HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	変分原理に基づく熱流体場の有限要素解析
Author(s)	亀ヶ谷, 博
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第4067号
Issue Date	1992-03-25
DOI	https://doi.org/10.11501/3060732
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51162
Type	doctoral thesis
File Information	000000249697.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

変分原理に基づく熱流体場の有限要素解析

亀ケ谷　博

変分原理に基づく熱流体場の

有限要素解析

亀ケ谷　博

本論文で使用する主要な記号

アルファベット文字の記号

a	：	温度伝導率
b	：	厚さ
c_p	：	定圧比熱
$\mathbf{f}_a$	：	加速度形慣性力ベクトル
$\mathbf{f}_b$	：	浮力ベクトル
$\mathbf{f}_c$	：	対流形慣性力ベクトル
$\mathbf{f}_i$	：	表面力ベクトル
$\mathbf{f}_w$	：	外力ベクトル
g	：	重力加速度
Gr	：	グラスホフ数
h	：	繰り返し演算回数
l	：	境界領域
L	：	代表長さ
m	：	時刻
N_i （i=1～6）	：	形状関数
Nu	：	ヌッセルト数
p	：	圧力
Pr	：	プラントル数
q_d	：	伝導熱量
q_f	：	粘性摩擦熱
q_h	：	熱源の発熱量

r ： 繰り返し演算回数

Ra ： レイレー数

Re ： レイノルズ数

S ： 解析領域

t ： 時間

$\dot{U}_{in}$ ： 流入速度

$\dot{U}_{o}$ ： 代表速度

u ： x 方向の変位

$\dot{u}$ ： x 方向の速度

v ： y 方向の変位

$\dot{v}$ ： y 方向の速度

$[A_1]$ ： 形状関数ベクトル

$[A_2]$ ： 形状関数ベクトル

$[B_b]$ ： 浮力ベクトル

$[C_d]$ ： 熱伝導マトリックス

$[C_v]$ ： 熱対流マトリックス

$[\ddot{d}]$ ： 加速度ベクトル

$[\dot{d}]$ ： 速度ベクトル

$[d]$ ： 変位ベクトル

$[F]$ ： 外力ベクトル

$[G]$ ： 圧力マトリックス

$[H]$ ： 面積座標マトリックス

$[K]$ ： 粘性マトリックス

$[M]$ ： 加速度形質量マトリックス

$[M_t]$ ： 熱容量マトリックス

$[M_c]$ ： 対流形質量マトリックス

$[Q]$ ： 熱源および粘性摩擦熱ベクトル

$[p]$ ： 圧力ベクトル

ギリシャ文字の記号

α ： 時刻に関するパラメータ

α_c ： 局所熱伝達率

β ： 熱膨張係数

γ_{xy} ： せん断ひずみ

δ ： 変分演算子

δU_a ： 加速度形慣性力による仮想仕事

δU_b ： 浮力による仮想仕事

δU_c ： 対流形慣性力による仮想仕事

δU_g ： 流体の連続性の条件

δU_p ： 圧力による仮想仕事

δU_v ： 粘性による仮想仕事

δU_w ： 外力による仮想仕事

δU_t ： 熱容量による仮想熱量

δU_d ： 熱伝導による仮想熱量

δU_e ： 熱対流による仮想熱量

δU_{et} ： 熱容量と熱対流による仮想熱量

δU_{hf} ： 発熱源および粘性摩擦による仮想熱量

δU_{fs} ： 流体から固体へ移動する仮想熱量

δU_{sf} ： 固体から流体へ移動する仮想熱量

δU_{nf} ： 粘性摩擦による仮想熱量

Δt　：時分割

Δ　：三角形要素の領域

$\boldsymbol{\varepsilon}$　：ひずみベクトル

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$　：ひずみ速度ベクトル

$\boldsymbol{\varepsilon}_d$　：温度勾配ベクトル

ε_v　：体積ひずみ

ε_x　：x方向のひずみ

ε_y　：y方向のひずみ

η_i　：面積座標

（i=1～3）

θ　：温度

θ^*　：無次元温度

Θ　：温度

$[\theta]$　：温度ベクトル

λ　：熱伝導率

μ　：粘性係数

ν　：動粘性係数

ρ　：密度

$\boldsymbol{\sigma}$　：粘性応力（偏差応力）ベクトル

σ_x　：x方向の垂直粘性応力

σ_y　：y方向の垂直粘性応力

Σ　：マトリックス合成

τ_{xy}　：せん断粘性応力

ϕ　：粘性摩擦による散逸項

Ψ　：無次元温度

添字

f	：	流体
s	：	固体
m	：	平均
max	：	該当量の最大値
i	：	固体または流体の内部
w	：	固体と流体の境界面
n	：	法線方向
y	：	高さyの位置の状態
∞	：	充分遠方の位置の状態

その他の記号

・	：	時間に関する微分
$(\ )_{,n}$	：	nに関する微分
$(\ )^{-1}$	：	逆マトリックス
$[\ ]^{T}$	：	転置マトリックス
diag	：	対角行列

目　　次

ページ

第１章　緒論　1

１．１　熱流体の挙動解析に関する研究の現状　3

1.1.1　熱流体の挙動解析に関する各種理論の概要と研究の現状　4

1.1.2　熱連成場解析に関する各種理論の概要と研究の現状　6

１．２　本研究の工学的意義と概要　8

1.2.1　本研究の工学的意義　8

1.2.2　本論文の概要と特徴　10

第２章　変分原理に基づく熱流体解析法の概要　13

２．１　変分原理に基づく解析法の特徴　14

2.1.1　従来の有限要素法による解析方法の特徴　14

2.1.2　変分原理に基づく解析法の特徴　14

２．２　有限要素法の定式化の概要　16

2.2.1　有限要素法による解析方法の手順　16

2.2.2　有限要素分割　17

2.2.3　形状関数と面積座標　19

2.2.3.1 三角形３節点要素　21

ページ

2.2.3.2 三角形6節点要素 24

2.2.4 定式化に必要な積分公式 25

第3章 粘性流体のための仮想仕事の原理と有限要素法 27

3．1 緒言 28

3．2 問題の提示 28

3.2.1 粘性流動を解析するための各種理論の概要と特徴 28

3.2.2 研究課題の明示 31

3．3 粘性流体のための仮想仕事の原理 31

3.3.1 加速度形慣性力による仮想仕事 32

3.3.2 対流形慣性力による仮想仕事 32

3.3.3 粘性による仮想仕事 33

3.3.4 圧力による仮想仕事 33

3.3.5 外部仮想仕事 34

3.3.6 流体が連続性を保つための条件 34

3.3.7 粘性流体に適用できる仮想仕事の原理 35

3．4 有限要素法の定式化 36

3.4.1 加速度形慣性力による仮想仕事の定式化 39

3.4.2 対流形慣性力による仮想仕事の定式化 40

3.4.3 粘性による仮想仕事の定式化 43

3.4.4 圧力による仮想仕事の定式化 45

3.4.5 外部仮想仕事の定式化 48

3.4.6 連続性の条件の定式化 48

ページ

3.4.7　有限要素方程式　50

3．5　計算手順　52

3.5.1　定常流動　52

3.5.2　非定常流動　54

3．6　段付き流路内流れの数値解析　56

3.6.1　解析モデル　56

3.6.2　計算結果　58

3.6.2.1 定常流動　58

3.6.2.2 速度の過渡応答　58

3.6.2.3 圧力の過渡応答　59

3．7　考察　66

3．8　結言　72

第4章　浮力の影響を考慮した熱流体のための変分原理と有限要素法　73

4．1　緒言　74

4．2　問題の提示　74

4.2.1　浮力の影響をうける流れ場を解析する代表的な理論の概要と特徴　74

4.2.2　研究課題の明示　77

4．3　浮力を考慮した熱流体のための変分原理　78

4.3.1　浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理　78

ページ

4.3.1.1 浮力による仮想仕事 78
4.3.1.2 その他の仮想仕事 79
4.3.1.3 浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理 80
4.3.2 流れを考慮した温度場解析のための変分原理 81
4.3.2.1 熱伝導項 81
4.3.2.2 熱容量項と熱対流項 82
4.3.2.3 発熱項 83
4.3.2.4 温度場解析のための変分原理の適用範囲 84
4.3.3 浮力を考慮した熱流体のための変分原理 85
4．4 有限要素法の定式化 86
4.4.1 流れ場に関する定式化 88
4.4.1.1 浮力による仮想仕事の定式化 88
4.4.1.2 その他の仮想仕事の定式化 89
4.4.1.3 流れ場に関する有限要素方程式 90
4.4.2 温度場に関する定式化 92
4.4.2.1 熱伝導項の定式化 92
4.4.2.2 熱容量項と熱対流項の定式化 94
4.4.2.3 発熱項の定式化 96
4.4.2.4 温度場に関する有限要素方程式 96
4．5 計算手順 98
4．6 強制対流の数値解析 100
4.6.1 解析モデル 100

ページ

4.6.2　計算結果　103
4.6.3　考察　108
4．7　物性値の温度依存性を考慮した場合の数値解析　108
4.7.1　解析モデル　109
4.7.2　物性値の温度依存性　109
4.7.3　計算手順　111
4.7.4　計算結果　113
4.7.4.1 物性値一定の場合　113
4.7.4.2 物性値の温度依存性を考慮した場合　114
4.7.5　考察　115
4．8　自然対流の数値解析　121
4.8.1　解析モデル　121
4.8.2　計算結果　123
4.8.3　考察　128
4．9　考察　129
4．10　結言　132

第5章　固体と流体との熱連成場解析のための変分原理と有限要素法　133
5．1　緒言　134
5．2　問題の提示　135
5.2.1　熱連成場解析に関する従来の研究の概要と問題点　135

ページ

5.2.2　本論文の具体的な検討事項　138

5．3　固体と流体との熱連成場解析のための変分原理　138

5.3.1　温度場解析のための変分原理　139

5.3.1.1 固体の温度場解析のための変分原理　139

5.3.1.2 流体の温度場解析のための変分原理　140

5.3.1.3 固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理　142

5.3.2　流れ場解析のための仮想仕事の原理　143

5.3.3　両変分原理の関係　145

5．4　有限要素法の定式化の概略　145

5.4.1　熱連成場の有限要素方程式　145

5.4.2　定常熱連成場の計算手順　152

5.4.3　非定常熱連成場の計算手順　152

5．5　定常自然対流熱連成場の数値解析　153

5.5.1　解析モデル　153

5.5.2　結果の整理方法　155

5.5.3　計算結果　155

5.5.4　考察　158

5．6　非定常自然対流熱連成場の数値解析　160

5.6.1　解析モデル　160

5.6.2　結果の整理方法　162

5.6.3　計算結果　164

5.6.4　考察　169

ページ

5．7　考察　170

5．8　結言　173

第6章　結論　174

謝辞　178

文献　179

第 1 章　緒論

浮力の影響が顕著に表れる対流現象は自然対流としてよく知られている。自然対流の場では、流れの場と温度の場が相互に影響を及ぼし合うので、複雑な非線形の性質を持つ。さらに、その温度場を形成する熱源は多くの場合は流体と接する固体壁の中に存在するために、流体と固体とは界面を隔てながらも互いに熱的に密接な関係を保っている。流体と固体とが熱的に連成する場を本論文では熱連成場と呼ぶ。

自然対流の場や、熱連成場は工学上しばしば見られるものであり、厳密な見方をすれば、工学的な諸問題はすべて、そのいずれか、あるいはその両者を含む形で存在する。たとえば、原子炉の炉心において、冷却材は燃料体より受熱しながら流れるが、燃料体内の温度分布は燃料被覆管外面の熱伝達率すなわち冷却材の流動状態に深く依存しているにもかかわらず、その温度分布算出の境界条件として燃料被覆管の外面温度ないしは外面熱流束を用いて解析を進めなければならない。さらに、原子炉事故時の安全解析などにおいて、冷却材流速の低下した条件の下では、流れの場に自然対流の効果が強く顕われて問題をさらに複雑にする。同様な状況は、連続鋳造における冷却や、半導体集積回路の冷却などの際にも見られる。

熱連成場を流体側、固体側に分離することなく、解析することができるならば計算の能率は格段と向上する。そのための方法の一つとして、本論文では変分原理に基づく有限要素解析を提案する。有限要素法による熱流体場の解析は、比較的最近に到って多少の試み

が成されて発表されているが、いまだ体系的に確立されているとは言い難く、特に流れ場解析における浮力の取り扱い方や、流体中の温度場解析の検討は、不充分であった。本論文では、それらの点を解決し、結果として固体内温度との連成場の解析を可能とした。

本論文で取り扱った流れ場は層流場のみである。実用上で表れる流れ場の大部分が乱流場であることを考慮すれば、ここに提案する方法が直ちに実用計算に結び付くものではないが、将来この変分原理に適した乱流エネルギーの表示方法が開発されれば、実用上の価値はまた一段と向上することになると予想され、今後のこの研究の進展の方向を示している。

熱連成場の解析方法には、現在までにいくつかの方法が提案され、検討が成されてきた[1~30]。これらの方法を大別すると次のようになる。

① 浮力を考慮したナビエ・ストークスの式(NS)と連続の式(EC)および熱エネルギ式(TE)を基礎式として用いる方法[1-27]。

② エネルギ保存則を用いる方法[28-30]。

①の方法は基礎式が既知である場合に限定される。ところが流路が振動したり、化学反応や燃焼などが伴ったりすると、現象が複雑になり、基礎式が不明になる。従って、このような現象の解析は不可能になる。②の方法は変分原理に基づく方法の1種である。この方法は固体と流体との連成場解析に適用できるが、解析対象が保存系に限定される。従来の方法は以上のような問題点を持っているため、これらを解決するための理論が必要になる。

本論文ではNS、EC、TEを用いず、また解析対象が粘性摩擦熱などの非保存系の場合にも適用可能な、熱流体のための変分原理を構築する。本原理は現象をエネルギ系で扱う。このため、物理的な意味が明確で、物理現象に対応しやすい。従って、物理現象が複雑で、方程式が不明の場合でも解析可能になるという特徴をもっている。

この変分原理を確立するために、具体的に次の順序で検討していく。初めに、熱流体の挙動解析において基本となる粘性流体のための変分原理を構成する。次に、粘性流体のための変分原理に温度の効果を導入して、熱流体のための変分原理を構成する。最後に、熱流体のための変分原理を発展させて、固体と流体との熱連成場解析に適用できる変分原理を構成する。以上の変分原理を解析対象に応じて、基本的な事項で検証する。本論文では、現象を２次元問題として取り扱い、流れは層流に限定する。また、流体は非圧縮性と仮定する。

なお、本論文では方程式が既知である現象を扱っている。ところが、方程式が未知の現象を扱う場合、現在のところエネルギ原理や変分原理で扱わざるをえない。変分原理で現象の解析が可能ならば、方程式が誘導できる。第３～５章の付録には、提案した変分原理から現象を支配する方程式の誘導を行なっている。

１．１　熱流体の挙動解析に関する研究の現状

熱流体の挙動は浮力の影響をうける流れ場と、温度場との連立問題になる。温度場に関しては、流体のみの温度場に限定した場合と固体と流体の温度場を含めた場合に大別できる。そこで本節では初

めに、流体のみの温度場に限定して熱流体の挙動を扱った各種理論の概要と研究の現状を調べる。次に、固体の温度場まで考慮して熱流体の挙動を扱った熱連成場解析に関する各種理論の概要と研究の現状を調べる。

なお近年、境界要素法による熱流体の挙動解析が試みられている。ところが、境界要素法の理論はまだ発展段階であり、また適用範囲が比較的限定されているなどの理由から、本論文では特に検討しない。

1.1.1 熱流体の挙動解析に関する各種理論の概要と研究の現状

熱流体の挙動解析に関する研究の現状を把握するために、代表的な理論と解析方法を調査する。

熱流体の挙動解析に最も一般的に用いられる理論は浮力を考慮したNSとECおよびTEを用いる理論である。この理論の解析方法として、基礎式をそのまま解く差分法(FDM)と、基礎式に重みをつけて解く重みつき残差法(MWR)がある。これらの方法を用いた研究は非常に多くなされている。一例を挙げるとFDMでは、Nallasamyら[1]、Jaluria[2-4]、Hellumsら[5]、Wilkesら[6]、Torranceら[7]、Chuら[8]、Pepperら[9,10]、Soundalgekarら[11]などの報告がある。次に、MWRではGallagher[12,13]、Marshallら[14]、池川[15]、Kawaharaら[16]、松田[17]、武田ら[18]、小林[19]などの報告がある。またTabarrokら[20]、Gartling[21]、Reddyら[22-24]、宮内ら[25]、江口[26]、Murty[27]はFEMにペナルティ法を適用して熱流体の解析をしている。MWRは有限要素法(FEM)を用いる解析方法で

ある。この理論の特徴は力の釣りあい式と熱エネルギの平衡式を基礎式に用いていることである。従って、これらの式が成立する現象はFDM またはFEM(MWR)を用いて解明できる。

解析理論として、エネルギ保存則を用いている報告がある。この理論は一般に固体力学の分野で用いられている。解析方法はFEM である。Oden[28]、Zienkiewicz[29、30] はこのエネルギ保存則を粘性流体の流れ解析に適用している。この理論の特徴は流れ場をエネルギ系で扱うため、保存系に限られるが、固体と流体の連成挙動を扱うことができる。しかし、定式化の方法は各種エネルギのマトリックスを構成した後に変分するので、遠心成分やコリオリ成分を導入することができない[31]。なお文献(28～30)では、浮力による仕事を導入してエネルギ保存則を成立させている。また、温度場の解析には、TEに重みをつけたMWR を採用している。

以上の理論のほかに、著者は熱流体のための変分原理を提案している[32-34]。解析方法はFEM である。この理論の特徴は NS、EC、TEおよび熱伝導方程式(TC)などの基礎式を用いないことである。そして流れ場の解析に浮力を考慮した仮想仕事の原理、温度場の解析に変分原理を適用していることである。仮想仕事の原理は解析対象に応じて各種仮想仕事を取捨選択できるので、非線形成分を含む系や非保存系に適用できる。また、この原理は固体と流体のどちらにも適用できる。従って、固体と流体が連成する場の解析に適用可能である。次に、温度場解析のための変分原理は仮想仕事の原理と同様に、解析対象に応じて各種の熱エネルギを取捨選択できる。このため、粘性摩擦などによって失われる、いわゆる散逸エネルギ成分も導入可能である。このように、本原理は現象をエネルギ系で扱う。

従って、現象が複雑になり方程式が不明の場合でも、解析が可能になるという特徴をもっている。

1.1.2　熱連成場解析に関する各種理論の概要と研究の現状

従来の熱連成場解析の理論は、熱流体の挙動解析にNS、ECおよびTE、固体の温度場解析に熱伝導方程式(TC)を基礎式としている。また、熱連成場は通常、流体を中心とした伝熱問題として取り扱われており、固体の熱容量や熱伝導が流体に及ぼす影響が調べられている。この理論に基づいた従来の報告例を挙げると、次のようになる。Gebhart[42-48]、Mollendorf[49]、Adams[50]、Soliman[51]、花輪[52-55]は固体の熱容量のみを考慮して、また、Lockら[56]、Zinnes[57]、岸浪ら[58,59]、Broshら[60]、Sekiら[61]は固体の熱伝導を考慮して熱連成場を扱っている。さらに、智田[62]、Sunden[63-67]、Patankar[68,69]、石代ら[70]は固体の熱容量と熱伝導を考慮して熱連成場を扱っている。

熱連成温度場の扱い方として、固体と流体を個別または一体化して扱う方法がある。文献(42)～(67)は前者の方法、文献(68)～(70)は後者の方法を採用している。個別に扱うと、境界面において、熱的境界条件（熱流束の連続性の条件と温度一致の条件）を満足させるための反復計算が必要になる。一体化して扱うと、この欠点はなくなる。しかし、文献(68)～(70)は境界において、固体と流体の熱伝導率を平均化した値を用いている。このため、固体と流体の熱伝導率の比が大きくなると、境界面上の温度分布や熱流束を正確に評価できなくなる。

著者はNS、ECおよびTE、TCなどの基礎式を用いない解析理論として、熱連成場解析のための変分原理を提案している[71,72]。本原理は固体と流体の温度場を一体化して扱う。しかし、境界において両者の熱伝導率の平均値を用いていない。従って、本原理を用いると、上で述べた従来の方法の欠点は解消され、精度の良い解析が可能になる。

１．２　本研究の工学的意義と概要

1.2.1　本研究の工学的意義

流れ場の解析には従来、NSとECが基礎式として用いられている。本研究では、流れ場の解析に基礎式を用いずに、仮想仕事の原理を適用している。この原理は固体力学の分野では成立することが確かめられている。ところが、流体力学の分野で成立することは確かめられていない。仮想仕事の原理が粘性流体の流れ解析に適用可能になると、固体力学と流体力学の両方の分野を共通の原理で扱うことができる。本原理が流体力学の分野で用いることができるならば、NSやECを用いる方法では解析不可能な、液体貯蔵用タンクのスロッシングやバルジング、配管系の振動などのように、固体と流体が連成する場の解析が可能になる。従って、仮想仕事の原理を粘性流体の流れ解析に適用することは工学的にも、工業的にも意義深いことである。このような観点に立って、本研究では、第３章で仮想仕事の原理が粘性流体の流れ解析に適用できることを基本的な事項で検証している。

熱的効果を伴う流体の流れ場解析には従来、浮力を考慮したNSとECが基礎式として用いられている。本研究では、このような流れ場の解析に基礎式を用いずに、仮想仕事の原理を適用している。一方、流体の温度場解析には熱エネルギ式を用いずに、変分原理を適用している。そして浮力を考慮した仮想仕事の原理と流体の温度場解析のための変分原理を連立させて、熱流体のための変分原理を構築している。温度場解析のための原理は解析対象に応じて各種の熱エネルギを取捨選択できる。このため、粘性摩擦などによって失われる散逸成分を導入することも可能である。熱的効果を伴う流体の流れ

場には発熱を伴う化学反応場や燃焼場も含まれる。これらの場の現象は非常に複雑になるので、現象を支配する基礎式を正確に表わすことが困難になる。このような場合、本研究で提案する熱流体のための変分原理が有力な解析理論となる。従って、熱流体のための変分原理を確立することは工学的にも、工業的にも意義深いことである。

熱連成場解析において、従来、流体の流れ場解析には、浮力を考慮したNSとECおよびTE、また固体の温度場解析にはTCが基礎式として用いられている。本研究では、これらの基礎式を用いずに、第4章で提案した熱流体のための変分原理を拡張した、熱連成場解析のための変分原理を適用している。熱連成温度場の扱い方として、固体と流体を個別または一体化して扱う方法がある。個別に扱うと、境界面において、熱的境界条件を満足させるための反復計算が必要になる。一体化して扱うと、この欠点はなくなる。ところが、固体と流体の熱伝導率の比が大きくなると、境界面上の温度分布や熱流束を正確に評価できなくなる。本原理を用いると、上で述べた従来の方法の欠点は解消される。マイクロコンピュータなどの電子機器に用いられる半導体集積回路の冷却問題などは熱連成問題として扱う必要がある。また、原子炉の燃料棒とその周りを流れる冷却材との熱授受を知ることは原子炉の安全設計に重要である。この熱授受を正確に求めるためには、熱連成場として扱わねばならない。これらの機器や材料の熱的な設計において、本方法はぜひとも必要になる。従って、本方法は工学的にも工業的にも意義深い方法である。

1.2.2　本論文の概要と特徴

本論文の特徴はNS、EC、TEなどの基礎式を用いずに、熱流体の挙動を解析するための変分原理を構築していることである。この原理は現象をエネルギ系で扱う。このため、物理的な意味が明確で、物理現象に対応しやすい。従って、現象が複雑になり、方程式が不明の場合でも解析可能になるという特徴をもっている。初めに、第２章で変分原理に基づく熱流体解析法の概要を述べる。引き続いて、この変分原理を構築するために、第３～５章で基本的な事項について検討している。本論文の概要は次の通りである。

第２章では、第３～５章において提案する変分原理と、解析方法として用いる有限要素法を概説する。

第３章では、文献(73)～(77)、(117)、(118)に基づき、固体力学で用いられる仮想仕事の原理を粘性流動に適用する。初めに、粘性流体中でなされる各種仮想仕事を誘導する。次に、これらの各種仮想仕事より仮想仕事の方程式を構成し、有限要素法の定式化を行う。最後に、本原理の妥当性を確かめるために、２次元段付き流路内流れの非定常粘性流動を有限要素解析する。その結果、速度と圧力の過渡応答ならびに収束解は文献(16)の結果に良く一致することが確かめられた。なお本原理からナビエ・ストークスの式が誘導できるので、考察に示す。

第４章では、第３章で確認された粘性流体のための変分原理を熱流体に適用する。流体に温度差があると、浮力が働く。浮力は温度の関数であるため、流れ場と温度場を決定する連成項になる。流体の温度場を決定するためには、流れ場に作用する熱伝導や熱対流などの熱的効果を考慮する必要がある。第４章では文献（32）～(34)

に基づき、浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理と、流れを考慮した温度場解析のための変分原理を構成する。この場合、流れと温度が連成項になる。従って、両変分原理を結合すると、熱流体のための変分原理が得られる。引き続いて、熱流体のための変分原理を確かめるために、この原理に基づく有限要素法を強制対流と自然対流に適用する。初めに、2次元キャビティ内の強制対流を有限要素解析し、差分解[7] ならびに重み付き残差法による解[17]と比較する。この解析結果は従来の解と良く一致した。なお熱流体の解析では通常、ブジネスク近似を用いるが、流体の温度差が大きくなると、密度や粘性係数などの物性値の温度依存性は無視できなくなる。そこで上述のキャビティ内の強制対流に物性値の温度依存性を考慮した有限要素解析を行なった。その結果、本有限要素法は粘性流体の物性値が温度に依存する場合にも、適用出来ることが確かめられた。次に、密閉容器内の自然対流を有限要素解析し、従来の差分解[6、10]と比較した。本解析結果も従来の差分解に一致した。以上のことから、変分原理に基づく熱流体場の有限要素解析法の妥当性が確認された。なお温度場解析のための変分原理から熱エネルギ式が誘導できる。これを考察で示す。

第5章では、文献(71)、(72) に基づいて固体と流体との熱連成場に適用できる変分原理を構成する。第4章で述べた熱流体のための変分原理は、固体表面の温度または熱流束が既知の場合に適用できる。しかし原子炉の燃料棒や電子機器のIC素子のように、固体内部に発熱源がある場合、固体表面の温度や熱流束は一般に未知である。固体と流体の温度場解析において、境界面上で両者の温度および熱授受量を一致させる付帯条件が必要になる。第5章では初めに、境

界面上で熱移動を考慮した固体と流体の温度場解析のための変分原理を提案する。次に、これらの変分原理に基づいて、固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理を構成する。熱連成場の温度場解析に、連続体として扱う変分原理を用いると、上記の付帯条件は自動的に満足される。速度場の解析には、第4章で構成した、浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理を用いる。連続体として扱う温度場解析のための変分原理と流れ場解析のための仮想仕事の原理を組みあわせると、固体と流体との熱連成場解析のための変分原理になる。解析例として、熱連成場解析のための原理に基づく有限要素法を、内部の発熱量が部分的に既知である垂直平板と、周囲流体との自然対流に関する熱連成場に適用する。その結果は現象的にも、実験的にも正しいことが判明した。従って、熱連成場解析のための変分原理の妥当性が証明された。なお熱連成温度場解析のための変分原理から固体の熱伝導方程式および流体の熱エネルギ式が誘導できる。これを考察で示す。

第6章では、第3章から第5章までにわたって得られた結言を総括する形で、概要を簡潔にまとめた。

本論文中の数値計算は東京大学大型計算機センター　HITAC M 8800/8700 および　HITAC M 280H/200H を用いて行なわれた。

第２章
変分原理に基づく熱流体解析法の概要

本章では、本論文の第３～５章で提案する変分原理および有限要素法を概説する。

２．１　変分原理に基づく解析法の特徴

2.1.1　従来の有限要素法による解析法の特徴

緒論で述べたように、差分法を用いる熱流体の解析は最も一般的であり、報告例も非常に多い。差分法は浮力を考慮したナビエ・ストークスの式(NS)と連続の式(EC)および熱エネルギ式(TE)を直接的に解く方法である。

有限要素法は差分法と違って、NS、ECおよびTEを直接解かない。熱流体の従来の有限要素解析では、まず初めに、これらの方程式に重みを乗じる。次に、正しい解との差（残差）を表わす方程式を作成する。最後に、この重みつき残差方程式が最小になるように解く。残差方程式が最小になる方法として、変分法[78-81]が用いられる。このため、有限要素法を用いる方法は変分法を用いた解析方法とも言う。なお、この方法では、重みは物理的な意味を持たない。従って、重みつき残差方程式の物理的な意味は明確ではない。以上が解析方法に有限要素法を用いる従来の方法の特徴点である。

2.1.2　変分原理に基づく解析法の特徴

本論文では、熱流体のための変分原理を提案する。解析方法は有限要素法である。本論文で提案する変分原理および、この原理に基づく解析法の特徴は次の通りである。

本論文で提案する変分原理は、NS、ECおよびTEを必要としない。この理論では、現象を支配する各種のエネルギを考慮し、エネルギの釣合式を構築する。そして、変分法[78-81]を用いて有限要素方程式を導き、近似解を求める。エネルギ形式で扱うため、変分原理をエネルギ原理とよぶ場合がある。上で述べた従来の有限要素法で

は、NS、ECおよびTEなどの基礎式が必要である。本論文の変分原理は基礎式を必要としない。現象が複雑になり、基礎式が不明の場合でも適用できる。従って、本論文で提案する変分原理は従来の重みつき残差法を用いた理論と別の概念であり、かつ、従来の有限要素法と比べて適用範囲が広くなることがわかる。さらに、エネルギ形式で扱うため、物理的な意味が明確であると共に、物理現象に対応しやすい特徴がある。

変分量のとり方によって、変分原理は次の2通りに大別される。この分類方法は有限要素法が初めに構造力学の分野で発展したことによる。

(1)　変位法　、　(2)　応力法

(1)の方法は、エネルギ形式で表現される式を変位（または速度、温度）で変分する方法である。変分された式は仮想的な仕事の釣合い式になる。これが本論文の第3章で提案する仮想仕事の原理である。さらに、熱エネルギ形式で表現される式を仮想的な温度で変分した釣合い式を本論文では、温度場解析のための変分原理とする。両原理ともエネルギ形式に基づく理論であるため、変分原理の一種である。変位法は変位（または速度、温度）を求めたい時に用いられる。

(2)の方法は、エネルギ形式で表現される式を応力（または圧力）で変分する方法である。現象を支配する方程式が応力（または圧力）で表現される場合に適用される。流体解析では、次のように適用する。流体の質量保存則（連続の式）は体積ひずみ率で表現される。そこで、体積ひずみ率に圧力を乗じて、流体の仕事率を作成する。この仕事率を圧力で変分する。

なお、(1) と(2) を混合した方法を混合法またはハイブリッド法と呼ぶ。流れ場は速度、圧力および温度が変数になる。また、温度場は温度と速度が変数でる。従って、本論文では流れ場の解析にハイブリッド法、温度場の解析に変位法を適用する。

2．2　有限要素法の定式化の概要

2.1 節で述べたように、本論文では解析方法として有限要素法を用いる。

2.2.1　有限要素法による解析方法の手順

有限要素法による解析は一般に、次の順序で行なわれる。

(1)　初めに、現象を表わす変分原理を構築する。

(2)　解析対象領域を有限個の要素に分割する。要素の形状は2次元問題の場合、三角形、または四角形が採用される。本論文では、三角形要素を採用する。

(3)　採用された要素内において、物理量（変位、速度、圧力、温度など）を表わす近似的な区分多項式を設定する。要素内で設定された物理量を、要素を構成する点（節点）における物理量に置き換える。これを離散化とよぶ。離散化された物理量と要素の形状は密接な関係にある。有限要素法では、要素形状を表わす関数を形状関数とよぶ。

(4)　設定した区分多項式を用いて、要素の各種仮想仕事を表現する。連続の式や熱エネルギ式の変分表現についても同じ操作を用いる。これらを、構築した変分原理に代入し、要素に

関する方程式を誘導する。これを要素方程式という。要素方程式は、要素を構成する節点の数と自由度の積を未知数とするマトリックス方程式になる。

(5)　個々の要素方程式を解析領域全体にわたって合成する。

(2)～(5)までの過程を通常、有限要素法の定式化という。

(6)　合成された方程式を解いて、物理量の近似解を得る。

以上が有限要素法による解析手順の概要である。解析対象によって、変分原理やそれに伴って誘導されるマトリックス方程式が違ってくる。従って、これらの手順のうち、(1)、(4)、(5)、(6) 項はここでは詳しく述べることができない。これらの項については第３～５章で述べる。

本章では、第３～５章に共通で、かつ、有限要素法の定式化に必要な(2)、(3) 項について詳しく述べる。

2.2.2 有限要素分割

第１章で述べたように、本論文では、流れ場および熱流体場を２次元問題に限定する。

図2.1 に解析領域を模式的に示す。また、図2.2 に同じ解析領域を有限個の三角形要素に分割した例を示す。

この要素分割は計算上の誤差や、数値解の発散現象を防ぐために、次のような点に注意する。

(1) 物理現象として重要な領域は細かく分割する。

(2) 極端に不規則な分割は避ける。

(3) 要素と要素が重ならないこと。

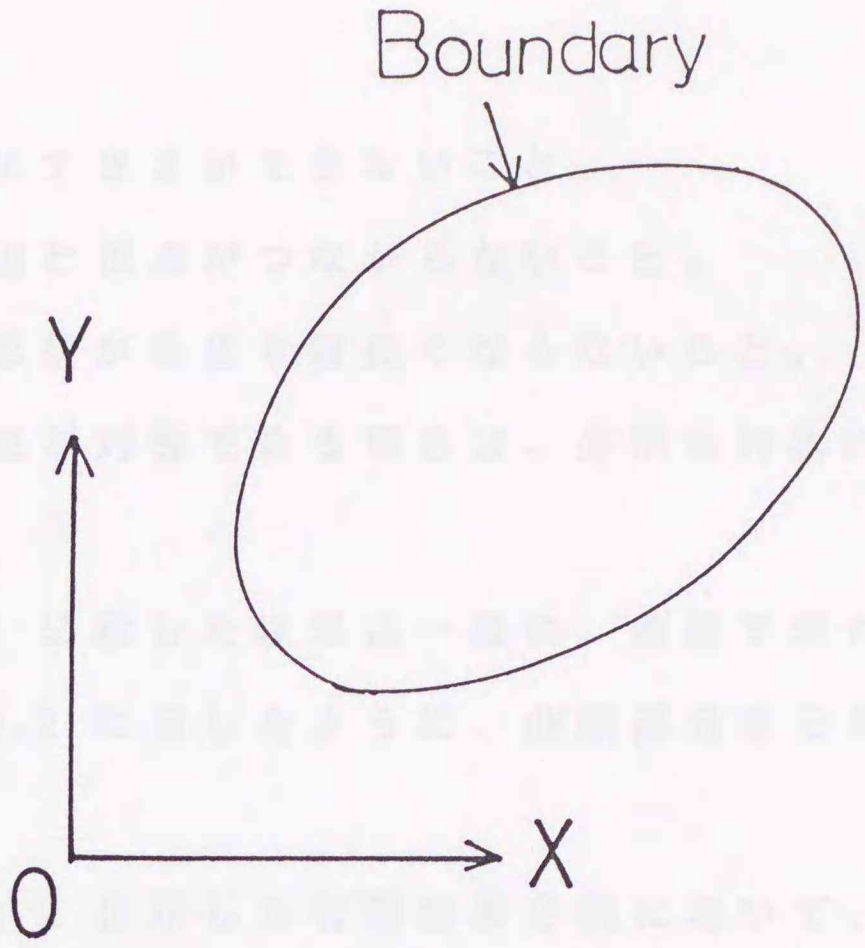


図２．１　解析領域

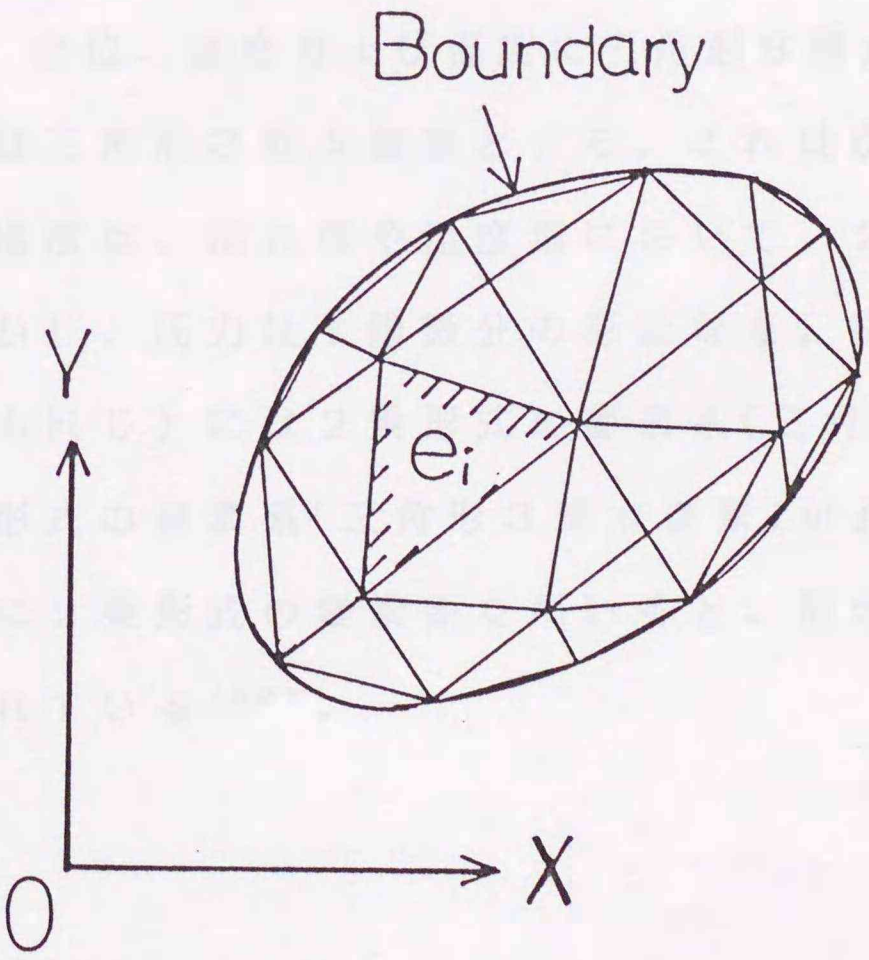


図２．２　有限要素分割

(4) 要素間にすきまができないこと。

(5) 要素の辺と頂点がつながらないこと。

(6) 要素の形状があまり細長くならないこと。

(7) 物理現象が対称である場合は、分割も対称にすること。

なお、図2.1 に示した境界は一般に、曲線で表わされる。有限要素法では、図2.2 に示したように、曲線部分を三角形の一辺で近似する。

図2.3 は図2.2 に示した有限要素分割において、 i 番目の要素 e_i を抜きだしたもので、三角形３節点要素である。図2.4 は要素 e_i を三角形６節点要素とした場合である。

2.2.3 形状関数と面積座標

本論文では、変位、速度および温度に三角形６節点要素を用いる。また、圧力には三角形３節点要素とする。これは次の理由による。

速度および温度は、流れ場や温度場において、２階微分の形で表わされる。しかし、圧力は１階微分の形になる。従って、速度および温度（変位も同じ）には２乗形式の要素系(三角形６節点要素)、圧力には１乗形式の要素系(三角形３節点要素)が必要になる。

なお、圧力に２乗形式の要素系を用いると、解の精度が悪くなることが報告されている[82]。

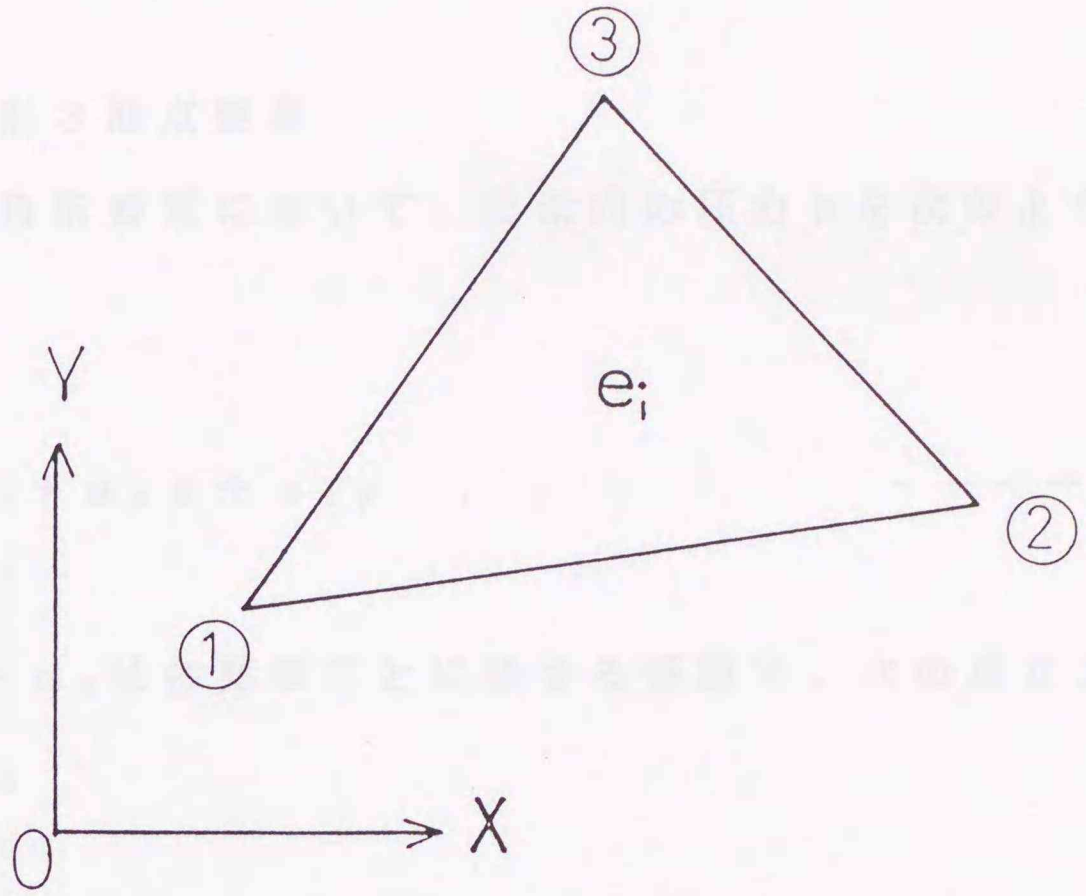


図２．３　三角形３節点要素

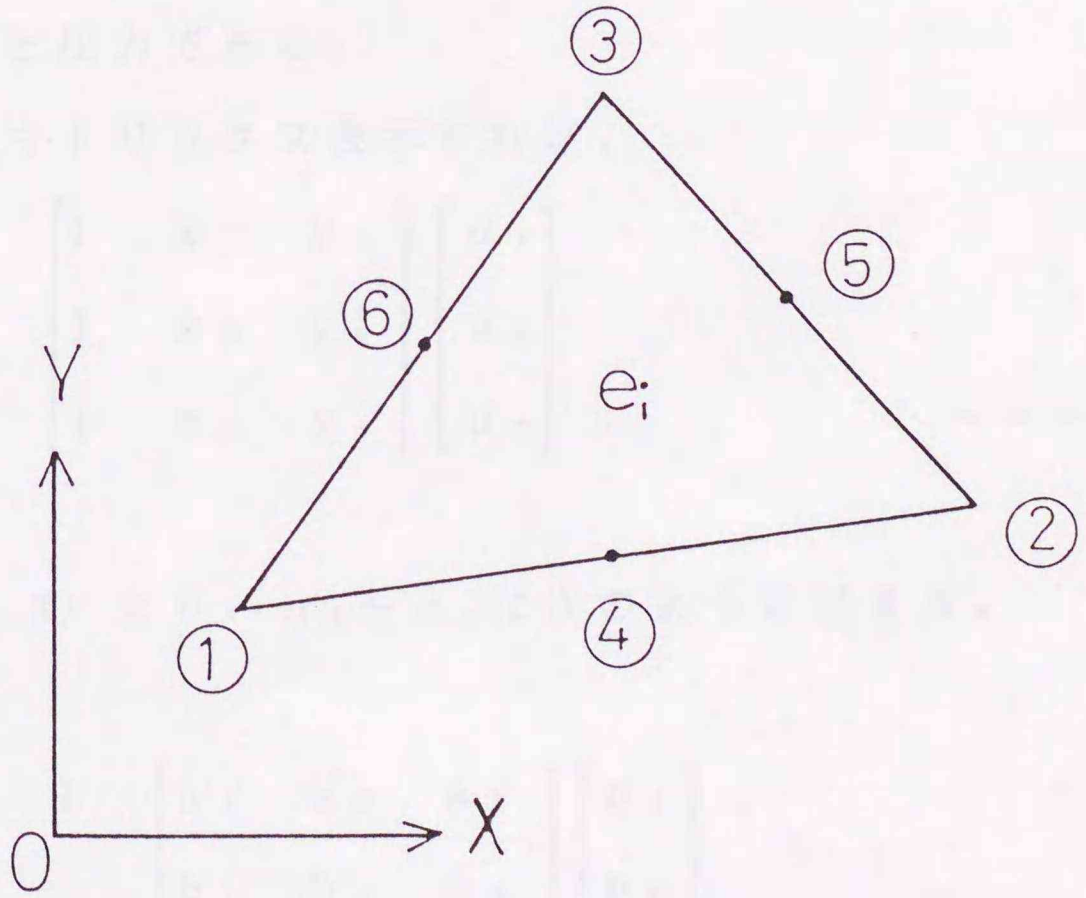


図２．４　三角形６節点要素

2.2.3.1 三角形3節点要素

図2.5 の三角形要素において、要素内の圧力pを次のように近似する。

$$p = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad , \qquad \text{------(2.1)}$$

ここで、$\alpha_1 \sim \alpha_3$は各要素ごとに決まる係数で、次の連立方程式から決定される。

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \quad , \\ p_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \quad , \\ p_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad , \end{aligned} \qquad \text{------(2.2)}$$

ここで$(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$および $p_1 \sim p_3$ はそれぞれ三角形の頂点の座標と圧力である。

式(2.2) をマトリックス表示すれば、

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{------(2.3)}$$

となる。式(2.3) より、$\alpha_1 \sim \alpha_3$は次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{------(2.4)}$$

