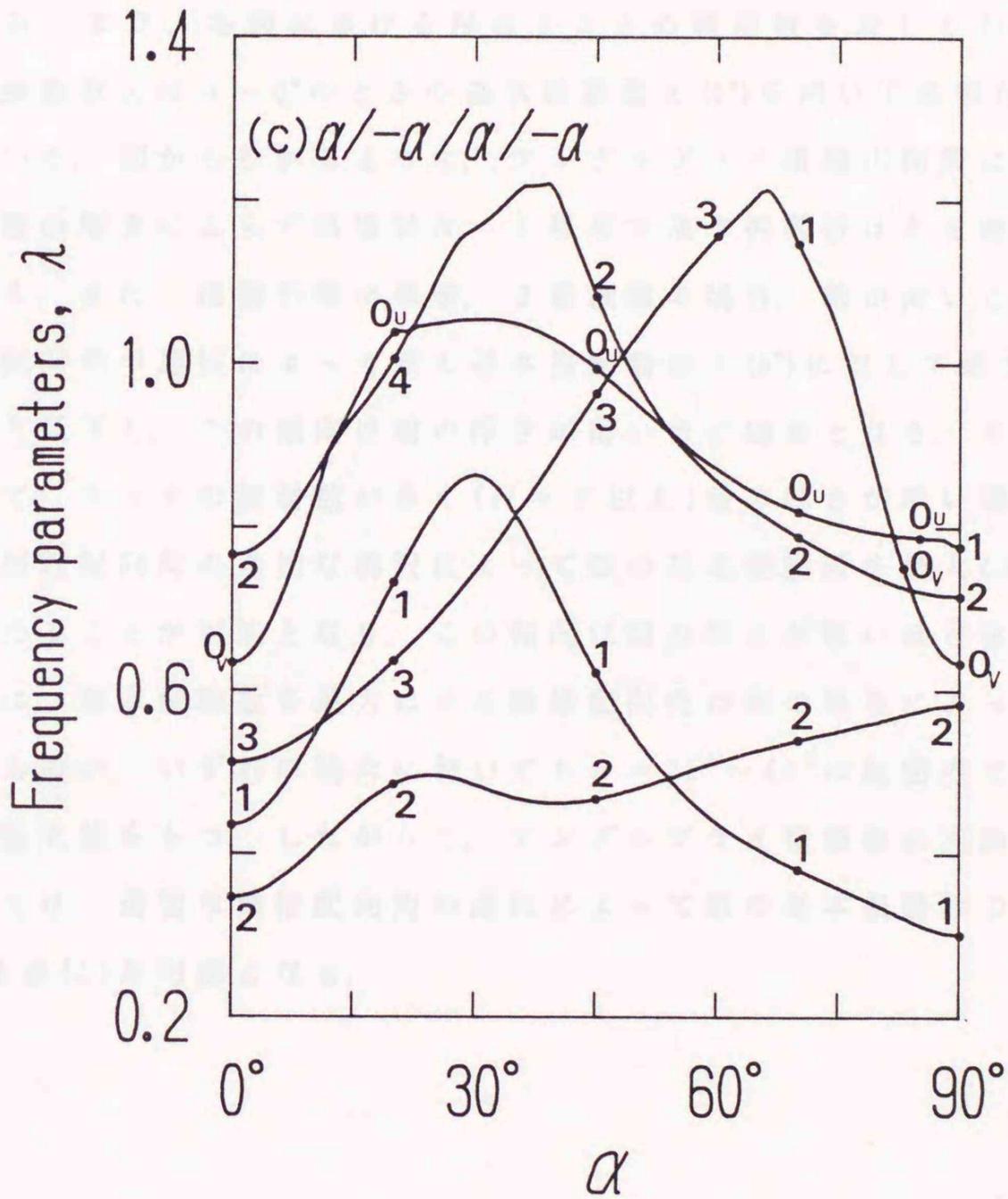


図4-11(c) 両端単純支持された逆対称4層アングルプライ積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

次に殻の厚さを変化させた場合について、ラミナの積層数の違いが振動特性に与える影響を調べる。図4-12はアングルプライ積層複合円筒殻の基本振動数比 $\lambda/\lambda(0^\circ)$ と繊維配向角 α の関係をラミナの積層数 N をパラメータにとって示している。ここで、図(a)~図(d)はそれぞれ殻の厚さ比が $h=0.2, 0.1, 0.05, 0.01$ の場合に対応している。また、各図における N はラミナの積層数を表しており、基本振動数 λ は $\alpha=0^\circ$ のときの基本振動数 $\lambda(0^\circ)$ を用いて基準化されている。図からわかるように、アングルプライ積層円筒殻においては殻の厚さによらず積層数 $N=4$ 程度で基本振動数はある値に収束する。また、積層形態が単層、2層積層の場合、殻が薄いときは繊維配向角の選択によって殻の基本振動数が $\lambda(0^\circ)$ に対して最大17%ほど低下し、その傾向は殻の厚さが薄いほど顕著となる。それに対して、ラミナの積層数が多く($N=3$ 以上)殻の厚さが厚い場合には、繊維配向角の適切な選択によって殻の基本振動数を最大45%ほど高めることが可能となり、この傾向は殻の厚さが厚いほど強い。さらに、基本振動数を最大にする繊維配向角は殻の厚さによって異なるものの、いずれの場合においても $\alpha=25^\circ\sim 40^\circ$ の範囲内で振動数は極大値をもつ。したがって、アングルプライ積層複合円筒殻においては、適切な繊維配向角の選択によって殻の基本振動数の最大化(最適化)が可能となる。

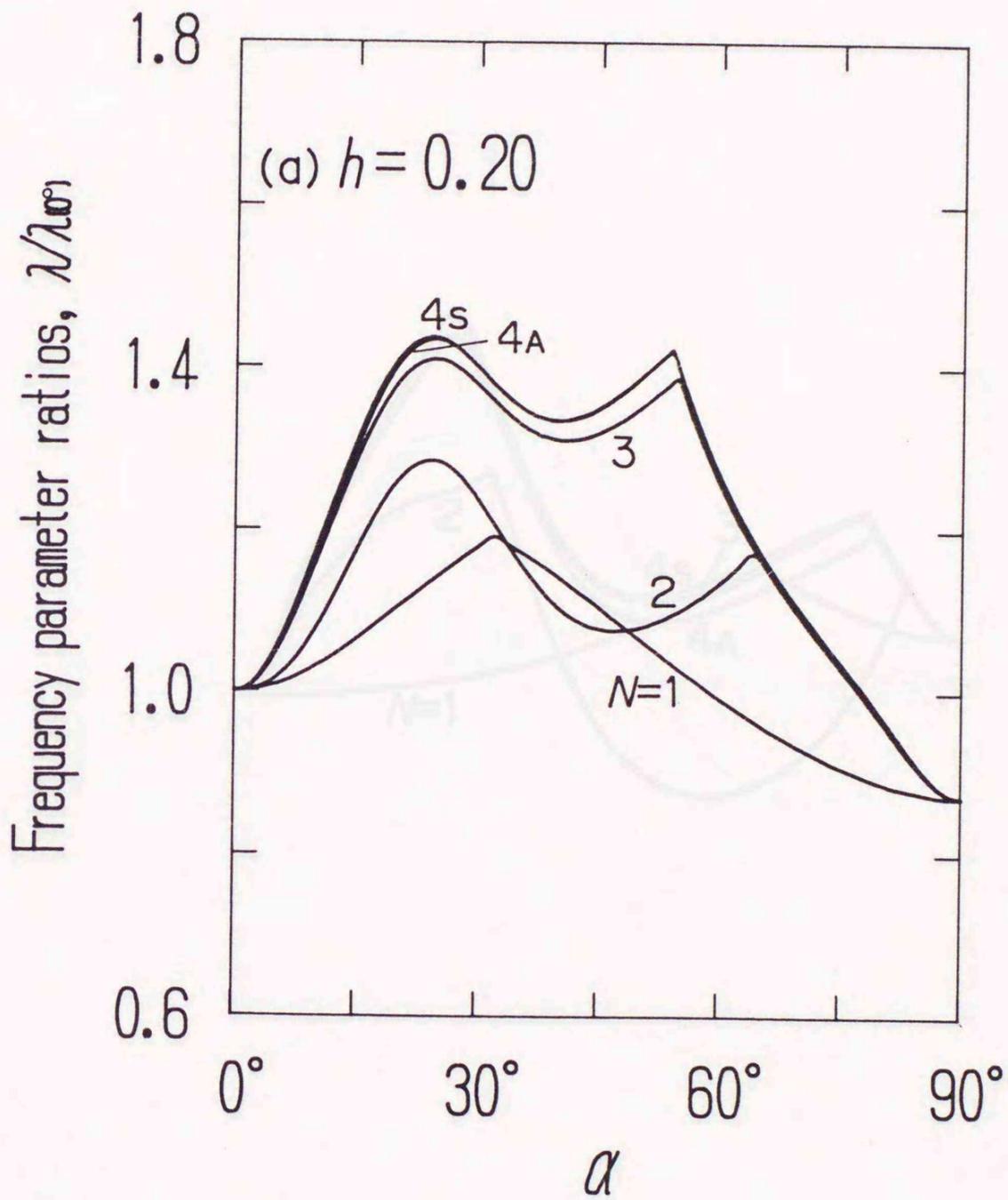


図4-12(a) 両端単純支持されたアングラプライ積層複合円筒殻の
基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, l = 4.0, h = 0.2. \end{array} \right)$$

