



Title	二次元チャンネル内噴流のカオスの挙動とその制御
Author(s)	竹澤, 聡
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第4103号
Issue Date	1997-03-25
DOI	https://doi.org/10.11501/3122261
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51413
Type	doctoral thesis
File Information	000000307452.pdf



二次元チャンネル内噴流のカオス的挙動とその制御

竹澤 聡

①

学 位 論 文

二次元チャンネル内噴流のカオス的挙動とその制御

平成9年3月25日

北海道大学大学院工学研究科 機械工学第二専攻

竹澤 聡

目次

第1章 序論	1
1.1 はじめに	1
1.2 噴流に潜むカオスの挙動解析へのアプローチ	6
1.2.1 噴流の一般的特性と本研究との関連	6
1.2.2 カオスの解釈による近年の研究	8
1.2.3 二次元チャンネル内噴流の制御について	11
1.3 本研究の目的と構成	13
第2章 二次元チャンネル内噴流の挙動	15
2.1 計算対象	17
2.2 基礎方程式	19
2.3 数値解析法	22
2.3.1 基礎方程式の離散化	22
2.3.2 境界条件	26
2.3.3 Poisson 方程式と加速緩和係数	31
2.4 計算結果	37
2.4.1 定常対称流と定常非対称流の流れのパターン	37
2.4.2 フリップフロップ現象	40
2.5 第2章のまとめ	53
第3章 フリップフロップ現象のカオス判定	54
3.1 観測時系列信号の非一意性	56
3.1.1 時系列の比較	56

3.1.2	埋め込み理論	58
3.1.3	自己相関係数	60
3.2	各種解析法による被時系列の分析	62
3.2.1	スペクトル解析	62
3.2.2	ウェーブレット解析	65
3.3	カオス構造とフラクタル次元の決定	82
3.3.1	リアプノフスペクトラム	82
3.3.2	相関次元の算出	92
3.4	第3章のまとめ	96
第4章	OGY法による能動制御	97
4.1	OGY法の考え方とアルゴリズム	99
4.1.1	OGY法の発想とこれまでの研究	99
4.1.2	OGY制御の定義方法	102
4.2	周期安定軌道の探索方法	104
4.2.1	ポアンカレ断面導入の背景と軌道の再構成	104
4.2.2	写像行列の固有値と固有ベクトル	111
4.3	制御結果	113
4.3.1	制御された時系列と摂動パラメータ	113
4.3.2	位相空間上における制御の様子	116
4.3.3	制御時間および制御域通過判定条件による影響	119
4.3.4	制御の可否の決定要因	123
4.4	第4章のまとめ	125
第5章	ニューラルネットワークを用いた推定法と力学系の同定	126
5.1	ニューラルネットワークのメカニズム	129

5.1.1	剥離泡と再付着点近傍の流れ情報	129
5.1.2	ニューラルネットワークの構造	133
5.2	階層学習システムの性能評価	135
5.2.1	教師信号の定義と学習誤差	135
5.2.2	学習アルゴリズムの評価	139
5.3	ニューラルネットワークによる推定結果	145
5.3.1	周期解に対するニューラルネットの推定	145
5.3.2	カオス解に対するニューラルネットの推定	148
5.4	リカレントネットワークが構成する力学系モデルとシミュレーション 151	
5.4.1	周期解のシミュレーション	154
5.4.2	カオス解のシミュレーション	156
5.5	第5章のまとめ	159
第6章 吸込みを援用したニューラルネットワークによる能動制御		161
6.1	ニューラルネットワークによるインターアクティブ制御の意義 ...	162
6.2	計算条件	165
6.3	ニューラルネットワーク切替の概要	167
6.4	制御則とその評価法	172
6.5	制御結果	173
6.5.1	周期解の制御	173
6.5.2	カオス解の制御	180
6.6	第6章のまとめ	186

第7章 結 論..... 187

参考文献および参考図書..... 192

謝 辞

第1章 序論

1.1 はじめに

ギリシャ語の『カオス』とは天地創造以前の混沌とした状態あるいは事象を意味する (Gleick, 1987).

カオスは、医学、生物、工学など、広範囲にわたる分野でよく見受けられる実在の現象である。1970年代になって、カオスに含まれる数学的概念の一端が明らかになり、簡単な非線形システムにおいてもそこに内在する力学系の不確定性によっては、複雑でカオス的挙動が出現することがわかってきた。大勢の研究者がカオスという現象を独自に定義しているが、それらに共通しているのは『非線形の確定系に生じる不規則な振動現象』ということである。

二次元の急拡大チャンネル内流れは、流れの剥離と再付着が共存する流れとして古くから知られており、流体力学の基礎を成す典型的な流れ場である。この研究は工学的にも意義があり、電子工学の基礎となるプリント基盤のエッチング製作過程における応用をはじめとして電子機械、化学工学分野および樹脂形成や薄膜形成法におけるフローパターン最適制御など応用範囲も幅広い(半導体結晶材料ハンドブック, 1986)。

これまでの研究によると、チャンネル内に噴き出る流れが低レイノルズ数の場合、吹出し口直後に対称流が存在することは周知されている (Sobey et al., 1986)。しかし最近になって、低レイノルズ数においてさえも流れは安定ではあるが、解は「一意的」に定まらないことが知られるようになってきた。この「一意的」に定まらないとは、非対称流れの存在を意味するが、その根本原因として剥離泡の発生・消滅が大きく関与しているこ

とが考えられる。

中西ほか(1995a)は、図1.1に示すように非対称流れが実現されるレイノルズ数、剥離泡の長さおよび第三の剥離泡の発生を関連づけて報告した。また、Fearn et al. (1990)は、剥離泡生成機構の解明を剥離流線の形状と対比して詳細に検討している。

この二次元チャンネル内流れには、流体振動と呼ばれる自励発振現象が存在する。この現象に着目した研究を、近年、社河内ほか(1996)が実験的に行い、発振現象生起の条件、発振振動数とノズル出口速度、流路形状などの関係を系統的に示している。二次元チャンネル内噴流の流れのパターンをレイノルズ数、チャンネル幅(空間的広がり)、時間経過の三次元で表現すると図1.2のようになる。

自励振動現象は、周期、非周期の混在したいわゆる「非線形の確定系に生じる不規則な振動現象」とみなすことができる。また、これまで単純な周期現象としてみなされていた流れ場の挙動が、近年では再考察がなされるようになり、例えばカルマン渦列では、渦放出周波数の20分の1ほどの長い時間スケールの「ゆらぎ」の存在(横井, 1991), (羽二生, 1995)が確認されている。

近年のカオス概念の確立と解析手法の進展は、流体力学においてもとどまるどころを知らず、これまでの線形的なアプローチによる行き詰まりを打破し、非線形システムに潜む様々な流体物理現象の解明に役立つとともに、カオス工学(田原および合原, 1992)の応用や流れの制御へと発展を遂げている。

したがって、二次元チャンネル内噴流の挙動についてカオス研究の立場から再考察を加えることは、新たな知見を獲得できるものと期待される。

よって、二次元チャンネル内噴流の基礎的知見の付与だけでなく、自励発振現象と密接な関わりがある剥離泡の発生、消滅の制御にカオス研究の手法を導入し、流路抵抗の低減や流体輸送効率の回復が達成できれば二次元チャンネル内噴流の研究の重要性はさらに増すことになろう。

幸いなことに、カオス工学の応用の一例として「カオスを利用した制御」が注目を集めており(近藤ほか, 1995)、この分野の研究は次の新し

い時代を迎えようとしている。カオスと制御との関わり方は、一般には、カオスをpositiveにとらえるか、あるいはnegativeにとらえるかに分類できる。

positiveな面とは、非線形非平衡系に発生するカオスの特徴的な『揺らぎ』を積極的に利用する点にある。自らおとなしい『揺らぎ』を作りだし、安定な機能を果たすホメオダイナミカルな状態を維持する制御や、場合によっては『揺らぎ』の性質を解析して発生中のカオスを周期状態に抑えこむ制御も考えられる(Ott et al., 1990), (Ditto et al., 1990)。

一方、negativeな面とは、『望ましくない非線形振動』として制御する問題である。もともと、工学上のいろいろな局面で非線形振動を避ける必要に迫られた場合、まず設計段階でカオスを回避するように考慮しなければならない。しかし、それでもカオスが発生するシステムでは、カオスを監視する同定モデルを適正に構築しながら予測する必要がある(吉田ほか, 1994)。これによりカオス現象を未然に阻止する制御が可能となる。

いずれにしても流体力学の現象に対し、カオスを利用し考慮した制御は今後の制御技術の研究に有益なテーマであり、最終的な実用段階ではロバスト性(モデルが多少変動しても頑強に可制御性を維持する性質)の高い方法の開発が今後さらに望まれる。

以上、本論文でとり扱う二次元チャンネル内噴流は基礎的かつ基本的な流れ場ではあるが、カオスの研究対象としても非常に興味深い結果を提供する可能性がある。また、可制御性のシミュレーションが実現できれば工学的実用性の検討および制御システムの開発に役立つものと信ずる。

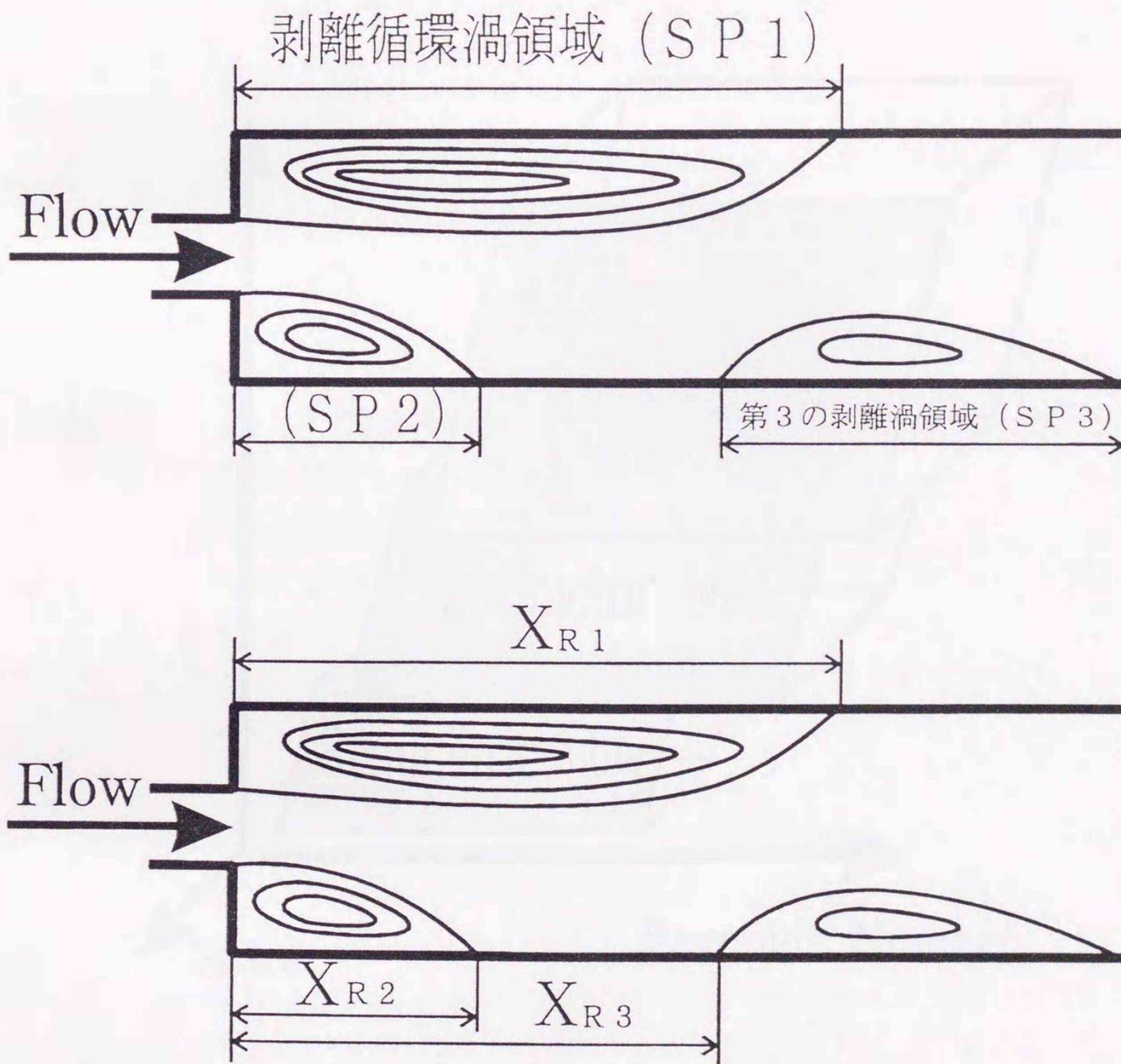


図 1.1 再循環領域とその長さの定義

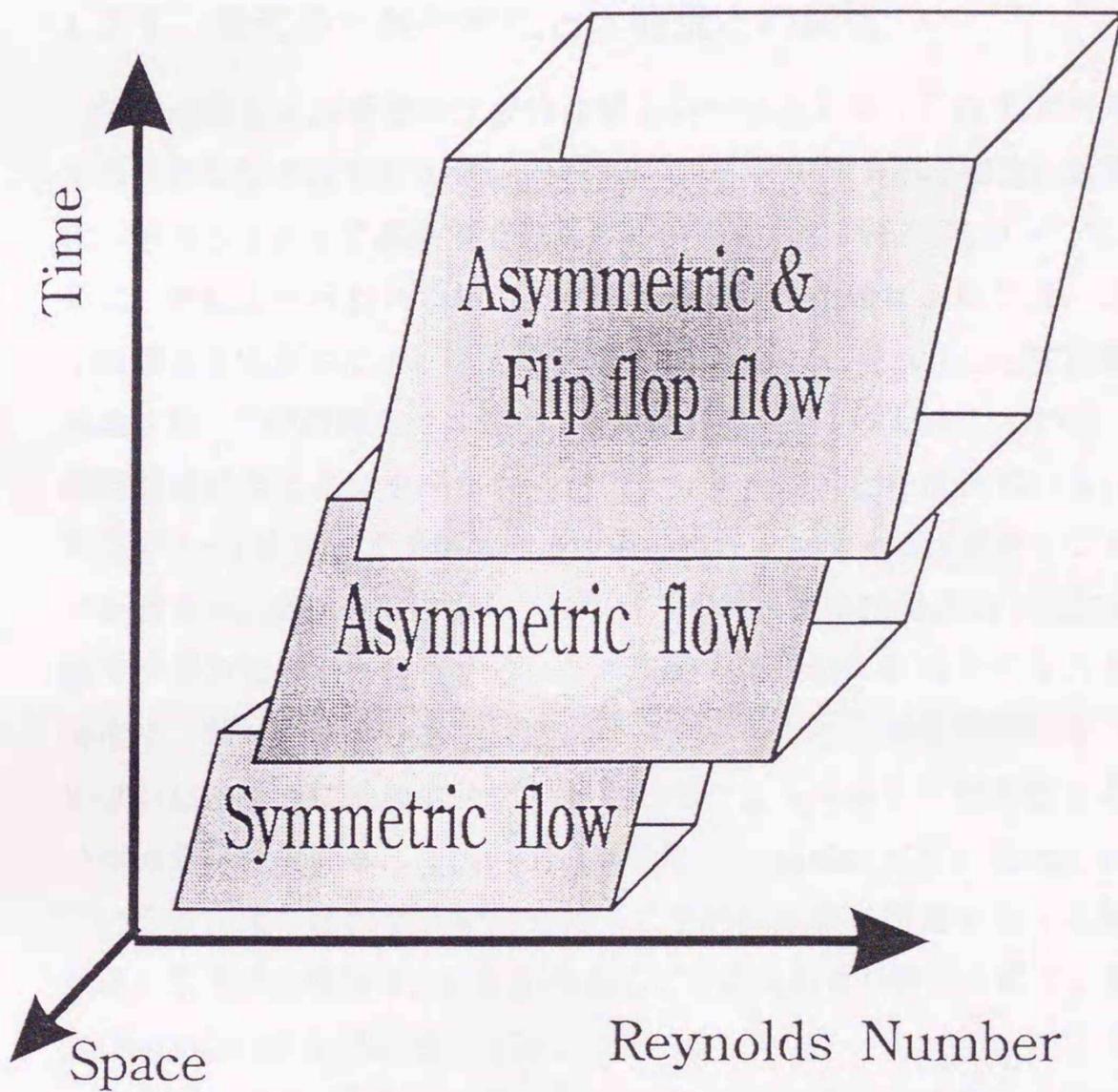


図 1.2 二次元チャンネル内噴流流れパターンの三次元的図式

1.2 噴流に潜むカオス的挙動解析へのアプローチ

チャンネル内噴流の議論に先だって一般の噴流に関する事項を概括する。これが本研究を実施する端緒となったからである。

1.2.1 噴流の一般的特性と本研究との関連

噴流は自由せん断流の代表的な場合の一つとして、これまで非常に多くの研究がなされてきた(Rajaratnam, 1976)。中でも円形噴流は装置の製作の容易さもあって実験室で最も多く研究されている流れの一つである。通常、実験室で行われる縮流ノズルからの円形噴流においては、初期せん断層の不安定性によって変動が増加し、やがて、巻き上がって渦構造を形成する。この渦構造ははじめ、ほぼ軸対称なリング状をしている。この渦構造は成長と合体を経ながらポテンシャルコアと呼ばれている、ノズル径の4~6倍位までの領域の流れ場の特性を支配する。ポテンシャルコアを過ぎると渦構造は崩壊し、顕著な規則性(または周期性)を失った乱雑な状態の噴流場に移行する。この領域で不規則に形成される大きな渦構造は、軸対称形よりも螺旋形になりやすいことが知られている。これらは前述のように、縮流ノズルからのポテンシャルコアが存在する場合の噴流の特徴である。一方、出口断面での流れ場が完全に乱流に発達している管内流を経た噴流の研究は、工学的に頻繁に遭遇する(工場の排気塔や原子炉の冷却塔)にもかかわらず、従来あまり研究されていなかった(Boguslawski & Popiel, 1979)。

筆者はこの点に着目し、長い円管内で十分に発達した乱流状態の流れが静止流体中に噴き出すときの噴流(「円管乱流噴流」)を実験的に調べた。その結果、管直径の約1倍より下流の領域で準周期的速度変動が観察され、その卓越周波数はポテンシャルコアのある場合とほぼ同じであることが分かった。この実験事実は、スケールの大きな渦構造の存在が初期条件の違いに拘わらず、円形噴流に共通の基本的性質であることを示唆するものである。

二次元噴流においても、円形噴流のときと類似の渦構造が形成されるこ

とが分かっている。ただしこの場合、リング状の渦構造に対応するのは、噴流軸に対称で、互いにほぼ平行な配列をした渦構造である。ノズル幅の約7倍より下流では、噴流が上下に波状に変動するようになる。これはフラッピング現象と呼ばれ、渦構造が交互配列するため、円形噴流の螺旋形の渦構造に対比されるものである。そして、この交互配列の渦構造が円形噴流の螺旋構造に比べ、はるかに明瞭に観測されるのは、その影響が上流へ伝播して二次元ノズル出口のせん断層を励起し、一種のフィードバックループを形成するためであることが、Thomas & Chu (1989) によって報告されている。

筆者が実験的に調べた円管乱流噴流は、実際的な噴流に近いという点で工学上興味ある研究対象であるが、初期条件が既に乱流であるために、これを数値計算で取り扱うことは現時点では困難である。ポテンシャルコアのある円形噴流近傍場におけるカオスの挙動については、次節で述べる Broze & Hussain (1995) の研究が最近報告されている。彼らの報告は軸対称噴流に関する実験で、装置のノイズ成分を限りなく除去することから研究が発端し、実験装置の精度向上が成し遂げられてこそ、カオスの本質的解釈が可能であると指摘している。このことは実験データからのカオスの抽出が容易でないことを示唆する。

そこで、本研究では二次元噴流を対象とした数値計算を行うこととした。

このフラッピングに類似した現象が二次元チャンネル内に噴き出す噴流においても起きることは、前述で述べたとおりである。チャンネル内噴流は自由噴流の場合とは異なり、上下の境界条件を明確に設定できるという利点があり、初期条件や境界条件に敏感なカオスの挙動を調べる上では有用な供試流れ場であると考えられる。

以上に述べたように、本研究では非常に単純化された噴流のモデルを対象にするが、得られる結果を基礎にしてこれを発展させることにより、噴流に潜むカオスの現象を抽出し工学的応用の議論ができるならば、今後の実験と計算との結果の比較や研究方針の決定に役立つものと考えられる。

1.2.2 カオスの解釈による近年の研究

二次元対称急拡大流路内流れは実用的にも重要な流れであり、その特徴の一つとして低レイノルズ数においてさえ非対称流れになることが、古くは伊藤ほか(1973), Durst et al. (1974), 最近では, Goodwin & Schowalter (1996), Fearn et al. (1990)らによって報告されている。

また, Gagnon et al. (1993)は乱流においても対称急拡大流路で非対称流れが生じる報告をしている。そこでは, 流れ場に存在する再付着点距離と圧力勾配などの力学量との関連性を説明し, 基礎的データを提供している。しかし, 対称急拡大流路に吹き出す流れに対し, 運動量の制御や混合の強さの判定などの工学的な重要性があるにも拘わらず, 力学系やカオスの挙動の観点から考察を加えた例は見当たらない。

一般に検査領域を超えて流体が流出する場合を物理的にopenな流れ場といい, 粒子追跡等の手法がとれないため, 閉空間内の流れにくらべ, カオス現象の研究には不都合とされてきた。openな流れ場を対象とした力学系の研究は, 固有の複雑さのためにSreenivasan (1985)の円柱後流の双安定問題やWilliams et al. (1990)の翼後流の準周期カオスルートの研究に見られる程度であり, 二次元チャンネル内流れの力学系の研究はなされていないようである。噴流をテーマに非線形力学系を扱った研究も極めて少なくBroze & Hussain (1995)に見られるにすぎない(図1.3)。彼らは亜音速の軸対称自由噴流で実験を行い, レイノルズ数 $1.1 \times 10^4 \sim 9.1 \times 10^4$ の範囲において外部攪乱周波数と強制振幅を流れにフィードバックして制御を行っている。この手法の斬新性は物理的にopenな流れ場に対し力学系としてclosedの状態を作り出し, ノイズのトーンダウンとカオス現象の抽出に成功した点にある。結果として, 周期的状態とカオス状態の違いが, 渦放出の合体の有無にあると報告している。そして, フィードバックの効果は時空カオスより時間カオスの抽出に有効であるとも報告している。また, Broze & Hussain (1994)はこれと同様の実験から, アトラクターのストロハル数と攪乱振幅からなる周期解とカオス解を分岐する位相ダイアグラムを作成し, 定量的指標として相関次元, リアプノフ指数

を求め、リアプノフ指数が正になるカオス状態が存在することを示した。



図 1. 物理系と動的系との関係を示す。

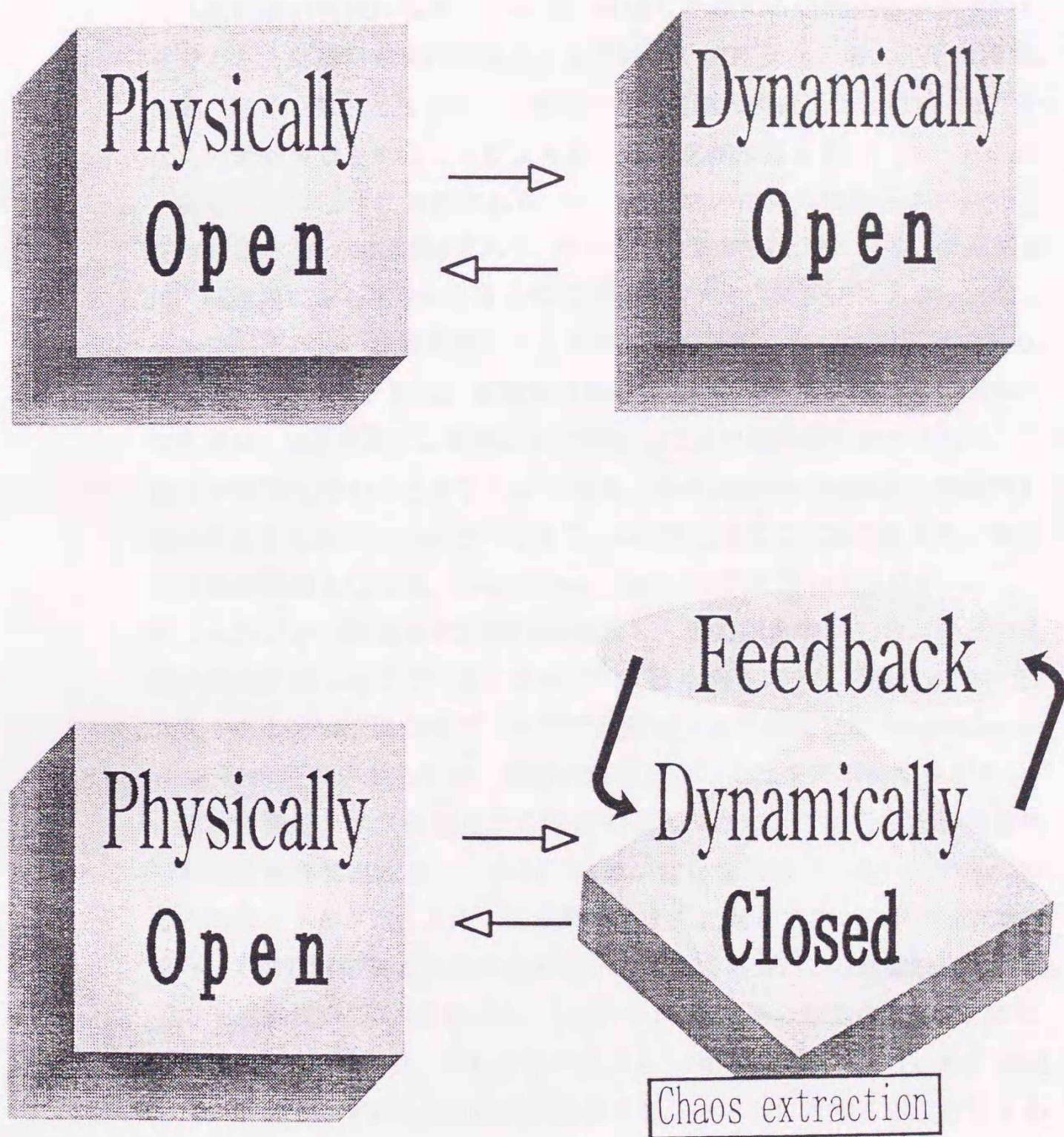


図 1.3 カオス現象を抽出する Broze & Hussain (1995) の概念

1.2.3 二次元チャンネル内噴流の制御について

本流れ場の特徴は噴流の吹き出し直後に存在する剥離再循環領域の存在である。剥離再循環は剥離泡とも呼ばれ、流路抵抗の増大や圧力変動、振動、騒音の原因となるため、制御により剥離泡の縮小化と消滅、速やかな再付着が実現されることにより工学的意義は高まる。

剥離流れは二つに大別される。一つは流れの中に外部からエネルギーを持ち込まない受動制御であり、その逆は能動制御と呼ばれる。受動制御は、噴流幅に対してチャンネル幅を変化させたり、流路内にスラットなどを設置して行う。能動制御は、エネルギーを外部に依存する形態であり、制御力として、音、攪乱、運動量の援用などがある。特に運動量の具体的な応用は、壁面噴流による吸込みや吹出しにより境界層へのエネルギーの供給や奪取を行おうとするものである。急拡大流路の剥離泡を能動的に制御する研究例はいまのところなく、本研究と類似の剥離泡を発生する流れ場の制御例としては、Kwong et al. (1994)が開き角の大きなディフューザに入り口から非定常壁面噴流を導入し、圧力回復の向上および圧力変動の低減を成し遂げている。さらには、後ろ向きステップ流れについて、ステップ上方の壁面からスピーカで音波を与えて制御した Bhattacharjee et al. (1986) の例があるが、制御の機構については未だ不明な点が多い。

能動制御をカオスの観点から考察すると、カオスであることを積極的に利用する制御方法として OGY¹ 制御が注目を集めている。この制御の基本的なアイデアは、カオスの変動を示す系に対してフィードバック制御を行って周期解の安定状態に落ち着かせる点にある。この制御法は強制振子の先端軌道の安定(安田ほか, 1994)や Duffing 系の振動の安定(朱ほか, 1995)の報告に見られ、それぞれの系がもつ周期軌道への封じ込めに成功しているが、いずれも1自由度系の単純なシステムに対する応用結果であり、実用的で自由度の高いシステムへの適用例はない。

また、飯田ほか(1995)は熱対流に存在する競合問題の制御やエネルギーコスト低減を目的として、ニューラルネットワークの学習結果を利用し

¹OGYの命名は人名に由来する。なお、詳細は第4章を参照のこと。

て、温度分布のパターンを制御している。

しかしこの手法を用いて、鈍頭物体後流の剥離や二次元チャンネル内流れの剥離泡の発生・消滅を学習させることが可能なかどうかは分かっていない。よって、ニューラルネットワークを利用して剥離泡の縮小化や消滅を制御した研究もないといえる。

これらの手法による研究のメリットは、いずれも数値解析上の制御であるので、センシングの精度以外は、実験装置等に起因する攪乱の影響を無視することができる点にある。したがって、実験との比較や実験からでは流れ場の情報把握が困難な場合などに十分な成果が期待できるものと考えられる。

1.3 本研究の目的と構成

本論文の目的は、急拡大部を有する二次元チャンネル内噴流に見られる自励発振現象(以下、フリップフロップ現象と呼ぶ)を制御することである。その際、カオス解の存在を同定し、不安定多様体の性質を利用した制御であるOGY制御とニューラルネットワーク(以下、ニューロと呼ぶ)を援用した制御の結果を述べ、非線形システムの制御理論の困難性を克服する手法を提案する。

本論文は第1章から第7章までの全7章で構成されている。以下に、各章で述べる内容について簡単に説明する。

第1章 第1章では序論として、円管乱流噴流の実験結果に基づく数値計算法導入の背景、チャンネル内噴流の特徴と噴流についての従来のカオス的研究、および能動制御による剥離泡の制御について紹介し、本論文の目的と構成について述べた。

第2章 第2章では、二次元チャンネル内噴流の計算条件と数値解法を示し、本研究の動機付けとなったフリップフロップ現象の存在を確認した。

第3章 第3章では、フリップフロップ現象が周期的あるいは非周期的な現象の両方を示すことから、従来の確率・統計的手法によるカオス判定と時系列信号のウェーブレット解析による比較と有効性、時間遅れ構成によるアトラクターの空間的位相図の作成からホモクリニック軌道の存在、フラクタル次元やリアプノフスペクトラムを計算し、カオス解の存在を示した。

第4章 第4章では、カオスの揺らぎを積極的に利用した能動制御として、OGY制御を試みた。これは、第3章で述べたカオスの解析手法、とくにPoincaré断面の選定が重要となる。結果として、Poincaré断面を通過する軌道の固有ベクトルの直交性によって制御の可否が依

存することが分かった。

第5章 第5章では，カオスの挙動を示す非線形システムを定量的に評価する手だてとして，同定済みのニューロを用いて未学習部分のカオスの時空間変動に対して短期予測を行い，カオスの現象に対する予測の可能性を示した。また，そのときのニューロの構成条件の影響を調べた。また，時間的フィードバックを考慮したリカレントネットワークは Navier-Stokes 方程式を近似する力学的モデルであることを示した。

第6章 第6章では，ニューロをオブザーバとした能動制御を実現した。制御力は，壁面噴流を設定し剥離泡内に運動量の変化をもたらす吸込みを援用する能動制御を行った。オブザーバ規範はニューロの出力とし，その妥当性を検討した。また，エネルギーコストの低減を考察するために流量比と制御時間との関係を明示し，最適制御の可能性を示した。

第7章 第7章は結論であり，本研究で得られた主要な結果についてまとめた。

第2章 二次元チャンネル内噴流の挙動

流路の断面が急激に拡大する二次元流れは、剥離流れと再付着が共存する伴う流れの代表的な例として重要な研究対象となっている。中西ほか(1995a)によると、層流流れの対称流が実現される低レイノルズ数においてさえも、条件（例えば、計算の打ち切り誤差など）によっては非対称流れが存在することが確かめられている。一般に、非対称流れの発生原因は所在ほか(1993)によるといわゆるコアング効果によって説明されている。すなわち、一方の壁面近傍で加速する流れはその領域で圧力を減じ、ひとたび流路断面内に圧力勾配が発生すると、それが原因となって、低圧側へと流れの偏流が生じる。しかも、低圧領域サイズの発達や減衰は不安定で、この領域に供給される運動量の違いによって流れの非対称性が実現される。この一意的に定まらない多重解の存在が、レイノルズ数や急拡大率に依存し、物理的に相似な二次元急拡大流路ながら、対称流と非対称流というまったく異なる発達過程をたどる。しかし、急拡大部下流の剥離せん断層は強い逆圧力勾配を受けて極めて複雑な現象を呈しているほか、非定常の非対称流れの切替による自励振動現象（本研究ではフリップフロップ現象と呼ぶ。）については、なおのこの不明な点が多い(Sobey, 1985)。本章では、二次元流路内に噴出される噴流の挙動を数値解析し、フリップフロップ現象の発生の様子を確認した。そして、次章以降の観察と観測方法の考察を行った。

本章の構成は次の通りである。

2.1節では、本計算で扱う二次元急拡大流路の計算条件について述べる。

2.2節では、本計算で扱う基礎方程式について述べる。

2.3節では、本計算で用いた基礎方程式の離散化の方法と数値解析の手順について述べる。

2.4節では、本章の計算結果であるフリップフロップ現象の挙動の様子と性質について述べる。

2.5節は本章のまとめである。

2.1 計算対象

計算対象を図 2.1 に示す。流路長さ L 、流路幅 H のアスペクト比 $\beta (L/H)$ である二次元流路の左端中央部に、吹きだし幅 $D (D \leq H)$ の流入部がある。流入口の水速度分布は層流を仮定した図 2.2 に示す放物型を常に保つようにした。流入する流体は非圧縮でせん断応力と変形速度が比例関係にある Newtonian 流体を想定した。座標系は噴流入口中央部を原点として、水平方向、垂直方向をそれぞれ x, y 軸とする。また、急拡大率 α は H/D の値を指し、本研究では必要に応じて 2.0~5.0 に変化させて計算を行った。境界条件は、境界壁面上で滑りなしとし $U = V = 0$ である。出口における流出境界条件はディレクレ型とした。

流路の長さ L は入口境界および出口境界での境界条件が観測しようとするフリップフロップ現象に影響を及ぼさない十分な長さが要求される。 L については、中西ほか(1995b)、渡辺ほか(1992)の計算結果、Durst et al. (1974)の実験結果を参照して、次のように決定した。噴流入口から出口境界までの距離を $L/H = 12, 10, 8, 6, 4, 2$ と変化させ、フリップフロップ現象の確認できる範囲の予備的計算を実行した。この結果、 $L/H \geq 4.0$ の場合の圧力勾配分布、渦度分布および主流の水速度分布の観測位置における比較において、流れ方向の長さを最大にした $L/H = 12$ の $L/H \geq 4.0$ の領域の格子点全点の値は、 $L/H = 4$ として計算領域を短縮したときの同じ箇所での値と最大誤差 3.0% 以下で一致することがそれぞれ確認できた。前述の渡辺、Durst によると剥離流れがポアズイユ流れに戻るのは $L/H = 9.0$ との報告があり、これと同様の結果も確認されたが本研究では、流入直後におけるフリップフロップ現象への着眼と計算効率向上の点から特に断らない限り、 $L/H = 6.0$ の一定値での計算結果について述べることにした。

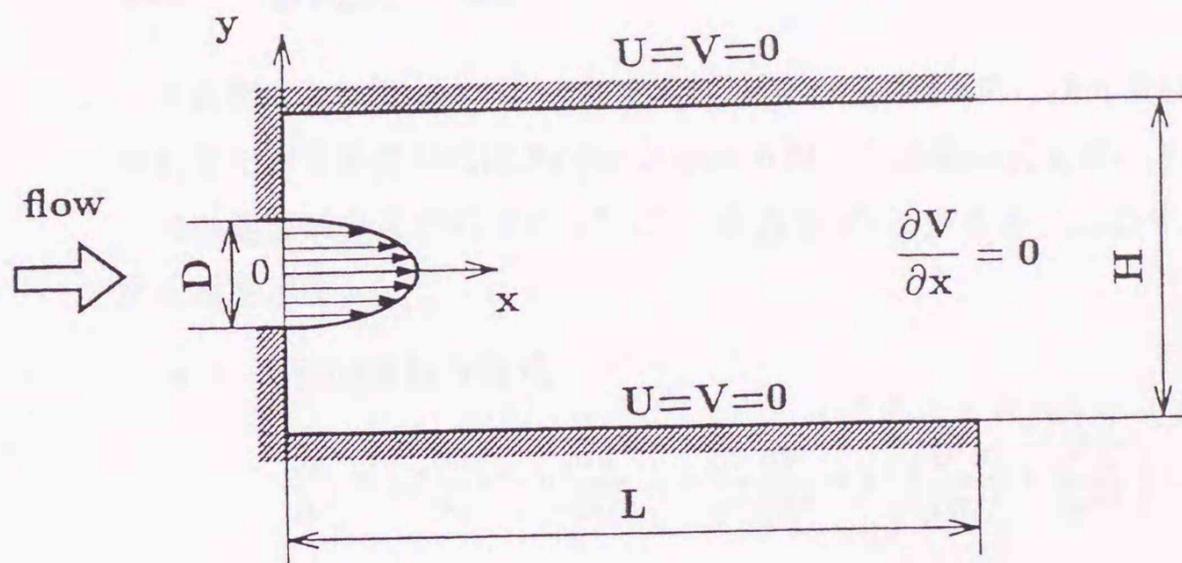


図 2.1 流れ場の概略と境界条件

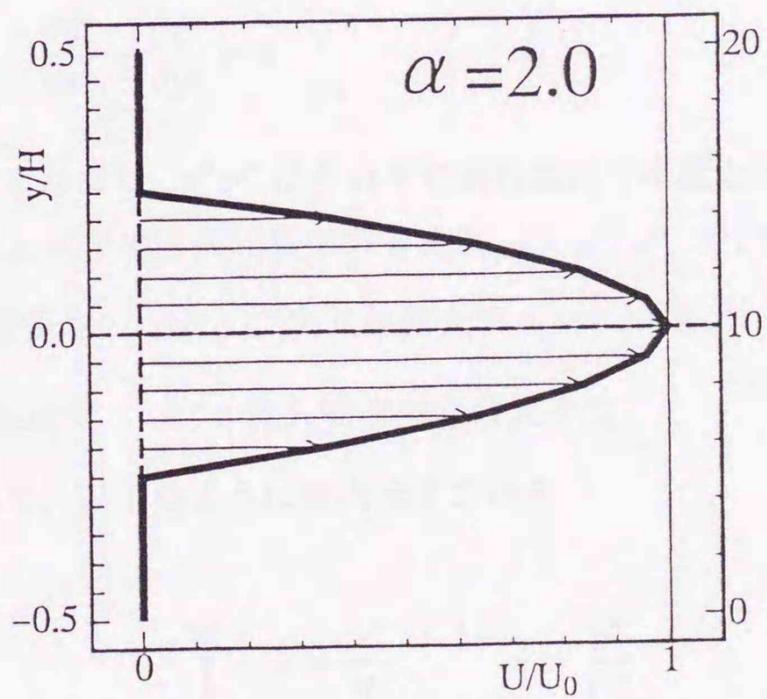


図 2.2 噴流の速度プロファイル

2.2 基礎方程式

本研究で取り扱う流れは、非圧縮性 Newtonian 流体の二次元流れである。流れを記述する方程式は Navier-Stokes 方程式と連続の式を用いる。\$x^*\$, \$y^*\$ 方向の速度成分をそれぞれ \$u^*\$, \$v^*\$, 圧力を \$p^*\$ とすると（ここで、\$^*\$ は有次元量を示す）

- \$x^*\$ 方向の運動方程式

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.1)$$

- \$y^*\$ 方向の運動方程式

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.2)$$

- 連続の式

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.3)$$

となる。ただし、\$\rho^*\$, \$\nu^*\$ はそれぞれ実在流体の密度と動粘性係数を表す。さらに、上式中の有次元量である変数 (\$x^*\$, \$y^*\$, \$u^*\$, \$v^*\$, \$t^*\$) は

- 代表長さ ... \$H^*\$: 二次元急拡大チャンネル幅
- 代表速度 ... \$U_0^*\$: 流入噴流中心最大速度

によって、以下のように無次元化される。

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x^*}{H^*} \quad , \quad y = \frac{y^*}{H^*} \\ u = \frac{u^*}{U_0^*} \quad , \quad v = \frac{v^*}{U_0^*} \\ t = \frac{t^*}{(H^*/U_0^*)} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

また, レイノルズ数 Re を

$$Re = \frac{U_0^* H^*}{\nu^*} \quad (2.5)$$

と定義する. 以上の式 (2.4), (2.5) 無次元量を用いて式 (2.1), (2.2), (2.3) も以下のように表される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

上の3本の式における未知変数は u, v, p の3個であるが, 本研究で扱う流れ場は二次元であるので, 以下に定義する渦度 ξ と流れ関数 ψ

$$\begin{cases} \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.9)$$

を用いると, 3本の方程式系を ξ, ψ の2つの未知変数に対する方程式系に変換可能である. これにより, 解くべき方程式の数が減り, なおかつ境界条件の設定も容易になる. 式 (2.6), (2.7) をそれぞれ y, x で偏微分し, その両式の差をとると, 以下の渦度 ξ の輸送方程式が得られる.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \xi \quad (2.10)$$

さらに式 (2.10) から流れ関数 ψ の Poisson 方程式が得られる.

$$\xi = -\nabla^2 \psi \quad (2.11)$$

ここで,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.12)$$

よってこの後, 式(2.10), (2.11)を次節で述べる数値的解析手法にて, 計算することとする.

2.3 数値解析法

2.3.1 基礎方程式の離散化

本計算では数値解法として差分法を用いる。基礎方程式である渦度 ξ の輸送方程式(式(2.10))と流れ関数 ψ の Poisson 方程式(式(2.11))のうち、式(2.10)の離散化は以下のように行う。

- 非定常項 : 一次精度の前進差分
- 粘性項 : 二次精度の中心差分
- 対流項 : 一次精度の風上差分

計算格子には格子数 $N^2 = 50 \times 50$ で格子間隔が x, y 方向それぞれに等間隔の直交格子を用いる。式(2.10)の各項は図2.3に示す記号に従い、以下のように表される。(ここで、記号の右肩の $n, n+1$ は時間ステップ、右下の (i, j) は計算格子上の位置を表す)

- 非定常項

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi_{(i,j)}^{n+1} - \xi_{(i,j)}^n}{\Delta t} \quad (2.13)$$

- 対流項

$$\begin{aligned} C_x &= u \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \left(\frac{u_{(i,j)}^n - |u_{(i,j)}^n|}{2} \right) \frac{\xi_{(i+1,j)}^n - \xi_{(i,j)}^n}{\Delta x} \\ &\quad + \left(\frac{u_{(i,j)}^n + |u_{(i,j)}^n|}{2} \right) \frac{\xi_{(i,j)}^n - \xi_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} C_y &= v \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ &= \left(\frac{v_{(i,j)}^n - |v_{(i,j)}^n|}{2} \right) \frac{\xi_{(i,j+1)}^n - \xi_{(i,j)}^n}{\Delta y} \\ &\quad + \left(\frac{v_{(i,j)}^n + |v_{(i,j)}^n|}{2} \right) \frac{\xi_{(i,j)}^n - \xi_{(i,j-1)}^n}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.15)$$

• 粘性項

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &= \frac{\xi_{(i+1,j)}^n - 2\xi_{(i,j)}^n + \xi_{(i-1,j)}^n}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} D_y &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \\ &= \frac{\xi_{(i,j+1)}^n - 2\xi_{(i,j)}^n + \xi_{(i,j-1)}^n}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで Δx , Δy はそれぞれ x , y 方向の格子幅を表す. 以上の各項を整理することによって, 格子点 (i, j) における $(n+1)$ 時刻ステップでの渦度 $\xi_{(i,j)}^{n+1}$ は

$$\xi_{(i,j)}^{n+1} = \xi_{(i,j)}^n + \Delta t \left\{ -(C_x + C_y) + \frac{1}{Re} (D_x + D_y) \right\} \quad (2.18)$$

として求められる.

一方, 流れ関数 ψ の Poisson 方程式 (式(2.11)) の離散化は

$$\frac{\partial^2 \psi_{(i,j)}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{(i,j)}^n}{\partial y^2} = -\xi_{(i,j)}^n \quad (2.19)$$

から, 式(2.10)の離散化と同様に, 二階微分項を二次精度の中心差分で離散化すると

$$\frac{\partial^2 \psi_{(i,j)}^n}{\partial x^2} = \frac{\psi_{(i+1,j)}^n - 2\psi_{(i,j)}^n + \psi_{(i-1,j)}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{(i,j)}^n}{\partial y^2} = \frac{\psi_{(i,j+1)}^n - 2\psi_{(i,j)}^n + \psi_{(i,j-1)}^n}{(\Delta y)^2} \quad (2.21)$$

となり $\psi_{(i,j)}^n$ について整理すると

$$\psi_{(i,j)}^n = \frac{F_x + F_y + \xi_{(i,j)}^n}{G} \quad (2.22)$$

ただし,

$$F_x = \frac{\xi_{(i+1,j)}^n - 2\xi_{(i,j)}^n + \xi_{(i-1,j)}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.23)$$

$$F_y = \frac{\xi_{(i,j+1)}^n - 2\xi_{(i,j)}^n + \xi_{(i,j-1)}^n}{(\Delta y)^2} \quad (2.24)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \quad (2.25)$$

となる. 式(2.22)の解法には反復解法である点SOR (Successive Over-Relaxation) 法を用いたが, その詳細は2.3.3項で説明する.

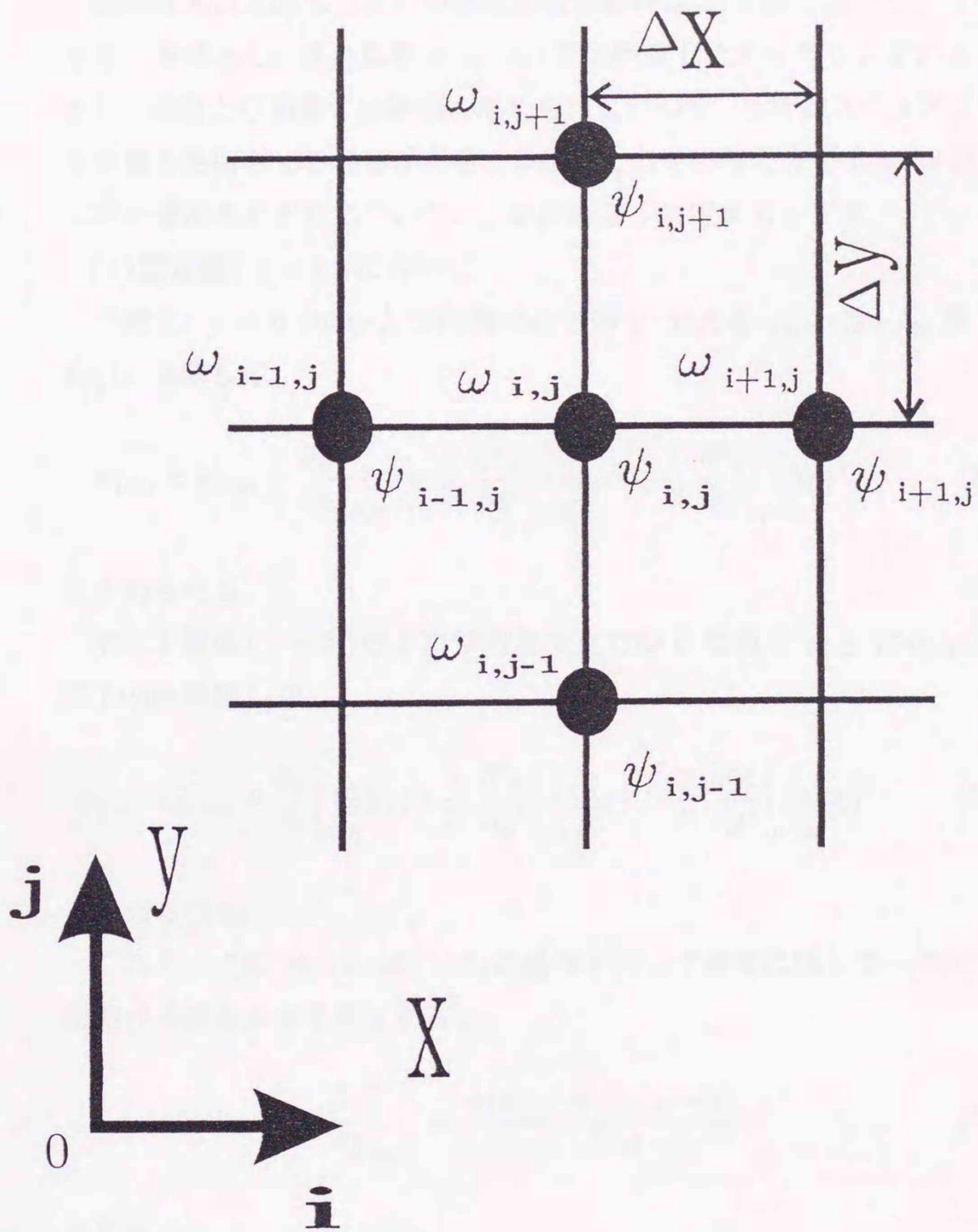


図 2.3 計算格子における各変数と記号の位置関係

2.3.2 境界条件

噴流流入口と流出口以外の速度の境界条件は2.1節で述べたように滑りなし条件とし、流れ関数 ψ については壁面上ですべて0と定める。しかし、壁面上の渦度 ξ は陽的に与えられないので、各時間ステップごとにその値を更新させる必要がある。本研究ではその与え方を Roache (1976) に従い壁面それぞれについて、 ξ を次のように定めるとする。

(1) 固定壁 ($y = 0$) において

下壁面 ($j = 0$) のひとつ内側の点での ψ である $\psi_{(i,1)}$ は $\psi_{(i,0)}$ 周りで Taylor 展開して

$$\psi_{(i,1)} = \psi_{(i,0)} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{(i,0)} \Delta y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{(i,0)} (\Delta y)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \Big|_{(i,0)} (\Delta y)^3 + \dots \quad (2.26)$$

と求められる。

次に下壁面 ($j = 0$) のふたつ内側の点での ψ である $\psi_{(i,2)}$ は $\psi_{(i,0)}$ 周りで Taylor 展開して

$$\psi_{(i,2)} = \psi_{(i,0)} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{(i,0)} (2\Delta y) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{(i,0)} (2\Delta y)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \Big|_{(i,0)} (2\Delta y)^3 + \dots \quad (2.27)$$

と求められる。

ここで、式(2.26)×4-式(2.27)の操作を行って速度に関して一次精度片側差分の境界条件を導出すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{(i,0)} = \frac{-3\psi_{(i,0)} + 4\psi_{(i,1)} - \psi_{(i,2)}}{2\Delta y} \quad (2.28)$$

となる。

また、式(2.26)×8-式(2.27)の操作を行って渦度に関して二次精度片側差分の境界条件を導出すると

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{(i,0)} = \frac{7\psi_{(i,0)} - 8\psi_{(i,1)} + \psi_{(i,2)}}{2(\Delta y)^2} - \frac{3}{\Delta y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.29)$$

となる.

