



Title	複雑ネットワークのパーコレーションによる同期現象
Author(s)	岩根, 慎司; 鈴木, 育男; 山本, 雅人 他
Citation	情報処理北海道シンポジウム2008講演論文集, B-03
Issue Date	2008-09-19
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/51355">https://hdl.handle.net/2115/51355</a>
Rights	ここに掲載した著作物の利用に関する注意 本著作物の著作権は情報処理学会に帰属します。本著作物は著作権者である情報処理学会の許可のもとに掲載するものです。ご利用に当たっては「著作権法」ならびに「情報処理学会倫理綱領」に従うことをお願いいたします。
Type	journal article
File Information	2008B03.pdf



# 複雑ネットワークのパーコレーションによる同期現象

岩根慎司\* 鈴木育男 山本雅人 古川正志  
(北大工)†

## 1 はじめに

近年、生物学や物理学、社会科学等の幅広い分野において同期現象に関する様々な研究が行われている。これらの研究の多くで同期現象に関わる各要素は蔵本モデルにより、結合振動子としてモデル化されている。蔵本モデルでは、全ての要素間に結合がある条件の下で、各要素が互いに影響を及ぼしあう。しかし、現実のネットワークにおいて、このような条件はほとんど存在しないと考えられる。

本研究では様々なネットワークにおけるノードを振動子と見なし、各振動子は結合しているノードのみの影響を受ける場合の条件を考える。更に、これらのネットワークにボンドパーコレーションの理論を適用することで活動しない振動子が現れるネットワークにおいてシミュレーション実験を行い、同期現象が起こるかどうかを検証し、その振る舞いの評価を行う。

## 2 結合振動子

蔵本モデルでは、 $N$  個の振動子で構成される系において、 $i$  番目の振動子の位相  $\theta_i$  は以下の方程式に従う。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

式(1)において、 $\omega_i$  は  $i$  番目の振動子の自然振動数である。また、 $\sigma$  は結合強度であり、すべての結合振動子において同じ値をとる。これまでの研究において、式(1)で記述される結合振動子は結合強度の臨界値  $\sigma_c$  において相転移が起き、同期が始まるということが知られている。

更に、振動子全体の同期の強さを表す指標には以下の式で定義される秩序パラメータ  $r(t)$  と  $\phi(t)$  を用いる。

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (2)$$

式(2)において、 $r(t)$  と  $\phi(t)$  はそれぞれ時間  $t$  における振動子の平均振幅と平均位相である。 $r(t)$  が大きくなるほど振動子全体の同期は強くなる。また、 $r(t)$  は時間  $t$  の関数であるため、ある結合強度  $\sigma$  における振る舞いの評価には、以下の式で定義される  $r(t)$  の時間平均を用いる。

$$\bar{r} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t r(t) dt \quad (3)$$

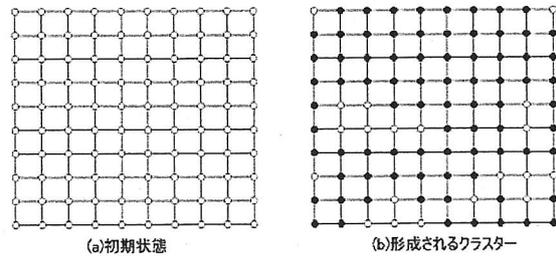


図1 形成されるクラスターの一例

## 3 ボンドパーコレーション

要素間のつながりにおいて、各ボンド(ネットワーク科学ではリンク)は開閉することができるとし、確率  $p$  で開かれ、確率  $p-1$  で閉じられているとする。このときある一つの要素から開かれたボンドを通してつながった要素集合はクラスターを形成する。ボンドパーコレーションは以上のような過程において、確率  $p$  の値の変化によるクラスターサイズの変化等を扱う理論である。

また、パーコレーション閾値  $p_c$  は無限個の要素集合において無限につながったクラスターが形成され始める確率を表し、 $p \geq p_c$  のときには要素集合の中に無限につながったクラスターが存在する。

## 4 シミュレーション実験

### 4.1 理論の導入

本研究では、ネットワークにおける振動子のつながりを考慮するため式(1)を以下のように変形する。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{\sigma}{k_i} \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (4)$$

式(4)において、 $k_i$  は  $i$  番目の振動子の次数、 $\mathbf{A}$  はネットワークの隣接行列であり、 $\mathbf{A}_{ij}$  は隣接行列の  $(i, j)$  成分を表し、 $\mathbf{A}_{ij} = 1$  のときノード間  $(i, j)$  にリンクがあり、 $\mathbf{A}_{ij} = 0$  のときノード間  $(i, j)$  にリンクが存在しない。式(4)を用いることにより、各振動子は結合している振動子からのみの影響を受けることになる。