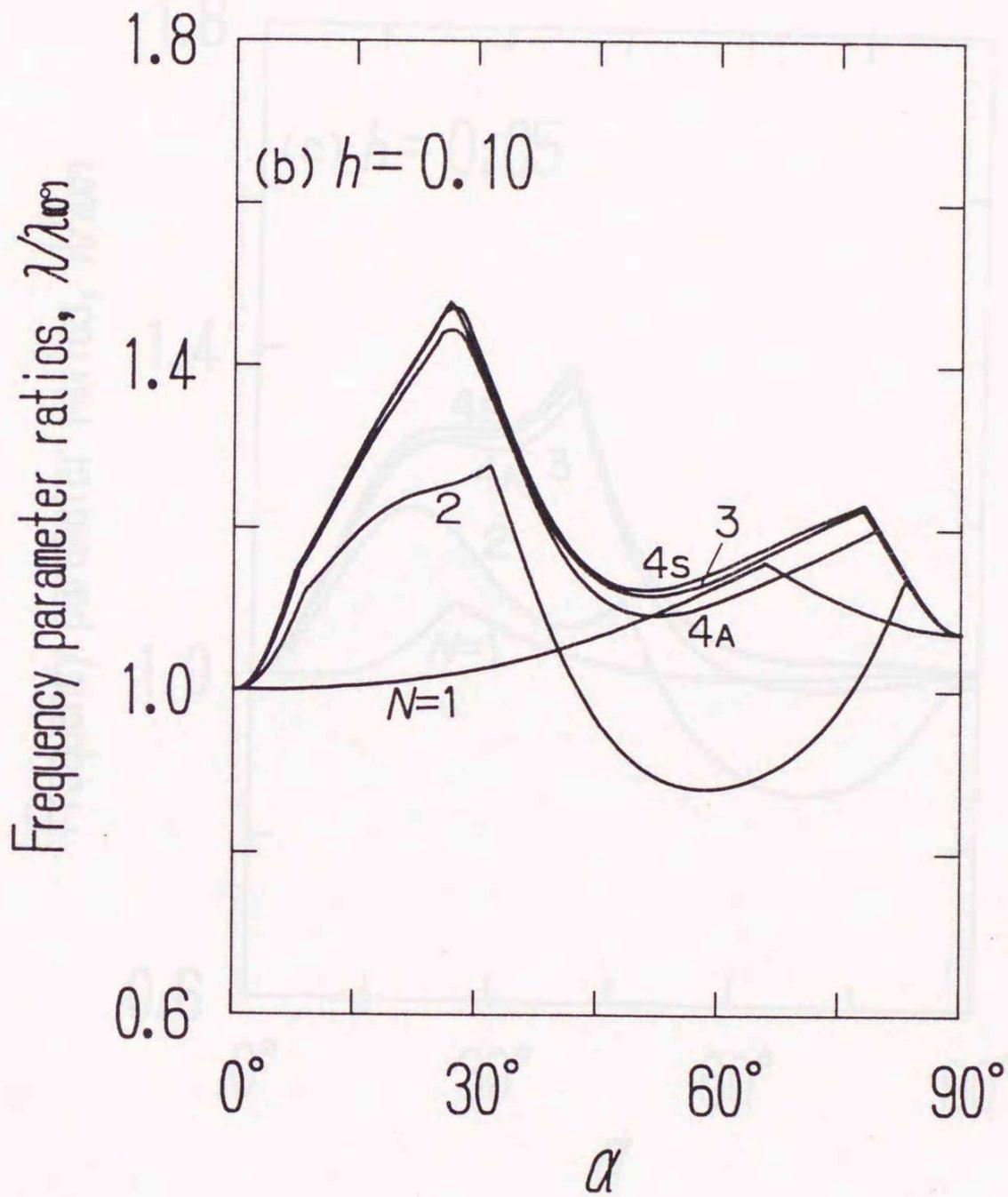


図4-12(b) 両端単純支持されたアングラプライ積層複合円筒殻の
基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = 20E_2, G_{12} = G_{31} = 0.65E_2, G_{23} = 0.5E_2, \\ \nu_{12} = 0.25, l = 4.0, h = 0.1. \end{array} \right)$$

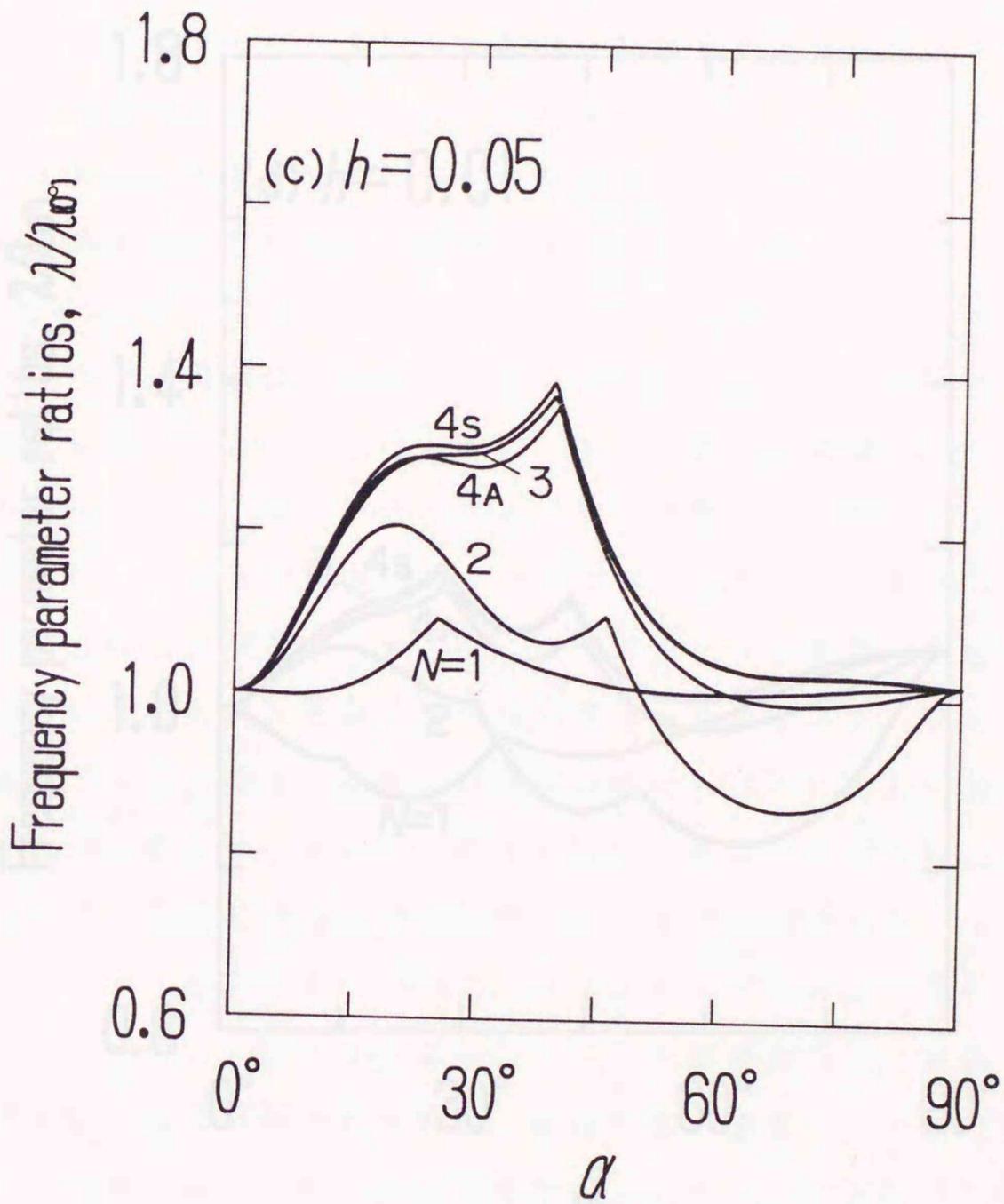


図4-12(c) 両端単純支持されたアングルプライ積層複合円筒殻の
基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.05. \end{array} \right)$$

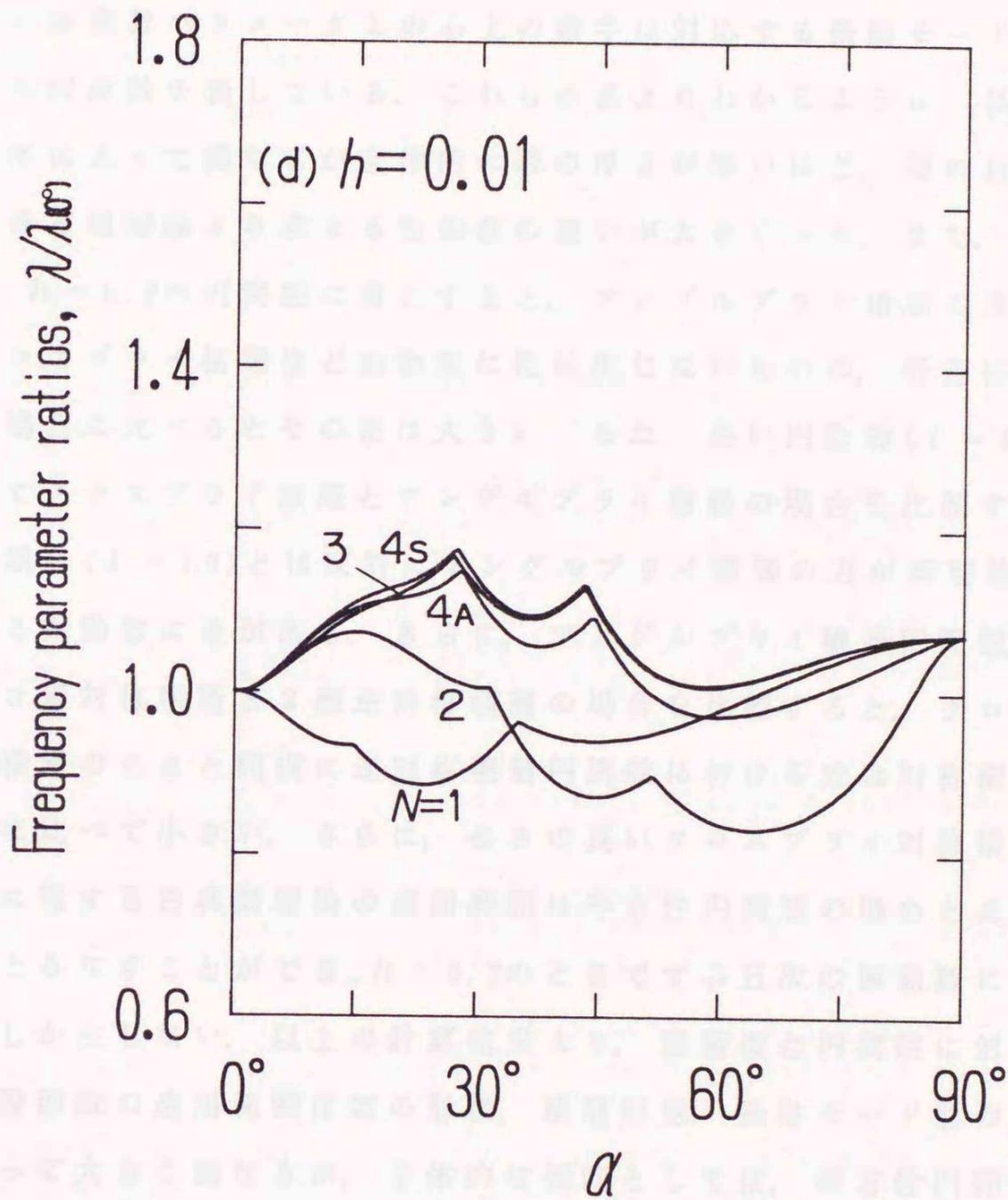


図4-12(d) 両端単純支持されたアングラプライ積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.01. \end{array} \right)$$