下壁面での速度と渦度は境界条件より次のように求める.

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(i,0)} = u_{(i,0)} = 0 \quad (2.30)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i,0)} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(i,0)} \quad (2.31)$$

(2) 固定壁 ($y = H$) において

上壁面 ($j = JMAX$) のひとつ内側の点での ψ である $\psi_{(i,JMAX-1)}$ は $\psi_{(i,JMAX)}$ 周りで Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \psi_{(i,JMAX-1)} = & \psi_{(i,JMAX)} - \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(i,JMAX)} \Delta y \\ & + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i,JMAX)} (\Delta y)^2 - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{(i,JMAX)} (\Delta y)^3 + \dots \quad (2.32) \end{aligned}$$

と求められる.

次に上壁面 ($j = JMAX$) のふたつ内側の点での ψ である $\psi_{(i,JMAX-2)}$ は $\psi_{(i,JMAX)}$ 周りで Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \psi_{(i,JMAX-2)} = & \psi_{(i,JMAX)} - \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(i,JMAX)} (2\Delta y) \\ & + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i,JMAX)} (2\Delta y)^2 - \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{(i,JMAX)} (2\Delta y)^3 + \dots \quad (2.33) \end{aligned}$$

と求められる.

ここで, 速度に関する境界条件を導出するために, 式(2.28)と同様の操作を行うと

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(i,JMAX)} = \frac{3\psi_{(i,JMAX)} - 4\psi_{(i,JMAX-1)} + \psi_{(i,JMAX-2)}}{2\Delta y} \quad (2.34)$$

となる。また、渦度に関して境界条件を導出するために、式(2.29)と同様の操作を行うと

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i, JMAX)} = \frac{-7\psi_{(i, JMAX)} + 8\psi_{(i, JMAX-1)} - \psi_{(i, JMAX-2)}}{2(\Delta y)^2} + \frac{3}{\Delta y} \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(i, JMAX)} \quad (2.35)$$

となる。

上壁面での速度と渦度は下壁面と同じ境界条件より

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(i, JMAX)} = u_{(i, JMAX)} = 0 \quad (2.36)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i, JMAX)} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(i, JMAX)} \quad (2.37)$$

となる。

式(2.10)から $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ であり、かつこの場合壁面に沿って $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ である。よって、下壁面での渦度 $\xi_{(i,0)}$ は

$$\xi_{(i,0)} = - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(i,0)} = - \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i,0)} \quad (2.38)$$

となり、上式を式(2.31)に代入し、さらに式(2.29)の条件を適用する。ここで $(\Delta y)^3$ 以上の高次の微少項を省略すると

$$\xi_{(i,0)} = - \frac{7\psi_{(i,0)} - 8\psi_{(i,1)} + \psi_{(i,2)}}{2(\Delta y)^2} \quad (2.39)$$

が得られる。

同様に、上壁面での渦度 $\xi_{(i, JMAX)}$ は

$$\xi_{(i, JMAX)} = - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(i, JMAX)} = - \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{(i, JMAX)} \quad (2.40)$$

となり, 上式を式 (2.35) に代入し, 式 (2.39) のときと同じ操作をすれば高次の項を省略して

$$\xi_{(i,JMAX)} = -\frac{-7\psi_{(i,JMAX)} + 8\psi_{(i,JMAX-1)} - \psi_{(i,JMAX-2)}}{2(\Delta y)^2} \quad (2.41)$$

が得られる.

(3) 左側固定壁 (流入口を除く $x = 0$ の部分) において

ここでの境界条件の与え方は, 下壁面の場合と同様に処理する. 左壁面 ($i = 0$) のひとつ内側の点での ψ である $\psi_{(1,j)}$ は $\psi_{(0,j)}$ 周りで Taylor 展開して

$$\psi_{(1,j)} = \psi_{(0,j)} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{(0,j)} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\bigg|_{(0,j)} (\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\bigg|_{(0,j)} (\Delta x)^3 + \dots \quad (2.42)$$

と求められる.

次に左壁面 ($i = 0$) のふたつ内側の点での ψ である $\psi_{(2,j)}$ は $\psi_{(0,j)}$ 周りで Taylor 展開して

$$\psi_{(2,j)} = \psi_{(0,j)} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{(0,j)} (2\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\bigg|_{(0,j)} (2\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\bigg|_{(0,j)} (2\Delta x)^3 + \dots \quad (2.43)$$

と求められる.

ここで, 式 (2.42) $\times 4$ - 式 (2.43) の操作を行って速度に関して一次精度片側差分の境界条件を導出すると

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{(0,j)} = \frac{-3\psi_{(0,j)} + 4\psi_{(1,j)} - \psi_{(2,j)}}{2\Delta x} \quad (2.44)$$

となる.

また, 式 (2.42) $\times 8$ - 式 (2.43) の操作を行って渦度に関して二次精度片側差分の境界条件を導出すると

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\bigg|_{(0,j)} = \frac{7\psi_{(0,j)} - 8\psi_{(1,j)} + \psi_{(2,j)}}{2(\Delta x)^2} - \frac{3}{\Delta x} \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.45)$$

となる.

速度の境界条件より

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{(0,j)} = v_{(0,j)} = 0 \quad (2.46)$$

この場合壁面にそって $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ である. よって, 左壁面での渦度 $\xi_{(0,j)}$ は

$$\xi_{(0,j)} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(0,j)} = - \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{(0,j)} \quad (2.47)$$

$$\xi_{(0,j)} = - \frac{7\psi_{(0,j)} - 8\psi_{(1,j)} + \psi_{(2,j)}}{2(\Delta x)^2} \quad (2.48)$$

(4) 流出口において

ここではディレクレ型境界条件のひとつで Paris & Whitaker(1965)の報告による, 制約の少ない境界条件

$$- \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{(IMAX,j)} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(IMAX,j)} = 0 \quad (2.49)$$

とした.

2.3.3 Poisson 方程式と加速緩和係数

離散化された Poisson 方程式の解法，すなわち多元連立一次方程式の解法には，その連立方程式の係数行列を直接計算することにより解を求める直接法と，行列を解かずに反復計算によって解を得る反復法に分けられる．本計算では計算に使用するメモリの節約，アルゴリズムの単純さの理由から，流れ関数 ψ の Poisson 方程式である式 (2.11) の解法として，後者の反復法に属する点SOR法(Point Successive Over-Relaxation Method, 例えば(戸川, 1971)を用いた．解の収束判定は $|\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}| \leq 10^{-6}$ (n は反復回数) , $|\xi^{(t+\Delta t)} - \xi^{(t)}| \leq 10^{-6}$ でおこなった．

以下に点SOR法を用いた，式(2.11)の計算手順を示す．

- [1] 現在，時間ステップ n での流れ関数 $\psi_{(i,j)}^n$ が既知で， $(n+1)$ での渦度 $\xi_{(i,j)}^{n+1}$ が式 (2.18) によって求められたとする．そして収束計算回数を (m) で表すと $\psi_{(i,j)}^{(0)} = \psi_{(i,j)}^n$ である．
- [2] 収束計算 (m) 回目の格子点 (i, j) における式(2.22) の (右辺 - 左辺) の残差を $r_{(i,j)}^{(m)}$ とすると

$$r_{(i,j)}^{(m)} = \frac{F_x + F_y + \xi_{(i,j)}^{n+1}}{G} - \psi_{(i,j)}^{(m)} \quad (2.50)$$

となる．

- [3] 残差を $r_{(i,j)}^{(m)}$ に加速緩和係数 (Relaxation Factor) ω を乗じたものを修正量 $\Delta\psi_{(i,j)}^{(m)} = \omega \times r_{(i,j)}^{(m)}$ として $\psi_{(i,j)}^{(m)}$ を

$$\psi_{(i,j)}^{(m+1)} = \psi_{(i,j)}^{(m)} + \Delta\psi_{(i,j)}^{(m)} \quad (2.51)$$

と更新する．

- [4] 上の [2] , [3] の手順を計算領域の境界値を除く全格子点すべてについて行った後， ψ の収束性を吟味し，収束基準を満たすまで $(m)=(m+1)$ として [2] \rightarrow [3] を反復する．

本研究の計算手順は図2.4および図2.5に示すように、式(2.11)のPoisson方程式を点SOR法を用いて解き、次に(2.10)の渦度方程式の時間を Δt 進行し、これを繰り返して非定常解を得る。時間進行は、四次精度のRunge-Kutta-Gill法を用いた。

実際の計算では $r_{(i,j)} = 0$ を厳密に満足させることは不可能であるため、一般には残差 $r_{(i,j)} < \varepsilon$ を満たすまで収束計算を続ける。ここに ε は任意の微小量であり、現在のところ ε についての定説はない。

また、収束判定の基準とすべき残差としては、一般に計算領域内の残差 $r_{i,j}$ の最大値 r_{\max} あるいは平均値 r_{mean} が用いられている。

$$r_{\max} \equiv \max\{|r_{i,j}| \mid 1 \leq i \leq (M-1), 1 \leq j \leq (N-1)\} \quad (2.52)$$

ここに、 \max は最大値を表す。

$$r_{\text{mean}} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} |r_{i,j}|}{(M-1) \times (N-1)} \quad (2.53)$$

ただし、 M, N はそれぞれ x, y 方向の格子数を表す。残差最大値 r_{\max} は局所最大値が残っていると、収束判断値に近接しても減少しない。残差平均値 r_{mean} は解析の領域全体に渡り平均化した評価であり、 r_{\max} の方が厳しい収束判定基準であると言える。残差最大値 r_{\max} は反復計算の開始時や後半で不安定振動を起こすことがあり、基準値としては適切ではない(田中および高橋, 1991)。そのため、本研究では収束判定基準値として残差平均値 r_{mean} を採用した。以後、残差平均値 r_{mean} を単に残差 r とする。

非圧縮流れ計算において、全計算時間の90%以上がPoisson方程式の反復計算に費やされる。反復計算の収束性は緩和係数 ω に強く依存しており、最適な緩和係数が存在することが知られている。 ω が収束率に及ぼす影響を見るために図2.6に本計算の流れ場での加速緩和係数 ω に対する繰り返し計算回数 n の変化を示す。収束判定は $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}$ とし、レイノルズ数 $Re = 1000$ 、そして時間刻み $\Delta t = 0.025$ で計算を行った。これ

より $\omega = 1.8$ で極小値となり、この近辺に最も収束性のよい最適値が存在することがわかる。なお、本計算の最大および最小レイノルズ数や収束判定条件をさらに厳しくした影響による残差曲線の変化には大きな違いが生じなかったことを付記しておく。

ω は理論的には次式にて定義される。

$$\omega_{\text{opt}} = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \zeta}}{\zeta} \right) \quad (2.54)$$

ここで、

$$\zeta = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{M} + \cos \frac{\pi}{N} \right) \quad (2.55)$$

式(2.54)を用いた本計算の格子数に対する最適緩和係数は $\omega_{\text{opt}} = 1.765$ となる。しかし、流れの数値計算において、あらかじめ最適な ω を求められるのは極めて稀で、実際に行われている流れ計算ではほとんど求めることはできない。更に最適緩和係数は比較的大きな値であり、系を不安定にさせる、あるいは発散させるような緩和係数に近い値をとる場合が多い ($\omega = 2.0$ では図2.6において発散している)。そのために、一定の緩和係数で計算する場合は安全側の小さな値で行うので結果的に効率の悪い計算を行ってしまうことになる。

効率の良い計算を行うためには、最適な緩和係数で計算することが望まれるが、最適値をあらかじめ知ることができない場合は緩和係数を制御する方法が現実的である。制御即ち経験的に知られ次の通りである。

- [1] 残差が大きく、系が不安定であれば、加速緩和係数を今より大きくする。
- [2] 残差が大きく、系が発振気味である場合は、加速緩和係数を今より小さくする。
- [3] 残差が小さく、残差の減少割合が鈍くなったら、加速緩和係数は小さくする。

本計算ではファジィ理論をもとにした「if-thenルール」に則って緩和係数を制御させ、計算の一部高速化をはかった。

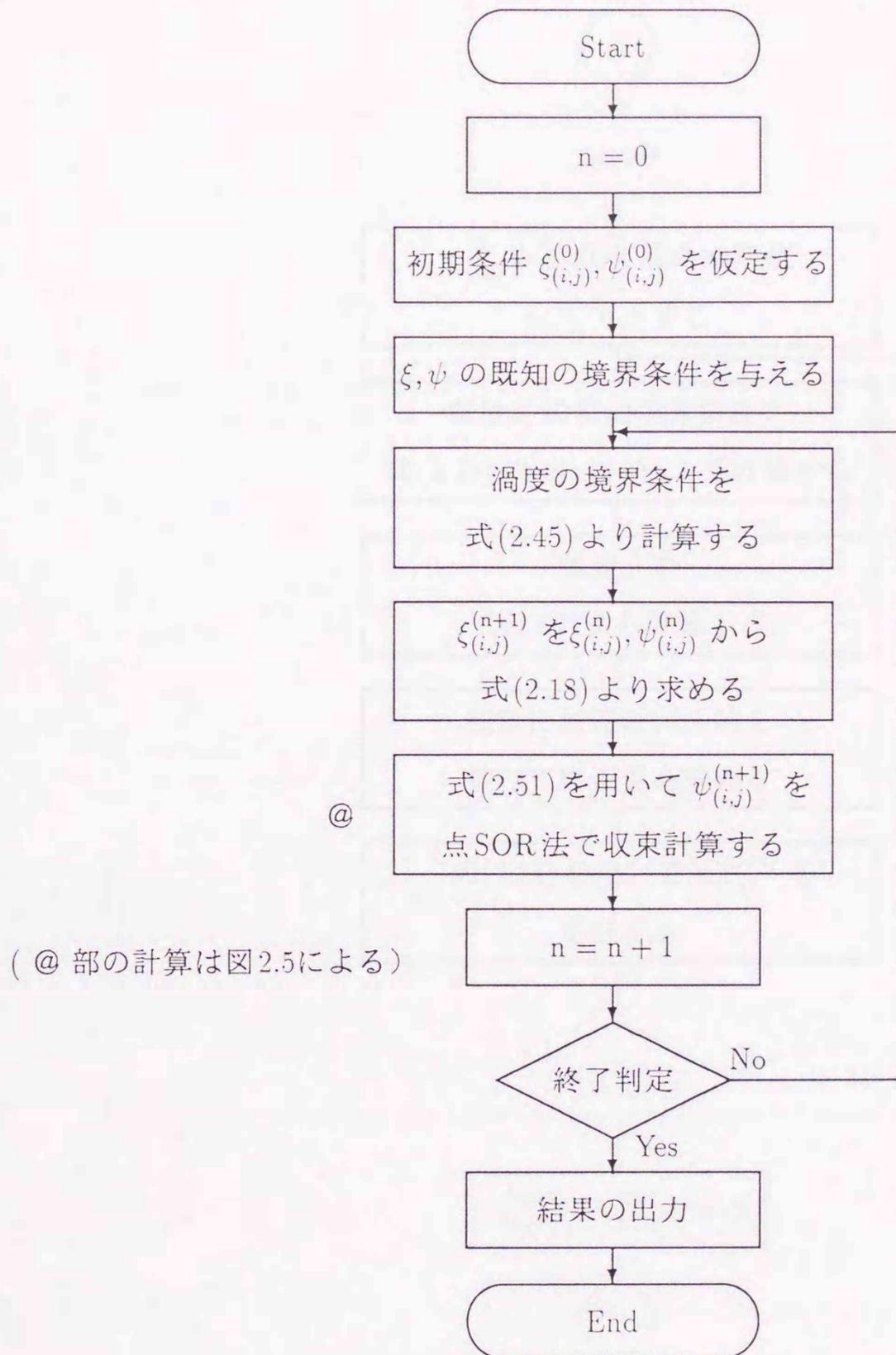


図 2.4 計算フローチャート

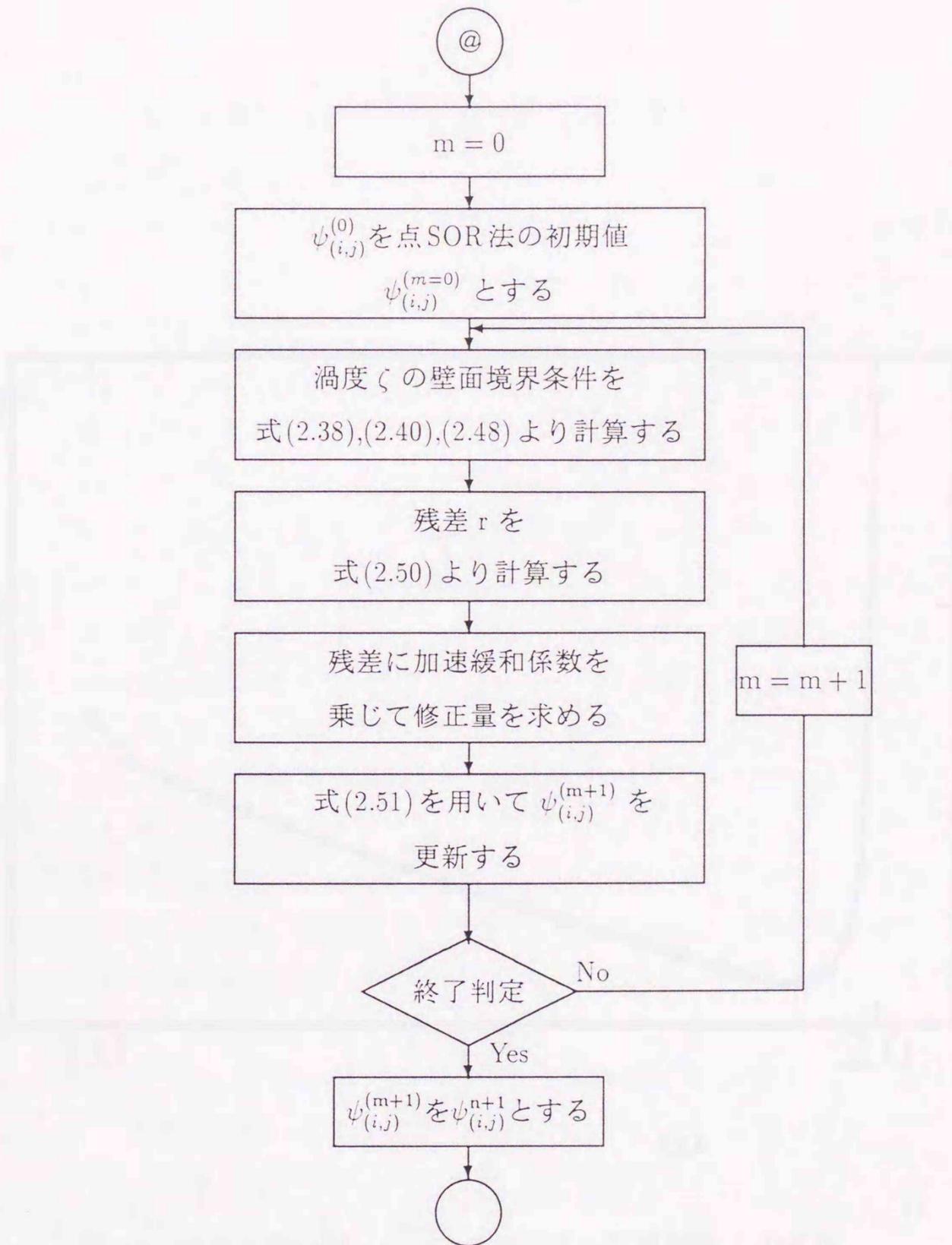


図 2.5 点SOR法計算フローチャート

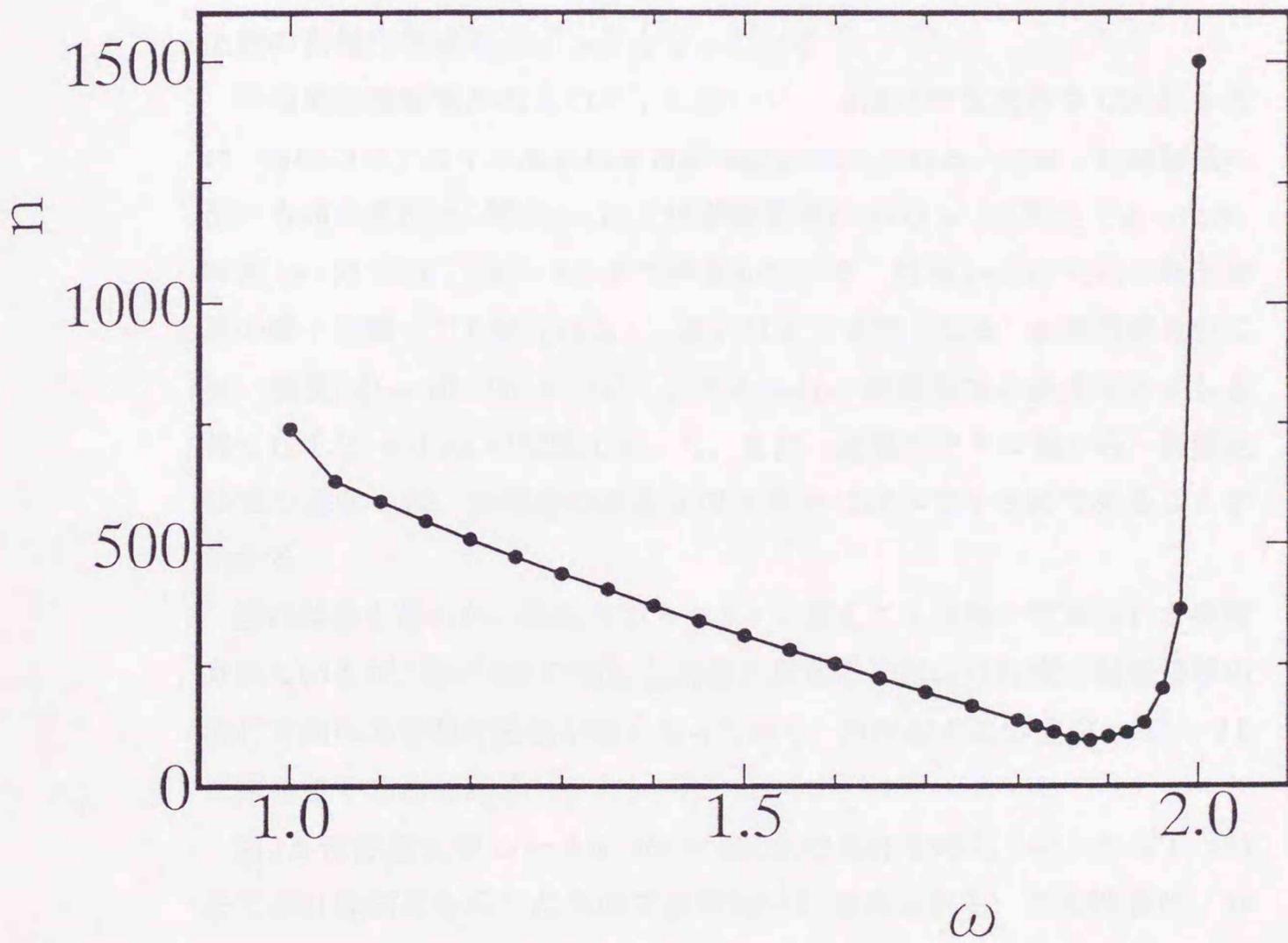


図 2.6 加速緩和係数 ω に対する繰り返し計算回数 n の変化

2.4 計算結果

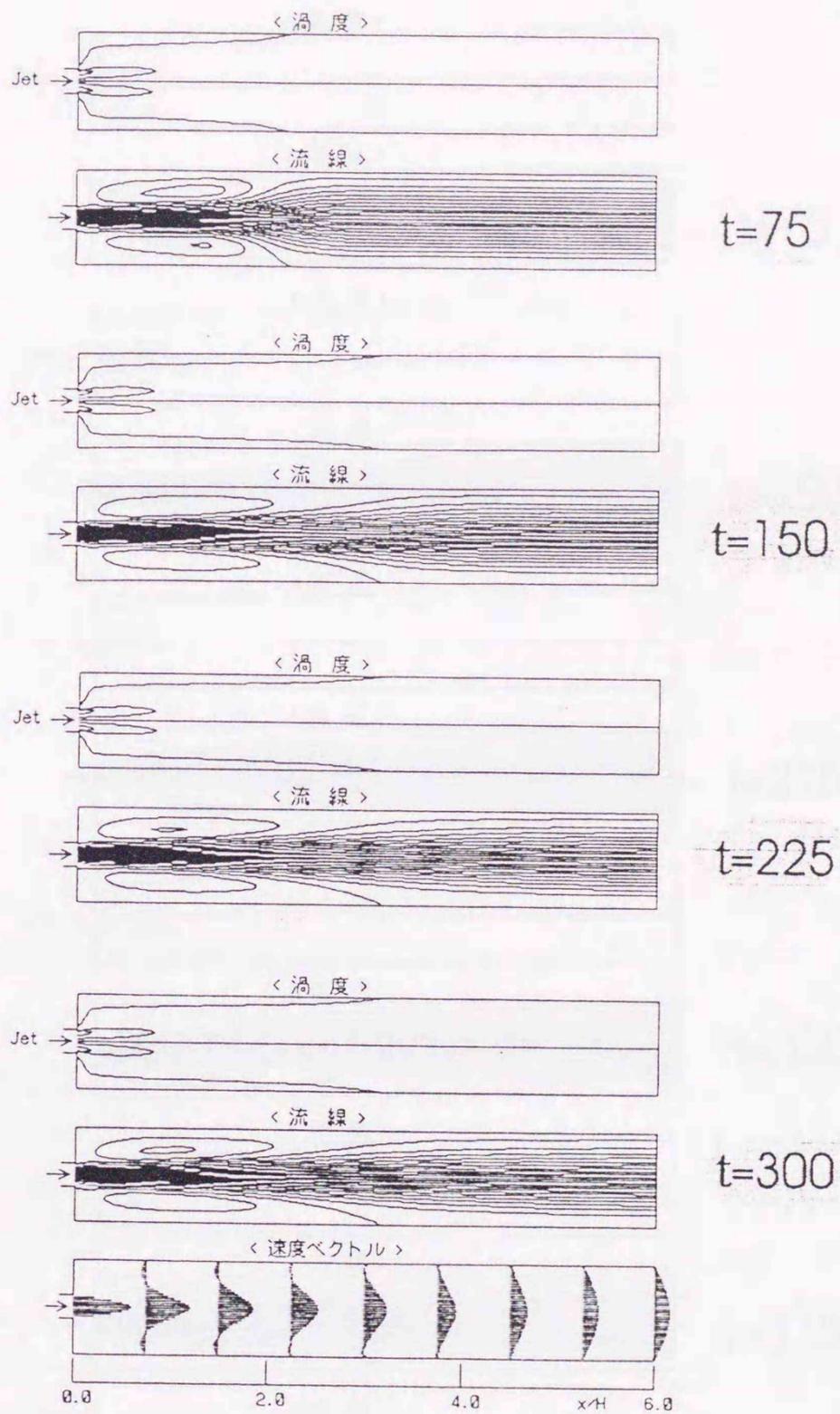
2.4.1 定常対称流と定常非対称流の流れのパターン

図2.7は急拡大率 $\alpha = 4.0$, $Re = 200.0$ の条件で時刻 $t=75$ から $t=300$ までの計算結果を示した。各々、渦度と流線の等値線を示し、 $t=300$ の場合のみ速度ベクトルも示した。流線の値は下壁を $\psi = 0.0$ 上壁を $\psi = 1.0$ としてその間を0.05刻みで示した。ただし、下壁の剥離泡領域では $\psi < 0$ 、上壁の剥離泡領域では $\psi > 0$ となっている。

再循環剥離領域が流入口上下において、ほぼ対称な大きさと成長を遂げ、層流のポアズイユ流れの定常対称流が認められる。なお、剥離領域の流れ方向の成長は、時刻 $t=75$ では剥離領域が $x/H = 2.0$ 程度であったが、時刻 $t=150$ では $x/H = 3.0$ まで伸長している。時刻 $t=300$ 以降の時間経過の様子を調べても変化はなく、流れは定常状態となる。剥離流線近傍に強い渦度 ($|\xi| = 10 \sim 20$) が分布し、それに比べ剥離領域の渦度は必ずしも強くなく $|\xi| = 0 \sim 1$ の程度であった。また、速度ベクトル図から、剥離泡領域の速度 u は、主流速の速度 u の大きさに比べて小さめであることがわかる。

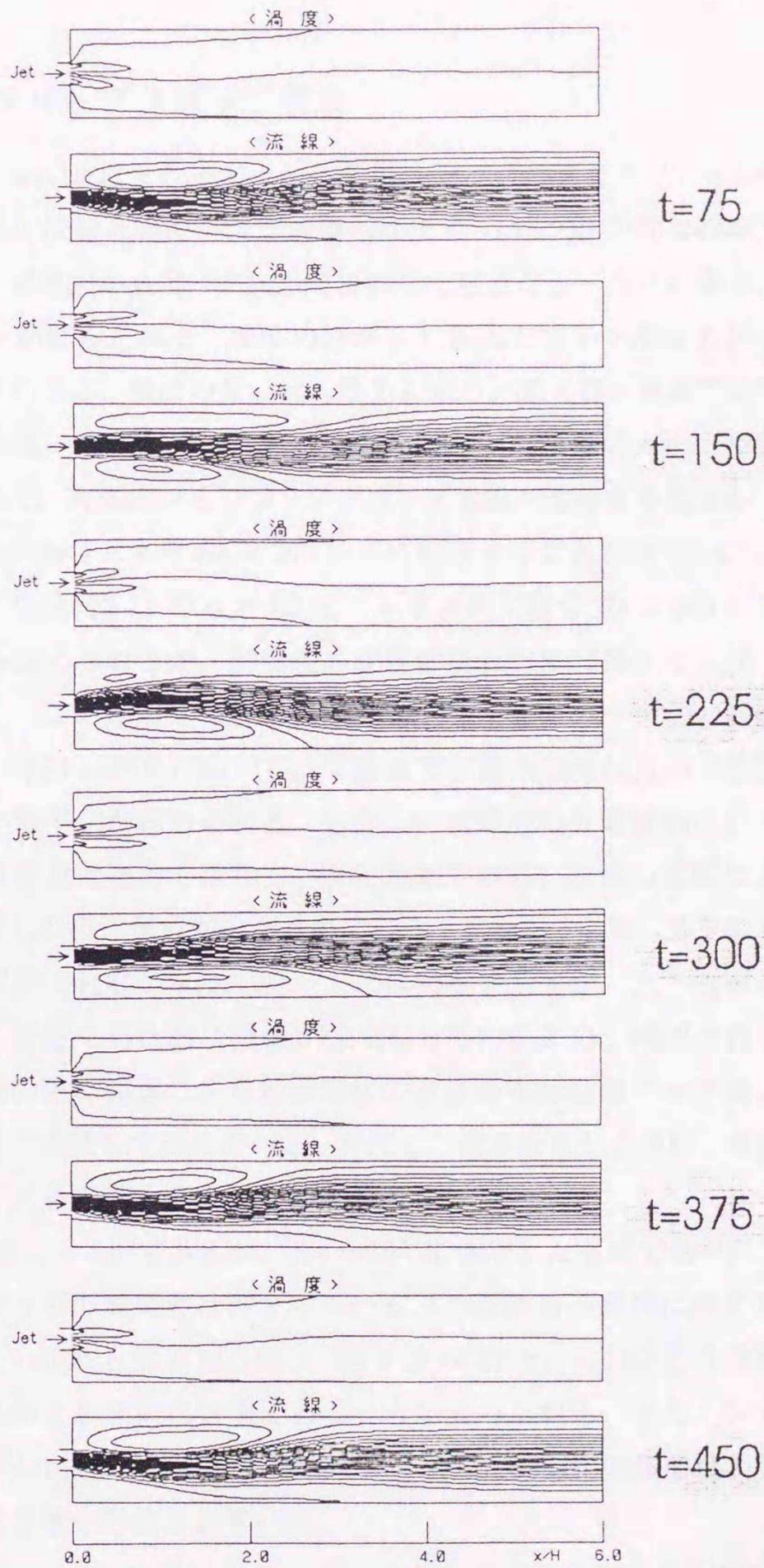
図には示さないが、急拡大率 $\alpha = 5.0$ に変えても対称の定常流れが実現されているが、 $\alpha = 4.0$ の場合と大きく異なるのは、対称流の剥離領域の流れ方向への空間的発達が鈍くなっており、再付着点の位置が $x/H = 2.0$ に落ち着くことである。

図2.8は急拡大率 $\alpha = 4.0$, $Re = 460.0$ の条件で時刻 $t=75$ から $t=450$ までの計算結果を示したもので非対称性が認められる。この性質は、レイノルズ数が400を越えたころから徐々にしかもゆっくりと始まるものである。時刻 $t=450$ 以降の時間経過では、下壁面に偏流した非対称の状態が保持され続け流れは定常状態となる。レイノルズ数が600程度までは同様の傾向が確認された。



$\alpha = 4.0$
 $Re = 200$

図 2.7 定常対称流れ $\alpha = 4.0$



$\alpha = 4.0$
 $Re = 460$

図 2.8 定常非対称流れ $\alpha = 4.0$

2.4.2 フリップフロップ現象

図2.9 と図2.10 はそれぞれ $\alpha = 5.0$ で、レイノルズ数を $Re = 300$ に増加したときの流線と渦度を時間経過 $t=140$ から $t=250$ の間で観察した結果である。流線図からは、流れ方向に対して垂直な上下方向に偏流が生じていることが読みとれる。渦度の図からも偏流の様子が流線の図と同期して観察されるが、噴流の強いせん断力により、流入口と壁面の接合付近には渦度の強い成長が認められ、その強弱も剥離領域の大小と相関関係にある。また、対称流からフリップフロップ現象へ遷移する臨界レイノルズ数は、この場合およそ $Re = 300$ 以下に存在することが明らかになった。

同様の変化は図2.11 の $\alpha = 5.0$ で、レイノルズ数を $Re = 500$ に増加した場合にも認められるが、剥離泡の成長は流れ方向に最大で $x/H = 3.0$ まで伸張し、この剥離泡の伸張と収縮が上下壁面のコーナ部で観察される。また、時刻 $t=220$ において、下壁面で剥離泡の流れ方向に垂直な方向に著しい扁平化が認められる。しかし、剥離泡の分離分割にいたるほど主流の運動量は強力ではなく、低圧力側での強い渦度の影響により剥離泡の安定した自己形成が確認されている。よってこの時、第三の剥離泡の発生は認められなかった。図2.12 には渦度を示すが、上下壁面ともに $x/H = 2.0$ 付近で局所的に渦度が強くなっている部分が確認される。また、せん断の強い領域にある針葉形状の渦度分布は剥離泡と主流との分離流線にほぼ合致して歪んでいる。ただし、渦度分布から直接、剥離泡の形状やサイズを評価することは困難である。

図2.13 は $\alpha = 4.0$ であるが、 $Re = 10^3$ に増加したものであり、フリップフロップ現象の周期性は速まっている。この時の一周期に要する時間は、およそ $t=100$ と短周期となり、図より $t=75$ と、これより3周期後の $t=375$ のものとが相同な状態であることが読みとれる。また、 $t=150$ では、 $x/H = 4.0$ 以降の下壁面において、分離した剥離再循環領域が見られ第三の剥離領域が形成されている。

図2.14 は $\alpha = 5.0$ の同じ $Re = 10^3$ における計算結果である。ここでは、時刻 $t=100$ に見られるように、剥離泡内でピーク値が分離したり、一つ

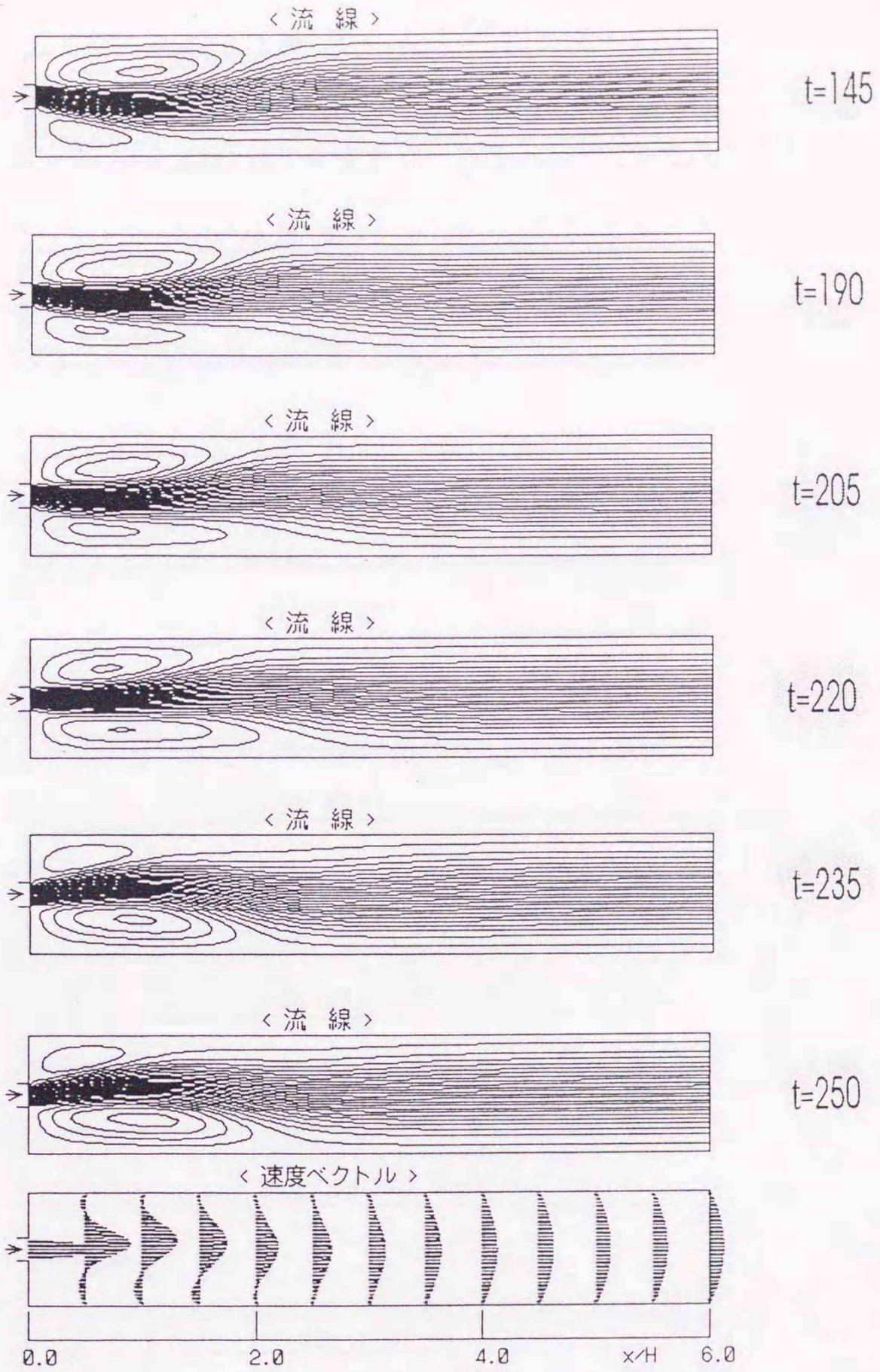
の周期の中でも、流れの移行が急激な場合 ($t=50$ から $t=100$) と、流れの移行が緩やかな場合 ($t=150$ から $t=200$) がある。また、第三の剥離領域は上下壁面それぞれに観察されている。よって流動場が閉塞され、さらにレイノルズ数が増加すると主流付近の混合は推進される一方、流体の輸送効率の悪化が推察される。

図2.15 (a) (b) はフリップフロップ現象の周期性を確かめるために、レイノルズ数 $Re = 300$ と $Re = 500$ の時系列データを示したものである。縦軸に流れ方向垂直速度変動の無次元量、横軸に計算回数を取っている。この時、10000 ステップは無次元時刻 $t=500$ に相当する。なお、観測地点は $x/H = 2.0$, $y/H = 0.0$ の噴流中心軸上である。これより、速度の変化量から、偏流に内在する変動エネルギーや加速度の大きさが推察される。特に両者を比較すると、変曲点を含む曲線が上に凸の部分と下に凸の部分とが互いに逆であることから、高々2倍強の僅かなレイノルズ数の違いでも、流れの性質は大きく様変わりすることがわかる。また、 $Re = 500$ では、偏流の絶対速度最大地点を過ぎたところで上下壁面ともに、フラッター現象が信号から読みとれる。流線図では、これに及ぼす影響因子が図の精度上判定できなかったが、レイノルズ数の増加とともに剥離泡が流れの中心軸上まで発達し流れの非対称性が強まることと、流速の増加により運動量輸送量も活発になり壁面へ向かう流体粒子の非定常の混合速度ベクトルも増える(中村, 1992)理由から、このフラッター現象は、レイノルズ数の増加に比例して大きくしかも顕著になることが予想される。

図2.16 (a) (b) はレイノルズ数 $Re = 10^3$ と $Re = 5 \times 10^3$ の時系列データを示したものである。図(a)では偏流の最大地点でのフラッター現象が確認され、図(b)では変動周波数の増加および、フラッター現象の卓越化が確認され、レイノルズ数の増加に伴って流れ場の複雑化が予想される結果を得た。

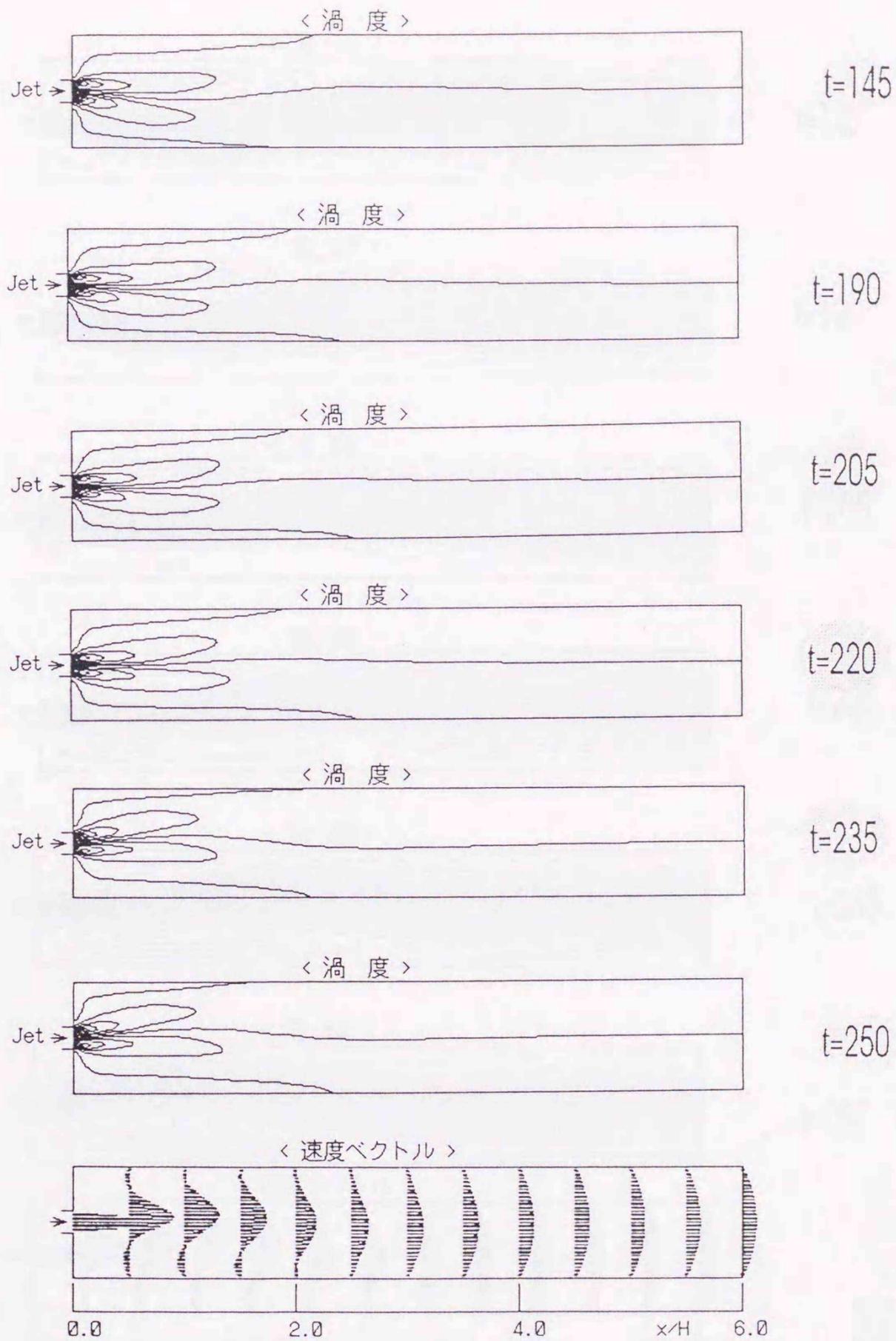
以上から、流れ方向の垂直速度成分の変動はフリップフロップ現象の一つの評価基準として妥当であることが理解される。また、対称急拡大流路に、非対称な人工的トリガを陽に入れなくても、非対称な流れ場が得られるという中西ほか(1995b)の報告に一致する結果を得た。これらの基