### 4.2 実験の設定

シミュレーションの初期状態として、振動子で構成されるネットワークを用意する。用意したネットワークに関してボンドパーコレーションを適用し、形成されるクラスターを振動子のネットワークとし、式(4)に基づき同期のシミュレーションを行う。図1にノード数100の正方形格子ネットワークにおいて、 $p = 0.4$  でボンドパーコレ

\*iwane@complex.eng.hokudai.ac.jp

†札幌市北区北14条西9丁目北海道大学工学部

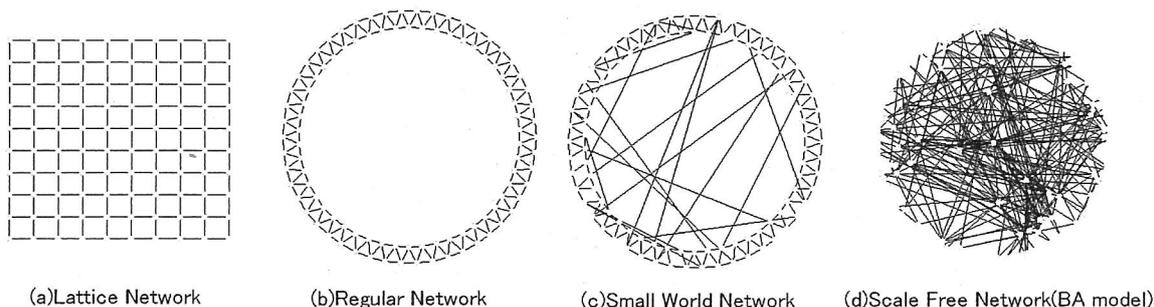


図2 各ネットワークの構造

ーションを適用した際に形成されるクラスターネットワークの一例を示す。なお、初期状態で用意するネットワークとして、正方格子ネットワーク、レギュラーネットワーク、スモールワールドネットワーク、スケールフリーネットワーク(BAモデル)等の異なる構造を有する四種類のネットワークを設定する。これらのネットワークの構造は図2に示す。シミュレーション実験ではこれらのネットワークのノード数は100、平均次数は4に統一する。

微分方程式の数値解法は、全てのシミュレーションにおいて時間ステップ0.1で四次のルンゲ・クッタ法をランダムな初期条件で実行することとする。

#### 4.3 実験

以上の設定で、二つのシミュレーション実験を行った。まず、実験1ではネットワークにボンドパーコレーションを適用し、確率 $p$ の変化によるクラスターサイズの変化を四種類のネットワークに関して調査した。次に、実験2では実験1で得られた結果を基に同期のシミュレーションを行い、結合強度 $\sigma$ の変化による秩序パラメータ $\bar{r}$ の変化を調査した。

### 5 実験結果と考察

#### 5.1 確率 $p$ の変化によるクラスターサイズの変化

実験1の結果を図3に示す。図3において、クラスターサイズの変化はどのネットワークにおいても確率 $p$ に関して単調増加であることがわかる。また、クラスターサイズの増加の割合はスケールフリーネットワークを除くと、類似している傾向が見られる。スケールフリーネットワークは確率 $p$ が小さい場合でもクラスターの成長過程においてハブにつながると、最終的にクラスターサイズはある程度大きくなる確率が高い。そのため、他のネットワークとは異なり、裾野が広く緩やかな増加を示す。

この実験においてネットワークのノード数は有限個であるため、厳密なパーコレーション閾値を求めることはできない。そこで、形成されるクラスターサイズが全ノード数の8割に達する確率を本実験における閾値とする。

表1 各ネットワークのパーコレーション閾値

ネットワークの種類	閾値
正方格子ネットワーク	0.53
レギュラーネットワーク	0.74
スモールワールドネットワーク	0.62
スケールフリーネットワーク	0.62

図3から求められた各ネットワークの閾値を表1に示す。今回使用したネットワークにおいて正方格子ネットワークでは、平均経路長が約4.3であるのに対してレギュラーネットワークは約11.8である。したがって、表1における閾値の違いには、ネットワークの平均経路長が関係していると考えられ、ネットワーク全体にクラスターが広がるには、平均経路長の大きなネットワークほど高い確率を必要とする。

#### 5.2 ネットワーク構造の違いによる同期の評価

実験2では、実験1から得られたパーコレーション閾値をパーコレーション確率 $p$ として用いて、同期実験を行った。実験2の結果を図4に示す。図4において、各ネットワークの秩序パラメータ $\bar{r}$ は結合強度 $\sigma$ が大きくなるほど高くなる。このことから、結合強度 $\sigma$ が大きくなるほど強い同期を示す結合振動子の性質は保たれており、本実験の設定においても同期現象は起こることが検証できる。また、 $\sigma$ がある値に達すると $\bar{r}$ も一定の値に収束しているが、この収束値は各ネットワークによって異なり、振る舞いの相違を示している。スケールフリーネットワークでは秩序パラメータ $\bar{r}$ の収束値が約1であり、ネットワーク全体はほぼ完全に同期している。これに対して、レギュラーネットワークでは秩序パラメータ $\bar{r}$ の収束値が約0.5であるため、各ノードの位相にずれが生じている。前述したように、レギュラーネットワークの平均経路長は他の三種類のネットワークに比べて大きく、ネットワークの両端で同期の時間遅れが発生し、位相のずれが生じたと考えられる。実際に、各時間における位相の状態を表示するアニメーションプログラムを