4.3.4 理論の違いによる固有振動数の比較

表4-6～表4-9はそれぞれ等方性, 3層クロスプライ積層($0^\circ/90^\circ/0^\circ$), 3層アングルプライ積層($45^\circ/-45^\circ/45^\circ$), 2層アングルプライ積層($45^\circ/-45^\circ$)の円筒殻について, 一次せん断変形理論と古典殻理論より求めた振動数パラメータ λ を比較したものである。また, 表中の振動数パラメータ λ の右上の数字は対応する振動モード形の円周方向波数を表している。これらの表よりわかるように, 振動モード形によって異なるが全体的に殻の厚さが厚いほど, 殻の長さが短いほど両理論より求まる振動数の違いが大きくなる。また, $l = 1.0$, $h = 0.2$ の円筒殻に着目すると, アングルプライ積層の場合にはクロスプライ積層ほど振動数に差は生じないものの, 等方性円筒殻の場合に比べるとその差は大きい。また, 長い円筒殻($l = 4.0$)についてクロスプライ積層とアングルプライ積層の場合を比較すると, 短い場合($l = 1.0$)とは反対にアングルプライ積層の方が両理論より求まる振動数に差がある。さらに, アングルプライ積層円筒殻について3層対称積層と2層逆対称積層の場合を比較すると, クロスプライ積層のときと同様に逆対称積層円筒殻における差は対称積層の場合に比べて小さい。さらに, 長さの長いクロスプライ対称積層円筒殻に対する古典殻理論の適用範囲は等方性円筒殻の場合とほぼ同程度とみなすことができ, $h = 0.2$ のときですら五次の振動数に12%の差しか生じない。以上の計算結果より, 積層複合円筒殻に対する古典殻理論の適用範囲は殻の形状, 積層形態, 振動モード形の違いによって大きく異なるが, 全体的な傾向としては, 等方性円筒殻, 長さが長いクロスプライ積層円筒殻, アングルプライ積層円筒殻, 短いクロスプライ積層円筒殻の順で古典殻理論の適用範囲が狭くなり, 逆対称積層複合円筒殻よりも対称積層の方が適用範囲が狭いことがわかる。

表4-6 一次せん断変形理論と古典殻理論から求まる
等方性円筒殻の振動数パラメータλの比較

$$\left(\begin{array}{l} E_1 = E_2, G_{12} = G_{31} = G_{23} = E_2/2(1 + \nu_{12}), \\ \nu_{12} = 0.3, \text{ S.S. - S.S.} \end{array} \right)$$

<i>l</i>	<i>h</i>	Theory	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	0.2	FSDT	0.9668 ²	1.043 ¹	1.050 ³	1.121 ⁰	1.302 ⁴
		CTST	1.018	1.075	1.151	1.149	1.496
		Differ.	5.3	3.1	9.6	2.5	15.0
	0.1	FSDT	0.7112 ³	0.7750 ²	0.7891 ⁴	0.9321 ¹	0.9835 ⁵
		CTST	0.7247	0.7817	0.8177	0.9370	1.038
		Differ.	1.9	0.9	3.6	0.5	5.5
	0.05	FSDT	0.5168 ⁴	0.5653 ⁵	0.5659 ³	0.6873 ⁶	0.7084 ²
		CTST	0.5202	0.5723	0.5675	0.7002	0.7095
		Differ.	0.7	1.2	0.3	1.9	0.2
	0.01	FSDT	0.2394 ⁷	0.2504 ⁶	0.2552 ⁸	0.2903 ⁹	0.2948 ⁵
		CTST	0.2396	0.2505	0.2554	0.2907	0.2948
		Differ.	0.1	0.0	0.1	0.1	0.0
4.0	0.2	FSDT	0.2194 ²	0.2715 ¹	0.4430 ²	0.4666 ³	0.5871 ³
		CTST	0.2238	0.2717	0.4514	0.4945	0.6254
		Differ.	2.0	0.1	1.9	6.0	6.5
	0.1	FSDT	0.1512 ²	0.2490 ³	0.2698 ¹	0.3544 ³	0.3722 ²
		CTST	0.1516	0.2527	0.2699	0.3593	0.3732
		Differ.	0.3	1.5	0.0	1.4	0.3
	0.05	FSDT	0.1273 ²	0.1364 ³	0.2298 ⁴	0.2509 ³	0.2694 ¹
		CTST	0.1273	0.1368	0.2314	0.2514	0.2694
		Differ.	0.0	0.3	0.7	0.2	0.0
	0.01	FSDT	0.0582 ⁴	0.0654 ³	0.0766 ⁵	0.1075 ⁶	0.1177 ⁵
		CTST	0.0582	0.0654	0.0767	0.1075	0.1177
		Differ.	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0

FSDT : First-order Shear Deformation Theory

CTST : Classical Thin Shell Theory

Differ. : $(\lambda_{CTST} - \lambda_{FSDT}) / \lambda_{FSDT} \times 100$ (%)

表4-7 一次せん断変形理論と古典殻理論から求まる3層クロス
プライ積層複合円筒殻の振動数パラメータλの比較

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, 0^\circ/90^\circ/0^\circ, \text{S.S.}-\text{S.S.} \end{array} \right]$$

<i>l</i>	<i>h</i>	Theory	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	0.2	FSDT	1.881 ²	1.901 ³	2.085 ⁴	2.086 ¹	2.410 ⁵
		CTST	2.564	2.707	2.984	2.522	3.430
		Differ.	36.3	42.4	43.1	20.9	42.3
	0.1	FSDT	1.365 ³	1.408 ⁴	1.470 ²	1.566 ⁵	1.822 ⁶
		CTST	1.509	1.577	1.584	1.763	2.060
		Differ.	10.5	12.0	7.8	12.6	13.1
	0.05	FSDT	0.9135 ⁴	0.9417 ⁵	0.9833 ³	1.048 ⁶	1.196 ²
		CTST	0.9353	0.9689	1.000	1.082	1.208
		Differ.	2.4	2.9	1.7	3.2	1.0
	0.01	FSDT	0.4019 ⁸	0.4025 ⁷	0.4256 ⁹	0.4315 ⁶	0.4934 ⁵
		CTST	0.4023	0.4028	0.4263	0.4317	0.4936
		Differ.	0.1	0.1	0.2	0.0	0.0
4.0	0.2	FSDT	0.3627 ²	0.4442 ¹	0.6087 ³	0.7822 ²	0.8981 ³
		CTST	0.3709	0.4457	0.6478	0.8456	1.002
		Differ.	2.3	0.3	6.4	8.1	11.6
	0.1	FSDT	0.2822 ²	0.3449 ³	0.4329 ¹	0.5664 ⁴	0.5799 ³
		CTST	0.2830	0.3499	0.4330	0.5831	0.5935
		Differ.	0.3	1.4	0.0	2.9	2.3
	0.05	FSDT	0.2193 ³	0.2563 ²	0.3026 ⁴	0.4298 ¹	0.4335 ³
		CTST	0.2198	0.2564	0.3048	0.4298	0.4349
		Differ.	0.2	0.0	0.7	0.0	0.3
	0.01	FSDT	0.1165 ⁵	0.1177 ⁴	0.1429 ⁶	0.1569 ³	0.1859 ⁷
		CTST	0.1165	0.1177	0.1430	0.1569	0.1861
		Differ.	0.0	0.0	0.1	0.0	0.1

FSDT : First-order Shear Deformation Theory

CTST : Classical Thin Shell Theory

Differ. : $(\lambda_{CTST} - \lambda_{FSDT}) / \lambda_{FSDT} \times 100$ (%)

表4-8 一次せん断変形理論と古典殻理論から求まる3層アングル
 プライ積層複合円筒殻の振動数パラメータλの比較

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, 45^\circ/-45^\circ/45^\circ, \text{S.S.}-\text{S.S.} \end{array} \right)$$

<i>l</i>	<i>h</i>	Theory	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	0.2	FSDT	1.774 ⁰	1.886 ¹	2.184 ¹	2.231 ²	2.335 ³
		CTST	1.925	2.053	2.194	2.501	2.769
		Differ.	8.5	8.9	0.5	12.1	18.6
	0.1	FSDT	1.582 ⁰	1.669 ¹	1.769 ⁴	1.931 ²	1.931 ³
		CTST	1.601	1.692	1.927	1.967	2.003
		Differ.	1.2	1.4	8.9	1.9	3.7
	0.05	FSDT	1.318 ⁵	1.363 ⁴	1.480 ⁶	1.505 ⁰	1.581 ¹
		CTST	1.374	1.392	1.565	1.508	1.583
		Differ.	4.2	2.1	5.7	0.2	0.1
	0.01	FSDT	0.5628 ⁷	0.5889 ⁶	0.5982 ⁸	0.6610 ⁹	0.7311 ⁵
		CTST	0.5652	0.5903	0.6014	0.6648	0.7318
		Differ.	0.4	0.2	0.5	0.6	0.1
4.0	0.2	FSDT	0.4575 ²	0.6124 ¹	0.8337 ³	0.9932 ⁰	1.074 ²
		CTST	0.5079	0.6135	0.9586	0.9923	1.150
		Differ.	11.0	0.2	15.0	-0.1	7.1
	0.1	FSDT	0.3184 ²	0.5132 ³	0.6101 ¹	0.8024 ⁴	0.8264 ³
		CTST	0.3268	0.5396	0.6103	0.8530	0.8873
		Differ.	2.6	5.1	0.0	6.3	7.4
	0.05	FSDT	0.2495 ²	0.3032 ³	0.4623 ⁴	0.5875 ³	0.6095 ¹
		CTST	0.2503	0.3082	0.4717	0.5967	0.6095
		Differ.	0.3	1.6	2.0	1.6	0.0
	0.01	FSDT	0.1188 ³	0.1246 ⁴	0.1694 ⁵	0.2180 ²	0.2252 ⁶
		CTST	0.1188	0.1247	0.1697	0.2180	0.2260
		Differ.	0.0	0.1	0.2	0.0	0.4