本的性質に基づき、次章では、カオス的挙動の存在が予想される非周期的なフリップフロップ現象について詳細に解析する。



$\alpha = 5.0$
 $Re = 300$

図 2.9 フリップフロップ流れ (流線) $\alpha = 5.0$

 $\alpha = 5.0$

Re=300

図 2.10 フリップフロップ流れ (渦度) $\alpha = 5.0$

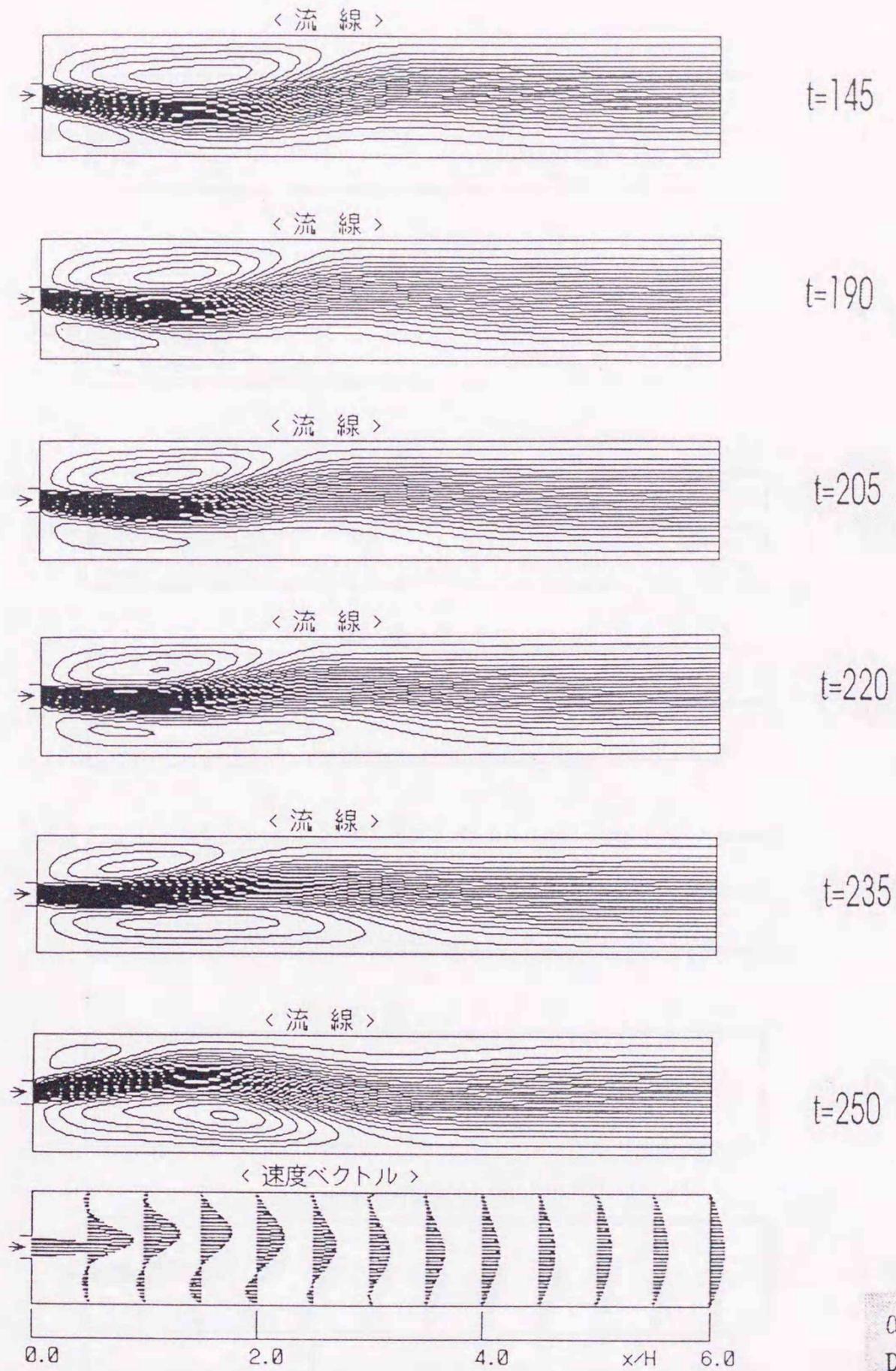


図 2.11 フリップフロップ流れ (流線) $\alpha = 5.0, Re = 500$

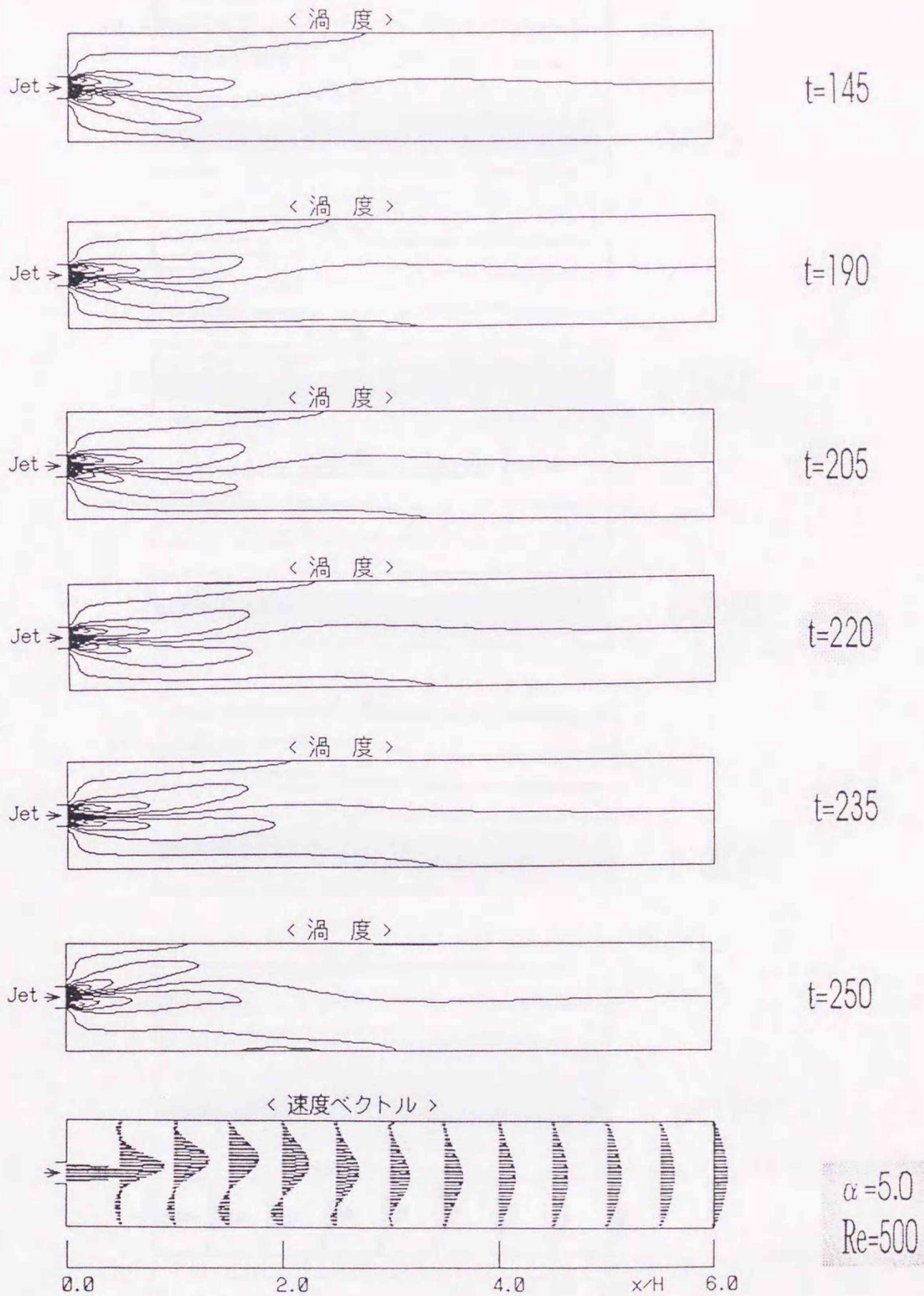


図 2.12 フリップフロップ流れ (渦度) $\alpha=5.0, Re=500$

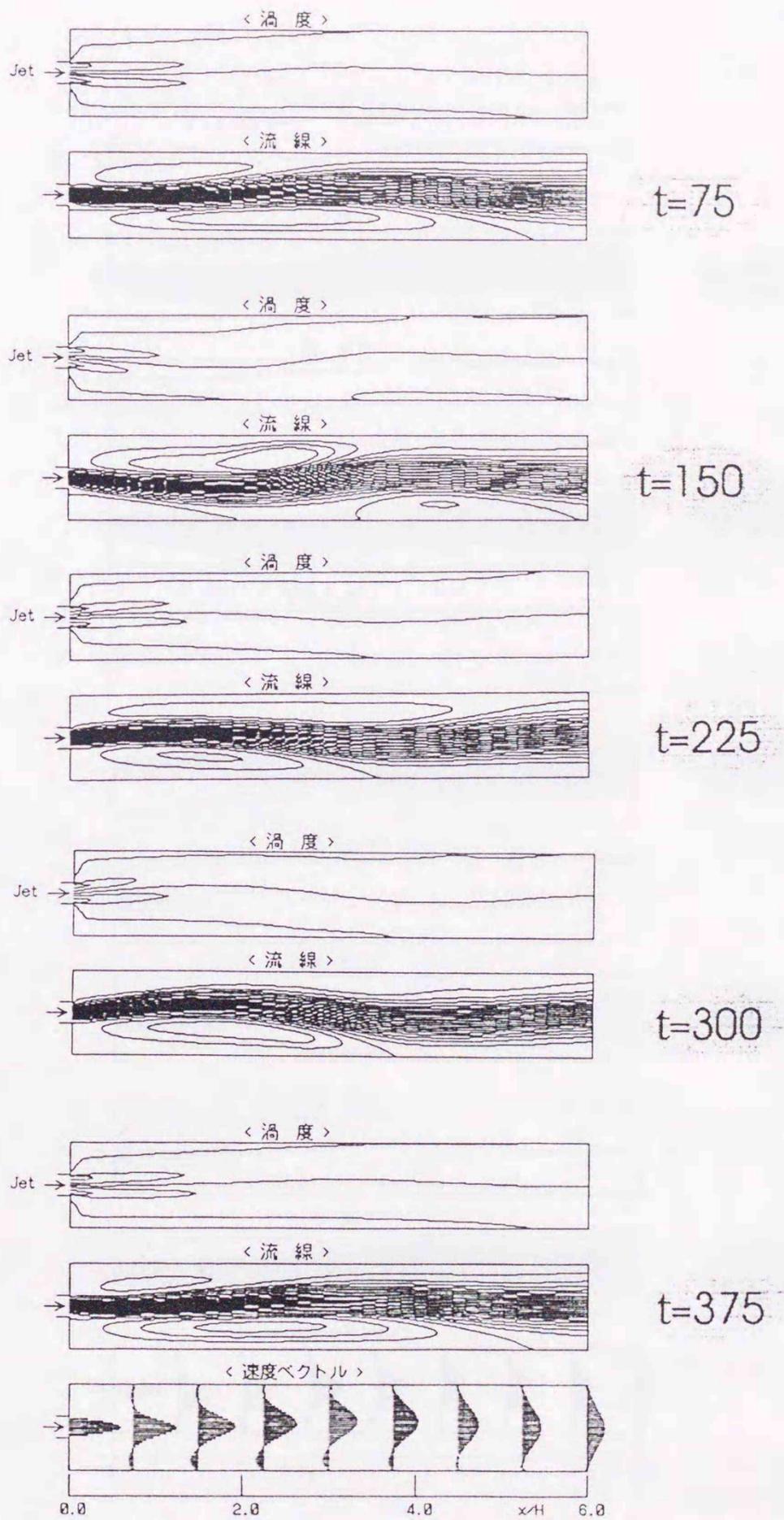
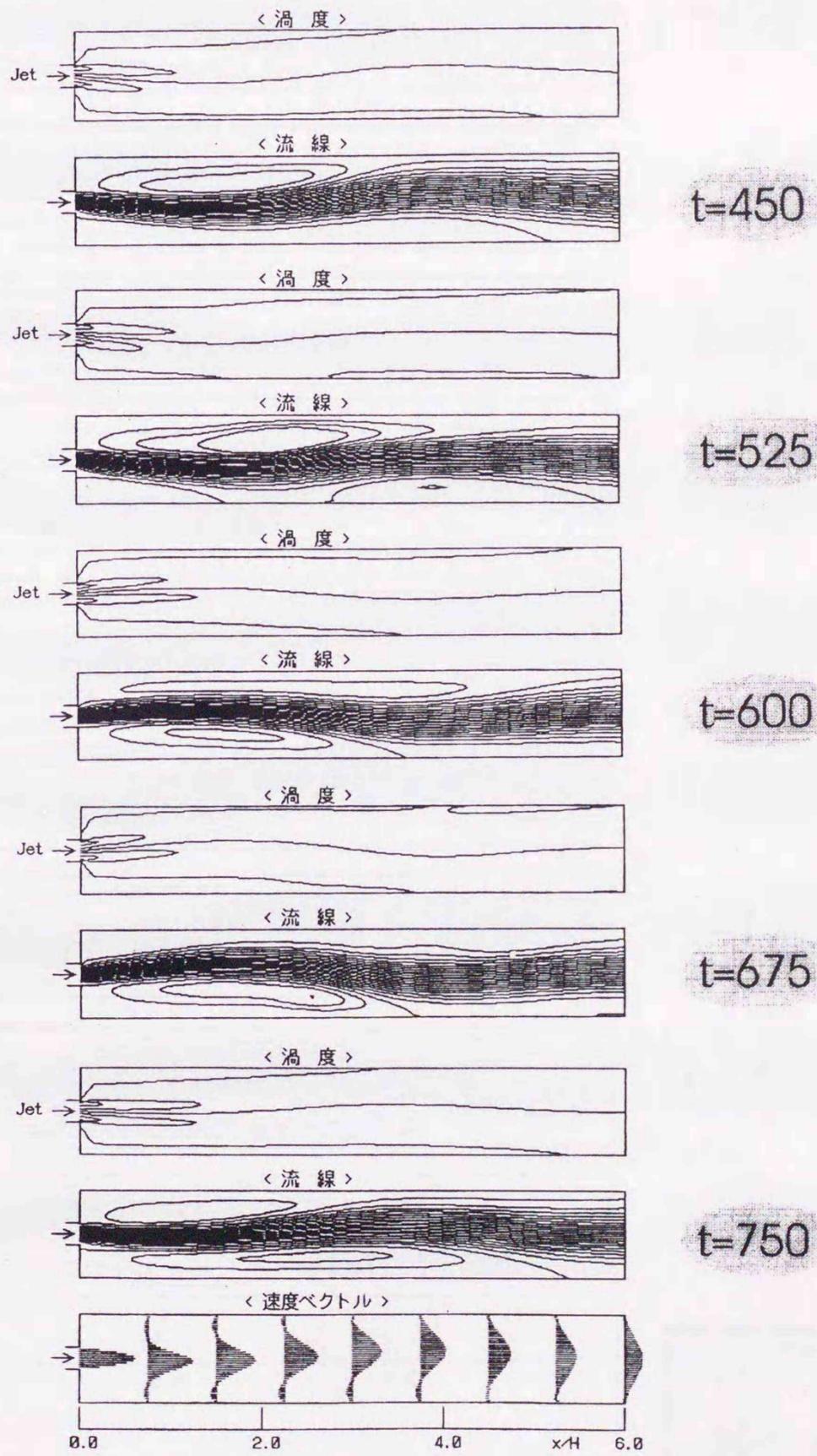


図 2.13 フリップフロップ流れ (渦度と流線) $\alpha=4.0, Re=10^3$
 ($t=75 \sim t=375$) [次頁につづく]



(t=450 ~ t=750)

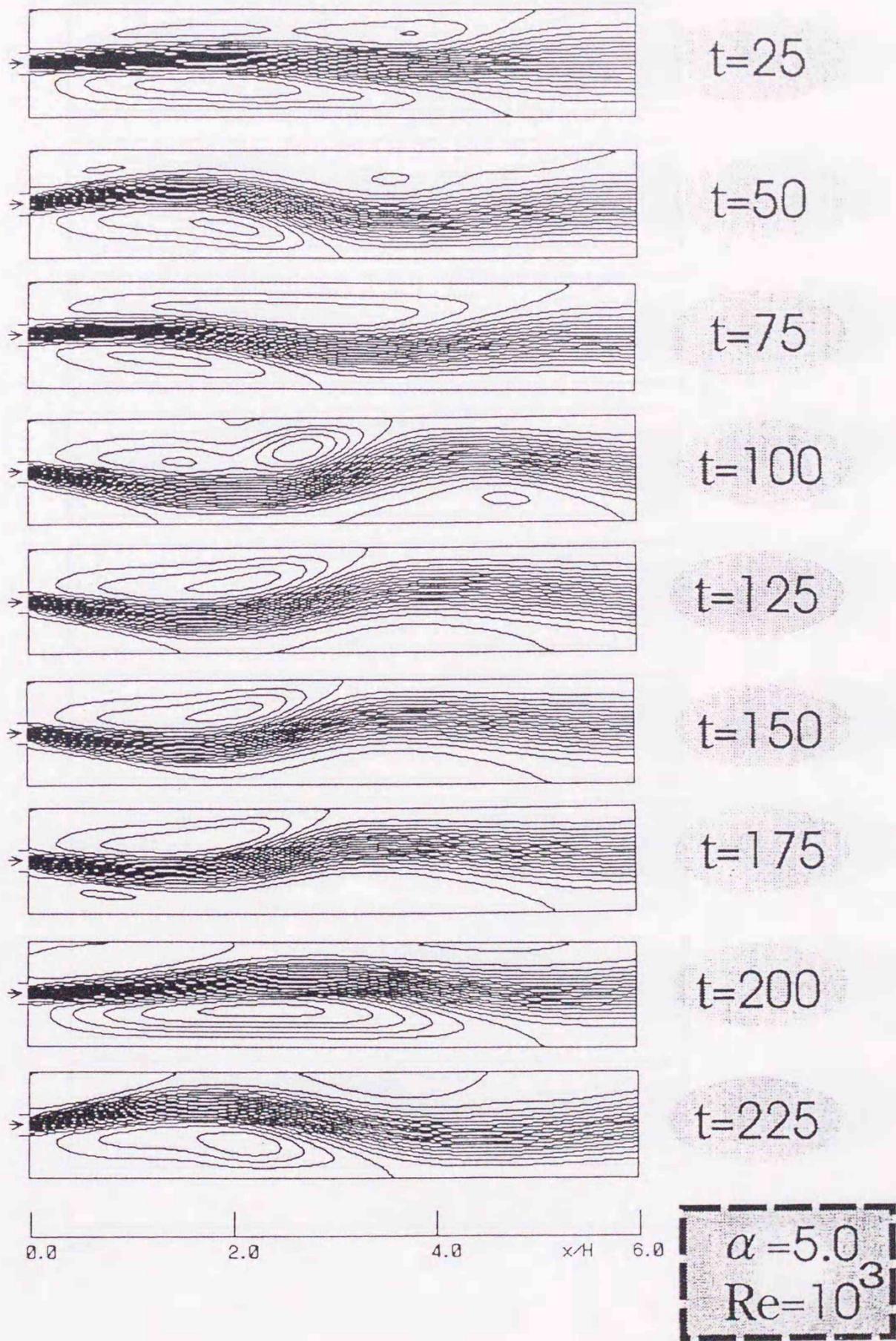
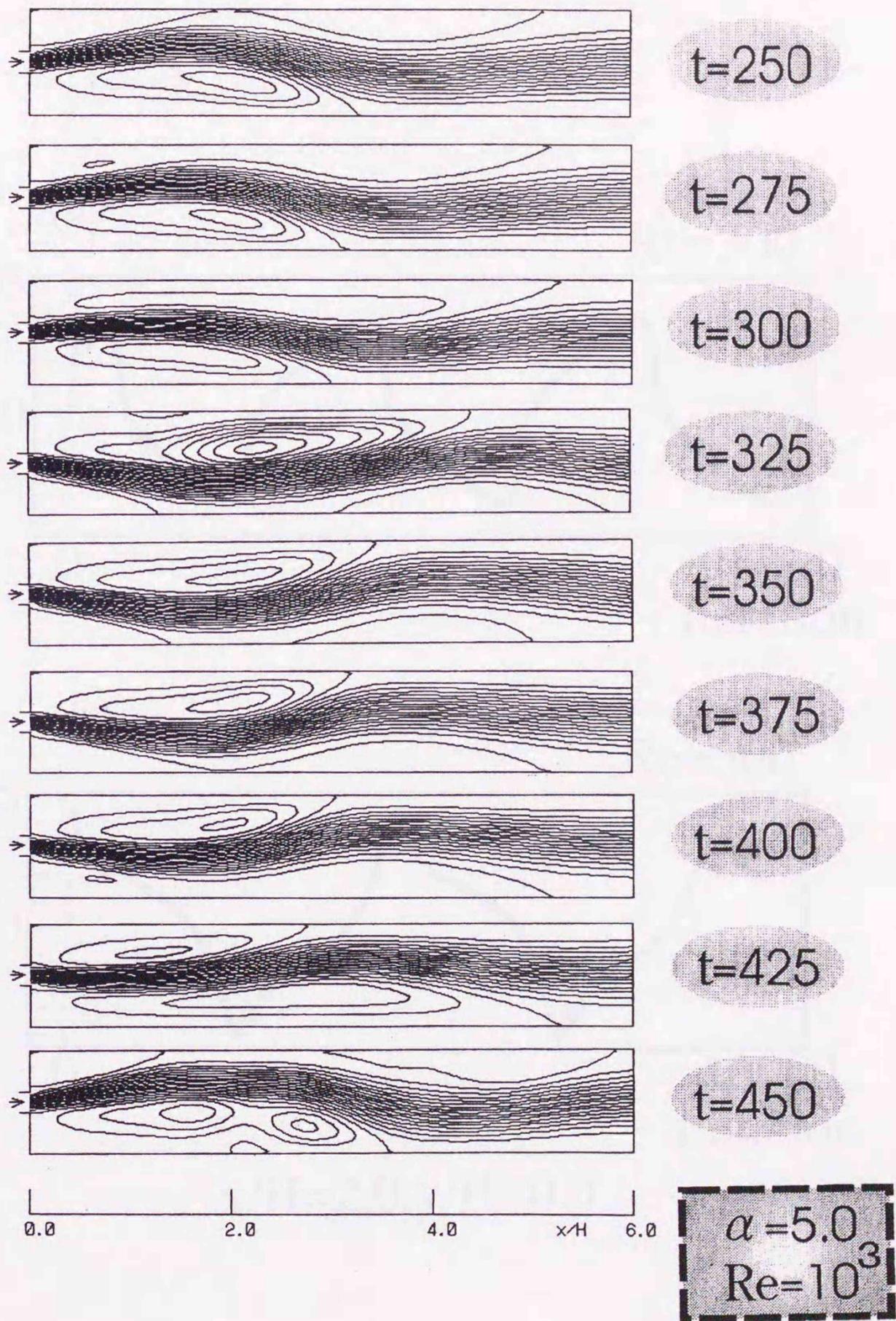


図 2.14 フリップフロップ流れ (流線) $\alpha = 5.0, Re = 10^3$
 ($t=25 \sim t=225$) [次頁につづく]



($t=250 \sim t=450$)

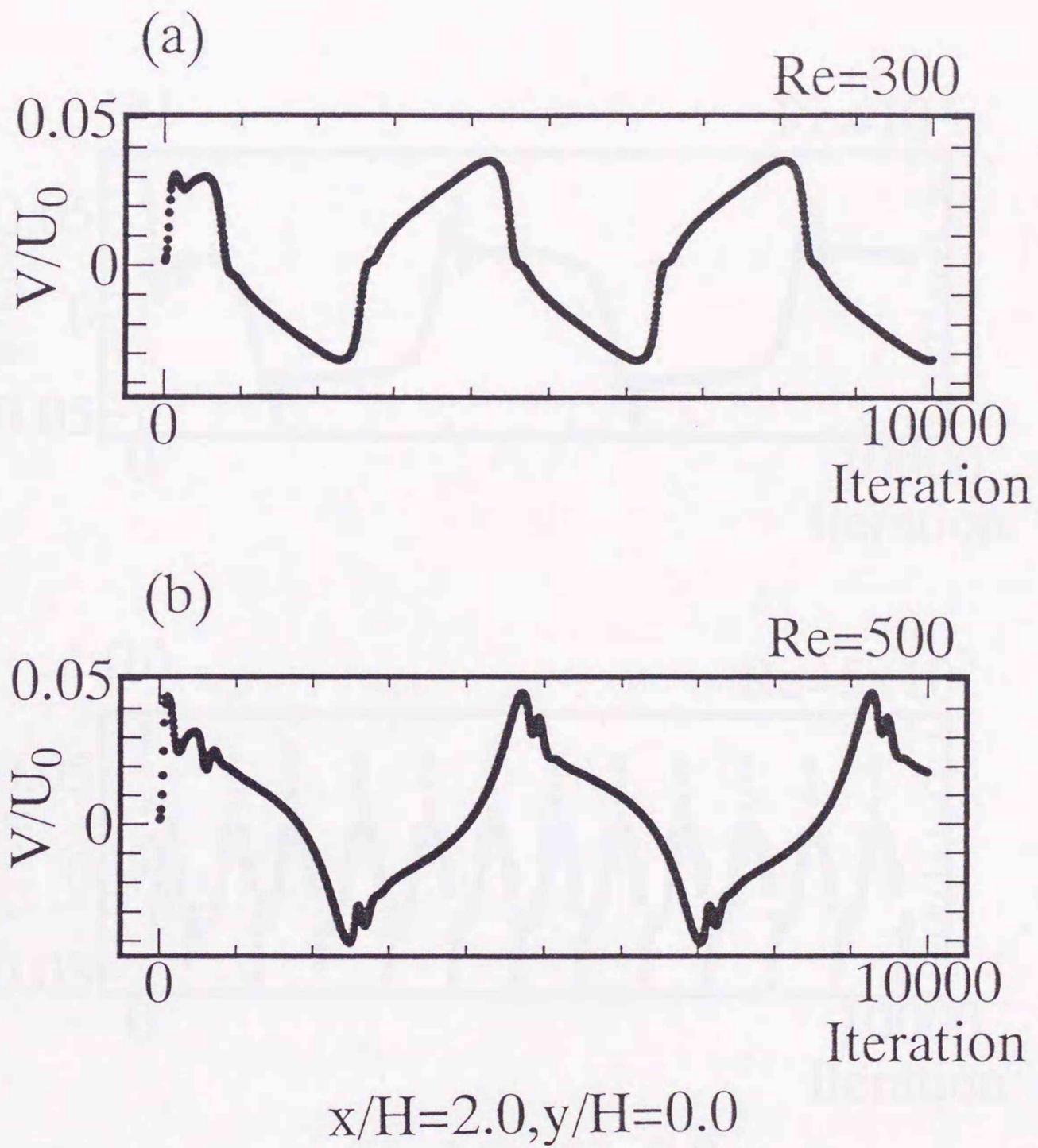
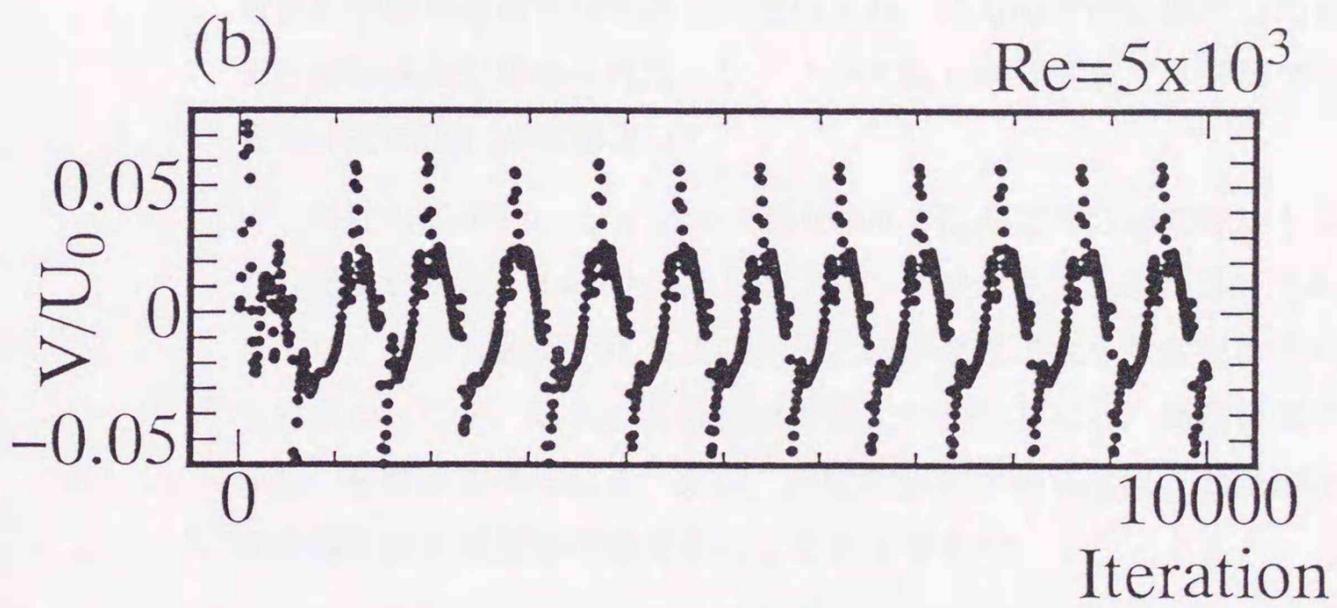
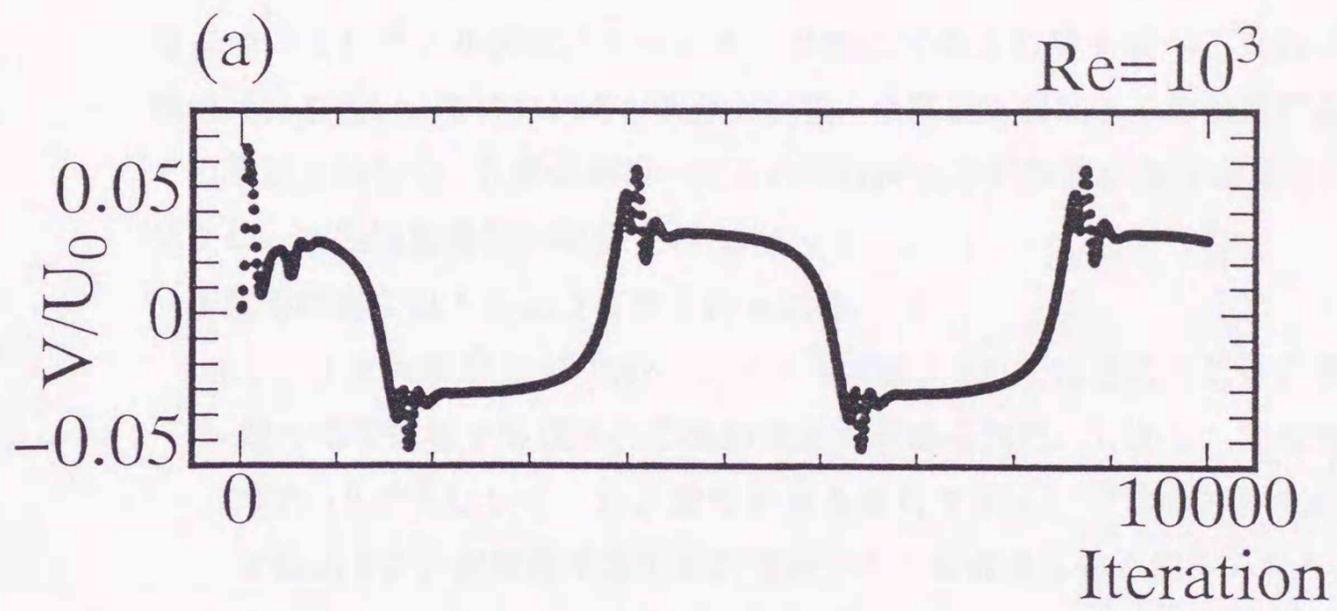


图 2.15 周期的時系列 $\alpha=5.0, Re = 300, 500$



$$x/H=2.0, y/H=0.0$$

图 2.16 周期的時系列 $\alpha=5.0, Re=10^3, 5 \times 10^3$

2.5 第2章のまとめ

本章では、二次元チャンネル内噴流のフリップフロップ現象の発生過程についてレイノルズ数、チャンネルの急拡大率の影響を調べるために数値計算を行い、そのための計算条件、扱った基礎方程式とその離散化などの手順を示した。計算の結果、定常の対称流と非対称流の存在とフリップフロップの振動現象が確認された。

本章の内容は以下のようにまとめられる。

- [1] 急拡大率が4.0の場合、レイノルズ数が200では定常な対称の剥離再循環領域が形成される流動現象が認められた。しかし、急拡大率が5.0で同じレイノルズ数で計算を実行すると、定常の対称流れではあるが、剥離再循環領域の流れ方向への成長は鈍く抑えられた。
- [2] 急拡大率が4.0の場合、レイノルズ数が400以上では定常な非対称の剥離再循環領域が徐々に形成され、片方の壁面に偏流したままの流動現象が認められた。レイノルズ数600程度までは同様な性質の非対称流れが確認された。
- [3] 急拡大率が5.0、レイノルズ数が300では非定常の非対称流となり、周期がおよそ $t=200.0$ ほどのフリップフロップ現象が確認された。レイノルズ数が500および 10^3 では周期性に大きな変化は認められなかったが、第三の剥離領域が新たに発生したり、剥離領域の伸張、分割が活発になる。また、渦度の分布図から主流と剥離泡との分離流線の推測が可能であることが示された。
- [4] 噴流中心軸上の流れ方向垂直の速度変動時系列は、フリップフロップ現象を端的に示す物理量であり、レイノルズ数に大きく依存している。また、時系列の変動量は剥離泡と主流との運動量交換、周波数は周期、非周期の評価基準としても適当である。よって、二次元チャンネル内噴流の力学的挙動の解明に速度変動時系列はなんらかの形で寄与する。これについては次章において詳細に検討する。

第3章 フリップフロップ現象のカオス判定

カオス的であるための必要条件とは、流体粒子が移動するとき流れ場内の軌道上で折り畳みや引き伸ばしをを作り出すことができる状態が生じていることである。本研究の二次元チャンネルは、流出側に開放部を有する open な物理空間であるため、流体が解析空間内にいつまでも滞留することができないことは先に述べた。よって流体粒子間距離の指数関数的増長の検定は容易ではなく、高崎ほか(1992)が示した可動壁を持つキャビティーフローの混合作用の解析に定義した擬似リアプノフ指数による定量化も難しい。しかし、力学系の性質決定や変動量の再構成を実現する手法としてはPOD(Proper Orthogonal Decomposition), SVD(Singular Value Decomposition)などが存在し、乱流境界層中の秩序構造の抽出に適用した報告がある(中村ほか, 1992), (Zhou & Sirovich, 1992)。また、観測される時系列は通常1変数だけのことが多いため、1変数から元の多次元相空間の軌道を再構成する手法なども提案されている(Takens, 1981)。本研究においても前章の結果から、系を支配するパラメータ(コントロールパラメータ, ここではレイノルズ数)を変更すると、1変数の速度変動時系列が複雑に変化することが分かってきた。しかしながら、このような不規則な時系列の乱れをカオス研究の立場から検討し、二次元チャンネル内流れの挙動に新しい解釈を付与した例はあまりない。

本章では、カオス解の存在について速度変動時系列の解析からカオス的性質の定性および定量的評価を行い、一見複雑に見えるダイナミクスの中に低自由度の非線形力学系と見なしうる複雑化過程を観察した結果を述べる。

本章の構成は次の通りである。

3.1節では、観測時系列信号の非一意性を示す。ここでは最初

に、可変パラメータの値によってカオスの挙動を示すことが知られている。Rössler モデルの周期解とカオス解と本計算結果のそれらとを比較する。次に Takens の埋め込み理論を適用し、アトラクターの軌跡から分岐ルートの判定を試みる。

3.2 節では、二種類の信号解析法により被時系列信号の分析結果を示す。最初に、離散的フーリエ変換を行い、パワースペクトルの分布および自己相関係数の結果から時系列信号の識別方法を述べる。続いて、時間一周波数空間で時系列信号を解釈するために有効な手だてであるウェーブレット解析を用いて、定性的な検討を行う。

3.3 節では、カオス構造とフラクタル次元の決定を定量的に示す。最初に、カオスであるか否かのもっとも重要な定量的指標であるリアプノフスペクトラムの算出と結果を述べ、カオス的現象の存在の証明を行う。次に、カオスの全体像を把握するためにフラクタル次元の一つである埋め込み次元を、ボックスカウンティングを改善したランダムサンプリング方法にて測定し、その結果を述べる。

3.4 節は本章のまとめである。

3.1 観測時系列信号の非一意性

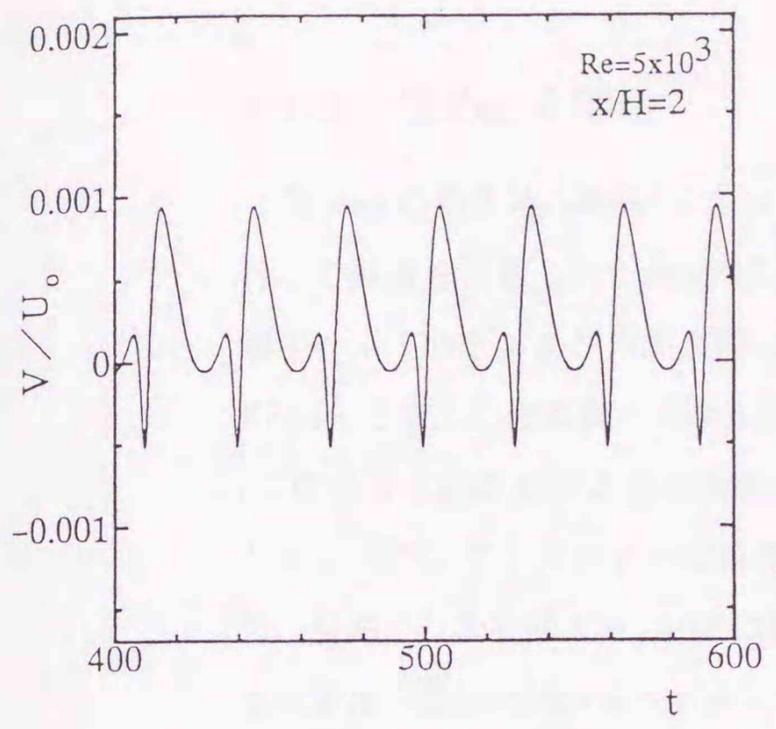
3.1.1 時系列の比較

図3.1に、カオスの挙動の解析に必要な時系列として、周期解と非周期解の代表的な一組のデータを示す。データの抽出条件は、流れ方向観測位置 $x/H = 2.0$ の噴流中心軸上で、 $Re = 5 \times 10^3$ および 10^6 のものである。縦軸に流入最大速度 U_0 で正規化した y 方向の速度成分 V の変化、横軸に時間経過をとって記録してある。それぞれが後述する解析結果から周期解とカオス解とみなしうるデータである。そこで比較のために、ある条件によってカオスの挙動を示すことが知られている Rössler モデルの周期解とカオス解のそれぞれの x 成分時系列データを図3.2に示した。

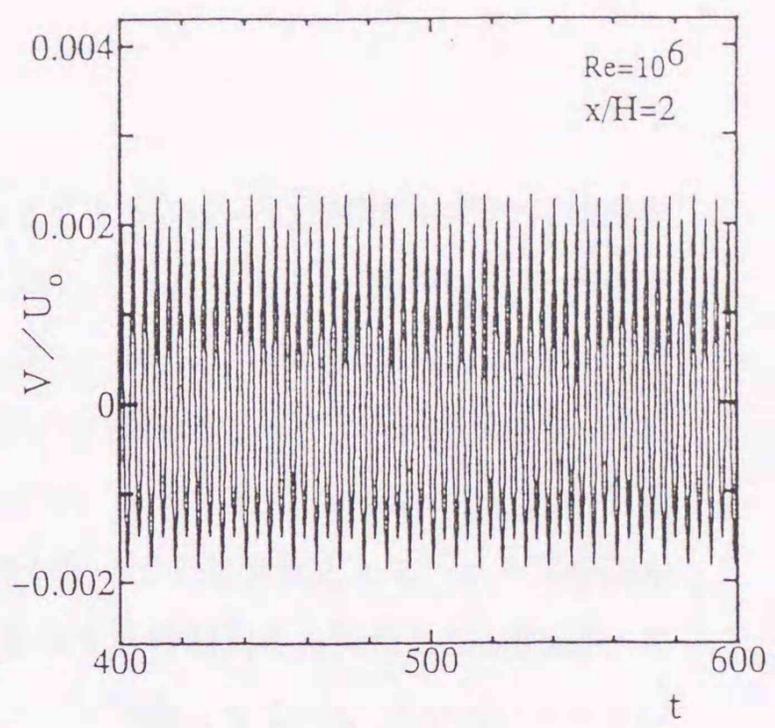
Rössler モデルの支配方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + xz - cz \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

a, b, c は可変パラメータであるが、 $b = 0.2$, $c = 5.7$ の固定値とし、 a のみを 0.12 (周期解) および 0.20 (カオス解) に変化させて解の状態を観察する。解の区分によってそれぞれ共通な点を述べると、 $Re = 5000$ の解および Rössler モデルの周期解は、振幅一定のいくつかの異なる周波数の単純な重ね合わせの様相を示すことが認められるが、 $Re = 10^6$ の解および Rössler モデルのカオス解では、振幅の一樣に定まらない、非定常で非線形性に富んだ複雑に入り混じった周波数の存在が認められる。

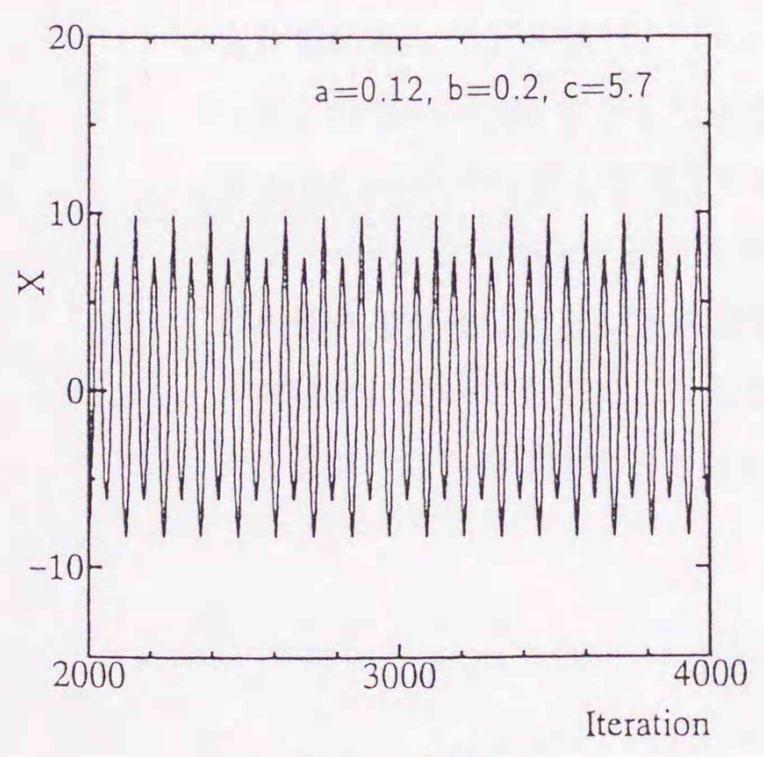


(a) 周期解

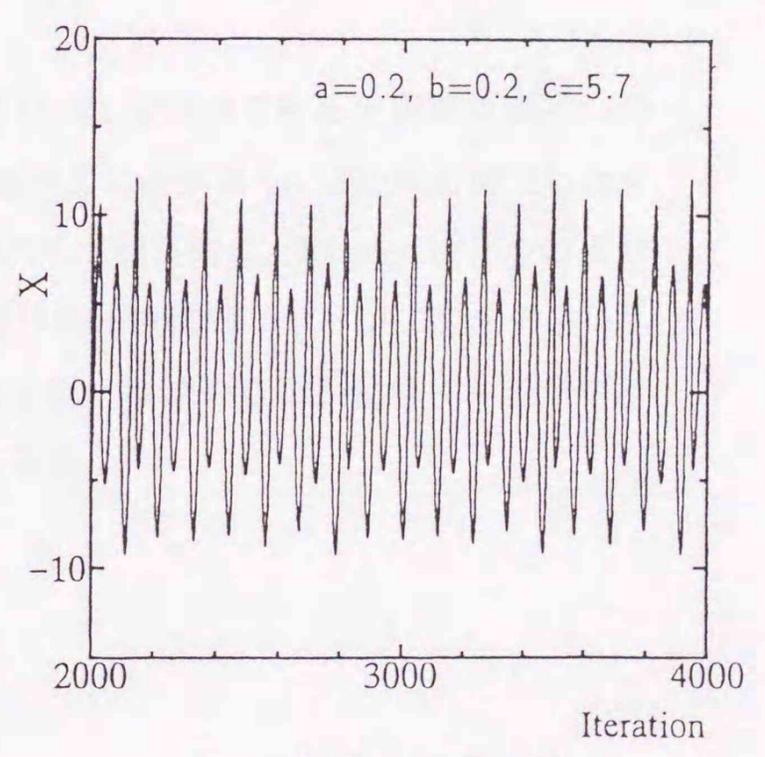


(b) カオス解

図 3.1 レイノルズ数の変化によるチャンネル内噴流速度時系列の違い



(a) 周期解



(b) カオス解

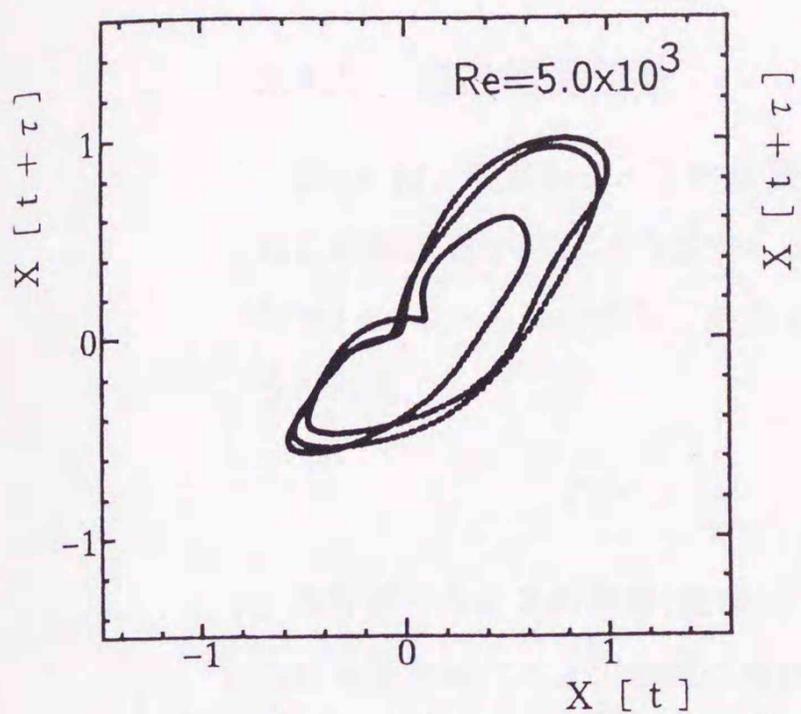
図 3.2 Rössler モデル時系列の違い

3.1.2 埋め込み理論

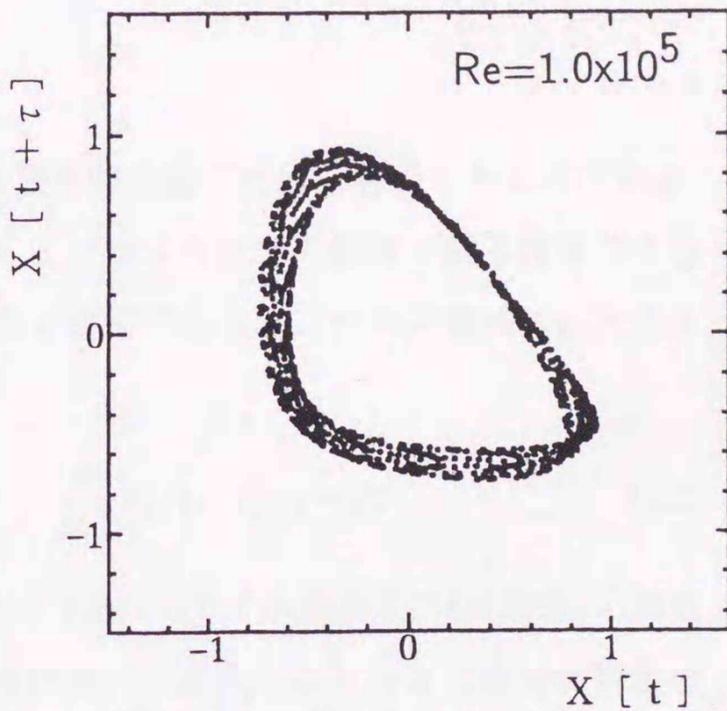
Takens の埋め込み理論¹によってアトラクターの位相的性質の再構成を行って両者を比較したのが図3.3の(a)~(d)である。図中(a),(b)が周期解 ($Re = 5000$) およびカオス解 ($Re = 10^5$) の再構成図であり、(c),(d)がRösslerモデルの周期解とカオス解の再構成図である。横軸が状態量 $X[t]$ (この場合主流の垂直方向速度成分 V)、縦軸が時間遅れを τ とした状態量 $X[t + \tau]$ で、アトラクターの軌道が見やすい経験値として、 $\tau = 5$ を選んだ。なお、ここでは $\tau = 10\Delta t$ に相当する時間刻みを採用した。Rössler方程式では、周期状態からパラメータ a を増加させていく (本章では $a = 0.12$ から 0.20) と特定のパラメータでいままでの周期解が不安定化し、周期が2倍となった2重巻きの周期解で安定化し、さらにパラメータの増加によって多重倍周期解、カオス解へと遷移するルートをたどることが知られている。

すなわち、(a),(b)に示したように Re を増加させると周期を変えつつも *fixed point* から決して遠方へ離れることがなく、いわゆる安定したりミット・サイクルが次々と形成される。最終的に、Rösslerモデルのような周期倍増分岐型から多重周期型への軌道構成ルートが二次元チャンネル内噴流においても発見されたことは、噴流の自励振動解に非線形ダイナミクスの存在を意味するものである。

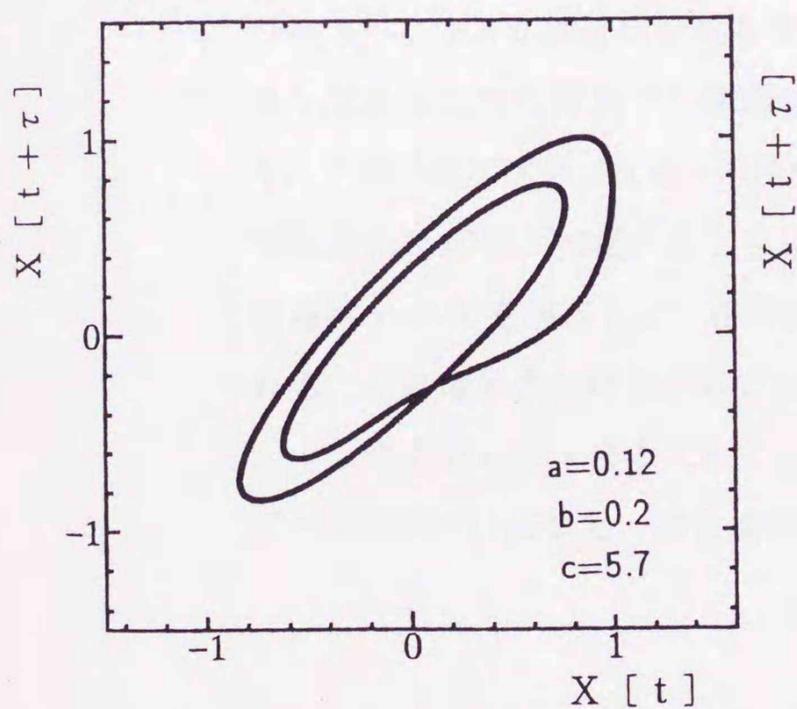
¹埋め込み理論の有用性は第4章で述べる。



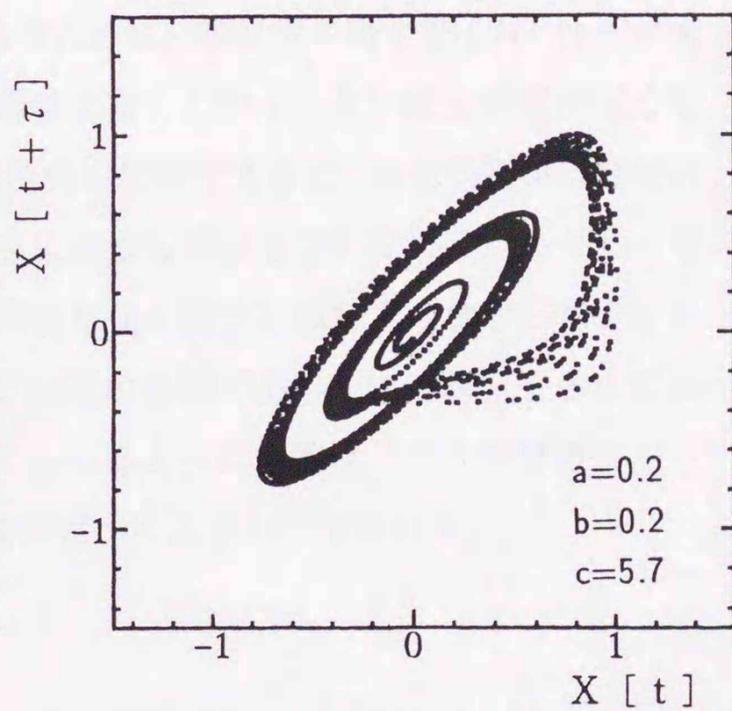
(a) 周期解 (フリップフロップ)



(b) カオス解 (フリップフロップ)



(c) 周期解 (レスラーモデル)



(d) カオス解 (レスラーモデル)

図 3.3 埋め込み理論による, 本計算および Rössler モデルの再構成図

((a),(b) は $\tau = 10\Delta t$)

3.1.3 自己相関係数

図3.4は、時系列データの自己相関係数を計算し解析したものである。自己相関係数が急速に消滅することは、カオスの程度を測る目安であり時刻 t と $t+\tau$ の間の相似性を表す情報である。 $C(\tau)$ の定義式は以下のようになる。

$$C(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} X(t) \cdot X(t + \tau) dt \quad (3.2)$$

本計算のカオスの挙動(実線)とRösslerモデルのカオス解(破線)の両者の結果を見比べると、横軸の時間遅れ τ の変化に伴う自己相関係数値の定性的な変化の類似性が認められる。一般にカオスの変動においては、パワースペクトルが連続成分をもつために、相似性を表す量 $C(\tau)$ は τ が大きくなると二つの時刻での変動には全くといってよいほど相関がなくなり、予測不能な状態になる。本解析の結果によると、自己相関値は最初の時間遅れ τ の僅かな増大とともに急激な減少を示している。ただし、時間遅れ τ が30を過ぎると、相関係数値の減少は頭打ちの状態が見受けられる。これは計算の時間刻みの精度の影響であり、時間刻みをさらに細かくし時間遅れを十分に大きくとれるようにすれば、自己相関値はオーダー的に徐々に減少し、零近傍に近づくことが予想される。