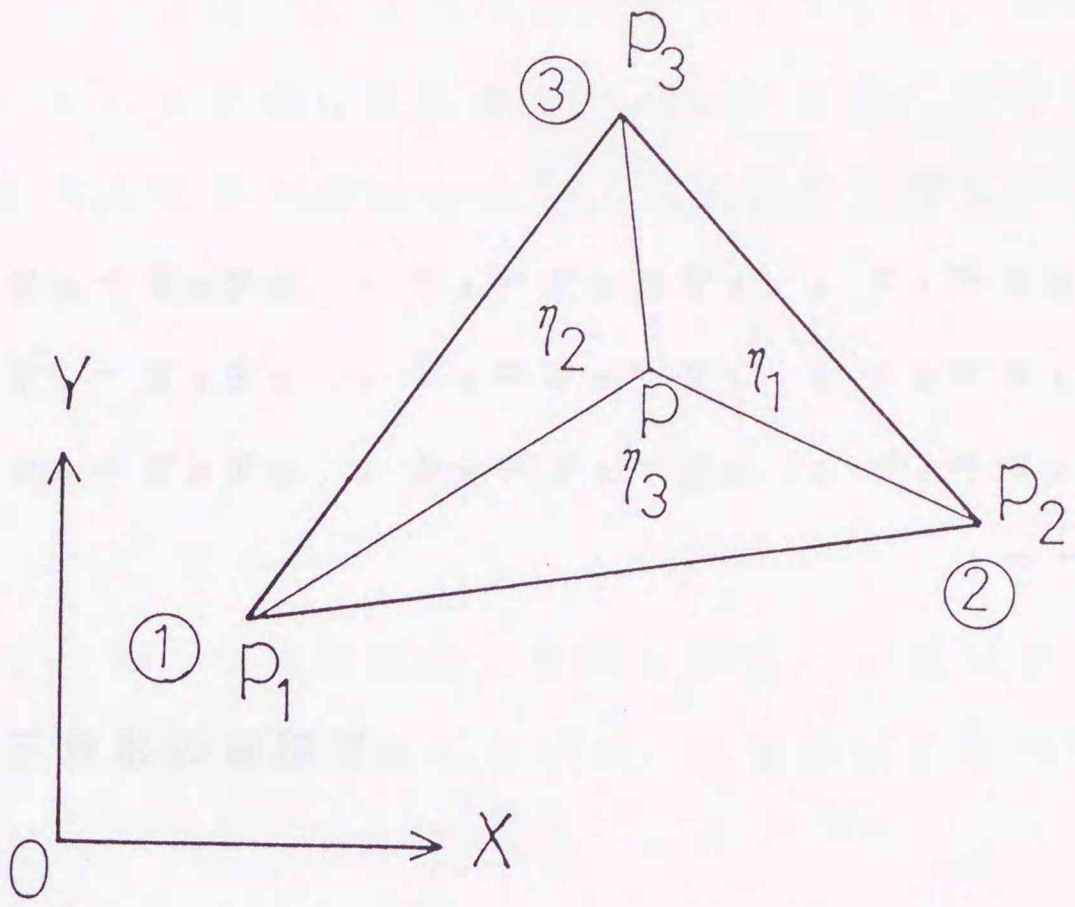


図２．５　三角形３節点要素（圧力）

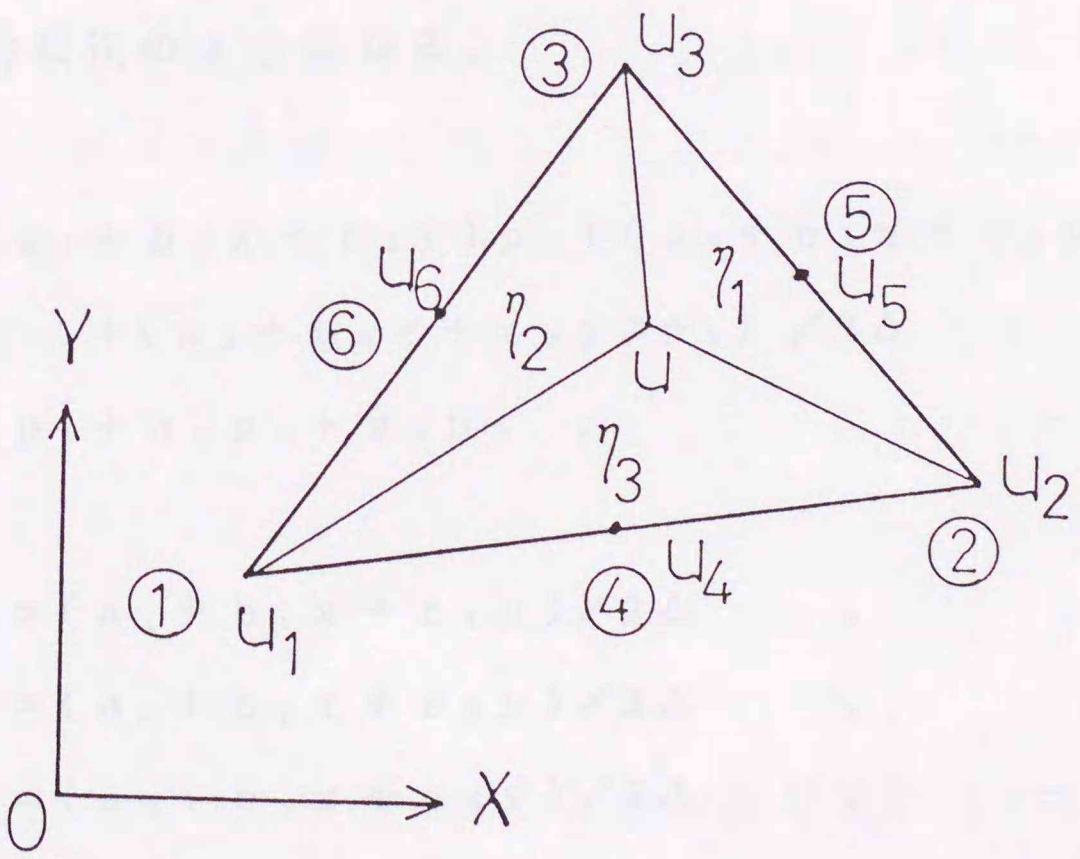


図２．６　三角形６節点要素（変位、速度、温度）

ここで、

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad , \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad , \quad c_1 = x_3 - x_2 \quad ,$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad , \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad , \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad ,$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad , \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad , \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad .$$

－－－－(2.5)

また、Δは三角形の面積で、

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad , \qquad \text{－－－－(2.6)}$$

である。式(2.4)で求まった$\alpha_1 \sim \alpha_3$を式(2.1)に代入すると、要素内の圧力は次のようになる。

$$\begin{aligned} p = &\{(a_1 + b_1 x + c_1 y) p_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y) p_2 \\ &+ (a_3 + b_3 x + c_3 y) p_3\} / 2\Delta \\ = &\eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \eta_3 p_3 \quad , \end{aligned} \qquad \text{－－－－(2.7)}$$

$$\eta_1 = (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2\Delta \quad ,$$

$$\eta_2 = (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2\Delta \quad ,$$

$$\eta_3 = (a_3 + b_3 x + c_3 y) / 2\Delta \quad , \qquad \text{－－－－(2.8)}$$

ここで、$\eta_1 \sim \eta_3$は要素の面積割合を意味するので、面積座標である。そして、これらを図に表わすと、図2.5 のようになる。また、$\eta_1 \sim \eta_3$は要素の形状を表わすので、形状関数に等しい。三角形3節点要素の形状関数を$N_1 \sim N_3$とすれば、

$$N_1 = \eta_1 \quad , \quad N_2 = \eta_2 \quad , \quad N_3 = \eta_3 \quad , \qquad ---(2.9)$$

である。すなわち、三角形3節点要素の場合、形状関数と面積座標は等しくなる。この形状関数を用いて、要素の圧力を表現すれば、次のようになる.

$$p = N_1 p_1 + N_2 p_2 + N_3 p_3 \quad . \qquad ---(2.10)$$

2.2.3.2 三角形6節点要素

これは三角形要素において、三つの頂点のほかに、三つの辺の中点にも節点を設けた要素で、図2.6 に示す。いま、要素の物理量をu（変位、速度または温度）とし、式(2.10)と同じように形状関数を用いて表わすと、uは次のように書くことができる。

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 \quad . \qquad ---(2.11)$$

ただし、$N_1 \sim N_6$は三角形6節点要素の形状関数である。これらを式(2.8) の面積座標ηで表わすと、次のようになる[83]。

$$N_1 = 2\eta_1^2 - \eta_1 \quad , \quad N_4 = 4\eta_1\eta_2 \quad ,$$
$$N_2 = 2\eta_2^2 - \eta_2 \quad , \quad N_5 = 4\eta_2\eta_3 \quad ,$$
$$N_3 = 2\eta_3^2 - \eta_3 \quad , \quad N_6 = 4\eta_3\eta_1 \quad . \qquad ---(2.12)$$

式(2.10)、(2.11) の区分多項式および式(2.9)、(2.12)の形状関数を用いた具体的な定式化は第３～５章で述べる。

2.2.4 定式化に必要な積分公式

2.2.3 節で述べたように、有限要素法では、形状関数や面積座標を用いて要素内の変位(または速度、温度）や圧力などを表わす。次に、これらの物理量を用いて要素の仮想的な仕事や熱量を表現する。その際、形状関数や面積座標の積分が必要になる。この積分は通常の積分と違い、積分範囲が要素内に限定される。従って、有限要素法では、要素に関する積分公式が準備されている(83)。ここでは、第３～５章において有限要素法の定式化に必要な積分公式を記する。

形状関数Ｎと面積座標ηとの関係は、三角形３節点要素では 式(2.9) 、三角形６節点要素では式(2.12)になる。Ｎはηで表現できる。ηを用いて要素の仮想的な仕事や熱量を求めると、次のような形の積分が現われてくる。

$$\int \eta_1^a \eta_2^b \eta_3^c \, d\Delta \quad . \qquad ---(2.13)$$

ここで∫ｄΔは三角形要素についての積分を意味する。また、上式のａ、ｂ、ｃは自然数である。式(2.13)の積分結果は次のようになる。

$$\int \eta_1^{a} \eta_2^{b} \eta_3^{c} \, d\Delta = \frac{2\Delta \, a! \, b! \, c!}{(a+b+c+2)!} \qquad ---(2.14)$$

式(2.14)の積分公式を用いた簡単な例を次に示す。

$$\int \eta_1 \, d\Delta = \int \eta_2 \, d\Delta = \int \eta_3 \, d\Delta = \Delta / 3 \quad , \qquad ---(2.15)$$

$$\int \eta_1 \eta_2 \, d\Delta = \int \eta_2 \eta_3 \, d\Delta = \int \eta_3 \eta_1 \, d\Delta = \Delta / 12 \quad , \qquad ---(2.16)$$

$$\int \eta_1^{2} \, d\Delta = \int \eta_2^{2} \, d\Delta = \int \eta_3^{2} \, d\Delta = \Delta / 6 \quad . \qquad ---(2.17)$$

第３～５章で要素の仮想的な仕事や熱量を定式化するが、その際に式(2.14)の積分公式を用いる。

第３章
粘性流体のための仮想仕事の原理と有限要素法

本論文では、従来の理論に加えて、新たに変分原理に基づく解析理論を提案する。流れ、および熱流体における従来の解析では、現象を支配する方程式系が明確になっており、これが解析の出発点である。本論文で提案する変分原理は現象をエネルギ系で扱う。このため、物理的な意味が明確であり、物理現象に対応しやすい。従って、現象が複雑になり、方程式が不明の場合でも解析可能になるという特徴をもっている。

新たに提案する解析理論と各章との関係は次のようになる。第３章では、熱流体の挙動解析において基礎となる理論として、流体の流れ場を解析するための仮想仕事の原理を提案し、基本的な事項で、提案した原理の妥当性を確認する。第４章では、流れ場に温度の効果を導入し、流れ場と温度場を連立させた熱流体のための変分原理を提案する。この原理に基づく解析方法を用いて、自然対流と強制対流を数値解析し、従来の結果と比較検討する。第５章では、提案した熱流体のための変分原理を発展させて、固体と流体の温度場が熱的に連成する場に適用し、結果の妥当性を検討する。

本章では、流体の流れ場を解析するための基礎理論として、仮想仕事の原理を提案する。引き続いて、本原理に基づく有限要素法を誘導する。最後に、本有限要素法を段付き流路内流れに適用し、従来の結果と比較検討する。

３．１　緒言

流体は非線形挙動を示すので、一般に理論解析は非常に困難である。従って数値解析に頼らざるを得ない。非線形性を伴う粘性流動の解析は現在までに非常に多く報告されている。この中で代表的な理論と解析方法を表3.1 に示す。表3.1 については研究課題を明確にするために、次章で検討する。

本章では、ナビエ・ストークスの式(NS)と連続の式(EC)を用いないで、粘性流動に適用できる仮想仕事の原理を提案する。引き続いて、本原理の妥当性を検証するために、本原理に基づく有限要素法(FEM) を段付き流路内流れに適用し、 Kawahara らの結果[16] と比較する。

なお本章で提案する粘性流体のための仮想仕事の原理から通常、流体解析に用いられるNSが誘導できる。誘導方法を本章の考察で述べる。

３．２　問題の提示

3.2.1　粘性流動を解析するための各種理論の概要と特徴

表3.1 に示すように、粘性流動解析の理論にはNSとEC、エネルギ保存則および著者の提案している仮想仕事の原理の３通りが考えられる。

最も多く用いられる理論はNSとECである。この理論はクリープ流れから非線形の対流形慣性力を含む流れまで適用できる。NSは力の釣合い式であるため、遠心力やコリオリ力などの非線形力も考慮できる。この理論に基づく解析方法として、差分法(FDM) が多く用い

表３．１　粘性流体の挙動を解析する代表的な理論と解析方法

理　論		NS, EC		エネルギ保存則	仮想仕事の原理
解析方法		F D M	FEM(MWR)	F E M	F E M
流動状態	定常流れ	Nallasamyら[1] Dennisら[84] Greenspan[85] Kawaguti[86] Bozemanら[87]	Kawaharaら[16] Kawaharaら[95] 川原[96] Kawaharaら[97] 渡辺ら[98] 大宮司[99] 渡辺[100]	Oden[28] Zienkiewicz[29] Zienkiewicz[30]	亀ケ谷ら[73-77]
	非定常流れ（層流）	Kawagutiら[88] Frommら[89] Harlowら[90] 大宮司[91]	Kawaharaら[16] 太田[101] 松田[102] 松田ら[103] 松田ら[104] 児玉ら[105] 平野[106] 児玉[107]	Oden[28] Zienkiewicz[29] Zienkiewicz[30]	亀ケ谷ら[117] 亀ケ谷ら[118]

NS : Navier Stokes Equation.

EC : Equation of Continuity.

られる[1、84-91]。また近年、重み付き残差法(MWR)[92-94]による数値解析が用いられている[16、95-107]。MWRはNSとECに重みを乗じて残差を最小にする方法であるため、基本的にはNSとECを用いた理論の範疇に属する。MWRはFEMを用いるため、複雑な形状を有する流路内流れの解析に適している。またFDMと比較してマトリックスが優対角になる性質を持つので[108]、大型モデルの数値計算に適している。なお、文献(109)～(114)はペナルティ法を用いた論文である。解析方法はFEMである。ペナルティ法はECにペナルティ（処罰）係数を乗じて圧力を表現する。このため、連続の式が不要になり、能率的な解析が可能になる。しかし、非圧縮性の条件が緩和されるので、精度は悪くなる。この理論は以上のような特徴をもっている。しかし、流体の挙動が固体と連成するような場になると、基礎式を正確に表現することが難しくなり、この理論は適用できない。NSとECを基礎式とした解析例は非常に多い。表3.1に示した文献はそのうちの代表例である。

エネルギ保存則は一般に固体力学で用いられる。Oden[28]、Zienkiewicz[29、30]はこのエネルギ保存則を粘性流動の解析に適用している。この理論の特徴は流れ場をエネルギ系で扱うため、保存系に限られるが、固体と流体の連成挙動を扱うことができる。しかし定式化の方法は各種エネルギのマトリックスを構成した後に変分するので、遠心成分やコリオリ成分を導入できない[31]。

仮想仕事の原理は固体力学で用いられており、非保存系でも成立する。また各種の非線形成分を考慮することができる。浅野は2物体の弾性衝突解析において、接触・分離・固着の条件を考慮した仮想仕事の原理を提案し、数値解析している[115、116]。このような

仮想仕事の原理の性質を利用すると、例えば、液体貯蔵用タンクのスロッシング現象や配管系の振動現象など、弾性体と粘性流体が連成する場の解析ができる可能性がでてくる。ところが仮想仕事の原理を粘性流体に適用した報告例は見当たらない。そこで、著者は振動を伴う流体と弾性体との連成挙動を統一して扱うことのできる変分原理を確立するために、仮想仕事の原理を粘性流動に適用したFEM解析法を提案している[73-77、117、118]。また本原理を用いると、遠心成分、コリオリ成分などの非線形成分が導入できることを報告している[31]。

3.2.2　研究課題の明示

本章ではNSとECを用いないで、仮想仕事の原理に基づく流れ場解析の理論を確立する。初めに、流体に作用する各種仮想仕事を述べ、粘性流体のための仮想仕事の原理を構築する。次に、本原理に基づくFEM解析法を述べる。最後に、本原理の妥当性を基本的な事項で確認する。解析例として、段付き流路内流れを取り上げ、本FEMを適用する。そして、その解とMWRを用いたKawaharaらの解[16]と比較する。なお流れは層流と仮定する。

３．３　粘性流体のための仮想仕事の原理

本章では、文献(73)～(77)および(117)、(118)に基づいて、粘性流体のための仮想仕事の原理を構築する。

取扱いを簡単にするために、本章では２次元問題に限定する。

3.3.1　加速度形慣性力による仮想仕事

加速度形慣性力ベクトル$\mathbf{f}_a$は次のようになる。

$$\mathbf{f}_a = \rho [\dot{u}_{,t} \quad \dot{v}_{,t}]^T \quad , \qquad ---------- (3.1)$$

ここで$(\ )_{,t}$は時刻tに関する偏微分を意味する。加速度形慣性力による仮想仕事δU_aは$\mathbf{f}_a$と仮想変位ベクトル$\delta \mathbf{u}$との積で、次のように表わされる。

$$\delta U_a = b \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_a \, dS , \quad \mathbf{u} = [u \quad v]^T \qquad ---(3.2)$$

ここでρは流体の密度、uとvはそれぞれx、y方向の変位、・は時間微分、bは厚さ、Sは積分領域、$[\ ]^T$は転置行列、δは変分演算子である。

3.3.2　対流形慣性力による仮想仕事

一般に対流形慣性力ベクトル$\mathbf{f}_c$は運動量保存則により次のように表わされる。

$$\mathbf{f}_c = \rho \begin{bmatrix} \dot{u}\,\dot{u}_{,x} + \dot{v}\,\dot{u}_{,y} \\ \dot{u}\,\dot{v}_{,x} + \dot{v}\,\dot{v}_{,y} \end{bmatrix} , \qquad ---------- (3.3)$$

ここで$(\ )_{,x}$、$(\ )_{,y}$はそれぞれxとyに関する偏微分を意味する。対流形慣性力による仮想仕事δU_cは$\mathbf{f}_c$と仮想変位ベクトル$\delta \mathbf{u}$との積で、次のように表わされる。

$$\delta U_{\circ} = b \int_{S} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{\circ} \, dS \quad . \qquad \text{---------- (3.4)}$$

3.3.3 粘性による仮想仕事

粘性流体が流れると、粘性によってひずみ応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}$が生じる。$\boldsymbol{\sigma}$は固体力学で偏差ひずみ応力ベクトルと呼ばれる。 粘性による仮想仕事δU_vは$\boldsymbol{\sigma}$と仮想ひずみベクトル$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$の積で、次のように表わされる。

$$\delta U_v = b \int_{S} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dS \quad , \qquad \text{---------- (3.5)}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\, \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \,]^T$$

$$= \mathrm{diag}[\, 2\mu \quad 2\mu \quad \mu \,] \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, ,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\, \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \,]^T ,$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad , \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad , \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \, ,$$

ここで diag は対角行列、μは粘性係数、$\boldsymbol{\varepsilon}$はひずみベクトルである。

3.3.4 圧力による仮想仕事

圧力ベクトル$\mathbf{P}$は流体のせん断には関与しないため、単に垂直成分としてはたらく。圧力による仮想仕事δU_pは$\mathbf{P}$と仮想の体積ひずみベクトル$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_v$の積で、次のように表わされる。

$$\delta U_p = b \int_{S} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v \cdot \mathbf{P} \, dS \qquad \text{---------- (3.6)}$$

$$\mathbb{P}=[\ p\ \ p\ \ 0]^T,\ \mathbb{\varepsilon}_v=[\varepsilon_v\ \ \varepsilon_v\ \ 0]^T,$$

$$\varepsilon_v=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2,$$

ここでpは圧力、ε_v は体積ひずみである。

3.3.5　外部仮想仕事

外部仮想仕事δU_wは流体中の物体力ベクトル$\mathbb{f}_w$ならびに表面力ベクトル$\mathbb{f}_l$と仮想変位ベクトル$\delta\mathbb{u}$の積で、次のように表わされる。

$$\delta U_w=b\{\int_S \delta\mathbb{u}\cdot\mathbb{f}_w dS+\oint_l \delta\mathbb{u}\cdot\mathbb{f}_l dl\},\quad -(3.7)$$

$$\mathbb{f}_w=[f_{wx}\ \ f_{wy}]^T,\quad \mathbb{f}_l=[f_{lx}\ \ f_{ly}]^T,$$

ここで添字x、yはそれぞれの方向を意味する。　またdlは表面力$\mathbb{f}_l$が作用する面の長さ、lはその積分領域を示す。$\oint_l$は境界面に沿った積分である。

3.3.6　流体が連続性を保つための条件

緒論で述べたように、本論文では流体は非圧縮性と仮定する。流体の連続性を表わす連続の式は、質量保存則から誘導できる。本論文では非圧縮性流体の連続性を、体積ひずみ率　$\dot{\varepsilon}_v$ に仮想の圧力ベクトル$\delta\mathbb{P}$を乗じて、次のように表現する。

$$\delta U_g=b\int_S \delta\mathbb{P}\cdot\dot{\mathbb{\varepsilon}}_v dS\ .\qquad ----------(3.8)$$

3.3.7　粘性流体に適用できる仮想仕事の原理

仮想仕事の原理は解析対象に応じて、各種仮想仕事を取捨選択できる。流れの種類に分類して仮想仕事の原理を記すると、次のようになる。

クリープ流れの場合、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_v - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0. \qquad \text{------(3.9)}$$

定常流の場合、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_v + \delta U_c - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0. \qquad \text{----(3.10)}$$

非定常流の場合、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_a + \delta U_v + \delta U_c - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0, \qquad \text{----------(3.11)}$$

ここでt_1、t_2 は時刻を意味する。

なおδU_a、δU_c、δU_v、δU_pおよびδU_w は有限要素法による変位法、δU_s は応力法に対応するため、式(3.9)～(3.11) はハイブリッド形仮想仕事の原理になる。

３．４　有限要素法の定式化

3.3 節では、粘性流体のための仮想仕事の原理を構築した。本原理に基づいて粘性流動を解析する手法は有限要素法である。また、第４、５章で構築する熱流体のための変分原理の解析手法も有限要素法である。変分原理（仮想仕事の原理やエネルギ保存則など）から有限要素方程式を誘導することを有限要素法の定式化という。有限要素法の定式化の概要は2.2 節で述べている。ここでは、2.2.1 節で述べた有限要素法による解析手順に基づいて有限要素法の定式化を行なう。

式(3.11)で表わされる変分原理に基づいて粘性流動を解析するために、初めに、解析領域を有限個の三角形要素に分割する。要素として、第２章で述べたように、変位には三角形６節点要素、圧力には三角形３節点要素を用いる。変位と圧力に対して採用する要素系が違う理由は2.2.3 節で述べたので、ここでは省略する。

要素内の変位および圧力は次のようになる。

x 方向の変位 u

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \quad \cdots \quad + N_6 u_6 \quad , \qquad ---(3.12)$$

y方向の変位 v

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \quad \cdots \quad + N_6 v_6 \quad , \qquad ---(3.13)$$

圧力　p

$$p = \eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 + \eta_3 p_3 \quad , \qquad ---(3.14)$$

ここで $N_1 \sim N_6$、$\eta_1 \sim \eta_3$ はそれぞれ形状関数と面積座標で、式(2.12)、(2.8) で表わされる。$u_1 \sim u_6$、$v_1 \sim v_6$は図3.1 に示す三角形要素における6節点のx、y方向の変位である。また$p_1 \sim p_3$は図3.2 に示す三角形要素の各頂点の圧力である。

式(3.12)～(3.14)をマトリックス形式で表現すると、次のようになる。

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix} [d]$$

$$= [A_1][d] \quad , \qquad ---(3.15)$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad , \qquad -(3.16)$$

$$[d] = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \cdots \ u_6 \ v_6]^T \quad , \qquad -(3.17)$$

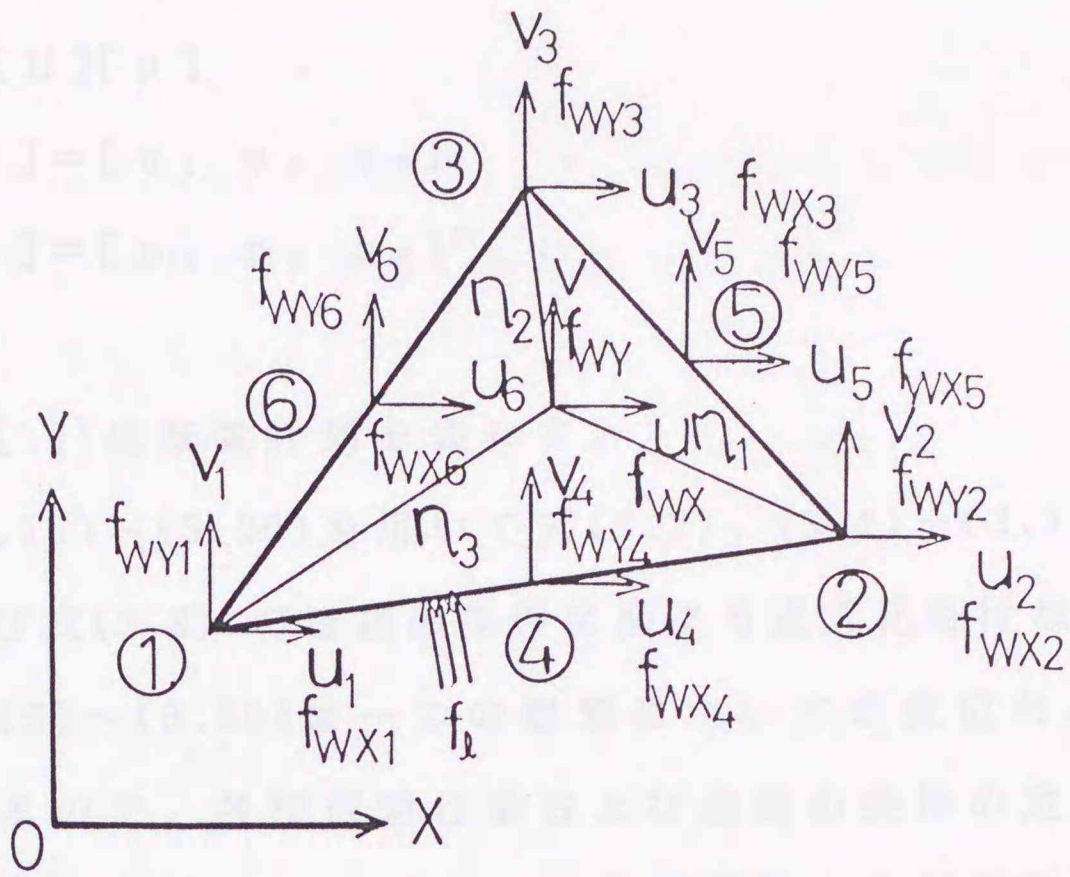


図３．１　変位および力に関する座標系

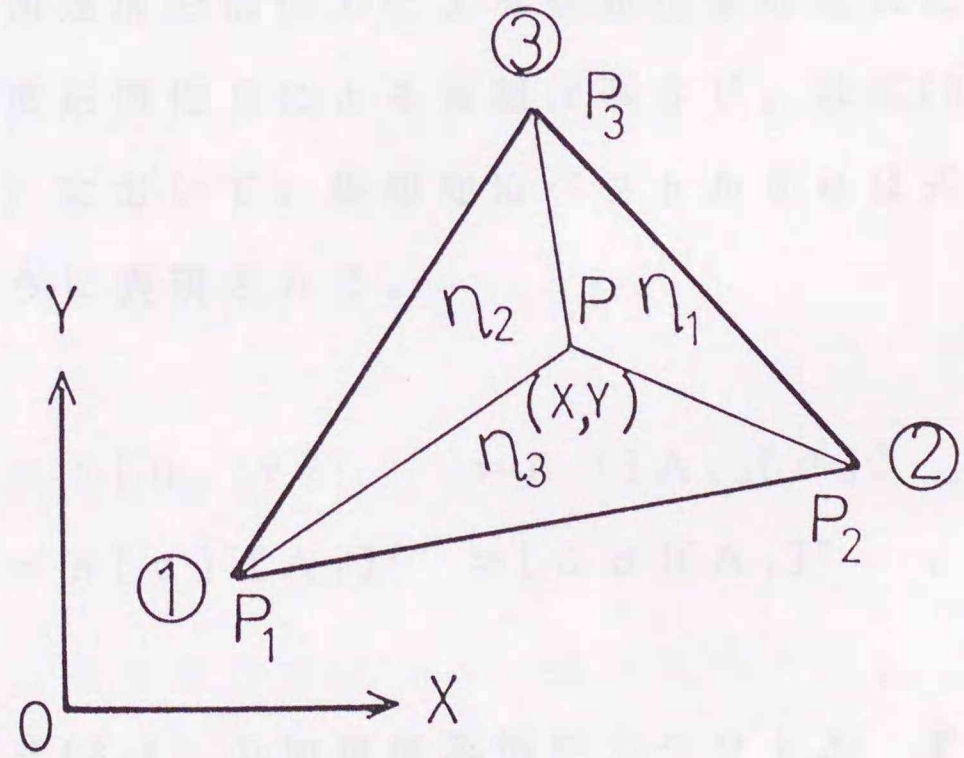


図３．２　圧力に関する座標系

$$p = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3][p]$$
$$= [H][p] \quad , \qquad ---(3.18)$$
$$[H] = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3] \quad , \qquad ---(3.19)$$
$$[p] = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T \quad , \qquad ---(3.20)$$

ここで$[\ ]^T$は転置行列を表わす。

式(3.15)～(3.20)を用いて式(3.2)、(3.4)～(3.7) の各種仮想仕事および式(3.8) の連続の条件に関する定式化を行なう。 ただし、式(3.15)～(3.20)は一つの要素についての変位および圧力を表わしているので、各種仮想仕事および連続の条件の定式化も一つの要素について行なう。従って、積分範囲は三角形要素の領域として扱う。

3.4.1 加速度形慣性力による仮想仕事の定式化

加速度形慣性力による仮想仕事δU_aは式(3.2) で表わされる。式(3.2) において、仮想変位ベクトルδuは式(3.15)を用いると、次のように表現される。

$$\delta u = \delta [u \quad v]^T \quad = \delta ([A_1][d])$$
$$= \delta [d]^T [A_1]^T \quad = [\delta d][A_1]^T \quad . \qquad ---(3.21)$$

また、式(3.1) の加速度形慣性力ベクトル f_a は、

$$f_a = \rho [\dot{u}_{,t} \quad \dot{v}_{,t}]^T$$
$$= \rho [A_1][\ddot{d}] \quad , \qquad ---(3.22)$$

$$[\ddot{d}] = [\ddot{u}_1 \ \ddot{v}_1 \ \ddot{u}_2 \ \ddot{v}_2 \ \cdots \ \ddot{u}_6 \ \ddot{v}_6]^T \ , \quad --(3.23)$$

ここで・は変位の時間微分、・・は変位を時間で2回微分したことを表わし、それぞれ速度、加速度を意味する。従って、$[\ddot{d}]$は加速度ベクトルである。

式(3.21)と(3.22)を乗じると、δU_a は次のようになる。

$$\delta U_a = b \int_\Delta \delta u \cdot f_a \ d\Delta$$
$$= b \int_\Delta [\delta d][A_1]^T \rho [A_1] d\Delta [\ddot{d}] \ . \quad ---(3.24)$$

ここでΔは三角形要素内の領域を示す。

$[\delta d]$は仮想変位ベクトルで任意の値をとることができる。　従って、式(3.24)は次のように書くことができる。

$$\delta U_a = [\delta d] b \int_\Delta [A_1]^T \rho [A_1] d\Delta [\ddot{d}]$$
$$= [\delta d][M][\ddot{d}] \ . \quad ---(3.25)$$
$$[M] = b \int_\Delta [A_1]^T \rho [A_1] d\Delta \ . \quad ---(3.26)$$

ここで$[M]$は加速度形の質量マトリックスを意味する。

3.4.2 対流形慣性力による仮想仕事の定式化

対流形慣性力による仮想仕事δU_cは式(3.4)で表わされる。式(3.4)において、仮想変位ベクトルδuは同じである。対流形慣性力ベクトル　f_cは式(3.3)で表わされる。f_cは速度の微分項を含んでいるので、次の順序で求めることができる。

$$\mathbf{f}_c = \rho \begin{bmatrix} \dot{u}\,\dot{u}_{,x} + \dot{v}\,\dot{u}_{,y} \\ \dot{u}\,\dot{v}_{,x} + \dot{v}\,\dot{v}_{,y} \end{bmatrix} , \qquad ---(3.3)$$

において、まず、速度のｘ、ｙに関する微分について考える。

式(3.12)、(3.13)の変位を時間で微分すると、

$$\dot{u} = N_1 \dot{u}_1 + N_2 \dot{u}_2 + \cdots + N_6 \dot{u}_6 , \qquad ---(3.27)$$

$$\dot{v} = N_1 \dot{v}_1 + N_2 \dot{v}_2 + \cdots + N_6 \dot{v}_6 . \qquad ---(3.28)$$

式(3.27)、(3.28)をそれぞれｘ、ｙで微分すると、

$$\dot{u}_{,x} = N_{1,x} \dot{u}_1 + \cdots + N_{6,x} \dot{u}_6 , \qquad ---(3.29)$$

$$\dot{u}_{,y} = N_{1,y} \dot{u}_1 + \cdots + N_{6,y} \dot{u}_6 , \qquad ---(3.30)$$

$$\dot{v}_{,x} = N_{1,x} \dot{v}_1 + \cdots + N_{6,x} \dot{v}_6 , \qquad ---(3.31)$$

$$\dot{v}_{,y} = N_{1,y} \dot{v}_1 + \cdots + N_{6,y} \dot{v}_6 , \qquad ---(3.32)$$

である。対流形慣性力のｘ方向成分を f_{cx} とし、これに式(3.29)、(3.30)を代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{cx} &= \rho \left(\dot{u}\,\dot{u}_{,x} + \dot{v}\,\dot{u}_{,y} \right) \\ &= \rho \left(\dot{u} \left(N_{1,x} \dot{u}_1 + \cdots + N_{6,x} \dot{u}_6 \right) \right. \\ &\qquad \left. + \dot{v} \left(N_{1,y} \dot{u}_1 + \cdots + N_{6,y} \dot{u}_6 \right) \right) \\ &= \rho \left[\dot{u} N_{1,x} + \dot{v} N_{1,y} \quad 0 \quad \cdots \right. \\ &\qquad \left. \dot{u} N_{6,x} + \dot{v} N_{6,y} \quad 0 \right] [\dot{d}] , \end{aligned}$$

$$---(3.33)$$

$$[\dot{d}] = [\dot{u}_1 \ \dot{v}_1 \ \dot{u}_2 \ \dot{v}_2 \ \cdots \ \dot{u}_6 \ \dot{v}_6]^T \ , \quad --(3.34)$$

ここで $[\dot{d}]$ は速度ベクトルである。

同様に、y方向の成分 f_{cy} について実行すると、

$$\begin{aligned} f_{cy} &= \rho \left(\dot{u} \dot{v}_{,x} + \dot{v} \dot{v}_{,y} \right) \\ &= \rho \left(\dot{u} \left(N_{1,x} \dot{v}_1 + \cdots + N_{6,x} \dot{v}_6 \right) \right. \\ &\qquad \left. + \dot{v} \left(N_{1,y} \dot{v}_1 + \cdots + N_{6,y} \dot{v}_6 \right) \right) \\ &= \rho [\ 0 \quad \dot{u} N_{1,x} + \dot{v} N_{1,y} \quad \cdots \\ &\qquad 0 \quad \dot{u} N_{6,x} + \dot{v} N_{6,y} \ ] [\dot{d}] \ . \end{aligned}$$

$$---(3.35)$$

式(3.33)、(3.35)を式(3.3) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbb{f}_c &= [f_{cx} \ f_{cy}]^T \\ &= \rho [E_1] [\dot{d}] \end{aligned} \qquad ---(3.36)$$

$$[E_1] = \begin{bmatrix} \dot{u} N_{1,x} + \dot{v} N_{1,y} & 0 & \cdots \\ 0 & \dot{u} N_{1,x} + \dot{v} N_{1,y} & \cdots \\ \cdots \ \dot{u} N_{6,x} + \dot{v} N_{6,y} & 0 & \\ \cdots & 0 & \dot{u} N_{6,x} + \dot{v} N_{6,y} \end{bmatrix} .$$

$$---(3.37)$$

なお、$\mathbb{f}_c$ のマトリックス化の過程で、式(3.37)における速度 $\dot{u}$、$\dot{v}$ はマトリックスの内部に組み込まれる。すなわち、対流形慣性力を表わすマトリックスは速度項を含む。

式(3.21)と式(3.36)を乗ずると、δU_c は次のようになる。

$$\delta U_c = b \int_\Delta \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_c \, d\Delta$$

$$= b \int_\Delta [\delta d][A_1]^T \rho [E_1] d\Delta [\dot{d}]$$

$$= [\delta d] b \int_\Delta [A_1]^T \rho [E_1] d\Delta [\dot{d}]$$

$$= [\delta d][M_c][\dot{d}] \quad , \qquad ---(3.38)$$

$$[M_c] = b \int_\Delta [A_1]^T \rho [E_1] d\Delta \quad . \qquad ---(3.39)$$

ここで $[M_c]$ は対流形慣性力を表わす質量マトリックスを意味する。

3.4.3 粘性による仮想仕事の定式化

粘性による仮想仕事 δU_v は式(3.5)で表わされる。式(3.5)は仮想ひずみベクトル $\delta \varepsilon$ と粘性応力ベクトル σ の積で表わされるので、初めに、これらのベクトルをマトリックス表現する必要がある。

ひずみベクトルは、

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \quad , \qquad ---(3.40)$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad , \quad \varepsilon_y = v_{,y} \quad , \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad , \quad -(3.41)$$

である。式(3.41)を具体的に表現すると、

$$\varepsilon_x = N_{1,x} u_1 + N_{2,x} u_2 + \cdots + N_{6,x} u_6 \quad , \quad --(3.42)$$

$$\varepsilon_y = N_{1,y} v_1 + N_{2,y} v_2 + \cdots + N_{6,y} v_6 \quad , \quad --(3.43)$$

$$\gamma_{xy} = N_{1,y} u_1 + N_{2,y} u_2 + \cdots + N_{6,y} u_6$$

$$+ N_{1,x} v_1 + N_{2,x} v_2 + \cdots + N_{6,x} v_6 . \quad -(3.44)$$

式(3.42)～(3.44)を式(3.40)に代入すると、

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} [d]$$

$$= [B_1][d] \quad , \qquad \text{---(3.45)}$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} . \quad \text{-(3.46)}$$

式(3.45)を変分すると、

$$\delta \varepsilon = [\delta d][B_1]^T \quad . \qquad \text{---(3.47)}$$

一方、粘性応力ベクトルσは、

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \quad , \qquad \text{---(3.48)}$$

$$\sigma_x = 2\mu \dot{\varepsilon}_x \ , \quad \sigma_y = 2\mu \dot{\varepsilon}_y \ , \quad \tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}_{xy} \ , \quad \text{--(3.49)}$$

である。式(3.42)～(3.44)の時間微分を用いると、式(3.49)は、

$$\sigma_x = 2\mu \ (N_{1,x}\dot{u}_1 + \quad \cdots \quad + N_{6,x}\dot{u}_6) \ , \quad \text{--(3.50)}$$

$$\sigma_y = 2\mu \ (N_{1,y}\dot{v}_1 + \quad \cdots \quad + N_{6,y}\dot{v}_6) \ , \quad \text{--(3.51)}$$

$$\tau_{xy} = \mu \ (N_{1,y}\dot{u}_1 + \quad \cdots \quad + N_{6,y}\dot{u}_6)$$

$$+ \mu \ (N_{1,x}\dot{v}_1 + \quad \cdots \quad + N_{6,x}\dot{v}_6) \ , \quad \text{--(3.52)}$$

式(3.50)～(3.52)を式(3.48)に代入すると、

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix} [\dot{d}]$$

$$= [C][B_1][\dot{d}] \quad , \qquad \text{---(3.53)}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$= diag[\ 2\mu \quad 2\mu \quad \mu\ ] \quad . \qquad \text{---(3.54)}$$

ここで d i a g[ ] は対角行列を意味する。

以上のことより、δU_v は、

$$\delta U_v = b \int \delta \varepsilon \cdot \sigma \ d\Delta$$

$$= b \int_{\Delta} [\delta d][B_1]^T[C][B_1] d\Delta [\dot{d}]$$

$$= [\delta d] b \int_{\Delta} [B_1]^T[C][B_1] d\Delta [\dot{d}]$$

$$= [\delta d][K][\dot{d}] \quad , \qquad \text{---(3.55)}$$

$$[K] = b \int_{\Delta} [B_1]^T[C][B_1] d\Delta \quad . \qquad \text{---(3.56)}$$

ここで [K]は粘性を表わすマトリックスである。

3.4.4 圧力による仮想仕事の定式化

圧力による仮想仕事 δU_p は式(3.6) で表わされる。式(3.6) に

おいて、体積ひずみベクトルε_vは、

$$\varepsilon_v=[\ \varepsilon_v\ \ \varepsilon_v\ 0\ ]^T\quad , \qquad \text{-----(3.57)}$$

$$\varepsilon_v=(\varepsilon_x+\varepsilon_y)/2\quad . \qquad \text{-----(3.58)}$$

式(3.42)、(3.43)を用いて ε_vを表わすと、

$$\begin{aligned}\varepsilon_v=&(N_{1,x}u_1+\ \cdots\ +N_{6,x}u_6\\&+N_{1,y}v_1+\ \cdots\ +N_{6,y}v_6)/2\\=&0.5[\ N_{1,x}\ N_{1,y}\ \cdots\ N_{6,x}\ N_{6,y}\ ][d]\ .\end{aligned} \qquad \text{---(3.59)}$$

これを式(3.57)に代入すると、

$$\begin{aligned}\varepsilon_v=&0.5\begin{bmatrix}N_{1,x}&N_{1,y}&\cdots&N_{6,x}&N_{6,y}\\N_{1,x}&N_{1,y}&\cdots&N_{6,x}&N_{6,y}\\0&0&&0&0\end{bmatrix}[d]\\=&[D][d]\quad ,\end{aligned} \qquad \text{---(3.60)}$$

$$[D]=0.5\begin{bmatrix}N_{1,x}&N_{1,y}&\cdots&N_{6,x}&N_{6,y}\\N_{1,x}&N_{1,y}&\cdots&N_{6,x}&N_{6,y}\\0&0&&0&0\end{bmatrix}. \qquad \text{--(3.61)}$$

式(3.60)を変分すると、

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_v&=\delta\ ([D][d])\\&=[\delta\ d][D]^T\quad .\end{aligned} \qquad \text{---(3.62)}$$

一方、圧力ベクトル$\mathbb{P}$は、

$$\mathbb{P}=[\,p\quad p\quad 0\,]^{T}\quad , \qquad ---(3.63)$$

$$p=[H][p]\quad . \qquad ---(3.18)$$

式(3.18)を式(3.63)に代入すると、

$$\mathbb{P}=\begin{bmatrix}H\\H\\0\end{bmatrix}[p]$$

$$=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}[p]$$

$$=[H_p][p]\quad , \qquad ---(3.64)$$

$$[H_p]=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad . \qquad ---(3.65)$$

従って、δU_pは、

$$\delta U_p = b\int_{\Delta}\delta\varepsilon_v\cdot\mathbb{P}\;d\Delta$$

$$= b\int_{\Delta}[\delta d][D]^{T}[H_p]\,d\Delta[p]$$

$$= [\delta d][G][p]\quad , \qquad ---(3.66)$$

$$[G]=b\int_{\Delta}[D]^{T}[H_p]\,d\Delta\quad . \qquad ---(3.67)$$

ここで[Ｇ]は圧力成分を表わすマトリックスである。

3.4.5 外部仮想仕事の定式化

外力による仮想仕事δU_wは式(3.7)で表わされる。仮想変位ベクトル$\delta \mathbf{u}$は式(3.21)でマトリックス化されているので、δU_wは次のようになる。

$$\delta U_w = b \left(\int_\Delta \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_w \, d\Delta + \oint_\ell \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_1 \, dl \right)$$

$$= b \left(\int_\Delta [\delta d][A_1]^T \mathbf{f}_w \, d\Delta + \oint_\ell [\delta d][A_1]^T \mathbf{f}_1 \, dl \right)$$

$$= [\delta d] \left(b \left(\int_\Delta [A_1]^T \mathbf{f}_w \, d\Delta + \oint_\ell [A_1]^T \mathbf{f}_1 \, dl \right) \right) \quad . \qquad ---(3.68)$$

物体力ベクトル$\mathbf{f}_w$と表面力ベクトル$\mathbf{f}_1$が与えられているとすれば、上式は容易にマトリックス化できる。この場合、上式は最終的には次のような形になる。

$$\delta U_w = [\delta d][F] \quad , \qquad ---(3.69)$$

$$[F] = b \left(\int_\Delta [A_1]^T \mathbf{f}_w \, d\Delta + \oint_\ell [A_1]^T \mathbf{f}_1 \, dl \right) \quad . \qquad ---(3.70)$$

3.4.6 連続性の条件の定式化

式(3.8)のδU_gは流体の連続性を保つための条件である。　式(3.8)において、圧力ベクトル$\mathbb{P}$は、

$$\mathbb{P} = [H_p][p] \quad , \qquad \text{---(3.64)}$$

であるから、変分すると、次のようになる。

$$\delta \mathbb{P} = \delta ([H_p][p])$$
$$= [\delta p][H_p]^T \quad . \qquad \text{---(3.71)}$$

一方、体積ひずみ率ベクトル$\dot{\varepsilon}_v$はε_vの時間微分で表わされるので、式(3.60)より、

$$\dot{\varepsilon}_v = [D][\dot{d}] \quad . \qquad \text{---(3.72)}$$

従って、δU_gは次のようになる。

$$\delta U_g = b \int_\Delta \delta \mathbb{P} \cdot \dot{\varepsilon}_v \, d\Delta$$
$$= b \int_\Delta [\delta p][H_p]^T[D] d\Delta [\dot{d}] \quad . \qquad \text{---(3.73)}$$

上式において被積分項は、

$$[H_p]^T[D] = ([D]^T[H_p])^T \qquad \text{---(3.74)}$$

と書ける。これを式(3.73)に代入すると、次のようになる。

$$\delta U_g = b \int_\Delta [\delta p][H_p]^T[D] d\Delta [\dot{d}]$$
$$= b \int_\Delta [\delta p] ([D]^T[H_p])^T d\Delta [\dot{d}]$$
$$= b[\delta p] \int_\Delta ([D]^T[H_p])^T d\Delta [\dot{d}] \quad . \qquad \text{---(3.75)}$$

式(3.75)に式(3.67)を代入すると、

$$\delta U_g = [\delta p][G]^T[\dot{d}] \quad , \qquad ---(3.76)$$

となる。すなわち、連続性を保つための条件のマトリックスは圧力マトリックス[G]の転置形で表現される。ここで[δp]は仮想圧力ベクトルで、任意の値をとることができる。