FSDT : First-order Shear Deformation Theory

CTST : Classical Thin Shell Theory

Differ. : $(\lambda_{CTST} - \lambda_{FSDT}) / \lambda_{FSDT} \times 100$ (%)

表4-9 一次せん断変形理論と古典殻理論から求まる2層アングロ
プライ積層複合円筒殻の振動数パラメータλの比較

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, 45^\circ/-45^\circ, S.S.-S.S. \end{array} \right]$$

<i>l</i>	<i>h</i>	Theory	1st	2nd	3rd	4th	5th
1.0	0.2	FSDT	1.567 ¹	1.746 ⁰	2.003 ²	2.094 ³	2.176 ¹
		CTST	1.589	1.847	2.165	2.407	2.394
		Differ.	1.4	5.8	8.1	14.9	10.0
	0.1	FSDT	1.551 ¹	1.564 ⁰	1.595 ⁴	1.728 ³	1.771 ⁵
		CTST	1.560	1.578	1.701	1.792	1.961
		Differ.	0.6	0.9	6.6	3.7	10.7
	0.05	FSDT	1.122 ⁵	1.220 ⁴	1.254 ⁶	1.500 ⁰	1.503 ⁷
		CTST	1.150	1.236	1.301	1.502	1.577
		Differ.	2.5	1.3	3.7	0.1	4.9
	0.01	FSDT	0.4540 ⁷	0.4572 ⁸	0.5041 ⁹	0.5218 ⁶	0.7005 ⁵
		CTST	0.4544	0.4580	0.5054	0.5221	0.7006
		Differ.	0.1	0.2	0.3	0.1	0.0
4.0	0.2	FSDT	0.3736 ²	0.6074 ¹	0.7399 ³	0.9931 ⁰	0.9961 ²
		CTST	0.3884	0.6112	0.8160	0.9923	1.022
		Differ.	4.0	0.6	10.3	-0.1	3.3
	0.1	FSDT	0.2696 ²	0.4086 ³	0.6122 ¹	0.6619 ³	0.7120 ⁴
		CTST	0.2713	0.4195	0.6131	0.6785	0.7448
		Differ.	0.6	2.7	0.1	2.5	4.6
	0.05	FSDT	0.2264 ³	0.2328 ²	0.3723 ⁴	0.4978 ⁴	0.5060 ³
		CTST	0.2277	0.2328	0.3767	0.5039	0.5080
		Differ.	0.6	0.0	1.2	1.2	0.4
	0.01	FSDT	0.0944 ⁴	0.1097 ³	0.1233 ⁵	0.1719 ⁶	0.2037 ⁵
		CTST	0.0944	0.1097	0.1234	0.1721	0.2038
		Differ.	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0

FSDT : First-order Shear Deformation Theory

CTST : Classical Thin Shell Theory

Differ. : $(\lambda_{CTST} - \lambda_{FSDT}) / \lambda_{FSDT} \times 100$ (%)

4.4 各種積層複合円筒殻の固有振動数

実際に多く用いられている積層複合円筒殻には、実験的・経験的な理由により繊維配向角 $\alpha = 0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ のラミナを対称積層したものが多く、しかし、その積層形態（繊維配向角の組合わせなど）が殻の静的強度、固有振動数、座屈荷重等を最大にするために最適なものがどうかについては必ずしも明らかにされていない。そこで、本節においては繊維配向角 $0^\circ, \pm \alpha, 90^\circ$ のラミナから構成される対称積層複合円筒殻の振動特性を調べ、繊維配向角 $\alpha = 45^\circ$ が固有振動数を最大にするための最適な繊維配向角かどうかを検討する。なお、以下で用いる $[0^\circ/\alpha/90^\circ]_s$ の表示はラミナを殻の内側から $0^\circ/\alpha/90^\circ/90^\circ/\alpha/0^\circ$ (対称6層) と積層した円筒殻を示している。

図4-13は両端単純支持された対称6層積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示しており、図(a), (b)はそれぞれ $[0^\circ/\alpha/90^\circ]_s$ と $[90^\circ/\alpha/0^\circ]_s$ の積層形態を有する場合に対応している。図からわかるように、円周方向波数 $n = 2, 3$ の軸方向一次の振動を除くその他の振動においては繊維配向角 $\alpha = 45^\circ$ 近傍において各振動数が極大となっている。また、これらの振動数には積層形態の違いによってわずかながらに差が認められるものの、繊維配向角の変化に伴う振動数の変化の状況はよく似ている。これに対して $n = 2, 3$ の軸方向一次の振動は積層形態の違いによってその振動数に大きな差が生じており、 $[90^\circ/\alpha/0^\circ]_s$ の方がその振動数が全体的に高くなっている。したがって、対称6層積層複合円筒殻においては、 $\alpha = 90^\circ$ のラミナを殻の中央面から離して配置する積層形態 $[90^\circ/\alpha/0^\circ]_s$ を選択することにより、 $\alpha = 45^\circ$ において基本振動数を最大にすることが可能となる。また、この場合には $n = 1$ の軸方向一次の振動が基本振動数を与える。

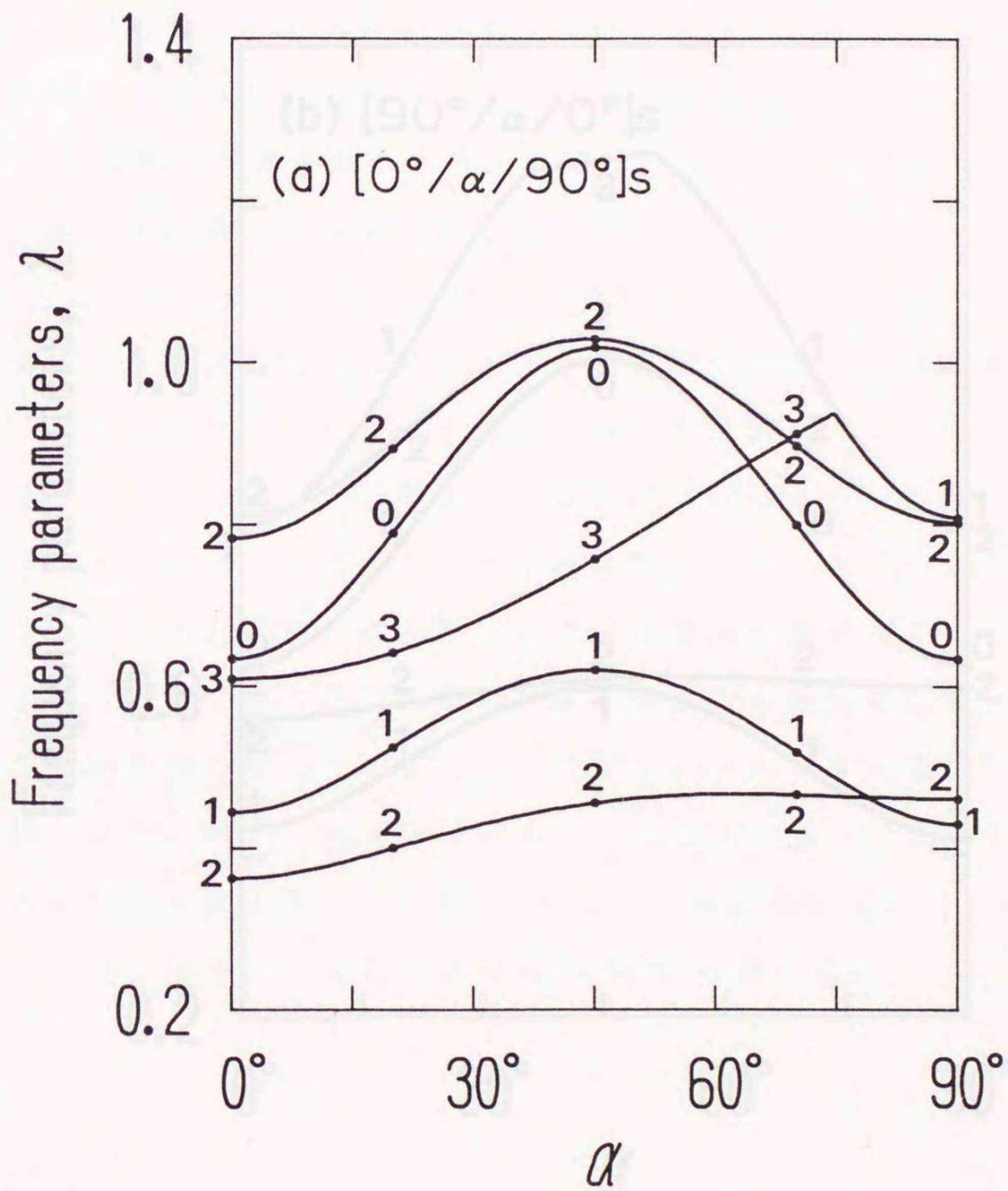


図4-13(a) 両端単純支持された対称6層積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right]$$