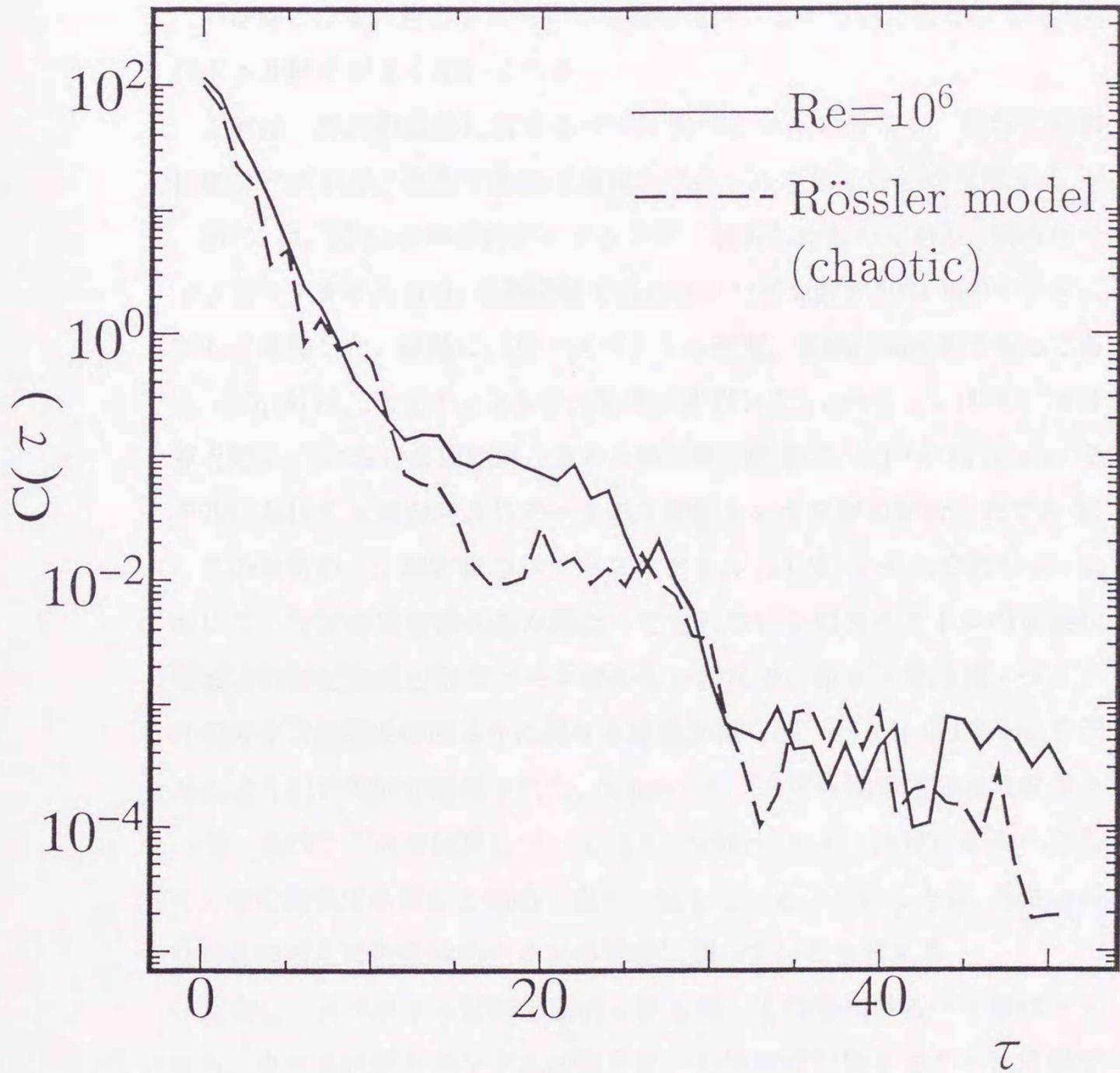


図 3.4 自己相関係数

3.2 各種解析法による被時系列の分析

3.2.1 スペクトル解析

周期解とカオス解とを定性的に分類し見分ける一つの方法としては、スペクトル解析がよく用いられる。

これは、周波数成分に対するパワースペクトルの分布が、前者であれば線スペクトル、後者であれば連続スペクトルを描くことを意味する。

図3.5は、図3.1の時系列データをFFT解析したものである。解析はサンプリングタイム $10\Delta t$ の等間隔で抽出された総点数が1024個のデータに対して実施した。縦軸にパワースペクトル密度、横軸に周波数を取ってある。(a),(b)は二次元チャンネル内噴流の数値シミュレーション(以後、本計算と呼ぶ。)における周期解とカオス解の解析結果で、(c),(d)はRösslerモデルにおける x 成分時系列データの周期解とカオス解の解析結果である。

この解析から、本計算のパワースペクトル(a),(b)がそれぞれの Re において、特定の周波数のみが際だって現れている線スペクトルの周期状態および特定の周波数でピーク値のない帯状の分布を示す連続スペクトルのカオス状態との明らかに異なる結果が得られ、(c),(d)のRösslerモデルによく似た傾向が観察された。Rösslerモデルの周期倍増分岐の軌道とパワースペクトルの関係についてはCrutchfield et al. (1983)が調べており、その結果は本報告と極めて良く一致している。このことは、Schuster (1984)が唱えた現象論的カオスの定義に則っていると言える。

ただし、スペクトル解析は動的な振る舞いを特徴づける一手法にとどまり、カオス状態とランダム状態の違いを明確に判別することは容易でないとされている報告もある。従って本手法のみに頼って安易に断定することは避けるべきであろう。

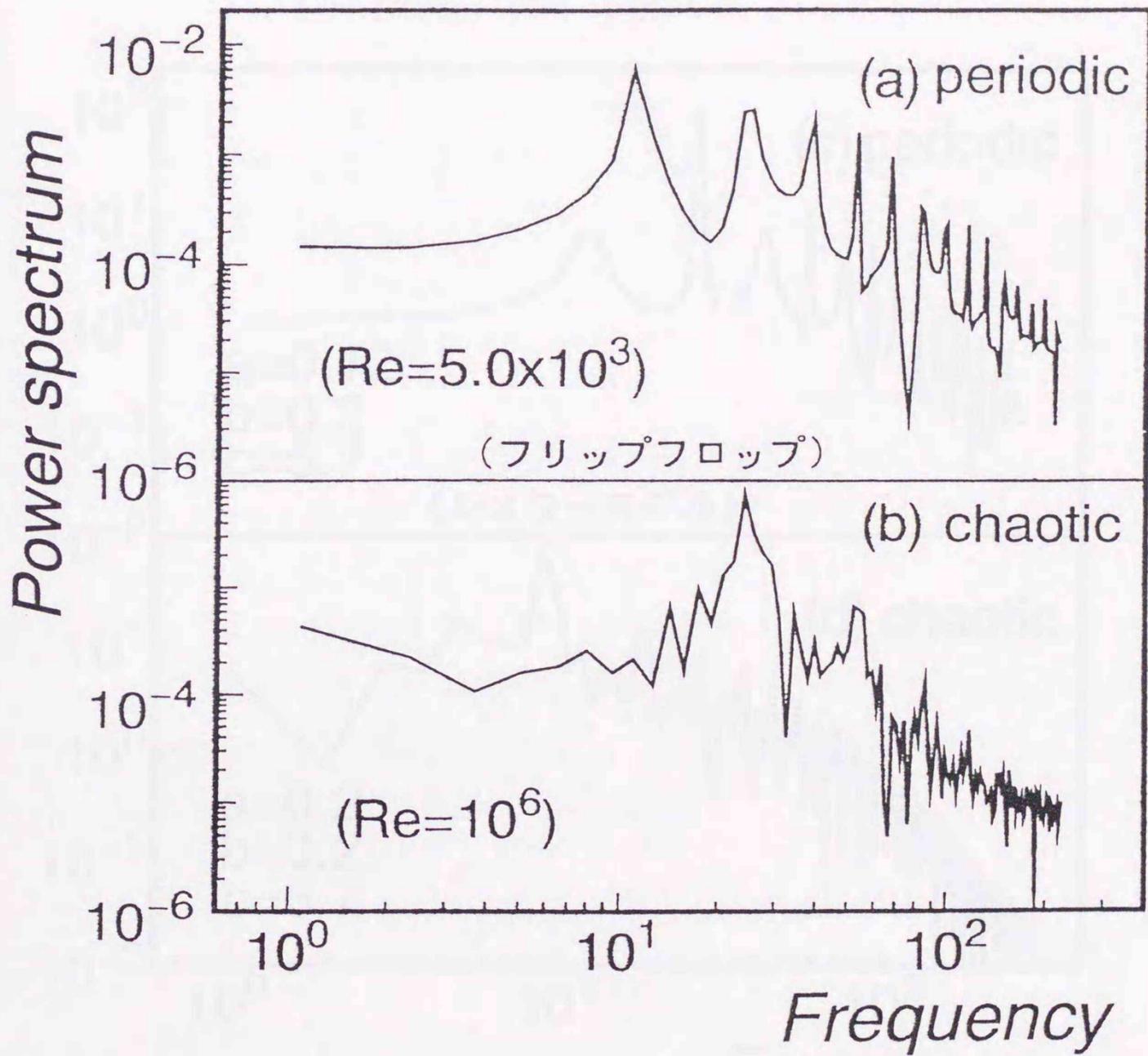
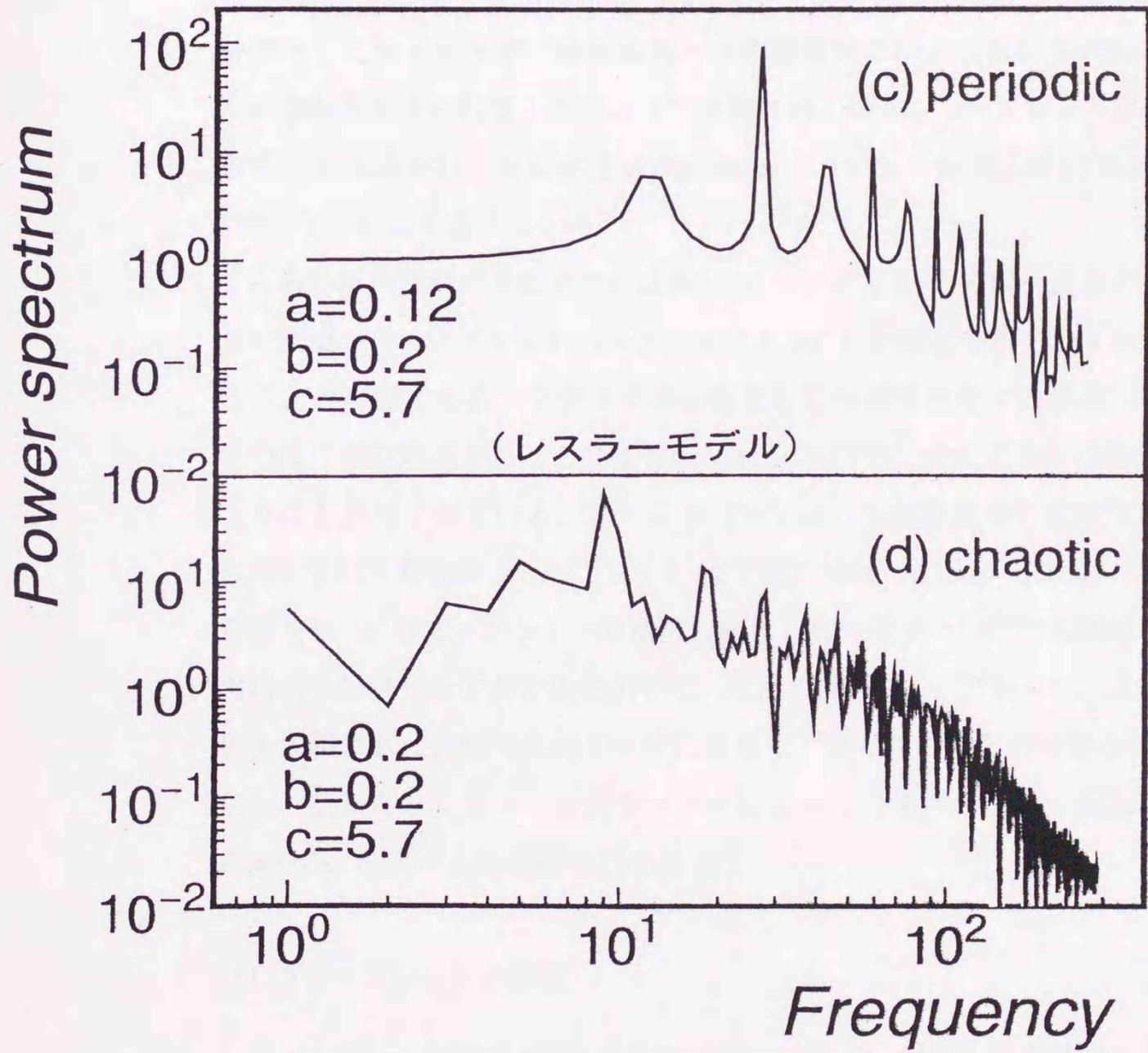


図 3.5 スペクトル解析の比較

(フリップフロップ現象)

[次頁につづく]



(Rössler モデル)

3.2.2 ウェーブレット解析

ある波形の性質を詳しく調べたい場合、最も広く用いられる手法がフーリエ解析であることは前節で述べた。フーリエ解析の結果は周波数成分の分布として示されるが、時間領域と周波数領域の両方の情報を同時に見たい状況も考えられる。このような目的に対し近年ウェーブレット変換なる手法が開発され、主に信号処理(Garreau, 1989)や画像圧縮(Antonini, 1989)などに応用されている。

この手法によれば予め決めた波形(ウェーブレット)と被解析波形との相互相関値がウェーブレットのスケールによっていかなる分布を示すかを知ることが可能である。フラクタルな構造をもつ系やカオス力学系の特徴を明確に判別可能であるとの報告は、Arugoul(1989)や飯田ほか(1993)により成し遂げられている。石川ほか(1995)は、乱流後流中の速度変動波形を対象に3種類のウェーブレット(反対称, Mexican hat, Morlet)による変換を施し、ウェーブレットの種類に依存しない構造と依存する構造の抽出結果を報告しその有用性を示した。本節では、ウェーブレットによる解析を観測された速度時系列データに適用し、カオス的挙動の判定を行う。なお、最後にコントロールパラメータによって力学系の挙動が確定できる Rössler モデルとの比較検討も論じる。

(a) ウェーブレットの基礎

ウェーブレットとは、局在する(let)波(wave)で、信号を表す単位として使われるものである。1980年頃、Morletは地震波の研究に Gabor 関数

$$\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{i\omega x} \quad (3.3)$$

を使用した。波束 $\psi(x)$ をスケールとして周波数を変える($\sigma\omega = \text{一定}$ として σ を変える)と解像度が有効に利用できることを指摘し、この波束をウェーブレットと呼んだ。今日では、基本関数 $\psi(x)$ (マザー・ウェーブレッ

ト、またはアナライジング・ウェーブレット)を決めて、これをスケール・トランスレートした関数

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\sqrt{|a|}} \quad (3.4)$$

($a \neq 0, b$ は実数) をウェーブレットと呼ぶ。図3.6 は、 $\sigma\omega = 8$ の Gabor 関数の実部のグラフである。図3.7 の(a)は、一番奥の信号を部分的にウェーブレットによって切り出した様子を模式的に表わしたものである。切り出された部分の大きさだけを、信号平面(横軸 b , 縦軸 $1/a$) に等高線図としてかき出すと、図3.7 の(b) のようになる。Gabor 関数は短時間フーリエ変換にも使われるが、その場合は窓幅 σ を固定して ω を変える。図3.8 の(a)はフーリエ変換($\sigma \rightarrow \infty$)で、同じく(b)は短時間フーリエ変換($\sigma = \text{一定}$)で信号を解析した様子を示す。

図3.9 に波束とそれが信号平面に占める面積を、ウェーブレット変換と短時間フーリエ変換とで比較する。窓幅 σ 固定の短時間フーリエ変換では、時間、周波数トータルの解像度を有効に利用できない欠点がある。

マザーウェーブレット $\psi(x)$ にはさまざまな関数を使うことができるが、Gabor 関数は周波数²領域の局在性が良く、この場合 $1/a$ は ω に対応するので、ウェーブレット変換に使われる頻度が高い。一般のウェーブレットでは、必ずしも $1/a$ が周波数には対応しない。

²縦軸の「周波数軸」とは $\psi_{b,a}(x)$ の $1/a$ である。

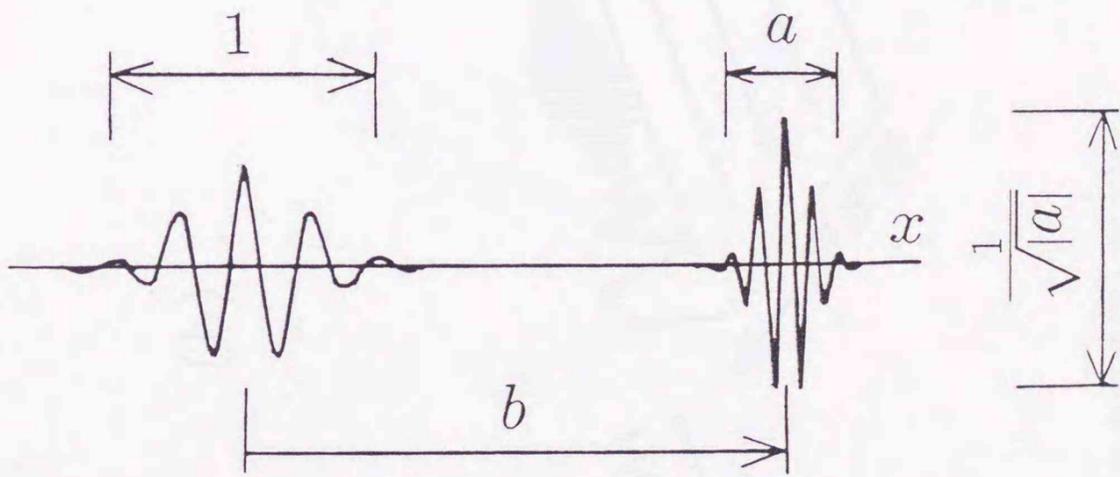


図 3.6 マザー・ウェーブレットとスケール・トランスレート

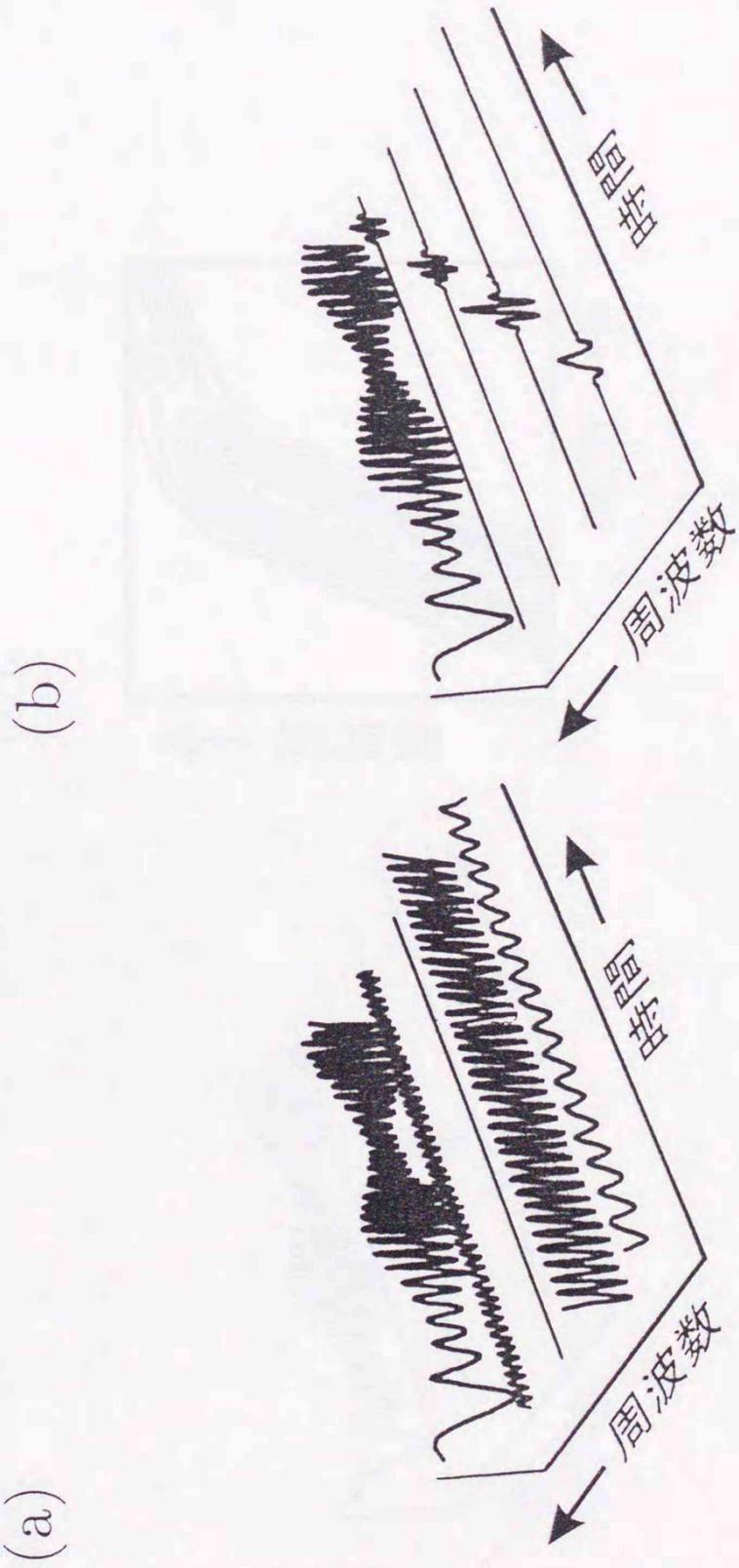


図 3.7 ウェーブレット変換の模式図と等高線図

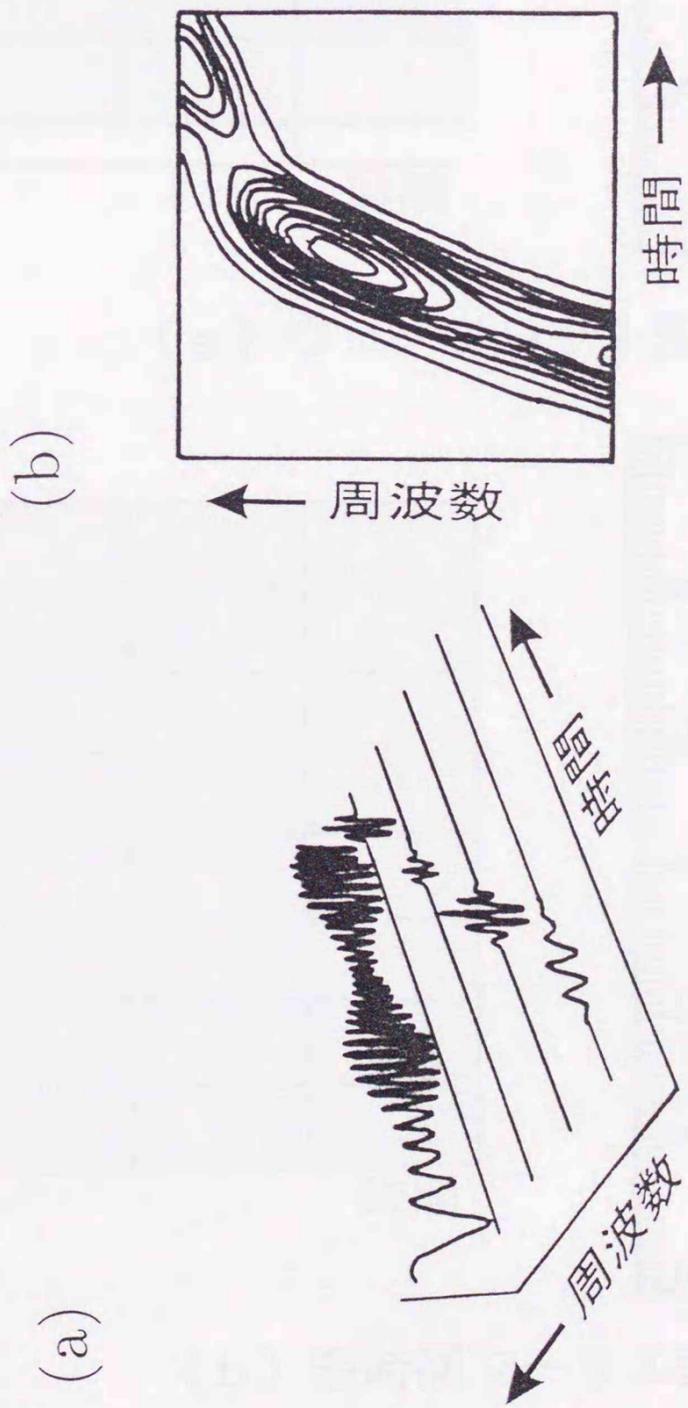
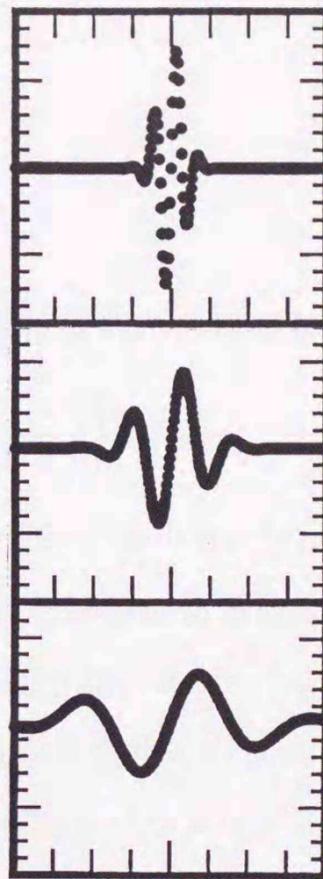
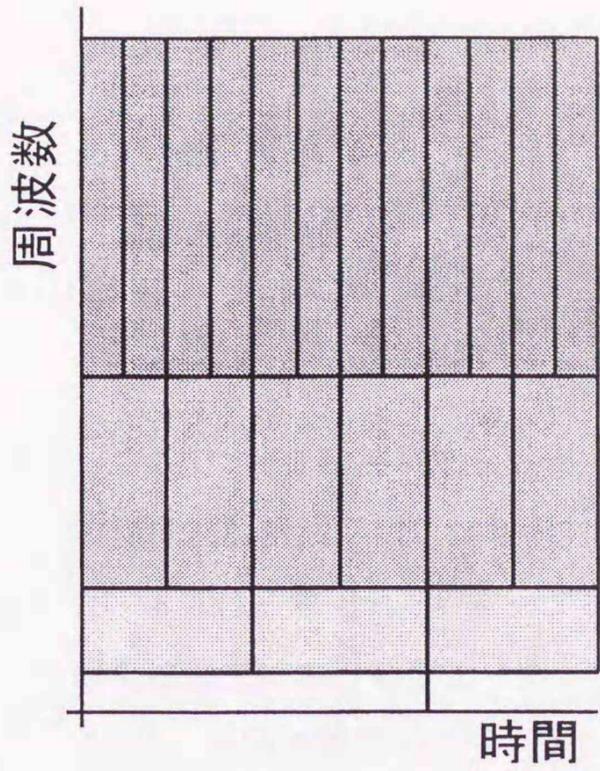
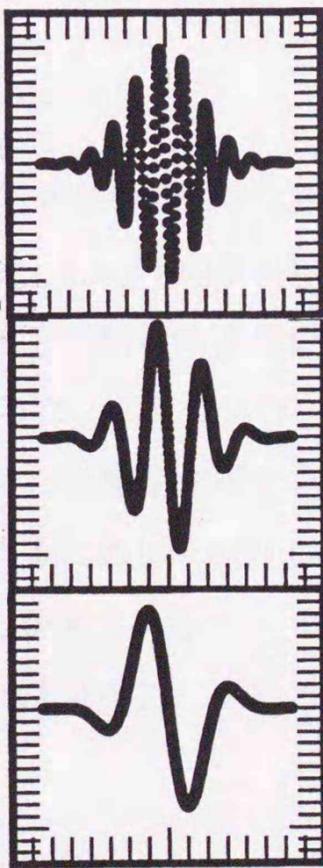
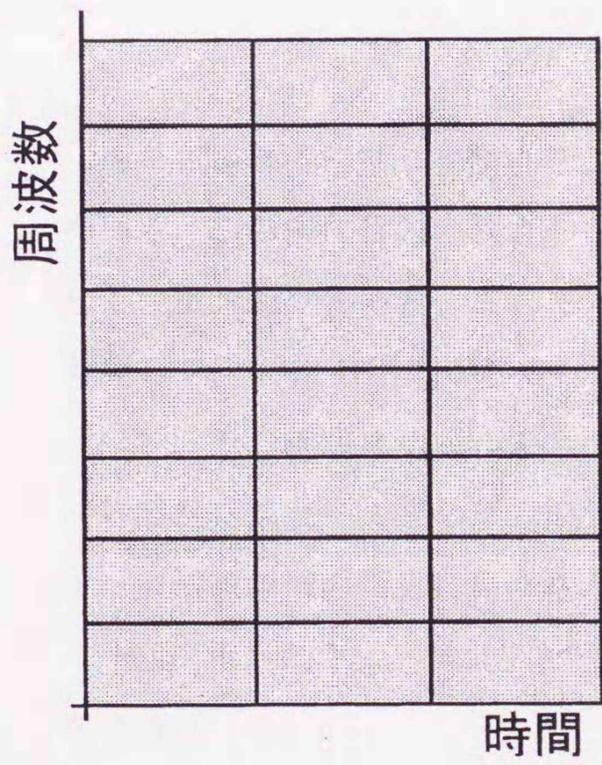


図 3.8 フーリエ変換と短時間フーリエ変換の模式図



(a) ウェーブレット変換



(b) 短時間フーリエ変換

図 3.9 波束が占める平面信号面積割合

(b) 定義

解析する波形 $s(t)$ のウェーブレット変換は次式にて定義される.

$$C(a, b) = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} w\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) dt \quad (3.5)$$

ここで, $s(t)$ は解析する波形, $w(t)$ はウェーブレットと呼ばれる. この波形は被解析波形に比べ時間方向に非常に局所性のある波形である. また, a, b はそれぞれ, ウェーブレットを時間方向のスケール, そして, 被解析波形上におけるウェーブレットの位置を決定するパラメータである. よって, 被解析波形のウェーブレットとの相関をパラメータ a を変えて求めることにより, 被解析波形を時間とスケールとの二方向に分けることが可能である. 実際には, 時間領域での畳込みが周波数領域では積となる性質を利用して次式を用いる ($\hat{\cdot}$ はフーリエ変換を表す).

$$\hat{C}(\omega, a) = a \hat{w}(a\omega) \hat{s}(\omega) \quad (3.6)$$

(3.6) 式を逆フーリエ変換することにより, 再び時間領域に戻して $C(a, b)$ を得る. この様な目的の場合, ウェーブレット $w(t)$ の波形は目的に合わせて変更可能であるが, ここでは被解析波形の局所的直流成分の影響を考慮して, $w(t)$ の平均が零となるようにした. これにより, 各ウェーブレット以上の時間スケールをもつ変動成分の影響を無視できる. その他に時間軸とスケールとの双方の分解能を得るために, $w(t)$ は時間領域および周波数領域の両方に局所性が高いことが望まれる.

今回採用したウェーブレット解析の基準波形の式は, 正弦波がガウス分布で減衰する

$$\left. \begin{aligned} w(T) &= \sin(2T) \exp\left(-\frac{T^2}{k^2}\right) \\ T &= \frac{t-\tau}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

の実関数であり, 式中 $k=1$ として局所性を強め時間軸の分解能を高めた.

(c) 解析結果

図3.10の(a),(b),(c)はウェーブレット解析を本計算の $Re = 1000$ と 5000 の周期解および $Re = 10^6$ の非周期解の時系列データに施した結果である。ウェーブレット変換の相関値 C は

$$C(a, \tau) = \frac{1}{a^n} \int_{-\infty}^{+\infty} w\left(\frac{t - \tau}{a}\right) s(t) dt \quad (3.8)$$

で計算される。横軸が時系列の時間で、かつウェーブレットの中心時刻となっており、縦軸はウェーブレットの周期に対応している。図中、 C の値が正の部分のみ黒く色づけした。

(a)($Re = 1000$) のリミットサイクルとなる単純な周期解の場合、縦軸の周波数成分に相当するスケール値、 $a = 0.1$ の近傍に規則正しい相関の繰り返し認められる。

また、(b)($Re = 5000$) の倍分岐構造の周期解では、スケール値 $a = 0.2$ で最初の枝分かれが生じ、続いて $a = 0.08$ 近傍に2度目の枝分かれが発生しており、階層構造の存在が認められる。ところが、(c)($Re = 10^6$) の非周期解の場合、枝分かれのできるスケールの特定はこれまで可能であったスケールのオーダー $a \simeq O(10^{-1})$ では、もはや困難で出現する相関パターンも多種である。一見すると $a = 0.05$ 近傍の高周波領域で枝分かれが一様に始まっているような印象も受けるが、この図からは分解能が十分でないため、微妙な違いを明瞭には示すことができない。そこで図3.11の(a),(b)に図3.10の(b),(c)について局所的に $a \simeq O(10^{-2})$ 程度まで周波数の分解能を高めた解析を再度実行した結果を示す。すると、周期解では枝分かれする周波数を明確に区別することは可能だが、カオス解では周波数方向への複雑な枝分かれのバラつきが存在し、スケール値の決定はやはり困難である。

飯田ほか(1993)は、LorentzモデルおよびRösslerモデルの両者にウェー

ブレット解析を施した結果の報告をしている。それと比較すると、本解析におけるフリップフロップ信号の非周期解からは、散逸の強いLorentzモデルのカオス状態とそれより散逸の弱いRösslerモデルのカオス状態との間にちょうど挟み込まれた定量的な相関図が得られた。このことは本研究の流れ場が、あるレイノルズ数を境にカオス的領域に突入する様子の特徴づけるものである。

このように類似の複数の非周期性データの比較において、スペクトル解析ではその違いが明確にできなかったものに対し、ウェーブレット解析では可能であることが示された。

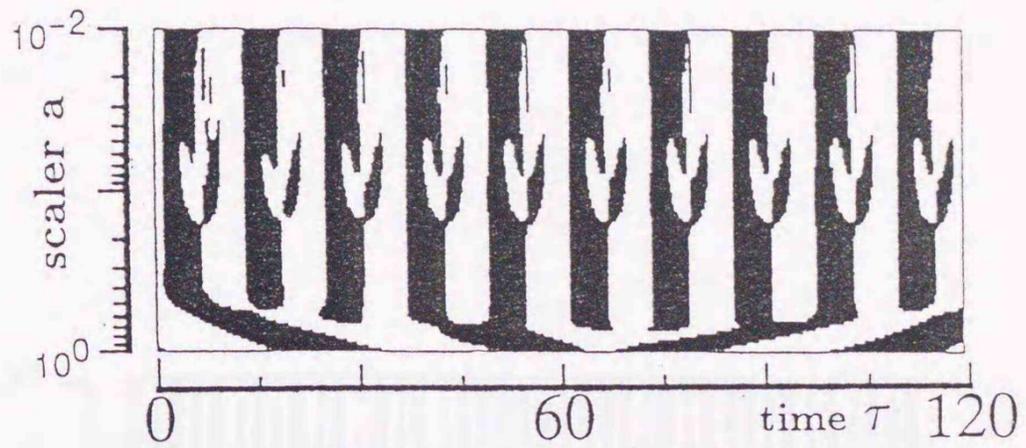
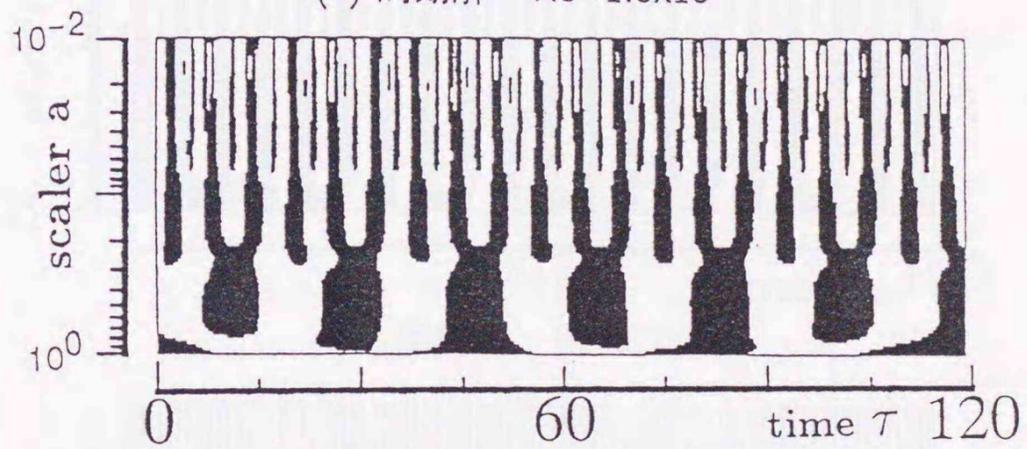
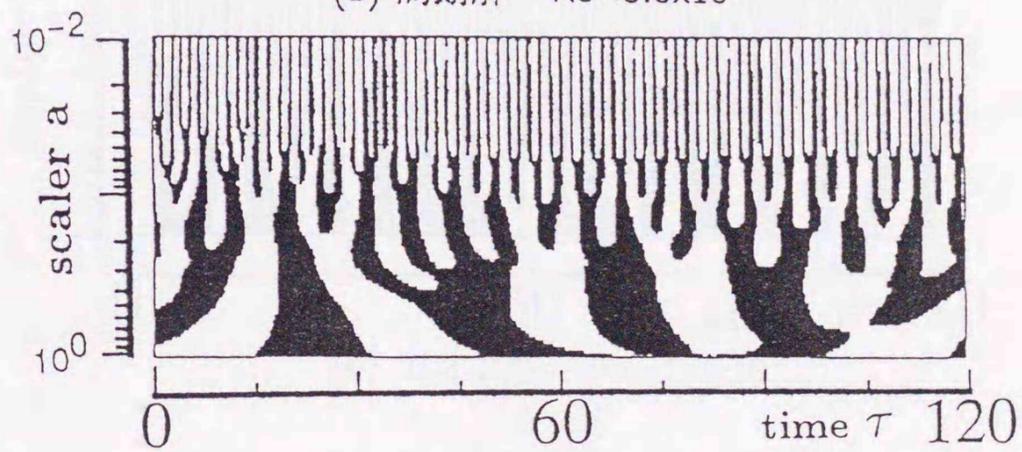
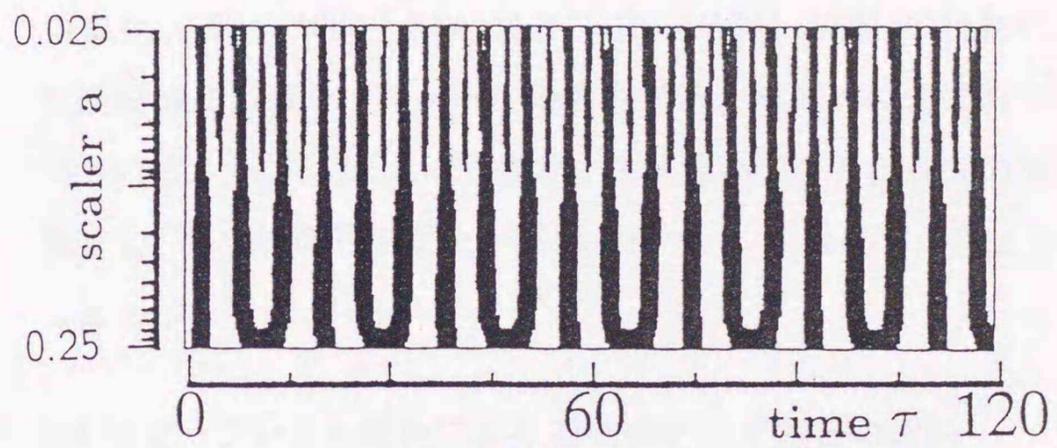
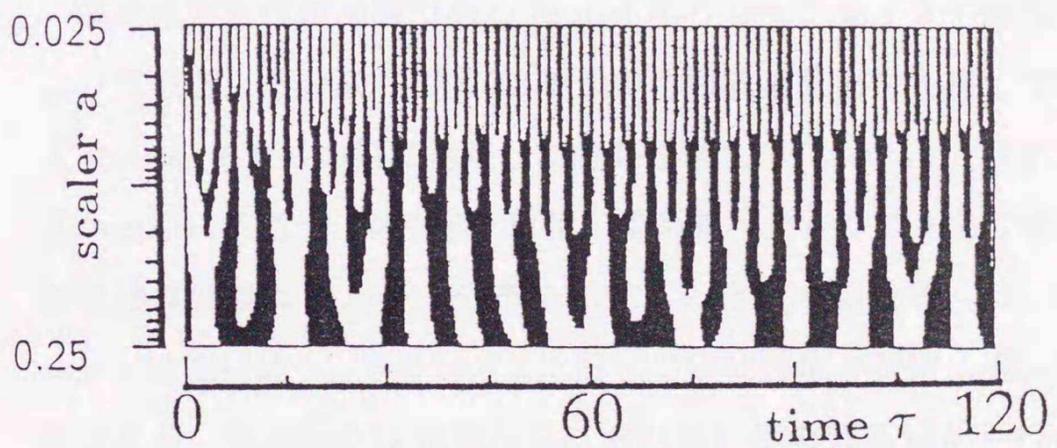
(a) 周期解 $Re=1.0 \times 10^3$ (b) 周期解 $Re=5.0 \times 10^3$ (c) カオス解 $Re=1.0 \times 10^6$

図 3.10 本時系列のウェーブレット変換



(a) 周期解 $Re=5.0 \times 10^3$



(b) カオス解 $Re=1.0 \times 10^6$

図 3.11 高周波数成分のウェーブレット変換

(d) スケール a の度数分布

図3.12 は周波数のスケール a に対して図3.10 の(a),(b),(c)の単位時間当たりの相関が正となる度数分布を示したものである。これによると周期および非周期のデータの中に潜む違いをより端的に示すことができる。つまり、 $Re = 1000$ (点線)および $Re = 5000$ (破線)の周期状態では線図が階段状に減衰し、スケールの違う構造が規則的に含まれていることが示される。一方、 $Re = 10^6$ のカオス状態(実線)では線図の変化が緩慢に減少し、系の特徴的な変化が認められない。すなわち、系は不規則であることが示された。

(e) ウェーブレット解析による Rössler モデルとの比較

基準波形が複素関数である Morlet のウェーブレットを適用する。これより実数部、絶対値、位相の3種類の情報収集能力を利用して本計算結果と Rössler モデルの解に適用した結果を図3.13 (a)~(d)に示す。いずれも、上から順に実数部、絶対値、位相の等高線パターンである。絶対値の等高線は速度変動エネルギー分布を示すものと考えられる。Morlet ウェーブレットは他に比べ、スケール a に関して分岐構造が明確に現れることが特徴である。位相からは周期変動においては位相の等高線が平行かつ垂直になる地点を着目すればよい。それぞれ(a),(c)の周期解および(b),(d)のカオス解の解析結果より、等高線の分布や樹状分岐構造の共通性が解の性質ごとに示されている。

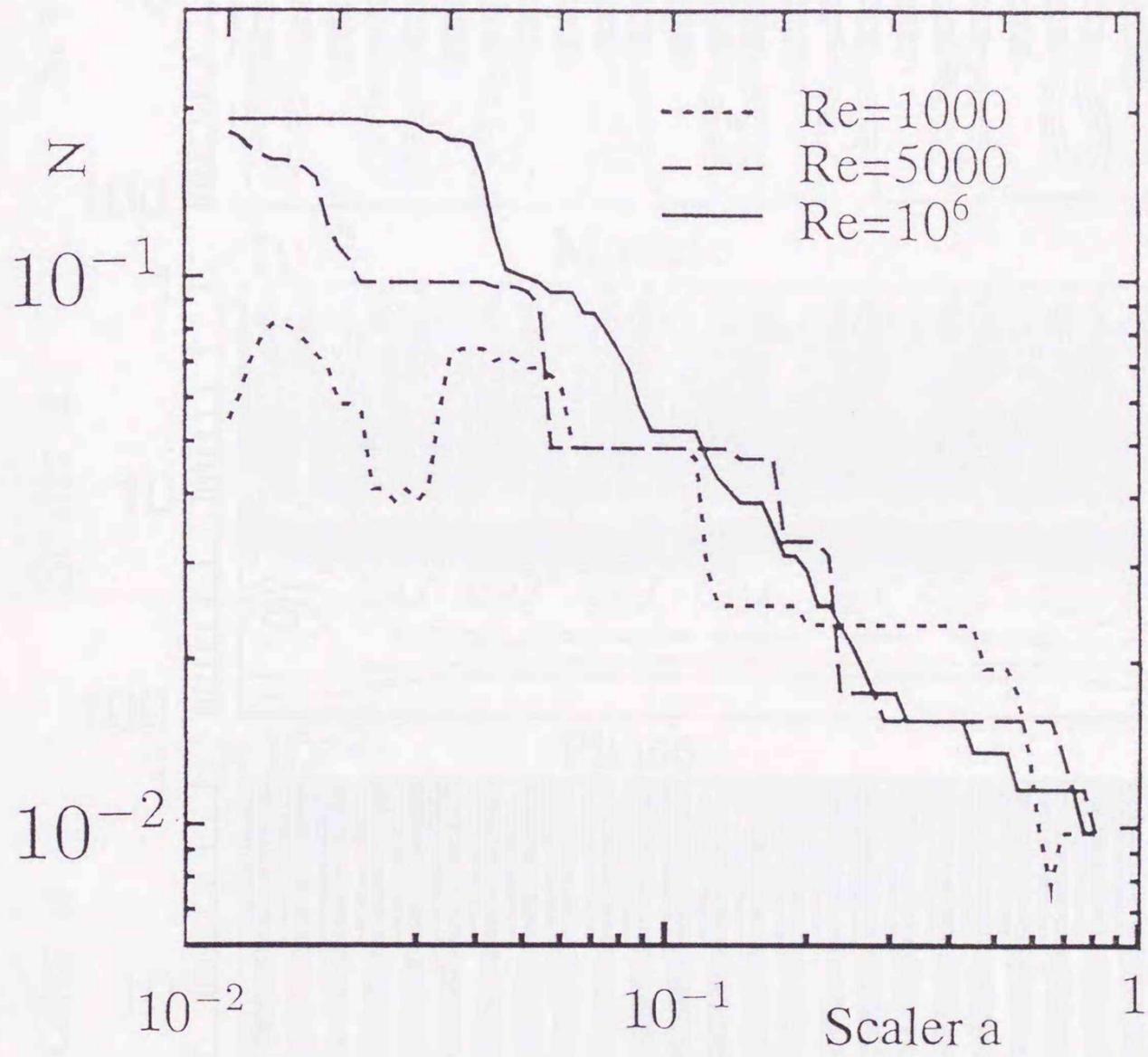


図 3.12 単位時間あたりにおける正の相関値ヒストグラム

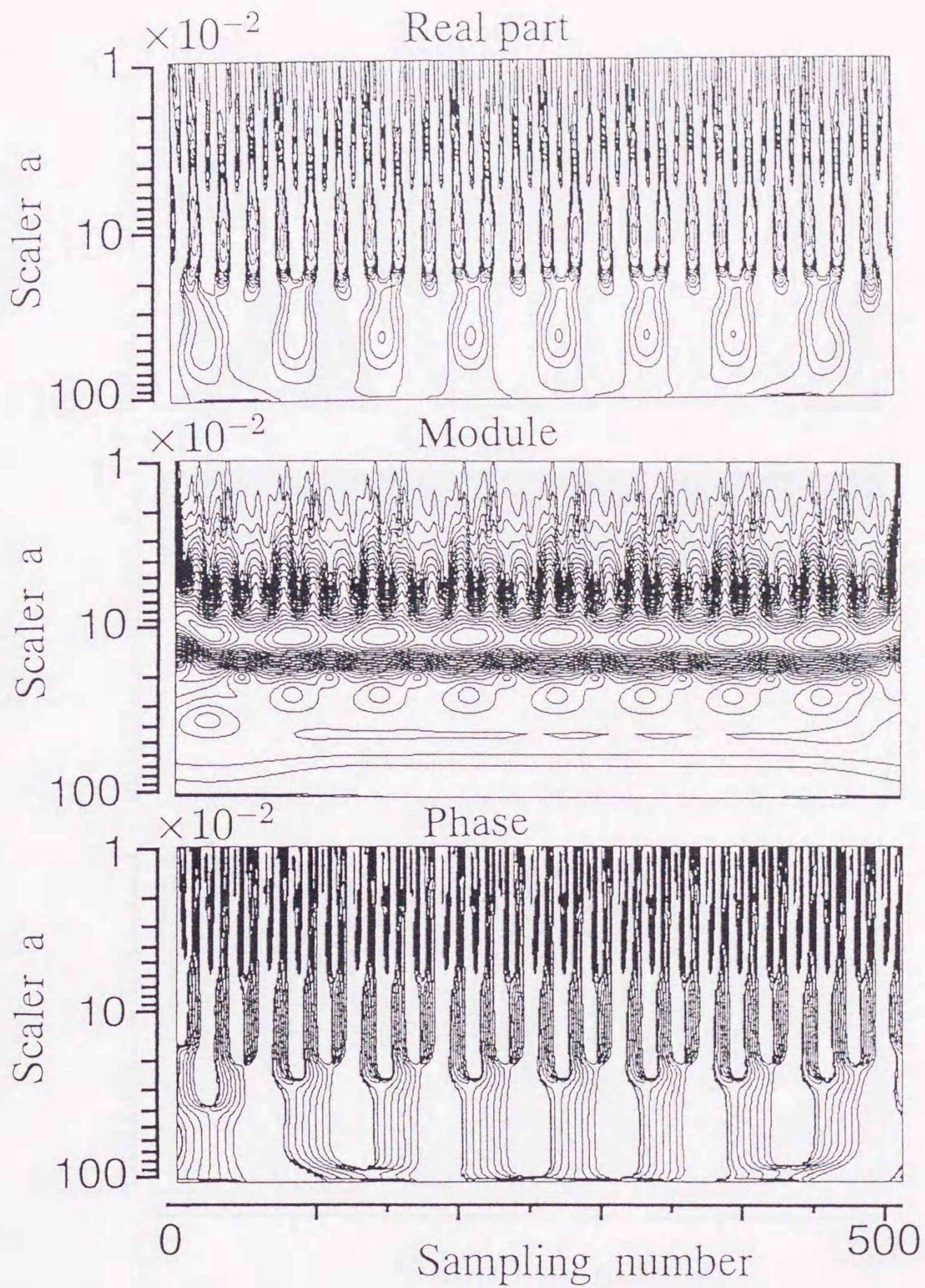
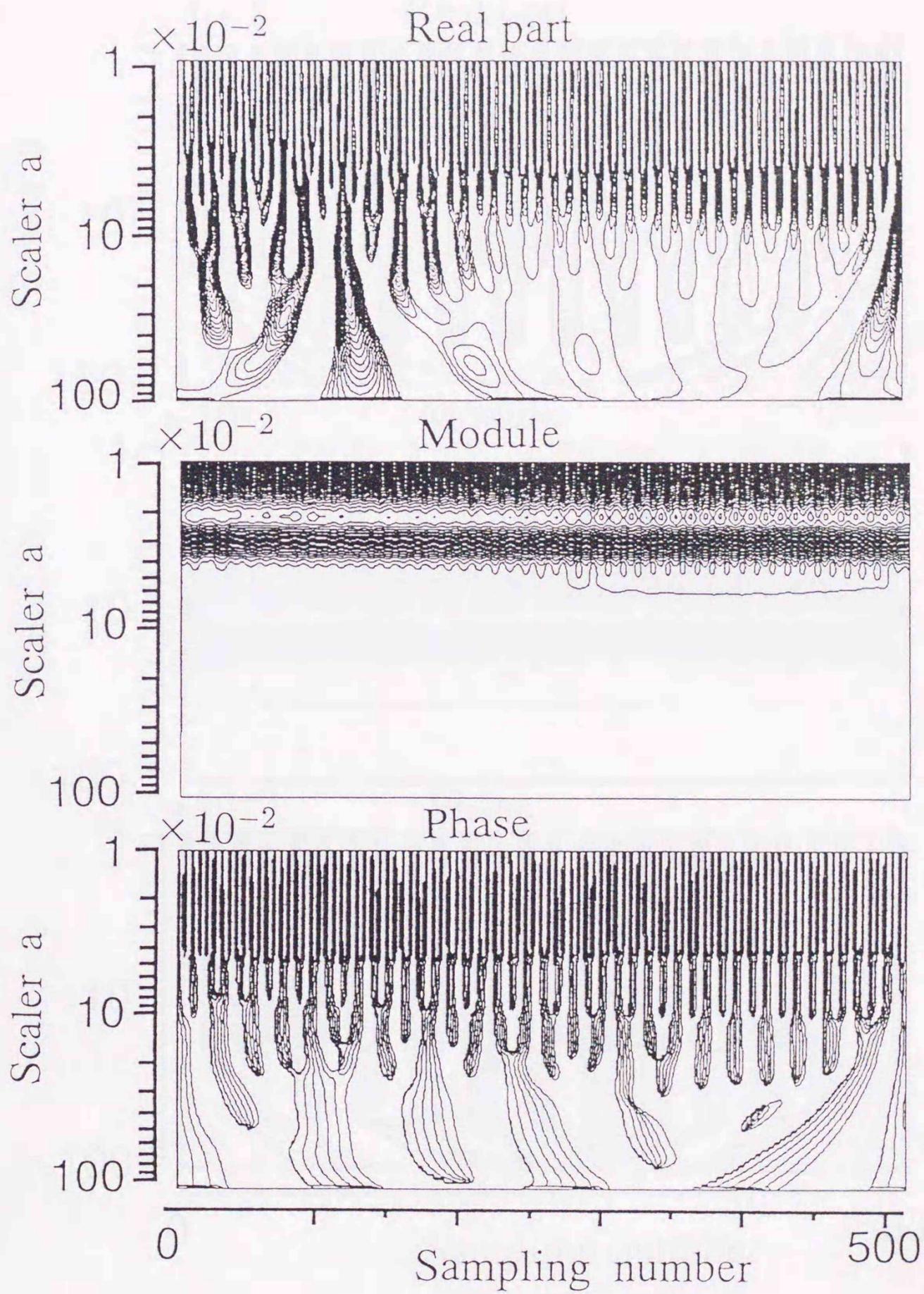
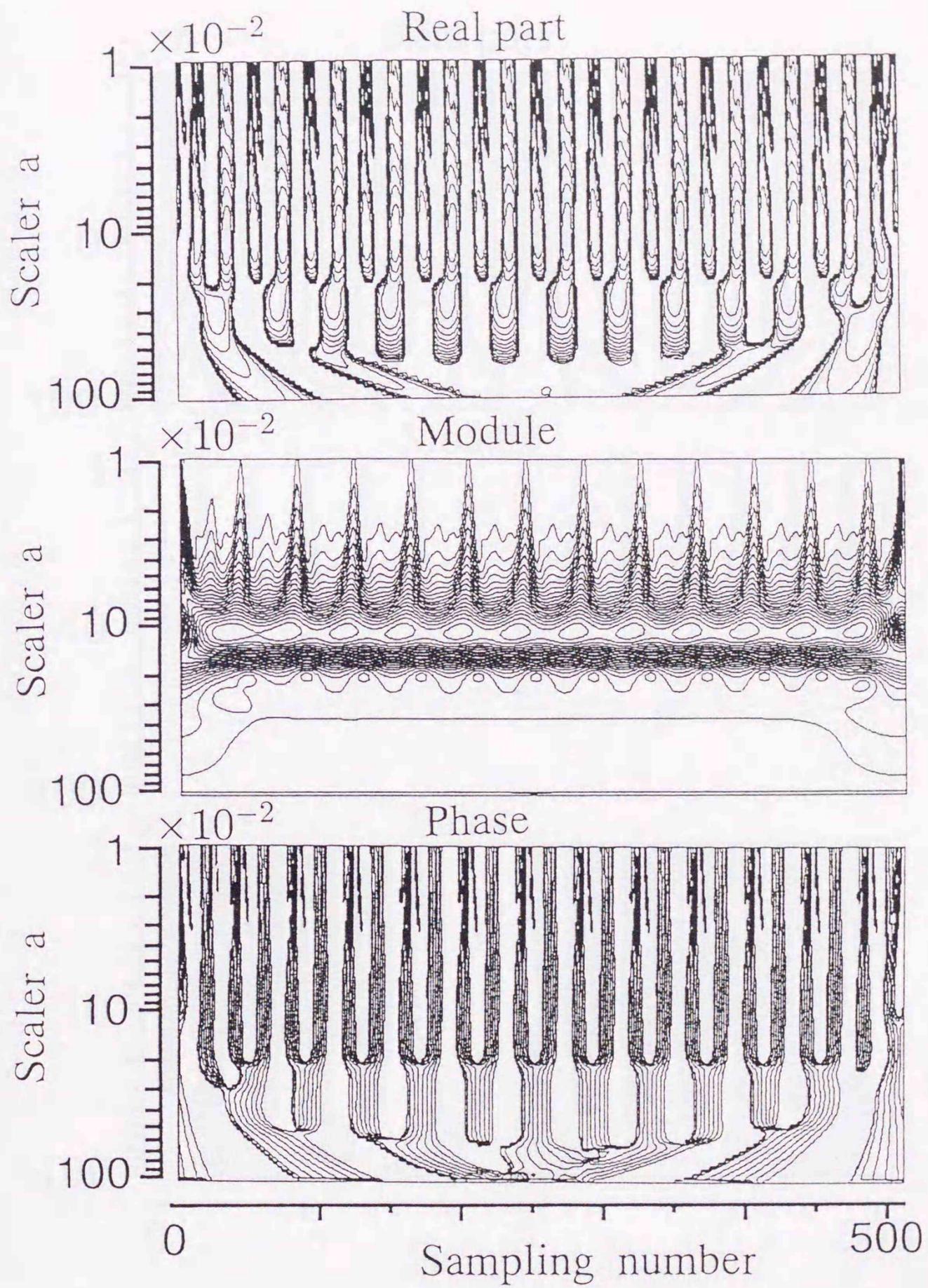