3.4.7 有限要素方程式

3.4.1 節から3.4.6 節まで各種仮想仕事および連続の条件の定式化を行なった。これらを式(3.77)にまとめて示す。

$$\begin{aligned}
\delta U_a &= [\delta d][M][\ddot{d}] \ , & \delta U_c &= [\delta d][M_c][\dot{d}] \ , \\
\delta U_v &= [\delta d][K][\dot{d}] \ , & \delta U_p &= [\delta d][G][p] \ , \\
\delta U_w &= [\delta d][F] \ , & \delta U_g &= [\delta p][G]^T[\dot{d}] \ .
\end{aligned} \qquad ---(3.77)$$

$$\begin{aligned}
[M] &= b \int_\Delta [A_1]^T \rho [A_1] \, d\Delta \ , \\
[M_c] &= b \int_\Delta [A_1]^T \rho [E_1] \, d\Delta \ , \\
[K] &= b \int_\Delta [B_1]^T [C] [B_1] \, d\Delta \ , \\
[G] &= b \int_\Delta [D]^T [H_p] \, d\Delta \ , \\
[F] &= b \left(\int_\Delta [A_1]^T \mathbb{f}_w \, d\Delta + \oint_\ell [A_1]^T \mathbb{f}_1 \, d\ell \right) \ .
\end{aligned} \qquad ---(3.78)$$

式(3.78)の各マトリックスは形状関数および面積座標の積分として表わされる。これらの積分は式(2.14)の積分公式を用いる。

式(3.77)を(3.11)に代入すると、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_a + \delta U_c + \delta U_v - \delta U_p - \delta U_w) \, dt$$

$$= [\delta d] \int_{t1}^{t2} ([M][\ddot{d}] + ([K]+[M_c])[\dot{d}] - [G][p] - [F]) \, dt = 0 \quad , \qquad ---(3.79)$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g \, dt$$

$$= [\delta p] \int_{t1}^{t2} [G]^T [\dot{d}] \, dt = 0 \quad . \qquad ---(3.80)$$

既に述べたように、式(3.79)、(3.80)において、[δ d]と[δ p]は任意の値をとり得る。また、上の両式が恒等的に成立するためには、次式が必要になる。

$$[M][\ddot{d}] + ([K]+[M_c])[\dot{d}] - [G][p] - [F] = 0 \quad , \qquad ---(3.81)$$

$$[G]^T [\dot{d}] = 0 \quad . \qquad ---(3.82)$$

式(3.81)、(3.82)をまとめると、

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + M_c & -G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} . \quad --(3.83)$$

式(3.83)は1個の要素に関するマトリックス方程式である。上式を解析領域全体にわたって合成すれば、次のようになる。

$$\Sigma \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + M_c & -G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix} \right\} = \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} . \quad --(3.84)$$

ここでΣはマトリックス合成を意味する。

3．5　計算手順

3.5.1　定常流動

定常流動の場合、式(3.84)は次のようになる。

$$\Sigma \begin{bmatrix} K + M_c & -G \\ -G^T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} . \quad ----(3.85)$$

上式はδU_aを除いた式(3.77) を式(3.10)に代入すると得られる。$[M_c]$ は式(3.39)、(3.37)に示すように、速度項を含む非対称、非線形マトリックスである。従って式(3.85)は増分的な方法を用いて逐次、$[M_c]$ を修正しながら解く必要がある。ここではニュートン・ラフソン法（NR法）を用いる[119]。NR 法を用いると式(3.85)

の解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{h+1} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{h} - ([J]^{h})^{-1} [R]^{h} \quad , \qquad -----(3.86)$$

$$[J]^{h} = \Sigma \begin{bmatrix} M_c{}^{h} + M_a{}^{h} + K & -G \\ -G^{T} & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$[M_a] = b \int_{\Delta} [A_1]^{T} \rho [E_a] d\Delta \, ,$$

$$[E_a] = \begin{bmatrix} N_1 \dot{u}_{,x} & N_1 \dot{u}_{,y} \cdots & N_6 \dot{u}_{,x} & N_6 \dot{u}_{,y} \\ N_1 \dot{v}_{,x} & N_1 \dot{v}_{,y} \cdots & N_6 \dot{v}_{,x} & N_6 \dot{v}_{,y} \end{bmatrix} ,$$

$$[R]^{h} = \Sigma \begin{bmatrix} M_c{}^{h} + K & -G \\ -G^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{h} - \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}^{h} , \quad ---(3.87)$$

ここでhは繰り返し演算回数で、$( )^{-1}$ は逆マトリックスを意味する。式(3.85)の出発値は式(3.9) から得られる次のクリープ流れの式

$$\Sigma \begin{bmatrix} K & -G \\ -G^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} , \quad --------(3.88)$$

の解を採用する。以後、式(3.87)の各マトリックスを再構成して式(3.85)を解き、解が収束するまで演算を続行する。収束条件を次のように設定する。

$$\left| \left(\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{h+1} - \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{h} \right) / \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{h+1} \right| \leqq 0.01 \quad . \qquad -----(3.89)$$

3.5.2　非定常流動

式(3.84)においてベクトル[$\dot{p}$]の係数は[0]であるため、左辺第1項の逆マトリックスは求められない。そこで次のように式(3.84)を速度と圧力の連立一次式に変換する。加速度ベクトル[$\ddot{d}$]、圧力の時間ベクトル[$\dot{p}$]に前進時間差分を採用すると、次式が得られる。

$$[\ddot{d}] = ([\dot{d}]_{m+1} - [\dot{d}]_m) / \Delta t$$

$$[\dot{p}] = ([p]_{m+1} - [p]_m) / \Delta t \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots(3.90)$$

ここでΔtは時分割、mは自然数で時刻を表わす。また時刻に関するパラメータをαとすると、m+1とmの間に次の関係式が成立する。

$$\dot{d} = (1-\alpha)\,\dot{d}_{m+1} + \alpha\,\dot{d}_m \quad ,$$

$$p = (1-\alpha)\,p_{m+1} + \alpha\,p_m \quad . \qquad \cdots\cdots\cdots(3.91)$$

$\alpha=0$、0.5はImplicit法、$\alpha=1$はExplicit法に相当する。式(3.90)、(3.91)を式(3.84)に代入すると次式が得られる。

$$\Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t + (1-\alpha)(K+M_{c\ m+1}) & (1-\alpha)G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_{m+1}$$

$$= \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t - \alpha(K+M_{c\ m}) & \alpha G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_m \quad ,$$

$\cdots(3.92)$

ここでｒは時刻 ｍ＋１ における繰り返し演算回数である。

定常流動の解法と同様に NR 法を採用すると、式(3.92)の解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r+1}_{m+1} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r}_{m+1} - ([J_t]^r_{m+1})^{-1}[R_t]^r \quad , \qquad ---(3.93)$$

ここで

$$[R_t]^r = \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t+(1-\alpha)(K+M_c{}^r{}_{m+1}) & -(1-\alpha)G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^r_{m+1}$$

$$- \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t-\alpha(K+M_{c\ m}) & \alpha G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_m$$

$$[J_t]^r_{m+1} = \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t+(1-\alpha)(M_c{}^r{}_{m+1}+M_a{}^r{}_{m+1}) & -(1-\alpha)G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} .$$

$$-------(3.94)$$

初期値は式(3.85)の収束解を採用する。式(3.94)の右辺 $[M_c]$、$[M_a]$ は速度項を含むため、任意の時刻 m+1 において両マトリックスを逐次修正し、次の収束条件を満たすまで演算を続行する。

$$\left| \left(\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r+1} - \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r} \right) / \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r+1} \right| \leqq 0.01 \quad .$$

$$-----(3.95)$$

収束解が得られた後に時刻をΔｔ進行させる。以後この手順を繰り返し、時刻 m+1 と m における速度、圧力の値が収束するまで演算を続行する。時間に関する収束条件を次のように設定する。

$$\left| \left(\left[\dot{d} \right]_{p}^{m+1} - \left[\dot{d} \right]_{p}^{m} \right) / \left[\dot{d} \right]_{p}^{m+1} \right| \leqq 0.01 \quad . \qquad \text{------(3.96)}$$

３．６　段付き流路内流れの数値解析

3.6.1　解析モデル

緒言で述べたように、Kawahara らの段付き流路モデル[16]を図3.3 に示す。解析条件を文献(16)と同じとし、次のように設定する。流体は左端より放物状の速度分布で流入し、右端から流出する。

Ｒｅ＝0、200、240 の定常流を計算する。

Ｒｅ数はＲｅ＝$\dot{U}_{in}$・Ｌ／ν　（$\dot{U}_{in}$：流入端の最大速度、Ｌ：流入端の流路幅　１ｃｍ　、ν：動粘性係数　１ｃｍ^2／ｓ）と定義する。非定常流については、Ｒｅ＝200 の収束値を初期条件とし、Ｒｅ＝240 に至るまでの過渡状態を計算する。計算に用いた物性値は　ρ＝１ｇ／ｃｍ^3，μ＝1／98 Ｐａ・ｓ である。境界条件は、

流入端　：　速度入力，

壁　面　：　$\dot{u} = \dot{v} = 0$　ｃｍ／ｓ，

流出端　：　$(\sigma - P)_{,n} = 0$，

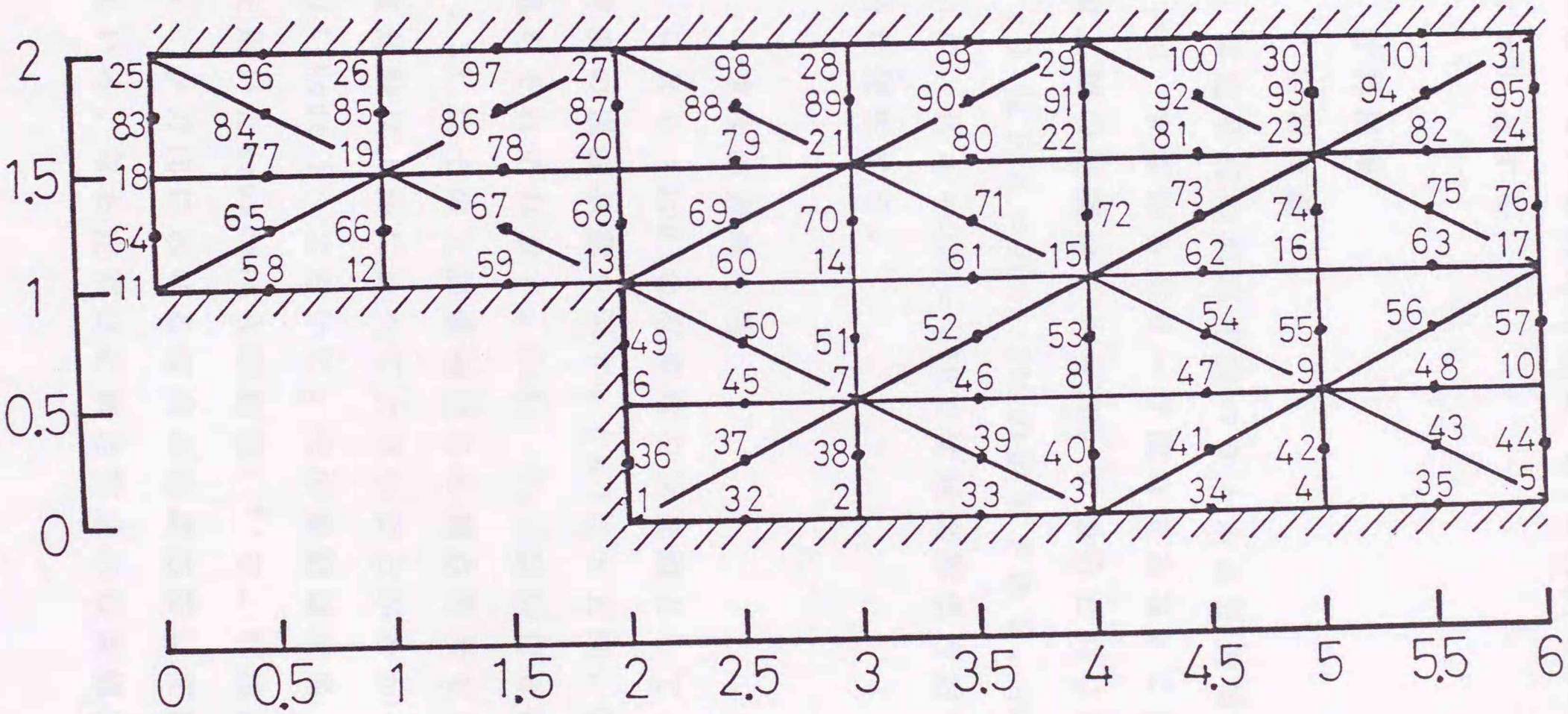


図３．３　解析モデル

ここでｎは流出端に対して法線方向、（），ｎ　はｎに関する微分を意味する。圧力の境界条件は自然境界条件とし、全三角形要素の頂点で未知とする。なお時分割は　Δｔ＝0.01ｓ、時間に関するパラメータはα＝0 とする。

3.6.2　計算結果

3.6.2.1　定常流動

図3.4 は定常流の節点速度ベクトルと圧力値である。図3.4（ａ）は　Ｒｅ＝0　すなわちクリープ流れである。これは式(3.88)の解であり、流入端の速度はＲｅ＝200 の場合と同じに設定した。図3.4（ｂ）、（ｃ）はＲｅ＝200、240の結果である。Ｒｅ＝０　では渦が見られないが、Ｒｅ＝200、240では対流形慣性力の影響で段付き部において渦が発生する。

3.6.2.2　速度の過渡応答

図3.5 にＲｅ＝200 の収束解を出発値として、Ｒｅ＝240 に至るまでの速度の過渡状態を示す。（ａ）はｘ方向、（ｂ）はｙ方向速度の過渡状態をそれぞれ示す。Node　7、9は段付き流路の下部領域、Node 21、23 はその上部領域にある節点番号である。流路下部における速度変動は上部に比べて大きいことがわかる。特にモデルの流出端に近いNode 9　において、その変動は大きく収束が遅い。実線はMWR を用いたKawaharaらの結果[16]で、解法には摂動法を用いている。ｘ、ｙ方向における速度の過渡応答は文献(16)の結果と良く一致している。なお定常法と非定常法の収束値は一致した。

3.6.2.3　圧力の過渡応答

図3.6 に圧力の過渡応答を示す。流入速度がt = Δt でステップ状に増加した場合、圧力の初期変動は弾性波的な振舞いをすることがわかる。なおＲｅ＝200 から240 に至るまでの圧力の過渡応答およびＲｅ＝0 と200 における定常解の圧力値は文献(16)に記載されていない。しかし図3.4(ｃ) に示したように、三角形要素の各頂点における圧力値はＲｅ＝240 において( ) 内に示したKawaharaらの解と非常に良く一致している。従って図3.6 に示す圧力の過渡応答は正しいといえる。

以上のことから、粘性流動の解析に仮想仕事の原理を適用することができる。

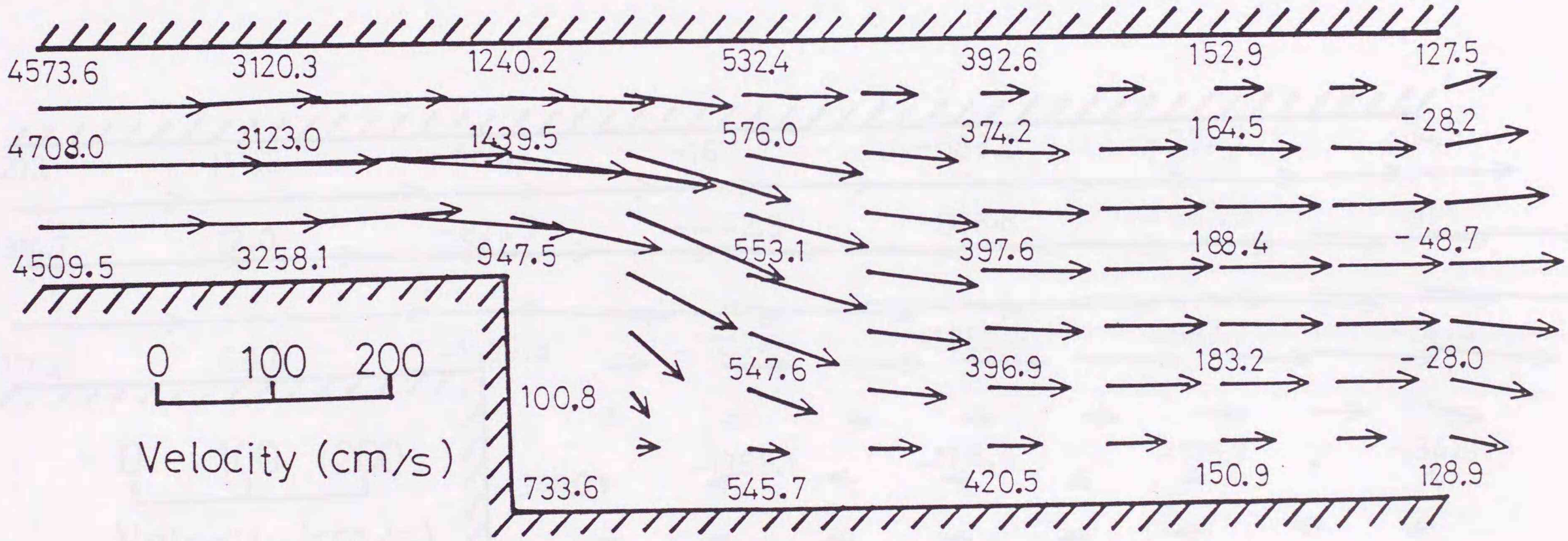


図３．４　（ａ）　Ｒｅ＝０（数字は圧力値）

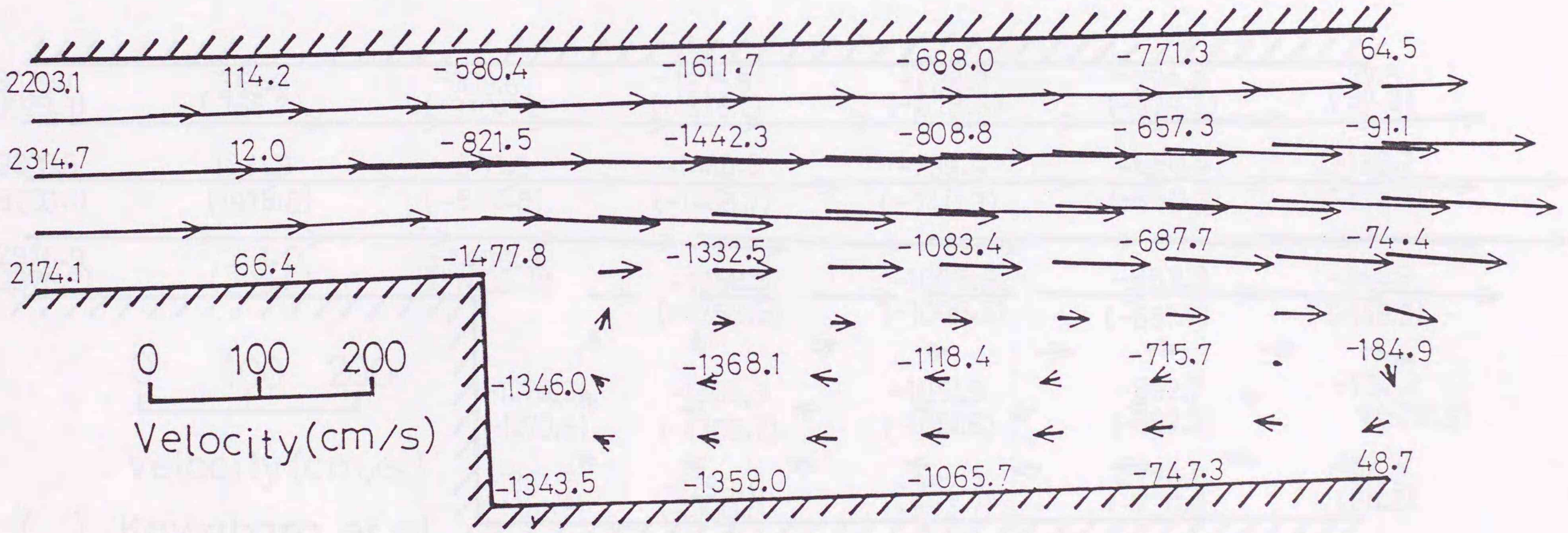


図３．４　（ｂ）　Ｒｅ＝２００（数字は圧力値）

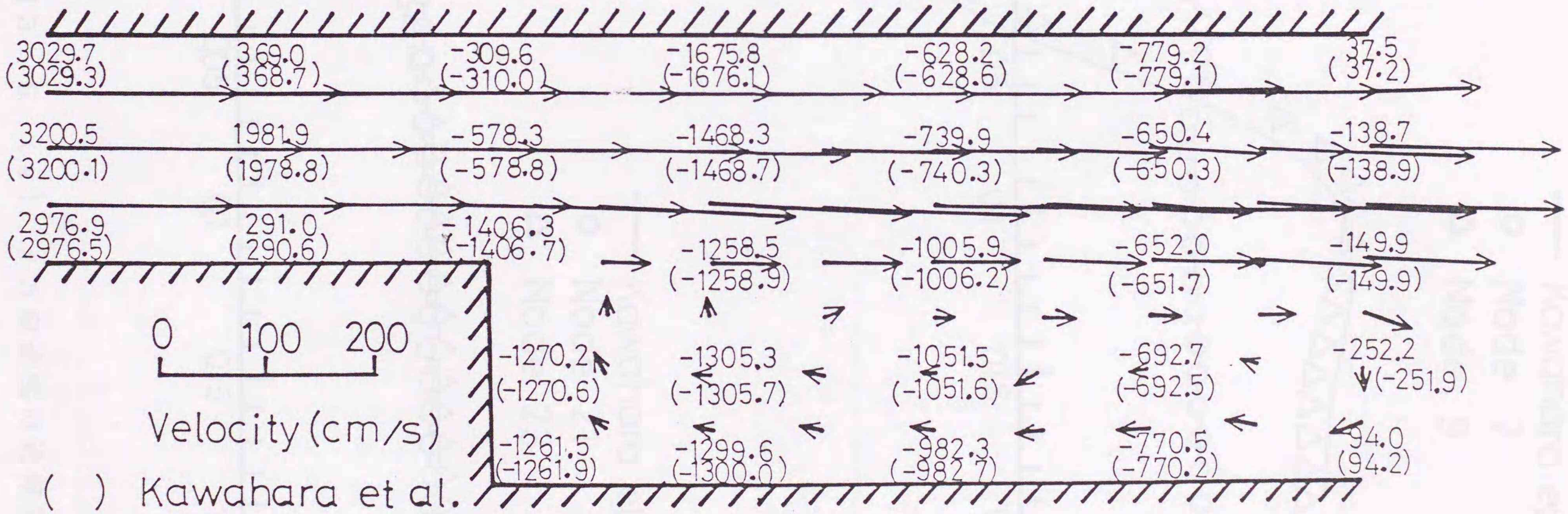
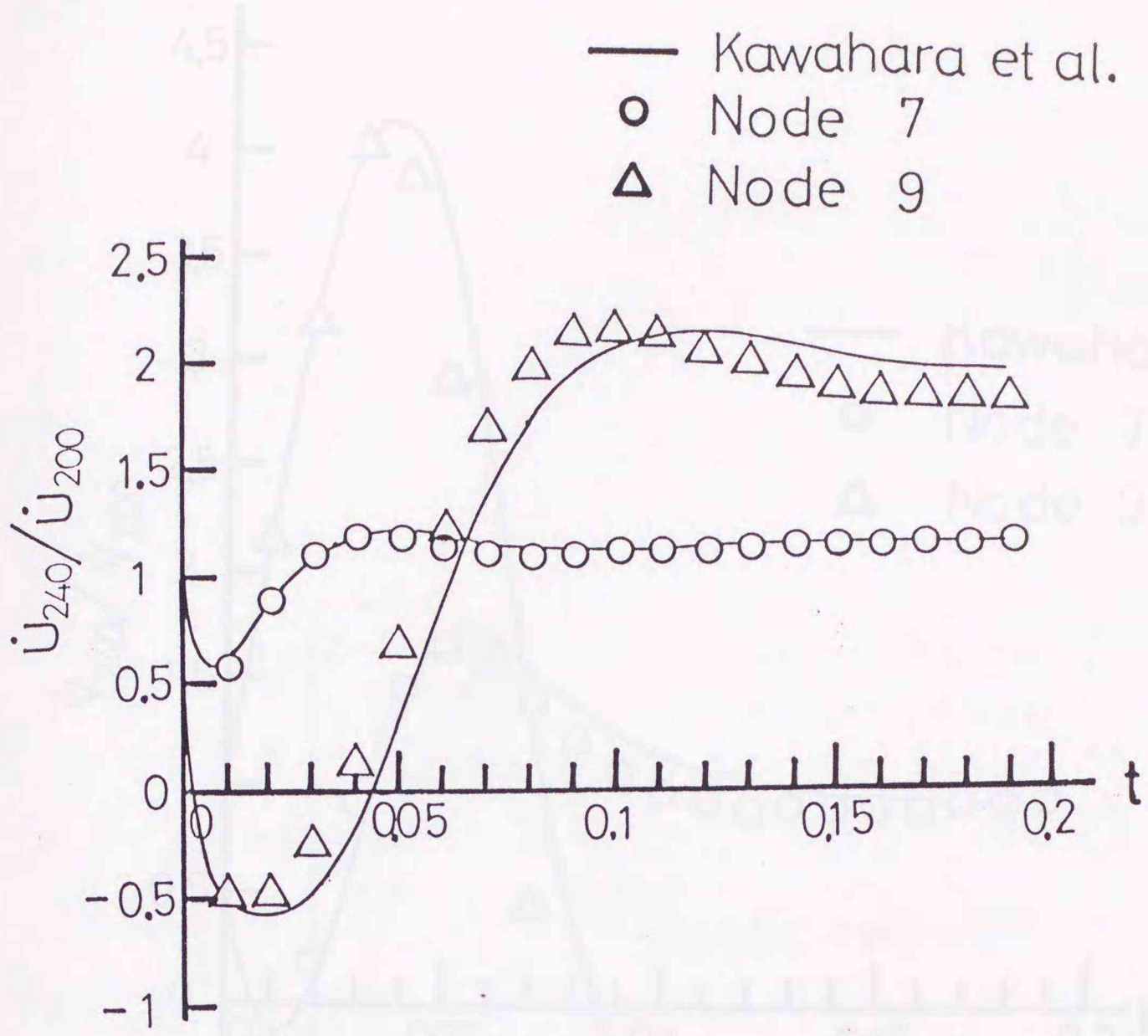


図３．４　（ｃ）　Ｒｅ＝２４０（数字は圧力値）



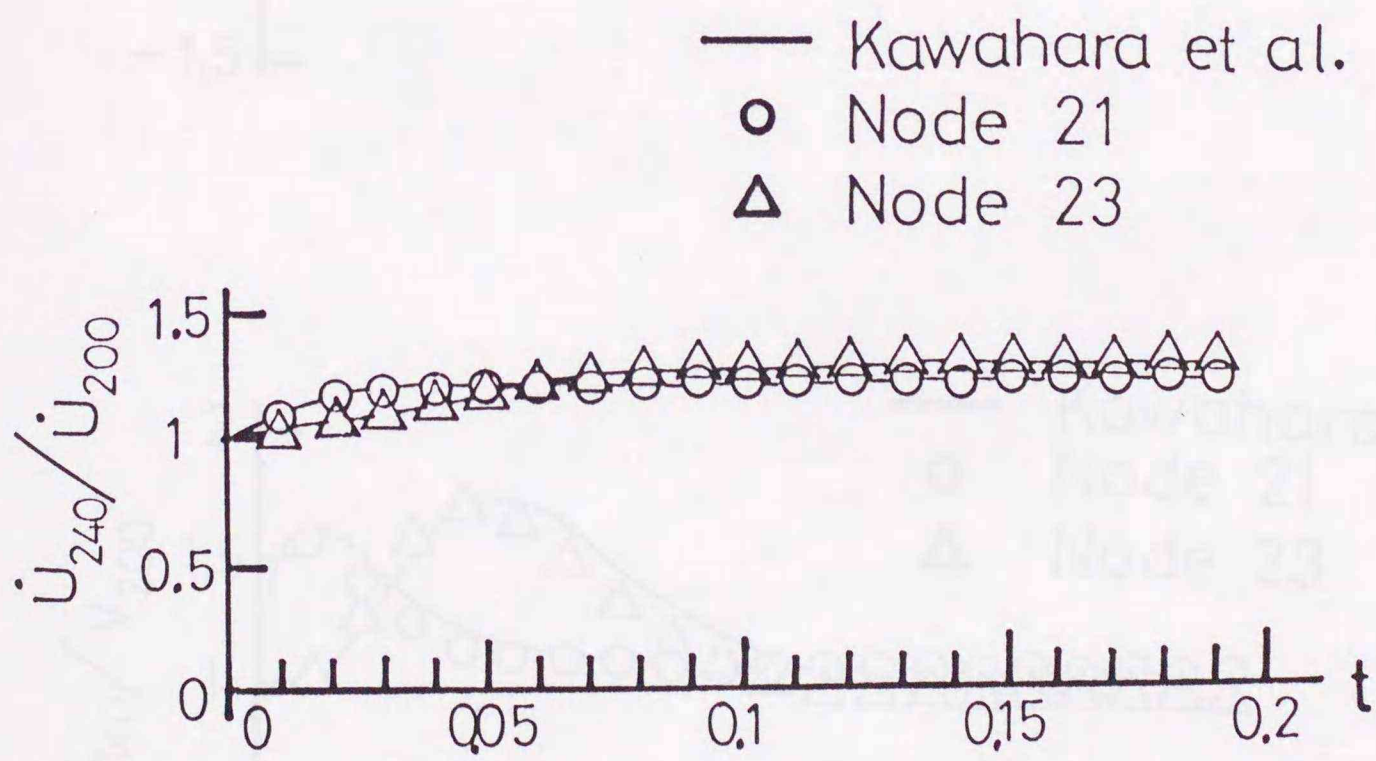
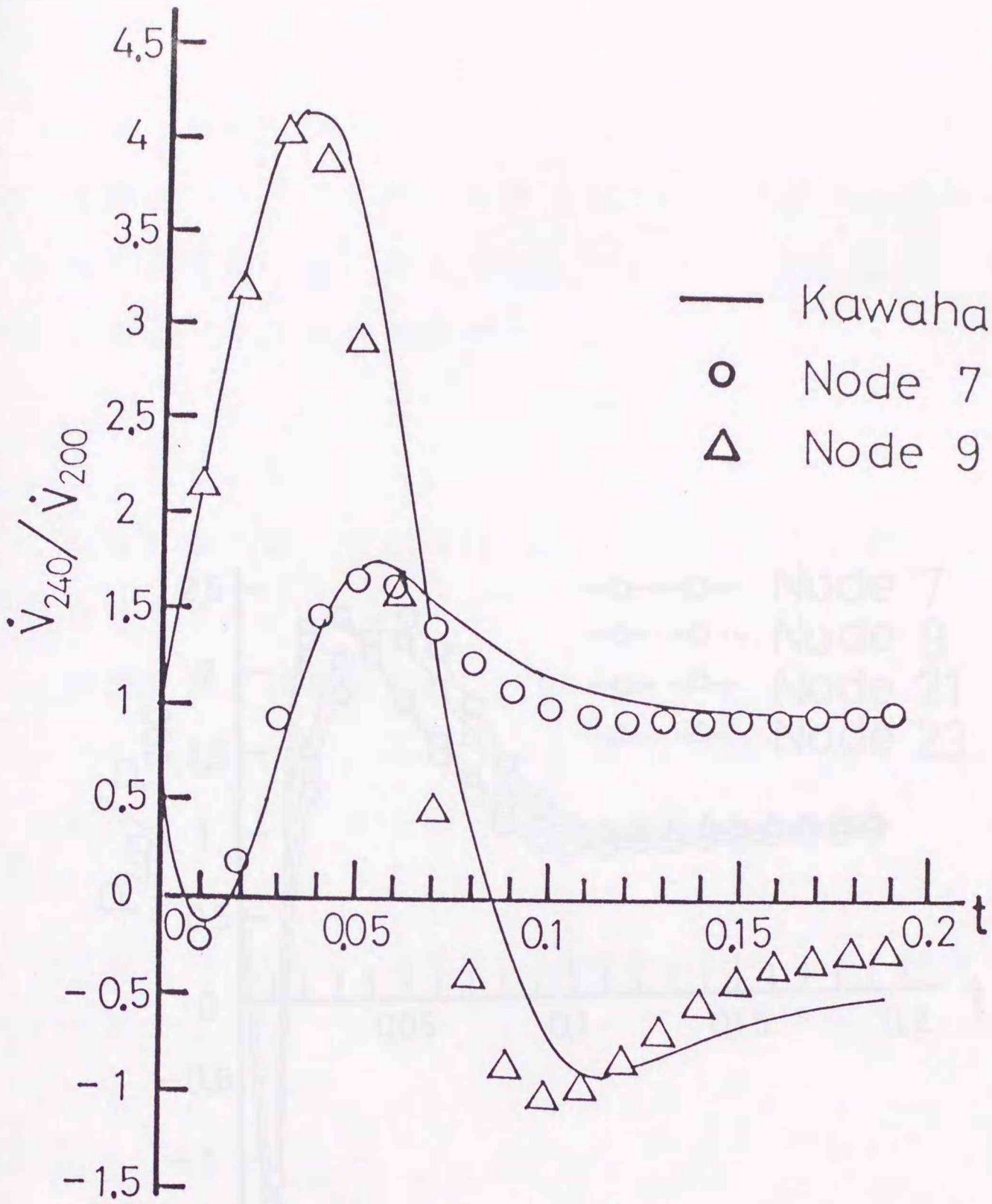


図３．５　（ａ）　ｘ方向速度の過渡状態



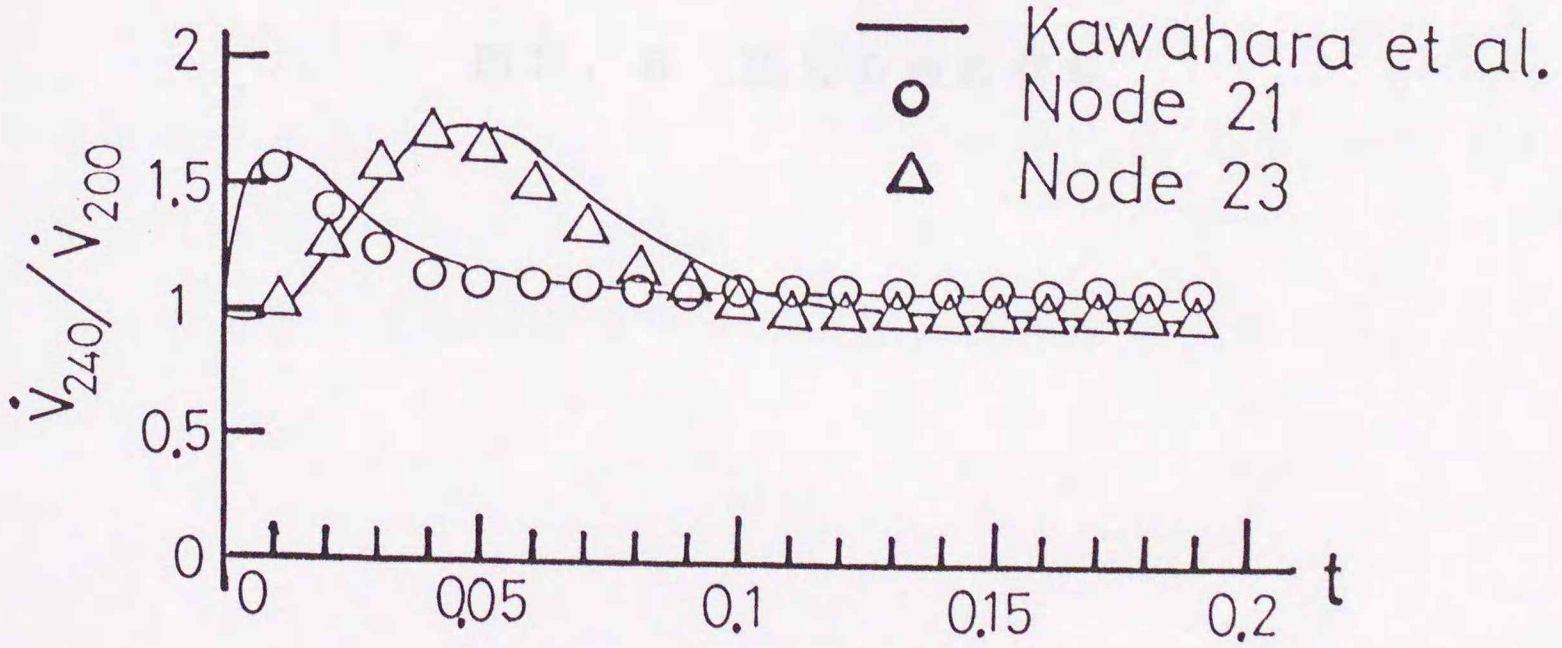


図３．５（ｂ）　ｙ方向速度の過渡状態

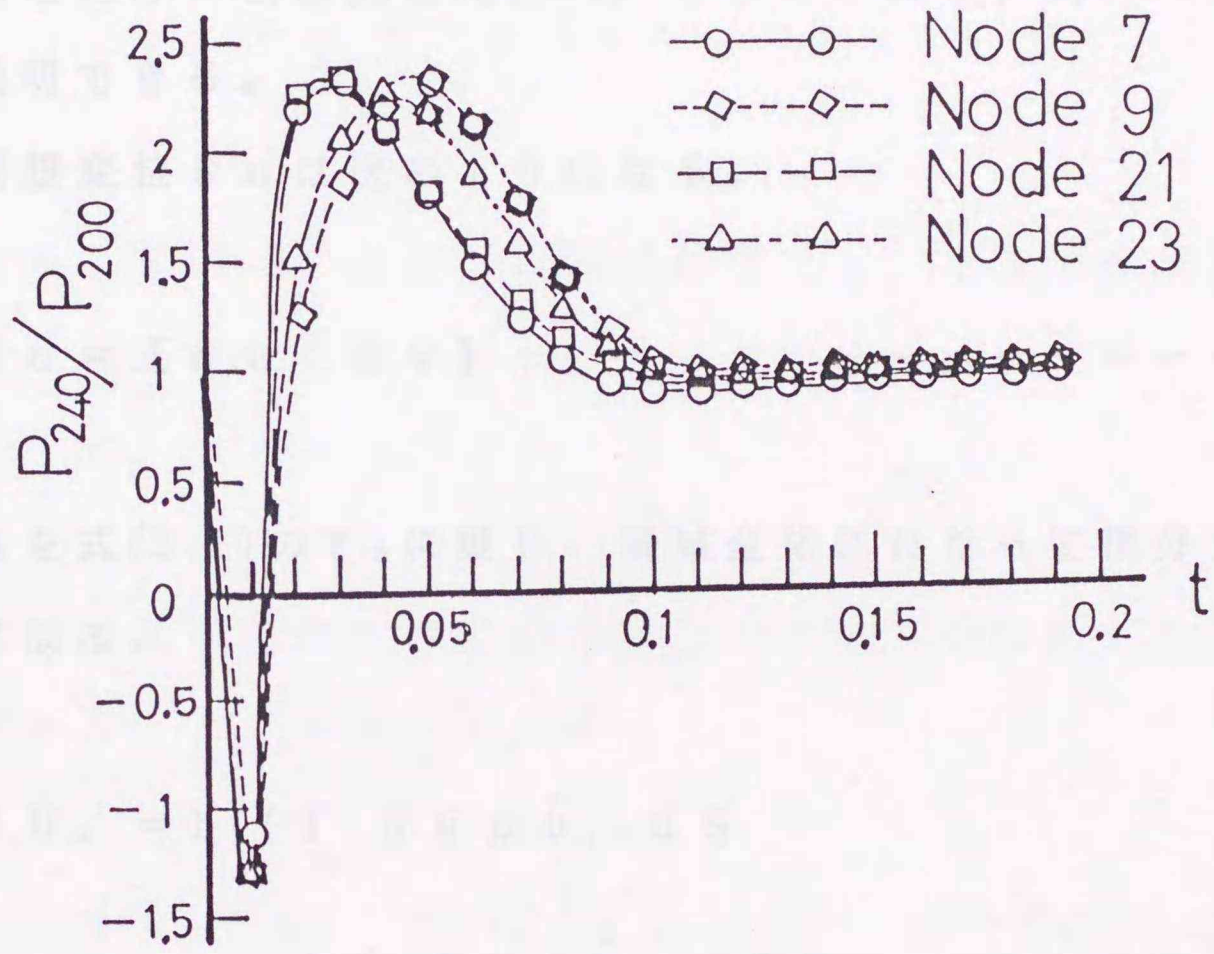

Node 7
Node 9
Node 21
Node 23
P_{240}/P_{200}
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0.05
0.1
0.15
0.2
t

図３．６　圧力の過渡状態

３．７　考察

定常および非定常粘性流動に関する計算結果の考察は3.6.2 節で述べた。本節では、緒言で述べたように、仮想仕事の原理からナビエ・ストークスの式を誘導する。

（ａ）　δU_a について

加速度形の慣性力は式(3.1) で与えられる。式(3.2) は次のように説明できる。

仮想変位 $\delta \mathbb{u}$ は次のようになる。

$$\delta \mathbb{u} = [\delta u \quad \delta v] , \qquad ----------(3.97)$$

これを式(3.1)の $\mathbb{f}_a$ に乗じ、領域全体にわたって積分すれば次のようになる。

$$\delta U_a = b \{ \int_S \delta u \rho \dot{u}_{,t} dS + \int_S \delta v \rho \dot{v}_{,t} dS \} . \qquad ----------(3.98)$$

式(3.98)はそれぞれｘ、ｙ方向の加速度形慣性力がなした仮想仕事の和である。このことから、δU_a は単に式(3.1) に各方向の仮想変位を乗じたものであることがわかる。ここで δu、δv は領域全体にわたって任意の値をとることができる仮想の変位である。

（b） δU_c について

対流形の慣性力は式(3.3) で与えられる。式(3.4) は次のように説明できる。

式(3.97)を式(3.3) の $\mathbf{f}_c$ に乗じ、領域全体にわたって積分すれば、

$$\delta U_c = b \{ \int_S \delta u \rho (\dot{u} \dot{u}_{,x} + \dot{v} \dot{u}_{,y}) dS$$

$$+ \int_S \delta v \rho (\dot{u} \dot{v}_{,x} + \dot{v} \dot{v}_{,y}) dS \} , \quad --(3.99)$$

となる。式(3.99)は式(3.98)と同様にx，y方向の仮想変位と対流形慣性力を乗じた仮想仕事の和になる。

（c） δU_v について

粘性流体中にはたらく粘性応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ は3.3.3 節で述べた通りである。ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ は

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T , \quad --------(3.100)$$

であるから変分すると、仮想ひずみベクトル $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ は

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = [\delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \gamma_{xy}] , \quad --------(3.101)$$

となる。この $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ に $\boldsymbol{\sigma}$ を乗じ、領域全体にわたって積分すれば、

$$\delta U_v = b \int_S \delta \varepsilon \cdot \sigma \, dS$$

$$= b \int_S (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) \, dS ,$$

$$---(3.102)$$

となる。式(3.102) の第1項を部分積分すると、

$$\int_S \delta \varepsilon_x \sigma_x dS = \int_S \delta (u_{,x}) \sigma_x dS$$

$$= - \int_S (\sigma_{x,x}) \delta u \, dS + \oint_l \sigma_x \delta u \, dy .$$

$$-------(3.103)$$

同様に第2、3項を部分積分すると、

$$\int_S \delta \varepsilon_y \sigma_y dS = - \int_S (\sigma_{y,y}) \delta v \, dS + \oint_l \sigma_y \delta v \, dx ,$$

$$\int_S \delta \gamma_{xy} \tau_{xy} dS = - \int_S (\tau_{xy,x}) \delta v \, dS + \oint_l \tau_{xy} \delta v \, dy$$

$$- \int_S (\tau_{xy,y}) \delta u \, dS + \oint_l \tau_{xy} \delta u \, dx ,$$

$$----(3.104)$$

となる。式(3.103)～(3.104)において $\oint_l$ は領域の表面積分を表わす。この表面領域において変位は存在しないため、

$$\oint_l \sigma_x \delta u \, dy = 0 , \quad \oint_l \sigma_y \delta v \, dx = 0 ,$$

$$\oint_l \tau_{xy} \delta v \, dy = 0 , \quad \oint_l \tau_{xy} \delta u \, dx = 0 , \quad --(3.105)$$

である。従って式(3.102) は次のようになる。

$$\delta U_v = b \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dS$$

$$= - b \{ \int_S ((\sigma_{x,x}) + (\tau_{xy,y})) \delta u \, dS \}$$

$$- b \{ \int_S ((\tau_{xy,x}) + (\sigma_{y,y})) \delta v \, dS \} .$$

$$------(3.106)$$

ここで

$$((\sigma_{x,x}) + (\tau_{xy,y})) , \quad ((\tau_{xy,x}) + (\sigma_{y,y})) ,$$

$$------(3.107)$$

はそれぞれx、y方向の粘性力を意味する。

(d) δU_p について

$\mathbb{P}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ は3.3.4 節で述べた通りである。(c)と同様に行なうと、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = [\varepsilon_v \quad \varepsilon_v \quad 0]^T , \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v = [\delta \varepsilon_v \quad \delta \varepsilon_v \quad 0] ,$$

$$\int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}_v \cdot \mathbb{P} \, dS = \int_S (\delta \varepsilon_x + \delta \varepsilon_y) \, p \, dS$$

$$= - \{ \int_S (p_{,x} \delta u + p_{,y} \delta v) \, dS \}$$

$$+ \{ \oint_l (p \, \delta u \, dy + p \, \delta v \, dx) \} ,$$

$$------(3.108)$$

となる。表面境界上では　$\delta u = 0$、$\delta v = 0$　とおけるから、

$$\delta U_p = b \int_S \delta \varepsilon_v \cdot P \, dS$$

$$= - b \int_S (p_{,x} \delta u + p_{,y} \delta v) \, dS ,$$

$$\text{------(3.109)}$$

となる。ここで$p_{,x}$、$p_{,y}$はそれぞれx、y方向の圧力による力成分である。

(e)　δU_wについて

物体力ならびに表面力は3.3.5 節で与えられている。(a)と同様に各方向の仮想変位を乗じると、δU_w が得られる。

以上のことを式(3.11)に代入すれば、結局次の式が得られる。

$$\int_S \delta u \{ \rho \dot{u}_{,t} + \rho (\dot{u} \dot{u}_{,x} + \dot{v} \dot{u}_{,y})$$

$$- (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) + p_{,x} - F_x \} \, dS = 0 ,$$

$$\text{------(3.110)}$$

$$\int_S \delta v \{ \rho \dot{v}_{,t} + \rho (\dot{u} \dot{v}_{,x} + \dot{v} \dot{v}_{,y})$$

$$- (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) + p_{,y} - F_y \} \, dS = 0 ,$$

$$\text{------(3.111)}$$

ここで F_x、F_y はそれぞれx、y方向の外力を意味する。　式(3.110)、(3.111) に3.3.3 節で記した応力を代入すると、δu と δv は任意の値であるから、次の粘性流動におけるナビエ・ストークスの式が得られる。

$$\rho \dot{u}_{,t} + \rho (\dot{u} \dot{u}_{,x} + \dot{v} \dot{u}_{,y})$$
$$= \mu (\dot{u}_{,xx} + \dot{u}_{,yy}) - p_{,x} + F_x \quad , \quad ---(3.112)$$

$$\rho \dot{v}_{,t} + \rho (\dot{u} \dot{v}_{,x} + \dot{v} \dot{v}_{,y})$$
$$= \mu (\dot{v}_{,xx} + \dot{v}_{,yy}) - p_{,y} + F_y \quad . \quad ----(3.113)$$

以上のように、仮想仕事の原理からナビエ・ストークスの式が誘導できる。

３．８　結言

本章では次の結論を得た。

(1). 粘性流動を解析するための代表的な理論の概要と特徴について考察した。

(2). 流れ場の解析にNSとECを用いずに、仮想仕事の原理に基づく解析理論を提案した。

(3). 提案した原理に基づいて、粘性流動解析のための有限要素法を定式化した。

(4). 本解析法を検証するために、２次元段付き流路内の非定常粘性流動についてFEM 解析し、Kawaharaらの重み付き残差法によるFEM 解[16]と比較した。その結果、速度と圧力の過渡状態および収束値は良く一致することが確かめられた。また非定常法と定常法の解が一致した。従って、提案した仮想仕事の原理は粘性流体に適用できることが判明した。

(5). 粘性流体のための仮想仕事の原理から NS が誘導できることを示した。

第４章
浮力の影響を考慮した熱流体のための変分原理と有限要素法

熱流体の挙動解析において、基本となる粘性流体の流れ解析に必要な変分原理を第３章で述べた。本章では前述の変分原理に熱的効果を考慮した熱流体のための変分原理を提案し、その妥当性を検証する。

4．1　緒言

浮力の影響をうける流れ場は、自然現象や工業装置にしばしば見られるものであり、工学的にも興味ある系である。そして、そのような場の解析には、表4.1 に示されるように、数種の方法が提案され、検討がなされてきた。表4.1 については研究課題を明確にするために、次章で検討する。

本章では、熱流体のための変分原理を提案する。引き続いて、本原理の妥当性を検証するために、２次元キャビティ内の強制対流について有限要素解析し、Torranceらの差分法による解[7]、松田の重み付き残差法(MWR) による有限要素解[17]　と比較する。また、２次元密閉容器内の自然対流の数値計算を行ない、Wilkesら[6]、Pepperら[10]の差分解と比較する。さらに、本原理に基づいた有限要素法を用いると、流体の物性値の温度依存性を考慮した解析ができる。物性値の温度依存性を２次元キャビティ内の強制対流を例にとって考える。

なお流れを考慮した温度場解析のための変分原理から熱エネルギ式(TE)が誘導できるので、考察に示す。

4．2　問題の提示

4.2.1　浮力の影響をうける流れ場を解析する代表的な理論の概要と特徴

表4.1 に浮力の影響をうける粘性流体の流れ場解析のための代表的な理論と解析方法を示す。

最も一般的に用いられる理論は、浮力を考慮したNSとECおよびTE

表４．１　熱流体の挙動を解析する代表的な理論と解析方法

理論		NS, EC & TE		エネルギ保存則	熱流体のための変分原理
解析方法		ＦＤＭ	FEM(MWR)	ＦＥＭ	ＦＥＭ
流動状態	定常流れ	Nallasamyら[1] Jaluria[2-4]	Gallagher[12] Gallagher[13] Marshallら[14] 池川[15]	Oden[28] Zienkiewicz[29] Zienkiewicz[30]	亀ケ谷ら[32-34]
	非定常流れ（層流）	Hellumsら[5] Wilkesら[6] Torranceら[7] Chuら[8] Pepperら[9,10] Soundal-gekarら[11]	Kawaharaら[16] 松田[17] 武田ら[18] 小林[19]	Oden[28] Zienkiewicz[29] Zienkiewicz[30]	亀ケ谷ら[32-34]

NS : Navier Stokes Equation.