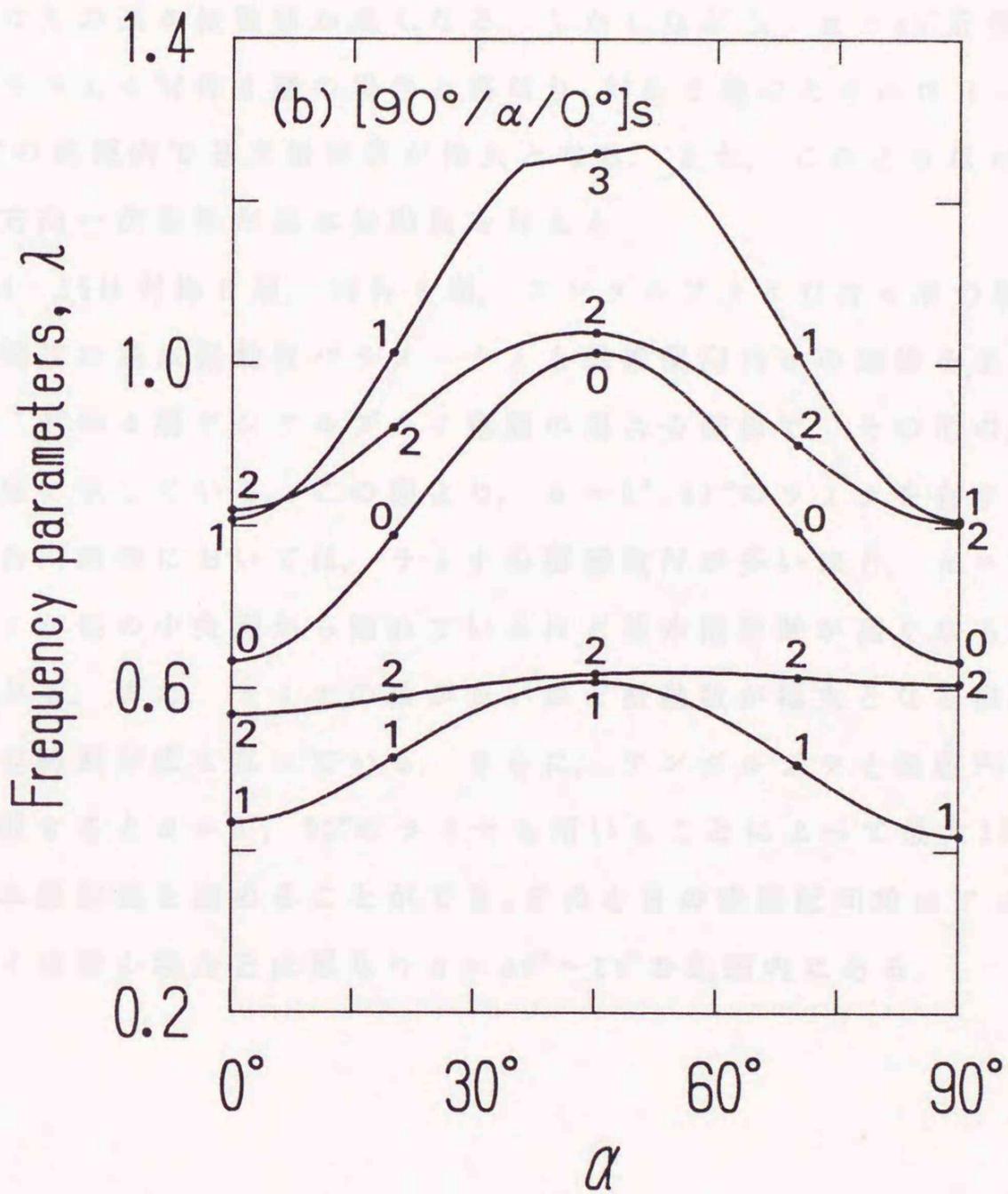


図4-13(b) 両端単純支持された対称6層積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係
 $(E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2)$

図4-14は両端単純支持された対称8層積層複合円筒殻の振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示しており、図(a)、(b)はそれぞれ $[0^\circ/\alpha/-\alpha/90^\circ]_s$ と $[90^\circ/\alpha/-\alpha/0^\circ]_s$ の積層形態に対応している。図のように、対称8層の場合においても対称6層積層の場合と同様な特徴が認められ、 $\alpha = 90^\circ$ のラミナを殻の中央面から離して配置した方が基本振動数が高くなる。しかしながら、 $\alpha = 45^\circ$ 近傍で極大値を与える対称6層の場合と異なり、対称8層のときには $\alpha = 40^\circ \sim 65^\circ$ の範囲内で基本振動数が極大となる。また、このときは $n = 2$ の軸方向一次振動が基本振動数を与える。

図4-15は対称6層、対称8層、アングルプライ対称4層の積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係を示しており、対称4層アングルプライ積層の場合を破線で、その他の場合を実線で示している。この図より、 $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$ のラミナを有する積層複合円筒殻においては、ラミナの積層数 N が多いほど、 $\alpha = 90^\circ$ のラミナが殻の中央面から離れているほど基本振動数が高くなることがわかる。また、ラミナの数が多いほど振動数が極大となる繊維配向角の範囲が広がっている。さらに、アングルプライ積層円筒殻と比較すると $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$ のラミナも用いることによって最大25%ほど基本振動数を高めることができ、そのときの繊維配向角はアングルプライ積層の場合とは異なり $\alpha = 40^\circ \sim 65^\circ$ の範囲内にある。

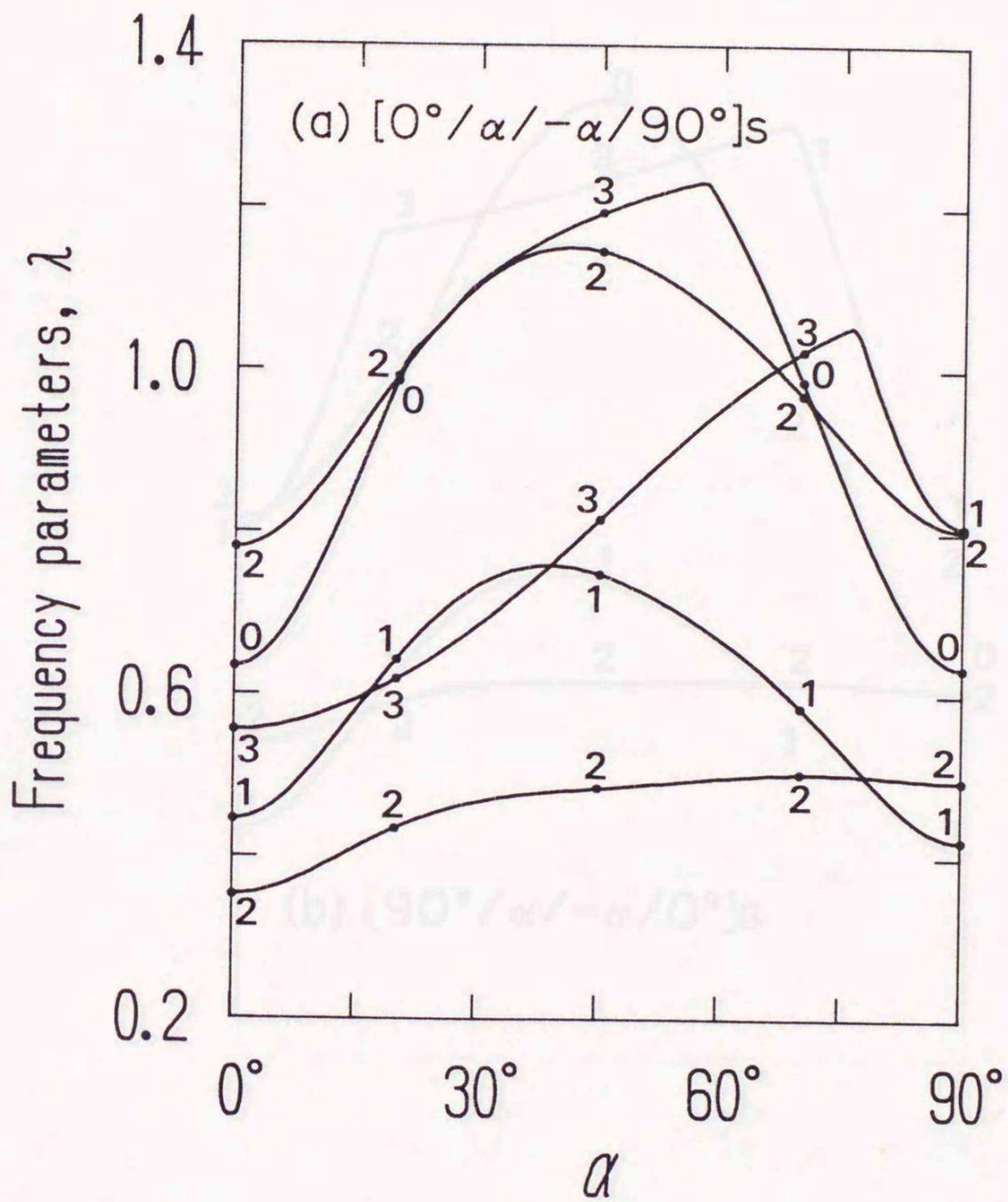


図4-14(a) 両端単純支持された対称8層積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right]$$