図 3.13 本計算と Rössler モデルとの比較
 ($Re = 5 \times 10^3$: 周期解) [次頁につづく]



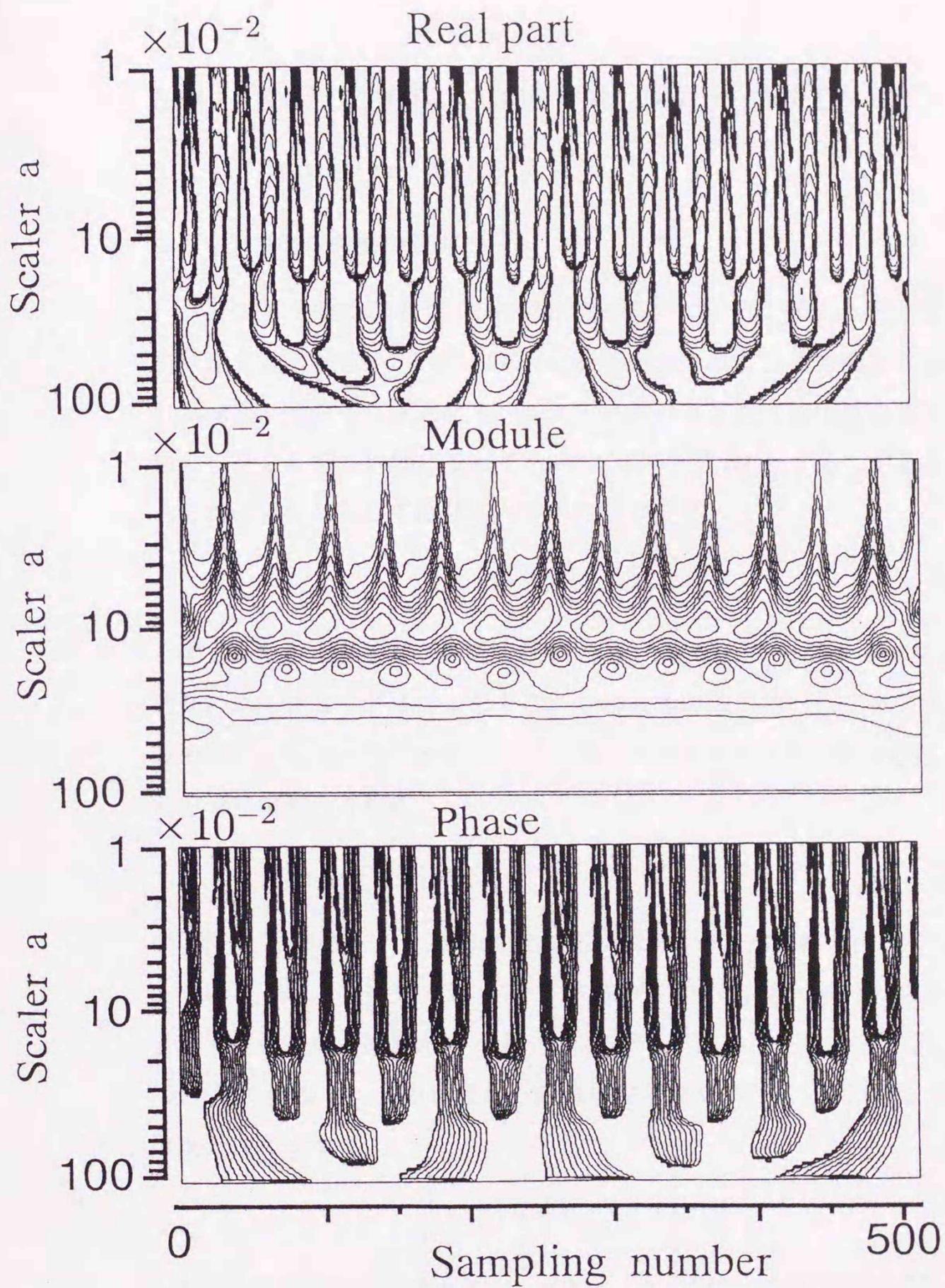
($Re = 10^6$: カオス解)

[つづく]



(Rössler モデル : 周期解)

[つづく]



(Rössler モデル : カオス解)

3.3 カオス構造とフラクタル次元の決定

3.3.1 リアプノフスペクトラム

(a) リアプノフ指数の概略

リアプノフ指数の考え方の概略は次の通りである。図3.14のように最初は球であったものが、ある方向に引き伸ばされて他の方向に押し潰された結果、楕円体に変化する。時刻 t における3次元楕円体の3本の主軸のベクトルを長い順にそれぞれ $\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)$ とする。すると、それぞれの方向に対して指数拡大率が定義できて、

$$\|\vec{e}_i\| \propto \exp \lambda_i t \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

と書くことができる(ここで $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ である)。 $\|\cdot\|$ はノルムを表し、通常はユークリッドノルムをとる。この大きい順に並べたリアプノフ指数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ のことをリアプノフスペクトラムと呼ぶ。一般に n 次元の連立常微分方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)), \quad \text{ただし } \vec{x} \in R^n \quad (3.10)$$

の場合は、 n 個のリアプノフ指数によるスペクトラムが定義され、 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ と書ける。式(3.10)の右辺のベクトル場 $\vec{F}(\vec{x})$ の接線ベクトル場を DF と置く。 DF を行列表示すると DF の第 ij 成分 $(DF)_{ij}$ は $(DF)_{ij} = (\partial F_i / \partial x_j)$ となる。元の軌道からの微小なずれを $\vec{u}(t)$ と置くと、 $\vec{u}(t)$ は次の式に従う。

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(t) = \left(D_{\vec{x}(t)} \vec{F} \right) \vec{u}(t) \quad (3.11)$$

これは線形の方程式であるが、マトリックス $\left(D_{\vec{x}(t)} \vec{F} \right)$ が軌道 $\vec{x}(t)$ に依存するので係数が時間的に変化する。

式(3.11)を互いに線形独立な n 個の $\vec{u}(0)$ について解くことにより解を求めることができる。

リアプノフスペクトラムの正確な定義は、 T_x^t の転置行列を T_x^{t*} と置くと、 $T_x^{t*} T_x^t$ は正定値のマトリックスになるので、

$$\left(T_x^{t*} T_x^t \right) = \Lambda_x^t \quad (3.12)$$

を作ったとき、この行列の固有値はすべて正の実数になる。その固有値を大きい順に $\Lambda_1^t, \Lambda_2^t, \dots, \Lambda_n^t$ と置くと、リアプノフ指数は

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \Lambda_i^t \quad (3.13)$$

で定義される。この極限が存在し、ほとんどの初期値 \vec{x} に対して同じ指数 λ_i を与えることにしたのが Oseledec (1968) である。しかし、この定義では $\Lambda_i^t \propto \exp 2\lambda_i t$ となるため、すぐに数値的にオーバーフローしてしまい t をあまり大きくとれない欠点がある。よって実際の数値計算には次の方法が使われる。軌道 $\vec{x}(t) = \phi_t(\vec{x}(0))$ があるとし、仮に時刻 $t=0$ でその軌道の接空間に任意の互いに直交する単位ベクトルの組

$\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \dots, \vec{e}_n(0)$ を与える。これらを次の発展方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_i(t) = \left(D_{\vec{x}(t)} F \right) \vec{e}_i(t) \quad (3.14)$$

によって発展させる。 φ 秒間発展させた時点でのベクトルの組を

$\vec{e}_1(\varphi), \vec{e}_2(\varphi), \dots, \vec{e}_n(\varphi)$ とすると、これらの組はもはや互いに直交関係にはないので次のグラム・シュミットの直交化により新しい正規直交基底系を求める。

$$\vec{e}_1'(\varphi) = \frac{\vec{e}_1(\varphi)}{\|\vec{e}_1(\varphi)\|} \quad (3.15)$$

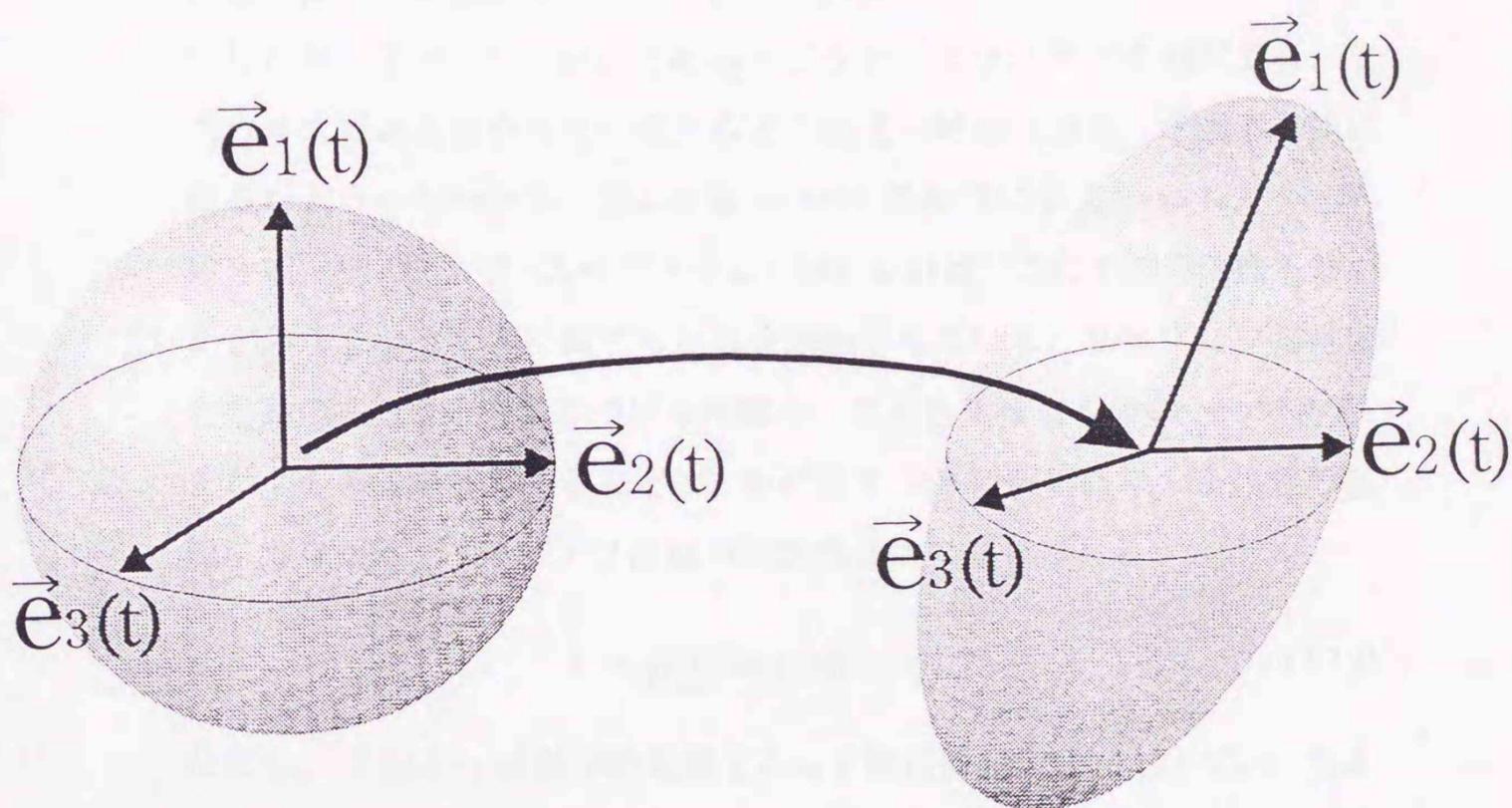
$$\vec{e}_2'(\varphi) = \frac{\vec{e}_2(\varphi) - \langle \vec{e}_2(\varphi), \vec{e}_1'(\varphi) \rangle \vec{e}_1'(\varphi)}{\|\vec{e}_2(\varphi) - \langle \vec{e}_2(\varphi), \vec{e}_1'(\varphi) \rangle \vec{e}_1'(\varphi)\|} \quad (3.16)$$

$$\vec{e}_i'(\varphi) = \frac{\vec{e}_i(\varphi) - \langle \vec{e}_i(\varphi), \vec{e}_1'(\varphi) \rangle \vec{e}_1'(\varphi) - \dots - \langle \vec{e}_i(\varphi), \vec{e}_{i-1}'(\varphi) \rangle \vec{e}_{i-1}'(\varphi)}{\|\vec{e}_i(\varphi) - \langle \vec{e}_i(\varphi), \vec{e}_1'(\varphi) \rangle \vec{e}_1'(\varphi) - \dots - \langle \vec{e}_i(\varphi), \vec{e}_{i-1}'(\varphi) \rangle \vec{e}_{i-1}'(\varphi)\|} \quad (3.17)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は内積を表す。そしてこのベクトルの組を再び時間発展させる。この操作を繰り返し、一定時間ごとに接ベクトルの長さを1に戻し直交化させることにより、数値的なオーバーフローなどの問題は避けることができる。この操作の繰り返しにより、リアプノフスペクトラムは、次のように計算することができる。この方法は Shimada et al.(1979) によって報告されている。

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\varphi} \sum_{j=1}^n \ln \|\vec{e}_i(j\varphi)\| \quad (3.18)$$

本節では軌道の近傍点での振る舞いから DF を最適推定し、リアプノフスペクトラムを求める。



球体

楕円体

図 3.14 三次元球の時間的发展

(b) リアプノフスペクトラムによるアトラクターの分類

λ_i のうち最大のものを $\max(\lambda)$ と書くと、解が漸近的にリミットサイクルなどの周期的な軌道をとるときには $\max(\lambda) = 0$ であり、ある定常状態に落ちつく場合は $\max(\lambda) < 0$ となる。

したがって $\max(\lambda)$ が正であるかどうかによりカオスを判定でき、またカオスである場合もその値からどの程度の時間経過後、予測不可能になるかがわかる。図3.15は $\max(\lambda)$ のみでなく λ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) の全て (リアプノフ・スペクトラム) がわかれば、この力学系の振る舞いがどのようなタイプに属するかの分類を示している。リアプノフ指数は力学系の振る舞いを特徴づける指標として最も重要なものの一つである。また、その値を計算することは、非線形力学系の解析結果の正当性の確認につながる。リアプノフ指数の計算式は次の通りである。

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\ln(s_i(t)/s_i(0))/t\} \quad (3.19)$$

ただし、式 (3.19) は数学的定義であって実用的 (現実的) ではない。例えば、 $t \rightarrow \infty$ としてよいのは、 $s_i(0)$ が無限小であるからで、実際の有限の $s_i(0)$ から出発するのでは $\lambda_i > 0$ の場合やがて $s_i(t) \sim$ 系の大きさとなり、それ以降は式 (3.19) で計算される λ_i は 0 に収束してしまい正しい値が求められない。従って、式 (3.19) の定義式より現実的で等価な計算方法にどのように置き換えるか、というのがリアプノフ指数計算方法の問題の核心である。

系の振る舞いを決める方程式があらかじめわかっている場合には、その方程式を用いてリアプノフ・スペクトルを計算する方法がある。また、方程式が全然わかっていない場合でも、結果として N 次元時系列データ X_i ($i = 1, 2, \dots, i$ は時刻を表す) のみを与えられている場合でもリアプノフ・スペクトラムを計算できる。とくに、任意に 1 次元の時系列データ x_i ($i = 1, 2, \dots$) が与えられただけでも、これから d 次元 (d は使用者が

決める)のデータを構成した後に上述の方法を使えば、背後に隠れている力学系のリアプノフ・スペクトラムが求められることになる。

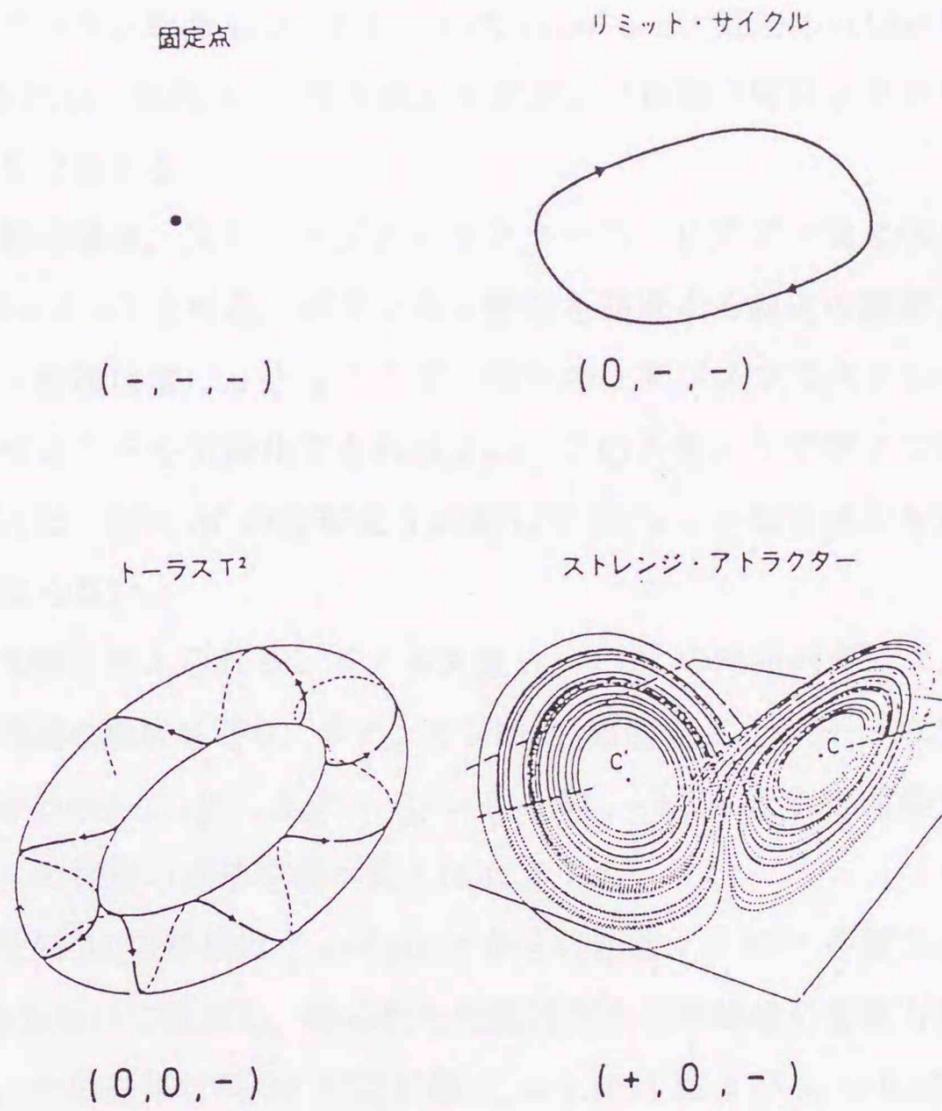


図 3.15 リアプノフ指数によるアトラクタの分類 (Bergé et al., 1984)

(c) 判定結果

カオスであるかどうかを判定するには、リアプノフ指数が正となることを示すことが重要である理由は先に述べた。そこで、本計算から得られるポアンカレ断面上の点群について *fixed point* 近傍の近似線形写像行列 M を求め、行列 M の固有値とリアプノフ指数の関係よりカオス現象の存在を立証する。

3変数の場合、ストレンジアトラクターは、リアプノフスペクトラムの値が $(+, 0, -)$ となる。ポアンカレ断面を通過する軌道の接線方向のリアプノフ指数は常に 0 となるので、残りのリアプノフスペクトラムが正と負になることを明確化できればよい。このとき、リアプノフ指数が正であるとは、行列 M の固有値 λ に対して $|\lambda| > 1$ となる値が存在することに他ならない。

カオス解と考えられるレイノルズ数 $Re = 10^5$ の時系列データより 3次元の時間遅れ構成をとり、ポアンカレ断面(観測点 $X[t + 2\tau] = 0.5$)における *fixed point* $(X_0[t], X_0[t + \tau]) = (-0.35, -0.20)$ 近傍を通過するアトラクターの発散の様子を調べ図 3.16 に示した。

写像行列 M の算出は *fixed point* からの距離 $\epsilon < 10^{-2}$ を満たすデータ点 50 組を用いて推定し、得られた相関行列から平均成分を取り除いて決定した。その結果行列 M の固有値 $\lambda_u = 1.4078$ および $\lambda_s = 0.5922$ を得、 $|\lambda| > 1$ となる値の存在を示すことができた。また図中には、それぞれの固有ベクトルを破線(不安定方向)と実線(安定方向)で示した。

この結果を整理すると、*fixed point* 近傍での初期値から出発した解の軌道は、

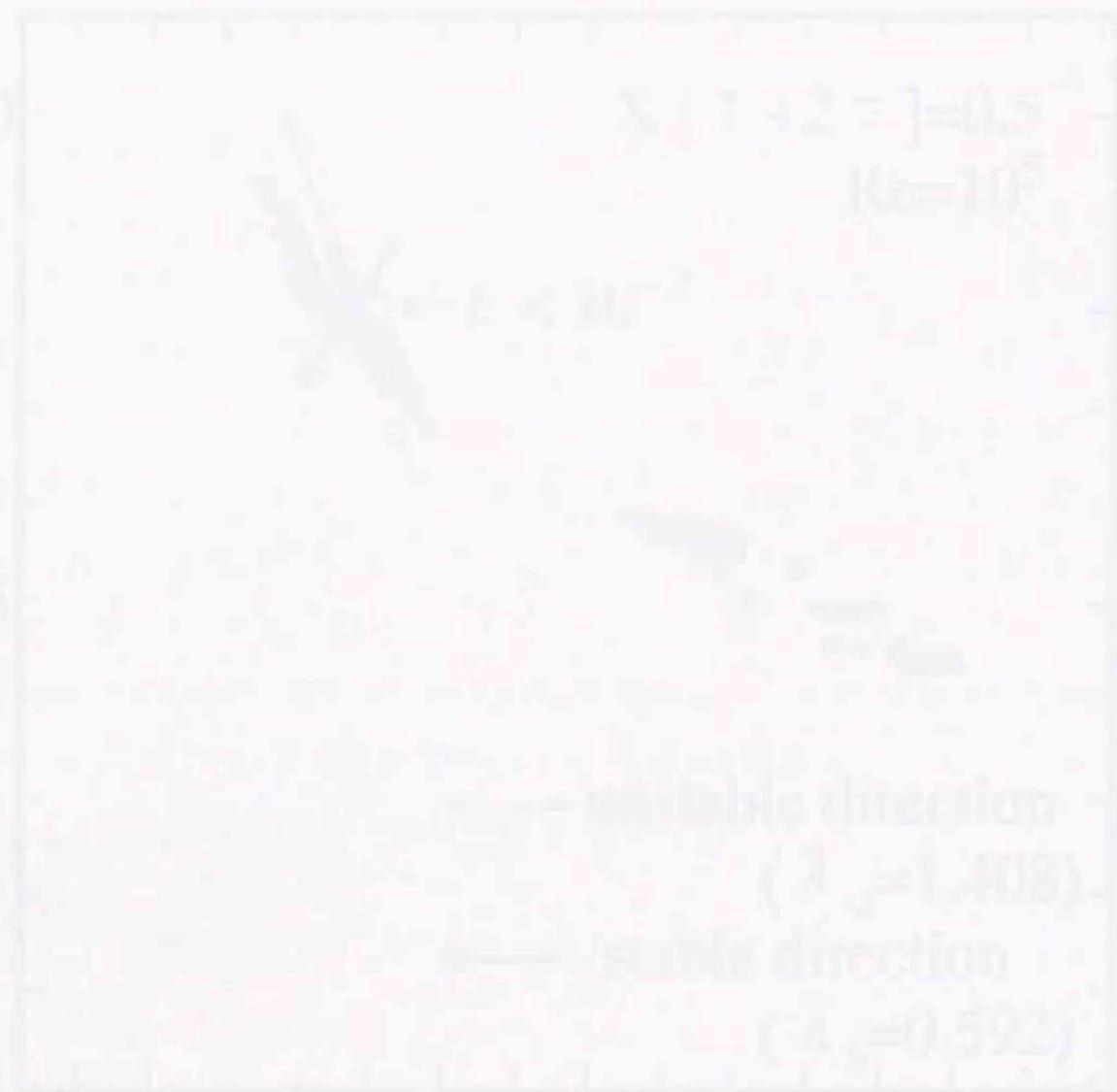
伸張する(リアプノフ指数が正值)場合には、

$$L_u = \lambda_u^n L_0 \quad (|\lambda_u| > 1) \quad (3.20)$$

収縮する(リアプノフ指数が負値)場合には、

$$L_s = \lambda_s^n L_0 \quad (|\lambda_s| < 1) \quad (3.21)$$

のそれぞれの定義式に則って挙動しているといえる。同様のことはレイノルズ数 $Re = 10^6$ の場合でも確認している。



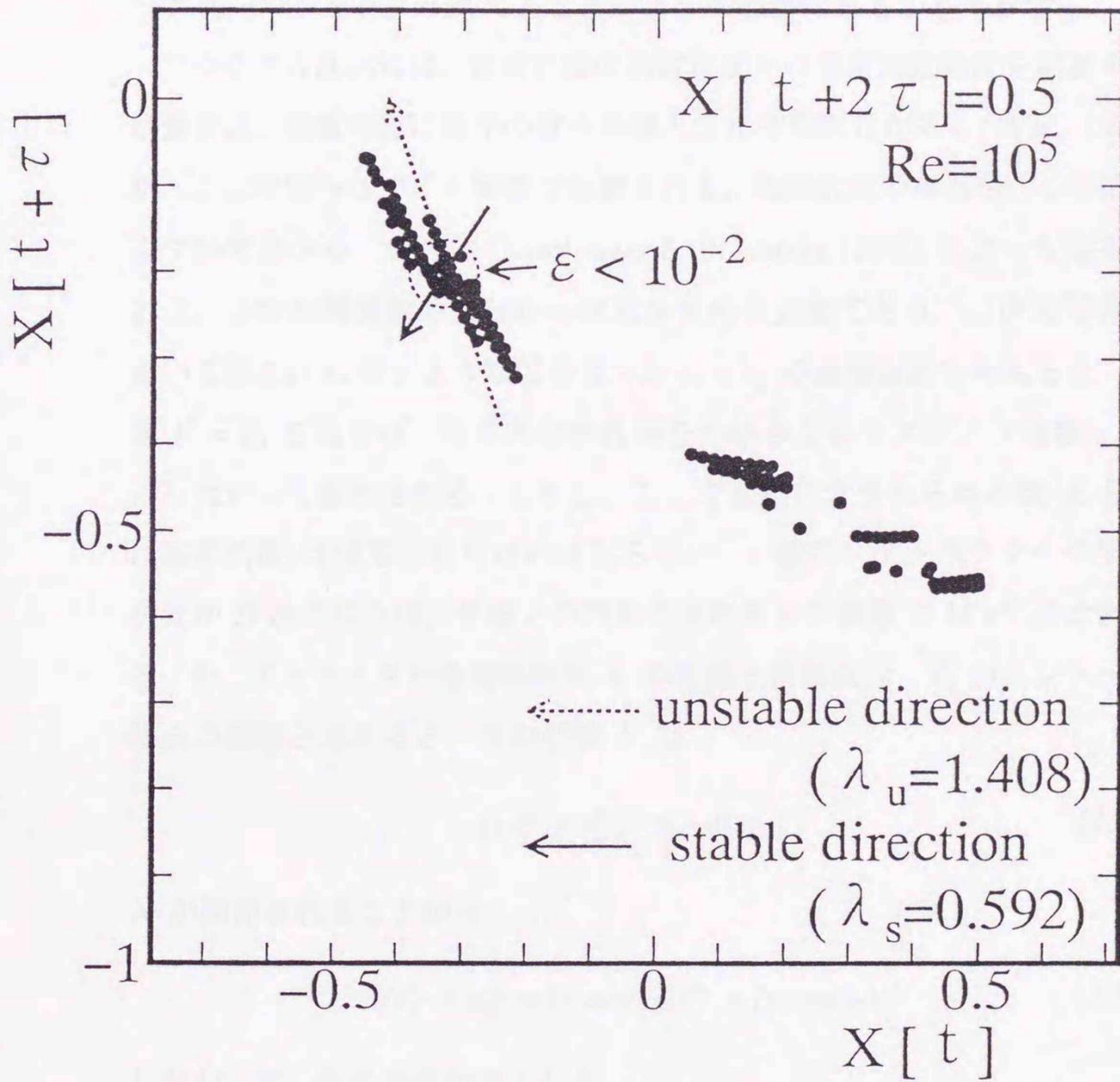


図 3.16 アトラクターの発散の方向と固有値

3.3.2 相関次元の算出

本節では、先に述べたダイナミクスのリアプノフスペクトラムとアトラクターのフラクタル次元とはどのような関係にあるかを考察する。

フラクタル次元には、被覆空間の測定尺度中の測定回数頻度を定義する容量次元、容量次元に確率の重みを導入した情報次元がある(高安, 1987)が、ここではヘビサイド関数で定義される、相関次元の算出を行った結果について述べる。これは Grassberger & Procaccia (1983) によって提案された、2体相関関数の積分から次元を求める方法である。二次元写像において図3.17に示すような辺の長さが $\epsilon_1 \times \epsilon_2$ の面積要素を考えると、写像 $F = \psi_t$ を施せば、各方向の伸長率をつかさどるリアプノフ指数 λ_1, λ_2 にしたがって変形される。しかし、ここで面積に含まれる点の数(あるいは確率測度)は保存されなければならない。一般に、アトラクターの情報次元が D 次元ならば、半径 r の円に含まれる点の個数 N は r^D に比例する。今、アトラクターを情報次元 d_1 の直線と情報次元 d_2 のカントール集合の直積と考えると、点の個数 N は

$$N \epsilon_1^{d_1} \times \epsilon_2^{d_2} (0 \leq d_1, d_2 \leq 1) \quad (3.22)$$

N が保存されることから、

$$N \epsilon_1^{d_1} \times \epsilon_2^{d_2} = (\epsilon_1 \exp \lambda_1 t)^{d_1} \times (\epsilon_2 \exp \lambda_2 t)^{d_2} \quad (3.23)$$

したがって、次の条件が得られる。

$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 = 0 \quad (3.24)$$

全体の情報次元 D は直積であることから部分次元 d_1 と d_2 との和となる。

$$D = d_1 + d_2 = d_1(1 - \lambda_1/\lambda_2) \quad (3.25)$$

通常のスorenジアトラクターでは $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ で、伸びる方向は1次元的と考えられるので $d_1 = 1$ であり、 $D = (1 - \lambda_1/\lambda_2)$ となる。

フラクタル次元の算出方法は、ボックスカウンティングに代表されるがこの方法では容量次元や相関関数 $C(r)$ の算出のために、 N^2 の回数を要し、 N が大きいと計算量が増大する問題点がある。それを避けるためにここではランダムサンプリングの手法をとる。これは乱数を発生させ L 個の点を抽出し、 L 個の各点 (x_k) を中心に他の点との距離を測り累積分布関数 $C_{xk}(r)$ を計算しそれを平均化すればよい。定義の式は次のようになる。

$$C(r) = \frac{1}{NL} \sum_k^L C_{xk}(r) \quad (3.26)$$

相関次元の決定には、埋め込み次元の値によって、傾き ν を調べ、 ν が飽和したときの値を相関次元とする。図 3.18 は $Re=10^6$ の計算結果の時系列について 2 点間の距離を測定し累積分布関数を調べ、 $\log C(r) - \log r$ の関係にプロットしたものである。特徴は、 $C(r)$ は埋め込み次元 p が増えても、傾き ν が一定値に停留する。アトラクターの次元空間の中で、有次元の部分空間を構成していることが、この一定値の停留を生み出している。

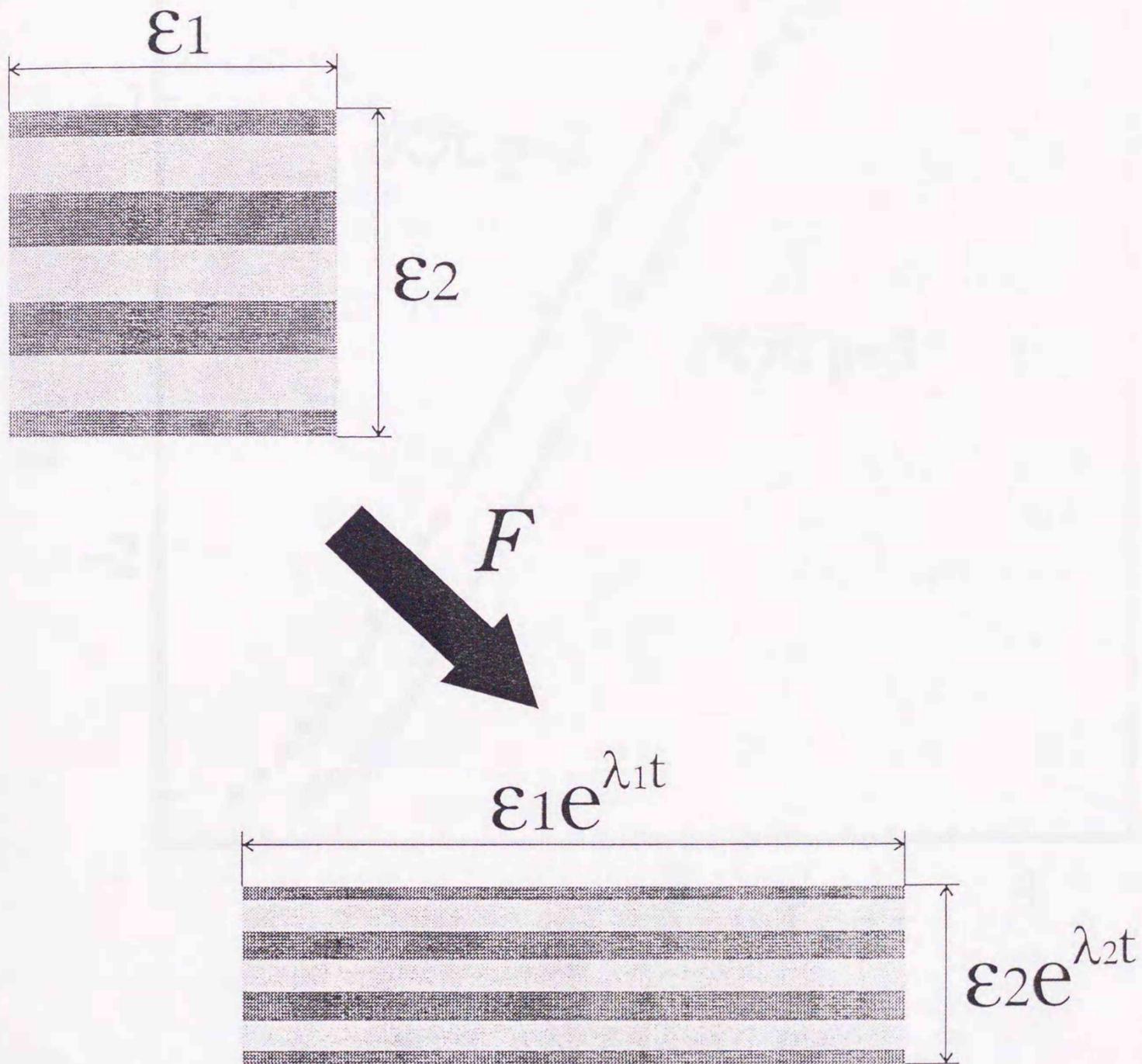


図 3.17 カオスのダイナミクスとフラクタル次元

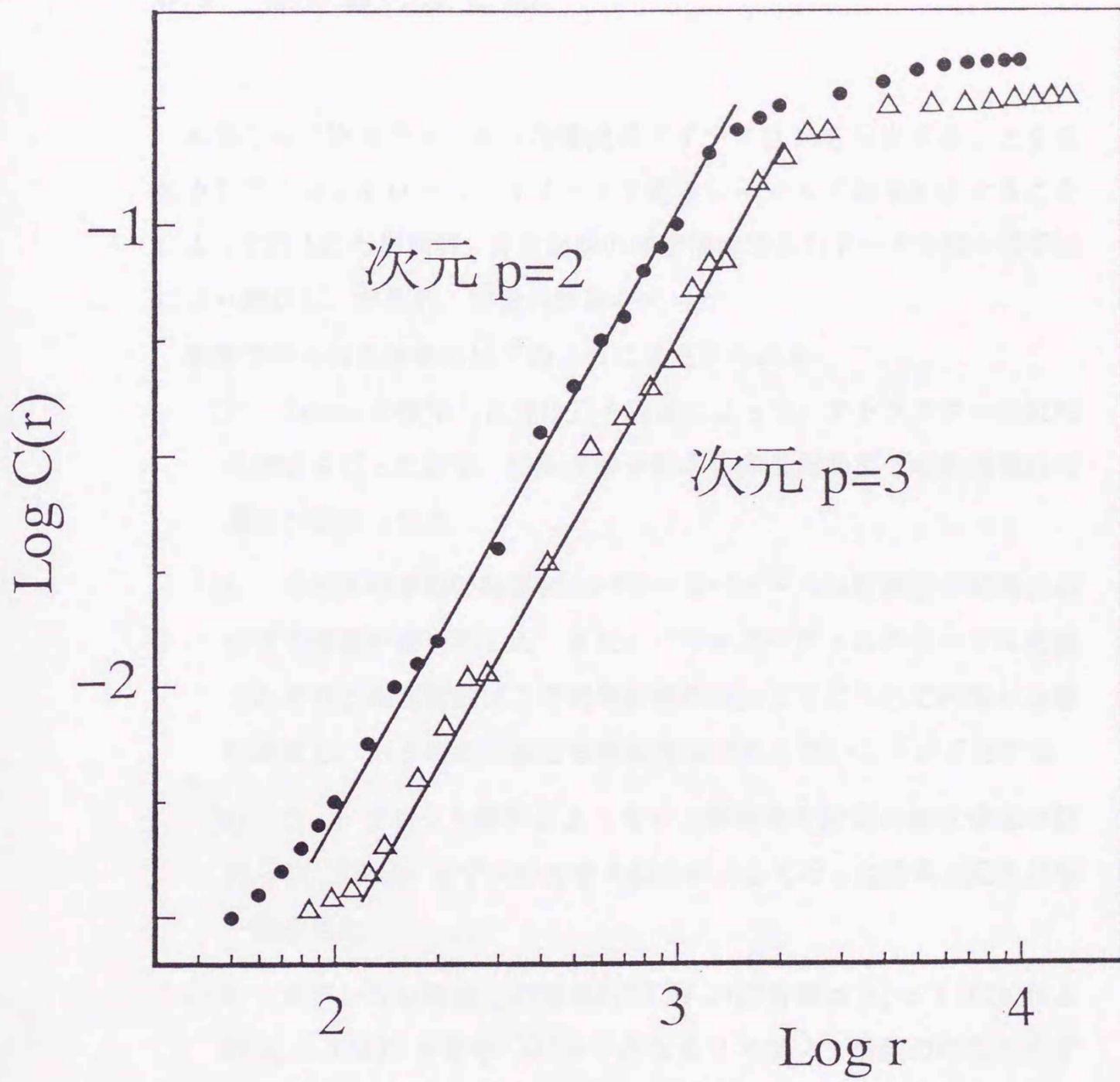


図 3.18 埋め込み次元と $C(r)$ の関係

3.4 第3章のまとめ

本章では二次元チャンネル内噴流のダイナミクスを抽出することを目的として、コントロールパラメータであるレイノルズ数増加にすることによって得られた周期解，非周期解の速度情報時系列データを様々な手法により解析し，定性的，定量的評価を行った。

本章で得られた結果は以下のようにまとめられる。

- [1] Takens の提唱した埋め込み理論によって，アトラクターの位相再構成を行った結果，周期倍増分岐から多重周期型への軌道構成の遷移が認められた。
- [2] カオスの挙動の時系列のパワースペクトルは周波数が高周波成分まで連続分布を示した。また，パワースペクトルのフーリエ変換である自己相関関数は二時刻間の値が増加するにつれて相関が急激に消滅し，ある時刻における相似性は存在しないことが示された。
- [3] ウェーブレット解析によりカオス解特有の階層的樹状構造が認められ，Rössler モデルのカオス解のに対して行った結果と定性的な一致を見た。
- [4] ポアンカレ断面上の写像行列 M の固有値は $\lambda_u = 1.4078$ および $\lambda_s = 0.5922$ となり， $|\lambda| > 1$ となるリアプノフ指数の存在を示すことができた。
- [5] 埋め込み次元から求めた相関次元は，次元 $p = 2$ 以上で既に傾きが飽和状態を示し，その勾配からフラクタル次元が1.226 という結果を得，ヘノンアトラクターのカオスの次元(= 1.26)と近い値を示した。

第4章 OGY法による能動制御

前章では、レイノルズ数に依存する速度変動の不規則性に着目し様々なアプローチにより解析を試みた。特にウェーブレット解析は、速度変動の階層構造を局所的な時間情報を失うことなく抽出できることから、時空間におけるカオス解の存在を定性的に示すことができた。

近年、一見無秩序であると思われる複雑な振動系においても、決定論的カオス理論に立脚した制御の可能性が明らかにされつつある。そして、この分野の研究の最終目的は、従来の確率的手法や統計的手法だけでは厳密に議論できなかった非線形力学系について、高精度の予測制御を実現することにある。これまで幾つかの手法が提案されているが、例えば、カオス理論によって埋め込み次元を算出 (Giona, 1990) し、時系列の中より生成規則を抽出後、既知データから未知データを推定する短期的な予測制御の研究がある (増本ほか, 1995)。そこでは、予測に用いる既知データ数には最適範囲が存在し、データ数を増加するだけでは精度は向上しないことが示された。

これまでの制御というのは、変動現象に限って注目すると工学的観点からどちらかと言えば大半が、非周期解の短期的予測に沿って不規則現象への突入をできうる限り回避するものであった。例えば、崔ほか(1995)は近年の構造物の軽量化や大型化が剛性の相対的低下を招き、振動の励起を抑える十分なダンパーリングが期待できないことから、ジェットアクチュエータの流体噴射を利用した制振制御を二重振子に適用し、振動による予測困難な不規則変動を未然に抑える報告をしている。しかし最近では、不規則性を必然の自然現象として認識し、積極的に非線形力学系に潜むカオス現象を利用する制御の研究も進み、なかでもOGY(Ott, Grebogi, Yorke の名に由来する。)法と呼ばれる制御方法が注目を集めている(Ott et al., 1990), (Ding et al., 1994)。ただしこれまでの成果は、強制振子や弾性座屈系のDuffing方程式などの1自由度系への適用にとどめるのみで

ある(安田ほか, 1995), (朱ほか, 1995).

本章では, 前章で述べたカオスの挙動の特性を利用して, 多次元自由度系の二次元チャンネル内噴流の制御を試みた. そして, 実用的な流れに潜むフリップフロップ現象の非周期運動を OGY 制御のアルゴリズムに沿って安定化させた結果について述べることとする.

本章の構成は以下の通りである.

4.1 節では, OGY 法の基本的な考え方とアルゴリズムについて紹介し, これまでの研究例の概要を述べる.

4.2 節では, 周期安定軌道の探索方法として Poincaré 断面を決定する意味と安定方向・不安定方向固有ベクトルの決定方法について考察する.

4.3 節では, 制御の結果について考察し, OGY 法の制御技術の有効性の検証と制御成功のための固有ベクトルの直交関係について述べる.

4.4 節は本章のまとめである.