EC : Equation of Continuity.

TE : Equation of Thermal Energy for Fluid.

を用いる理論である。この理論の解析方法として、基礎式をそのまま解く FDM[1-11]と、基礎式に重みをつけて解く MWR[12-27] がある。MWR はFEM を用いる解析方法である。この理論の特徴は力の釣りあい式と熱エネルギの平衡式を基礎式に用いていることである。従って、これらの式が成立する現象は FDM または FEM(MWR) で解析できる。ところが、流れ場が固体と連成したり、化学反応や燃焼を伴ったりすると、現象を支配する基礎式を正確に表現することが難しくなる。このような場合、基礎式を用いる理論は適用不可能になる。NSとECおよびTEを用いた解析例は非常に多い。表4.1 に示した文献はそのうちの代表例である。なお、文献(20)～(27)はペナルティ法を用いた論文である。ペナルティ法はペナルティ（処罰）係数をECに乗じて、圧力を表現する。これにより、連続の式が不要なり、熱流体の能率的な解析が可能になる。しかし、非圧縮性の条件が緩和されるので、解析精度は落ちる。

エネルギ保存則は一般に固体力学の分野で用いられている。解析方法はFEM である。Oden[28]、Zienkiewicz[29,30]はこのエネルギ保存則を粘性流体の流れ解析に適用している。この理論の特徴は流れ場をエネルギ系で扱うため、保存系に限られるが、固体と流体との連成挙動を扱うことができる。しかし定式化の方法は各種エネルギのマトリックスを構成した後に変分するので、遠心成分やコリオリ成分を導入することができない[31]。文献(28)～(30) では、浮力による仕事を導入してエネルギ保存則を成立させている。なお、温度場の解析にはTEに重みをつけたMWR を採用している。

表4.1 に示す熱流体のための変分原理は著者が提案している理論である[32-34]。解析方法はFEM である。この理論の特徴は流れ場

の解析に浮力を考慮した仮想仕事の原理、温度場の解析に変分原理を用いていることである。仮想仕事の原理は解析対象に応じて各種仮想仕事を取捨選択できるので、非線形成分を含む系や非保存系に適用できる。また、この原理は固体と流体のどちらにも適用できる。従って、固体と流体が連成する場の解析に適用可能である。温度場解析のための変分原理は仮想仕事の原理と同様に、解析対象に応じて各種の熱エネルギを取捨選択できる。従って、粘性摩擦などによって失われる散逸エネルギ成分も導入が可能である[32]。また、この温度場解析のための変分原理を用いると、固体と流体との熱連成場の解析が容易になる[71,72]。さらに、本原理はNS、EC、TEなどの基礎式を用いていない。従って、基礎式が不明な現象でも、エネルギ形態が明確になれば、解析可能となる特徴をもっている。

以上のように、浮力の影響をうける粘性流体の流れ場を解析する理論はそれぞれ特徴をもっている。本章では、文献(32)～(34)に基づいて、流体のみならず固体との連成問題にも適用可能な理論である熱流体のための変分原理を述べる。

4.2.2 研究課題の明示

藤野[120]は固体内の温度場を解析する変分原理を概説している。しかし、熱対流などの非線形成分を含めた変分原理は著者らの報告以外に見当たらない。

本章では、初めに浮力の影響をうける流れ場解析のための仮想仕事の原理と、流れを考慮した温度場解析のための変分原理を述べる。引き続いて、これらの変分原理を結合して、熱流体のための変分原理を構築する。次に、これらの原理に基づいて、浮力の影響をうけ

る熱流体のための有限要素解析法を述べる。最後に、本原理の妥当性を確認するために、本有限要素法をキャビティ内の強制対流と密閉容器内の自然対流に適用する。さらに、本有限要素法が物性値の温度依存性を考慮した流れ場にも適用できることを示す。

4．3　浮力を考慮した熱流体のための変分原理

取り扱いを簡単にするため、本章では2次元問題に限定する。

4.3.1　浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理

4.3.1.1　浮力による仮想仕事

流体内に温度差があると、密度差による浮力ベクトル$\mathbf{f}_b$が生じる。浮力は重力と逆方向に作用するので、次のように表わされる。

$$\mathbf{f}_b = -\rho g \beta [0 \quad (\Theta - \Theta_\infty)]^T \quad , \qquad -----(4.1)$$

ここでρ、βは流体の密度と熱膨張係数（体膨張係数）、gは重力の加速度、Θは流体の温度である。Θ_∞は充分遠方の温度で、本章では一定と仮定する。$[\,]^T$は転置行列を意味する。

浮力による仮想仕事δU_bは$\mathbf{f}_b$と仮想変位ベクトル$\delta \mathbf{u}$の積で次のようになる。

$$\delta U_b = b \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_b \, dS$$

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u \quad \delta v] \quad , \qquad ---------(4.2)$$

ここでδｕ、δｖはｘ、ｙ方向の仮想変位、ｂは厚さ、Ｓは積分領域、δは変分演算子である。

4.3.1.2　その他の仮想仕事

粘性流体が流動中になされる仮想仕事はδＵｂの他に加速度形慣性力、対流形慣性力、粘性、圧力ならびに外力などによるものがある。これらをδＵａ、δＵｃ、δＵｖ、δＵｐならびにδＵｗとすれば、これらは次のように表わされる。誘導は第３章で述べてあるので、ここでは割愛し、結果のみを記する。なおδＵｇは流体の連続性を表わす条件である。

$$\delta U_a = b \int_S \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_a \, dS ,$$

$$\delta U_c = b \int_S \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_c \, dS ,$$

$$\delta U_v = b \int_S \delta \mathbb{\varepsilon} \cdot \mathbb{\sigma} \, dS ,$$

$$\delta U_p = b \int_S \delta \mathbb{\varepsilon}_v \cdot \mathbb{P} \, dS ,$$

$$\delta U_w = b \left\{ \int_S \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_w \, dS + \oint_l \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_l \, dl \right\}$$

$$\delta U_g = b \int_S \delta \mathbb{P} \cdot \dot{\mathbb{\varepsilon}}_v \, dS ,$$

－－－－(4.3)

ここで$\mathbb{f}_a$、$\mathbb{f}_c$、$\mathbb{\varepsilon}$、$\mathbb{\varepsilon}_v$、$\mathbb{\sigma}$、$\mathbb{P}$、$\mathbb{f}_w$ならびに$\mathbb{f}_l$はそれぞれ加速度形慣性力、対流形慣性力、ひずみ、体積ひずみ、偏差応力、圧力、物体力、表面力のベクトルである。また l は表面力が作用する面の長さ、・は時間微分を意味する。

4.3.1.3　浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理

仮想仕事の原理は、定常流れの場合次のようになる[73-77]。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_c + \delta U_v - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0 ,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0 . \qquad ----------(4.4)$$

また非定常流れの場合、次のようになる[117、118]。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_a + \delta U_c + \delta U_v - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0 ,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0 , \qquad ----------(4.5)$$

ここでt_1、t_2は時刻を意味する。式(4.4)、(4.5)からもわかるように仮想仕事の原理は、解析対象に応じて各種の仮想仕事を取捨選択できる。流れ場に浮力が作用する場合、4.3.1 節で述べたδU_bを式(4.4)、(4.5)に加えることによって、浮力を考慮した流れ場解析のための仮想仕事の原理が構成できる。浮力の影響をうける定常流動の場合、次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_c + \delta U_v + \delta U_b - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0 ,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0 . \qquad ----------(4.6)$$

同様に非定常流動の場合は、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_a + \delta U_c + \delta U_v + \delta U_b - \delta U_p - \delta U_w)\, dt = 0,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g\, dt = 0, \qquad \text{----------(4.7)}$$

となる。δU_b は温度の関数であるため、流れ場と温度場を決定する連成項になる。しかし温度の決定には流れ場内に作用する熱的効果、たとえば熱伝導や熱対流などについて検討する必要がある。これについては次節で詳細に述べる。

4.3.2　流れを考慮した温度場解析のための変分原理

4.3.2.1　熱伝導項

いまｘ、ｙ方向の温度勾配を$\Theta_{,x}$、$\Theta_{,y}$、熱伝導率をλとすれば、一般異方性物体の単位時間当たりの伝導熱量q_dは、フーリエの法則より、

$$\begin{bmatrix} q_{dx} \\ q_{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{,x} \\ \Theta_{,y} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21}, \qquad --(4.8)$$

となる。ここで$\Theta_{,x}$、$\Theta_{,y}$はそれぞれ温度のｘとｙに関する偏微分を意味する。直交異方性物体の場合は、$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ であるから

$$\begin{bmatrix} q_{dx} \\ q_{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{,x} \\ \Theta_{,y} \end{bmatrix}. \qquad -------(4.9)$$

また等方性物体の場合は、$\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda$ の条件を入れると、

$$\begin{bmatrix} q_{dx} \\ q_{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{,x} \\ \Theta_{,y} \end{bmatrix} , \qquad -----(4.10)$$

となる。$[q_{dx}\ q_{dy}]^T$、$[\Theta_{,x}\ \Theta_{,y}]^T$をそれぞれ粘性流体の偏差応力$\sigma$とひずみ速度$\dot{\varepsilon}$に対応させれば、式(4.8)～(4.10) は次の粘性流体の構成方程式

$$\sigma = \mathrm{diag}[2\mu\ \ 2\mu\ \ \mu]\cdot\dot{\varepsilon} , \qquad -----(4.11)$$

に対応する。ここでμは流体の粘性係数である。式(4.8)～(4.10)の熱伝導によって流体内に仮想の温度勾配（温度ひずみ）$\delta\varepsilon_d$が生じるので、流体内に貯えられる仮想の熱伝導熱量に相当する仮想熱量δU_dは次のようになる。

$$\delta U_d = b\int_S \delta\varepsilon_d \cdot q_d\, dS ,$$

$$\delta\varepsilon_d=[\delta\Theta_{,x}\ \ \delta\Theta_{,y}], \quad q_d=[q_{dx}\ \ q_{dy}]^T , \qquad ---(4.12)$$

ここでδU_dは式(4.3)のδU_vに対応している。

4.3.2.2　熱容量項と熱対流項

熱対流によって流体内の熱量増加に相当する仮想熱量　δU_e は

次のようになる。

$$\delta U_e = b \int_S \delta \Theta \rho c_p (\dot{u} \Theta_{,x} + \dot{v} \Theta_{,y}) \, dS , \quad ---(4.13)$$

ここでc_pは流体の比熱である。式(4.13)は速度項を含むので連成項になる。 $\delta \Theta$ は仮想温度で、式(4.3) のδuに対応している。非定常問題の場合、式(4.13)に熱容量項$\rho c_p \Theta_{,t}$を加えて次のように表わす。

$$\delta U_{et} = b \int_S \delta \Theta \rho c_p (\Theta_{,t} + \dot{u} \Theta_{,x} + \dot{v} \Theta_{,y}) \, dS , \quad ---(4.14)$$

ここで$\Theta_{,t}$は温度の時間に関する偏微分を意味する。

4.3.2.3　発熱項

流体中に単位時間当たりの発熱量がq_hである熱源がある場合、また粘性によってq_fの摩擦熱が発生する場合、流体内の熱量増加に相当する仮想熱量δU_{hf}は次のようになる。

$$\delta U_{hf} = b \int_S \delta \Theta (q_h + q_f) \, dS , \quad -----(4.15)$$

δU_{hf}は式(4.3) のδU_wに対応する。ここでq_fは粘性流体をストークス近似すれば、通常の散逸関数ϕになり、２次元の場合、次のように表わされる。

$$\phi = \sigma_x \dot{u}_{,x} + \tau_{xy} (\dot{u}_{,y} + \dot{v}_{,x}) + \sigma_y \dot{v}_{,y} , \quad ---(4.16)$$

ここでσ_xとσ_yはそれぞれ流体のｘ、ｙ方向の垂直粘性応力、τ_{xy}はせん断粘性応力である。流体の速度が非常に大きい場合や圧縮性流体の場合、ϕは無視できない。しかし非圧縮性流体で速度があまり大きくないときには、ϕは熱伝導や熱対流の項と比較して無視できる程小さい。

4.3.2.4　温度場解析のための変分原理の適用範囲

以上のδU_d、δU_e、δU_{hf}は式(4.6)のδU_v、δU_c、δU_wにそれぞれ対応している。従って、流れを考慮した温度場解析のための変分原理は、仮想仕事の原理と同様に成立する。以上のことから定常問題に関する変分原理は次のように表わすことができる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_d + \delta U_e - \delta U_{hf})\, dt = 0. \qquad -----(4.17)$$

また非定常問題では、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_d + \delta U_{et} - \delta U_{hf})\, dt = 0, \qquad -----(4.18)$$

となる。熱源および粘性による摩擦熱がない場合には、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_d + \delta U_{et})\, dt = 0. \qquad -----(4.19)$$

さらに熱容量項、熱対流項がない場合、

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_d \, dt = 0, \qquad \text{----------(4.20)}$$

となり、本変分原理は固体内の熱伝導解析にも適用可能である。

4.3.3 浮力を考慮した熱流体のための変分原理

浮力は流体の温度に依存する。従って、浮力の影響をうける流れ場を解析するためには、流体の温度場もあわせて解析する必要がある。そこで、本章の4.3.1 節で浮力の影響をうける流れ場、4.3.2 節で流れの影響をうける温度場に関する変分原理をそれぞれ述べた。これらの原理を結合させると、浮力を考慮した熱流体のための変分原理になり、次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_a + \delta U_c + \delta U_v + \delta U_b - \delta U_p - \delta U_w) \, dt = 0,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g \, dt = 0,$$

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_d + \delta U_{et} - \delta U_{hf}) \, dt = 0. \qquad \text{-----(4.21)}$$

４．４　有限要素法の定式化

有限要素法による解析手順の概略と流れ場に関する定式化の詳細はそれぞれ2.2節ならびに3.4節で述べている。熱流体のための変分原理に基づく有限要素法の定式化も同じ方法でできる。ここでは、流れ場に関して浮力による仮想仕事の定式化および温度場に関する定式化を述べる。

定式化は初めに、一つの要素について行ない、最後に解析領域全体にわたってマトリックス合成し、有限要素方程式を求める。

2.2節ならびに3.4節で述べたように、初めに、解析領域を有限個の要素に分割する。要素内の変位、温度に対して図4.1 に示す三角形６節点要素、圧力に図4.2 に示す三角形３節点要素を用いる。圧力に関する定式化は第３章で述べているので、ここでは省略する。

要素内の変位ｕ、ｖおよび温度Θは次のようになる。

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots + N_6 u_6 \quad , \qquad ---(3.12)$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \cdots + N_6 v_6 \quad , \qquad ---(3.13)$$

$$\Theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + \cdots + N_6 \theta_6$$

$$= [N_1 \ N_2 \ \cdots \ N_6][\theta]$$

$$= [A_2][\theta] \quad , \qquad ---(4.22)$$

$$[A_2] = [N_1 \ N_2 \ \cdots \ N_6] \quad , \qquad ---(4.23)$$

$$[\theta] = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_6]^T \quad , \qquad ---(4.24)$$

ここで $N_1 \sim N_6$ はそれぞれ形状関数と面積座標で、式(2.12)で表わされる。$u_1 \sim u_6$、$v_1 \sim v_6$、$\theta_1 \sim \theta_6$は図4.1 に示す三角形要素における６節点のｘ、ｙ方向の変位および温度である。

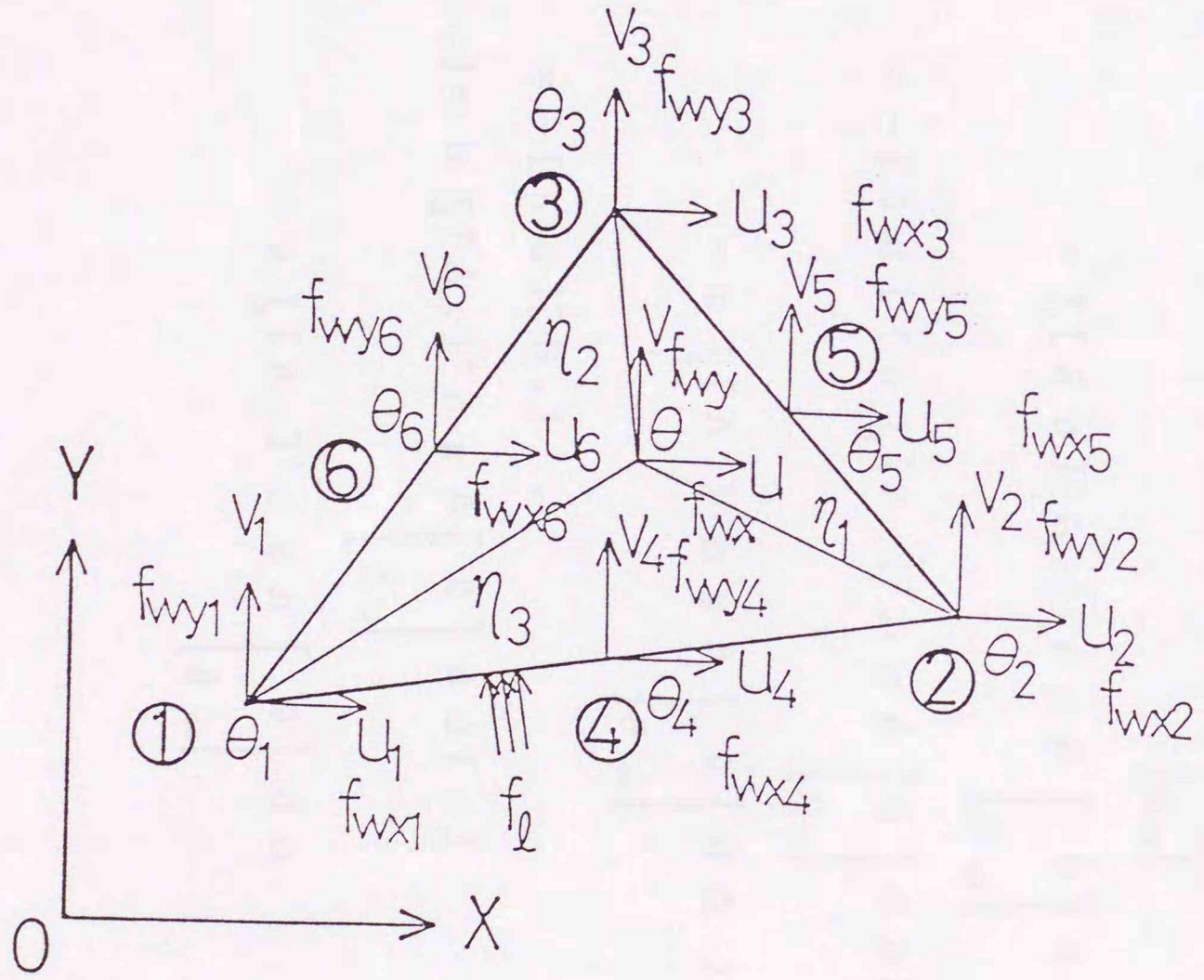


図４．１　変位および温度に関する座標系

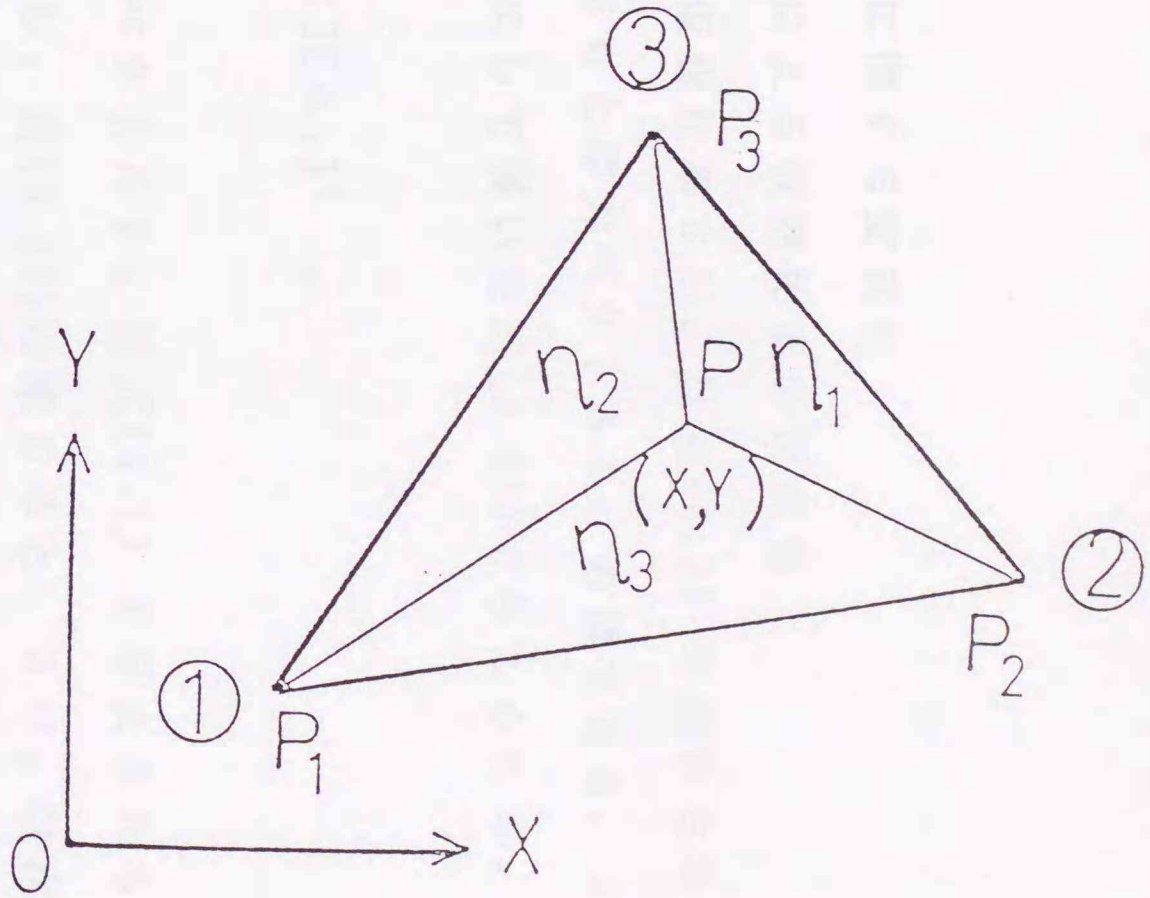


図４．２　圧力に関する座標系

4.4.1 流れ場に関する定式化

4.4.1.1 浮力による仮想仕事の定式化

浮力による仮想仕事δU_bは式(4.2)で表わされる。これは仮想変位ベクトル$\delta \mathbb{u}$と浮力ベクトル$\mathbb{f}_b$の積である。$\delta \mathbb{u}$は式(3.12)、式(3.13)を基にして導いた式(3.21)で与えられる。

$$\delta \mathbb{u} = [\delta\ d][A_1]^T \quad . \qquad ---(3.21)$$

一方、浮力ベクトル$\mathbb{f}_b$は式(4.1)で与えられる。式(4.1)に式(4.22)を代入し、式(3.21)を乗じると、δU_bは次のようになる。

$$\delta U_b = b \int_\Delta \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_b \, d\Delta$$

$$= -b \left(\int_\Delta [\delta\ d][A_1]^T \rho\ g\ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \end{bmatrix} d\Delta[\theta] \right.$$

$$\left. - \int_\Delta [\delta\ d][A_1]^T \rho\ g\ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \theta\ \infty \end{bmatrix} d\Delta \right)$$

$$= -[\delta\ d] \left(b \int_\Delta [A_1]^T \rho\ g\ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \end{bmatrix} d\Delta[\theta] \right.$$

$$\left. - b \int_\Delta [A_1]^T \rho\ g\ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \theta\ \infty \end{bmatrix} d\Delta \right)$$

$$= -[\delta\ d][B_b] \quad , \qquad ---(4.25)$$

$$[B_b] = b \int_\Delta [A_1]^T \rho\ g\ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \end{bmatrix} d\Delta[\theta]$$

$$- b \int_\Delta [A_1]^T \rho\ g\ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \theta\ \infty \end{bmatrix} d\Delta \quad , \qquad ---(4.26)$$

ここで[δd]は仮想変位ベクトルで任意の値をとることができる。

4.4.1.2 その他の仮想仕事の定式化

その他の仮想仕事および連続の条件の定式化は第3章で述べているので、ここでは、これらの結果のみを記する。

$$\delta U_a=[\delta d][M][\ddot{d}] \quad , \quad \delta U_c=[\delta d][M_c][\dot{d}] \quad ,$$

$$\delta U_v=[\delta d][K][\dot{d}] \quad , \quad \delta U_p=[\delta d][G][p] \quad ,$$

$$\delta U_w=[\delta d][F] \quad , \quad \delta U_g=[\delta p][G]^T[\dot{d}] \quad .$$

---(3.77)

ここで、$[\ddot{d}]$、$[\dot{d}]$は加速度および速度ベクトル、[p]は圧力ベクトル、[F]は外力ベクトルである。また、[M]、$[M_c]$、[K]、[G]はそれぞれ加速度形質量、対流形質量、粘性および圧力マトリックスである。これらのマトリックスは第3章で個々に述べているが、ここではまとめて記する。

$$[M] = b \int_\Delta [A_1]^T \rho [A_1] d\Delta \quad ,$$

$$[M_c] = b \int_\Delta [A_1]^T \rho [E_1] d\Delta \quad ,$$

$$[K] = b \int_\Delta [B_1]^T [C][B_1] d\Delta \quad ,$$

$$[G] = b \int_\Delta [D]^T [H_p] d\Delta \quad . \qquad ----(4.27)$$

$$[F] = b \{ \int_\Delta [A_1]^T f_w d\Delta + \oint_\ell [A_1]^T f_1 d\ell \}$$

式(4.27)の被積分項の各マトリックスは、

$$[A_1]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix},$$

$$[E_1]=\begin{bmatrix} \dot{u}N_{1,x}+\dot{v}N_{1,y} & 0 & \cdots & \dot{u}N_{6,x}+\dot{v}N_{6,y} & 0 \\ 0 & \dot{u}N_{1,x}+\dot{v}N_{1,y} & \cdots & 0 & \dot{u}N_{6,x}+\dot{v}N_{6,y} \end{bmatrix},$$

$$[B_1]=\begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix},$$

$$[C]=diag[\,2\mu \quad 2\mu \quad \mu\,],$$

$$[D]=0.5\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{1,y} & \cdots & N_{6,x} & N_{6,y} \\ N_{1,x} & N_{1,y} & \cdots & N_{6,x} & N_{6,y} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[H_p]=\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad ---(4.28)$$

である。

なお、式(4.27)の各マトリックスは形状関数および面積座標の積分で表わされる。これらの積分は式(2.14)の積分公式を用いて実行する。

4.4.1.3 流れ場の有限要素方程式

式(4.25)、(3.77)を式(4.7)に代入すると、次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_a + \delta U_c + \delta U_v + \delta U_b - \delta U_p - \delta U_w)\, dt$$

$$= [\delta d] \int_{t1}^{t2} ([M][\ddot{d}] + ([K]+[M_c])[\dot{d}] - [G][p] - [B_b] - [F])\, dt = 0 \quad , \quad ---(4.29)$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_g \, dt$$

$$= [\delta p] \int_{t1}^{t2} [G]^T [\dot{d}]\, dt = 0 \quad . \quad ---(4.30)$$

式(4.29)、(4.30)が恒等的に成立するためには、次式が必要になる。

$$[M][\ddot{d}] + ([K]+[M_c])[\dot{d}] - [G][p] - [B_b] - [F] = 0 \quad , \quad ---(4.31)$$

$$[G]^T[\dot{d}] = 0 \quad . \quad ---(4.32)$$

式(4.31)、(4.32)をまとめると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K + M_c & -G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad ---(4.33)$$

式(4.33)は1個の要素に関するマトリックス方程式である。上式を解析領域全体にわたってマトリックス合成すれば、次のようになる。

$$\Sigma\left\{\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{d}\\ \dot{p}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K+M_{\circ} & -G\\ -G^{T} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{d}\\ p\end{bmatrix}\right\}=\Sigma\left\{\begin{bmatrix}B_{b}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F\\ 0\end{bmatrix}\right\}. \quad ---(4.34)$$

ここでΣはマトリックス合成を意味する。

浮力を考慮した流れ場は式(4.34)を解くことによって得られる。なお、定常問題では$[\ddot{d}]=0$、$[\dot{p}]=0$ であるから上式は、

$$\Sigma\left\{\begin{bmatrix}K+M_{\circ} & -G\\ -G^{T} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{d}\\ p\end{bmatrix}\right\}=\Sigma\left\{\begin{bmatrix}B_{b}\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F\\ 0\end{bmatrix}\right\}, \quad ---(4.34)'$$

となる。

4.4.2 温度場に関する定式化

4.4.2.1 熱伝導項の定式化

熱伝導に対する仮想熱量δU_{d}は式(4.12)で表わされる。これは仮想の温度こう配ベクトル$\delta\varepsilon_{d}$と熱伝導ベクトルq_{d}の積で与えられるので、はじめに、これらをマトリックス化する。

温度こう配ベクトルε_{d}は、

$$\varepsilon_{d}=[\Theta_{,x}\ \ \Theta_{,y}]^{T} \quad . \qquad ---(4.35)$$

$\Theta_{,x}$、$\Theta_{,y}$は式(4.22)より、

$$\Theta_{,x} = N_{1,x}\theta_1 + N_{2,x}\theta_2 \quad \cdots \quad + N_{6,x}\theta_6 \quad , \quad ---(4.36)$$

$$\Theta_{,y} = N_{1,y}\theta_1 + N_{2,y}\theta_2 \quad \cdots \quad + N_{6,y}\theta_6 \quad . \quad ---(4.37)$$

式(4.36)、(4.37)を式(4.35)に代入すると、ε_d は次のようになる。

$$\varepsilon_d = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \cdots & N_{6,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \cdots & N_{6,y} \end{bmatrix} [\theta]$$

$$= [B_2][\theta] \quad , \quad ---(4.38)$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \cdots & N_{6,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \cdots & N_{6,y} \end{bmatrix} \quad . \quad ---(4.39)$$

上式を変分すると、

$$\delta\varepsilon_d = \delta([B_2][\theta])$$

$$= \delta[\theta]^T [B_2]^T$$

$$= [\delta\theta][B_2]^T \quad , \quad ---(4.40)$$

ここで、$[\delta\theta]$は仮想温度ベクトルで任意の値をとることができる。

一方、q_d は式(4.8) で与えられ、これに式(4.38)を用いると、

$$q_d = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} [\Theta_{,x} \quad \Theta_{,y}]^T$$

$$= [\Lambda][\Theta_{,x} \quad \Theta_{,y}]^T$$

$$= [\Lambda][B_2][\theta] \quad , \quad ---(4.41)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad ---(4.42)$$

になる。従って、熱伝導に対する仮想熱量 δU_d は次のようになる。

$$\delta U_d = b \int_\Delta \delta \varepsilon_d \cdot q_d \, d\Delta$$

$$= b \int_\Delta [\delta \theta][B_2]^T[\Lambda][B_2] d\Delta[\theta]$$

$$= [\delta \theta] b \int_\Delta [B_2]^T[\Lambda][B_2] d\Delta[\theta]$$

$$= [\delta \theta][C_d][\theta] \quad , \qquad ---(4.43)$$

$$[C_d] = b \int_\Delta [B_2]^T[\Lambda][B_2] d\Delta \quad . \qquad ---(4.44)$$

ここで $[C_d]$は熱伝導成分を表わすマトリックスである。

4.4.2.2 熱容量項と熱対流項の定式化

熱容量と熱対流に対する仮想熱量 δU_{et} は式(4.14)で表わされる。式(4.14)において、仮想温度$\delta \Theta$は式(4.22)を変分することによって得られる。

$$\delta \Theta = \delta ([A_2][\theta])$$

$$= \delta[\theta]^T [A_2]^T$$

$$= [\delta \theta][A_2]^T \quad . \qquad ---(4.45)$$

また、式(4.14)において$\Theta_{,t}$は温度の時間微分項で、熱容量項に相当する。$\dot{u}\Theta_{,x} + \dot{v}\Theta_{,y}$は熱対流項である。これらの項は次のようになる。

$$\Theta_{,t} = N_1\dot{\theta}_1 + N_2\dot{\theta}_2 + \cdots + N_6\dot{\theta}_6$$

$$= [N_1 \; N_2 \; \cdots \; N_6][\dot{\theta}]$$

$$= [A_2][\dot{\theta}] \quad , \qquad \text{---(4.46)}$$

$$\dot{u}\,\Theta_{,x} + \dot{v}\,\Theta_{,y}$$

$$= \dot{u}\,(N_{1,x}\theta_1 + N_{2,x}\theta_2 \cdots + N_{6,x}\theta_6)$$

$$+ \dot{v}\,(N_{1,y}\theta_1 + N_{2,y}\theta_2 \cdots + N_{6,y}\theta_6)$$

$$= [\dot{u}N_{1,x} + \dot{v}N_{1,y} \cdots \dot{u}N_{6,x} + \dot{v}N_{6,y}][\theta]$$

$$= [E_2][\theta] \quad , \qquad \text{---(4.47)}$$

$$[E_2] = [\dot{u}N_{1,x} + \dot{v}N_{1,y} \cdots \dot{u}N_{6,x} + \dot{v}N_{6,y}], \qquad \text{---(4.48)}$$

以上の項を式(4.14)に代入すると、熱容量と熱対流に対する仮想熱量δU_{et}は次のようになる。

$$\delta U_{et} = b\int_{\Delta}\rho C_p \delta\Theta(\Theta_{,t} + \dot{u}\,\Theta_{,x} + \dot{v}\,\Theta_{,y})\,d\Delta$$

$$= b\int_{\Delta}[\delta\theta][A_2]^T\rho C_p([A_2][\dot{\theta}] + [E_2][\theta])\,d\Delta$$

$$= [\delta\theta]\,b\int_{\Delta}[A_2]^T\rho C_p[A_2]\,d\Delta[\dot{\theta}]$$

$$+ [\delta\theta]\,b\int_{\Delta}[A_2]^T\rho C_p[E_2]\,d\Delta[\theta]$$

$$= [\delta\theta][M_t][\dot{\theta}]$$

$$+ [\delta\theta][C_v][\theta] \quad , \qquad \text{---(4.49)}$$

$$[M_t] = b\int_{\Delta}[A_2]^T\rho C_p[A_2]\,d\Delta \quad , \qquad \text{---(4.50)}$$

$$[C_v] = b\int_{\Delta}[A_2]^T\rho C_p[E_2]\,d\Delta \quad , \qquad \text{---(4.51)}$$

ここで$[M_t]$は熱容量を表わすマトリックスである。また、$[C_v]$は速度項を含むので、熱対流を表わすマトリックスである。

4.4.2.3 発熱項の定式化

発熱項に対する仮想熱量 δU_{hf} は式(4.15)で表わされる。 式(4.15)において、仮想温度$\delta \Theta$は式(4.45)で与えられる。 発熱量 q_h と粘性摩擦熱 q_f が与えられているとすれば、δU_{hf}は次のようになる。

$$\delta U_{hf} = b \int_{\Delta} \delta \Theta (q_h + q_f) d \Delta$$

$$= b \int_{\Delta} [\delta \theta][A_2]^T (q_h + q_f) d \Delta$$

$$= [\delta \theta] b \int_{\Delta} [A_2]^T (q_h + q_f) d \Delta$$

$$= [\delta \theta][Q] \quad , \qquad ---(4.52)$$

$$[Q] = b \int_{\Delta} [A_2]^T (q_h + q_f) d \Delta \quad , \qquad ---(4.53)$$

ここで[Q]は発熱量と粘性摩擦熱を表わすマトリックスである。

4.4.2.4 温度場の有限要素方程式

4.4.2.1節から4.4.2.3節まで温度場に関する仮想熱量を述べた。

式(4.43)、(4.49)、(4.52)の各種仮想熱量をまとめると、次のようになる。

$$\delta U_d = [\delta \theta][C_d][\theta] \quad ,$$

$$\delta U_{et} = [\delta \theta][M_t][\dot{\theta}] + [\delta \theta][C_v][\theta] \quad ,$$

$$\delta U_{hf} = [\delta \theta][Q] \quad , \qquad ---(4.54)$$

$$[M_t] = b \int_{\Delta} [A_2]^T \rho C_p [A_2] d \Delta \quad ,$$

$$[C_d] = b \int_{\Delta} [B_2]^T [\Lambda][B_2] d \Delta \quad ,$$

$$[C_v] = b \int_{\Delta} [A_2]^T \rho C_p [E_2] d \Delta \quad ,$$

$$[Q] = b \int_{\Delta} [A_2]^T (q_h + q_f) d \Delta \quad . \qquad ---(4.55)$$

ここで式(4.54)は形状関数および面積座標の積分で表わされる。これらの積分は式(2.14)の積分公式を用いて実行する。

式(4.54)を式(4.18)に代入すると、

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_d + \delta U_{et} - \delta U_{hf})\, dt$$

$$= [\delta\theta] \int_{t1}^{t2} ([M_t][\dot{\theta}] + ([C_d + C_v])[\theta]$$

$$-[Q])\, dt = 0 \quad . \quad ---(4.56)$$

既に述べたように、$[\delta\theta]$は任意の値をとり得る。また、上の両式が恒等的に成立するためには、次式が必要になる。

$$[M_t][\dot{\theta}] + ([C_d + C_v])[\theta] - [Q] = 0 \quad . \quad -(4.57)$$

式(4.57)は1個の要素に関するマトリックス方程式である。上式を解析領域全体にわたってマトリックス合成すれば、次のようになる。

$$\Sigma \{[M_t][\dot{\theta}] + ([C_d + C_v])[\theta]\} = \Sigma[Q] \quad , \quad -(4.58)$$

ここでΣはマトリックス合成を意味する。

なお、定常問題では、$[\dot{\theta}]$が不要であるため、上式は次のようになる。

$$\Sigma ([C_d + C_v])[\theta] = \Sigma[Q] \quad . \quad ---(4.58)'$$

4．5　計算手順

加速度ベクトル$[\ddot{d}]$、圧力および温度の時間微分ベクトル$[\dot{P}]$、$[\dot{\theta}]$に前進時間差分を採用すると、次のようになる。

$$[\ddot{d}] = ([\dot{d}]_{m+1} - [\dot{d}]_m) \,/\, \Delta t\ ,$$

$$[\dot{p}] = ([p]_{m+1} - [p]_m) \,/\, \Delta t\ ,$$

$$[\dot{\theta}] = ([\theta]_{m+1} - [\theta]_m) \,/\, \Delta t\ . \qquad \text{－－－－－－－－(4.59)}$$

Δtは時分割、mは自然数で時刻を表わす。また時間に関するパラメータをαとして、これらを式(4.34)、(4.58)に代入すると、次式が得られる。

$$\Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t+(1-\alpha)(K+M_{c\ m+1}) & -(1-\alpha)G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_{m+1}$$

$$= \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}_{m+1} + \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t-\alpha(K+M_{c\ m}) & \alpha G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_m$$

$$+ \Sigma \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix}_m \ , \qquad \text{－－－(4.60)}$$

$$\Sigma\ [M_t/\Delta t+(1-\alpha)(C_d+C_{v\ m+1})]\ [\theta]_{m+1}$$

$$= \Sigma(\ [Q] + [M_t/\Delta t-\alpha(C_d+C_{v\ m+1})]\ [\theta]_m \ . \quad \text{－－(4.61)}$$

式(4.60)の左辺には速度項を含む[M。] マトリックスが存在するため、時刻を固定して、繰り返して演算する。解法にはニュートン・ラフソン法（NR法）を用いる。NR法を用いると、式(4.60)の解は時刻 m+1 、繰り返し演算回数 r+1 において次のようになる(119)。

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_{m+1}^{r+1} = \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_{m+1}^{r} - \left([J_t]^{r}_{m+1} \right)^{-1} [R_t]^{r,0}_{m+1,m} ,$$

$$-----(4.62)$$

ここで

$$[J_t]^{r}_{m+1} = \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t+(1-\alpha)(K+M_c{}^{r}_{m+1}+M_a{}^{r}_{m+1}) & -(1-\alpha)G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$[R_t]^{r,0}_{m+1,m} = \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t+(1-\alpha)(K+M_c{}^{r}_{m+1}) & -(1-\alpha)G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}_{m+1}^{r} ,$$

$$- \Sigma \begin{bmatrix} M/\Delta t-\alpha(K+M_{c\ m,o}) & \alpha G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{m,o} ,$$

$$[M_a] = b \int_{\Delta} [A_1]^T \rho [E_a] \, d\Delta ,$$

$$[E_a] = \begin{bmatrix} N_1\dot{u}_{,x} & N_1\dot{u}_{,y} & \cdots & N_6\dot{u}_{,x} & N_6\dot{u}_{,y} \\ N_1\dot{v}_{,x} & N_1\dot{v}_{,y} & \cdots & N_6\dot{v}_{,x} & N_6\dot{v}_{,y} \end{bmatrix} ,$$

$$---(4.63)$$

ここで（　）$^{-1}$は逆マトリックスを意味する。式(4.62)は次の収束条件を満たすまで演算を続行させる。

$$\left| \left(\left[\dot{d} \right]^{r+1}_{m+1} - \left[\dot{d} \right]^{r}_{m+1} \right) / \left[\dot{d} \right]^{r+1}_{m+1} \right| \leqq 0.01 \quad . \qquad --(4.64)$$

収束解が得られた後に、この速度値を用いて［C_v］マトリックスを作成し、式(4.61)を解く。次に時刻をΔt進行させる。以後この手順を繰り返し、 m+1 と m における速度および圧力値が収束するまで演算を続行する。時間に関する収束条件を次のように設定した。

$$\left| \left(\left[\dot{d} \right]^{0}_{m+1} - \left[\dot{d} \right]^{0}_{m} \right) / \left[\dot{d} \right]^{0}_{m+1} \right| \leqq 0.01 \quad . \qquad ---(4.65)$$

なお初期値は速度場においてはクリープ流れ、温度場においては熱伝導のみの解とする。定常問題の解は、式(4.34)'と(4.58)'における速度と温度の連成項を逐次修正し、NR法によって求めることができる。

4．6　強制対流の数値解析

4.6.1　解析モデル

緒言で述べたようにキャビティモデルを図4.3 に示す。解析条件は文献(7)、(17)と同じとし、次のように設定する。　レイノルズ

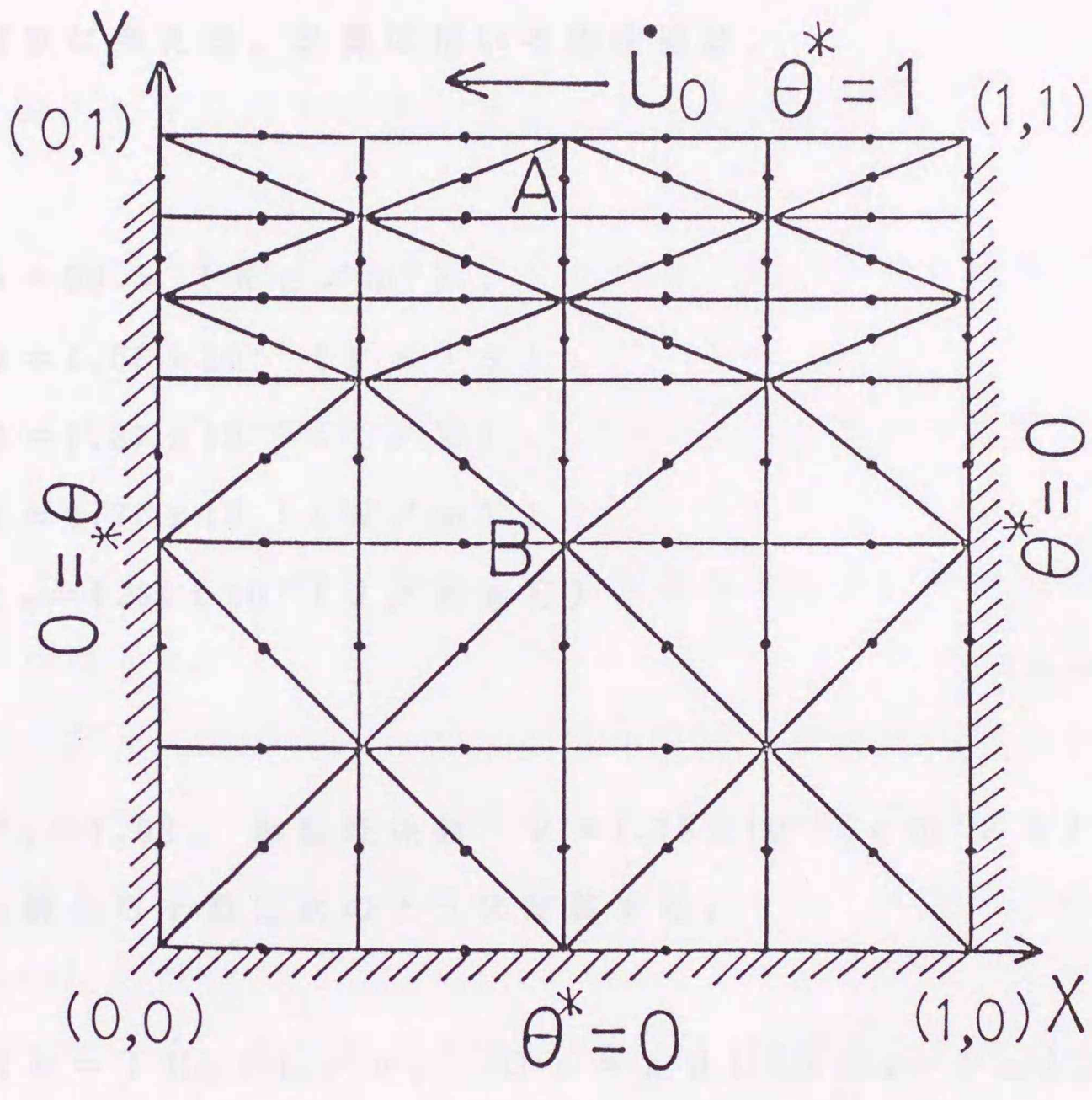


図４．３　キャビティ内の強制対流解析モデル

（Ａ，Ｂは従来の結果と比較する点）

数Ｒｅは100、グラスホフ数Ｇｒは０、10^4 および 10^6 とし、粘性流体は等方性、熱伝導に関する構成方程式は式(4.10)を用いる。また熱源q_hはなく、Ｒｅ数が小さいため粘性摩擦熱による発熱q_fも無視する。粘性流体としてプラントル数P_rは１に近い温度の水を対象に考える。計算に用いる物性値は、