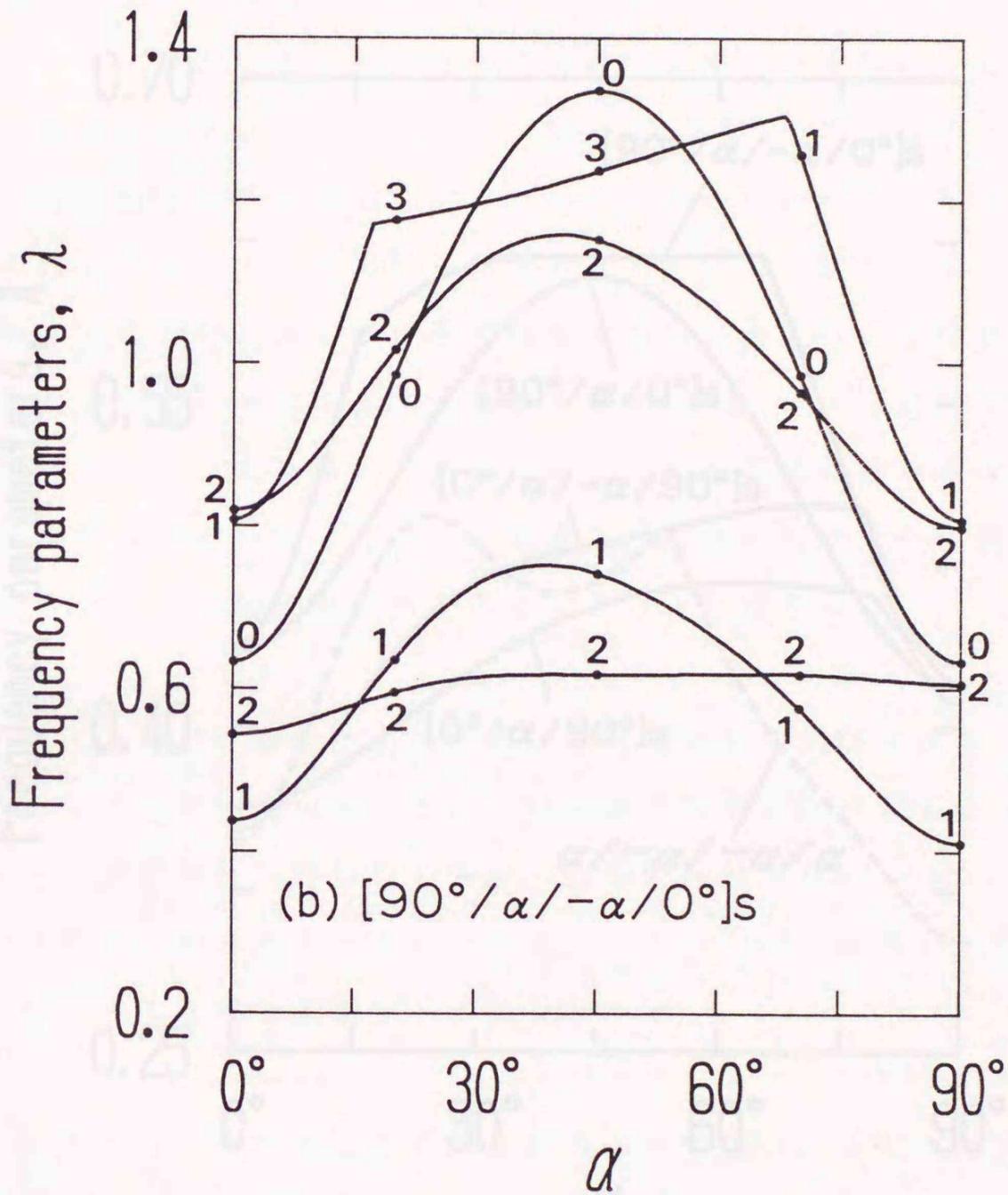


図4-14(b) 両端単純支持された対称8層積層複合円筒殻の基本振動数パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left(\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right)$$

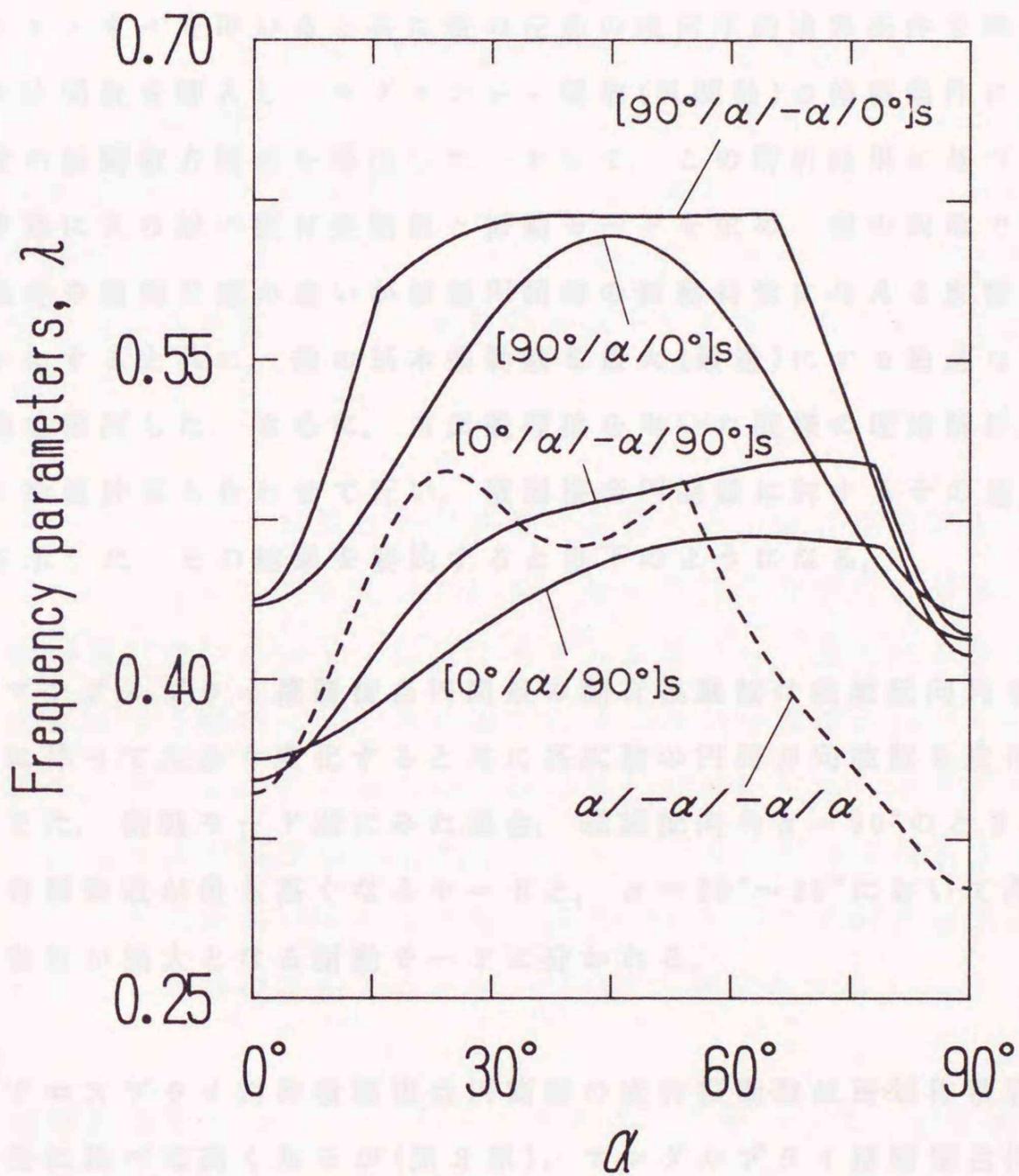


図4-15 両端単純支持された積層複合円筒殻の基本振動数
パラメータ λ と繊維配向角 α の関係

$$\left[\begin{array}{l} E_1=20E_2, G_{12}=G_{31}=0.65E_2, G_{23}=0.5E_2, \\ \nu_{12}=0.25, l=4.0, h=0.2. \end{array} \right]$$

4.5 本章のまとめ

本章においては、アングルプライ積層複合円筒殻や実際に多く用いられている繊維配向角 $0^\circ, \pm\alpha, 90^\circ$ のラミナからなる積層複合円筒殻に着目し、その振動特性をリッツ法を用いて明らかにした。その際、第2章で誘導した積層複合円筒殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを用いると共に殻の任意の幾何学的境界条件を満足する変位関数を導入し、ラグランジュ関数(汎関数)の停留条件によって殻の振動数方程式を導出した。そして、この解析結果に基づく数値計算により殻の固有振動数と振動モードを求め、殻の両端での支持条件や積層形態の違いが積層円筒殻の振動特性に与える影響を明らかにすると共に、殻の基本振動数を最大(最適)にする最適な積層形態を検討した。さらに、古典殻理論を用いた同様の理論解析、並びに数値計算も合わせて行い、積層複合円筒殻に対するその適用範囲を示した。その結果を要約すると以下のようなになる。

- ① アングルプライ積層複合円筒殻の固有振動数は繊維配向角の変化に伴って大きく変化すると共に各次数の円周方向波数も変化する。また、振動モード別にみた場合、繊維配向角 $\alpha = 90^\circ$ のときに固有振動数が最も高くなるモードと、 $\alpha = 20^\circ \sim 30^\circ$ において固有振動数が極大となる振動モードに分かれる。
- ② クロスプライ対称積層複合円筒殻の固有振動数は逆対称積層の場合に比べて高くなるが(第3章)、アングルプライ積層複合円筒殻においては、ラミナの積層数、殻の支持条件の違いによって逆対称積層殻の振動数の方が高くなることがある。

- ③ アングルプライ積層複合円筒殻の基本振動数は、ラミナの積層数の増加とともにある値に収束する傾向があり、殻の厚さの違いによって程度の差があるものの積層数 $N = 4$ 程度で収束する。
- ④ アングルプライ積層複合円筒殻においては、ラミナの繊維配向角の適切な選択によって殻の基本振動数を最大130%ほど高めることができる。ただし、振動数を極大にする繊維配向角は殻の支持条件、形状(厚さ)などによって大きく異なるが、いずれの場合でも $\alpha = 25^\circ \sim 40^\circ$ の範囲内のあり、殻の厚さが厚いほど振動数が高くなる度合いが大きい。しかし、薄い殻においては、繊維配向角の不適切な選択によって振動数が低下する場合もあるので注意を要する。
- ⑤ アングルプライ積層複合円筒殻の振動モード形には繊維配向角の変化に伴う大きな変化はないが、殻の支持条件や対称積層、逆対称積層の違いによって節線のあり方が異なり、軸方向の節線が軸線に対して傾いたり、殻の両端近傍において節線が曲がることがある。そして、特に軸方向二次の振動においては、軸方向の節線と円周方向の節線が交差することなく一本の節線を形成する。また、繊維配向角の変化とともに面内変形と面外変形の連成度合いも変化して繊維配向角が $\alpha = 45^\circ \sim 70^\circ$ の範囲内で最大となる。
- ⑥ 繊維配向角 $0^\circ, \pm \alpha, 90^\circ$ のラミナを対称に積層した複合円筒殻については、ラミナの積層数を多くとり、繊維配向角 $\alpha = 90^\circ$ のラミナを殻の中央面から離すように配置することにより、殻の基本振動数を最も高めることができる。そして、このときの繊維配向角は $\alpha = 40^\circ \sim 65^\circ$ の範囲内にある。

⑦ 積層複合円筒殻に対する古典殻理論の適用範囲は殻の形状、積層形態、振動モード形の違いによって大きく異なるが、全体的な傾向としては、等方性円筒殻、長さが長いクロスプライ積層円筒殻、アングルプライ積層円筒殻、短いクロスプライ積層円筒殻の順で古典殻理論の適用範囲が狭くなり、逆対称積層複合円筒殻よりも対称積層の方が適用範囲が狭い。