4.1 OGY 法の考え方とアルゴリズム

4.1.1 OGY 法の発想とこれまでの研究

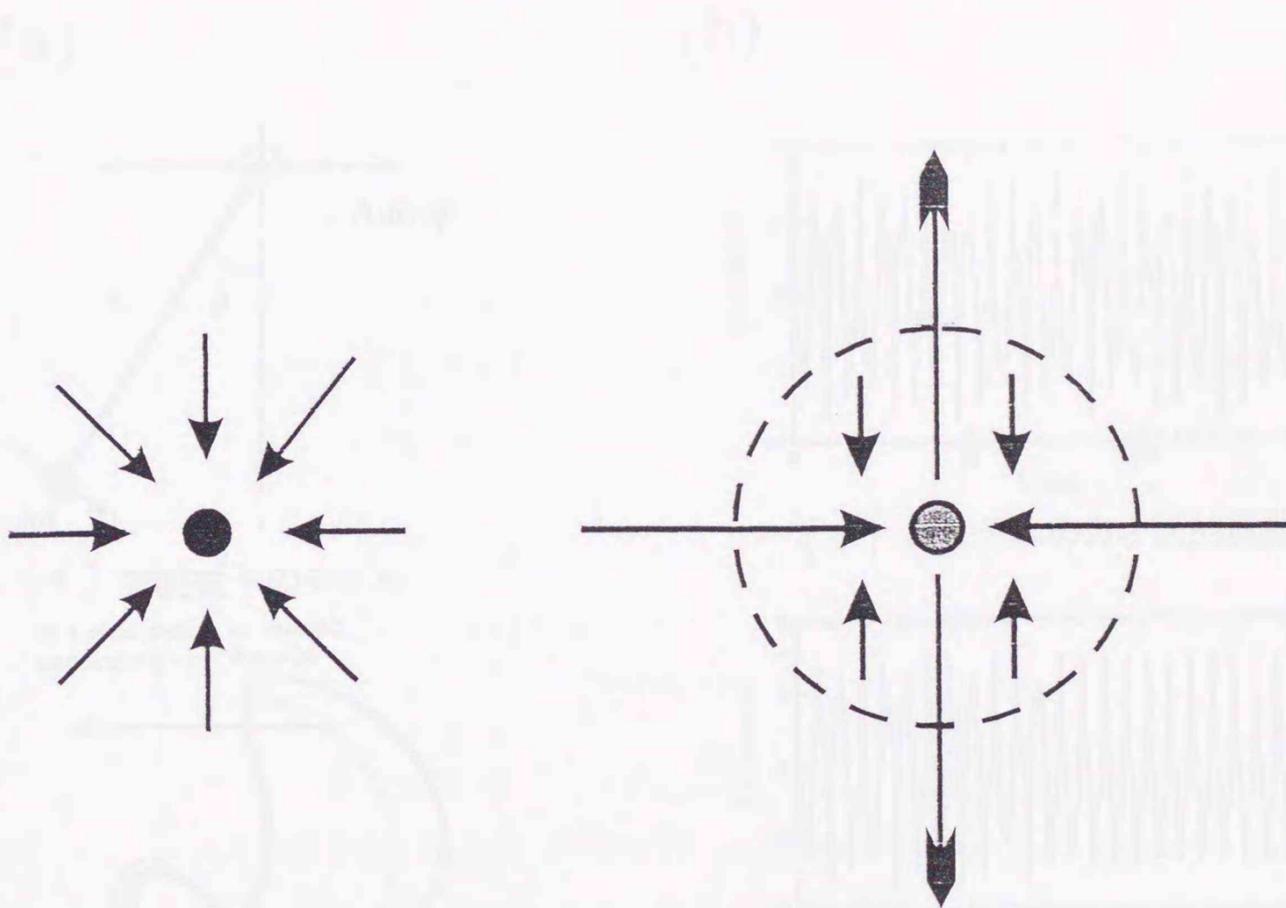
OGY 法の基本的な考え方は、カオス挙動を示す系に対してフィードバック制御を行って軌道の安定化を目指す手法である。従来の制御方法では、図4.1 (a) に示す通り強引に位相空間のすべての方向に対して同じように安定化させていたが、OGY 法は、図4.1 (b) に示す *fixed point* 近傍に軌道が入り込んできたときのみ不安定方向に制御力を作用させ、安定に通過する軌道へ収束させるという決定的な違いがある。

OGY 法の特徴として

1. システムに関する方程式など解析的な知識が不要であること。
2. わずかな外力（摂動）で制御可能なこと。
3. 必要とする制御力は極めて微小であるので、小エネルギーで大きな対象物を制御したり、化学反応系や生体系 (Garfinkel et al., 1992) などの対象物にできる限り影響を与えたくない場合に適すること。

が考えられる (近藤ほか, 1995)。

これまで安田ほか(1994)は、ローレンツアトラクターよりも複雑な様相を呈する非線形力学系である、水平方向に周期的外力の加わる強制振子(図4.2 (a))を対象とした OGY 法適用の研究を行い、周期軌道の目標中心点の探索法の指針を示したが、カオス性の強い領域での適用や制御の安定性についての報告はなされなかった。また、朱ほか(1995)は、古くから弾性座屈系のモデルとしてよく用いられ、最近ではカオス発生システムとして研究が進められている Duffing 方程式に対する OGY 法によるシミュレーションを行っている(図4.2 (b))。しかし、実用に至るには制御開始から制御入力を付加するまでの時間短縮や付加エネルギーの定量化など、今後解決すべき課題を示すにとどまっている。

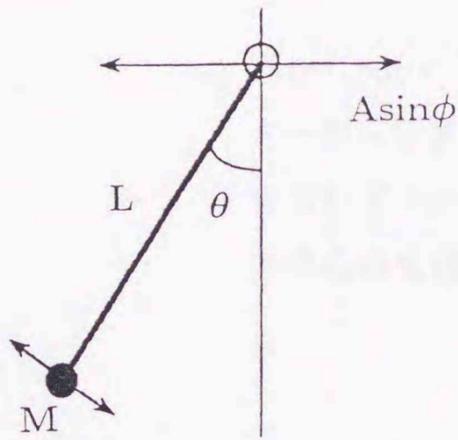


(a) Conventional control

(b) OGY control

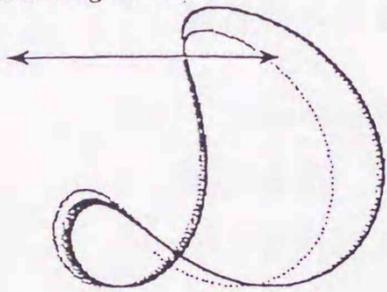
図 4.1 従来の制御方法との比較

(a)

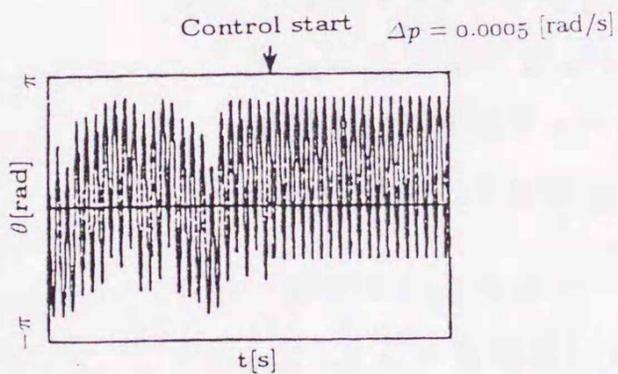


(イ) 強制振子のモデル

A pivot point is moved according to "Asinωt"

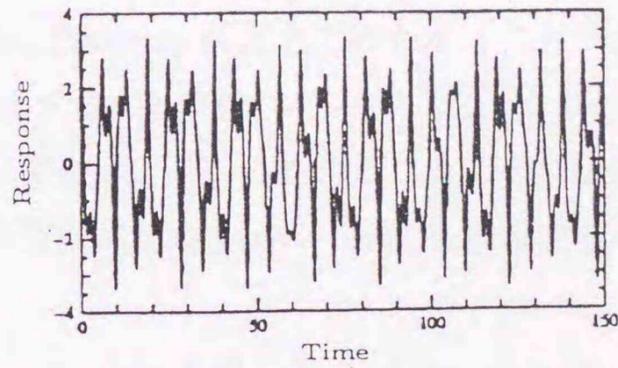


(ロ) OGY制御における振子先端の軌跡

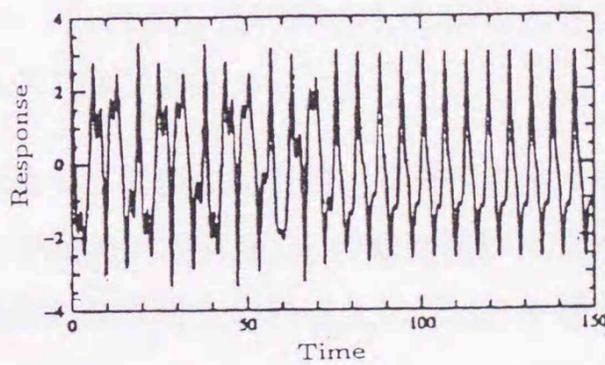


(ハ) OGY制御におけるθの時系列

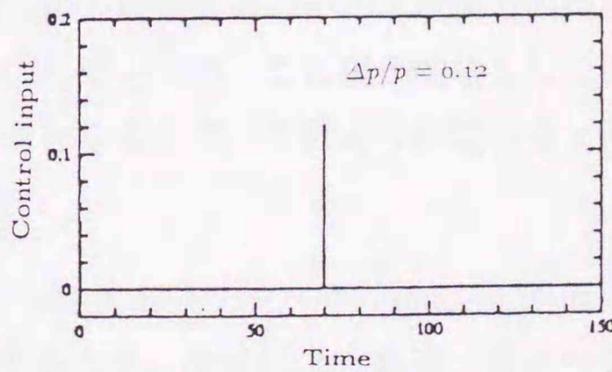
(b)



(イ) システムのカオスの運動



(ロ) システムの安定化した応答



(ハ) 制御入力

強制振子に対するOGY制御の結果

安田ほか(1994)

Duffing方程式へのOGY法適用例

朱ほか(1995)

図 4.2 OGY法適用例;(a) 水平方向加振強制振子
(b) Duffing系座屈モデル

4.1.2 OGY制御の定義方法

OGY 制御のアルゴリズムについて説明する.

- (a) *fixed point* Z_* を求めるために Poincaré 断面上でのカオスアトラクターから任意の周期軌道を抽出する. その際, ノルム $\|\overline{Z_n Z_{n-1}}\| \ll 1$ を満たす Poincaré 写像上の点集合 (Z_n, Z_{n+1}) を選びだし, その軌道の中心点を探索し次式の線形関係式から *fixed point* を近似する.

$$Z_{n+1} = \hat{A}Z_n + \hat{B} \quad (4.1)$$

なお, Z_n は目的変量ベクトル, \hat{A} は共分散行列として得られる係数行列ベクトル, \hat{B} は残差ベクトルである.

- (b) Poincaré 断面上で, 周期軌道中心近傍の固有値, 固有ベクトルを推定する. このとき行列 \hat{A} の安定方向固有値 λ_s の絶対値が 1 より小さければ *fixed point* を通過する周期 1 の軌道の上に Z_{n+1} を落ちつかせることが可能である.
- (c) 制御パラメータを変化させた際, 周期軌道の中心点近傍での移動量 $g (= Z_n - Z_*)$ に対してゲイン K をもち, この積が増幅もしくは減衰された状態フィードバックとなるので, これより制御パラメータの摂動量 ΔP が決定される.
- (d) カオスのエルゴード性に従ってアトラクターが Poincaré 断面の $\|Z_n Z_*\| < r$ を満足して通過するとき, 次式により制御パラメータに *impulsive* に摂動を与えて, アトラクターを制御する.

$$\Delta P = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{\xi_n \cdot f_u}{g \cdot f_u} \quad (4.2)$$

ここに

- ΔP : 制御パラメータに与える摂動量
- λ_u : 周期軌道中心付近の固有値
- ξ_n : 周期軌道中心点を原点とした Poincaré 断面上の点の座標
- f_u : 周期軌道中心点付近の写像行列の転置行列の固有ベクトル
- g : 制御パラメータに摂動を与えた時の軌道中心点の移動量

4.2 周期安定軌道の探索方法

4.2.1 ポアンカレ断面導入の背景と軌道の再構成

(a) ポアンカレ断面導入の背景

多くの力学系は一般に n 個の 1 階常微分方程式系で記述される。

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = F(\vec{X}, t), \quad \text{ただし } \vec{X} \in R^n \quad (4.3)$$

式(4.3)の解が解析的に求めらる場合や近似値として求められる場合は、現象系は積分可能(integrable)となる。しかし、それはきわめて希な場合に限られており、多くの場合は積分不可能(nonintegrable)である。そのときには、相空間の中のトラジェクトリーごとに式(4.3)の解を調べなければならない。この煩雑な手続きを単純化した一つの方法が Poincaré が提唱した切断面をとる手法である。自由度の数は任意である。式(4.3)のトラジェクトリーを R^3 の中で追いかける代わりに図4.3に示したようなトラジェクトリーがある平面と交差する点の軌跡を追いかけるほうが、より重要な知見を得易いことがある。

いま、直行座標系の各成分を x_1, x_2, x_3 として $x_3 = h$ (一定)の面(これを S とする)上に、トラジェクトリー (Γ) が下向きに通過する点 (\dot{x}_3) を P_0, P_1, P_2, \dots として逐次プロットしてゆく。Poincaré の断面 S はどんな面でもよく、以後の解析がやりやすいようにとるとされているが、OGY 制御にあっては、断面上で得られる方向ベクトルが制御の成功の鍵を握るため条件が制約される。これについては4.3節で述べる。この Poincaré 断面上で得られる点列は 2 次元上の一つのグラフである。

ある点から次の点への変換 T は一つの連続写像であり、Poincaré 写像と呼ばれる。

$$P_{k+1} = T(P_k) = T(T(P_{k-1})) = T^2(P_{k-1}) = \dots \quad (4.4)$$

式(4.3)の解が一意性をもつとき、 P_0 を与えると、 P_0 から P_1 へ、 P_1 か

ら P_2 へ, ... と次々に決まってゆく. 逆に式 (4.3) を時間の向きを反対にして解き, 同様に P_1 から P_0 が一意的に決まる場合には Poincaré 写像 T は逆行可能 (invertible) であるという. これからわかるように Poincaré 断面の方法は式 (4.3) の連続時間変化を式 (4.4) のような離散時間の写像に書き換えるものである. 本章では, Poincaré 写像を線形近似する写像行列を推定して OGY 制御を行う.

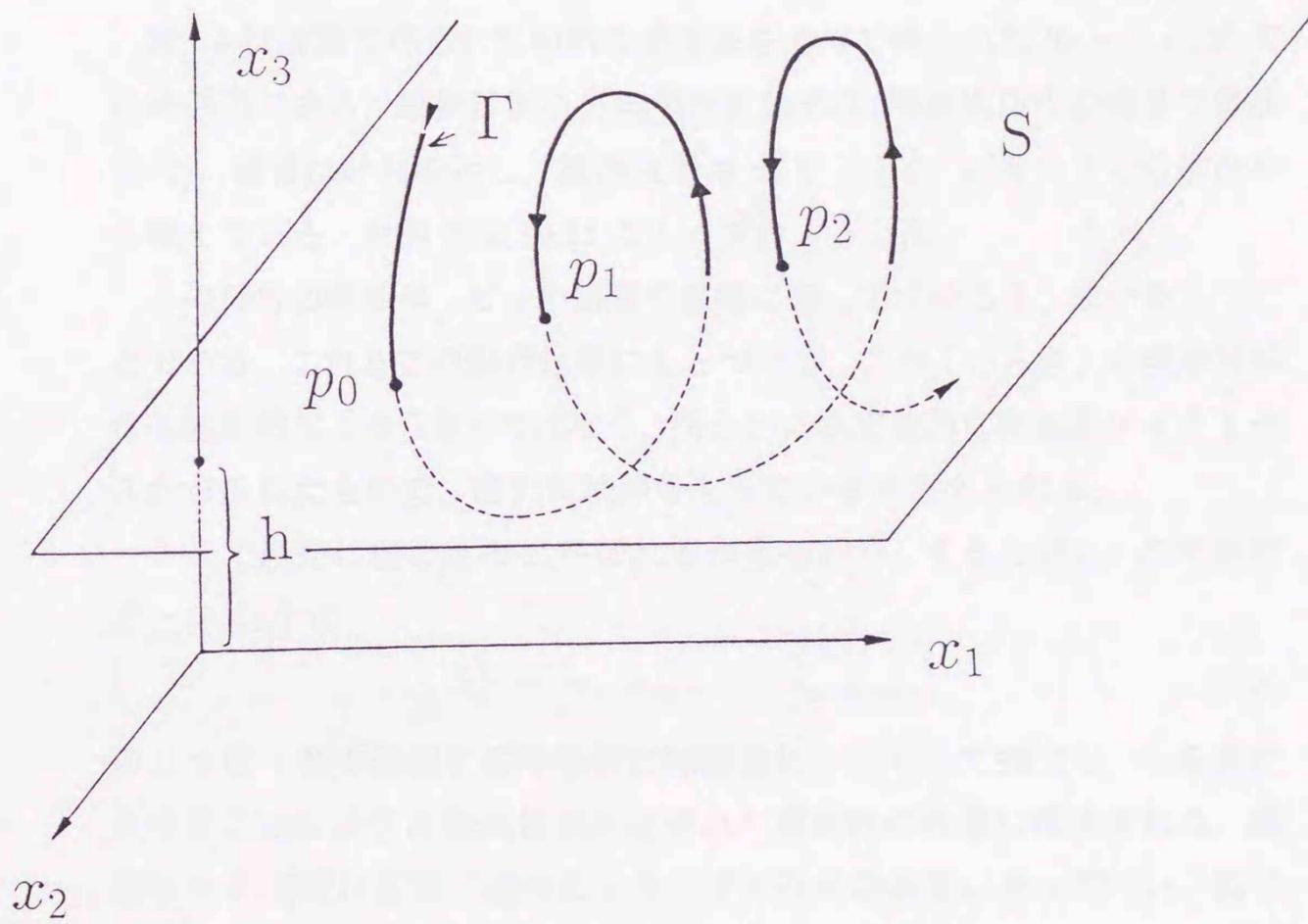


図 4.3 Poincaré 写像のトラジェクトリー

(b) 軌道再構成の意義

二次元チャンネル内噴流の周期解から非周期解へ移行する遷移臨界レイノルズ Re_c は、第2章で詳しく述べたように、計算の結果 $Re_c = 5 \times 10^3$ 付近に存在している。よって、 Re 数がこれより高ければ、第3章で確認されたように流れ場内に非周期性が現れ、流れの偏流をつかさどるフリップフロップ現象の予測は困難なものになる。

図4.4は計算で得られた初期の過渡域を過ぎて得られた $Re = 5 \times 10^4$ の時系列である。縦軸は流れ方向垂直変動速度(噴流出口中心速度で無次元化)、横軸は時刻を示し、観測位置は $x/H = 2.0$, $y/H = 0.0$ の噴流中心軸上である。計算点は $10\Delta t$ ごとにプロットした。

この信号の特徴は、ピッチ間隔や振幅に関して「ゆらぎ」成分をもつことである。これまでの解析結果にもとづけば、この「ゆらぎ」の現象は単なる統計的な「ゆらぎ」ではなく、明らかに決定論的な非線形ダイナミクスから生じたもので、隠れた秩序をもっていると考えられる。

そこで最初に埋め込みと呼ばれる作業を行う。すると図4.4の時系列データ $\{x_i\}$ は

$$h_n^{(k)} = (x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(k-1)\tau}) \quad (4.5)$$

のような k 個の連続する時系列に時間遅れ τ を与えて抽出し、 n を変化させることにより k 次元に埋め込まれた空間内の軌道に構成される。最適な n の判定は前章に述べたフラクタル次元の結果にそって行い、むやみに大きくとることは望ましくない。

対象とする力学系本来の次元を d とすると

$$k > 2 \times d + 1 \quad (4.6)$$

の関係を満たせば系の規則が k 次元空間内に埋め込まれることが証明されている。ただし時間遅れ τ の最適値は、時系列 $\{x_i\}$ の性質に依存するのでいまのところ経験的に決めるほかはない。

図4.5は時系列データ $\{x_i\}$ を正規化し、再軌道構成によって多次元位相空間における軌道を $k = 3$ の次元空間に対して投影して得られたアトラ

クターである。この図から判るように軌跡は厳密な *fixed point* を通過することがなく、周期律の定まらない不安定な軌道となっている。しかし、多様体構造として安定なアトラクターが形成されている。

次に Poincaré 断面を作成する。これはアトラクターの性質を定量的に特徴づけることを目的としており、*fixed point* の推定とその近傍領域における線形写像関係を調べ上げることに他ならない。

Poincaré 断面上の *fixed point* Z_* の近傍領域 σ では $Z_* = F(Z_*, p_0)$ の微分同相写像となっており三次元空間中のベクトル場の解曲線の挙動を二次元平面のダイナミクスとして還元される。

解析可能な断面は三次元方向それぞれに幾つか考えられるが図4.6に $x_{n+2\tau} = 0.6$ における $\xi_n(x_n, x_{n+\tau})$ の二次元平面を $\frac{dZ_{n+2\tau}}{dt} > 0$ の向きに通過する点群を示す¹。カオスの挙動の場合は、点群の写像関数の *fixed point* における傾きは -1 より小さいため、*fixed point* は不安定で写像上の軌道を不規則に往来する。すなわち固有の写像は、三次元解曲線が Poincaré 断面で n 回目に交錯すると、周回して次の $n+1$ 回目に交錯するべき断面上の座標を決定する。ストレンジアトラクターは *fixed point* 周りでの回転行列 M_τ の最大絶対値が 1 より大きい実数の固有値を持つことを第3章で述べた。本解析結果からもカオスの挙動の場合は、アトラクターがリミットサイクルの形には収束せず、Poincaré 断面上を常にさまよい続けるというこれまでの報告と一致を見た。

点群が稠密になる領域は座標空間 ξ_n の $\xi_n(0.3, 0.3)$ 付近に存在しているが、OGY 制御を十分機能させるためには ξ_n の座標値を用いて式(4.2)から摂動量 ΔP を算出しなければならない。したがって、*fixed point* ξ_0 を正確に決定することが重要となる。これについては次節で詳しく説明する。

¹図中の矢印等については次節で詳細に述べる

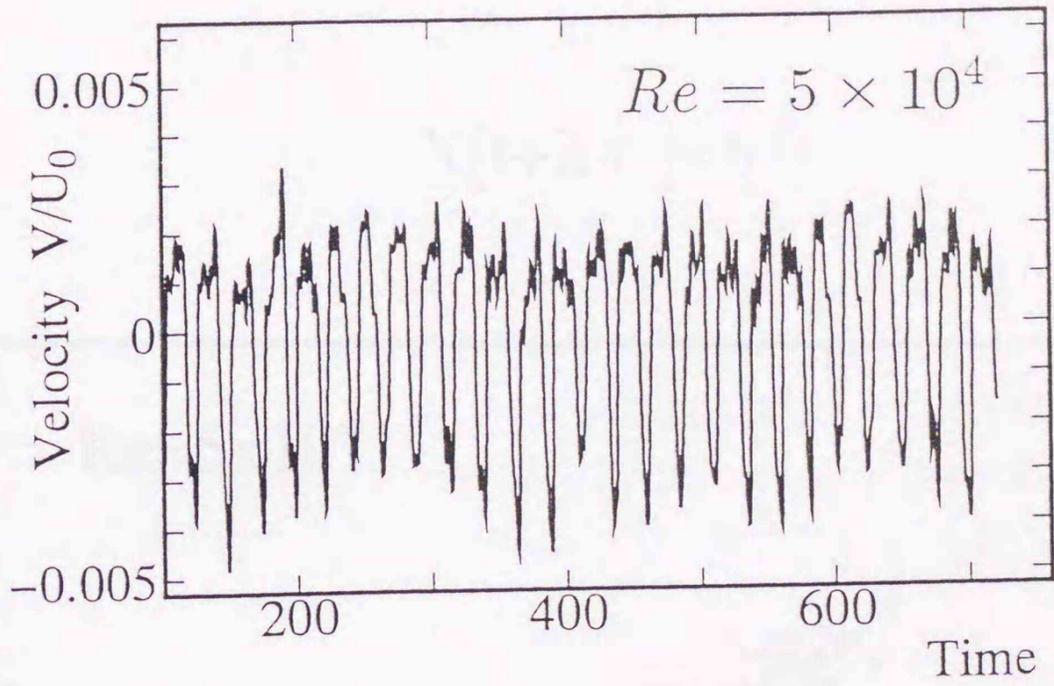


図 4.4 カオスの速度時系列

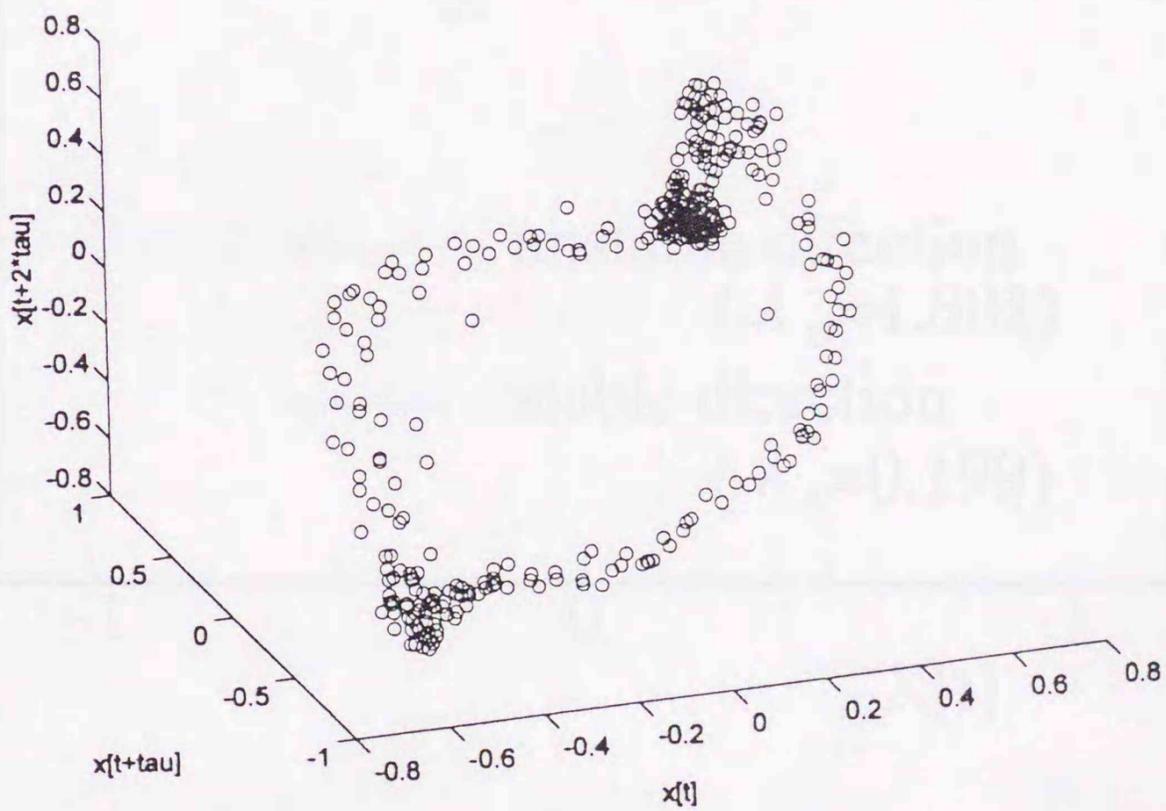


図 4.5 被解析ストレンジアトラクター

$$X[t+2\tau]=6.0$$

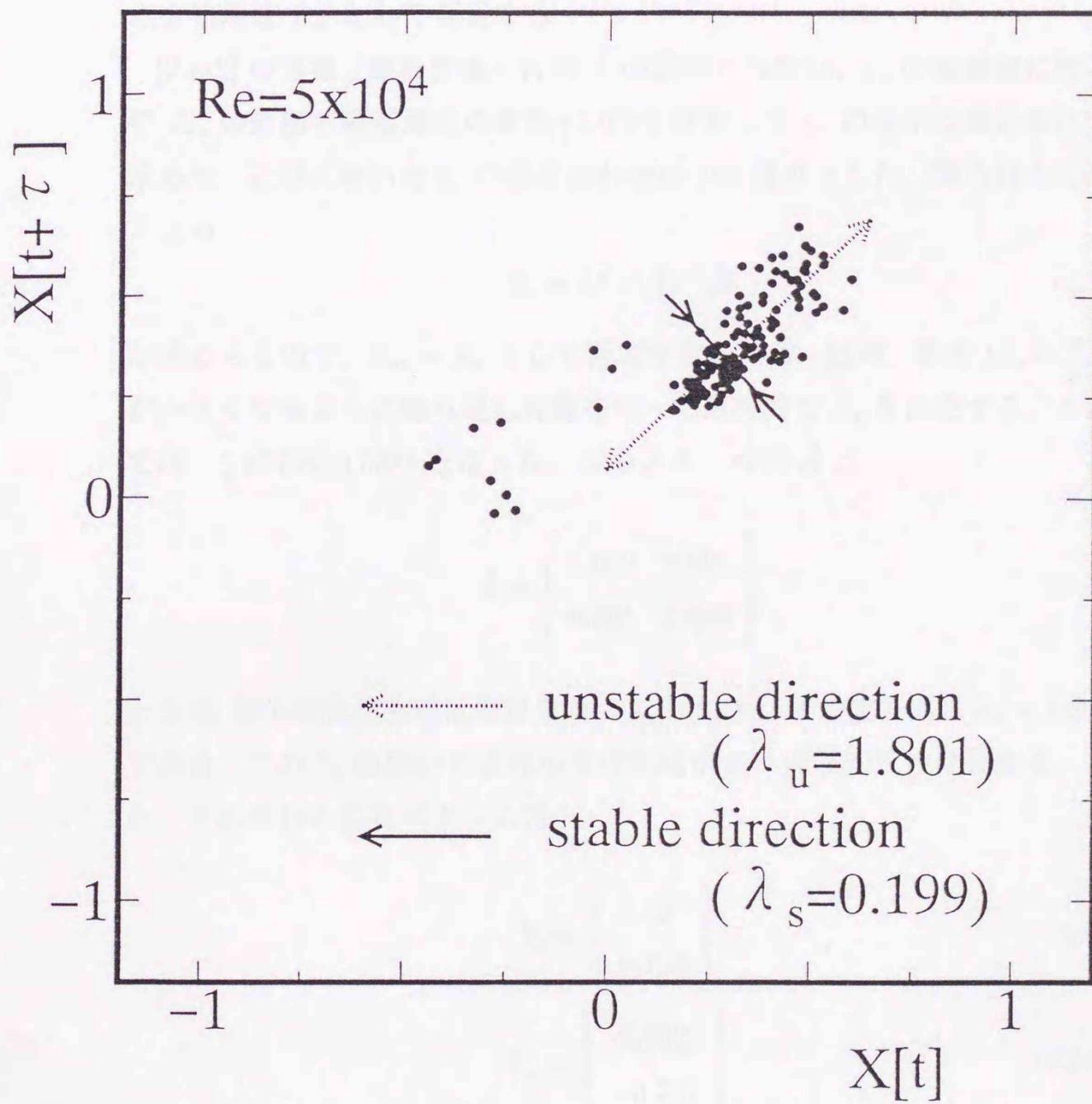


図 4.6 制御点探索のための Poincaré 断面

4.2.2 写像行列の固有値と固有ベクトル

本計算結果に対する写像行列の共分散行列と固有ベクトルの決定方法について述べる。本研究のカオスの軌道から周期軌道の中心座標 Z_* を求めるために封じ込めるべきリミットサイクルの Poincaré 断面上の任意の点を初期値 Z_{*s} として仮定する。

$[2 \times 2]$ の写像（線形変換）行列 \hat{A} の成分の決定は、 ξ_n の座標値に対して Z_{*s} の近傍で軌道直径の誤差 $\pm 3.0\%$ を許容して ξ_n の最小二乗近似にて求めた。近似に用いた ξ_n の組み合わせは 100 通りとした。得られた行列 \hat{A} より

$$Z_* = (I - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad (4.7)$$

が求められるので、 $Z_{*s} = Z_*$ として再度推定を行う。結局、誤差 $|Z_* - Z_{*s}|$ が小さくなるように繰り返し計算を行って最終的な Z_* を決定する。ここでは、 $\xi_i (0.322, 0.338)$ となった。このとき、行列 \hat{A} は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.801 \\ 0.801 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

となり、得られた固有値は安定方向に $\lambda_s = 0.199$ 、不安定方向に $\lambda_u = 1.801$ である。この λ_s の値が 1 より小さければ小さいほど安定性は強まる。また、それぞれの固有ベクトルは

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$V_u = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

となる。

図 4.6 の点群に計算された固有ベクトルの安定方向を実線、不安定方向を破線の矢印で表示した。よって制御された場合にはポアンカレ断面上のバラついた点の分布は安定方向の固有ベクトルに則って直線化され、周

期軌道が維持される. なお, *fixed point* の定義できる Re 数には範囲もしくは限界があると推察されるが, このことについては本論文では触れない.

4.3 制御結果

4.3.1 制御された時系列と摂動パラメータ

非線形のシステムを次式で構築されるものとみなす.

$$Z_{n+1} = F(Z_n, P) \quad (4.11)$$

ここで, Z_n は n 周期目の二次元の列状態ベクトル, P はカオス発生に最も大きな影響を及ぼす制御パラメータで, 本研究ではレイノルズ数に相当し, この変化量が速度変動に認められる微小な摂動量として作用する. 制御の観測点は $x/H = 3.0$ の噴流中心軸上とした. この位置を選んだ理由は,

- (a) 噴流両側に非対称な剥離再循環領域が形成され, 速度変動の周期および非周期現象を把握しやすいこと.
- (b) ポアンカレ断面から得られた制御量がカオスの挙動の制御に最も威力を発揮した.

などによる. $x/H = 3.0$ で入手された時系列データを位相空間上で解析し, 入力すべき ΔP および時刻とを決定して実際の制御位置(噴流流入部)に状態フィードバックの制御入力を与えられる. 制御入力量 W ($W = \Delta Re$) の定義は

$$W = \Delta P \cdot \nabla^2 V \quad (4.12)$$

であり, ∇ はベクトル演算子である.

図4.7に $Re = 5 \times 10^4$ においてOGY制御したときの時系列データの変化の様子を示す. 明らかに, 制御された信号はほぼ周期的秩序をもって安定化しており, 朱ほか(1995)によってDuffing系へのOGY制御を適用した報告と定性的な一致を見せている. なお, 制御後の信号は速度変動の負の方向に弱い傾きをもって振幅が微小に増えており, 更に時間が経過すると, おそらくは再び不規則性が復活してくることが予想される.

フィードバック制御の効果が現れるには制御点と観測点との距離の影響から時差が生じる。図4.7から確認される様に、制御開始時刻から安定化の開始までおよそ無次元時間 75 の遅れを要することが示された。これらの解析結果を基に、ポアンカレ断面の Z 近傍通過時刻が制御最適時刻であると判断し、ここでは W を瞬時に入力した。

図4.8は縦軸に OGY 制御の前後における時系列の乱れ度をそれぞれ S_u , S_c として算出した信号の安定度 ΔS ($\Delta S = \frac{S_c - S_u}{S_u}$)、横軸に摂動量 $\Delta P/P$ の大きさをとり、制御の最適摂動量を示したものである。この結果から、 $Re = 5 \times 10^4$ に対しておよそ 6% の大きさで最も安定することが分かり、この程度の摂動（制御入力）によって制御が十分可能であることが確かめられた。

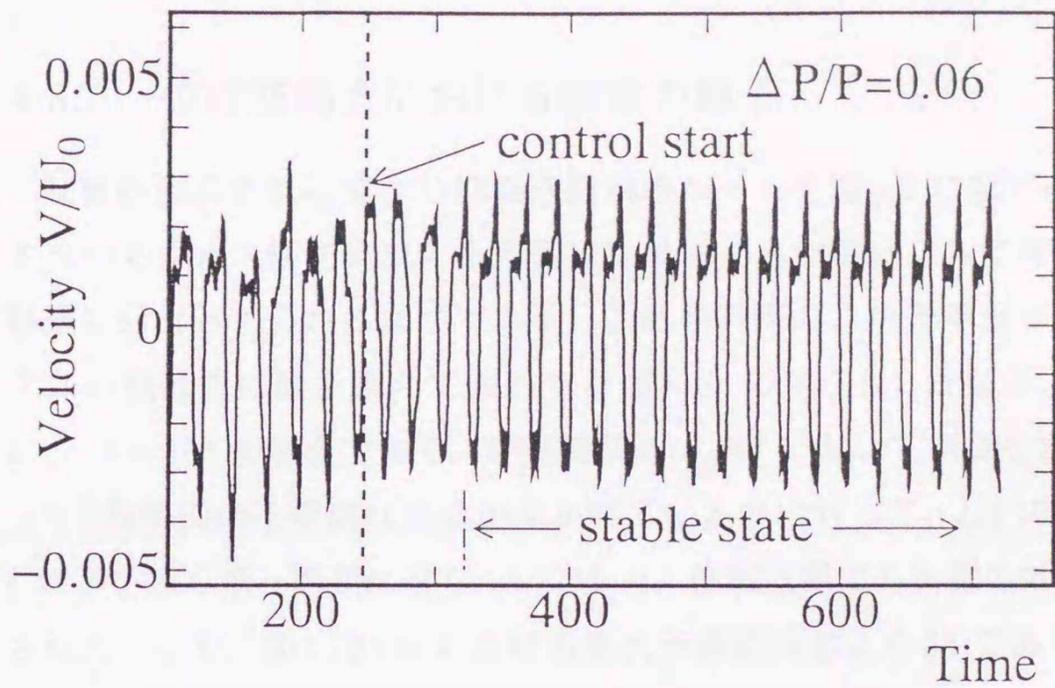


図 4.7 制御された速度時系列

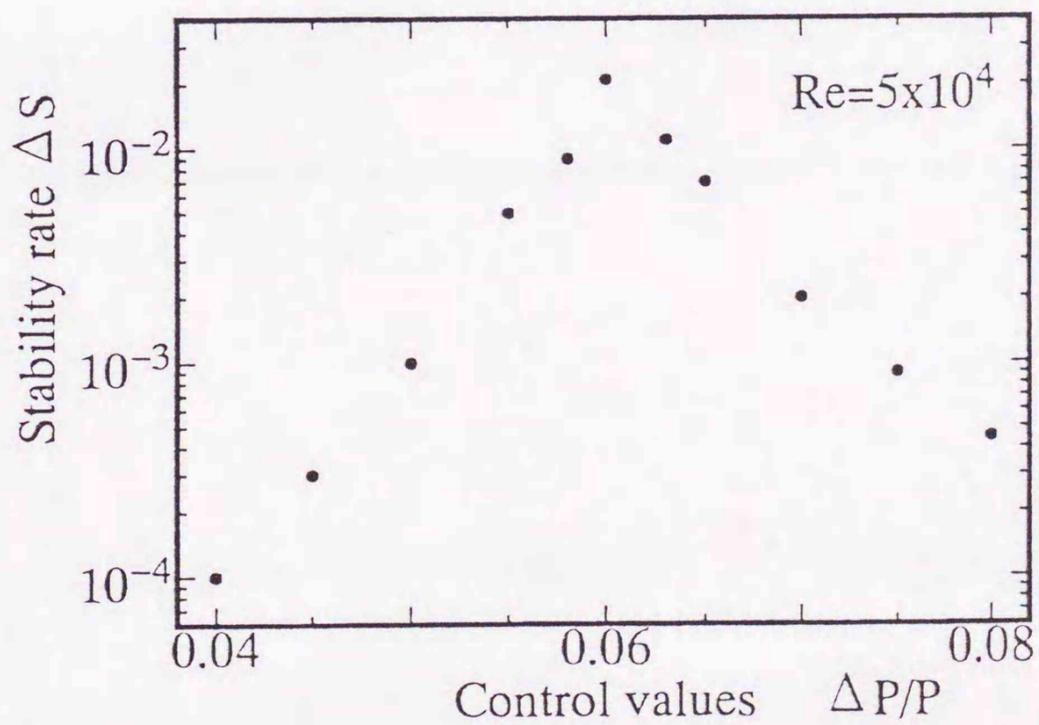


図 4.8 最適制御パラメータの特定

4.3.2 位相空間上における制御の様子

制御が達成される場合の位相空間内のルートを図4.9に模式的に示す。すなわちカオス解を構成する不安定な軌道から制御によって唯一の周期軌道に封じ込められるはずである。これを実際の二次元平面のダイナミクスの軌道図に置き換えて表わすと図4.10の(a),(b)となる。これは、 $Re = 5 \times 10^4$ の場合であり、計算時刻 $t = 249$ において制御を開始した。(a)は制御前の不規則な軌道が描かれているのに対して、(b)では単純な8の字を描く単一周期に落ちついており、位相空間でも制御の効果が確認された。なお、図4.10(b)における無次元周期はおよそ36である。

制御の目的からすると希望する軌道に封じ込められているか否かの検討が必要であるが、ここでは評価方法の一つとして軌道の接線方向ベクトルの比較を行った。その結果、図には示さないが $t = 249$ 前後でのポアンカレ断面通過時の軌道の方向ベクトルと、安定した単一周期の場合の方向ベクトルとが一致することが確認された。

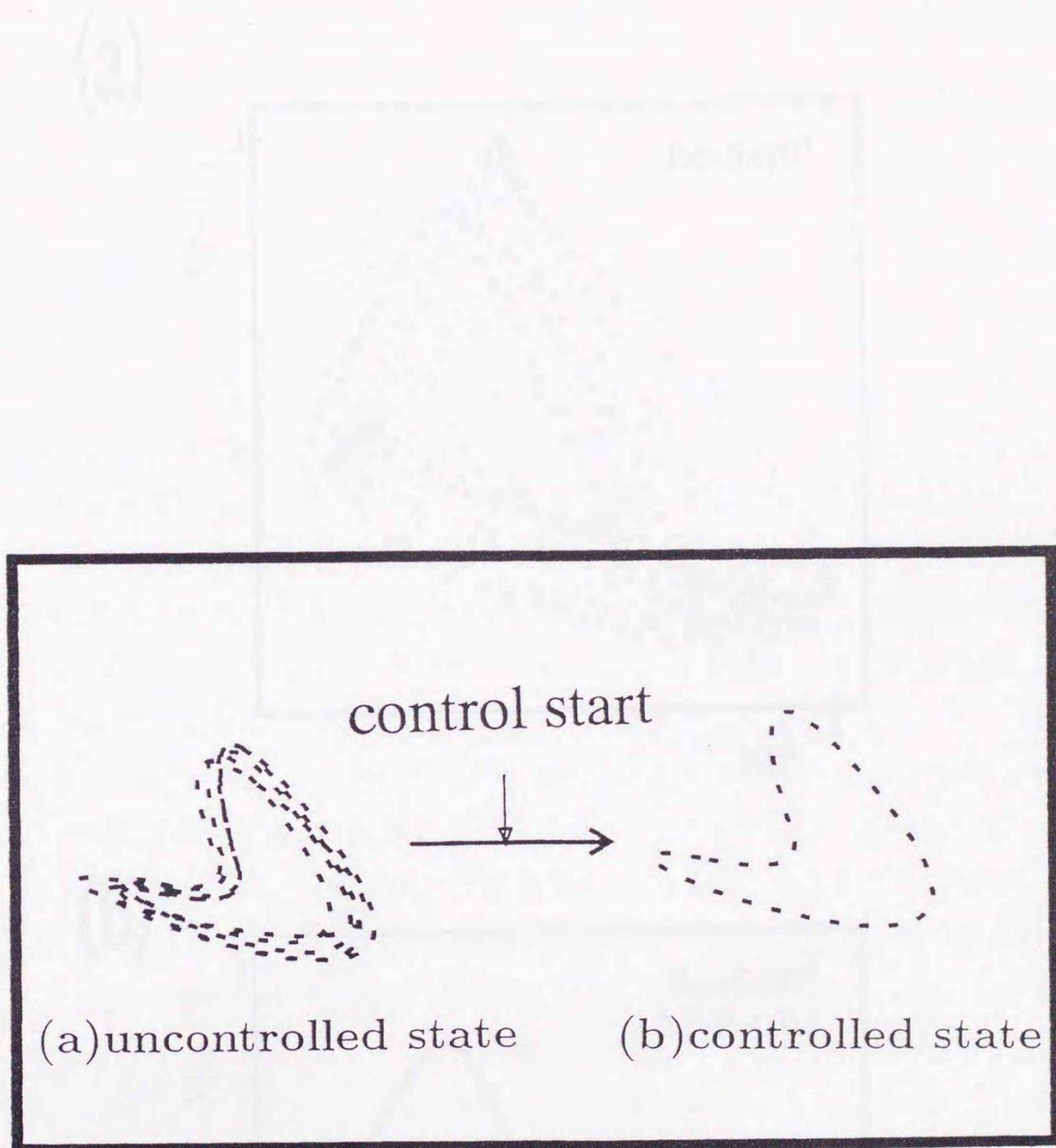
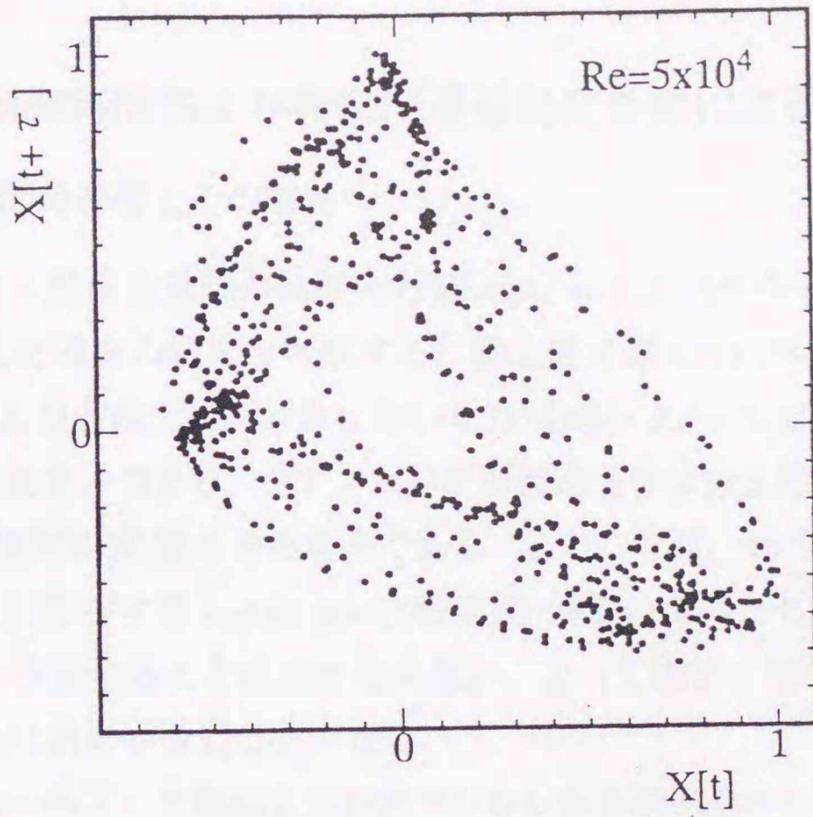
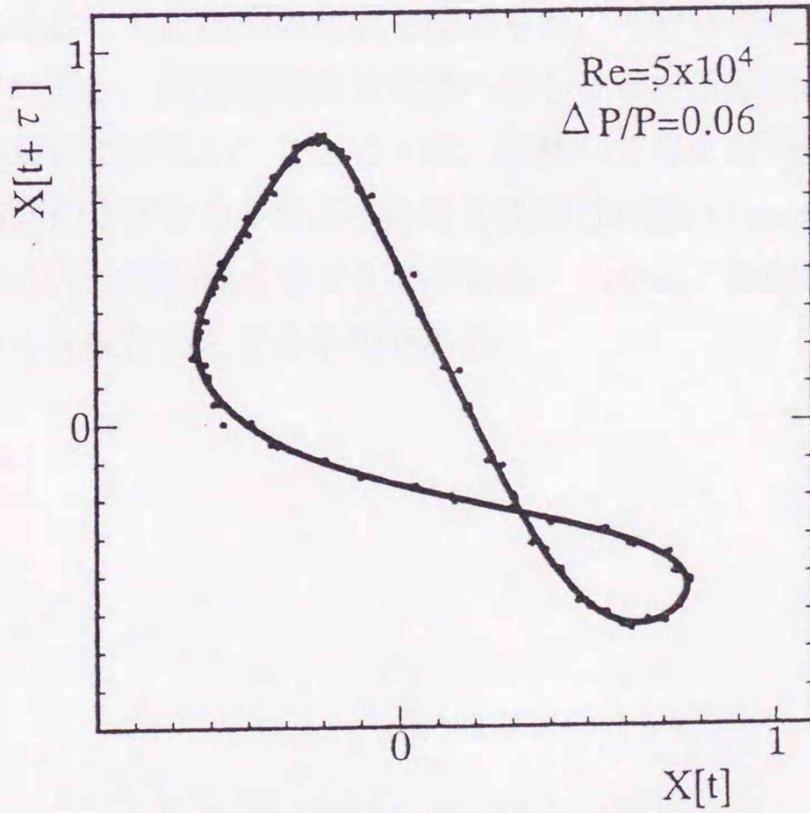


図 4.9 制御理論にもとづく概念図

(a)



(b)



OGY制御されたアトラクター

図 4.10 制御前後の位相図;(a)制御前の不安定軌道 (b)制御後の安定軌道

4.3.3 制御時間および制御域通過判定条件による影響

(a) 制御時間の影響とその効果

ポアンカレ断面通過時の制御入力を *impulsive* 入力から *nonimpulsive* 入力に変えた場合の結果を考察する. 概念図を図4.11に示す. ここでの *impulsive* 入力とは, 流れ計算に用いた時間刻み $\Delta t = 0.025$ を最小とする有限値である. つまり, ポアンカレ断面通過前後のある範囲にわたって制御力を連続的に作用させた場合である. このことは, セパラトリックスの交差点上に存在する *saddle point*(鞍部点) 通過の瞬間とその前後の時間に制御力が作用することにほかならない. よって厳密には二次元空間での写像関係に誤差を含むこととなる.

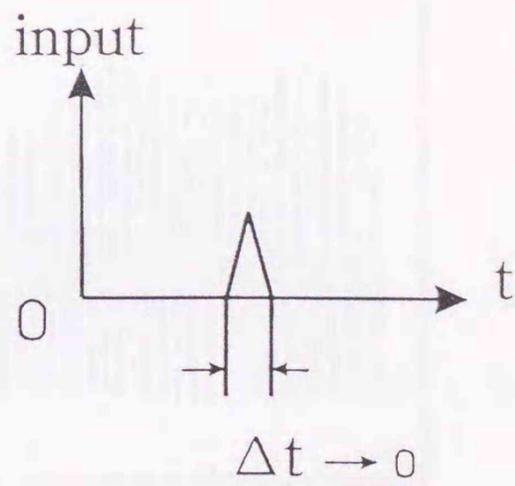
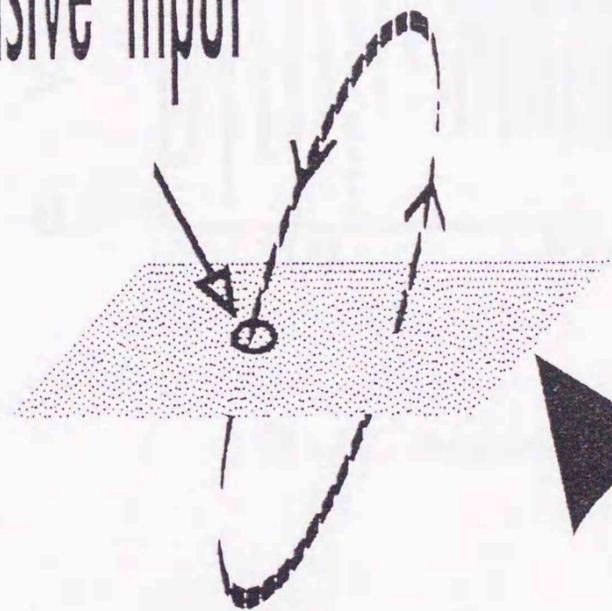
図4.12 は一例として制御入力をポアンカレ断面通過前後の $\pm 10dt$ ステップ(無次元時間で 0.48) 継続して与えたときの結果である. 制御の付加が終了しておよそ 70 時間ステップ経過すると, 制御前とは異なる周波数の振動が現れるとともに振幅の変調も認められ, 十分な制御結果が得られていない. ただし, 再度制御前の状態へ戻ろうとする傾向は解析の範囲内では認められていない. このことは, 継続して与えた時間に通過する $X[t+2\tau]$ 方向のポアンカレ断面中の最も吸引力の強い *fixed point* に軌道が封じ込められた可能性を示すものである. しかし, 振幅の変調との関連性については現在のところ不明である.