$\rho = 90.5$ （Ｋｇ／ｍ^3），

$\mu = 1.58 \times 10^{-5}$（Ｐａ・ｓ），

$\beta = 1.37 \times 10^{-3}$（１／℃），

$\lambda = 6.76 \times 10^{-1}$（Ｗ／ｍ℃），

$c_p = 4.34 \times 10^3$（Ｊ／Ｋｇ℃），

---(4.66)

で$P_r = 1.02$、動粘性係数　$\nu = 1.75 \times 10^{-2}$（ｃｍ^2／ｓ）である。

Ｒｅ数とＧｒ数は次のように定義する。

$$Re = |\dot{U}_0| L / \nu, \quad Gr = g \beta L^3 (\theta_w - \theta_\infty) / \nu^2,$$

---(4.67)

ここでＬはキャビティモデルの幅（１ｃｍ）、θ_w はキャビティ上壁面温度を意味する。

境界条件を次のように設定する。

壁面（斜線部）：$\dot{u}_o = \dot{v}_o = 0$　（ｃｍ／ｓ），$\theta^* = 0$，

上　壁　面　　：$\dot{u}_o = -1.75$　（ｃｍ／ｓ），

$\dot{v}_o = 0$　（ｃｍ／ｓ），

$\theta^* = 1$ ，

圧力は全三角形要素の頂点で未知とする。

なお上式でθ^* は無次元温度を意味し、次のように定義する。

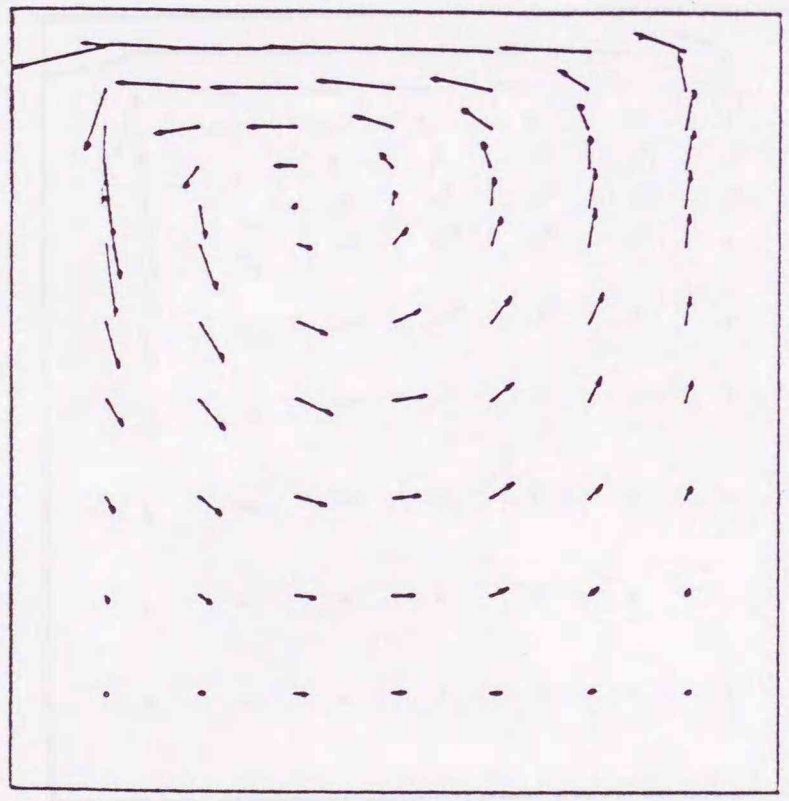
$$\theta^* = (\theta - \theta_\infty) / (\theta_w - \theta_\infty) \qquad ---------(4.68)$$

ここで θ_∞ は側壁面温度と下壁面温度である。時間に関するパラメータは$\alpha = 0$ とする。

Ｇｒ数が大きくなった場合、温度場の影響をうける流れ場を定常問題として解くと解が不安定になり、また非定常問題として解くと時分割Δｔを小さくしなければならない。そこで本論文ではＧｒ＝０、10^4 の解は式(4.34)'、(4.58)' より求めた。Ｇｒ＝10^6 の解はＧｒ＝10^4 の収束解を初期値として、非定常法で求める。時分割はΔｔ＝0.25　（ｓ）とする。

4.6.2　計算結果

図4.4～4.6はＧｒ＝０、10^4 および10^6 の速度分布と無次元温度分布を示す。実線は無次元温度θ^* の等温線を示す。流れ場は浮力と慣性力の影響をうける。従来の結果[17]　を参照すると、流れはＧｒ／Ｒｅ^2 の比によって左右される。Ｇｒ＝0、10^4 の場合、



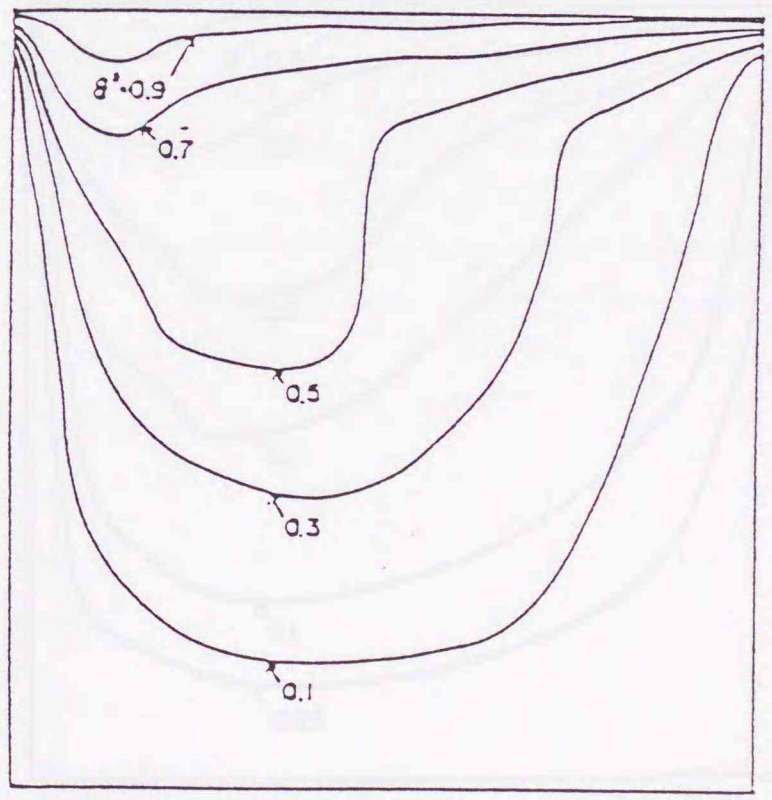
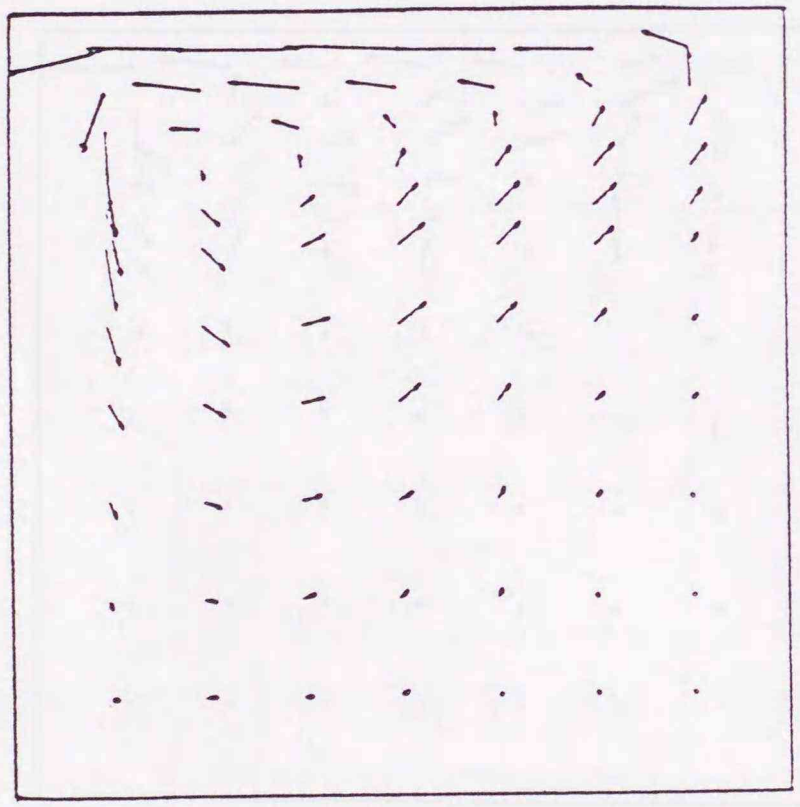


図４．４　速度および温度分布（Ｇｒ＝　０　）



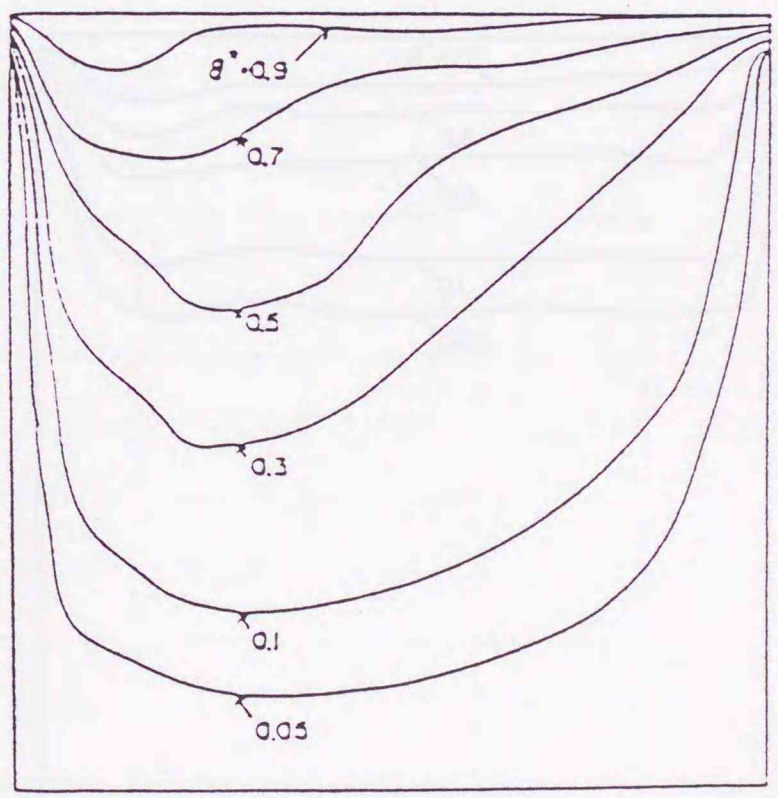
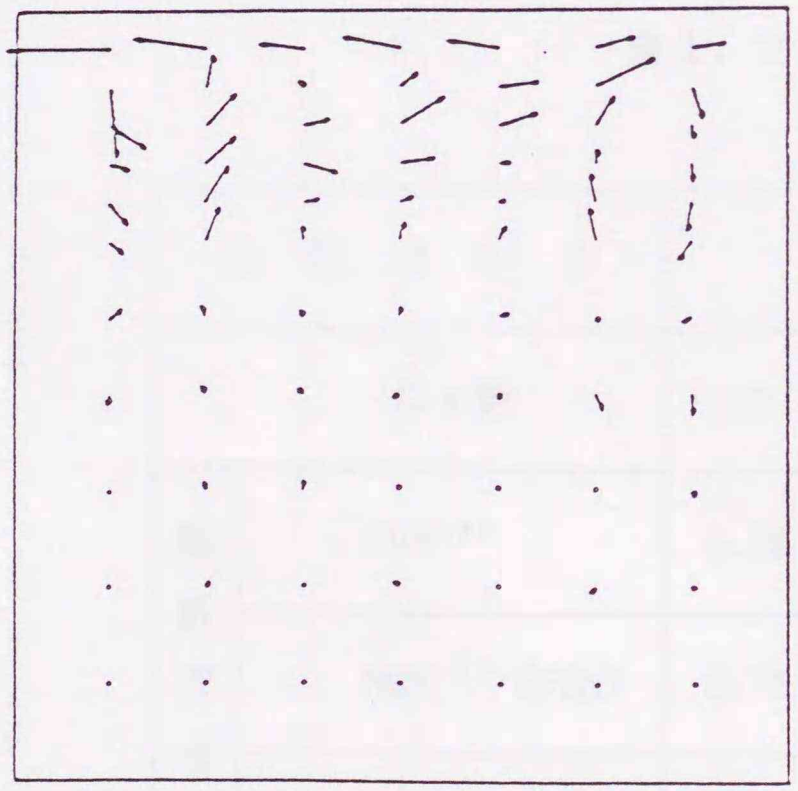


図４．５　速度および温度分布（Ｇｒ＝　10^4　）



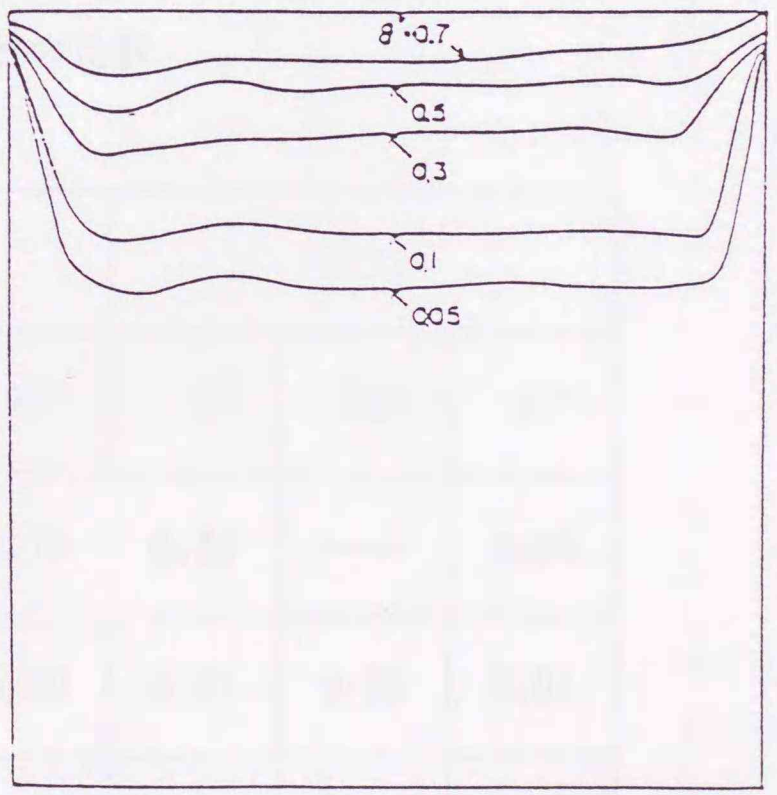


図４．６　速度および温度分布（Ｇｒ＝　10^3　）

表４．２　従来の結果との比較

比較点の Θ		Θ^*_A			Θ^*_B		
Gr数		0	10^4	10^6	0	10^4	10^6
解析方法	FDM[7]	0.78	——	0.70	0.38	——	0.04
	MWR[17](FEM)	0.76	0.81	0.69	0.41	0.25	0.01
	本論文の方法(FEM)	0.750	0.806	0.721	0.409	0.256	0.011

この比が0 と1 であるため、図からもわかるように、大きな差異は認められない。Ｇｒ＝10^6 ではＧｒ／Ｒｅ^2 の比が100 になり、流れは浮力によって大きく変わる。図4.6 に示すように、キャビティ上壁面付近で対流が発生し、左右両端付近で小さな渦がみられる。またキャビティ下部の流れはほとんどない。従ってキャビティ下壁面方向には熱対流によるエンタルピ移動が少なくなり、熱がほとんど伝わっていないことがわかる。図4.4～4.6は松田のMWR によるFEM 解[17]、TorranceらのFDM 解[7] と良く一致している。モデルのＡとＢ点における温度値を文献(7)、(17) と比較した結果を表4.2 に示す。

4.6.3　考察

本節では、熱流体のための変分原理に基づいたFEM をキャビティ内の強制対流に適用した。本FEM の結果は従来のMWR によるFEM 解[17]、FDM による解[7] と一致することが確かめられた。

４．７　物性値の温度依存性を考慮した場合の数値解析

流体の密度、粘性係数、比熱および熱伝導率などの物性値は一般に温度に依存する。流体の温度差が大きくなると、これらの物性値は大きく変わる。従って、物性値を一定として解析すると、解析結果は非現実的になる。すべての物性値を温度の関数とした自然対流熱伝達の解析例として、Watson[125]、Nguyen[126]、Merker、[127]、関ら[128、132]、Leonardiら[129-131]、Zhongら[133]、Kakacら[134] などの研究がある。しかし強制対流についての報告例はなく、また

FEMを用いた解析例も見当たらない。本節では文献(135) に基づいて物性値の温度依存性を考慮した場合の数値解析例を示す。

4.7.1　解析モデル

解析モデルは図4.3 と同じとし、キャビティ内の強制対流をFEM解析する。なお、Ｒｅ数とＧｒ数は物性値の関数である。そこで物性値の温度依存性を考慮した場合、新たにＲｅ数とＧｒ数の定義をしておく必要がある。

$$Re = |\dot{U}_o| \, L / \nu \quad ,$$

$$Gr = g\beta (\theta_w - \theta_\infty) L^3 / \nu^2 \quad , \qquad -----(4.69)$$

ここで$\dot{U}_o$は上壁面速度、θ_wは上壁面温度、θ_∞は側壁および下壁面温度、Ｌは代表長さ、νはθ_wの温度における値を用いた。Ｇｒ数は代表長さＬによって変えた。これに伴って上壁面速度$\dot{U}_o$を変えてＲｅ数が100 になるように設定した。以上のことをまとめると、計算に用いた速度値と代表長さ、およびＲｅ数とＧｒ数との関係は表4.3 のようになる。

4.7.2　物性値の温度依存性

粘性係数、密度、熱伝導率、比熱などの物性値は一般に、温度の関数である。ここでは粘性流動の温度依存性の効果を調べるために、流体には比較的温度の影響をうけやすい空気を選ぶ。上記の各物性値の温度依存性は文献(136) の物性値表を参照し、物性値を温度の２次式と仮定する。各物性値の温度係数は最小自乗法で求めた。こ

表４．３　計算に用いた速度値と代表長さ

Gr	0	10^4	10^5
Gr/Re^2	0	1	10
$\dot{U}_0$(cm/s)	-24.6	-24.6	-11.4
L (cm)	1.46	1.46	3.15

れを式(4.70)に示す。なお、定圧比熱 C_p は(0～200℃)の温度範囲で差異が認められない。このため、一定値(1.01×10^3 J／Kg℃)とする。ただし各物性値の添字 $_0$ は0℃の状態を表わす。

$$\rho = \rho_0 (1 + a_1 \theta + a_2 \theta^2) ,$$

$$\rho_0 = 1.28 \times 10^{-3} \ (Kg / m^3) ,$$

$$a_1 = -3.22 \times 10^{-3} \ (1 / ℃) ,$$

$$a_2 = 5.67 \times 10^{-6} \ (1 / ℃)^2 ,$$

$$\mu = \mu_0 (1 + b_1 \theta + b_2 \theta^2) ,$$

$$\mu_0 = 1.76 \times 10^{-8} \ (Pa \cdot s) ,$$

$$b_1 = 2.85 \times 10^{-3} \ (1 / ℃) ,$$

$$b_2 = -1.74 \times 10^{-6} \ (1 / ℃)^2 ,$$

$$\lambda = \lambda_0 (1 + c_1 \theta + c_2 \theta^2) ,$$

$$\lambda_0 = 2.41 \times 10^{-2} \ (W / m ℃) ,$$

$$c_1 = 3.61 \times 10^{-3} \ (1 / ℃) ,$$

$$c_2 = -2.51 \times 10^{-6} \ (1 / ℃)^2 \quad . \qquad ----(4.70)$$

また熱源による発熱量 q_h はなく、さらにRe数が小さいため粘性による摩擦熱 q_f を無視する。時刻に関するパラメータ α は 0 、時分割 $\Delta t = 0.25$(s)とした。

4.7.3 計算手順

式(4.60)、(4.61) の計算手順は次の通りである。

(1). 初期値は流動場に関してはクリープ流れの解、温度場に関しては、式(4.58)において $[M_t] = 0$, $[C_v] = 0$ とおいた熱

伝導のみの解とする。

(2). 熱伝導のみの温度解を用いて各節点における物性値を修正する。要素に関する物性値は、6 節点の相加平均温度を用いて算出する。これを要素平均の物性値とする。

(3). 式(4.60)のマトリックスとベクトルを要素平均の物性値を用いて再構成する。ここで$[M_c]$、$[M_a]$は物性値のほかに、クリープ流れの速度値を用いて構成する。

(4). 式(4.60)を用いて速度と圧力を求める。$[M_c]$と同様に$[M_a]$は速度項を含む非線形マトリックスである。従って式(4.60)は同時刻において収束するまで繰り返し演算を行なう。収束条件を次のように設定する。

$$\left| \left(\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r+1}_{m+1} - \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r}_{m+1} \right) \Big/ \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{r+1}_{m+1} \right| \leqq 0.01 \quad . \qquad ---(4.71)$$

式(4.71)を満足した後に時刻をΔt進行させる。

(5). 要素平均の物性値を用いて式(4.61)の各マトリックスを再構成する。さらに$[C_v]$は(4).で収束した速度値を用いて構成する。

(6). 式(4.61)より温度を求める。ここで求められた値を用いて各種物性値の温度修正を行なう。

(7). 以後同じ手順を繰り返し、時刻に関する次の収束条件を満たすまで演算を続行する。

$$\left| \left(\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{o}_{m+1} - \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{o}_{m} \right) \Big/ \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}^{o}_{m+1} \right| \leqq 0.01 \quad . \qquad -----(4.72)$$

4.7.4　計算結果

4.7.4.1　物性値一定の場合

図4.7(ａ)～(ｃ)は物性値を一定とした場合の無次元速度ベクトルと無次元温度の等温線図である。流れ場はＧｒ／Ｒｅ^2 の値で左右される。流れ場に浮力が加わった場合、流体は上壁面方向へ押し上げられ、逆に下壁面付近で流れは弱められる。この結果、下壁面方向への熱対流によるエンタルピ移動が少なくなる。図4.7(ａ)はこれらの現象を表わしている。しかしＧｒ／Ｒｅ^2 の値が1程度では、浮力は流れに大きな影響をあたえない。Ｇｒ／Ｒｅ^2 の値が1以上になると、図4.7(ｃ)に示すように粘性項、慣性項と比べて浮力項が支配的になり、下壁面方向の流れはほとんどない。温度場についても同様な現象が見られ、下壁面付近では熱はほとんど伝わらない。

図4.7(ａ)～(ｃ)の結果は、Ｐｒ数が異なるためにNS、EC、TEをFDM で解いたTorranceらの結果[7]、松田のMWR による結果[17]と直接的に比較できないが、傾向は良く一致している。

4.7.4.2　物性値の温度依存性を考慮した場合

図4.8(ａ)～(ｃ)は物性値の温度依存性を考慮したキャビティ内の強制対流における速度および温度分布を示す。これらの分布形状は物性値一定の結果と類似しているが、物性値の温度依存性による効果は次のように認められる。

(1). Ｇｒ／Ｒｅ^2 の値が1より小さい場合、物性値の温度依存性による拡散の影響があらわれる。その効果は渦中心付近において顕著になる。

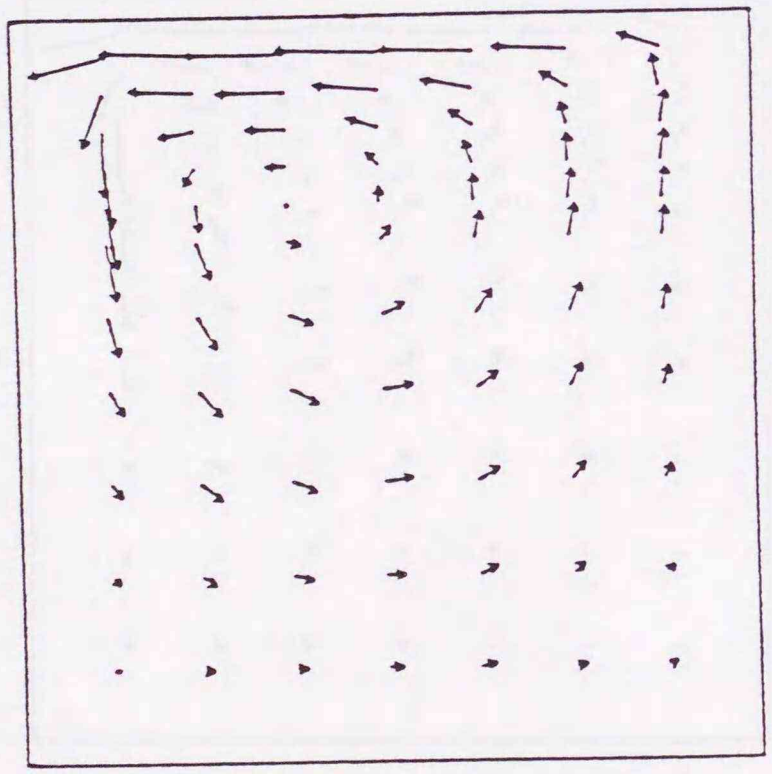
(2). Gr/Re^2 の値が1より大きくなると、キャビティ上壁面付近で次第に循環流が発達し、下壁面方向へのエンタルピ移動量は少なくなる。

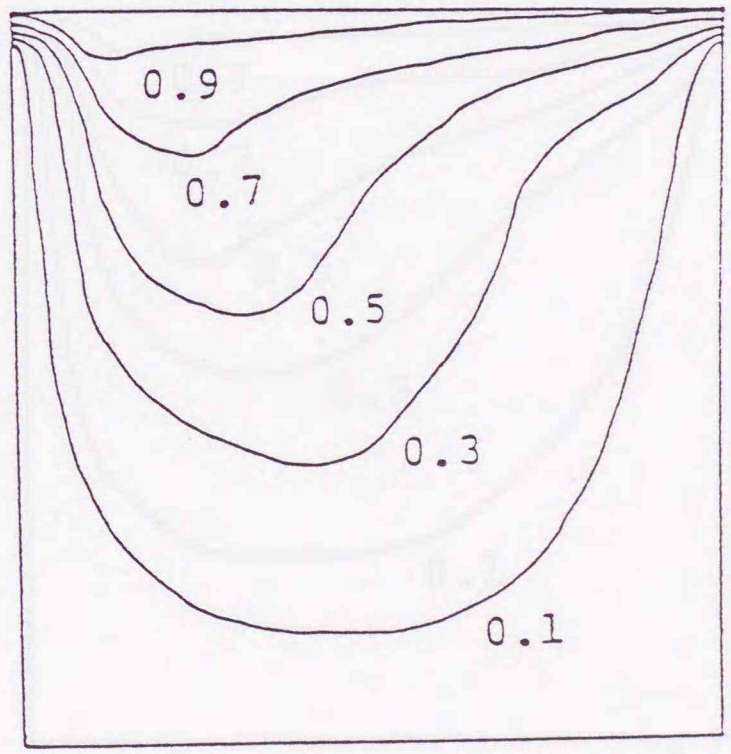
4.7.5 考察

熱流体挙動は通常、ブジネスク近似のもとで解析されている。しかし流体の温度差が大きくなると、物性値の温度依存性は無視できなくなる。本節では熱流体のための変分原理を用いて、物性値の温度依存性を考慮した熱流体挙動の有限要素解析法を提案した。

熱流体挙動の従来の解析方法は一般に、無次元化したNS、ECおよびTEを用いている[125-134]。このため物性値の温度依存性を考慮した熱流体挙動を解析する場合、全ての物性値、無次元数についても無次元化する必要があり、式が煩雑になる[125-134]。本解析法は式(4.60)、(4.61)からも明らかなように、無次元数を用いていない。各分割要素で物性値の温度依存性を考慮するだけでよい。従って数値解析が容易である。

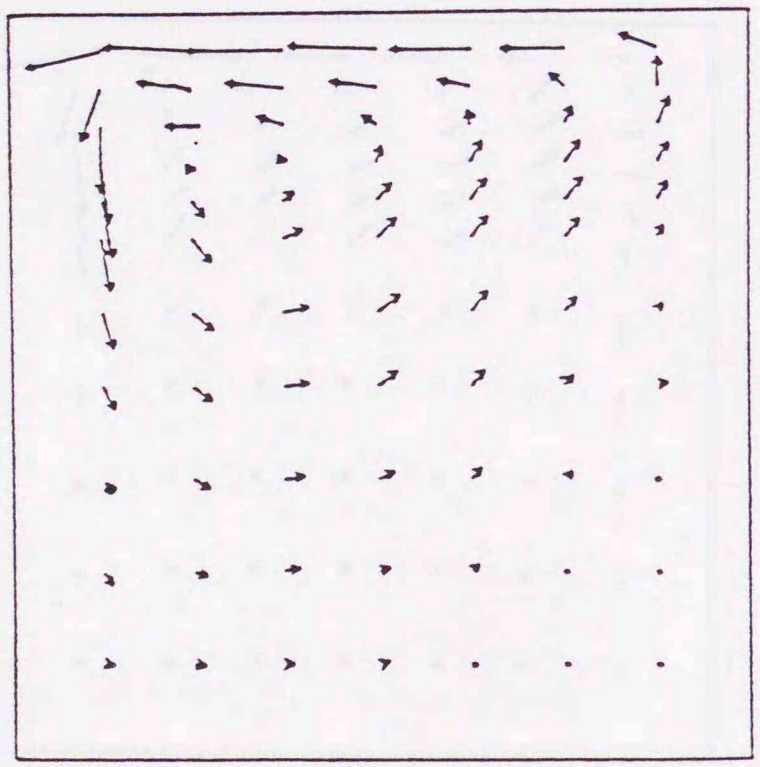
最後に、2次元キャビティ内の強制対流について有限要素解析した。その結果、本解析法の妥当性が確認された。

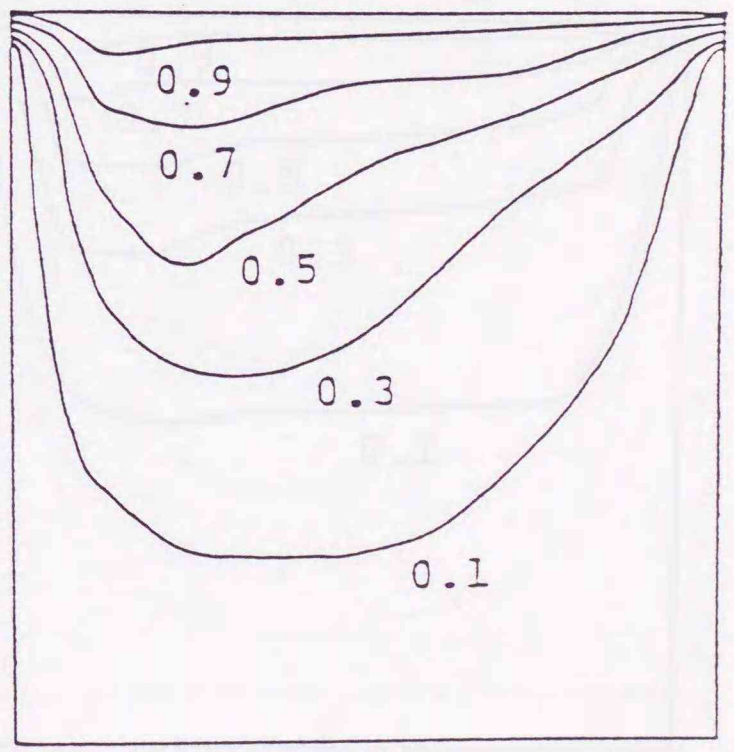




（a） $Gr/Re^2 = 0$

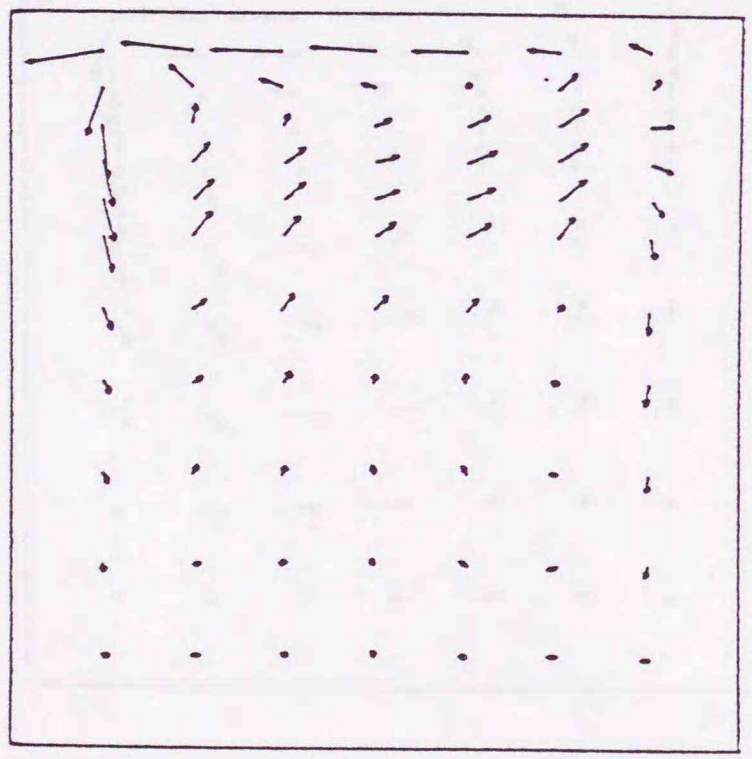
図４．７　速度および温度分布（物性値一定の場合）

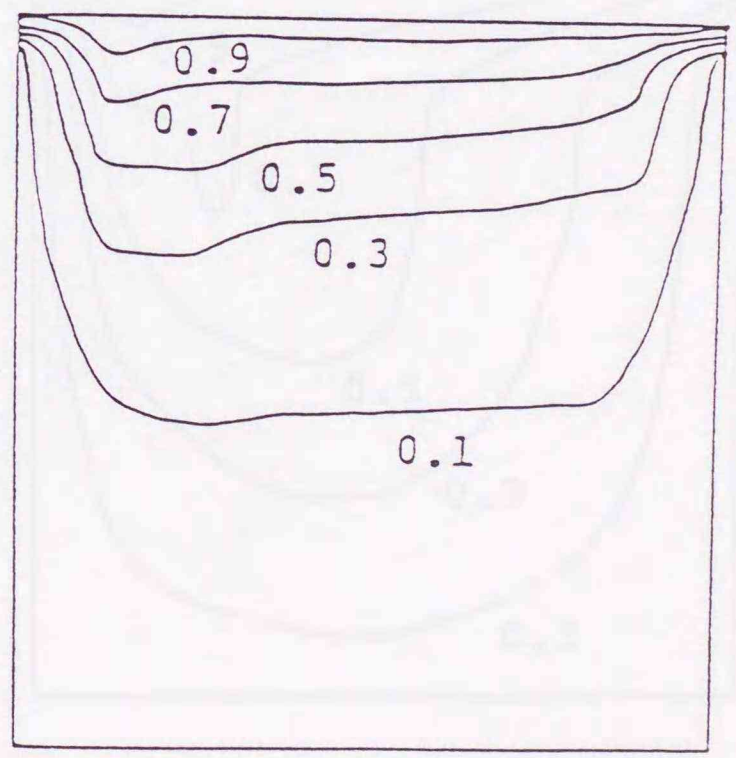




（b） $Gr/Re^2 = 1$

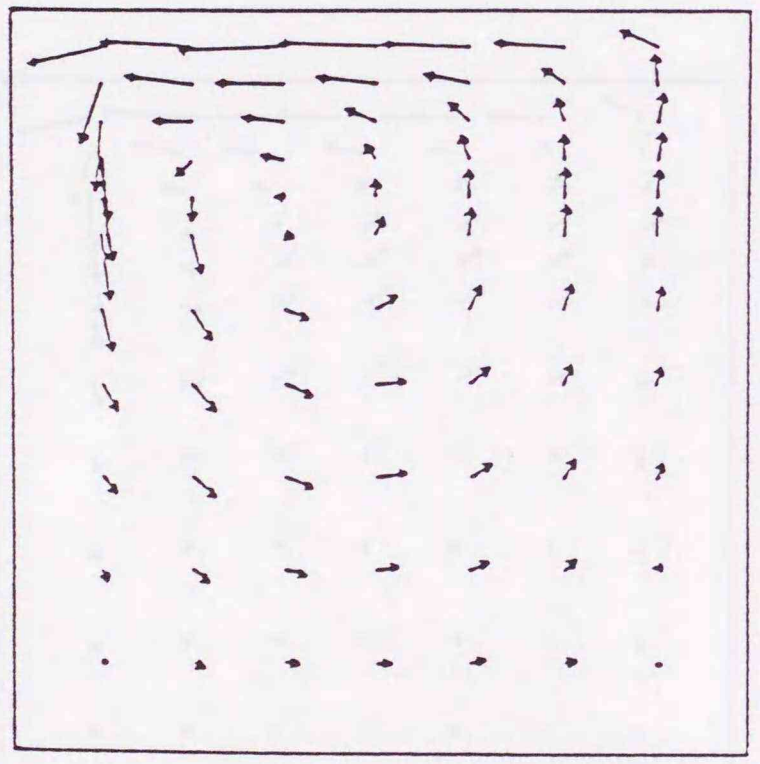
図４．７　速度および温度分布（物性値一定の場合）

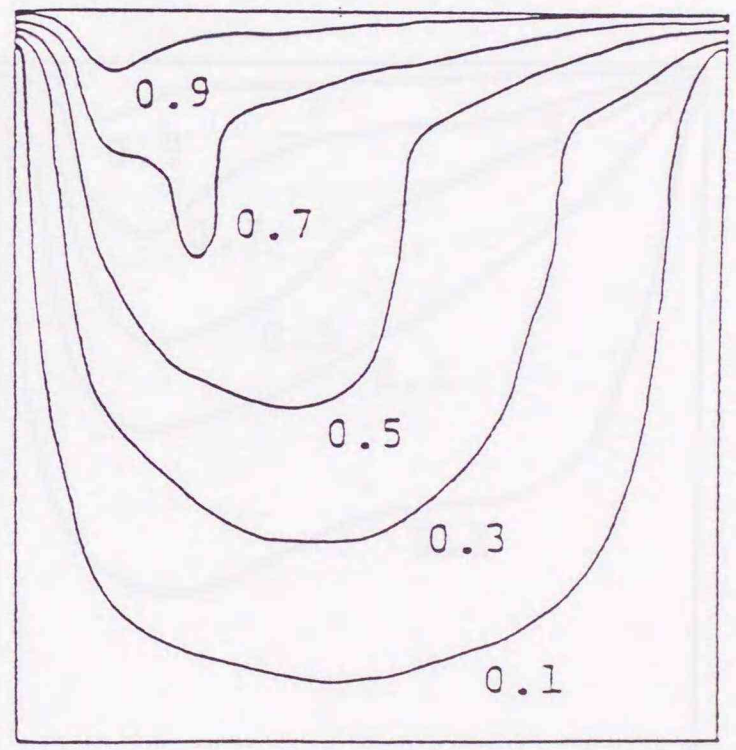




（c） $Gr/Re^2 = 10$

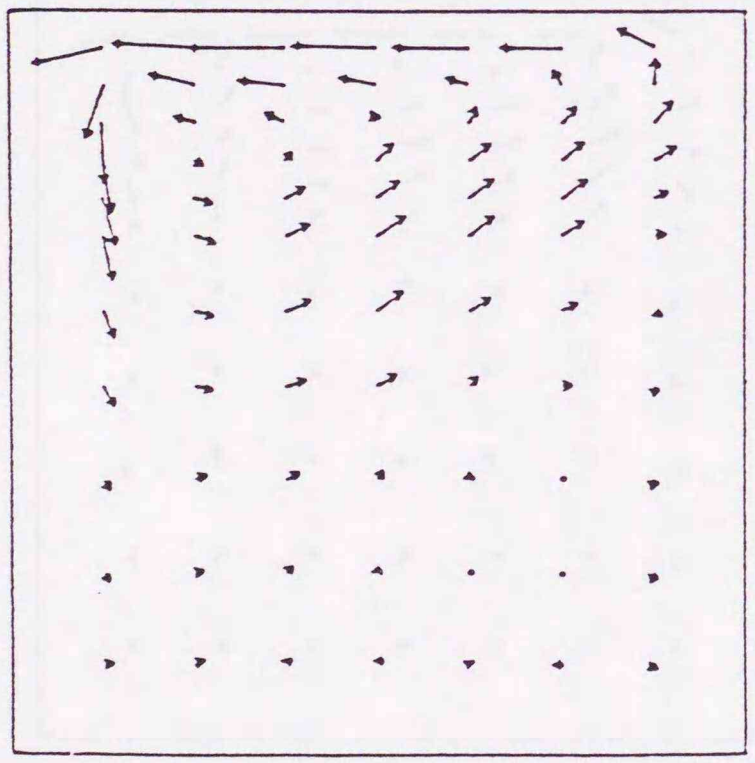
図４．７　速度および温度分布（物性値一定の場合）

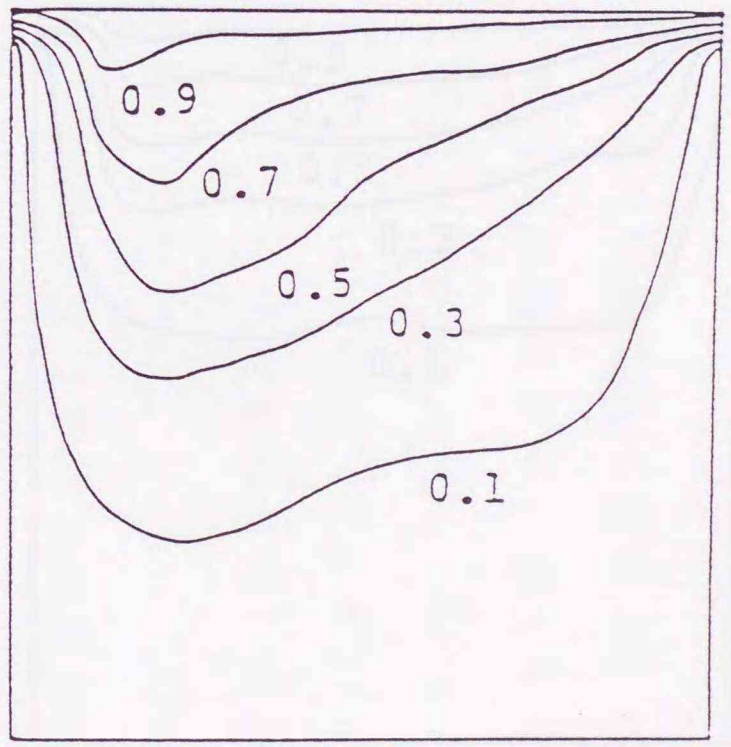




（a） Ｇｒ／Ｒｅ² ＝ ０

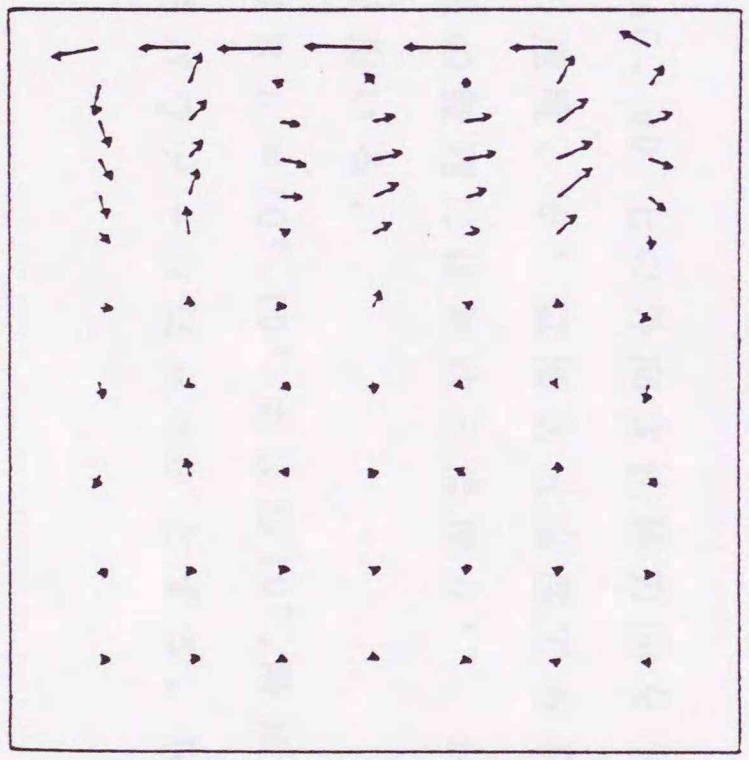
図４．８　速度および温度分布（物性値の温度依存性を考慮した場合）

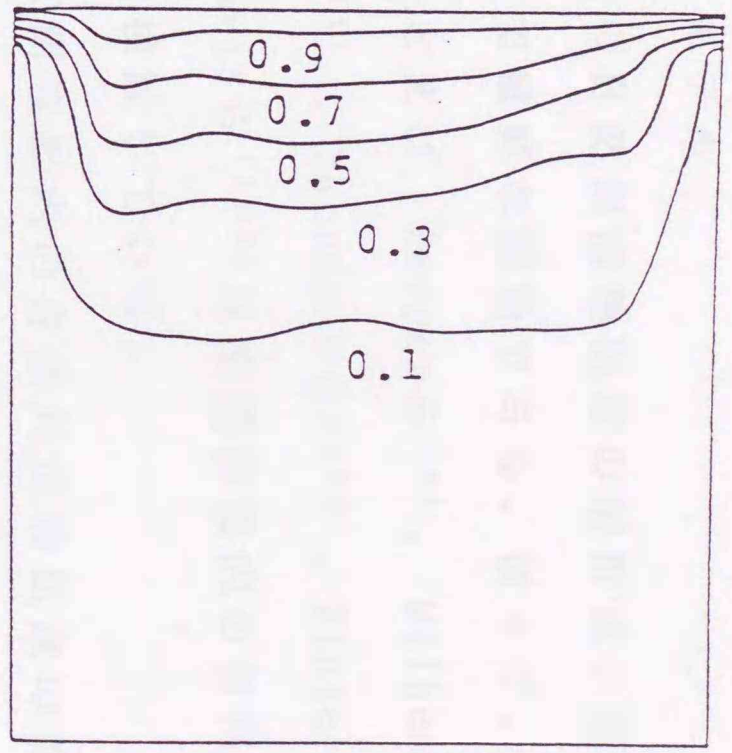




（b） Gr／Re² = 1

図４．８　速度および温度分布（物性値の温度依存性を考慮した場合）





（c） $Gr/Re^2 = 10$

図４．８　速度および温度分布（物性値の温度依存性を考慮した場合）

４．８　自然対流の数値計算

4.8.1　解析モデル

密閉容器内の自然対流熱伝達の解析は、室内の冷暖房効果などを評価するうえで重要な課題である。従って、この課題に関する解析例は多く、たとえば Pepperら[6]、Wilkes[10] ら、池川[15]、Surianoら[121]、Torranceら[122]、Winters[123]などの報告がある。また、Davisら[124]は密閉容器内の自然対流に関する研究例をまとめ、比較検討している。