第5章 結 論

本研究においては、FRPラミナから構成される積層複合円筒殻の自由振動問題を一次せん断変形理論に基づく伝達マトリックス法、リッツ法を用いて理論的に解析し、数値計算によってその固有振動数と振動モードを求め、殻の支持条件や積層形態の違いがその振動特性に与える影響を明らかにした。そして、計算結果をもとに殻の基本振動数を最大(最適)にする最適な積層形態についても検討を加えた。また、同様な理論解析・数値計算によって積層複合円筒殻に対する古典殻理論や近似一次せん断変形理論の適用可能範囲を明らかにした。その研究成果を要約すると以下のようになる。

第1章は緒言であり、本研究の意義と目的について述べると共に積層複合円筒殻に関する過去の研究動向や各章の概要を述べた。

第2章においては積層複合円筒殻の定式化を行い、第3章、第4章の解析において用いる殻の基礎方程式を誘導した。はじめに、殻の面外方向のせん断変形を考慮した一次せん断変形理論に基づいて殻の変形を記述し、異方弾性論、積層理論を用いて殻の合応力、合モーメントおよび各種剛性を求めた。次に殻のひずみエネルギーと運動エネルギーを解析的に評価し、これより求まるラグランジュ関数に停留原理を適用することにより、積層複合円筒殻に関する運動方程式と境界条件式を導出した。また、積層複合円筒殻に対する古典殻理論の適用可能範囲を検討するために、古典殻理論に基づく同様な定式化も行った。さらに、アングルプライ積層複合円筒殻につ

いて殻の各種剛性を計算・検討した結果、ラミナの積層構成が対称積層のときにはクロスエラスティシティ効果が強くなり、逆対称積層の場合には面内変形と面外変形の連成が強くなることを明らかにした。

第3章においては、最も基本的な積層形態と考えられるクロスプライ積層複合円筒殻の自由振動問題を伝達マトリックス法を用いて解析すると共に、数値計算を実施して殻の固有振動数と振動モードを求め、殻の支持条件やラミナの積層形態の違いが振動特性に与える影響を検討した。その結果、殻の支持条件の違いによる振動特性の変化はラミナの積層形態によって大きく異なり、これは積層形態の違いから生じる面内と面外の変形の連成度合いに起因することがわかった。また、殻の固有振動数は積層数の増加に伴って一定値に近づき積層数が5～8程度で±5%以内に収束することや、積層数が少ない場合には積層順序の違いによって最大25%以上の差が生じることを示した。そして、殻の円周方向に繊維が通っているラミナの数が多いほど、またはそのラミナが殻のより外側に位置するほど殻の固有振動数が低くなることが明らかになった。さらに、積層複合円筒殻に対する古典殻理論や厚さ比の影響を考慮しない近似理論(偏平殻理論)の適用範囲を検討した結果、逆対称積層の場合には古典殻理論の適用範囲が等方性円筒殻とほぼ同程度とみなせるのに対して、対称積層の場合には殻の厚さが比較的薄い場合にも古典殻理論の適用には注意が必要であることがわかった。また、近似理論については、殻が長く厚いほど振動数を過大評価する傾向があり、特に逆対称積層の場合にその傾向が強くなることを示した。

第4章においては、アングルプライ積層複合円筒殻や面内擬似等方性と考えられる積層形態を有する積層複合円筒殻の自由振動問題をリッツ法を用いて解析すると共に、数値計算を実施して殻の固有

振動数と振動モードを求め、殻の支持条件や積層形態の違いが振動特性に与える影響を明らかにした。さらに、計算結果をもとに殻の固有振動数を最大(最適)にする最適な積層形態についても検討を加えた。その結果、アングルプライ積層複合円筒殻においては、繊維配向角の変化とともに各次数の円周方向波数は変化するが、振動モード形にはあまり変化がないことがわかった。そして、振動モード別にみた場合、繊維配向角 90° のときに固有振動数が最も高くなる振動モードと配向角 $20^\circ \sim 30^\circ$ において振動数が最大となるモードに分けることができる。また、振動モードに関しては、軸方向の節線が軸線に対して傾いたり、殻の両端付近において節線が曲がったり、軸方向の節線と円周方向の節線が交差することなく一本の節線を形成することがわかった。また、殻の支持条件、厚さなどによって大きく異なるものの、繊維配向角の適切な選択によって殻の基本振動数を最大130%ほど高めることができ、その効果は殻が厚いほど効果が大きく、いずれの支持条件、厚さにおいても繊維配向角が $25^\circ \sim 40^\circ$ において振動数が極大となることを示した。さらに、繊維配向角 $0^\circ, \pm \alpha, 90^\circ$ のラミナを対称に積層した複合円筒殻においては、ラミナの積層数を多くとり繊維配向角 90° のラミナを殻の中央面から離すように配置することにより、殻の基本振動数を最大にすることが可能となり、その場合の繊維配向角は $\alpha = 40^\circ \sim 65^\circ$ の範囲内にあることを示した。

以上が本研究で得られた研究成果を要約したものであり、ここで得られた結果が今後益々増加する複合材料構造物の構造設計における設計資料として十分価値があると共に、構造の最適設計実現のために有用な指針を与えるものであると確信する。

謝 辞

本研究の遂行にあたり、終始適切な御指導と多くの有益な御助言を賜ると共に公私にわたり御世話になった北海道大学教授 山田 元 先生，北海道大学 助教授 小林 幸徳 先生に謹んで感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり、数々の有益な御検討と御意見を頂きました北海道大学 岸田 路也 教授，芳村 仁 教授に対し謝意を表します。

また，本研究において非常に有益な御助言ならびに討論の機会を与えて下さった北海道工業大学 丸山 晃市 教授，成田 吉弘 助教授，一ノ宮 修 講師に対して深く感謝の意を表します。

さらに，本論文の取りまとめに協力して下さった機械力学研究室の助手の先生方，技官，大学院生並びに研究生の皆様をはじめ多くの方々に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) Kapania R.K., "A Review on the Analysis of Laminated Shells," Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, 111-2(1989), 88-96.
- (2) White J.C., "The Flexural Vibrations of Thin Laminated Cylinders," Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, 83-4(1961), 397-402.
- (3) Weingarten V.I., "Free Vibrations of Multilayered Cylindrical Shells," Experimental Mechanics, 4(1964), 200-205.
- (4) Bushnell D., "Dynamic Response of Two-Layered Cylindrical Shells to Time-Dependent Loads," AIAA Journal, 3-9(1965), 1698-1703.
- (5) Jones R.M. and Klein S., "Equivalence Between Single-Layered and Certain Multilayered Shells," AIAA Journal, 6-12(1968), 2295-2300.
- (6) Dong S.B., "Free Vibration of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells," The Journal of the Acoustical Society of America, 44-6(1968), 1628-1635.
- (7) Bert C.W., Baker J.L. and Egle D.M., "Free Vibrations of Multilayer Anisotropic Cylindrical Shells," Journal of Composite Materials, 3(1969), 480-499.

- (8) Stavsky Y. and Loewy R., "On Vibrations of Heterogeneous Orthotropic Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, 15-2(1971), 235-256.
- (9) Dong S.B. and Tso F.K.W., "On a Laminated Orthotropic Shell Theory Including Transverse Shear Deformation," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 39-4(1972), 1091-1097.
- (10) Nelson R.B., Dong S.B. and Kalra R.D., "Vibrations and Waves in Laminated Orthotropic Circular Cylinders," Journal of Sound and Vibration, 18-3(1971), 429-444.
- (11) Rath B.K. and Das Y.C., "Vibration of Layered Shells," Journal of Sound and Vibration, 28-4(1973), 737-757.
- (12) Whitney J.M. and Sun C.T., "A Higher Order Theory for Extensional Motion of Laminated Composites," Journal of Sound and Vibration, 30-1(1973), 85-97.
- (13) Whitney J.M. and Sun C.T., "A Refined Theory for Laminated Anisotropic, Cylindrical Shells," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 41-2(1974), 471-476.
- (14) Sun C.T. and Whitney J.M., "Axisymmetric Vibrations of Laminated Composite Cylindrical Shells," The Journal of the Acoustical Society of America, 55-6(1974), 1238-1246.
- (15) Jones R.M. and Morgan H.S., "Buckling and Vibration of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells," AIAA Journal, 13-5(1975), 664-671.

- (16) Greenberg J.B. and Stavsky Y., "Buckling and Vibration of Orthotropic Composite Cylindrical Shells," *Acta Mechanica*, **36**(1980), 15-29.
- (17) Greenberg J.B. and Stavsky Y., "Vibrations of Axially Compressed Laminated Orthotropic Cylindrical Shells, Including Transverse Shear Deformation," *Acta Mechanica*, **37**(1980), 13-28.
- (18) Reddy J.N., "Exact Solutions of Moderately Thick Laminated Shells," *The Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **110-5**(1984), 794-809.
- (19) Reddy J.N. and Liu C.F., "A Higher-Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells," *International Journal of Engineering Science*, **23-3**(1985), 319-330.
- (20) Khdeir A.A. and Reddy J.N., "Influence of Edge Conditions on the Modal Characteristics of Cross-Ply Laminated Shells," *Computers and Structures*, **34-6**(1990), 817-826.
- (21) 植村, "積層複合円筒殻の振動," *日本航空宇宙学会誌*, **27-307**(1979), 382-388.
- (22) Greenberg J.B. and Stavsky Y., "Vibrations of Laminated Filament-Wound Cylindrical Shells," *AIAA Journal*, **19-8**(1981), 1055-1062.
- (23) 小林・長島, "CFRP積層円筒殻の振動特性," *日本航空宇宙学会誌*, **34-389**(1986), 332-339.