(b) 制御域通過判定条件の影響とその効果

図4.13に *fixed point* 近傍通過条件 $\|Z_n Z_*\| \leq r$ における r の値を図4.7の場合 ($r = r_*$) よりも5倍に広げたときの時系列信号を示した。制御が有効に機能している時間が短くなっており、 $t = 480$ 付近では制御が破綻して制御前のカオス状態に戻っていることがわかる。この原因としては、 r の拡大により係数行列 \hat{A} の固有値とその固有ベクトルの方向には空間的な誤差を含くむために線形写像域が変化し、一度安定方向に制御されても時間の経過につれて写像によるずれが増大し、 $\|\xi_{t+1} \cdot f_u\| \neq 0$ となって安定方向の軌道に乗ることができなくなったためと考えられる。いずれにせよ制御入力の大きさのみでなく、与えるタイミングの選択も重要であることは明らかである。

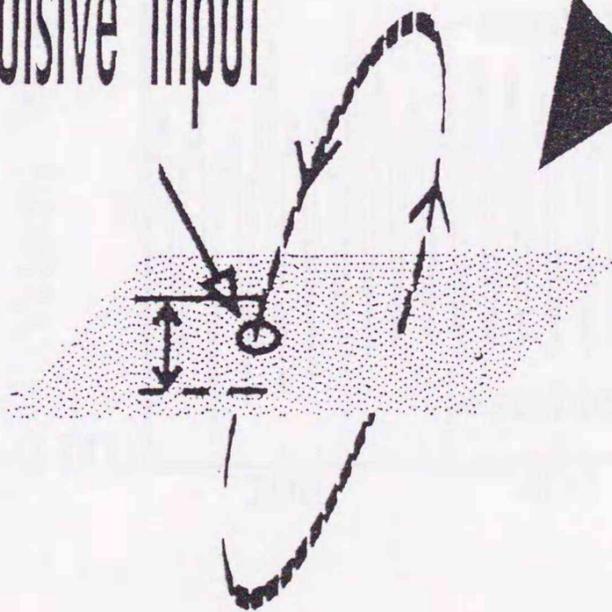
(a)

Impulsive input



(b)

Nonimpulsive input



Poincaré section

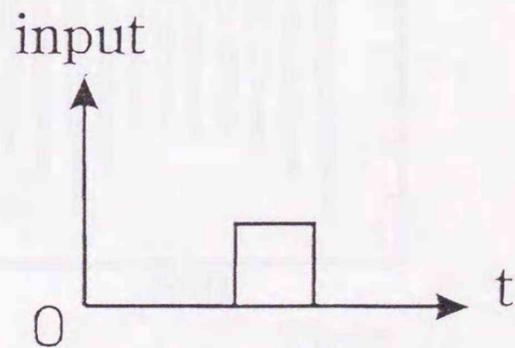


図 4.11 *nonimpulsive* 制御の概念図

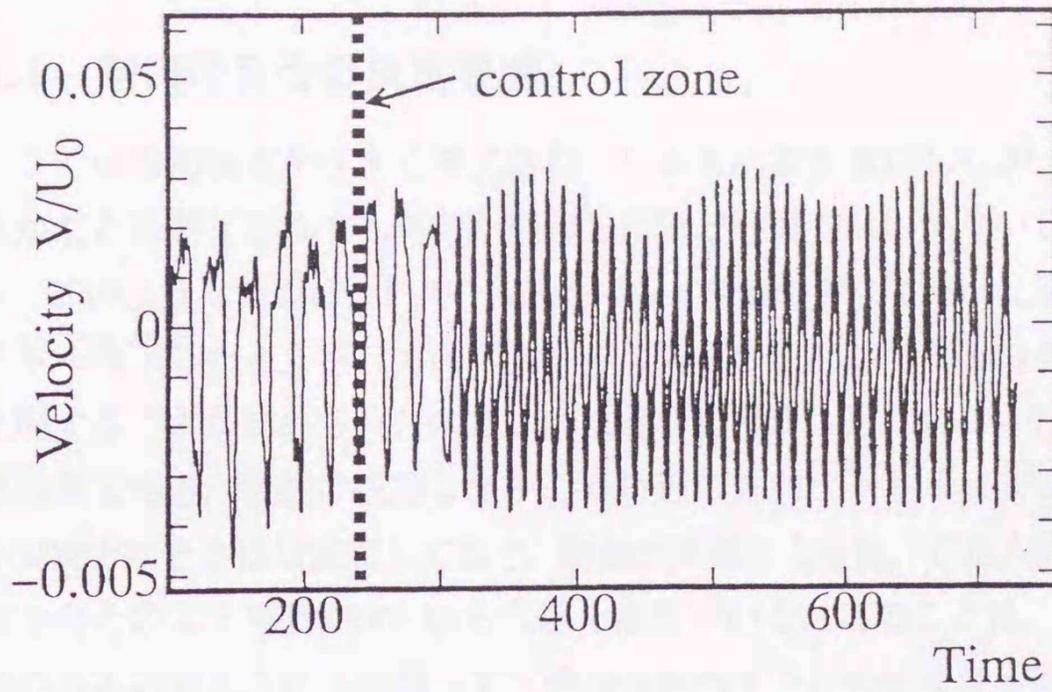


図 4.12 *nonimpulsive* 制御力の付加

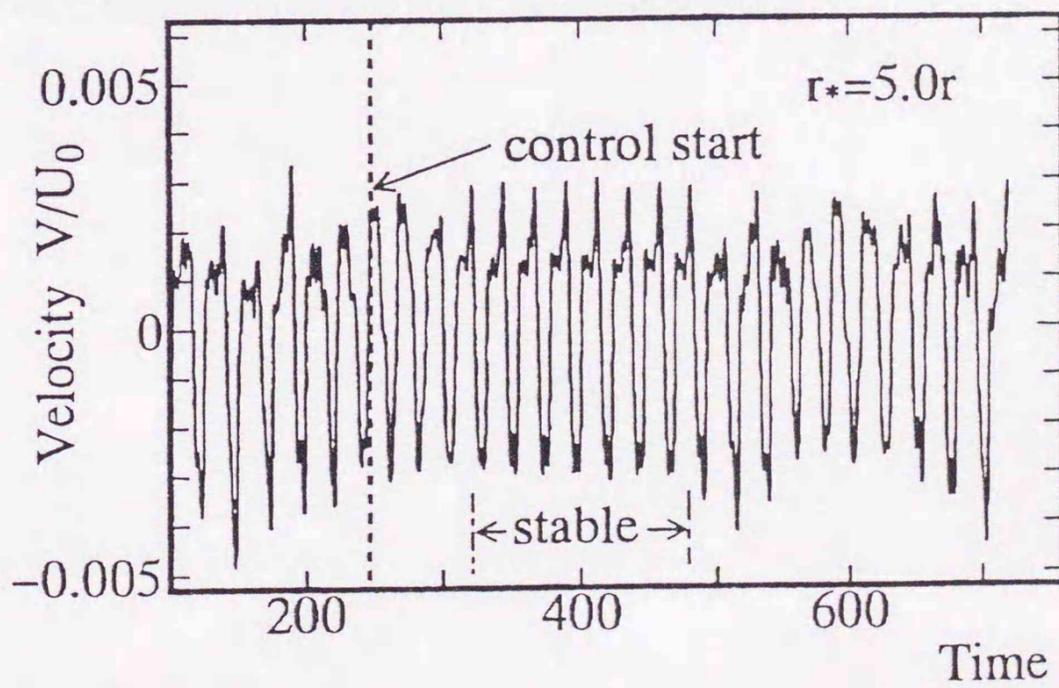


図 4.13 制御域通過判定条件の影響

4.3.4 制御の可否の決定要因

ここでは周期軌道がうまく発見され、しかも制御も成功したが、周期軌道がたとえ発見されても制御が期待したほどうまくはいかないこともある。このような原因について、*saddle point* 探索の方法で述べた写像をベクトル表示したところ、方向ベクトルの変化の状況が可制御性を大きく支配することが認められたのでこれに着目し考察した。図4.14はその考察結果であり、制御に成功した中心点付近の方向ベクトルは安定方向と不安定方向とがほぼ直交しており、制御が困難なときは、安定方向と不安定方向とのなす角度が 90° から大きく離れている。このことは、OGY制御の基本的考え方から推察して写像の方向ベクトルの直交性が制御の可能性を大きく左右する要素であると考えられる。したがって、制御成功のための解決策は、Poincaré断面を変更して二つの方向ベクトルがなるべく直交するように探索し直すこととなる。また、ベクトルの組み合わせが必ず直交するとは限らない非直交現象の存在も十分考えられる。よってこの場合OGY法による制御では無理があり、さらに制御方法を改良するか新たな観点からの制御方法の確立が必要となる。

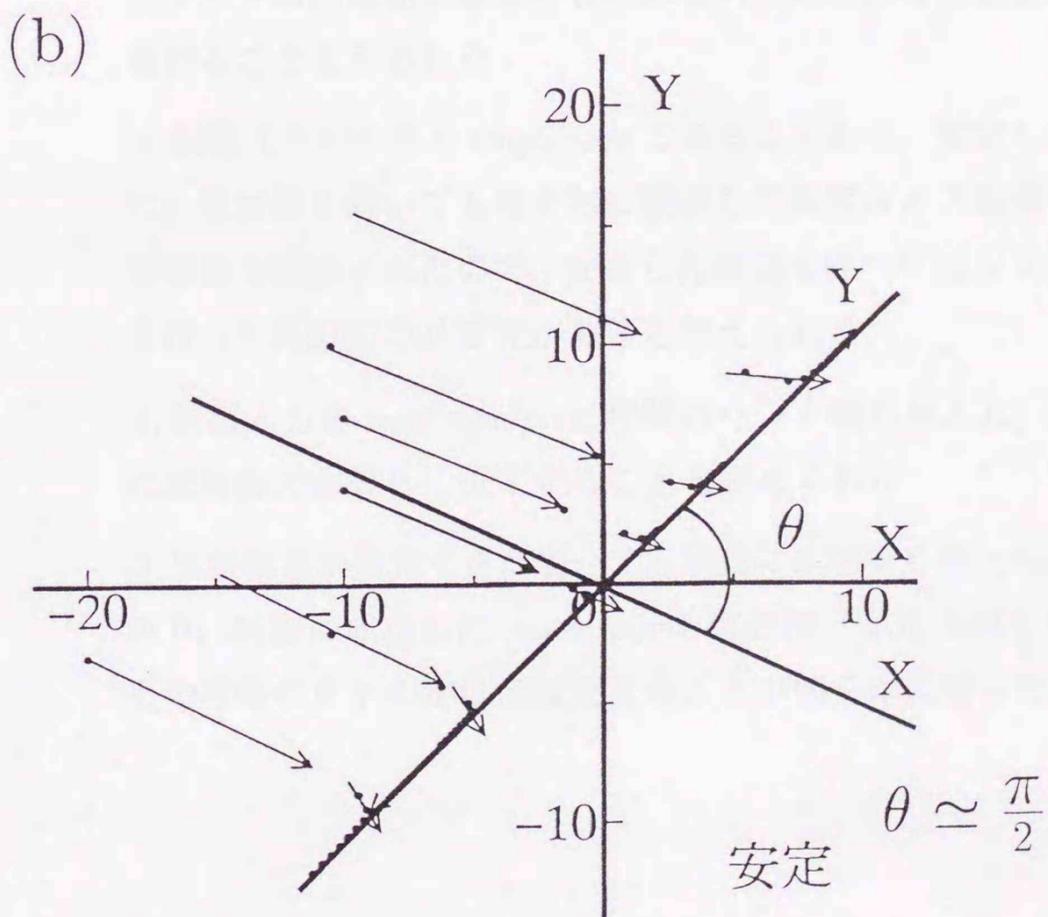
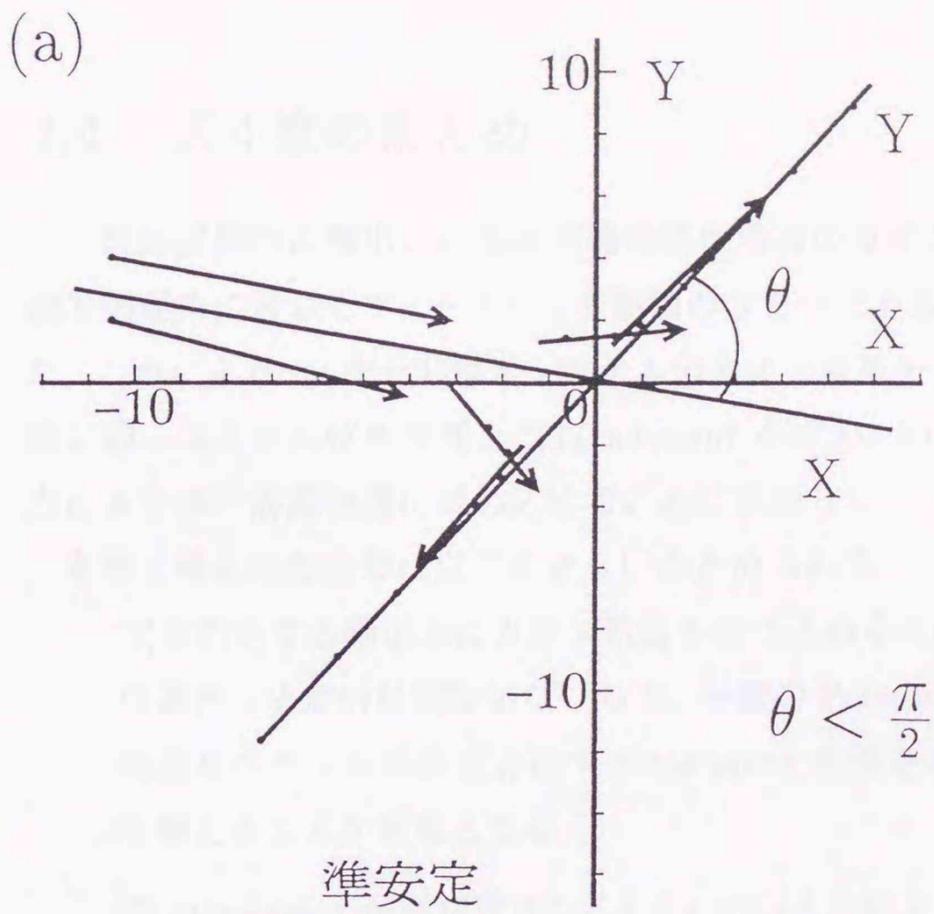


図 4.14 安定条件とベクトルの方向性

4.4 第4章のまとめ

二次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流のカオスと判断される自励振動現象に対してフィードバック制御のひとつである OGY 制御を試みた。これにより、 n 次元非線形システムのカオス軌道を方程式の解析的知識に頼らなくとも位相空間上の *fixed point* を求め、*impulsive* な制御入力により単一周期軌道に封じ込めることに成功した。

本章で得られた結果は以下のようにまとめられる。

- [1] 目的とする軌道の上にカオス軌道を封じ込めるには、Poincaré 断面の選択に決定的な定説がないので、任意の Poincaré 断面上の安定方向固有ベクトルの決定方法や *fixed point* 近傍を通過する条件などを整えることが重要となる。
- [2] *fixed point* 通過判定 $\|Z_n Z_*\| \leq r$ の与え方によっては、制御されたシステムが周期状態に封じ込められる時間的な持続長さに影響が現れることも示された。
- [3] 制御入力が小さく *impulsive* であることから、安定した周期軌道に一度は落ち着いても将来的に破綻して再度カオス軌道へと移行する傾向も認められたので、安定した軌道を保つにはシステムの監視を行って再制御の必要性があると考えられる。
- [4] 制御入力を *nonimpulsive* (時間的バンド幅を与えた) にした場合には制御力が著しく低下することも認められた。
- [5] 周期軌道が発見できた場合でも制御に成功する時としない場合があり、制御に成功した *fixed point* 付近は、安定方向と不安定方向との写像ベクトルがほぼ直交することが明らかになった。

第5章 ニューラルネットワークを用いた推定法と力学系の同定

第3章では急拡大部を有する二次元チャンネル内噴流の諸特性のひとつとして、吹き出し直後のステップ下流に生じる剥離再循環領域が関与する噴流のフリップフロップ現象に着目し、その挙動をカオス的解釈にそって考察した。その際、臨界レイノルズ数 Rec が存在し、これを境として解の挙動がリミットサイクルからストレンジアトラクターへ変化する過程をウェーブレット解析などにより定性的に示した。

近年、流れ場内の摩擦抵抗低減を目的とした Choi et al. (1994) の乱流境界層内の抑制領域の探索や、飯田ほか(1995) のエネルギーコスト低減を目的として熱対流セルパターンの出現率を高める報告など、能動的制御の研究が盛んになっている。これらの試みからセンシングによって得られる情報を制御媒体へ入力するためのアルゴリズムの確立の重要性が示されたが、性質の異なった流れ場への適用は見当たらない。また、古沢ほか(1992) は熱対流モデルであるローレンツアトラクターの力学系の学習結果を用いて、時間的なフィードバック機構をもつリカレント・ネットワーク（以下、リカレントネットと呼ぶ。）の方程式系によりシステムの再現を行って今後の検討課題を示唆しているが、噴流などの実用的な流れに潜む非周期性を推定するためにニューラル・ネットワーク（以下、 NN と呼ぶ。）を適用した研究例は知られていない。

仮に流れ場の状態を推定してレイノルズ数を増減させ、必要な時期に必要な期間フリップフロップの自励発振を予測し制御できれば、混合促進、エネルギー伝達、冷却などの効率化の観点から極めて有意義であると考えられる。また、比例制御などの古典的手法では制御が困難な非周期的現象に対して、 NN の導入によりこの弱点を補強できるならば最適制御へ

の選択に際し、本節で述べる研究が果たす役割は大きい。また、そのための流れ場のモデル化は制御則を決定する際のモデル規範とならしめる重要課題となる。

そこで、筆者らは非定常の剥離再循環領域を形成する噴流が有する変動モードを NN を用いて学習させ、流れの状態を数値的に判断させる能動的制御のための基礎的知見を得ること、ならびに噴流中の非線形挙動に対してリカレントネットによる基礎方程式のモデル化の可能性を探ることを試みた。

NN に入力する適切な物理量の決定は経験がものをいうが、本流れ場の特徴である再付着点には零速度点が存在し、この地点の前後では流れが逆流から順流へと移行する場でもある。この時々刻々変化する速度場を入力として NN の出力との誤差を判断基準とした流れ場の推定がはたして適切かどうかの検討も兼ねることとした。本章では、二次元チャンネル内噴流の数値計算から得られた諸量についてバックプロパゲーション(誤差逆伝播)アルゴリズムの学習則の結果を用いて、時系列データに潜む規則性・法則性の予測について検討を行った。

本章の構成は以下の通りである。

- 5.1節では、 NN に供給する二次元チャンネル内噴流の流れ情報として剥離泡内部と再付着点近傍からの速度情報の性質と NN の構造について述べる。
- 5.2節では、 NN システムの教師信号に対する学習誤差の変化とこれまでに提案されている幾つかの学習アルゴリズムの評価を行い、バックプロパゲーションアルゴリズム選択の理由を述べる。
- 5.3節では、周期解および非周期解に対する NN の推定状況についての結果を示し、同定済みの NN を用いて、未学習部分のカオス的時系列データに対する短期予測の可能性を考察する。

5.4節では、任意のフィードバック結合を持つリカレントネットワークの非線形ダイナミクスを利用して時間発展方程式を学習させ、周期解および非周期解に対する結果から力学系のモデリングの可能性を調べる。

5.5節は本章のまとめである。

5.1 ニューラルネットワークのメカニズム

5.1.1 剥離泡と再付着点近傍の流れ情報

図5.1 (a)(b)は $Re = 10^3$, 無次元時刻 $t = 216.0$ および $t = 288.0$ の場合の流線図である。 $Re = 10^3$ はフリップフロップが周期的におこる条件で、図(a)では上壁面へ偏流し、下側に大きな剥離泡が認められる。図(b)では図(a)の逆の状態が認められる。変動の1周期は、無次元時間でおよそ144.0である。図(a)では上壁面に小規模の再循環領域が2箇所、下壁面に噴流中心部までに及ぶ再循環領域が1箇所認められ、図(b)ではその逆に切り替わっている。

図5.2は図5.1の上壁面(○印)と下壁面(□印)近傍での x 方向速度成分 U の分布を示している。これにより上壁では零速度点が3個、下壁では零速度点が2個存在し順流から逆流へ、あるいは逆流から順流への流れの移行が確認できる。従って、この逆流および順流の速度分布の状態に基づいて、流れのパターンを評価することが可能であると推察される。

図5.3に $y/H = \pm 0.32$ の x 方向に観測点を変えた位置における x 方向速度成分 U の下流方向への速度分布を示した。縦軸のスケールに注意して眺めると明らかに図5.2のときよりピーク値が正負ともに大きく成長し、速度差の絶対値が増加している。

図5.4 (a)は x 方向速度成分 U の空間的分布、(b)(c)は渦度に関する空間的分布で(c)は $x-z$ 平面で見たものである。これより渦度の分布図の方が値の正負が明確であることが分かる。

以上のような基礎的データを背景として NN モデルの第1層への入力を、時々刻々発生し変化する剥離泡内部の速度場の流れ情報提供にふさわしい位置であると判断される図5.4 (a)の●印 (y 方向対称位置は略) $x/H = 0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3.0, 3.6, 4.2, 4.8$, $y/H = \pm 0.32$ の計16点にて与えることとした。座標の値は格子点番号である。

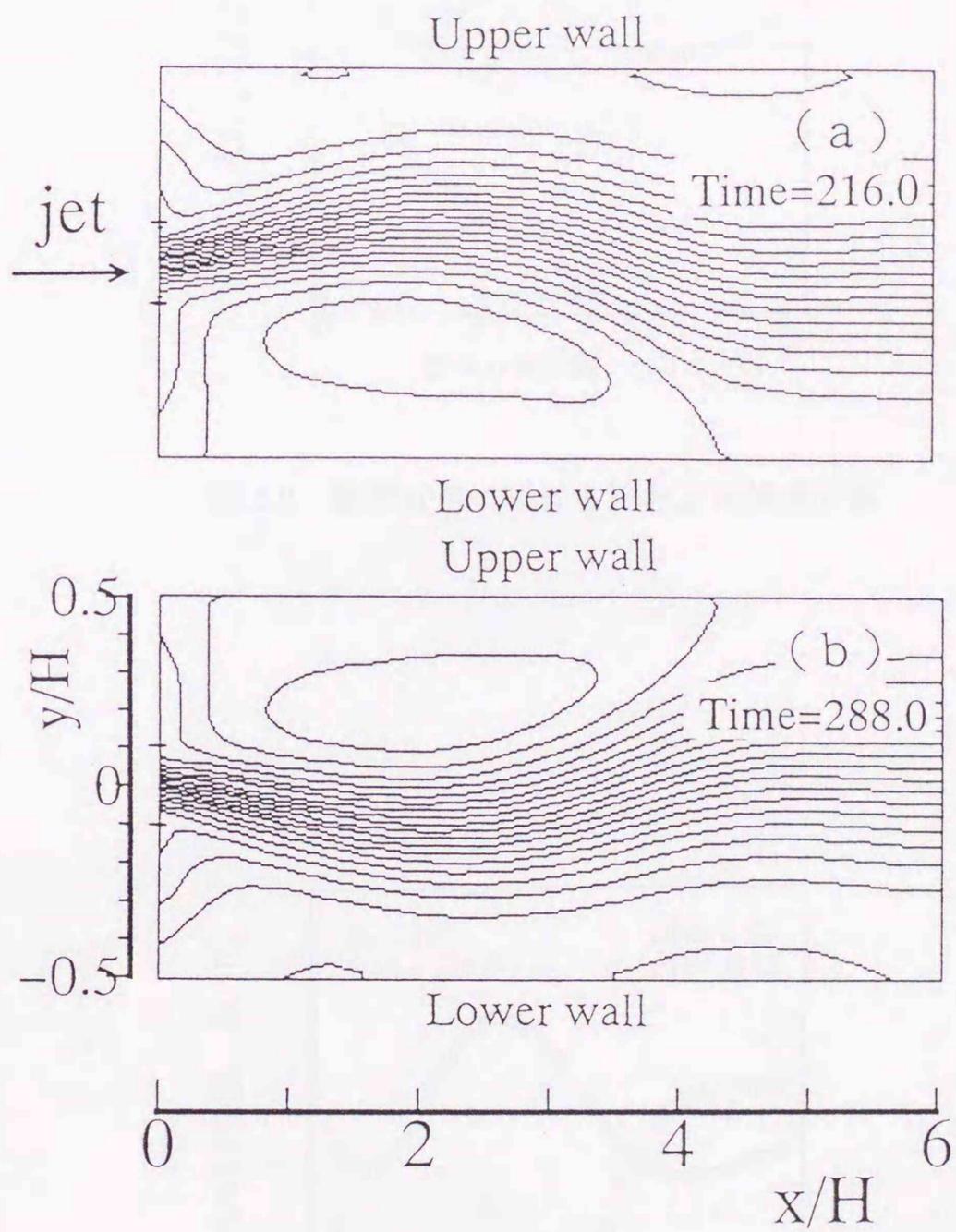


図 5.1 偏流の状態とモード

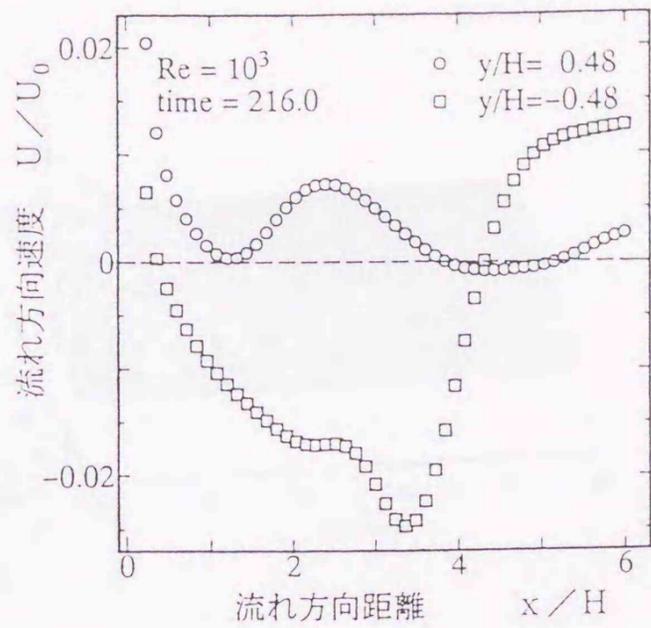


図 5.2 壁面近傍における流れ方向速度分布

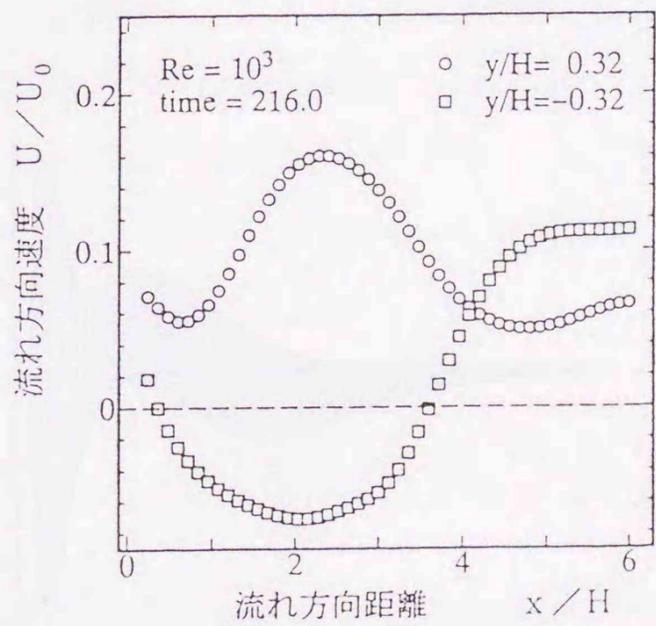


図 5.3 流れ情報とする流れ方向速度分布

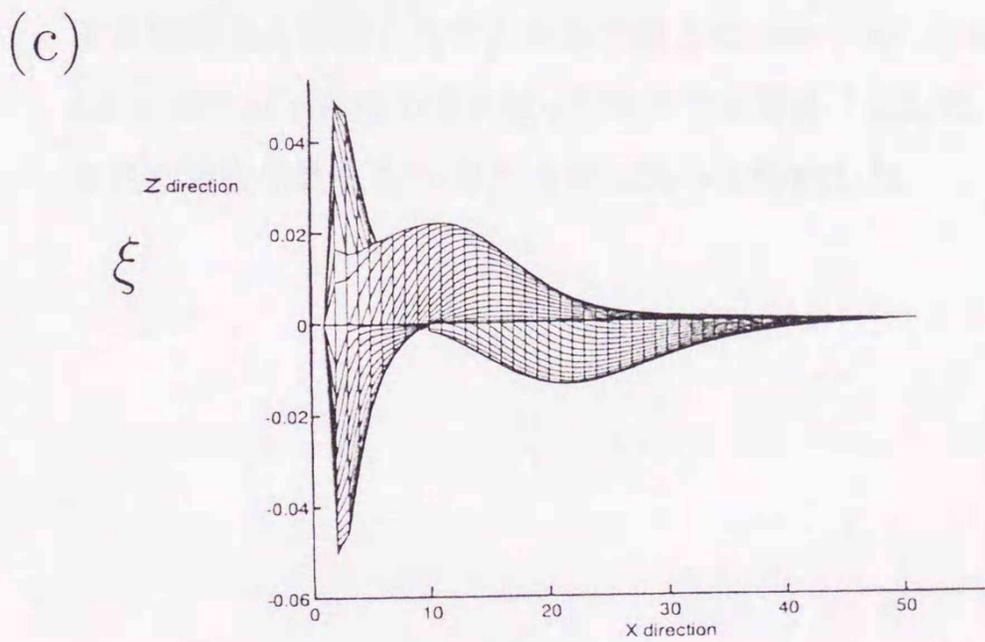
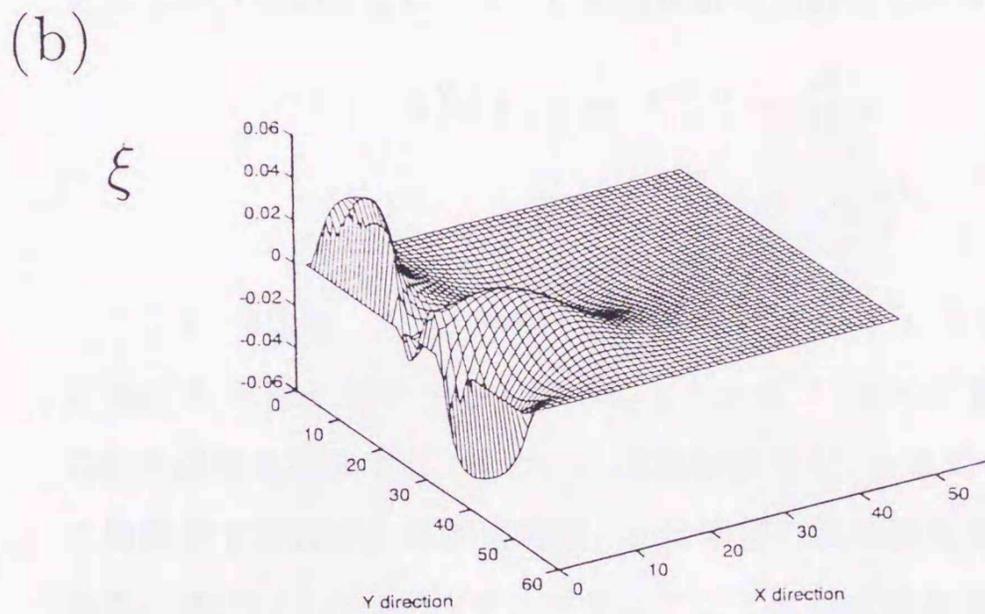
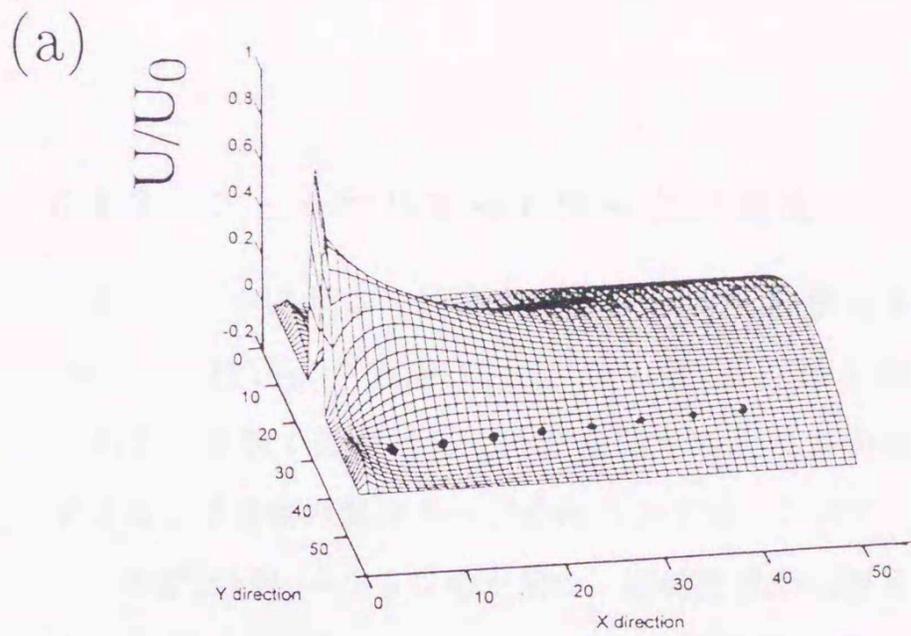


図 5.4 NN 入力の時間的空間関係
(a) 速度分布, (b)(c) 渦度分布

5.1.2 ニューラルネットワークの構造

図 5.5 にシステムを同定するための NN の構造を示す。これは入力層 (ユニット数16)、中間層 (同10)、出力層 (同1) の3層からなる階層型 NN である。時刻 t における二次元空間での流れ方向速度を入力し、フリップフロップ現象の偏流モードを出力とする。ここで、結合係数の学習にはバックプロパゲーション法を用い、数値計算から得られる速度を教師信号として行うものとした。以下に結合係数の更新式を示す。

$$h_{ji}^N(t+1) = h_{ji}^N(t) - \sigma \frac{\partial E}{\partial h_{ji}^N} \quad (5.1)$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (z_j^N - \hat{z}_j^N)^2 \quad (5.2)$$

ここで、 h_{ji}^N は、入力、中間、出力をそれぞれ0, 1, 2層とし、 $N = 1, 2$ における $N - 1$ 層の j 番目のユニットから N 層の i 番目のユニットへの結合係数を意味する。また、 E は教師信号 z_j^N とユニット出力値 \hat{z}_j^N の二乗誤差で定義される評価関数、 σ は学習の収束速度を決定する定数である。式 (5.1) により1サンプリングごとに結合係数を更新し、 NN による同定値と対象システムの出力値との rms (root mean square) 誤差が 5.0×10^{-4} 以下の極小値となった時点で学習終了とした。これにより更新された結合係数をもつ NN を同定済みと解釈した。

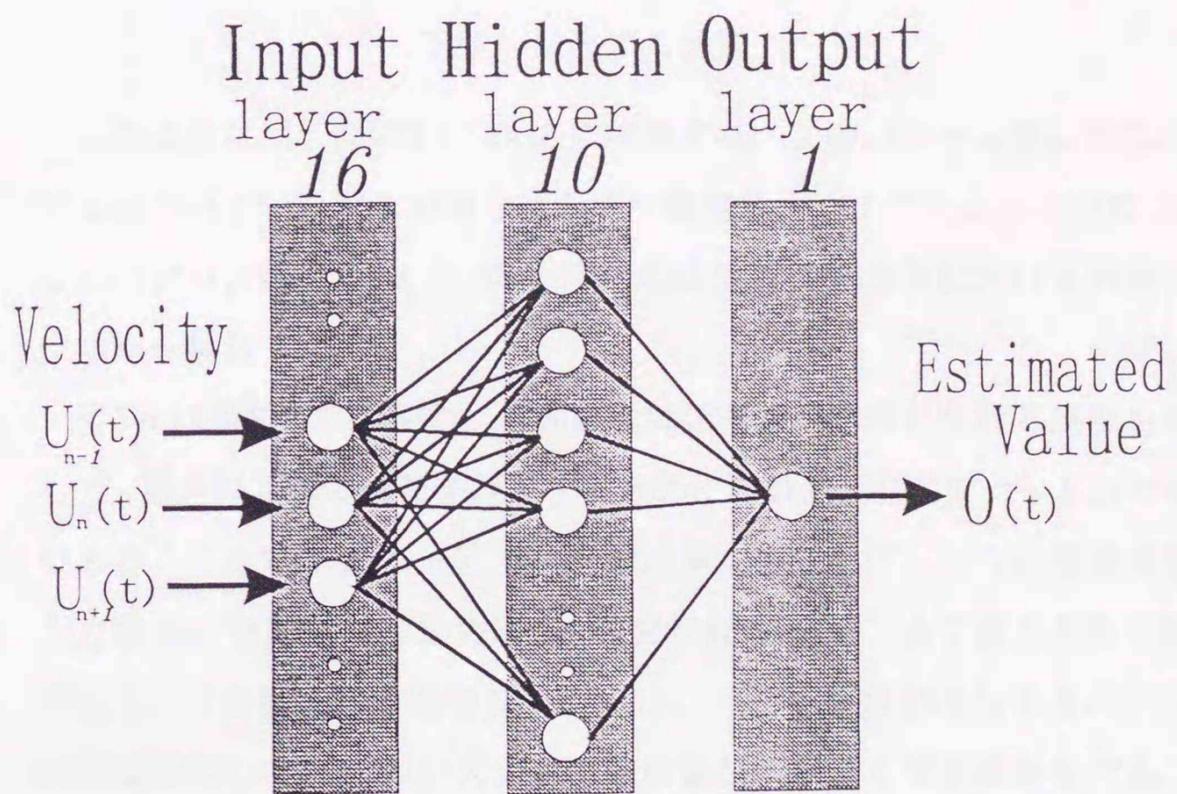


図 5.5 NN の構造

5.2 階層学習システムの性能評価

5.2.1 教師信号の定義と学習誤差

教師信号の定義は次の通りとする。

上壁へ偏流する状態 : 1

下壁へ偏流する状態 : 0

これは先に示した図5.1 (a)(b)に相当する。このパターン数2を基本とするのでパターン数3の場合はその中間値を $\frac{1}{2}$ として与えることになる。このパターン数を3, 5, 9, 25と変化させてNNの学習における誤差の減少傾向を検討した。

図5.6は横軸に学習回数、縦軸に教師信号との学習における誤差を定義して、誤差低下率の勾配を評価するために対数表示にてプロットしたものである。ここでは $Re = 10^3$ での計算結果を使用して、NNの階層構造を入力層16, 中間層10, 出力層1, 学習回数5000と、全て同じ条件で動作させた。この図をみる限りにおいては、パターン数が増加すると平均的誤差は増加してNNのシステムに悪影響が及ぶような印象を受ける。ところが、それぞれの学習結果による結合係数を用いて実際に流れ場の推定を実施したところ、心配されたパターン数の増加による推定の悪化は認められなかった。図5.6から推察すると、どのパターン数の場合も誤差の低下率は全体として同程度の負の勾配を持っていること、とりわけ学習回数500回までに誤差が急速に減少していることなど、4通りのパターン数に共通の性質が含まれているためと考えられる。なお、ここで注意しなければならないのは、図5.7に示す学習誤差の収束が局所最小値(local minimum)に陥らないように工夫することである。

そこで局所最小値回避の確認とバックプロパゲーション学習がどのように行われているかを理解するために、図5.8に誤差の微係数に比例した修正量を結合係数(重み係数)に付加し、誤差の評価関数を最小化する勾配

急降下の様子を示す。これは $Re = 10^3$ の場合である。もし、最大値、最小値のみが存在するような条件 ($Re = 500$ における速度変動) では問題ないが、 Re 数が増加すると流れの情報量は複雑な極値を持った不安定モードへと変化する。そこで、このようなモードに存在する浅い極値に学習結果が陥らないように修正モーメント法を導入して学習誤差の増加をくい止めている。さて、最適化されるネットワーク変数は、個々の入力に対して1対1対応のバイアス値と結合係数を持つが、図5.8は5パターンにおける学習の場合で、バイアス値、結合係数および、二乗和誤差の三次元空間プロットである。

誤差の評価関数 E は次のように定義する。

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \delta(k)^2 \quad (5.3)$$

$$\delta(k) = \{ \text{教師信号} - \text{ダイナミックユニットの出力} \} \quad (5.4)$$

メッシュプロットにおける誤差の最小点は曲面の凹んだ箇所に相当し、これがすなわち誤差を最小とするネットワーク値を推奨することになる。また、局所最小値に入りこまないような最小値探索の様子も図より読み取れる。

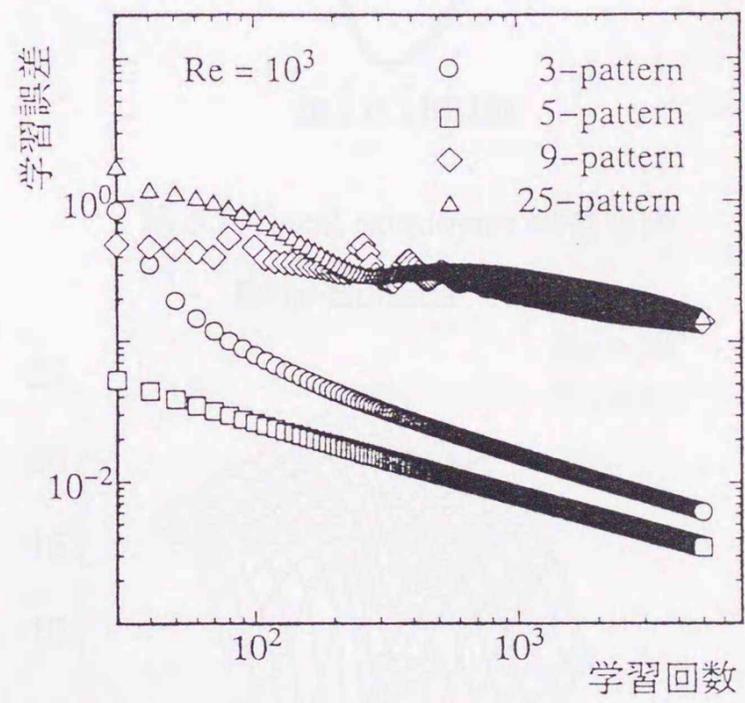


図 5.6 学習曲線の推移

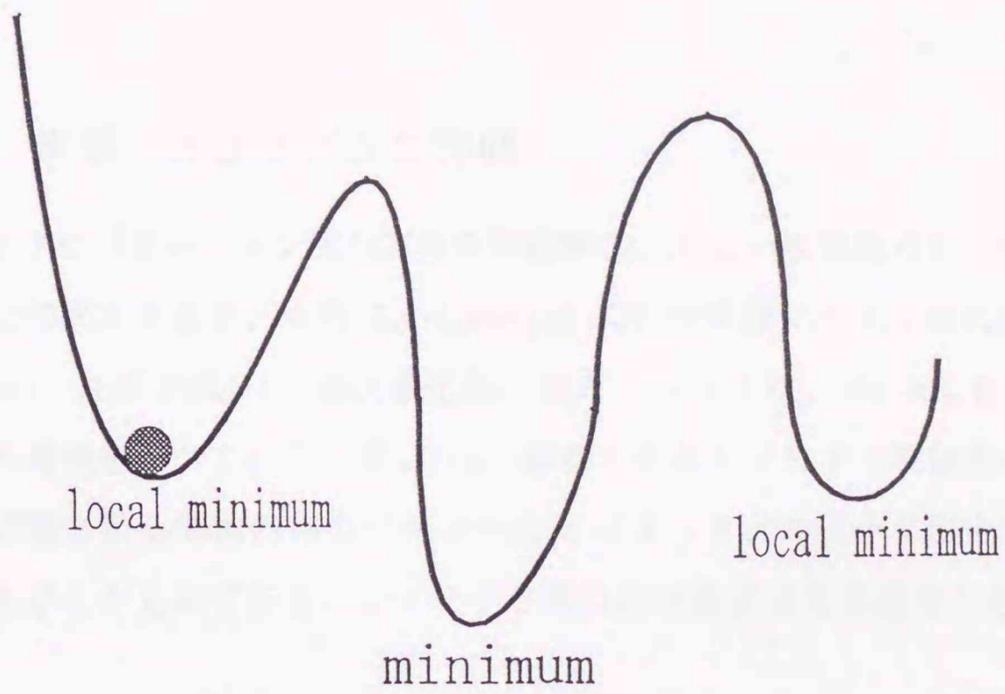


図 5.7 local minimum の概念図

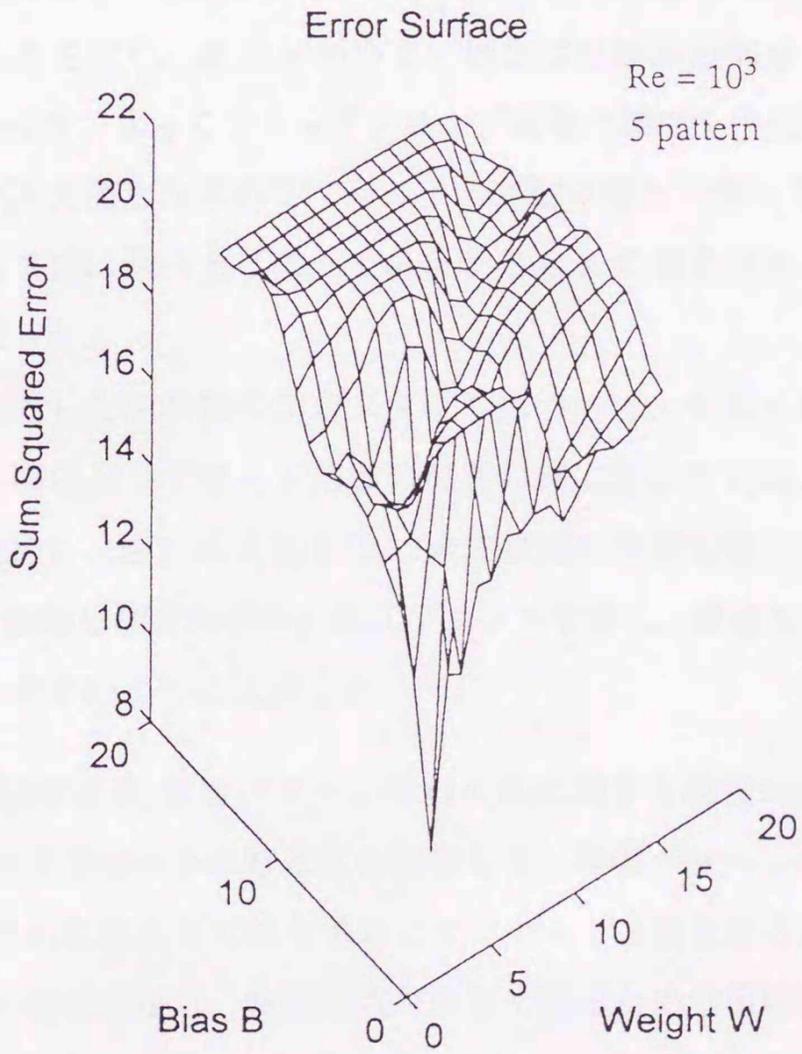


図 5.8 local minimum 回避の様子

5.2.2 学習アルゴリズムの評価

バックプロパゲーション法の応用の問題解決、あるいは改良点については様々な指摘があるが、中野ほか(1989)は NN の学習スタイルの代表例として (a)一括修正法、(b)逐次修正法、(c)モーメント法、(d)修正モーメント法の特徴を述べている。図5.9 は一般性があるシグモイド関数の非線形性が定義される関数内部のパラメータ a によってどのような出力値を出すかを示したものである。シグモイド関数の定義式は次の通りである。

$$Output = \frac{1}{(1 + \exp(-Input/a))} \quad (5.5)$$

いま入力値を一定とすると、 a が大きい場合は直線性の強い部分に限定された出力を取り、逆に a が小さい場合は非線形の部分も含む広い範囲の出力を示す。よってフリップフロップ現象の偏流を代表する速度に関する情報が入力値となるので、レイノルズ数の増加に伴って速度の最大値、最小値を事前に調べ上げた上であらかじめ a の値を決める煩雑な作業が必要となった。

次に上述した四種類の学習スタイルについて、それらの学習誤差と学習回数との関係がシグモイド関数の傾きの値に応じてどのように変化するかを見極めた。図5.10 と図5.11 は全て横軸に学習回数とシグモイド関数の傾き、縦軸に学習誤差を三次元プロットで表し、最適な学習スタイルの評価がしやすいように工夫した。

- (a) [一括修正法] 学習パターンそれぞれに対する誤差から求めた結合係数とオフセットの修正量を加算して、学習パターン全体について加算された修正量で結合係数とオフセットを修正する方法である。この一括修正法は、修正回数が少なくなるため学習時間の短縮に効果があるが、反面、修正量が平均化されて微妙な修正が行えないため、複雑な問題には不適應な場合もある。図5.10 (a) に示すように本システムへの適用結果では、 $a = 0.4$ 以下では学習の誤差収束が良好

はなく、入力値によっては学習が停滞している。

(b)[逐次修正法] 学習パターンを1個入力する毎に結合係数とオフセットを修正する方法である。図5.10 (b) に示すが図5.10 (a) に学習誤差の減少がスムーズに進んでいることが認められるが、それでも $a = 0.5$ から $a = 0.3$ の間では学習回数の早い時期(学数回数200回前後)では不安定な学習となり、 $a = 0.2$ では学習が途中で破綻している。

(c)[モーメント法] 結合係数とオフセットの修正量を、出力層における誤差への寄与率のみでなく前回の修正量も考慮する方法で学習の高速化につながる。前回 ($t-1$) の修正量を $\Delta W(t-1)$ 、今回 (t) の修正量を $\Delta W(t)$ 、誤差からの修正量を d 、モーメント係数を m として式(5.6)で結合係数を修正する。

$$\Delta W(t) = d + m \cdot \Delta W(t-1) \quad (5.6)$$

式(5.6)では、誤差項 d とモーメント項 $\Delta W(t-1)$ の符号が異なるとき修正量 $\Delta W(t)$ は小さな値となるため、モーメント項は誤差からの修正量 d によるオーバーシュートを抑制する働きがある。図5.11 (a) に示す通り $a = 0.5$ 以下での学習回数が早い時期に学習誤差の減少が認められ、明らかにオーバーシュートが回避されている。