図4.9 に密閉容器内の自然対流熱伝達のモデルを示す。文献(6)と(10)の結果と比較するために、境界条件を次のように設定する。

ABCD上　：　$\dot{u}=0$（ｃｍ／ｓ），$\dot{v}=0$（ｃｍ／ｓ），

AB 上　：　$\theta^{*}=1$，

CD 上　：　$\theta^{*}=0$，

AC,BD上　：　$\theta^{*}_{,n}=0$．

ここでｎは AC、BD 上の外向き法線方向を示し、$\dot{u}$と$\dot{v}$はそれぞれｘ、ｙ方向の速度、θ^{*} は無次元温度である。

本解析結果の整理には無次元温度θ^{*}、レイレー数Ｒａ、ヌッセルト数Ｎｕを用いる。

解析条件はＲａ＝10^{3}、10^{4} および10^{5}、時分割は$\Delta t=0.05$（ｓ）、時刻に関するパラメータは$\alpha=0$ とする。Ｒａは次のように定義する。

$$Ra=g\beta L^{3}(\Theta_{AB}-\Theta_{CD})/a\nu \quad ,\quad ---------(4.73)$$

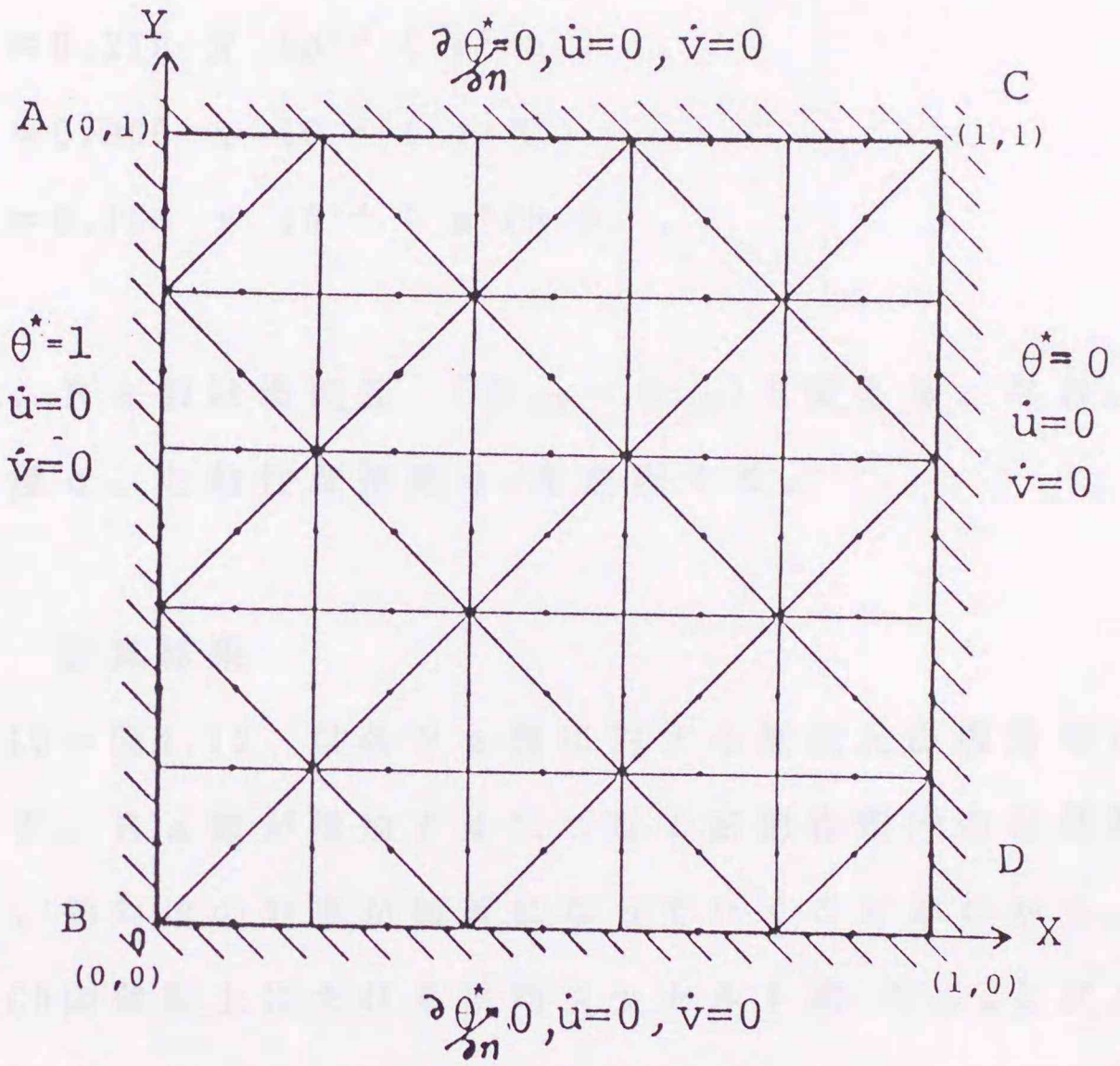


図４．９　密閉容器内の自然対流解析モデル

ここでａは温度伝導率、ｇは重力の加速度、βは熱膨張係数、νは動粘性係数、Ｌは代表長さ（１ｃｍ）である。流体は空気でａ、β、νの値はそれぞれ

$$a = 0.219 \times 10^{-4} \ (m^2/h) \ ,$$

$$\beta = 0.366 \times 10^{-2} \ (1/℃) \ ,$$

$$\nu = 0.156 \times 10^{-4} \ (m^2/h) \ ,$$

である。Ｒａ数は温度差（$\Theta_{AB} - \Theta_{CD}$）で変える。なお、熱源による発熱量$q_h$と粘性摩擦熱$q_f$を無視する。

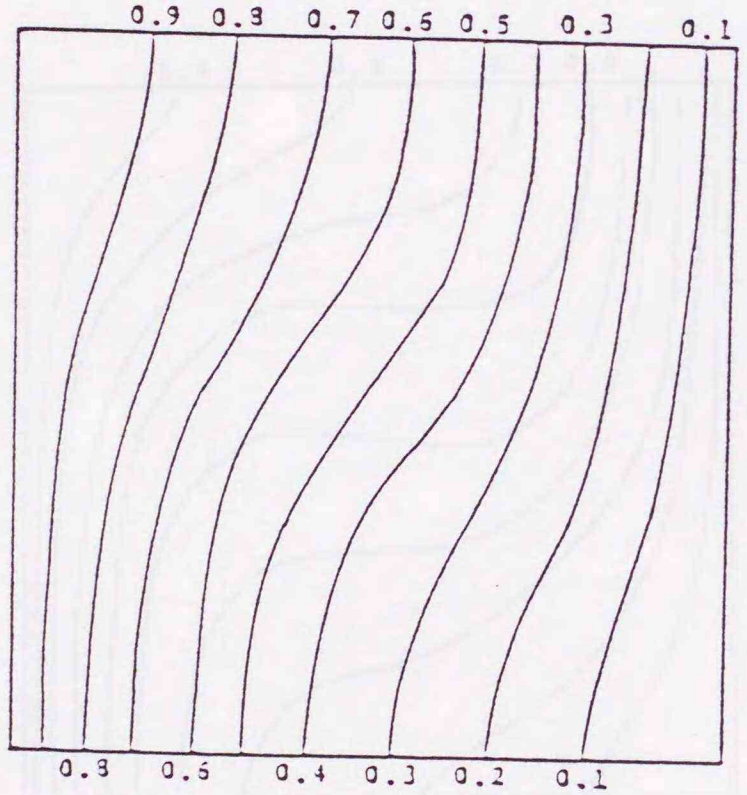
4.8.2　計算結果

図4.10～図4.12　は各Ｒａ数に対する無次元温度分布と速度分布を表わす。Ｒａ数が増加するにつれて密閉容器内の自然対流が活発になり、熱対流の効果が顕著になっていくことがわかる。図4.11は AB,CD両壁面上における平均ヌッセルト数 Nu_mとＲａ数との関係を表わす。Nu_mを次のように定義する。

$$Nu_m = \{ \int_0^1 \theta^*{}_{,x} \, |_{x=0} \, dy + \int_0^1 \theta^*{}_{,x} \, |_{x=1} \, dy \} / 2 \ .$$

---(4.74)

図4.13より文献(6)、(10) の差分解に良く一致していることがわかる。従って熱流体のための変分原理の妥当性が検証される。



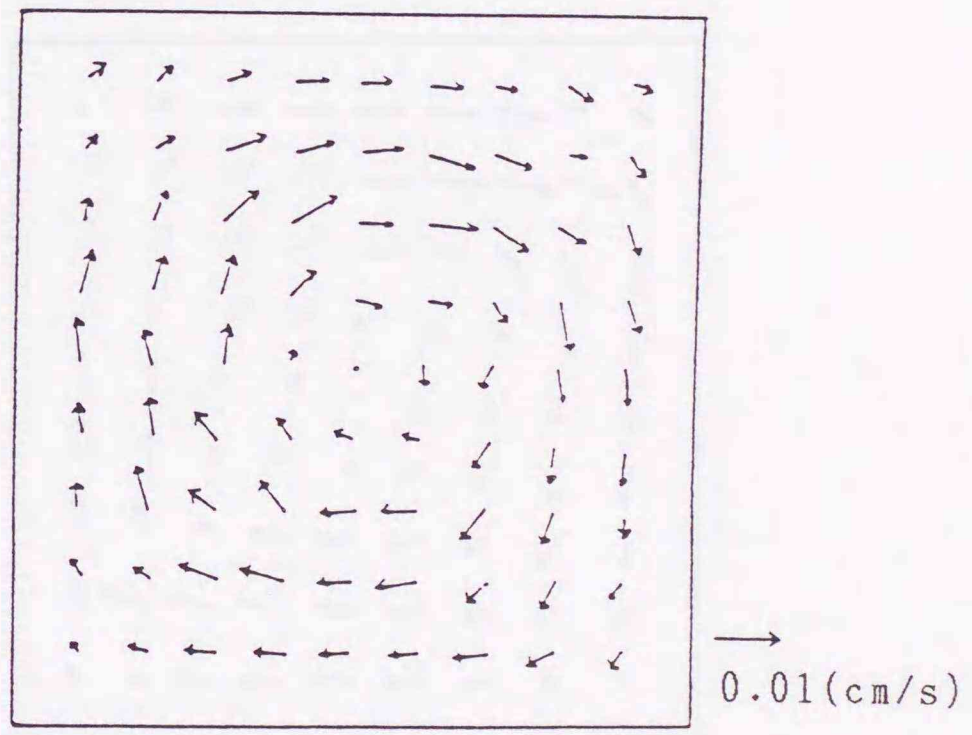
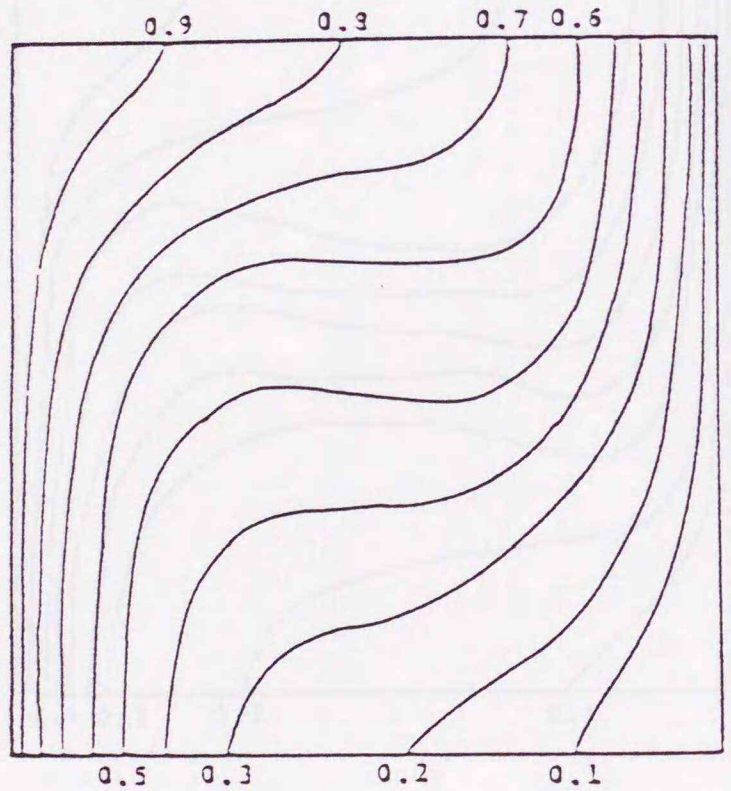


図４．１０　無次元温度分布と速度分布（　Ｒａ＝　10^3　）



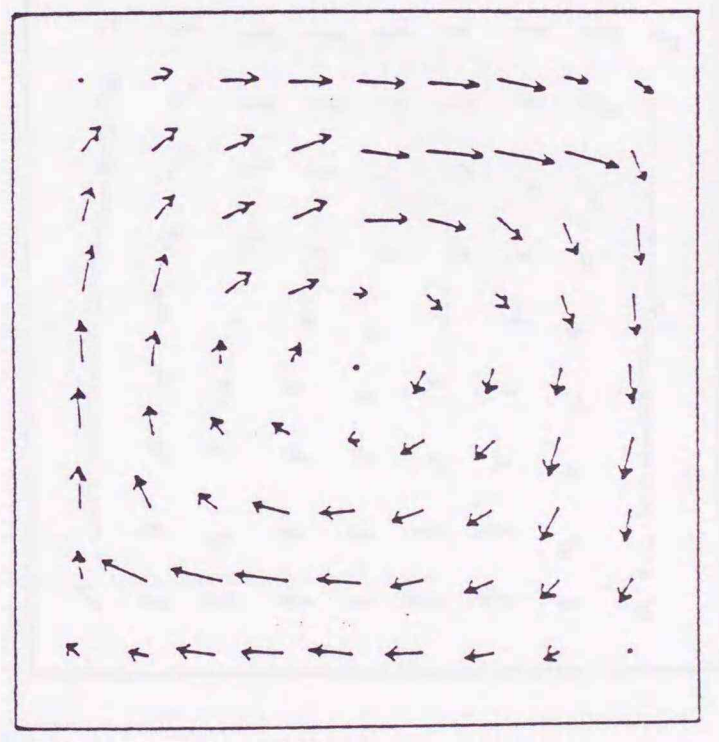
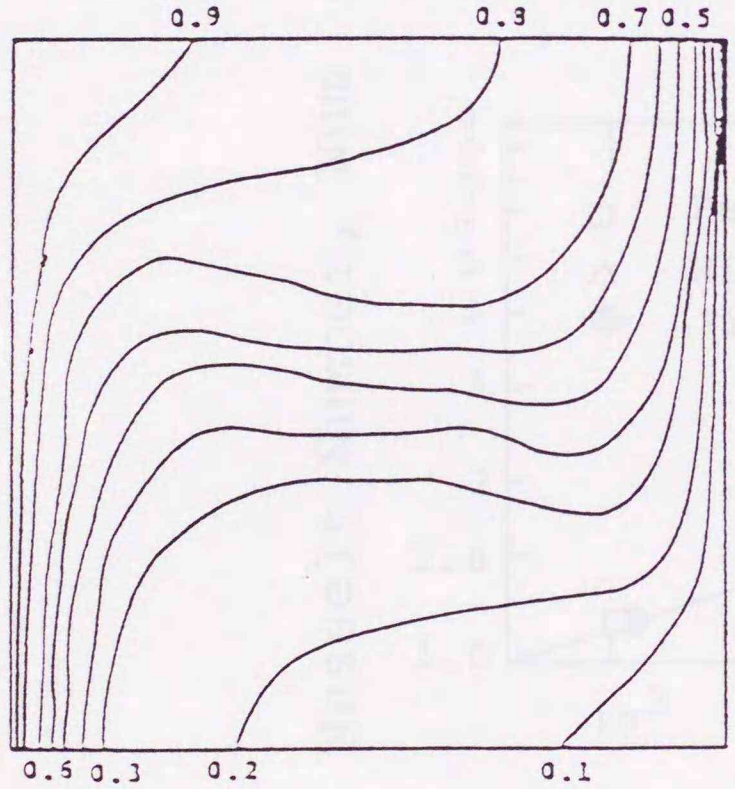


図４．１１　　無次元温度分布と速度分布　（　Ｒａ＝　10^4　）



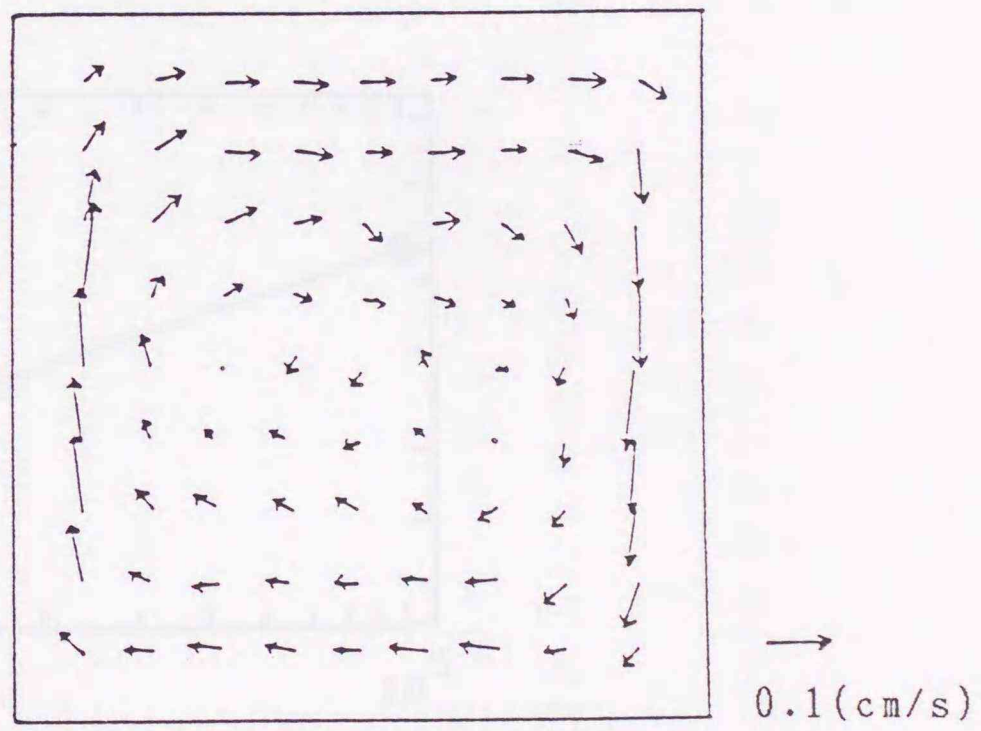


図４．１２　無次元温度分布と速度分布（　Ｒａ＝　10^5　）

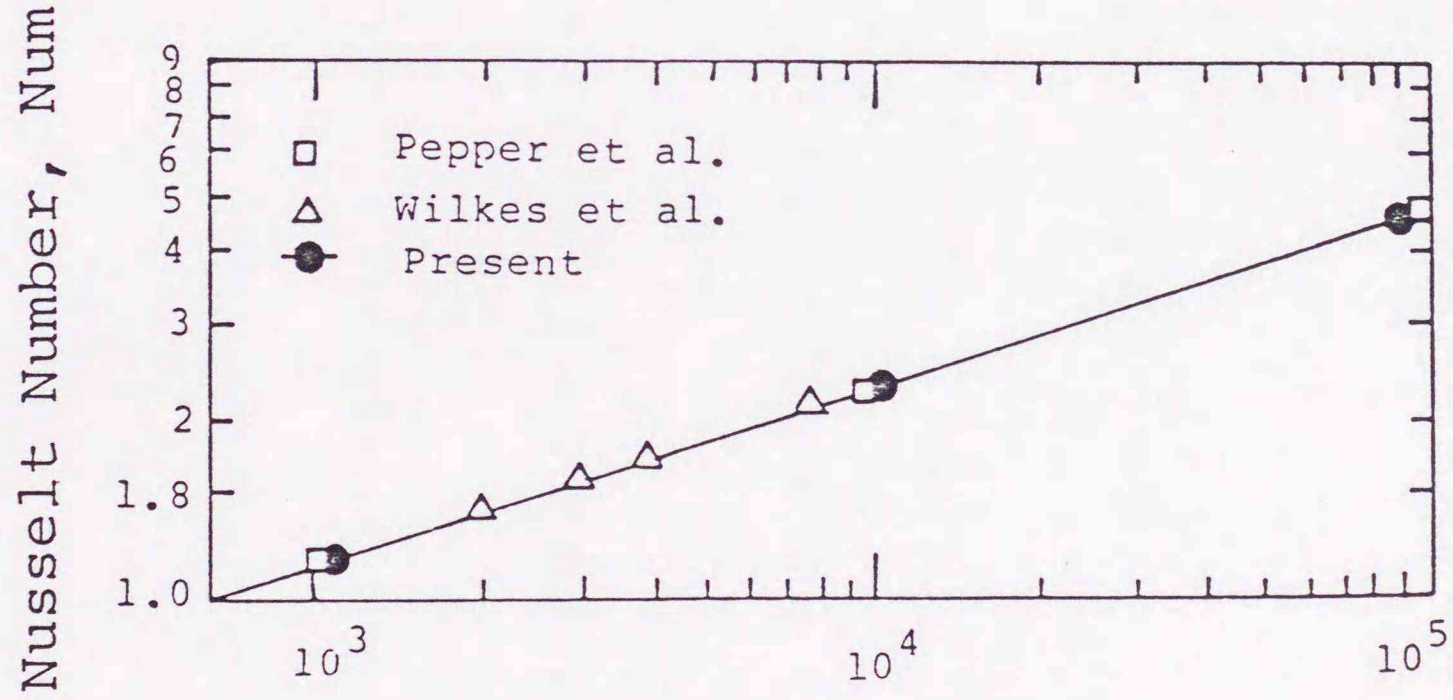


図４．１３　Nu_mとＲａ数との関係

4.8.3　考察

自然対流熱伝達の数値解析には通常NS、TEならびにTEが基礎式として用いられている。本節では、これらの基礎式を用いず、本章で提案した熱流体のための変分原理を密閉容器内の自然対流に適用し、FEM 解析した。その結果は従来の差分解と良く一致した。

４．９　考察

提案した熱流体のための変分原理の妥当性を検証するために、4.6～4.8節でキャビティ内の強制対流および密閉容器内の自然対流をFEM 解析した。その結果の考察は4.6～4.8節で述べた。

本節では、緒言で述べたように、温度場解析のための変分原理から熱エネルギ式を誘導する。

（ａ）　δU_d について：

式(4.8) を式(4.12)に代入すると、

$$\delta U_d = b \int_S \delta \varepsilon_d \cdot q_d \, dS$$

$$= b \int_S (\delta \Theta_{,x} \cdot q_{dx} + \delta \Theta_{,y} \cdot q_{dy}) \, dS ,$$

－－(4.75)

となる。右辺を部分積分すると、次のようになる。

$$\delta U_d = b \{ - \int_S \delta \Theta (q_{dx,x} + q_{dy,y}) \, dS$$

$$+ \oint_l \delta \Theta \cdot q_{dx} dy + \oint_l \delta \Theta \cdot q_{dy} dx \} .$$

－－(4.76)

$\oint_l$ は領域の境界積分を意味する。q_{dx}、q_{dy}は式(4.8) で与えられている。これを式(4.76)に代入すると次式が得られる。

$$\delta U_d = -b \{ \int_S \delta\Theta (\lambda_{11}\Theta_{,xx} + (\lambda_{12}+\lambda_{21})\Theta_{,xy} + \lambda_{22}\Theta_{,yy}) dS - \oint_l \delta\Theta (\lambda_{11}\Theta_{,x} + \lambda_{12}\Theta_{,y}) dy - \oint_l \delta\Theta (\lambda_{21}\Theta_{,x} + \lambda_{22}\Theta_{,y}) dx \} ,$$

$$--(4.77)$$

ここで$(\ )_{,x}$、$(\ )_{,y}$ はそれぞれxおよびyに関する偏微分を意味する。$(\ )_{,xx}$、$(\ )_{,yy}$はそれぞれxおよびyに関する2階の偏微分を意味する。また$(\ )_{,xy}$は xとyに関する偏微分である。

流体を等方性とすれば、$\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda$、$\lambda_{12}=\lambda_{21}=0$ であるから、式(4.77)は次のようになる。

$$\delta U_d = -b \{ \int_S \delta\Theta\lambda (\Theta_{,xx} + \Theta_{,yy}) dS - \oint_l \delta\Theta\lambda\Theta_{,x} dy - \oint_l \delta\Theta\lambda\Theta_{,y} dx \} .$$

$$--(4.78)$$

（b）δU_{et}とδU_{hf}について：

δU_{et}とδU_{hf}については式(4.14)、(4.15)で与えられている。これらの式を式(4.18)に代入すると次式が得られる。

$$b\{\int_S \delta\Theta\{-\lambda(\Theta_{,xx}+\Theta_{,yy})$$

$$+\rho c_p(\Theta_{,t}+\dot{u}\Theta_{,x}+\dot{v}\Theta_{,y})-q_h-q_f\}dS$$

$$+\lambda(\oint_l \delta\Theta\Theta_{,x}dy+\oint_l \delta\Theta\Theta_{,y}dx)\}=0. \quad --(4.79)$$

式(4.79)の左辺第２項は境界より出入りする熱伝導量に相当する。いま境界領域が断熱されているとすれば、式(4.79)の左辺第２項は零になる。式(4.79)においてδΘは任意の値を取り得るので、結局次の熱エネルギ式が得られる。

$$\rho c_p(\Theta_{,t}+\dot{u}\Theta_{,x}+\dot{v}\Theta_{,y})$$

$$=\lambda(\Theta_{,xx}+\Theta_{,yy})+q_h+q_f. \quad --(4.80)$$

式(4.80)は差分法などで温度場解析に用いられる基礎方程式である。

なお、式(4.79)の左辺第２項は上記のごとく、境界より出入りする熱量に相当する。これは温度勾配で表わされるので、ノイマン問題になる。一般に、ノイマン条件を導入した解析は非常に難しい。具体的な解析では、左辺第２項を零として断熱条件を課するか、または、境界からの伝熱量を熱伝達率を用いて近似する場合が多い。

4．10　結言

本章では次の結論を得た。

(1). 第3章で提案した流れ場解析のための仮想仕事の原理に基づいて、浮力の影響を考慮した熱流体挙動解析のための仮想仕事の原理を提案した。また浮力は流体の温度場に依存するために、温度場を解析するための変分原理も提案した。

(2). (1).で述べた二つの原理を結合して、熱流体のための変分原理を構築した。

(3). 熱流体のための変分原理に基づいて有限要素方程式を誘導した。

(4). 本解析法の妥当性を確かめるために、2次元キャビティ内の強制対流ならびに密閉容器内の自然対流を有限要素解析した。その結果、従来の結果と良く一致した。

(5). 本解析法を用いると、流体の物性値の温度依存性を考慮した流れ場の解析が可能であることを示した。

(6). 最後に、温度場に関する変分原理から、通常の温度場解析に用いられる熱エネルギ式が誘導できることを示した。

第５章
固体と流体との熱連成場解析のための変分原理と有限要素法

第３章では流れ場解析のための変分原理、第４章では流れ場に浮力が作用する熱流体のための変分原理をそれぞれ提案した。引き続いて、これらの原理に基づいて有限要素方程式を誘導した。そして、基本的なモデルを用いて数値解析し、本解析法の妥当性を確認した。

第４章で提案した温度場解析のための変分原理は流体のみの温度場を扱い、固体内部の温度場については一切論じていない。固体壁では、熱流束または温度が与えられていると仮定した。ところが一般には、固体表面における熱流束や温度は必ずしも既知ではなく、固体と流体の温度場は連成する場合が多い。

以上のことから本章では、第４章の理論を発展させて、固体と流体との熱連成場に適用できる変分原理を提案する。

５．１　緒言

原子炉の燃料棒の冷却、連続鋳造における冷却[35]や電子機器に用いられる半導体集積回路の冷却[36-41]など固体と周囲流体が熱的に連成する場の解明は工業的にも、工学的にも重要な課題である。すなわち、原子炉の燃料棒の冷却では安全性が、連続鋳造や半導体集積回路の冷却では、製品の精度や信頼性が問題になる。　このような熱連成場における温度場解析のための代表的な理論と特徴を表5.1 に示す[56-72]。研究課題を明確にするために、表5.1 を参照して、従来の熱連成場解析に関する研究の概要と問題点を次章で検討する。

本章では、固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理を提案する。次に、この変分原理と第４章で既に提案した流れ場解析のための仮想仕事の原理を連成させて、固体と流体との熱連成場解析のための変分原理を構築する。引き続いて、熱連成場解析のための変分原理に基づくFEM を誘導する。最後に、このFEM を内部発熱する固体と周囲流体との２次元自然対流熱連成場解析に適用する。

本章で提案する熱連成温度場解析のための変分原理より、固体の熱伝導方程式および流体の熱エネルギ式が誘導できる。誘導方法を本章の考察で述べる。

なお、本論文で提案する熱連成場解析のための変分原理に基づくFEM を用いると、過渡的な状態における固体内部の温度分布および周囲流体の温度と流動状態が能率的に、しかも精度良く計算できる。また局所的な熱伝達特性も求めることができる。従って、原子炉の燃料棒などのように、内部発熱し、しかも熱伝達率が局所的に変わ

る非定常伝熱現象の解明に適している。さらに、燃料棒内に発生する熱応力も算出可能である。このため、燃料棒の過熱による溶融や熱応力による変形や破損などを未然に防ぐことが可能になる。以上の事より、本変分原理に基づくFEM は原子炉の安全設計に有効である。

一方、本論文で扱う流れは層流である。ところが、各種工業製品や工業装置を取り巻く流体の流れは殆どが乱流である。現在、乱れによるエネルギを用いた乱流解析の研究が数多く行なわれているが、現象が複雑であるため、乱流エネルギの決定的な評価は、まだ確立されていないようである。本論文で提案している変分原理は、流れ場をエネルギ系で扱っている。このため、乱流エネルギを正しく評価することができれば、変分原理に基づく有限要素法を用いて乱流の解析が可能になり、より実用的になる。

5．2　問題の提示

5.2.1　熱連成場解析に関する従来の研究の概要と問題点

従来の熱連成場解析の理論は、熱流体の挙動解析にNS、ECおよびTE、固体の温度場解析にTCを基礎式としている。そして、固体と流体との熱連成場の研究は通常、流体を中心とした伝熱問題として取り扱い、固体の熱容量や熱伝導が流体に及ぼす影響を調べている。

本節では、固体と流体との熱連成場を扱った従来の主な報告例をあげ、その概要と問題点を述べる。

固体の熱容量のみを考慮した報告例として Gebhart[42-48]、Mollendorf[49]、Adams[50]、Soliman[51]、花輪[52-55] などの

表５．１　熱連成温度場解析のための理論と特徴

理論	流動状態	固体と流体の温度場の取り扱い	熱的境界条件の反復演算	文　献
TE&TC (FDM)	定常流れ	分離	必要	Lockら[56]、Zinnes[57] 岸浪ら[58,59] Broshら[60]、Sekiら[61]
	非定常流れ			智田[62]、Sunden[63-67]
TE&TC (FDM)	定常流れ 非定常流れ	一体	不必要	Patankar[68,69] 石代ら[70]
VP (FEM)	定常流れ	一体	不必要	亀ケ谷ら[71]
	非定常流れ			亀ケ谷ら[72]

TE　：　Equation of Thermal energy for fluid.

TC　：　Equation of Heat conduction for solid.

VP　：　Variational Principle for thermally coupled problems between solid and fluid.

FDM：　Finite Differnce Method.

FEM：　Finite Element Method.

研究がある。これらの解析例は固体の熱伝導を考慮していない。このため固体内部の温度は求められない。固体の熱伝導を考慮しないと、境界面上において熱授受の平衡条件は不要である。従って、これらの研究例で扱われている伝熱現象は、厳密な意味において熱連成現象と言えない。

固体の熱伝導を考慮して定常熱連成場を扱った例として Lockら[56]、Zinnes[57]、岸浪ら[58,59]、Broshら[60]、Sekiら[61]の報告がある。

固体の熱容量と熱伝導を考慮して熱連成場を扱った報告例として智田[62]、Sunden[63-67]、Patankar[68,69]、石代ら[70]の研究がある。

熱連成温度場の扱い方として、固体と流体を個別または一体化して扱う方法がある。文献(42)～(67)は前者の方法、文献(68)～(70)は後者の方法を採用している。個別に扱うと、境界面において熱的境界条件（熱流束の連続性の条件と温度一致の条件）を満足させるための反復計算が必要になる。一体化して扱うと、この欠点はなくなる。しかし、文献(68)～(70)は境界において、固体と流体の熱伝導率を平均化した値を用いている。このため、両者の熱伝導率の比が大きくなると、境界面上の温度分布や熱流束を正確に評価できなくなる。以上が従来の熱連成場解析における問題点である。

著者はNS、EC、TEおよびTCなどの基礎式を用いない解析理論として、熱連成場解析のための変分原理を提案している[71,72]。本原理は固体と流体を一体化して扱う。しかし、境界において両者の熱伝導率の平均値を用いていない。従ってこの原理を用いると、上で述べた従来の方法の問題点は解消され、精度の良い解析が可能にな

る。

5.2.2　本章の具体的な検討事項

本章では、文献(71)、(72)に基づいて固体と流体との熱連成場解析のための変分原理を構築する。初めに、固体と流体の境界において熱移動量を導入した固体および流体の温度場解析のための変分原理をそれぞれ提案する。これらの変分原理に基づいて、固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理を誘導する。これらの原理を結合すると、固体と流体との熱連成場解析のための変分原理になる。引き続いて、この原理に基づくFEM を導く。最後に、これらのFEM を２次元熱連成場に適用する。すなわち、流体中に設置され、内部の発熱量が部分的に既知であり、有限な高さの垂直平板と周囲流体との自然対流に関する定常および非定常熱連成場をFEM 解析する。また、この結果から本章で提案した変分原理の妥当性を証明する。なお本章では自然対流と固体との熱連成場に限定する。

５．３　固体と流体との熱連成場解析のための変分原理

取り扱いを簡単にするために、本章では固体と流体との熱連成場を２次元問題に限定する。このような熱連成場において、流体は固体に付着しており、すべりや剝離を起こさないと仮定する。さらに固体からのふく射熱の影響は無視できるものとする。

固体と流体との熱連成場解析のための変分原理は前述のように、流れ場解析のための原理と温度場解析のための原理から成り立っている。本節では初めに、温度場解析のための変分原理を提案する。

次に、第４章で既に提案した流れ場解析のための仮想仕事の原理を概説する。

5.3.1　温度場解析のための変分原理

本節では初めに、境界面上で熱移動を考慮した固体と流体の温度場解析のための変分原理をそれぞれ提案する。引き続いて、これらの変分原理に熱授受の平衡条件を考慮して、固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理を提案する。

5.3.1.1　固体の温度場解析のための変分原理

固体の温度場には、内部熱源による発熱量、熱容量、熱伝導量などが関与する。著者はこれらの熱量に基づいた固体の温度場解析のための変分原理を提案している[32]。固体と流体が熱的に連成する場合、境界面上で熱移動量を考慮する必要がある。熱移動量を考慮した固体の温度場解析のための変分原理は次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_{ts} + \delta U_{ds} - \delta U_{hs} - \delta U_{sf})\, dt = 0, \quad ---(5.1)$$

ここでδU_{ts}、δU_{ds}、δU_{hs}およびδU_{sf}は熱容量、熱伝導、熱源および固体から流体へ移動する仮想熱量に相当する。δは変分演算子、t_1、t_2は時刻を意味する。式(5.1)の各項は次のように表わされる。

$$\delta U_{ts} = b \int_{Ss} \rho_s C_s \delta \Theta \Theta_{,t} dS \quad ,$$

$$\delta U_{ds} = b \int_{Ss} \delta \varepsilon_d \cdot q_{ds} dS \quad ,$$

$$\delta U_{hs} = b \int_{Ss} \delta \Theta q_{hs} dS \quad ,$$

$$\delta U_{sf} = b \oint_{l} \delta \Theta q_{sf} dl \quad , \qquad ----------(5.2)$$

ここでq_{ds}は伝導熱量、q_{hs}は熱源による内部発熱量、q_{sf}は固体から流体へ移動する熱量である。Θは温度、ε_dは温度勾配、ρは密度、C は比熱である。$\Theta_{,t}$は温度の時間 t に関する微分である。b は厚さ、S は積分領域、l は境界の長さである。添字 s は固体を意味する。

境界で移動する熱量q_{sf}は熱伝導に依存する。しかし固体周りの流体挙動に影響されるので、その値を決定することは非常に難しい。従って式(5.2) の δU_{sf} は一般に未知である。本章でも δU_{sf} を未知として扱う。

5.3.1.2　流体の温度場解析のための変分原理

流体の温度場には熱容量、熱伝導、熱対流、熱源、粘性摩擦などが関与する。著者はこのような流体の温度場に関する変分原理を提案し、その妥当性を確認している[32-34]。流体と固体が熱的に連成する場合、境界で熱の移動を考慮する必要がある。第4章で提案した変分原理に境界の熱移動を考慮すると、次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_{tf} + \delta U_{df} + \delta U_{ef} - \delta U_{hf} - \delta U_{nf} - \delta U_{fs}) \, dt = 0 \quad , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.3)$$

ここで添字 fは流体を意味する。δU_{tf}、δU_{df}、δU_{ef}、δU_{hf}、δU_{nf} はそれぞれ流体の熱容量、熱伝導、熱対流、熱源および粘性摩擦熱による仮想熱量に相当する。δU_{fs}は流体から固体へ移動する仮想熱量に相当する。本章では式(5.3) のδU_{fs}を式(5.1) のδU_{sf}と同じように未知として扱う。また左辺最後の項を導入した変分原理を提案する。式(5.3) の各項は次のように表わされる。

$$\delta U_{tf} = b \int_{Sf} \rho_f C_{pf} \delta \Theta \Theta_{,t} \, dS \, ,$$

$$\delta U_{df} = b \int_{Sf} \delta \varepsilon_d \cdot q_{df} \, dS \, ,$$

$$\delta U_{ef} = b \int_{Sf} \rho_f C_{pf} \delta \Theta (\dot{u} \Theta_{,x} + \dot{v} \Theta_{,y}) \, dS \, ,$$

$$\delta U_{hf} = b \int_{Sf} \delta \Theta q_{hf} \, dS \, ,$$

$$\delta U_{nf} = b \int_{Sf} \delta \Theta q_{nf} \, dS \, ,$$

$$\delta U_{fs} = b \oint_{l} \delta \Theta q_{fs} \, dl \, , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.4)$$

ここでq_n は粘性摩擦熱、q_{fs}は流体から固体へ移動する熱量である。c_p は定圧比熱である。$\dot{u}$、$\dot{v}$はそれぞれx、y方向の速度を意味する。$( )_{,x}$、$( )_{,y}$はそれぞれx、yに関する偏微分である。

5.3.1.3　固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理

境界面において固体から流体へ移動する熱量と流体から固体へ移動する熱量は、熱授受の平衡条件により等しい。式(5.1)のδU_{sf}は固体から流体へ移動する仮想熱量に相当する。また、式(5.3)のδU_{fs}は流体から固体へ移動する仮想熱量に相当する。固体と流体は付着しているので、次の関係が成立する。

$$\delta U_{sf} + \delta U_{fs} = 0 . \qquad ---------- (5.5)$$

式(5.5)から境界面において両者の温度は一致する。また、温度の時間微分も一致する。従って次の関係が成立する。添字 w は境界面を意味する。

$$\Theta_{sw} = \Theta_{fw} ,$$
$$\dot{\Theta}_{sw} = \dot{\Theta}_{fw} . \qquad ---------- (5.6)$$

また式(5.6)から仮想の温度に関しても次式が成立する。

$$\delta \Theta_{sw} = \delta \Theta_{fw} . \qquad ---------- (5.7)$$

式(5.5)が固体と流体との熱連成場解析に必要な熱的境界条件になる。

なお弾性体の接触問題では、境界面において式(5.5)は反力のつりあい条件式、式(5.6)は変位および速度が一致する条件式、　式

(5.7) は仮想変位が一致する条件式に相当する。浅野はこれらの条件式が成立することを文献(137)～(142) で確認している。

式(5.5) を式(5.1)、(5.3)に代入すると、固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理が構築され、これを一般形式で表現すると次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} \sum_{i=s,f} (\delta U_{ti} + \delta U_{di} + \delta U_{ei} - \delta U_{hi} - \delta U_{ni}) dt = 0 , \quad -(5.8)$$

ここで固体部では熱対流と粘性摩擦熱がないため、次式が成立する。

$$\delta U_{es} = 0 , \quad \delta U_{ns} = 0 . \quad ----------(5.9)$$

式(5.9) の条件を考慮して式(5.8) を展開すると、次のようになる。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_{ts} + \delta U_{ds} - \delta U_{hs} + \delta U_{tf} + \delta U_{df} + \delta U_{ef} - \delta U_{hf} - \delta U_{nf}) dt = 0 . \quad --------(5.10)$$

5.3.2　流れ場解析のための仮想仕事の原理

5.3.1 節では固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理を述べた。しかし固体には流れ場がないので、流体のみの流れ場を扱う。

著者は固体力学で用いられる仮想仕事の原理を流れ場に適用し、定常粘性流れ(73-77) および非定常粘性流れ(117、118) について、

これらの妥当性を確認している。また浮力の影響を受ける熱流体挙動のための変分原理を提案し、その妥当性を検証している[32-34]。誘導過程は第4章で詳細に述べているので、本章では結果のみを式(5.11)に示す。

$$\int_{t1}^{t2} (\delta U_{af} + \delta U_{cf} + \delta U_{vf} + \delta U_{bf} - \delta U_{pf} - \delta U_{wf}) \, dt = 0 ,$$

$$\int_{t1}^{t2} \delta U_{gf} \, dt = 0 , \qquad ----(5.11)$$

ここでδU_{af}、δU_{c}、δU_{v}、δU_{b}、δU_{p}、δU_{w}はそれぞれ加速度形慣性力、対流形慣性力、粘性、浮力、圧力および外力による仮想仕事である。　δU_{g}は流体の連続性を表わす条件である。式(5.11)の各項は次のように表わされる[32-34]。

$$\delta U_{af} = b \int_{Sf} \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_{af} \, dS ,$$

$$\delta U_{cf} = b \int_{Sf} \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_{cf} \, dS ,$$

$$\delta U_{vf} = b \int_{Sf} \delta \mathbb{\varepsilon} \cdot \mathbb{\sigma}_{f} \, dS ,$$

$$\delta U_{bf} = b \int_{Sf} \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_{bf} \, dS ,$$

$$\delta U_{pf} = b \int_{Sf} \delta \mathbb{\varepsilon}_{v} \cdot \mathbb{P} \, dS ,$$

$$\delta U_{wf} = b \{ \int_{Sf} \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_{wf} \, dS + \oint_{l} \delta \mathbb{u} \cdot \mathbb{f}_{lf} \, dl \} ,$$

$$\delta U_{gf} = b \int_{Sf} \delta \mathbb{P} \cdot \dot{\mathbb{\varepsilon}}_{v} \, dS , \qquad ------(5.12)$$

ここで$\mathbb{u}$は変位、εはひずみ、ε_vは体積ひずみ、σは偏差応力、$\mathbb{P}$は圧力、$\mathbb{f}_a$は加速度形慣性力、$\mathbb{f}_c$は対流形慣性力、$\mathbb{f}_w$は物体力、$\mathbb{f}_t$は表面力の各ベクトルである。・は時間に関する微分を意味する。

5.3.3　両変分原理の関係

式(5.10)の熱対流項δU_{ef}は速度の関数である。そこで、流体の速度場を式(5.11)から求める必要がある。式(5.11)は浮力項δU_{bf}を含む。浮力項は固体の壁面温度ならびに流体の温度から算出される。　従って、固体と流体との熱連成場解析に必要な変分原理は式(5.10)と(5.11)になる。

5．4　有限要素法の定式化の概略

流れ場および温度場に関する有限要素法の定式化は第２～４章までに詳細に述べた。　従って、本章では式(5.10)、(5.11)に基づくFEM の定式化の概略を示す。また本FEM を用いた熱連成場の計算手順についても述べる。