- (24) Sheinman I. and Greif S., "Dynamic Analysis of Laminated Shells of Revolution," *Journal of Composite Materials*, 18(1984), 200-215.
- (25) Sheinman I. and Weissman S., "Coupling Between Symmetric and Antisymmetric Modes in Shells of Revolution," *Journal of Composite Materials*, 21(1987), 988-1007.
- (26) Greenberg J.B. and Stavsky Y., "Stability and Vibrations of Compressed, Aeolotropic, Composite Cylindrical Shells," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 49-4(1982), 843-848.
- (27) Soldatos K.P., "Free Vibrations of Antisymmetric Angle-Ply Laminated Circular Cylindrical Panels," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 36-2(1983), 207-221.
- (28) Cederbaum G. and Heller R.A., "Dynamic Deformation of Orthotropic Cylinders," *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 111-2(1989), 97-101.
- (29) Elishakoff I., Cederbaum G. and Librescu L., "Response of Moderately Thick Laminated Cross-Ply Composite Shells Subjected to Random Excitation," *AIAA Journal*, 27-7(1989), 975-981.
- (30) Reddy J.N. and Khdeir A.A., "Dynamic Response of Cross-Ply Laminated Shallow Shells According to a Refined Shear Deformation Theory," *The Journal of the Acoustical Society of America*, 85-6(1989), 2423-2431.

- (31) Sankaranarayanan N., Chandrasekaran K. and Ramaiyan G., "Free Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, 123-2(1988), 357-371.
- (32) Kayran A. and Vinson J.R., "Free Vibration Analysis of Laminated Composite Truncated Circular Conical Shells," *AIAA Journal*, 28-7(1990), 1259-1269.
- (33) Reddy J.N. and Chandrashekhara K., "Geometrically Non-Linear Transient Analysis of Laminated, Doubly Curved Shells," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 20-2(1985), 79-90.
- (34) Chia C.Y., "Non-Linear Free Vibration and Postbuckling of Symmetrically Laminated Orthotropic Imperfect Shallow Cylindrical Panels with Two Adjacent Edges Simply Supported and the Other Edges Clamped," *International Journal of Solids and Structures*, 23-8(1987), 1123-1132.
- (35) Iu V.P. and Chia C.Y., "Non-Linear Vibration and Postbuckling of Unsymmetric Cross-Ply Circular Cylindrical Shells," *International Journal of Solids and Structures*, 24-2(1988), 195-210.
- (36) Fu Y.M. and Chia C.Y., "Multi-Mode Non-Linear Vibration and Postbuckling of Anti-Symmetric Imperfect Angle-Ply Cylindrical Thick Panels," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 24-5(1989), 365-381.

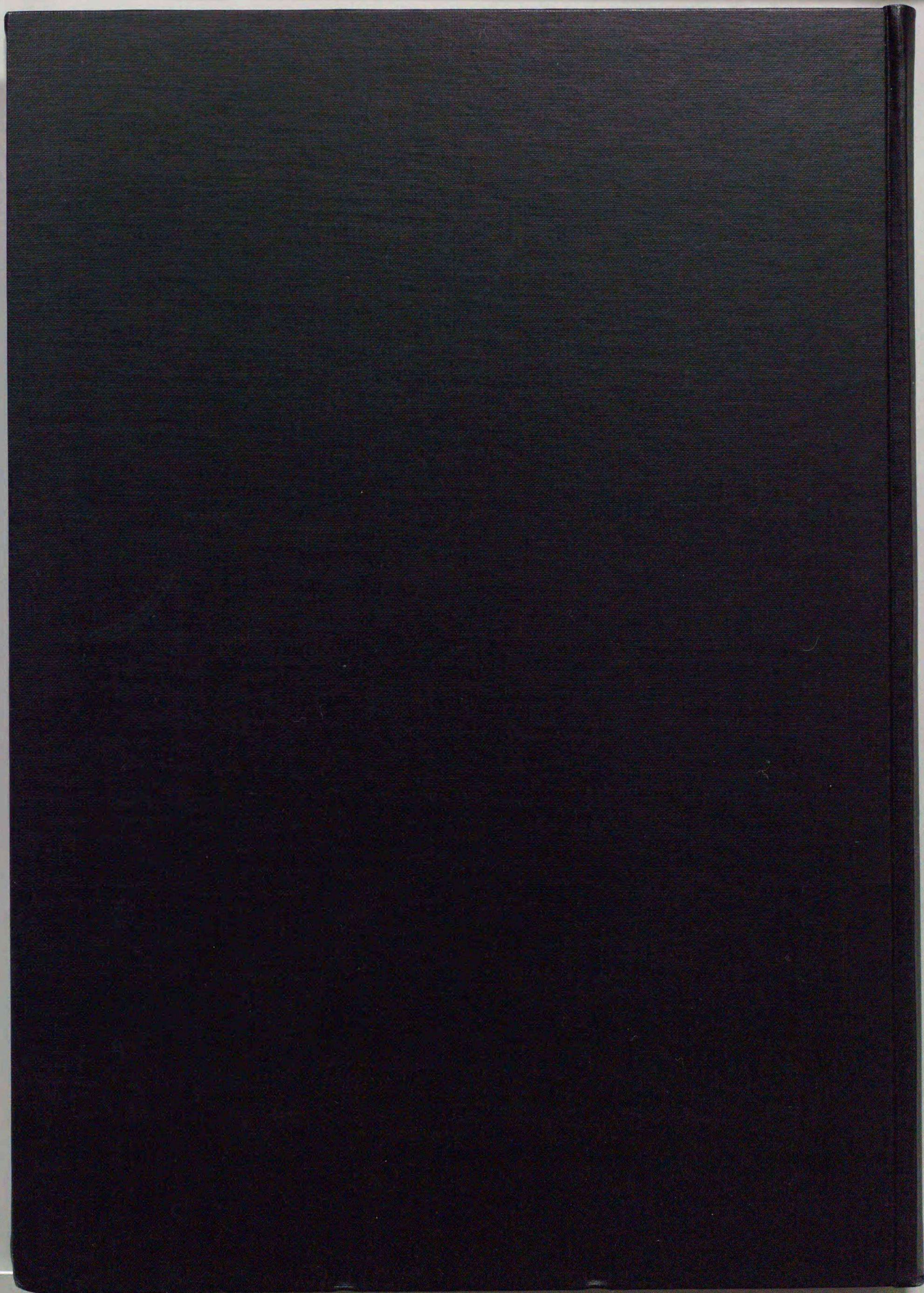
- (37) Hirano Y. and Vinson J.R., "Nonlinear Vibrations of Composite Material Cylindrical Shells Including Transverse Shear Deformation," Design and Analysis of Composite Material Vessels, eds., Hui D. and Kozik T.J., ASME, The 1987 Pressure Vessels and Piping Conference, San Diego, Calif., June 28-July 2, 55-61.
- (38) Dennis S.T. and Palazotto A.N., "Geometric Nonlinear Formulation for Laminated Shells," Dynamics of Plates and Shells - 1989, eds., Chung H., Yamada G. and Narita Y., ASME, The 1989 ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Honolulu, Hawaii, July 23-27, 91-98.
- (39) Bert C.W. and Kumar M., "Vibration of Cylindrical Shells of Bimodulus Composite Materials," Journal of Sound and Vibration, 81-1(1982), 107-121.
- (40) Tooth A.S., Banks W.M. and Rahman D.H.A. "The Specially Orthotropic GRP Multi-Layered Cylindrical Shell - The Fluid Loading of the Partially Filled Horizontal Vessel or Pipe," Composite Structures, 9(1988), 101-111.
- (41) Banks W.M., Tooth A.S. and Wilson P.M., "Design of Composite Cylindrical Vessels for Fluid Loading," Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, 111-2(1989), 102-108.
- (42) Bradford L.G. and Dong S.B., "Natural Vibrations of Orthotropic Cylinders Under Initial Stress," Journal of Sound and Vibration, 60-2(1978), 157-175.

- (43) Sheinman I., Shaw D. and Simitzes G.J., "Nonlinear Analysis of Axially-Loaded Laminated Cylindrical Shells," Computers and Structures, 16-1-4(1983), 131-137.
- (44) Barbero E.J., Reddy J.N. and Teply J.L., "General Two-Dimensional Theory of Laminated Cylindrical Shells," AIAA Journal, 28-3(1990), 544-553.
- (45) 小林・石川, "一方向繊維強化複合材料の弾性係数," 日本航空宇宙学会誌, 23-256(1975), 319-326.
- (46) 石川・小山・小林, "カーボンコンポジットとカーボン繊維の弾性係数," 日本航空宇宙学会誌, 23-263(1975), 678-684.
- (47) 小林・岩田, "一方向繊維強化複合材料の構造減衰係数," 第31回構造強度に関する講演会講演集, (1989), 248-251.
- (48) Reissner E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," Journal of Applied Mechanics, 12-2(1945), A-69.
- (49) Mindlin R.D., "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates," Journal of Applied Mechanics, 18-73(1951), 31-38.
- (50) Whitney J.M. and Pagano N.J., "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 37-4(1970), 1031-1036.
- (51) Mirsky I. and Herrmann G., "Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells," The Journal of the Acoustical Society of America, 29-10(1957), 1116-1123.

- (52) Mirsky I., "Vibrations of Orthotropic, Thick, Cylindrical Shells," The Journal of the Acoustical Society of America, 36-1(1964), 41-51.
- (53) Mirsky I., "Axisymmetric Vibrations of Orthotropic Cylinders," The Journal of the Acoustical Society of America, 36-11(1964), 2106-2112.
- (54) Warburton G.B. and Soni S.R., "Resonant Response of Orthotropic Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, 53-1(1977), 1-23.
- (55) 白川, "せん断変形および回転慣性を考慮した円筒殻の振動方程式について," 日本機械学会論文集(C編), 50-460(1984), 2258-2266.
- (56) Flügge W., "Stresses in Shells," 2nd Edi., (1973), Springer-Verlag.
- (57) Jones R.M., "Mechanics of Composite Materials," (1975), McGraw-Hill Kogakusha.
- (58) 林, "複合材料工学," (1971), 日科技連出版社.
- (59) 大橋・神谷, "異方弾性板の理論," (1975), 森北出版.
- (60) 藤井・座古, "複合材料の破壊と力学," (1978), 実教出版.
- (61) 福田・野村・武田, "複合材料の構造力学," (1987), 日刊工業新聞社.
- (62) 森田・金原・福田, "複合材料," (1988), 日刊工業新聞社.

(63) 日本複合材料学会, "複合材料ハンドブック," (1989),
日刊工業新聞社.

(64) 日本機械学会, "先端複合材料," (1990), 技報堂出版.



Inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