\*iwane@complex.eng.hokudai.ac.jp

†札幌市北区北14条西9丁目北海道大学工学部

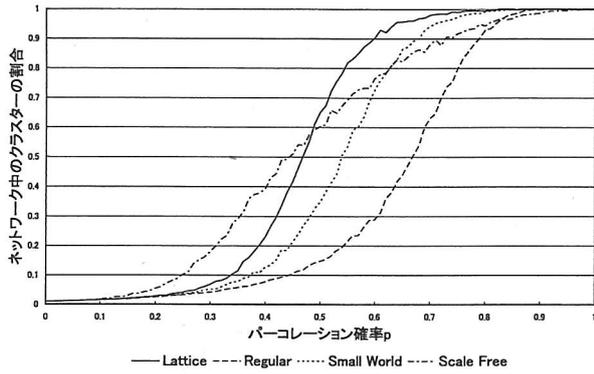


図 3 パーコレーション確率によるクラスターサイズの変化

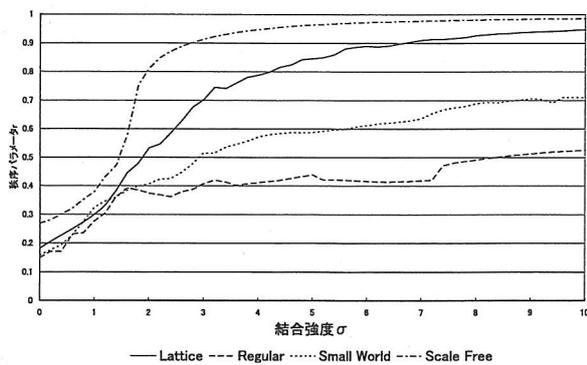


図 4 結合強度による秩序パラメータの変化

作成して、振る舞いの観測を行った。これらの様子を図 5 に示す。レギュラーネットワークでは部分的な同期が伝播していき、同期の時間遅れが発生していることが確認できる。

### 6 おわりに

本研究では、様々なネットワークにボンドパーコレーションを適用し形成されるクラスターをネットワークとする結合振動子の同期実験を行い、得られた実験結果から各ネットワークにおいて同期の振る舞いが異なることを確認した。

今後の課題は、ネットワークの平均経路長とパーコレーション閾値や秩序パラメータの間のスケーリング則に関する調査を行うことである。

### 参考文献

[1] Steven H. Strogatz, "SYNC なぜ自然はシンクロしたがるのか", 早川書房, 2005  
 [2] Dietrich Stauffer, Amnon Aharony, "パーコレーションの基本原理" 吉岡書店, 2001

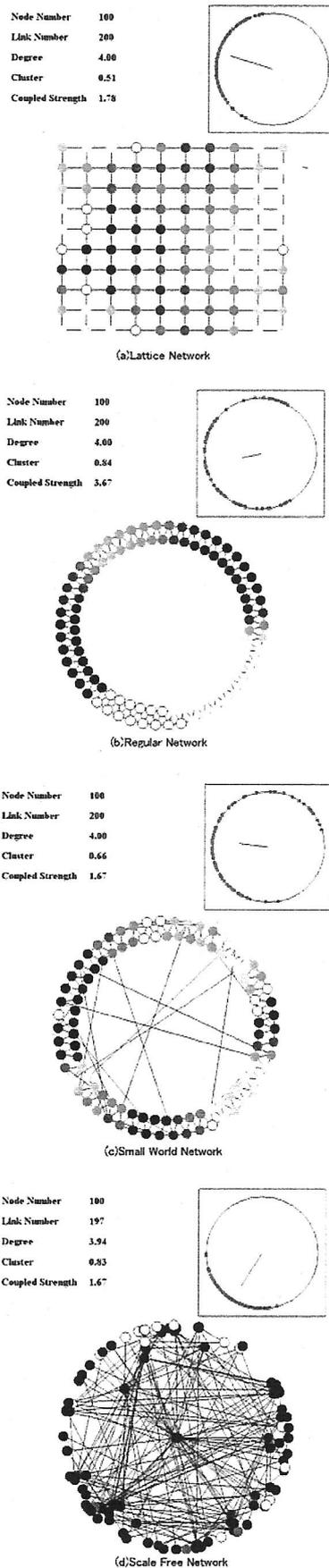


図 5 アニメーションプログラムの実例

\*iwane@complex.eng.hokudai.ac.jp  
 †札幌市北区北 14 条西 9 丁目北海道大学工学部