5.4.1　熱連成場の有限要素方程式

図5.1、5.2にFEM の定式化に用いる三角形６節点要素および３節点要素を示す。要素内の変位ｕ、圧力Ｐ、温度Θおよび熱量q_hは次のようになる。

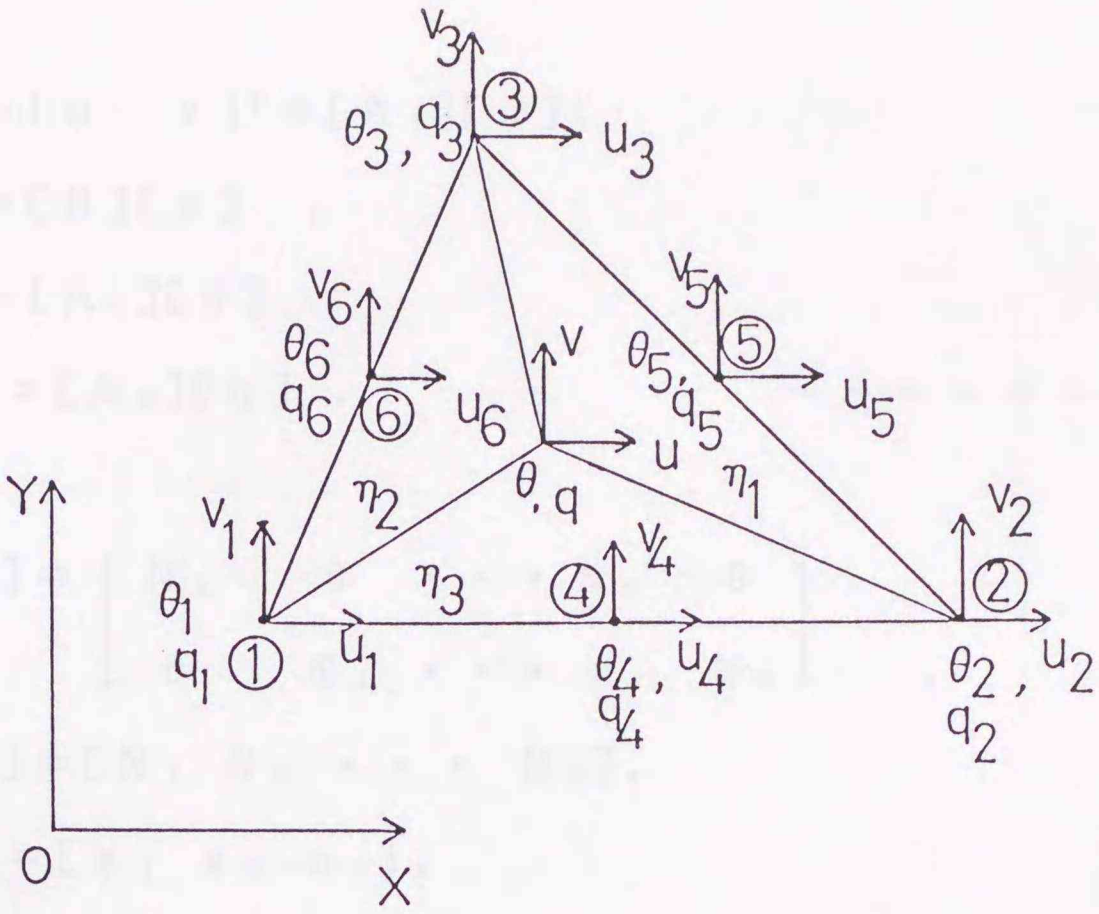


図５．１　変位、温度および熱量に関する座標系

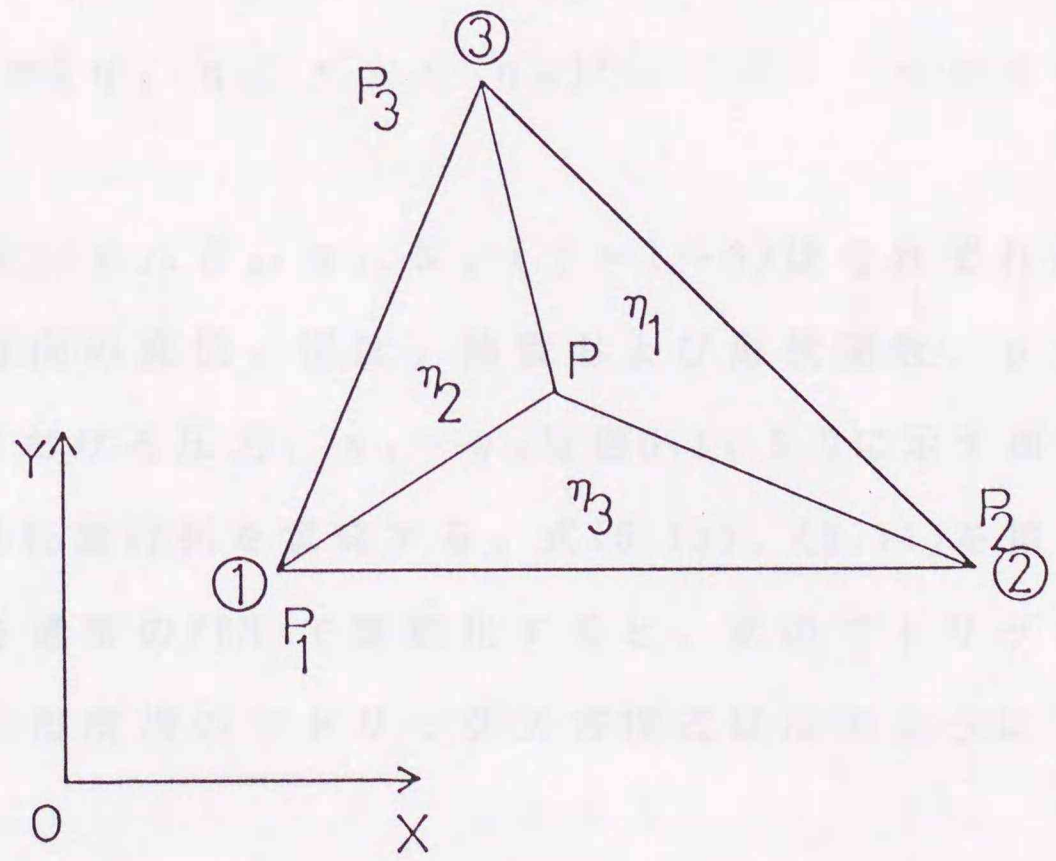


図５．２　圧力に関する座標系

$$u = [u \quad v]^T = [A_1][d],$$

$$P = [H][p] \quad ,$$

$$\Theta = [A_2][\theta] \quad ,$$

$$q_h = [A_2][q] \quad , \qquad \text{---------(5.13)}$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$[A_2] = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_6],$$

$$[H] = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3],$$

$$N_1 = 2\eta_1^2 - \eta_1, \qquad N_4 = 4\eta_1\eta_2 \quad ,$$

$$N_2 = 2\eta_2^2 - \eta_2, \qquad N_5 = 4\eta_2\eta_3 \quad ,$$

$$N_3 = 2\eta_3^2 - \eta_3, \qquad N_6 = 4\eta_3\eta_1 \quad ,$$

$$[d] = [u_1 \quad v_1 \quad \cdots \quad u_6 \quad v_6]^T,$$

$$[p] = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T,$$

$$[\theta] = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_6]^T,$$

$$[q] = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_6]^T, \qquad \text{---------(5.14)}$$

ここでu_j、v_j、θ_j、q_j、N_j（$j=1\sim6$）はそれぞれ節点jにおけるxとy方向の変位、温度、熱量および形状関数、p_j（$j=1\sim3$）は節点jにおける圧力、$\eta_1\sim\eta_3$は図5.1、5.2に示す面積座標である。$[\,]^T$は転置行列を意味する。式(5.13)、(5.14)を用いて式(5.10)、(5.11)を通常のFEMで離散化すると、次のマトリックス方程式が得られる。温度場のマトリックス方程式は次のようになる。

$$\Sigma \{[M_t][\dot{\theta}] + [C_d + C_v][\theta]\} = \Sigma [Q] \quad . \quad ----(5.15)$$

$$[M_t] =$$

$$\begin{bmatrix} M_{tsi} & M_{tsiw} & 0 & 0 \\ M_{tsiw}^T & M_{tsw} & M_{tfiw} & 0 \\ 0 & M_{tfiw}^T & M_{tfi} & M_{tfi\infty} \\ 0 & 0 & M_{tfi\infty}^T & M_{tf\infty} \end{bmatrix} ,$$

$$[C_d + C_v] =$$

$$\begin{bmatrix} C_{dsi} & C_{dsiw} & 0 & 0 \\ C_{dsiw}^T & C_{dsw} + C_{dfw} & C_{dfiw} & 0 \\ 0 & C_{dfiw}^T & C_{dfi} + C_{vfi} & C_{dfi\infty} \\ 0 & 0 & C_{dfi\infty}^T & C_{df\infty} \end{bmatrix} ,$$

$$[\theta] = [\theta_{si} \quad \theta_w \quad \theta_{fi} \quad \theta_\infty]^T \quad ,$$

$$[Q] = [Q_{si} \quad 0 \quad Q_{fi} \quad 0]^T \quad . \quad ----------(5.16)$$

また流れ場のマトリックス方程式は次のようになる。

$$\Sigma \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \dot{p} \end{bmatrix} + \Sigma \begin{bmatrix} K + M_c & -G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix}$$

$$= \Sigma \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \Sigma \begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix} , \quad ---(5.17)$$

ここでΣはマトリックス合成を意味する。　添字 i は内部、 w は境界を意味する。$[M_t]$ は熱容量マトリックス、$[C_d]$ は熱伝導マトリックス、$[C_v]$は熱対流マトリックス、$[\theta]$は節点温度ベク

トル、[θ_w]は境界面の節点温度ベクトル、[Q_{si}]は固体内の熱源による節点熱量ベクトル、[Q_{fi}]は流体内の熱源および粘性による節点熱量ベクトルである。また[M]は加速度形質量マトリックス、[K]は粘性マトリックス、[M_c]は対流形質量マトリックス、[G]は圧力マトリックス、[B_b]は浮力ベクトル，[F]は外力ベクトルである。式(5.15)～(5.17)の各項はそれぞれ次のように表わされる。なお[θ_∞]は充分遠方の温度で既知である。

$$
\begin{aligned}
[M_{tj}] &= b \int_\Delta [A_2]^T \rho_j C_j [A_2] d\Delta \ , \\
[C_{dj}] &= b \int_\Delta [B_2]^T \lambda_j [B_2] d\Delta \ , \quad (j=s,f) \ , \\
[C_v] &= b \int_\Delta [A_2]^T \rho_f c_p [E_2] d\Delta \ , \\
[Q_s] &= b \int_\Delta [A_2]^T [A_2] d\Delta \cdot q_{hs} \ , \\
[Q_f] &= b \int_\Delta [A_2]^T [A_2] d\Delta \cdot q_{hf} \ , \\
[M] &= b \int_\Delta [A_1]^T \rho_f [A_1] d\Delta \ , \\
[K] &= b \int_\Delta [B_1]^T [C] [B_1] d\Delta \ , \\
[M_c] &= b \int_\Delta [A_1]^T \rho_f [E_1] d\Delta \ , \\
[G] &= b \int_\Delta [D]^T [H_p] d\Delta \ , \\
[B_b] &= b \int_\Delta [A_1]^T \rho_f g \beta \begin{bmatrix} 0 \\ A_2 \end{bmatrix} d\Delta \ [\theta] \\
&\quad - b \int_\Delta [A_1]^T \rho_f g \beta \, d\Delta \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_\infty \end{bmatrix} \ , \\
[F] &= b \left\{ \int_\Delta [A_1]^T f_w \, d\Delta \right. \\
&\quad \left. + \oint_l [A_1]^T f_l \, dl \right\} \ ,
\end{aligned}
$$

--------(5.18)

式(5.18)で積分される各マトリックスは次のように表わされる。

$$[B_2]=\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & \cdots & N_{6,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & \cdots & N_{6,y} \end{bmatrix},$$

$$[E_2]=[\dot{u}\,N_{1,x}+\dot{v}\,N_{2,y} \quad \cdots \quad \dot{u}\,N_{6,x}+\dot{v}\,N_{6,y}],$$

$$[E_1]=\begin{bmatrix} \dot{u}\,N_{1,x}+\dot{v}\,N_{2,y} & 0 & \cdots \\ 0 & \dot{u}\,N_{1,x}+\dot{v}\,N_{1,y} & \cdots \\ \dot{u}\,N_{6,x}+\dot{v}\,N_{6,y} & 0 & \\ 0 & \dot{u}\,N_{6,x}+\dot{v}\,N_{6,y} & \end{bmatrix},$$

$$[B_1]=\begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{6,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{6,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{6,y} & N_{6,x} \end{bmatrix},$$

$$[D]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{1,y} & \cdots & N_{6,x} & N_{6,y} \\ N_{1,x} & N_{1,y} & \cdots & N_{6,x} & N_{6,y} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[C]=\mathrm{diag}[2\mu \quad 2\mu \quad \mu],$$

$$[H_p]=\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \cdots\cdots\cdots(5.19)$$

ここでΔは三角形要素の領域、μは粘性係数、λは熱伝導率、βは熱膨張率である。

式(5.16)において、境界面の温度$[\theta_w]$に対応する行列要素が固体と流体の温度場に関する連成項になる。式(5.16)の$[\theta_\infty]$は既

知である。　従って式(5.15)より、内部および表面の温度が未知である発熱物体の温度場を求めることができる。また、境界面の温度[θ_w]は式(5.15)より直接求まるので、反復計算が不要である。

なお、定常熱連成場に対するマトリックス方程式は次のようになる。

$$\Sigma[C_d + C_v][\theta] = \Sigma[Q] \quad , \qquad \text{----------}(5.20)$$

$$\Sigma\begin{bmatrix} K + M_c & -G \\ -G^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{d} \\ p \end{bmatrix} = \Sigma\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \Sigma\begin{bmatrix} B_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad -(5.21)$$

式(5.20)は温度場、式(5.21)は流れ場の方程式である。

一方、固体の表面からの放熱量を算定する方法として、熱伝達率が通常用いられる。式(5.15)より流体の温度分布が決定されるので、局所熱伝達率をα_cとすると、α_cは次式より求めることができる。

$$\alpha_c = -\lambda_f(\theta_{,n})_{fw} / (\theta_{fw} - \theta_\infty) \quad , \qquad \text{-----}(5.22)$$

ここでθ_{fw}は固体表面温度で、各要素の境界面に接している辺の中点の温度を表わし、nは法線方向を意味する。

なお式(5.15)は固体と流体の温度場を結合して扱うFEM 方程式であるため、次のような境界条件をもつ温度場の解析にも適用可能である。

(1).固体内の温度が一部分既知の場合。

(2).流体内部に発熱源がある場合。

5.4.2　定常熱連成場の計算手順

(1). 初めに、流体の速度を零として、式(5.20)より固体と流体の温度場を求める。

(2). 流体の温度場より浮力項δU_{bf}を算出し、式(5.21)で流れ場を計算する。

(3). (2).で求めた速度の値を用いて式(5.20)を再構成する。式(5.20)より固体と流体の温度場を再計算する。

(4). 以後(2).～(3).の手順を繰り返し、速度および温度の値が収束するまで演算を続行する。

流れ場の数値計算にはニュートン・ラフソン法[119]、温度場の計算にはガウスの消去法を用いる[32-34]。

5.4.3　非定常熱連成場の計算手順

非定常熱連成場の計算手順は 4.5節で述べた手順と基本的には同じである。違う点は第4章では、温度場が流体のみの場合であり本章では、温度場が固体と流体を含めた場合である。従って、ここでは計算手順の概略を述べる。

(1). 初めに、流体の速度を零として、式(5.15)より初期値より1時分割後の固体と流体の温度場を求める。

(2). 流体の温度場より浮力ベクトルを算出し、式(5.17)で流れ場を計算する。[M_c]は非線形マトリックスなので、時刻を固定して、速度値に変化がなくなるまで計算を繰り返す。

(3). (2).で求めた速度の値を用いて式(5.16)を再構成する。時刻を1時分割分進め、式(5.15)より固体と流体の温度場を再計算する。

(4). 以後(2).～(3).の手順を繰り返し、速度および温度の値が収束するまで演算を続行する。

定常熱連成場の場合と同様に、流れ場の数値計算にはニュートン・ラフソン法[119]、温度場の数値計算にはガウスの消去法を用いる[32-34]。

5．5 定常自然対流熱連成場の数値解析

本章では、厚みがあり、有限な高さの垂直平板を考え、平板と周囲流体との自然対流に関する２次元熱連成場を扱う。初めに、定常自然対流熱連成場を数値解析する。

5.5.1 解析モデル

図5.3 はこの熱連成場を解析するための２次元FEM 解析モデルである。周囲流体は空気(プラントル数Ｐｒ＝0.72、 熱伝導率λ_f＝0.0257Ｗ／ｍ℃) でブジネスク近似が成立つと仮定する。平板の材質はマイコン素子の被覆材を想定して、エポキシ樹脂(熱伝導率 λ_s = 0.233 Ｗ／ｍ℃)とする。平板は空気中に設置され図5.3 に示すように、モデルの対称性により右半分を解析対象とする。熱的負荷として、平板内の中央部線状に熱源(発熱量 q_{hs} = 0.335 x 10^3 Ｗ／m^3) を設定する。垂直壁面および平板下面の近傍では温度勾配や速度勾配が大きくなるので、分割要素のサイズを細かくする。なお図5.3 の自然対流のFEM モデルは矢川らの報告[143]を参考にして作成した。

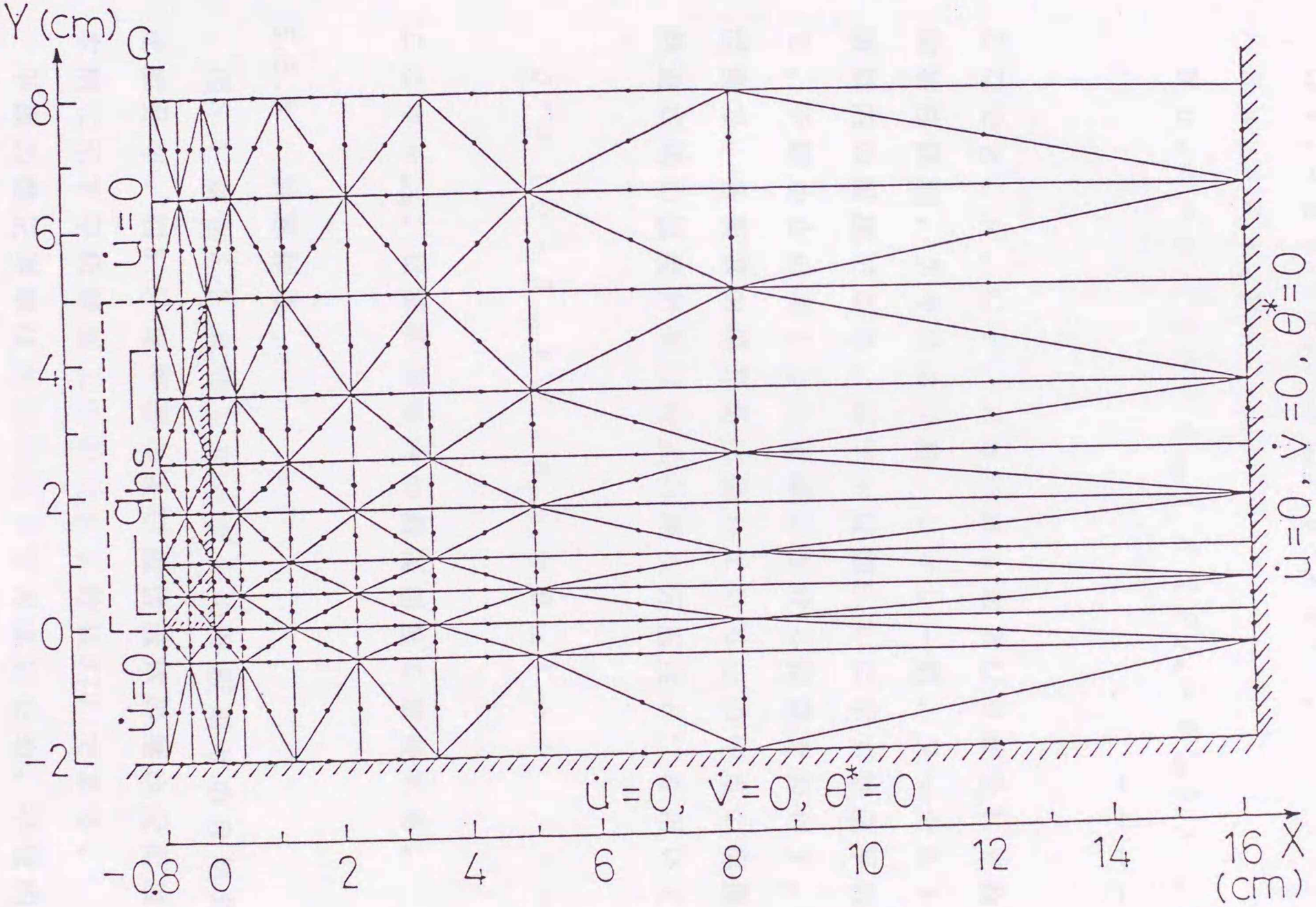


図５．３　平板と流体との熱連成場解析モデル

5.5.2　結果の整理方法

式(5.20)、(5.21)は無次元数を用いていない。しかし結果の整理に無次元数を利用すると便利であるため、次の諸量を定義する。

$$Gr_y = g\beta(\theta_y - \theta_\infty)y^3/\nu^2 \quad ,$$

$$Ra_y = Gr_y Pr \quad ,$$

$$Nu_y = -y((\theta - \theta_\infty)/(\theta_{fw} - \theta_\infty))_{,x}|_{x=0} \quad , \qquad \text{--------(5.23)}$$

ここでg、ν、Gr、Ra、Nuおよびθはそれぞれ重力加速度、動粘性係数、グラスホフ数、レイレー数、ヌッセルト数および解析領域内の温度である。添字yは図5.3 に示す垂直平板モデルにおいて、下端からの高さyの位置における諸量を表わす。θ_{fw}は垂直面温度で、各要素の境界面に接している辺の中点の温度である。また熱連成場の温度分布は次式の無次元温度θ^*を用いて表わす。

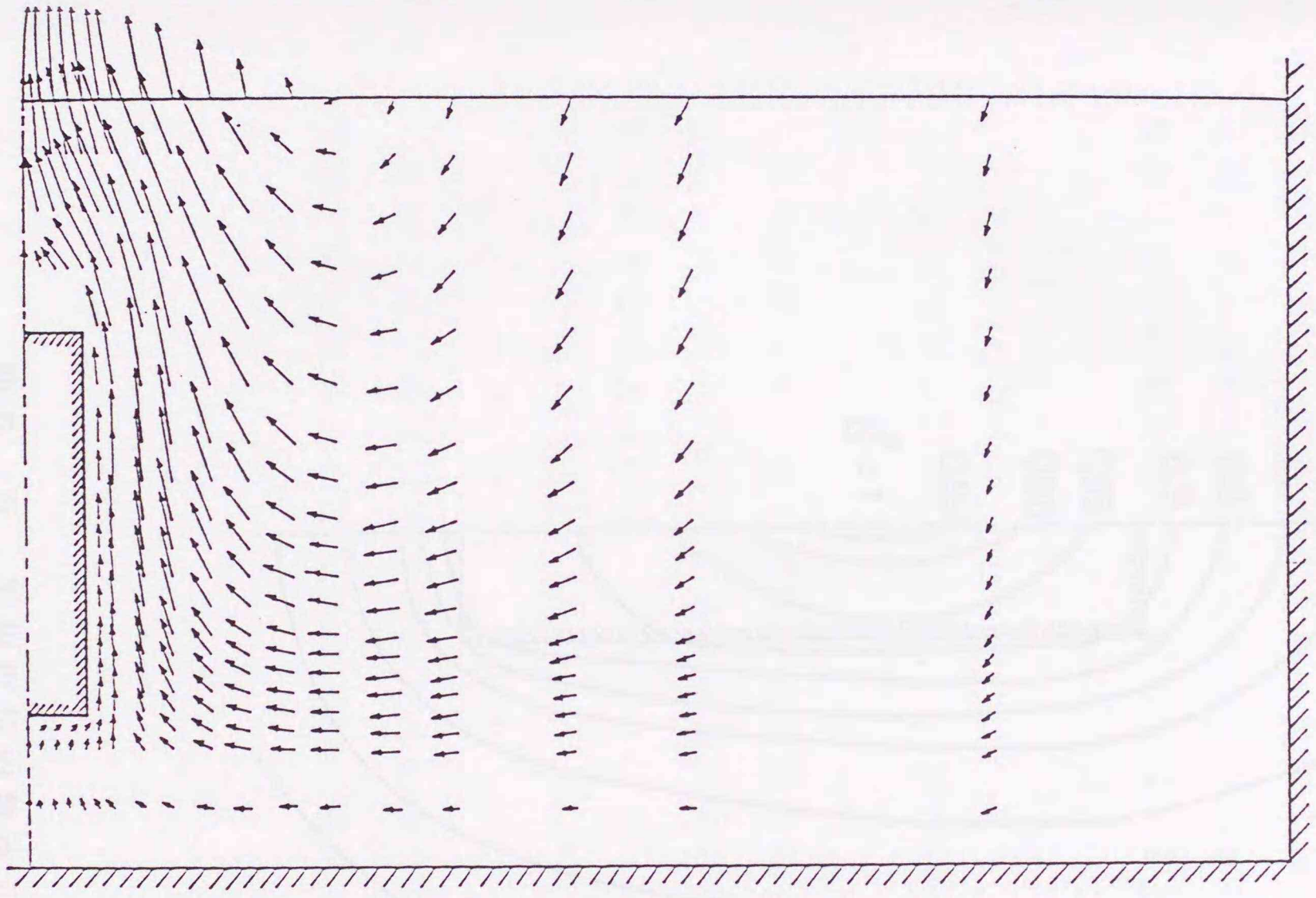
$$\theta^* = (\theta - \theta_\infty)/(\theta_{max} - \theta_\infty) \quad , \qquad \text{------(5.24)}$$

ここでθ_{max}は解析領域内の最高温度を意味する。

5.5.3　計算結果

図5.4 は図5.3 に示したモデルの平板周りの自然対流に関する速度分布、図5.5 は平板および近傍流体の無次元温度分布である。本例に示す平板壁面上の最大Ra数は970 である。

平板の熱伝導率は流体に比べて大きいため、平板内の温度降下は



Scale of velocity 0 0.5 1.0 (cm/s)

図５．４　平板周りの自然対流

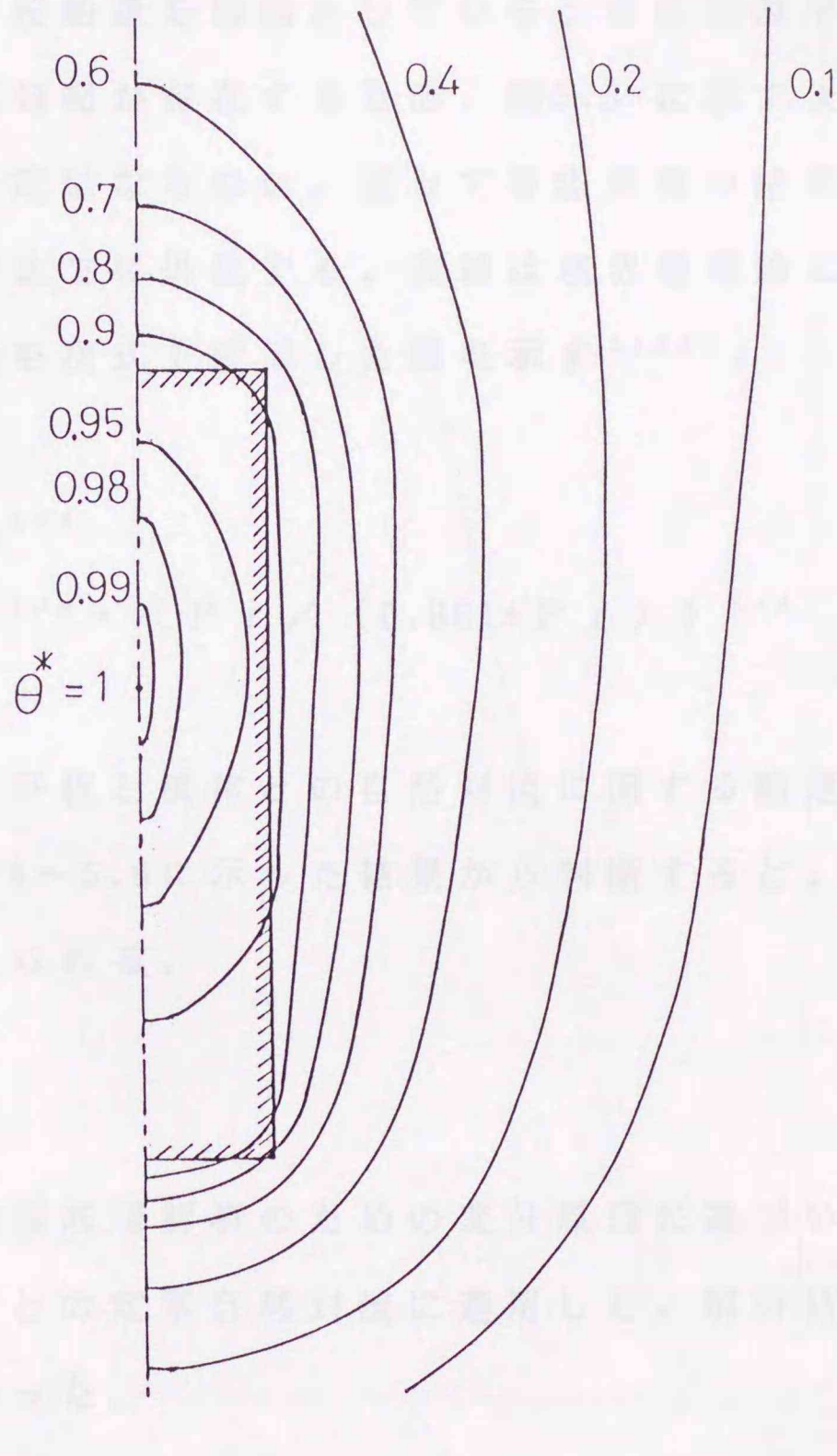


図５．５　平板近傍の無次元温度分布

小さい。壁面近傍では温度勾配は大きくなり、境界層の発生が見られる。また平板内の上部温度は下部温度に比べて高くなる。図5.6に、平板の垂直壁面上におけるNu_y-Ra_yの関係を示す。本モデルは平板の内部発熱量を既知としている。また垂直平板の上面と下面で流れと温度勾配が存在するため、図5.5 に示すように、垂直壁面上の温度は一定にならない。従って等温壁面の結果と直接比較できないが、参考までに併記する。実線は境界層理論に基づいた等温垂直平板の結果を次式で近似した値を示す[144]。

$$Nu_y / Gr_y^{1/4} = 0.478 Pr^{1/4} \cdot (Pr/(0.861+Pr))^{1/4} \quad \cdots(5.25)$$

本節で扱った平板と流体との自然対流に関する熱連成場の解析例はないが、図5.4～5.6に示した結果から判断すると、本解析法は妥当であると考えられる。

5.5.4　考察

本節では、熱連成場解析のための変分原理に基づいたFEM を垂直平板と周囲流体との定常自然対流に適用した。解析結果に妥当性があることがわかった。

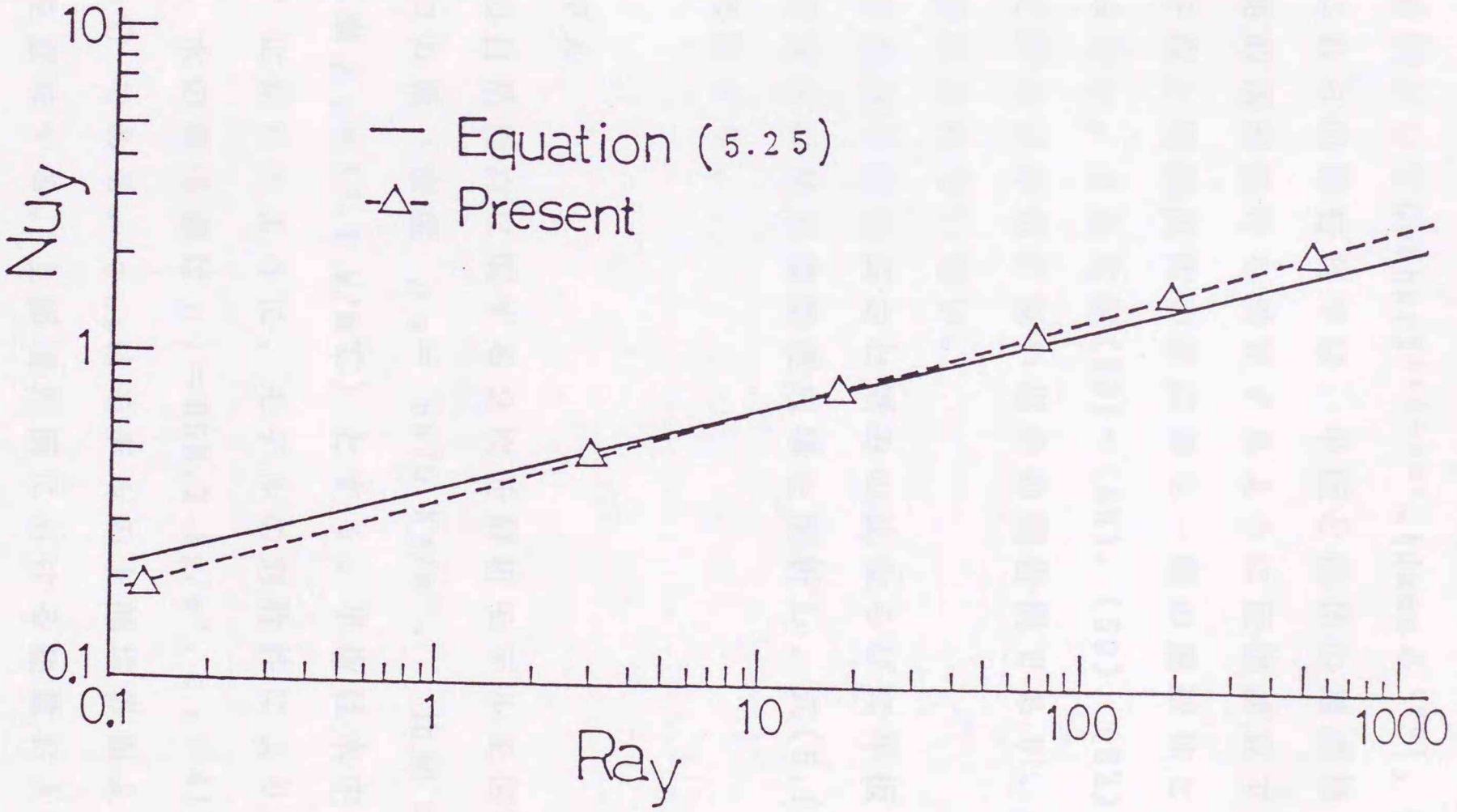


図５．６　平板の垂直壁面上におけるＮｕｙ－Ｒａｙ

５．６　非定常自然対流熱連成場の数値解析

厚みがあり、有限な高さの垂直平板と周囲流体との非定常自然対流熱連成場の解析例としてGebhart[42-48]、Adamsら[50]、智田[62]の報告がある。これらの報告例では、平板と流体の温度場は個別に扱われており、熱的境界条件を満足するように反復演算で求められている。しかし平板と周囲流体の温度場を一個の連続体として扱った報告例は見当らない。また文献(42)～(48)、(50)、(62)は垂直平板の高さに比して厚みが非常に薄い場合の報告例であり、平板内の温度分布は明らかにされていない。

本節では、発熱垂直平板の高さと厚みの比ならびに平板の保有する熱量を変えた非定常自然対流熱連成場を解析し、式(5.10)の変分原理の妥当性を検討する。

5.6.1　解析モデル

発熱垂直平板の自然対流に関する２次元解析モデルを図5.7 に示す。平板はニクロム板（密度 $\rho_s = 8670$ Kg/m^3、 比熱 $c_s = 442$ J/Kg℃， 熱伝導率 $\lambda_s = 17.4$ W/m℃）とする。平板は水中に設置されており、図5.7 に示したように、モデルの対称性により右半分を解析対象とする。水の物性値は $\rho_f = 998.2$ Kg/m^3, $c_f = 4167$ J/Kg℃, $\lambda_f = 0.601$ W/m℃ である。q_{us}はモデルの上部境界面より法線方向に伝わる熱量を意味する。上部境界面における熱量および速度の境界条件は不明である。本章では、これらの外向き法線方向の勾配を０と設定した。平板および周囲流体は時刻 $t = 0$ において、周囲温度 θ_∞（一定）の状態にあると仮定する。そして、 $t > 0$ で平板は発熱する。発熱部は図5.7 の平板内部の各節点上に設定し、各

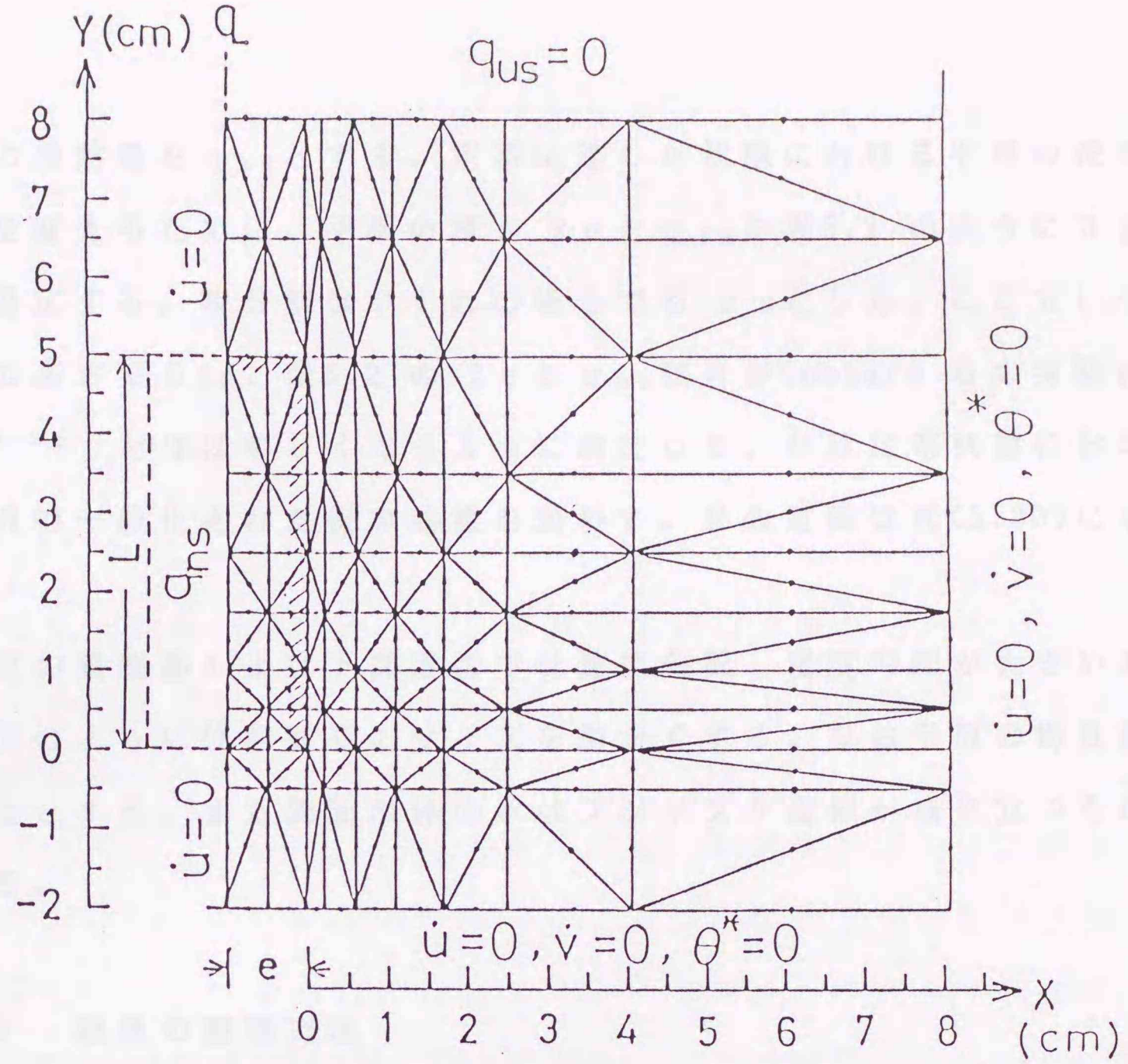


図５．７　解析モデル

L／2e	2e (cm)	q_{hs} X10^5 (w／m^3)	R
100	0.05	4.44	0.029
30	0.167	2.22	0.094
5	1.00	1.78	0.703

表５．２　計算条件

節点の発熱量をq_{hs}とする。定常に達した状態における平板の保有熱量を変えるために、平板の厚さ2eとq_{hs}を表5.2のように3通りに設定する。時分割はいずれの場合でも2sとした。ここでLは平板の高さで5cm、表5.2の2eとq_{hs}はRがGebhartらの実験結果[42-48]とほぼ等しくなるように決定した。Rは定常状態における平板の一般化された保有熱量を表わす。Rの定義は式(5.30)に示す。

平板の垂直部および下部近傍では速度勾配、温度勾配が大きいため、図のように分割要素のサイズを細かくする。なお平板の物性値は一定とする。また周囲流体の水はブジネスク近似が成り立つものとする。

5.6.2 結果の整理方法

非定常自然対流熱連成場は固体と流体の物性値、固体の形状や大きさなど多くの因子によって影響をうける。このため結果の整理方法は非常に難しい。そこで初めに、式(5.26)、(5.27)のような無次元数を定義する。

発熱する垂直平板の過渡状態を表わすために、次の無次元温度を定義する。

$$\theta^* = (\theta - \theta_\infty) / (\theta_{max,\infty} - \theta_\infty) \quad , \qquad ---(5.26)$$

ここで $\theta_{max,\infty}$ は定常に達した状態における解析領域内の最高温度、θは時刻tにおける任意の位置の温度である。

熱伝達の状態等を表わすためにヌッセルト数Nuを次のように定義

する。ただし添字y は図5.7 に示すモデルにおいて、平板の下端からの高さyの位置における諸量を意味する。

$$Nu_y = -y \{(\theta_y - \theta_\infty)/(\theta_{fw} - \theta_\infty)\}_{,x} \Big|_{x=0} \quad ,$$

$$Nu_{ym} = \sum_{i=1}^{Ne} Nu_{yi}/Ne \quad , \qquad ---(5.27)$$

ここでθ_{fw}は垂直面温度で、各要素の境界面に接している辺の中点の温度を意味する。Nu_{ym}は垂直面の平均ヌッセルト数で、Neは垂直面に接している要素の数である。

一方、式(5.26)、(5.27)は平板の厚さ、材質等を表わす諸量が含まれていない。とくに過渡問題では、上述の諸量を含んだ無次元数が必要になる。本章では、これらの因子を考慮して垂直平板を扱ったGebhart の方法[42-48] を採用する。以下の式(5.28)～(5.31)は文献(42)～(48)を参照した。

平板の平均表面温度の過渡状態を表わすために、次の無次元温度を定義する。

$$\Psi = (\theta_{mw} - \theta_\infty) / (\theta_{m\infty} - \theta_\infty) \quad , \qquad ----(5.28)$$

ここでθ_{mw}は垂直面の平均温度、$\theta_{m\infty}$は平板が加熱されて定常状態に達したときの垂直面平均温度である。

式(5.28)は平板と流体の熱容量や熱伝導率などの関数であり、また流体のプラントル数やグラスホフ数にも影響される。そこで次のような一般化された時間Tと熱保有量Rを導入する。

$$T = \alpha t(aGr^* \cdot Pr)^{2/5}/L^2 \quad , \qquad ---(5.29)$$

$$R = \rho_s c_s e(aGr^* \cdot Pr)^{1/5}/\rho_f c_f L M_0 \quad 、 \qquad ---(5.30)$$

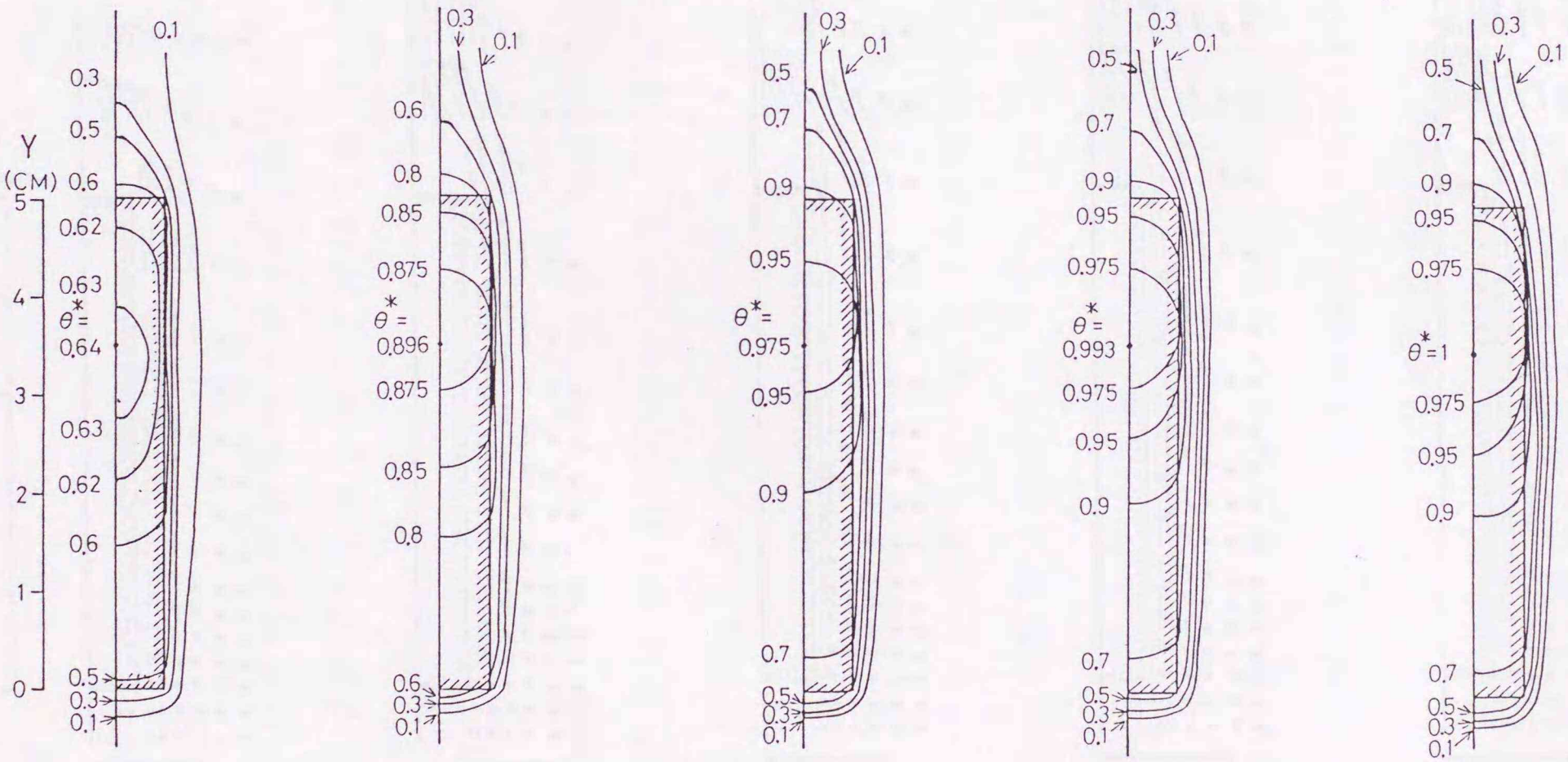
ここでαは流体の熱拡散係数である。 a はPr数(本解析例ではPr=7.1)に依存する定数で、$8x10^{-3}$である。またM_0は一般化された温度分布の微係数で、1.79である。Gr* 数は修正グラスホフ数である。Gr* は次のように定義する。

$$Gr^* = g\beta L^4 q_{w,\infty} / \nu_f^2 \lambda_f \quad , \qquad ---(5.31)$$

ここで$q_{w,\infty}$は定常状態における平板垂直表面の平均熱流束、ν_fは流体の動粘性係数を意味する。

5.6.3 計算結果

流体は時刻 t = 0 で静止している。垂直平板が発熱を開始すると、平板の内部と近傍流体の温度は次第に上昇する。図5.7 で示したように、解析モデルの右側は壁面になっている。従って、流体は上部境界面より巻き込むように流入し、発熱垂直平板に沿って上昇する。図5.8 は平板が比較的厚い場合(L ／2 e =5)の無次元温度分布および平板周りの流れの解析結果である。温度場ならびに流れ場が次第に発達していくことがわかる。なお平板が薄い場合、平板の厚さ方向の温度変化は非常に小さい。また、平板周りの流れは平板の上下端部の影響をほとんど受けず、次第に境界層が形成されていく。

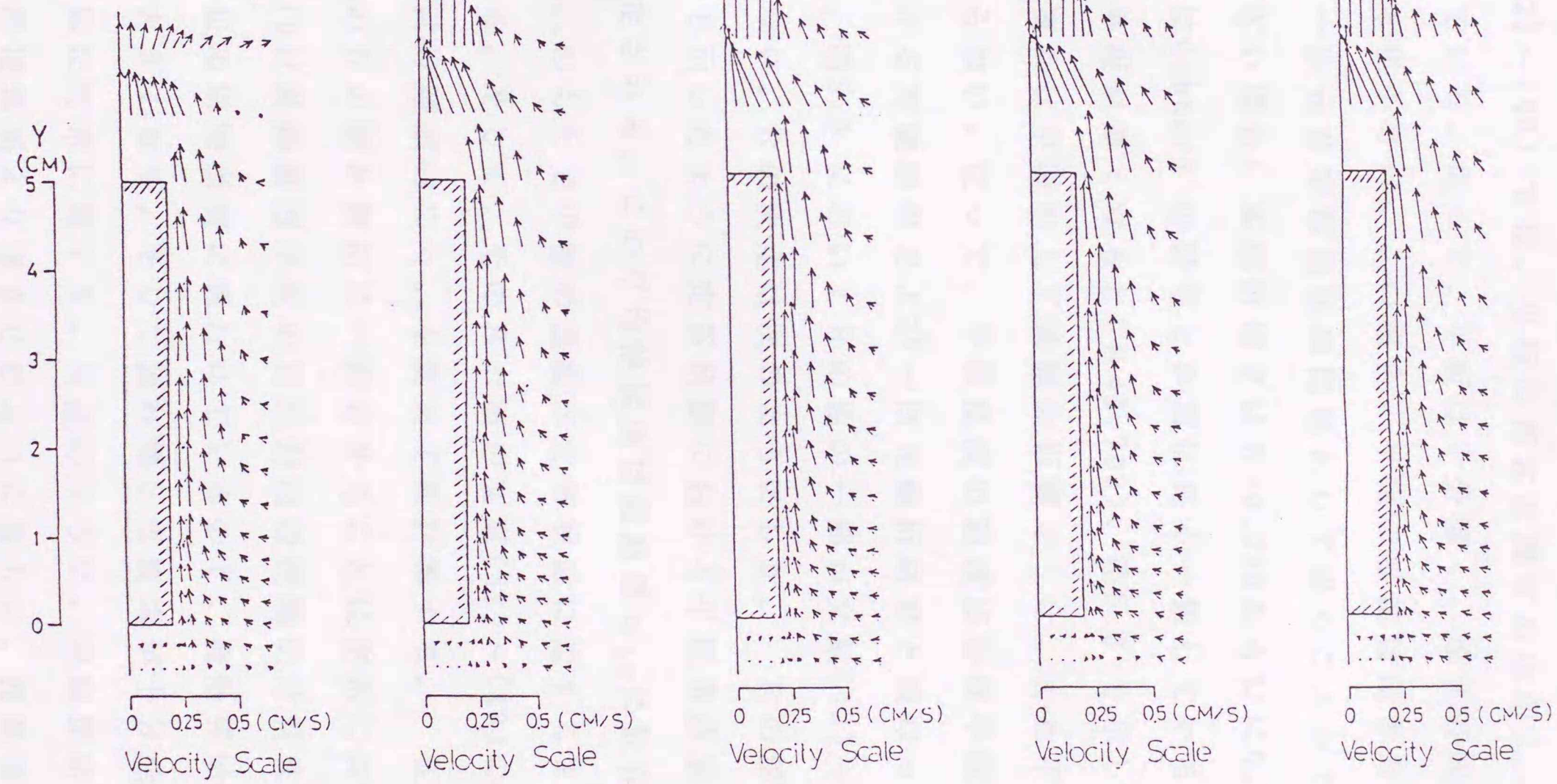


T/R=0.61　　T/R=1.22　　T/R=1.83　　T/R=2.44　　T/R=3.05

（準定常状態）

（a）　無次元温度分布

図５．８　垂直平板の内部と近傍流体の無次元温度分布および流動状態（R=0.703、L/2e=5）



T/R=0.61　　T/R=1.22　　T/R=1.83　　T/R=2.44　　T/R=3.05

（準定常状態）

（b）　流動状態

図５．８　垂直平板の内部と近傍流体の無次元温度分布および流動状態（ R=0.703 、L/2e=5 ）

図5.9 は垂直平板上における平均温度ΨとＴ／Ｒの関係である。実線はGebhart の実験結果および一次元解析結果[42-48] である。文献(42)～(48) では、平板の高さと厚さの比がＬ／2ｅ≧750 と設定されている。従って、平板は十分薄く、厚さ方向の温度変化は無視できる程小さい。この場合、平板の温度は高さ方向にのみ変化するので一次元非定常熱伝導問題として扱うことができる[42-48]。Ｒが小さい場合(本解析例ではＲ=0.029ならびに0.094の場合)の計算結果はGebhart の結果と非常に良く一致していることがわかる。しかし平板が厚くなると(Ｒ=0.703)、図5.8 で示したように、平板周りの流れは平板の上下端部の影響をうけ、また平板内の温度が一様にならない。従って、平板温度の過渡応答は平板が非常に薄い場合における実験結果および一次元解析結果と異なってくる。

なお、図5.9 においてＲの値の一部が文献(42)～(48)の値と一致していない。Ｒの決定は次のようにした。　Ｒの値は式(5.30)、(5.31)で示したように定常状態における平板垂直表面の平均熱流束から決定される。この平均熱流束は発熱量q_{hs}に依存する。そこで、あるq_{hs}のもとで平板の温度が定常状態に達するまで計算し、Ｒを算出する。そして、そのＲの値が文献(42)～(48)の値と一致しない場合、試行錯誤的にq_{hs}を変えて再計算する。　従って、文献(42)～(48)のＲの値と厳密に一致させることは非常に難しい。

図5.10は発熱垂直平板の自然対流過渡熱伝達特性を示す。平板の温度は初め周囲温度に保たれているので、発熱開始直後の熱伝達は非常に大きくなる。そして流れ場と温度場が十分発達すると、熱伝達も次第に定常に達する。前述のように、発熱開始直後において流れは上部境界面より巻き込むように流入し、発熱垂直平板に沿って

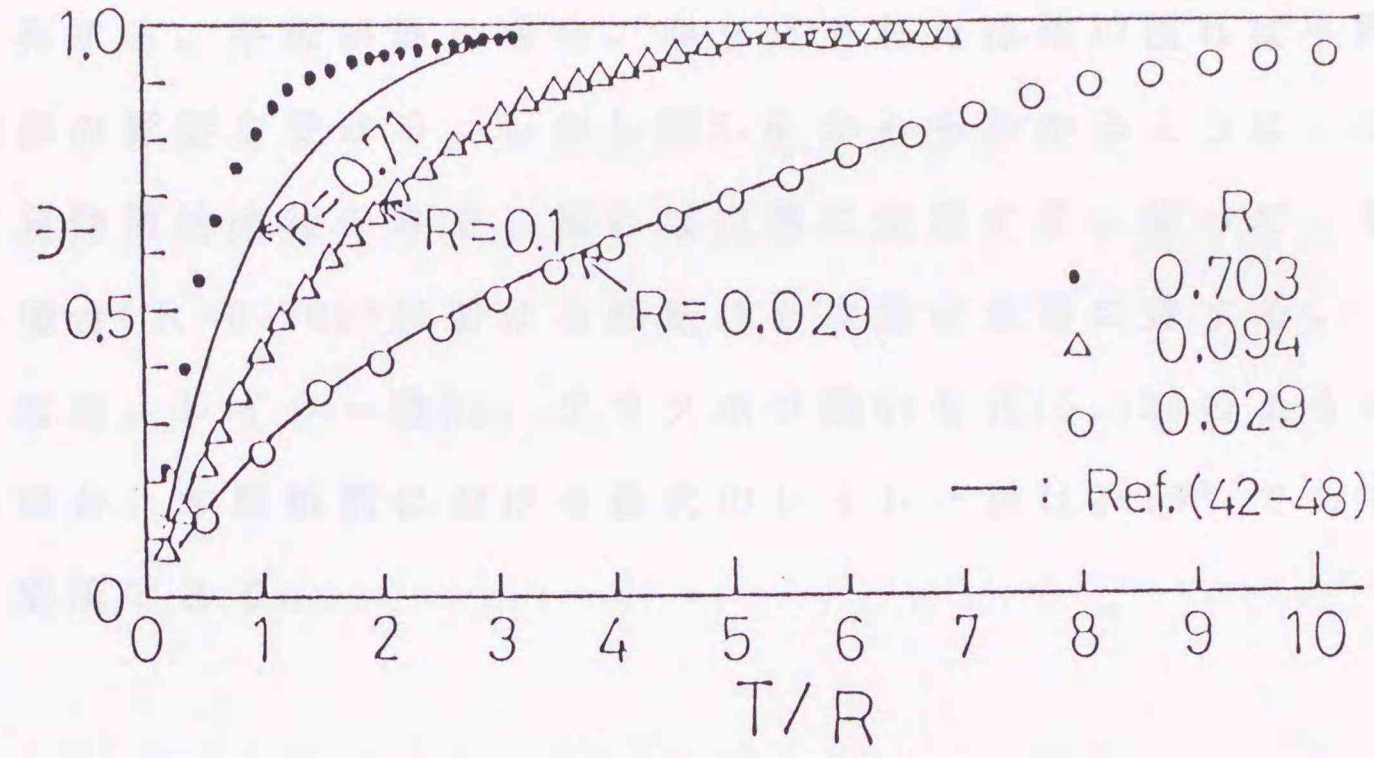


図５．９　垂直平板上のΨ－Ｔ／Ｒ

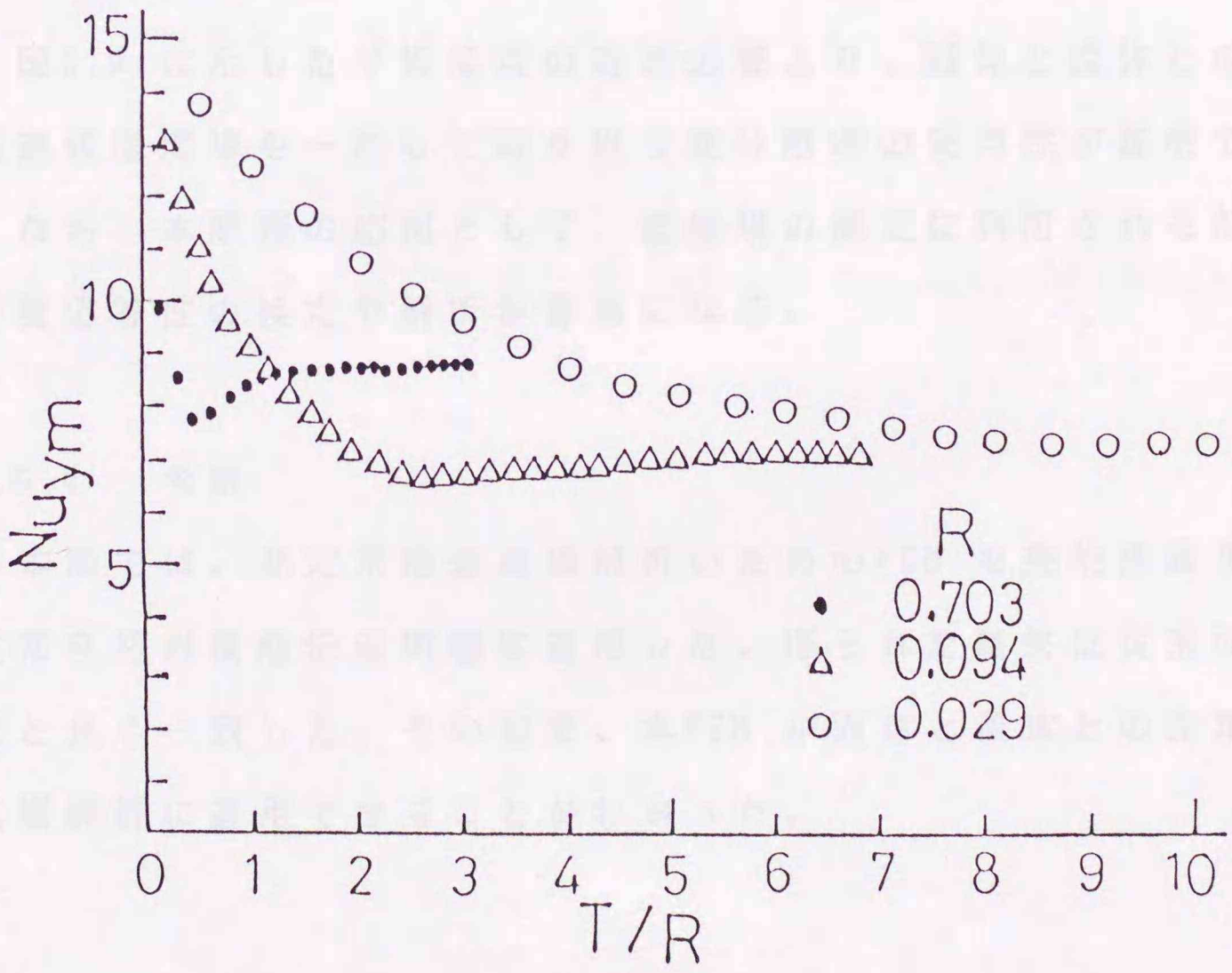


図５．10　垂直平板上のＮｕ$_{ym}$－Ｔ／Ｒ

上昇する。平板が厚い場合、巻き込まれた流体の流れは平板の上下端部の影響を受ける。しかし図5.8 からもわかるように、この影響は発熱開始直後のみで、流れは次第に安定する。従って、平板が厚い場合(R=0.703)における熱伝達も次第に定常に達する。

なお、レイレー数Ra、グラスホフ数Grを式(5.32)のように定義した場合、本解析例における最大のレイレー数は2×10^6 であり、流れは層流である。

$$Ra_L=Gr_L Pr \quad ,$$

$$Gr_L=g\beta(\theta_L-\theta_\infty)L^3/\nu_f^2 \quad , \qquad ----(5.32)$$

ここで添字L は図5.7 に示すモデルにおいて、平板の高さL の位置における諸量を意味する。

図5.9 に示した平板温度の過渡応答より、固体と流体との非定常熱連成温度場を一括して取り扱う変分原理の妥当性が証明できた。

なお、本原理の応用として、温度場の測定に利用される熱電対の温度応答性の検定や解析が容易になる。

5.6.4　考察

本節では、非定常熱連成場解析のためのFEM を発熱垂直平板の非定常自然対流熱伝達問題に適用した。得られた結果は従来の実験結果と良く一致した。その結果、本FEM が固体と流体との非定常熱連成場解析に適用できることがわかった。

５．７　考察

緒言で述べたように、本節では熱連成温度場解析のための変分原理から、固体の熱伝導式および流体の熱エネルギ式を誘導する。

式(5.2)、(5.4)の各項を式(5.10)に代入すると、次式が得られる。

$$b\{\int_{Ss}\delta\Theta(\rho_s C_s\Theta_{,t}-q_{hs})dS+\int_{Ss}\delta\varepsilon_d\cdot q_{ds}dS$$

$$+\int_{Sf}\delta\Theta(\rho_f C_f(\Theta_{,t}+\dot{u}\Theta_{,x}+\dot{v}\Theta_{,y})-q_{hf}-q_{nf})dS$$

$$+\int_{Sf}\delta\varepsilon_d\cdot q_{df}dS\}=0, \qquad ----(5.33)$$

ここで、

$$\varepsilon_d=[\Theta_{,x}\quad\Theta_{,y}]^T,\ q_{ds}=\lambda_s\varepsilon_d,\ q_{df}=\lambda_f\varepsilon_d, \qquad ----(5.34)$$

である。式(5.33)の第２項と第４項の和は、式(5.34)を用いると、次のようになる。

$$b\{\int_{Ss}\delta\varepsilon_d\cdot q_{ds}dS+\int_{Sf}\delta\varepsilon_d\cdot q_{df}dS\}$$

$$=b\int_{Ss}\lambda_s(\Theta_{,x}\delta\Theta_{,x}+\Theta_{,y}\delta\Theta_{,y})dS$$

$$+b\int_{Sf}\lambda_f(\Theta_{,x}\delta\Theta_{,x}+\Theta_{,y}\delta\Theta_{,y})dS. \qquad ----(5.35)$$

これを部分積分すると、

$$式(5.35) = -b\int_{Ss}\lambda_s\delta\Theta(\Theta,_{xx}+\Theta,_{yy})dS$$

$$-b\int_{Sf}\lambda_f\delta\Theta(\Theta,_{xx}+\Theta,_{yy})dS$$

$$+b\oint_{l}\delta\Theta(\lambda_s\Theta,n_{sf}+\lambda_f\Theta,n_{fs})dl, \qquad ----(5.36)$$

となる。ここでn_{sf}は固体から流体へ、n_{fs}は流体から固体へ向かう法線方向を表わす。$\lambda_s\Theta,n_{sf}$は固体から流体へ、$\lambda_f\Theta,n_{fs}$は流体から固体へ移動する伝導熱量である。両者は絶対値が等しく、互いに逆向きである。従って次式が成立する。

$$\lambda_s\Theta,n_{sf}+\lambda_f\Theta,n_{fs}=0. \qquad ----(5.37)$$

式(5.37)は境界上における熱流束の連続性を意味する。式(5.37)の条件を考慮すると、式(5.36)は固体内部および流体内部のみの熱伝導式になる。すなわち、固体および流体の内部領域のみのマトリックスを作成すると、自動的に境界上における熱流束の連続性の条件が満足される。

式(5.35)～(5.37)の関係を式(5.33)に代入すると、次式が得られる。

$$b\left\{\int_{Ss}\delta\Theta\left(\rho_s C_s\Theta_{,t}-\lambda_s\left(\Theta_{,xx}+\Theta_{,yy}\right)-q_{hs}\right)dS\right.$$

$$+\int_{Sf}\delta\Theta\left(\rho_f C_f\left(\Theta_{,t}+\dot{u}\,\Theta_{,x}+\dot{v}\,\Theta_{,y}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\lambda_f\left(\Theta_{,xx}+\Theta_{,yy}\right)-q_{hf}-q_{nf}\right)dS\right\}=0\quad,$$

$$-----(5.38)$$

ここで$\delta\Theta$は任意の値をとり得るので、式(5.38)より次式が得られる。

$$\rho_s C_s\Theta_{,t}=\lambda_s\left(\Theta_{,xx}+\Theta_{,yy}\right)+q_{hs}\,,\qquad ---(5.39)$$

$$\rho_f C_f\left(\Theta_{,t}+\dot{u}\,\Theta_{,x}+\dot{v}\,\Theta_{,y}\right)$$

$$=\lambda_f\left(\Theta_{,xx}+\Theta_{,yy}\right)+q_{hf}+q_{nf}\,.\qquad -----(5.40)$$

式(5.39)は固体の熱伝導方程式、式(5.40)は流体の熱エネルギ式である。

５．８　結言

本章では次のような結論を得た。

(1). 境界面上において熱移動を考慮した固体および流体の温度場解析のための変分原理をそれぞれ提案した。

(2). これらの変分原理を結合して、固体と流体を一個の連続体として扱う温度場解析のための変分原理を誘導した。本原理は境界において熱流束の連続の条件と温度一致の条件を自動的に満足する。その結果、熱的境界条件の反復計算が省略できる。

(3). 連続体として扱う温度場解析のための変分原理と、著者が提案した流れ場解析のための仮想仕事の原理に基づいて、熱連成場解析のための変分原理を構築した。

(4). 熱連成場解析のための変分原理に基づいて、FEM 解析法を提案した。

(5). このFEM の妥当性を調べるために、内部の発熱量が部分的に既知である垂直平板と流体との自然対流に関する定常および非定常熱連成場をFEM 解析した。その結果、本FEM が固体と周囲流体との熱連成場解析に適用できることを示した。

(6). 熱連成温度場解析のための変分原理から固体の熱伝導方程式、流体の熱エネルギ式が誘導できることを示した。

第 6 章　　結 論

第3章から第5章にわたって「結言」として詳細に記述しているので、ここでは総括という形で本論文の概要をまとめる。

(1). 粘性流体の挙動は通常、ナビエ・ストークスの式と連続の式を基礎式として差分法で解析される。また、これらの基礎式に重みつき残差法を適用した有限要素法で解析される。本論文では、これらの基礎式を用いないで、粘性流体の挙動解析に適用できる仮想仕事の原理を提案した。

(2). 提案した原理の妥当性を検証するために、はじめに本原理に基づいて有限要素法の定式化を行なった。次に、定式化した有限要素方程式を定常ならびに非定常粘性流動の数値解析に適用した。解析例として、段付き流路内の流れを取り上げた。その結果、従来の差分解や重みつき残差法による解と良く一致することが確かめられた。

(3). 粘性流動解析のための仮想仕事の原理に、浮力の効果を導入した。また、流体の温度場を解析するための変分原理を提案した。これらの原理を連成させると、熱流体のための変分原理になることを明らかにした。

(4). 熱流体のための変分原理の妥当性を検証するために、この原理に基づく有限要素方程式を誘導し、キャビティ内の強制対流と密閉容器内の自然対流の解析に適用した。その結果、従来の差分解や重みつき残差法による解と良く一致することが確かめ

られた。

(5). 本有限要素法は粘性流体の物性値が温度に依存する場合にも適用できる。このような場合の解析方法を述べ、キャビティ内の強制対流の解析に適用した。その結果、本解析法による解は現象的に妥当であることが確かめられた。

(6). 流体の温度場解析のための変分原理を、流体と固体が熱的に連成する場に適用できるように拡張した。拡張した温度場解析のための変分原理は固体と流体の温度場を一個の連続体として扱う。このことによって、固体と流体の境界面における熱的境界条件が自動的に満足されることを示した。また、本原理と浮力の効果を導入した仮想仕事の原理を連成させて、固体と流体との熱連成場解析のための変分原理を構築した。

(7). 固体と流体との熱連成場解析のための変分原理に基づいて、有限要素方程式を誘導した。本方程式を、固体内部の発熱量が部分的に既知である固体と、周囲流体との自然対流に関する定常および非定常熱連成場解析に適用した。その結果、本解析法の妥当性が確かめられた。

以上が本論文で得られた結論である。

最後に、本研究の今後の課題と展望を述べる。

本研究の今後の課題として主なものを挙げると、次のようになる。

(1). 固体と流体が連成する場の解析を行なうこと。

(2). 固体や流体が融解または凝固するような熱連成場を解析すること。

(3). 固体または流体が化学反応を伴う場を解析すること。

(4).乱流場を解析すること。

以上の課題に対する展望と解決しなければならない点を挙げると、次のようになる。

(1).本論文では、粘性流体の流れ場解析に仮想仕事の原理を適用している。この原理はもともと、固体の分野で用いられている。従って、本論文の第3章より、固体と流体の場が同一の原理で取り扱えるようになった。すなわち、固体と流体が連成する場、例えば、振動を伴う配管系と流体との連成挙動、液体貯蔵タンク内のバルジングやスロッシングなどの挙動解析にも本原理は適用できる。

(2).第5章で提案した熱連成場解析のための変分原理を用いた解析において、固体と流体との境界面は位置的に固定されている。しかし、氷や金属が融解や凝固などを伴う熱連成場では、境界面が移動し、その形状が変わる。そこで、形状変化の起因となる潜熱を考慮した変分原理を確立すること、ついで、境界面の形状変化および固液混在領域を考慮した数値解析のアルゴリズムを開発することが必要になる。

(3).(2) の課題を発展させると、固体または流体の燃焼問題という課題が考えられる。固体または流体の燃焼問題は化学反応と物質拡散を伴う。物質拡散を支配する方程式は熱エネルギ式と同じ形式で記述されるので、熱流体のための変分原理は物質拡散の問題にも適用できる。しかし、化学反応問題を取り扱う場合、流れ場、温度場のほかに化学種保存則を導入しなければならない。従って、化学種保存則を導入した燃焼問題のための変分原理を構築することが必要になる。

(4).現在、乱流エネルギーを仮定した解析が行なわれているが、その決定的な評価はまだ、確立されていないようである。本論文で提案している変分原理は流れ場をエネルギー系で扱っている。従って、このエネルギーの適切な評価が確立されれば、乱流場の解析が可能になる。このため、乱流エネルギーを正しく評価することが必要になる。

謝　　辞

本研究の遂行にあたり、深い洞察と鋭い議論を通し、御高導を賜った北海道大学工学部　石黒　亮二教授に深甚の謝意を表します。

本研究に対して詳細な議論をいただいた北海道大学工学部　石川　迪夫教授、粥川　尚之教授、木谷　勝教授、福迫尚一郎教授に深謝いたします。

本研究の遂行にあたり、常に鋭い議論を通して適切な御助言ならびに御激励をいただいた茨城大学工学部　浅野　直輝教授に深謝いたします。

研究の機会を与えられ、励ましていただいた玉川大学工学部長　赤尾　洋二教授、玉川大学工学部機械工学科主任　沼倉　俊郎教授に御礼申し上げます。

著者の所属する玉川大学工学部機械工学科熱工学研究室において、日頃から種々な御援助をいただいた赤木　盈　前教授、岡井　真一助教授に感謝の意を表します。

日頃より議論と御激励をいただいた玉川大学工学部電子工学科　中村　充伸教授、浜松　芳夫助教授、情報通信工学科　中田　勝啓教授、機械工学科　柳原　直人教授、矢ケ崎　一幸講師に感謝申し上げます。

更に、常に御激励をいただいた前玉川大学工学部機械工学科主任　斉藤　博教授、浜吉　福治教授に感謝申し上げます。

文　献

(1)　Nallasamy、M.、Prasad、K.、J.Fluid Mech.、79-2(1977)、391.

(2)　Jaluria、Y.、Journal of Heat Transfer、vol.104、(1982)、223.

(3)　Jaluria、Y.、ASME Heat Transfer Division、vol.G00248、(1984).

(4)　Jaluria、Y.、Natural Convection (Fundamentals and Applications)、(eds. Kakac、S. et al)、(1985)、961、Hemisphere Pub. Corp..

(5)　Hellums、J.D.、Churchill、S.W.、Alch、J.、vol.8、No.5、(1962)、690.

(6)　Wilkes、J.O.、Churchill、S.W.、Alch、J.、vol.12、No.7、(1966)、161.

(7)　Torrance、K.G. et al、J.Fluid Mech.、51-2(1972)、221.

(8)　Chu、H.H.S.、Churchill、S.W.、Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. J. Heat Transfer、vol.98C、No.2、(1976)、194.

(9)　Pepper、D.W.、Rachford、H.H.、Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs. J. Fluids Engng、vol.99、No.4、(1977)、649.

(10)　Pepper、D.W.、Cooper、R.E.、Int. J. Computer and fluids、vol.8、(1980-2)、213.

(11)　Soundalgekar、V.M. et al、Numerical Methods in Thermal Problems、(eds. Lewis、R.W)、(1983)、619、Pineridge Press.

(12) Gallagher、R.H.、 Finite Element Methods in Flow Problems、(eds. Oden、J.T. et al)、(1974)、361、UAH Press.

(13) Gallagher、R.H.、 Finite Elements in Fluids、vol.1、(eds. Gallagher、R.H. et al)、(1975)、119、 Wiley.

(14) Marshall、R.S. et al、 Numerical Heat Transfer、 vol.1、 (1978)、315.

(15) 池川、第1回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭54-9)、147、日本科学技術連盟.

(16) Kawahara、M. et al、 Int. J. Numerical Meth. Eng.、10-2、 (1976)、437.

(17) 松田、機講論、No.754-4(昭54-3)、44.

(18) 武田ら、第3回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭56-11)、111、日本科学技術連盟.

(19) 小林、第4回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭58-8)、273、日本科学技術連盟.

(20) Tabarrok、B.、 Lin、R.C., International Journal of Heat and Mass Transfer、vol.20、(1977)、945.

(21) Gartling、D.K.、 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering、vol.12、(1977)、365.

(22) Reddy、J.N.、Mamidi、D.R.、 Recent Advances in Engineering Science、(ed. Sierakowski、R.L.)、Univ.of Florida、(1978)、 381.

(23) Reddy、J.N.、Finite Element Methods in Engineering、(eds. Kabaila、A.P. et al)、 Univ. of New South Wales、 (1979)、 583.

(24) Reddy、J.N.、Satake,A.、 Journal of Heat Transfer、(1980)、659.

(25) 宮内ら、第３回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭56-11)、199、日本科学技術連盟.

(26) 江口、第４回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭58-8)、57、日本科学技術連盟.

(27) Murty、V.D.、Numerical Methods in Thermal Problems、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1983)、519、Pineridge Press.

(28) Oden、J.T.、 Lecture on Finite Element Method in Continuum Mechanics、(1973)、151、UAH Press.

(29) Zienkiewicz、O.C.、The Finite Element Method、3rd ed.、(1978)、607、McGraw-Hill.

(30) Zienkiewicz、O.C.、Finite Elements in Fluids、vol.1、(eds. Gallagher、 R.H. et al)、(1975)、1、 WILEY.

(31) 浅野、亀ヶ谷、 機講論、 No.810-6,(昭56-4)、181.

(32) 亀ヶ谷ほか2名、 機論、51-464、B、(昭60)、1200.

(33) Kamegaya、H.et al、 Proc. of int. Conf. on Computational Mechanics'86(1986-5)、 vol.2、 Ⅷ-165、 Springer-Verlag.

(34) 亀ヶ谷ほか2名、 機講論、No.853-2、(昭60-3)、87.

(35) Koikkalainen、 P. et al、 Proc. of int. Conf. on Computational Mechanics'86 (1986-5)、 vol.1、Ⅲ-29、 Springer-Verlag.

(36) 柳田ほか2名、機論、50-453、B、 (昭59)、1294.

(37) Aung、W. et al、 ASME pAper No. 72-WA/HT-40、(1972(a)).

(38) Steinberg、D.S.、 Cooling Techniques for Electronic Equipment、(1980)、Wiley.

(39) Aung、W.、 Chimah、B., Low Reynolds Number Flow Heat Exchangers、(eds. KaKac、S. et al)、(1983)、 Hemisphere Pub. Corp. .

(40) Kraus、A.D.、Bar-Cohen、A.、 Thermal Analysis and Control of Electronic Equipment、(1983)、Hemisphere Pub. Corp. .

(41) Oktay、S.、 Bar-Cohen、A.、 Heat Transfer in Electronic Equipment-1983、 (eds. ASME Heat Transfer Division、vol. 28、(1983).

(42) Gebhart、B.、 Trans. ASME、 Ser.C、 83 (1961-2)、 61.

(43) Gebhart、B.、 Trans. ASME、 Ser.C、 85 (1963-2)、 10.

(44) Gebhart、B.、 Trans. ASME、 Ser.C、 85 (1963-2)、 25.

(45) Gebhart、B.、 Trans. ASME、 Ser.C、 85 (1963-5)、 184.

(46) Gebhart、B. et al 、Trans. ASME、Ser.C、89、 (1967-2)、53.

(47) Gebhart、B.、 Dring、R.P.、 Trans. ASME、Ser.C、89、(1967-8)、 274.

(48) Gebhart、B.、Trans.ASME、Ser.C、91、(1969-8)、 293.

(49) Mollendorf、J.C. and Gebhart、B.、 Trans. ASME、 Ser.C、92、 (1970-11)、628.

(50) Adams、D.E.、Gebhart、B.、Trans.ASME、Ser.C、86、(1964-5)、253.

(51) Soliman、M.、Johnson、H.A.、Trans.ASME、Ser.C、89、(1967-11)、 362.

(52) 花輪、 機論、41-347(昭50)、2119.

(53) 花輪、 機論、46-402、B、(昭55)、299.

(54) 花輪、機論、46-405、B、(昭55)、927.

(55) 花輪、機論、46-412、B、(昭55)、2384.

(56) Lock、G.S.H.、Gunn、J.C.、Trans.ASME、Ser.C、90、(1968-2)、63.

(57) Zinnes、A.E.、Trans. ASME、Ser.C、92、(1970-8)、528.

(58) Kishinami、K.、Seki、N.、Trans. ASME、Ser. C、105、(1983-11)、759.

(59) 岸浪、斉藤、機論、51-471、B、(昭60)、3772.

(60) Brosh、A.et al、Trans.ASME、Ser.C、104、(1982-2)、90.

(61) Seki、M.et al、Computational Mechanics'86 (1986-5)、vol.2、Ⅷ-97、Springer-Verlag.

(62) 智田、機論、40-335(昭49)、2020.

(63) Sunden、B.、Numerical Methods in Thermal Problems、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1979)、Pineridge Press.

(64) Sunden、B.、Int.J. Heat Mass Transfer、vol.23、No.10、(1980)、1359.

(65) Sunden、B.、Numerical Methods for Non-Linear Problems、(eds. Taylor、C. et al)、(1980)、Pineridge Press.

(66) Sunden、B.、Numerical Methods in Thermal Problems、vol. Ⅱ、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1981)、1084、Pineridge Press.

(67) Sunden、B.、Numerical Methods in Thermal Problems、vol. Ⅲ、、(eds. Lewis,R.W. et al),(1983),641、Pineridge Press.

(68) Patankar、S. V.、Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf.、Tronto、vol. 3、1978、297.

(69) Patankar、S.V.、コンピュータによる熱移動と流れの数値解析(水谷ほか訳)、(1988)、153、森北出版.

(70) 石代ら、第25回日本伝熱シンポジウム講演論文集（1988-6)、247.

(71) 亀ヶ谷ほか2名、機論、54-505、B、(昭63)、2560.

(72) 亀ヶ谷ほか2名、機論、56-530、B、(平成2)、3071.

(73) 亀ヶ谷、浅野、機論、47-421、B、(昭56)、1748.

(74) Kamegaya、H.、Asano、N.、Bulletin of JSME、vol.25、No.203、(1982-3).

(75) Kamegaya、H.、Asano、N.、玉川大学工学部紀要、第19号、昭59.

(76) 亀ヶ谷、浅野、機講論、No.790-15、(昭54-10)、223

(77) 亀ヶ谷、浅野、機講論、No.792-2、(昭54-10)、27.

(78) Desai、C.S.、Abel、J.F.、Introduction to the finite element method (A numerical method for engineering analysis)、(1972)、53、Van Nostrand Reinhold.

(79) olson、M. D.、Finite Element Methods in Flow Problems、(eds. Oden、J.T. et al)、(1974)、103、UAH Press.

(80) olson、M.D.、Finite Elements in Fluids、vol.1、(eds. Gallagher,R.H. et al)、(1975)、57、Wiley.

(81) Connor、J.J.、Brebbia、C.A.、流体解析への有限要素法の応用（奥村ほか訳)、123、サイエンス社.

(82) Chung、T.J.、Finite Element Analysis in Fluid Dynamics、(1978)、208、McGraw-Hill.

(83) 山田、マトリックス法材料力学、有限要素法の基礎と応用シリーズ2、213、培風館.

(84) Dennis、S.C.R.、Chang、G.Z.、J.Fluid Mech.、42(1970)、471.

(85) Greespan、D.、物理学論文選集174、(応用数学VI、流体力学の方程式の数値解)、(川口、高見編)(昭46)、68、日本物理学会.

(86) Kawaguti、M.,物理学論文選集174、(応用数学VI、流体力学の方程式の数値解)、(川口、高見編)(昭46)、82、日本物理学会.

(87) Bozeman、J.D.、Dalton、C.、comp. Phy.、12(1973)、348.

(88) Kawaguti、M.、Jain、P.、物理学論文選集174、(応用数学VI、流体力学の方程式の数値解)、(川口、高見編)(昭46)、82、日本物理学会.

(89) Fromm、J.E.、Harlow、F.H.、物理学論文選集174、(応用数学VI、流体力学の方程式の数値解)、(川口、高見編)(昭46)、101、日本物理学会.

(90) Harlow、F.H.、Welch、J.E.、物理学論文選集174、(応用数学VI、流体力学の方程式の数値解)、(川口、高見編)(昭46)、109、日本物理学会.

(91) 大宮司、機論、44-378、(昭53-2)、555.

(92) Finlayson、B.A.、重みつき残差法と変分原理(川井ほか訳)、(昭49)、培風館.

(93) Finlayson、B. A.、Finite Element Methods in Flow Problems、(ed. by Oden、J.T. et al)、(1974)、13、UAH Press.

(94) Finlayson、B.A.、Finite Elements in Fluids、vol.2、(eds. Gallagher、R.H. et al)、(1975)、1、WILEY.

(95) Kawahara M. et al、Finite Element Methods in Flow Problems、(eds. by Oden、J.T. et al)、(1974)、107、UAH Press.

(96) 川原、数理科学(特集　有限要素法)、(1975-6)、35、サイエンス社．

(97) Kawahara M. et al、Proc.JSCE、No.247、123．

(98) 渡辺、川井、　第１回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭54-9)、139、日本科学技術連盟．

(99) 大宮司、第２回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭55-8)、9、日本科学技術連盟．

(100) 渡辺、第３回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭56-11)、117、日本科学技術連盟．

(101) 太田、　第438回講習会流体工学における数値解析の基礎と応用、(昭51-6)、115、日本機械学会．

(102) 松田、機講論、No.753-4(昭53-3)、8．

(103) 松田、堀川、機論、45-395(昭54-7)、915．

(104) 松田、堀川、機論、45-395(昭54-7)、924．

(105) 児玉ら、第３回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭56-11)、183、日本科学技術連盟．

(106) 平野、第４回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭58-8)、105、日本科学技術連盟．

(107) 児玉、第４回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭58-8)、257、日本科学技術連盟．

(108) 白畑、大宮司、機論、46-405、B(昭55)、793．

(109) Reddy、J.N.、 The Mathematics of Finite Elements and Applications Ⅲ、(ed. by Whiteman、J.R.)、(1979)、227、Academic Press．

(110) 川原、平野、 第１回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭54-9)、93、日本科学技術連盟．

(111) 平野、川原、 第２回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集、(昭55-8)、17、日本科学技術連盟．

(112) 菊地、第３回流れの有限要素法解析法シンポジウム報文集、(昭56-11)、49、日本科学技術連盟．

(113) 菊地、第４回流れの有限要素法解析法シンポジウム報文集、(昭58-8)、1、日本科学技術連盟．

(114) 土屋、第４回流れの有限要素法解析法シンポジウム報文集、(昭58-8)、65、日本科学技術連盟．

(115) 浅野、機論、46-407、A(昭55)、826．

(116) 浅野、機論、47-420、A(昭56)、841．

(117) 亀ヶ谷、浅野、機講論、No.837-1、(昭58-6)、275 ．

(118) Kamegaya、H.ほか2名、Proc. of Int. Conf. on Variational Methods in Engineering、(1985)、4-3、Springer-Verlag．

(119) Chung、T.J.、Finite Element Analysis in Fluid Dynamics、(1978)、114、McGraw-Hill．

(120) 藤野、熱伝導と熱応力、(昭47)、172、培風館．

(121) Suriano、F.J.、Yang、J.、 Int. J. Heat Trans.、vol.11、(1968)．

(122) Torrance、K.G.、Rocket、J.A.、J. Fluid Mech.、vol.36、(1969)、173．

(123) Winters、K.H.、 Numerical Methods in Thermal Problems、vol.2、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1981)、920、Pineridge Press．

(124) G. DE Vahl Davis、Jones、I. P.、 Numerical Methods in Thermal Problems、vol.2、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1981)、552、Pineridge Press.

(125) Watson、A.、Quart.、 J. Heat Mass Transfer、25-4 (1972)、423.

(126) Nguyen、T.H.、Int.J. Heat Mass Transfer、25-10 (1972)、1559.

(127) Merker、G.P.、Warme Stoffubertrag.、16-2、63.

(128) 関ほか2名、機論、43-372、2部(昭52-8)、3064.

(129) Leonardi,E.,Reizes,J.A., Proc. 1st Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1979)、297、Pineridge Press.

(130) Leonardi、E.、Reizes、J.A.、 Numerical Methods in Heat Transfer、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1981)、Wiley.

(131) Leonardi、E.、Reizes、J.A.、Numerical Methods in Thermal Problems、vol.2、(eds. Lewis、R.W. et al)、(1981)、978、Pineridge Press.

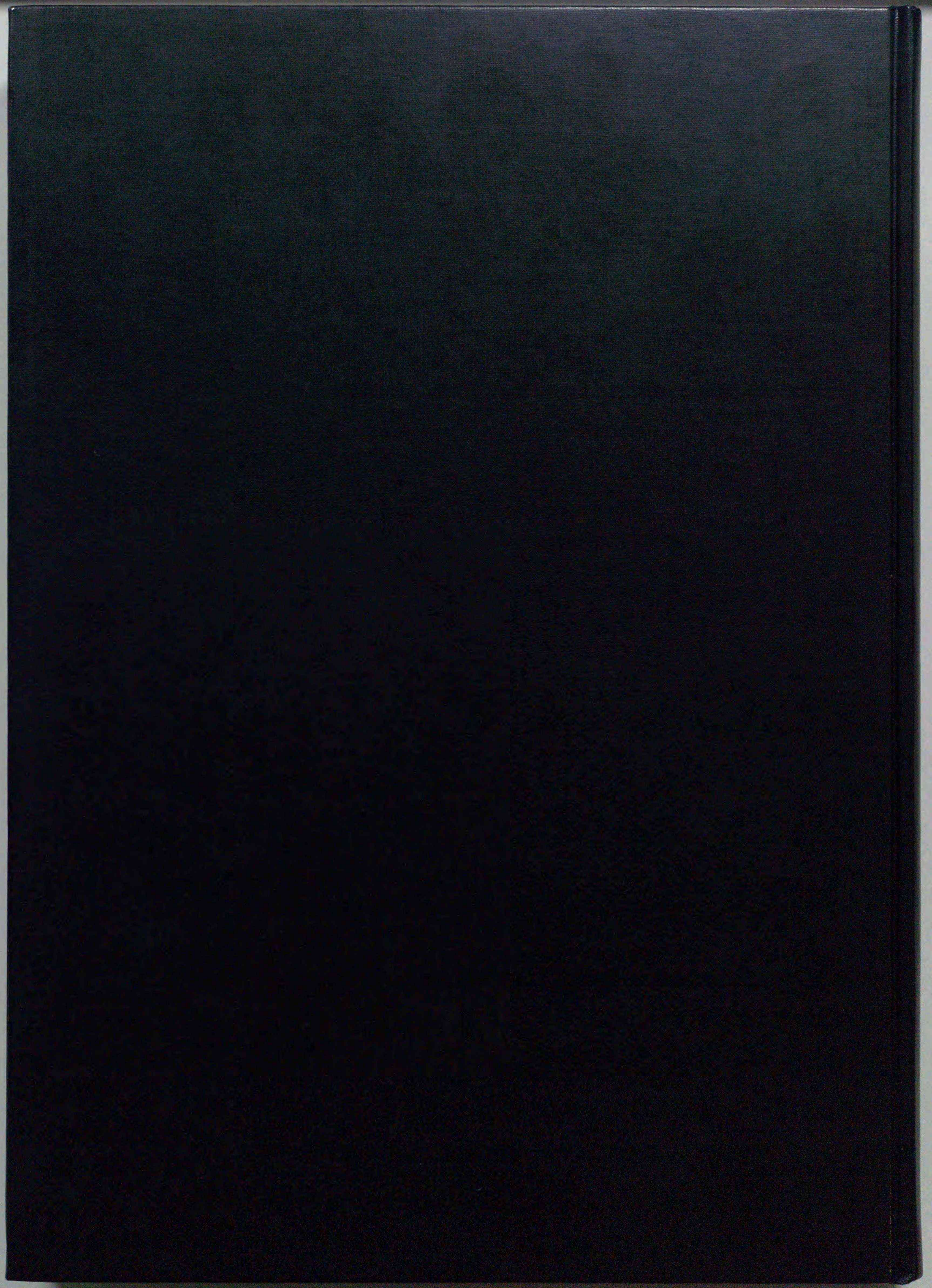
(132) 関ほか3名、機講論、No.830-3、(昭58-4)、86.

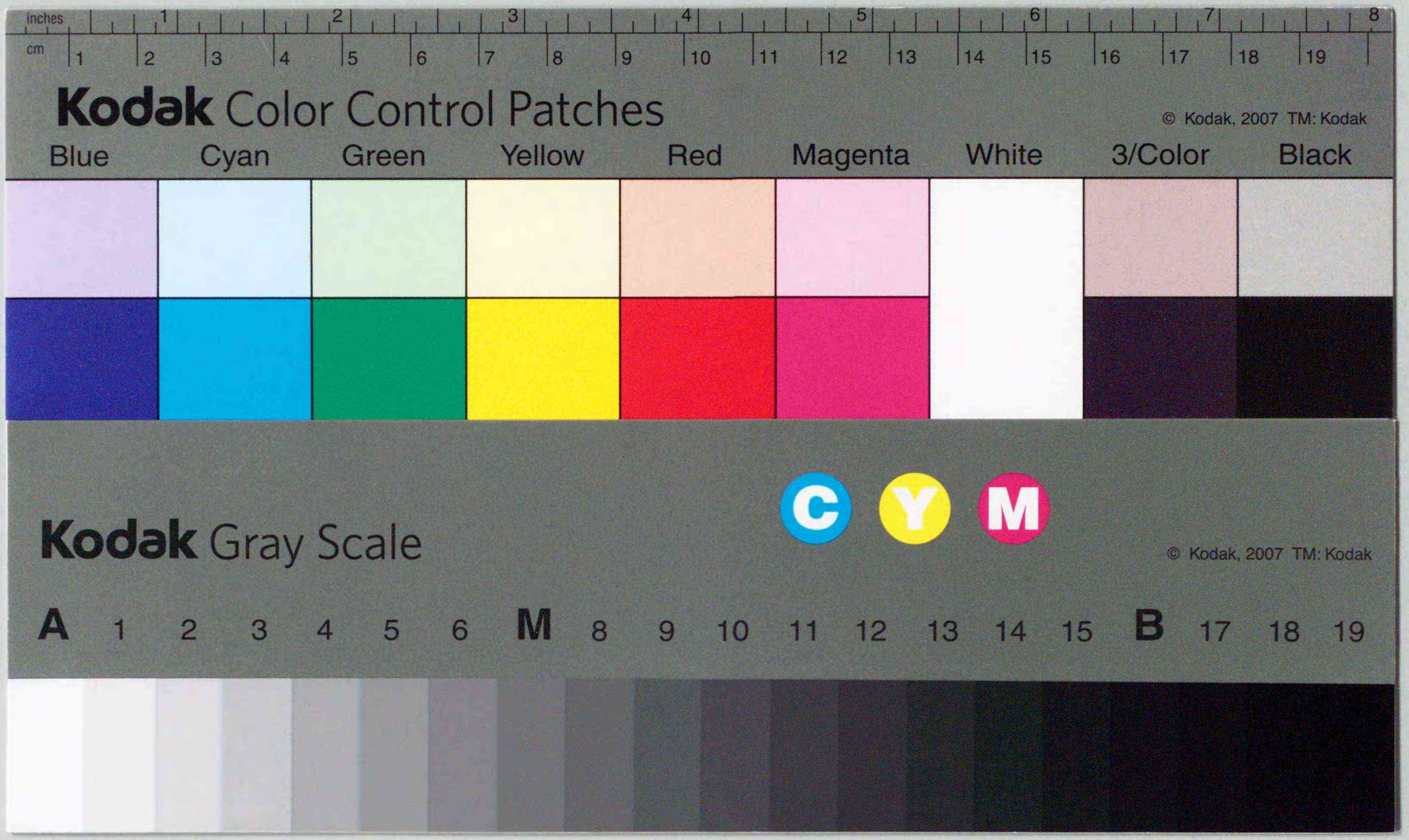
(133) Zhong、Z.Y.、et al、ASME Heat Transfer Division、vol.26、(1983).

(134) Kakac、S.、Atesoglu、O.E.、 Natural Convection (Fundamentals and Applications)、(eds. Kakac、S. et al)、(1985)、729、Hemisphere Pub. Corp..

(135) 亀ヶ谷ほか2名、機講論、NO.840-14、26.

(136) 日本機械学会編、伝熱工学資料(改訂第３版)、(昭56)、300、
日本機械学会.
(137) 浅野、機論、49-438、A,(昭58)、215.
(138) 浅野、機論、49-439、A,(昭58)、322.
(139) 浅野、機論、51-467、A,(昭60)、1893.
(140) 浅野、機論、51-470、A,(昭60)、2317.
(141) 浅野、機論、52-475、A,(昭61)、773.
(142) Kamegaya、H.et al、Proc. of Int. Conf. on Variational
Methods in Engineering、(1985)、6-41、Springer-Verlag.
(143) 矢川、江口、機講論、NO.840-13、79.
(144) 甲藤、伝熱概論（昭42）、76、養賢堂.




inches
cm
Kodak Color Control Patches
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
Kodak Gray Scale
C
Y
M
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19