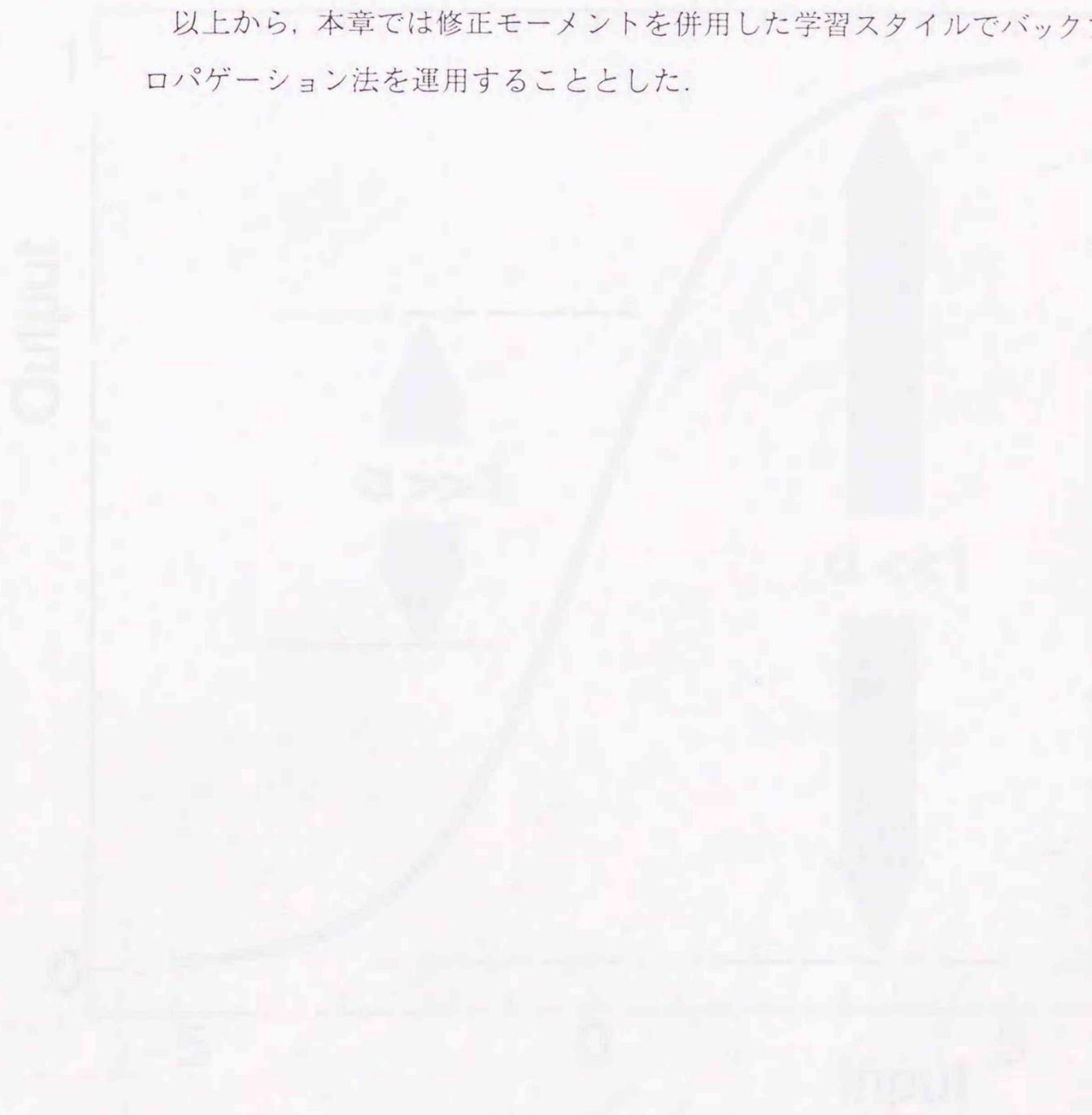
(d)[修正モーメント法] 最初はさまざまな方向へ修正を行い、学習が進んだ後は前回の修正方向に近い方向で修正を行うことで学習を早めるため、式(5.6)のみならず式(5.7)のように学習が進むにつれて、モーメント係数 m の値を増加する方法である。

$$m(t) = m(t-1) + \Delta m \quad (5.7)$$

ただし、モーメント項が大きすぎると誤差による修正が行われなくなるのでモーメント係数の上限を設定しておく必要がある。図5.11 (b) に示す通り a の値全体にわたりもれなく学習誤差の減少が認めら

れ学習回数も少ないことから、これまでの学習スタイルの中でもっとも安定した方法であると言える。

以上から、本章では修正モーメントを併用した学習スタイルでバックプロパゲーション法を運用することとした。



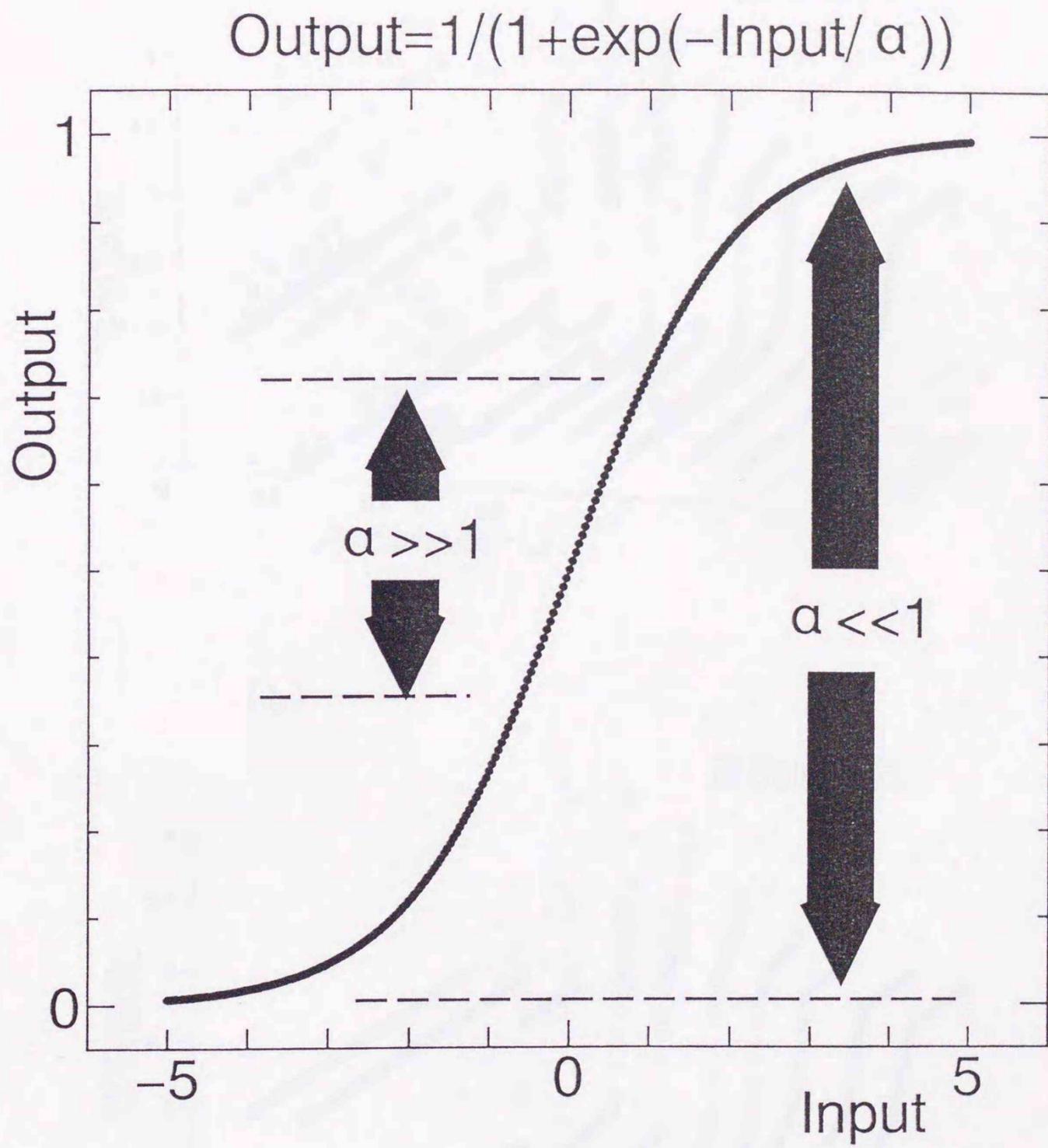


図 5.9 シグモイド関数の非線形性

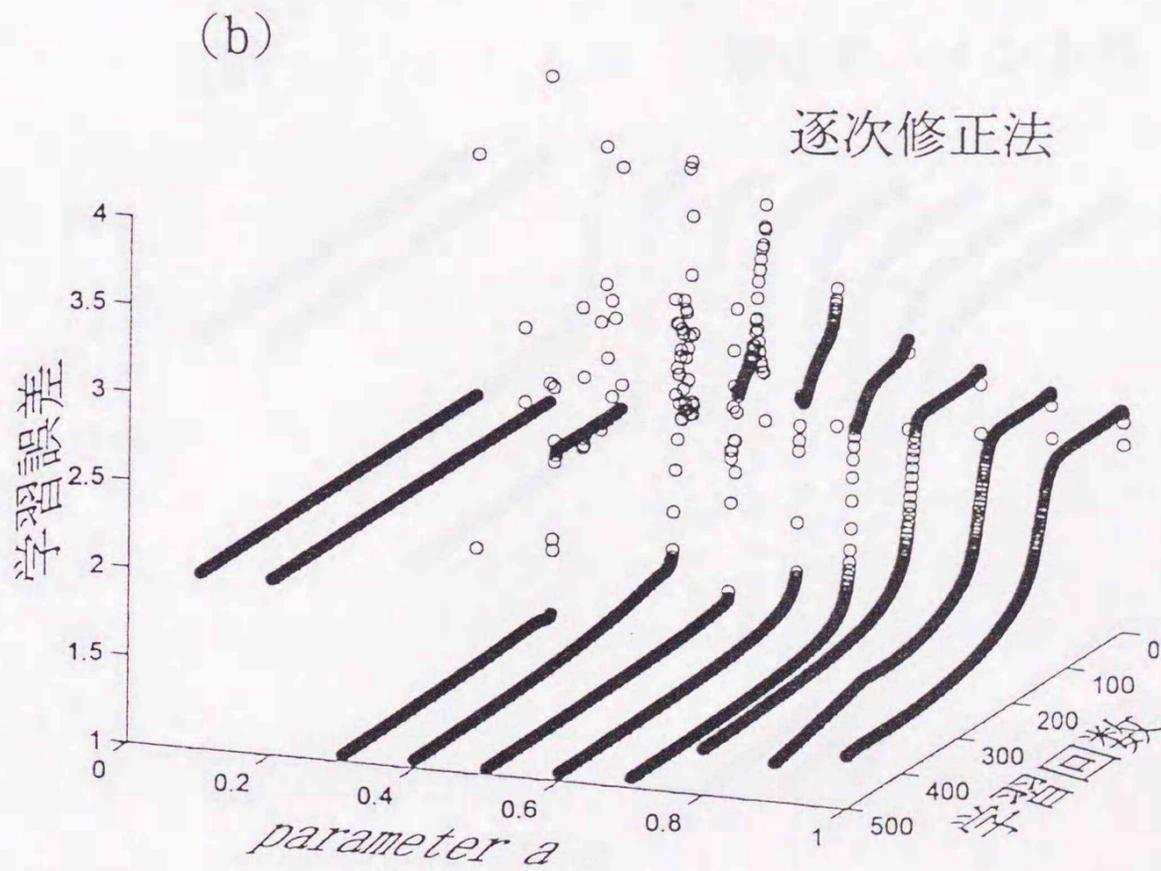
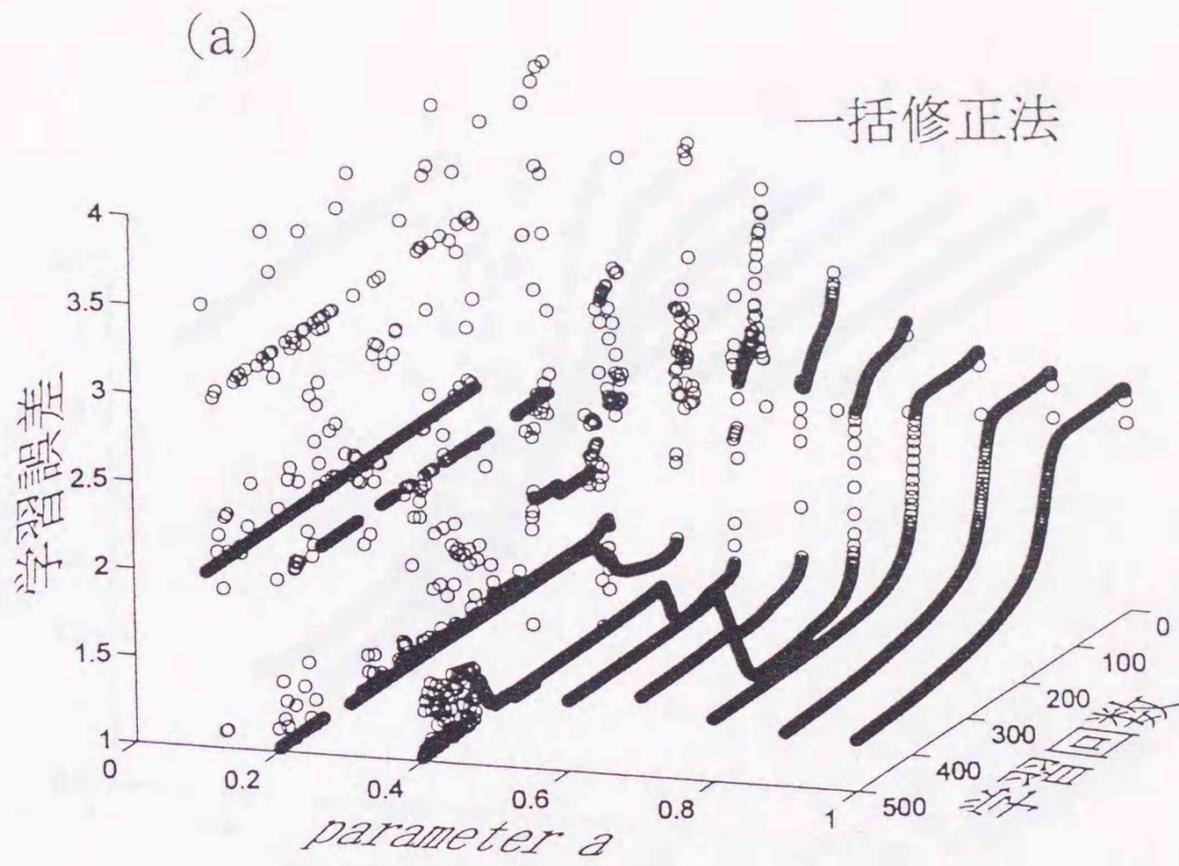


図 5.10 (a):一括修正法 (b):逐次修正法

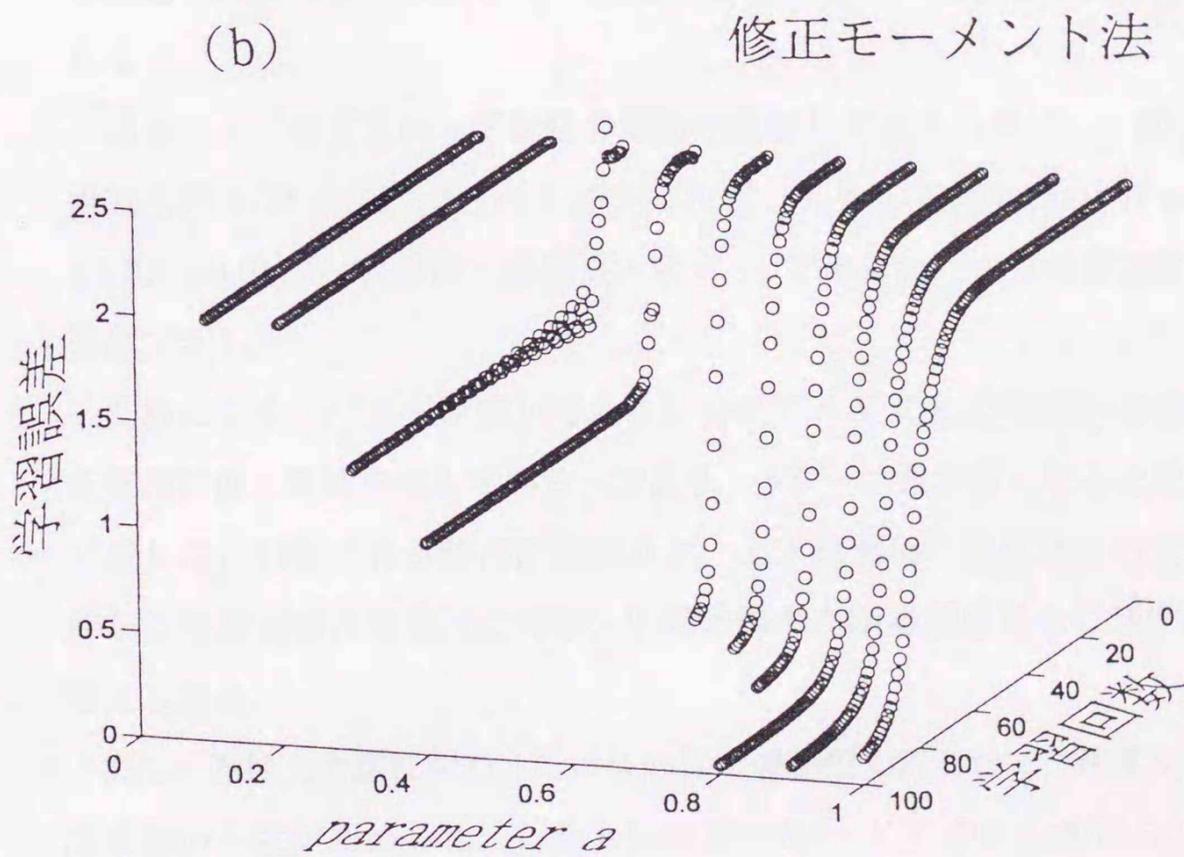
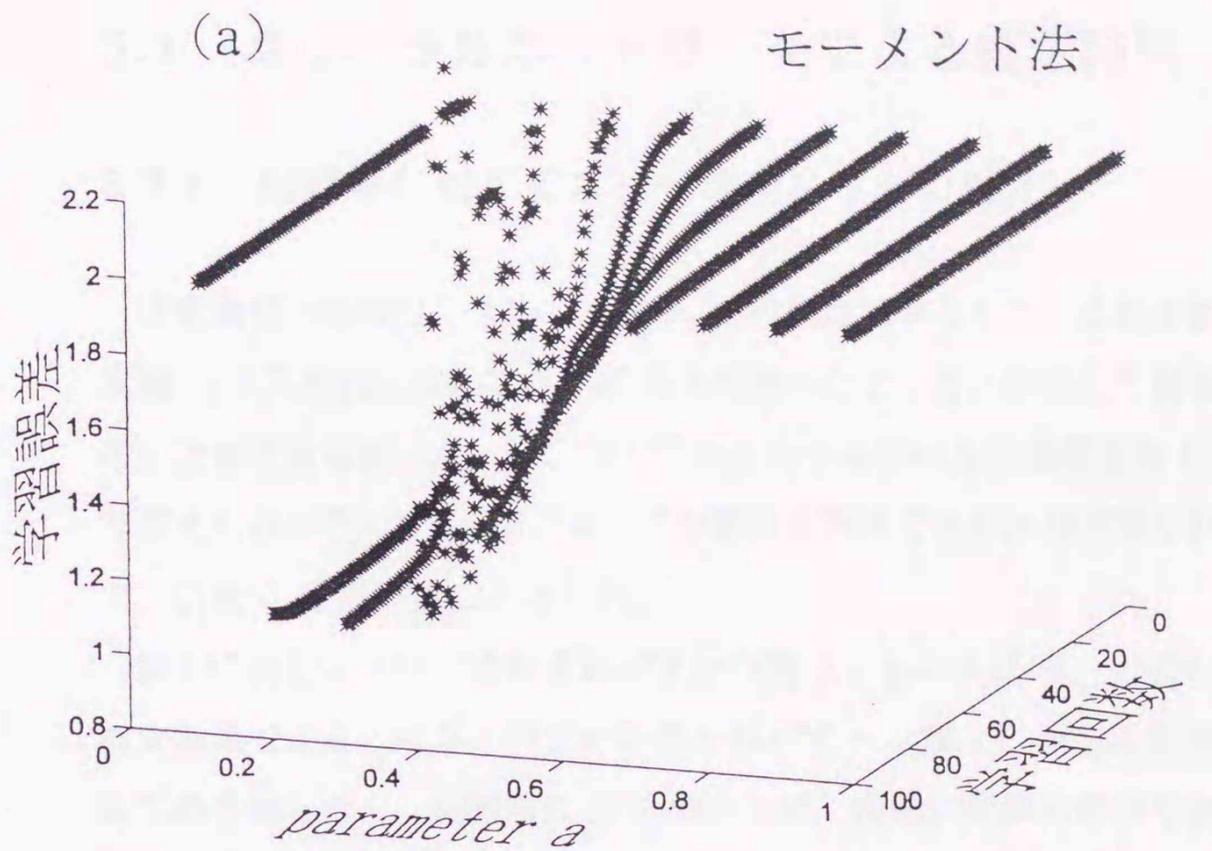


図 5.11 (a):モーメント法 (b):修正モーメント法

5.3 ニューラルネットワークによる推定結果

5.3.1 周期解に対するニューラルネットの推定

研究初期の段階で、フリップフロップの判定基準として、流れ垂直速度変動 V を入力値に用いて NN の出力を調べたところ、期待した結果を得ることができなかった。そこで、 V の入力から流れ方向速度変動 U に切り替えたところ、フリップフロップの挙動を評価できる出力が得られたので、以後 U を用いることとした。

図5.12 (a)(b)(c)は、それぞれパターン数 3, 5 および 25 の流れ場の推定結果である。なお、パターン数 9 はパターン数 5 に類似の結果であるため省略した。縦軸右に NN の出力値、横軸に無次元時刻をとってある。双方ともに $Re = 10^3$ で、入力層点数が 16 において学習で 5000 回更新された結合係数を用いて、再度同じ Re での計算を実行した結果である。

なお、フリップフロップ挙動の変動と比較して見るために、図中に、流れ方向 $x/H = 1.2$, $y/H = 0$ を中心位置とした y 方向 5 点 ($y/H = 0.0$, ± 0.02 , ± 0.04) 平均(以降、参照点と称す。) で得られた y 方向速度変動を破線で示した。

これによるとパターン数が増えるにつれて NN の出力(実線)は歪んだ正弦波に近い形状を示している。つまり、パターン数が多くなると壁面に付着したと判断される時間が短縮され、上下壁面間の推移途中の状態も詳しく推定可能となる。これは、中間値的出力が必要な場合に適すると考えられる。

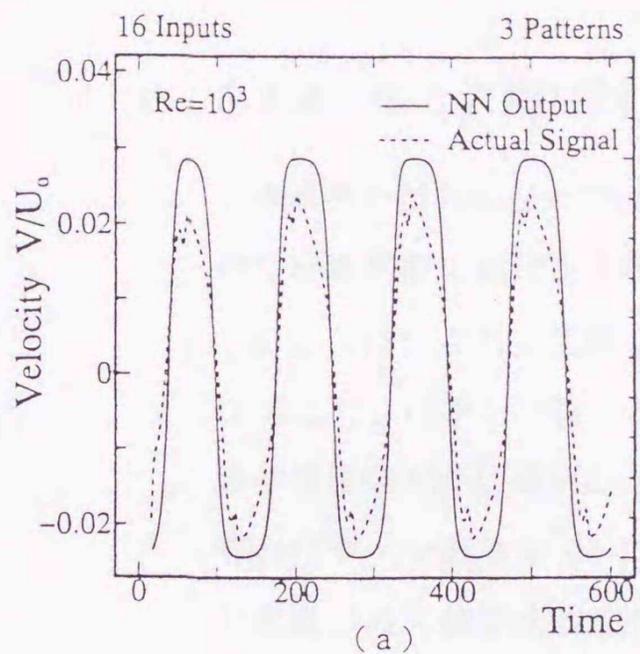
また、直接入力量に関わっていないはずの参照点において、速度変動と周波数の一致が認められ、しかも位相差のない NN の出力が得られた。なお、 y 方向には不変で x 方向に速度変動との対応を同様にして調べたところ周波数応答性は常に保存されているものの、下流側にいくほど NN

の出力との時間遅れが生じた。従って、この条件で NN が推定している流れ場は、参照点に示す比較的上流側での時系列信号と近似的に一致するといえる。

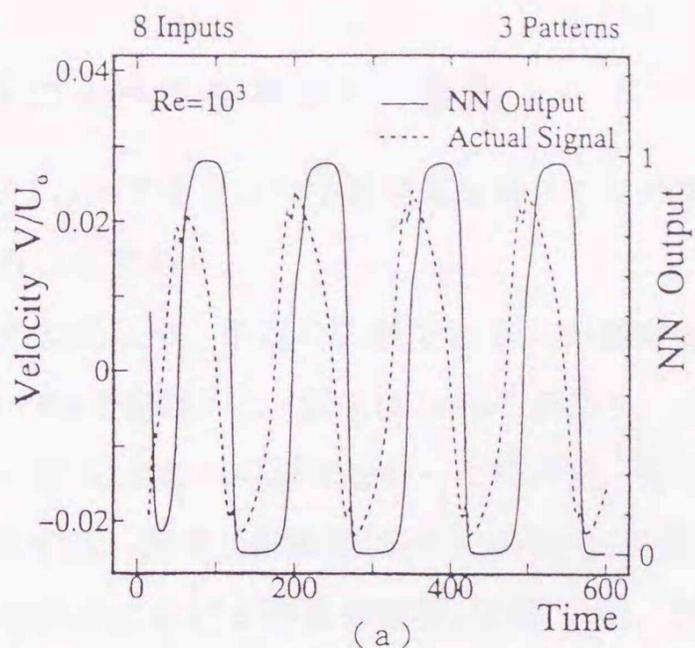
この傾向は $Re = 500$ および $Re = 10^4$ の場合でも同様であった。ただし、 $Re = 10^3$ 以降の参照点の速度変動のピーク付近に存在する微小な極小値、極大値を捕捉するまでにはいたらなかった。このことは、入力層が複数だと NN が全てのパターンを平均化した結合係数を構成しようとするためと考えられる。

図5.13 (a)(b)(c)は、図5.12の結果から推察して NN の推定位置が参照点近傍であるため、流れ方向位置 $x/H = 3.0$ 以降の入力をやめ、半減した入力層 8 ($y/H = \pm 0.32$, $x/H = 0.6, 1.2, 1.8, 2.4$) で推定を行った結果である。参照点は同じである。まず、パターン数 3 の図(a)では参照点の周波数には対応しているが位相にずれが生じ、出力傾向も他とは異なっている。また、特筆すべきはパターン数 5 の図(b)において、図(a)に見られた位相のずれは消え、さらには NN の出力 0 と 1 の区間の勾配が急峻になり、出力ピーク付近が平滑化されて 2 値化に近い推定結果となっていることである。しかしその傾向は、パターン数が増えていくと再び中間値を推定できる出力に戻っている。

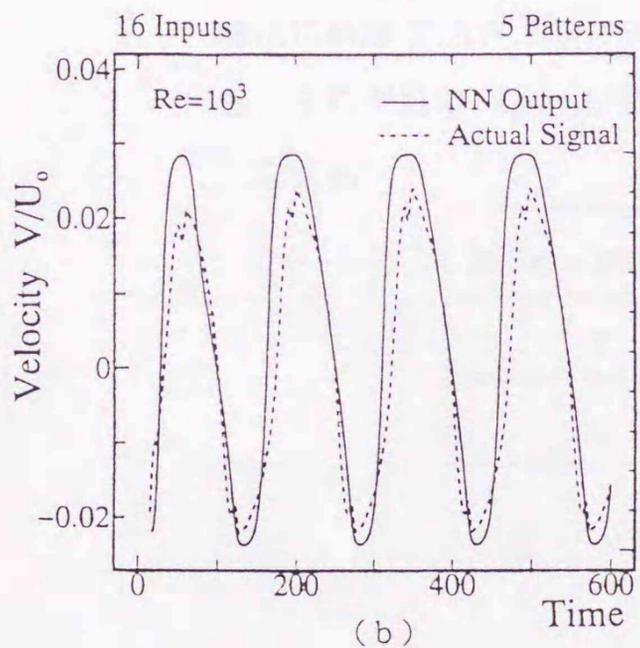
以上から、学習の高速化や流れ場の判定の 2 値化を目指すならば、教師信号のパターン数を減らすこと、流れ場の推定に影響のない入力層を除去すること、などの方策をとればよいことが示された。しかし、単純的に両者を減らすことは推定がおもわしくない結果を招く場合もあるので注意を要する。



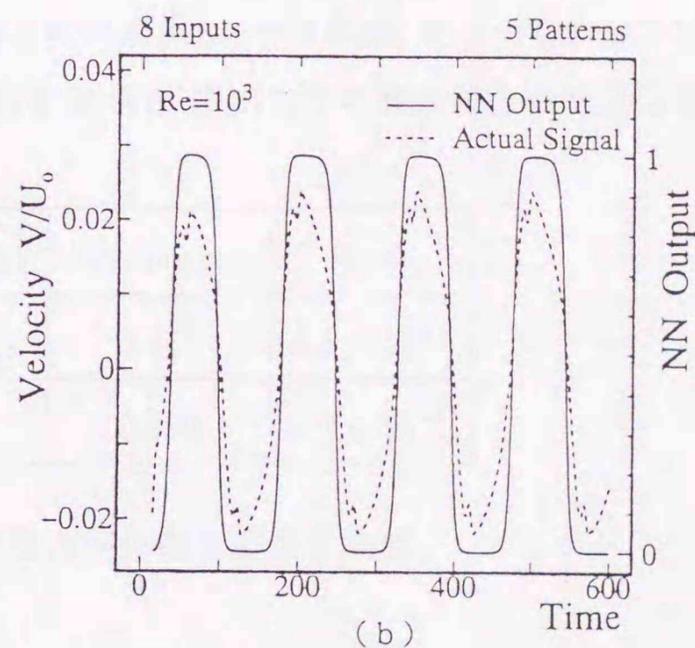
(a)



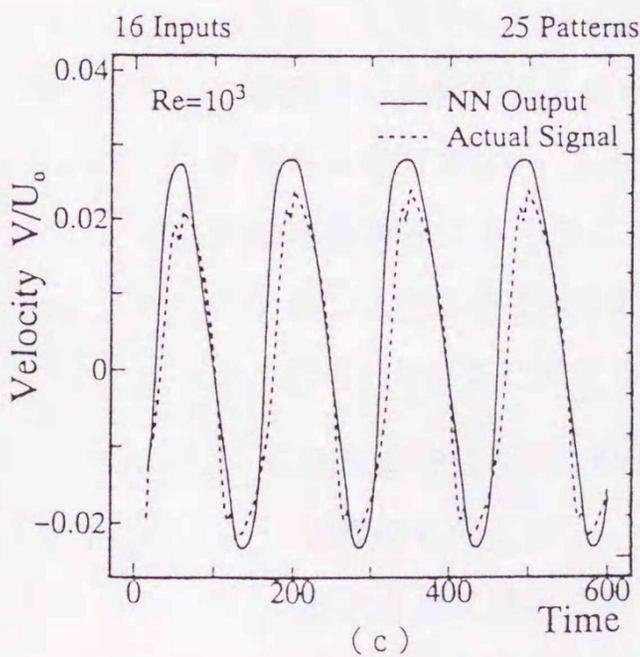
(a)



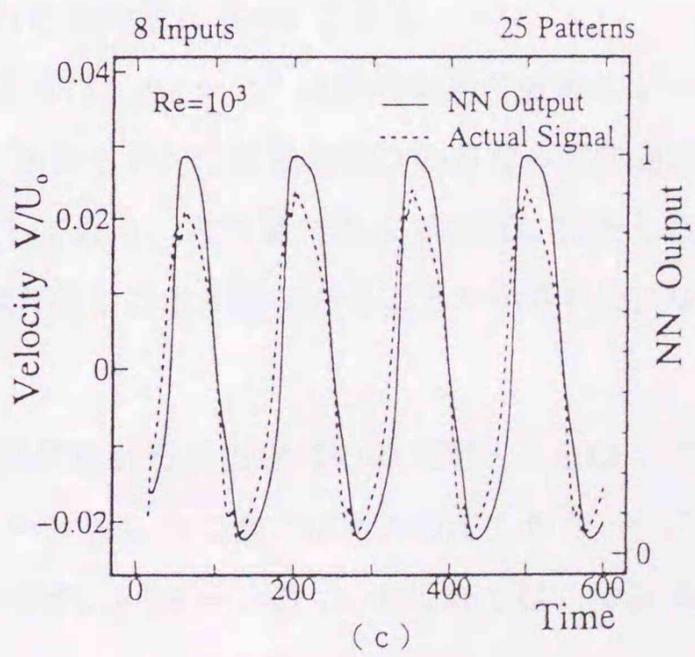
(b)



(b)



(c)



(c)

図 5.12 16入力による周期解の同定

図 5.13 8入力による周期解の同定

5.3.2 カオス解に対するニューラルネットの推定

本研究の目的のひとつは、リミットサイクルの学習結果を用いてカオス的な非周期解の推定を実現することである。

ここでは、これまで得られた知見より、推定の信頼できる入力層数を16として、パターン数3と25の場合を調べた。図5.14 (a)(b)は $Re = 10^3$ の学習結果で非周期解の $Re = 10^4$ の流れ場の推定を行った場合で、それぞれパターン数3と25に相当する。図中、縦軸右に NN の出力(実線)と変動の最大値で正規化した参照点における時系列信号(破線)の値、縦軸左に対数で NN 時系列信号との出力誤差(一点鎖線)をとって示している。それぞれのパターン数に対する NN の出力平均値と誤差平均値は表1に示す。

Pattern numbers	NN output	Error
3	0.417	7.5×10^{-2}
25	0.399	1.2×10^{-1}

表 1 NN の出力平均値と誤差平均値

なお、正規化した時系列信号の平均値は0.451である。

参照点の変動からも分かるように、 $Re = 10^4$ は非周期的で変動のピーク値も一定ではない。しかし、図から NN は変動の強さのみならず時間方向の不確実性にも十分に追随しており、未知量であっても既に構築した NN のシステムを使っての認識作業がほぼ可能であることが示された。なお、図の(a)(b)を比較すると

- 無次元時刻430.0付近に突然現れた入力信号の最大ピーク値の70%程度のものに対し、パターン数3の場合では NN の出力が25%ほど大きめに推定されているが、パターン数25の場合では、ほぼ適正な推定が行われている。

- 図(a)(b)ともに出力1側では最大値がカットオフされているが、逆に、出力0側では図(b)において参照点に見られる微小な変動を出力しようとする傾向が伺える。

などが、観察される。

このように極端に流れ場の状況が異なる範囲であれば、代表的な学習結果を用いて未知の変動を推定し数値的評価が可能であるが、教師信号パターン数と NN の構成などの条件によって推定結果が混沌となる場合もあり、事前の十分な調査が必要である。

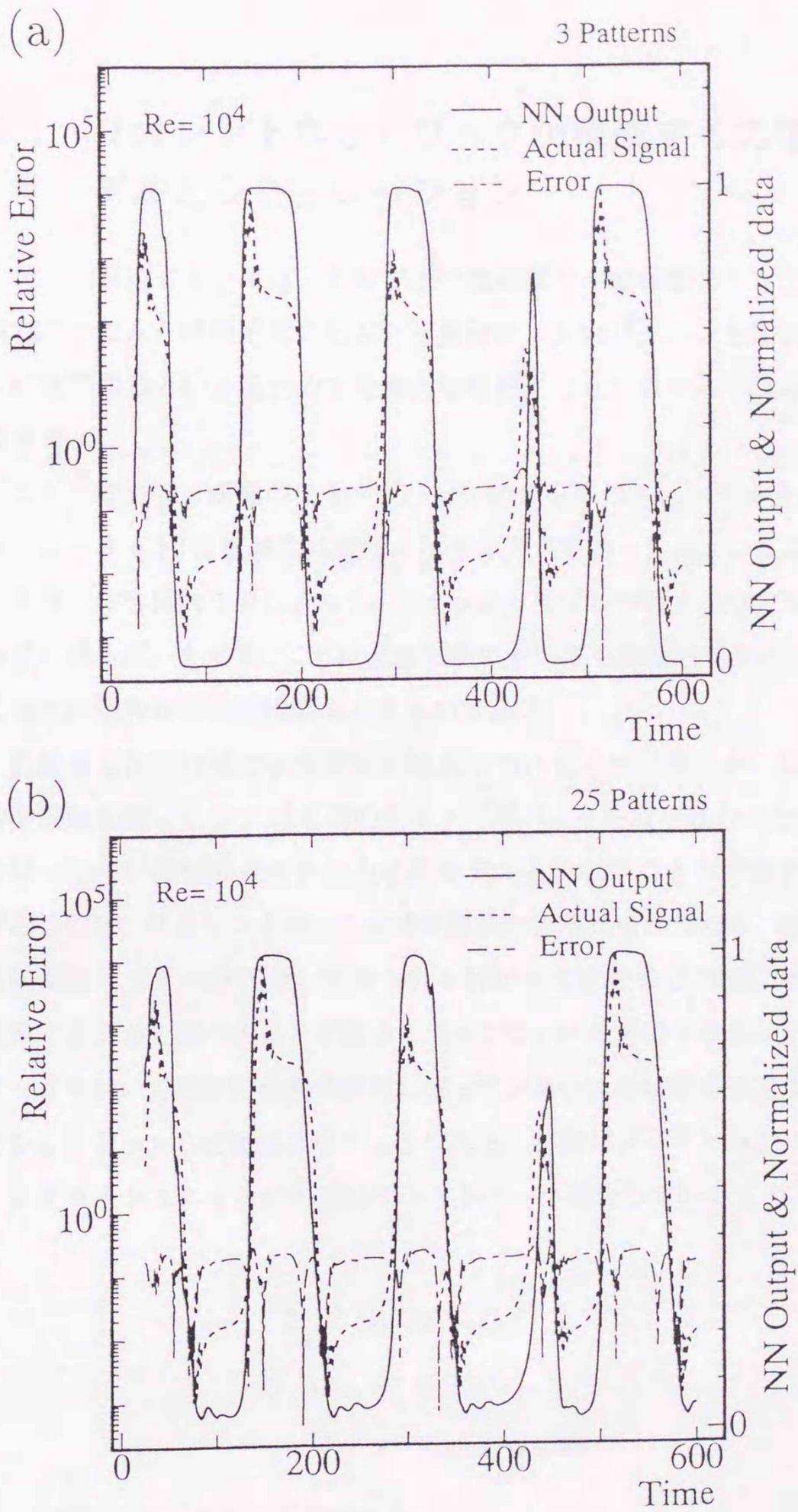


図 5.14 既知同定システムによる非周期解の推定

5.4 リカレントネットワークが構成する力学系モデルとシミュレーション

NN の研究においては、前節で述べた階層型や総和型のモデルが研究されてきたが、情報処理の観点から見れば、入力パターンを出力パターンに変換するという定性的で受動的な処理を行うシステムと見ることができる。

これに対して、任意のフィードバック結合を持つニューラルネット(リカレントネット)は複雑な非線形ダイナミクスを持っており、ユニットの初期値や結合係数の値によって、リミットサイクルやカオスなどの様々な時間的振る舞いを示す。これは流体力学においても能動的でダイナミックな流れの情報処理の可能性を示すものである。

前節までは流れ場の状態推定の結果について述べてきたが、誤差逆伝搬学習則を使って NN に時間的なフィードバックを取り込むことにより、時間 t について離散化された力学系モデルとみなすことができる。ここでの目的は、リカレントネットが時間発展の方程式を持つため、結合係数の初期値パラメータに対して得られる解が元の信号をどの様に再現できる系であるかを調べることにある。ホップフィールド型リカレントネットワークを用いて誤差逆伝搬学習則に則ってシステムの状態を推定する。リカレントネットの定義式は次のようになる。特徴はダイナミックユニットとシグモイドユニットが相互にフィードバック結合していることである。

$$\frac{dO_D}{dt} = W_a \cdot O_s \quad (5.8)$$

$$O_s = G(I_s) \quad (5.9)$$

$$I_s = W_b \cdot O_D + \Theta \quad (5.10)$$

O_D : ダイナミックユニットの出力

I_s : シグモイドユニットの入力

O_s : シグモイドユニットの出力

W_a : シグモイドユニットからダイナミックユニットへの結合係数

W_b : ダイナミックユニットからシグモイドユニットへの結合係数

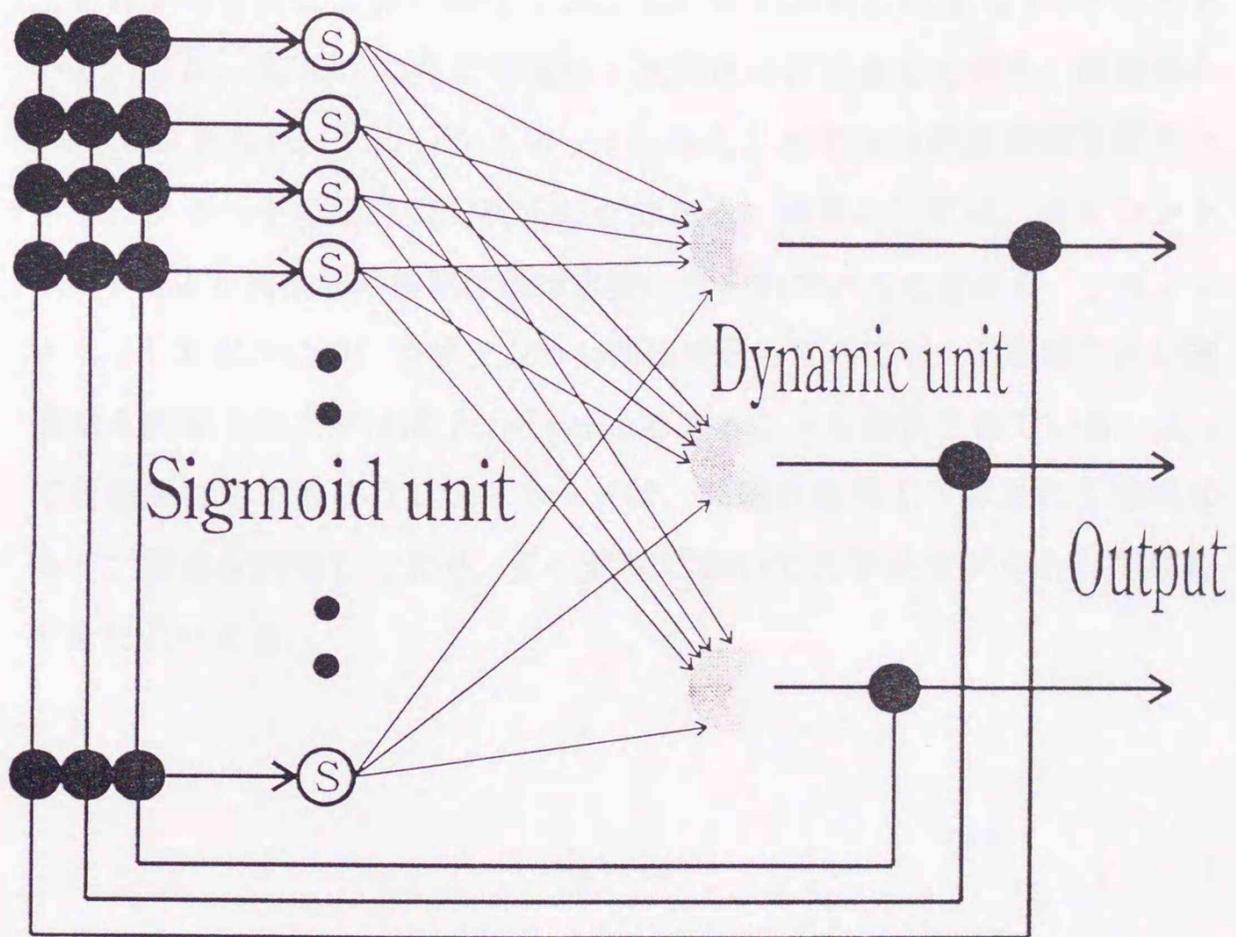
Θ : シグモイドユニットのオフセット値

G : シグモイド関数

ここで、 G 以外はマトリクス表示である。

本節では第3章で報告したカオスの解釈の一つの手法の「軌道の再構成」で得られるアトラクターに対して本システムを適用した。ダイナミックユニットの数は、軌道の再構成の次元に一致することが可能なので、その出力は直ちにネットワークの出力となる。

そこで本計算結果に対して埋め込み理論より、三次元の時間遅れ構成をとって学習用入力データとして提供した。システムは合原ほか(1993)の研究例を参考にして図5.15に示すような、入力層3、中間層30、ダイナミックユニット層3に構成した。



Recurrent Network

図 5.15 リカレントネットの構造

5.4.1 周期解のシミュレーション

図5.16 (a)(b)はそれぞれ $Re = 10^3$, $x/H = 1.2$, $y/H = 0.0$ の周期解における学習用に与えた教師信号および、リカレントネットの出力結果である。教師信号のデータ点数で200個(8周期相当)を選び、収束性の向上をはかるために計算の際は5点ごとに間引かれた代表点40を与えている。なお、式(5.8)の非定常項は1次精度の前進差分で解き、時間刻み $t = 0.005$ とした。リカレントネットに与える初期値は過渡領域を終えたアトラクター上の任意の三次元の点である。結果としては、リカレントネットによる周期解の推定はほぼ忠実に行われていると言える。リカレントネットの出力についてポアンカレ断面をとってみても、1周期ごとに通過する断面上の点がほぼ *fixed point* であることも確認されている。よって周期解に対するリカレントネットは、問題の性格上予想される単純なループ構造を再現しており、その意味において力学系モデルとして構築できたといえる。

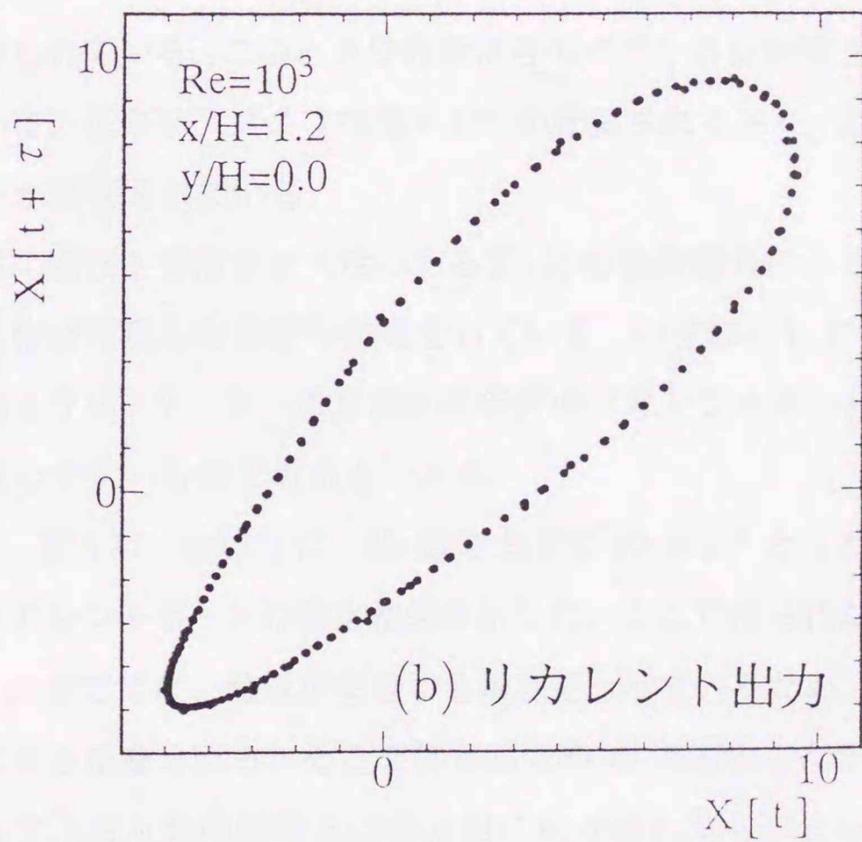
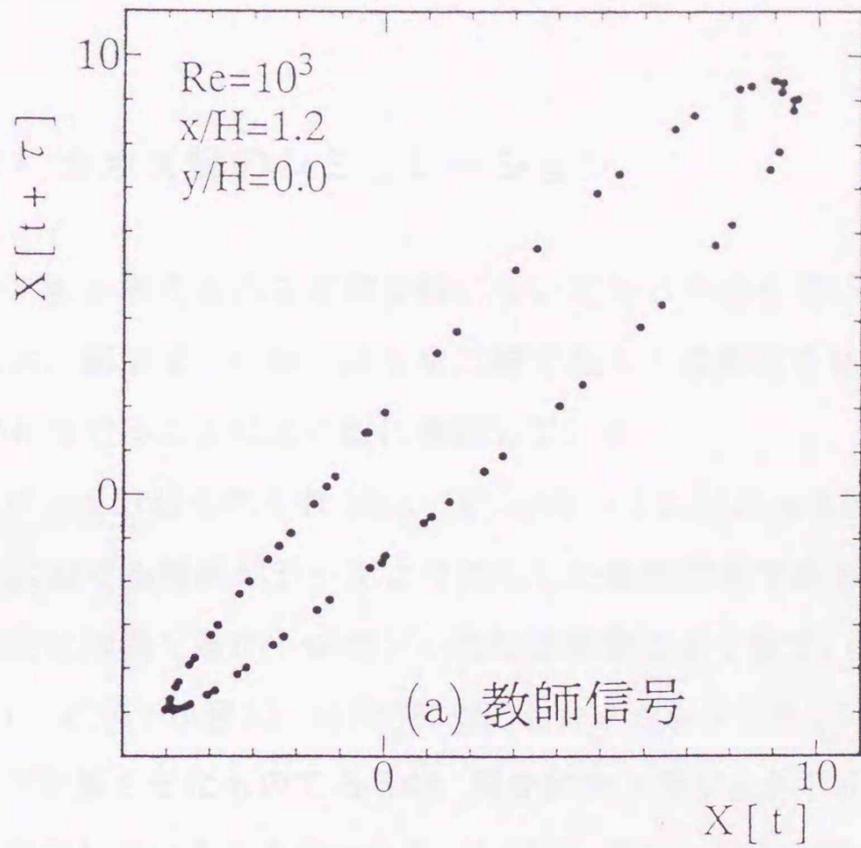


図 5.16 リカレントネットによる周期解の同定
 (ループを描く性質が再現されている)

5.4.2 カオス解のシミュレーション

カオス解と考えられる非周期解について同じ手法を用いて推定を試みた。なお、飯田ほか(1996)はカオス解であるとの判定を正のリアプノフ指数が存在することにより既に確認している。

図5.17 (a)(b)はそれぞれ $Re = 10^5$, $x/H = 1.2$, $y/H = 0.0$ と $y/H = 0.2$ の位置における時系列データより抽出した教師信号である。これらの図は数値的には異なるがトポロジ的には非常によく似ている。

図5.17 (a')(b') が図5.17 (a)(b)に対応したリカレントネットの出力で4000ステップ計算させたものであるが、描かれたトラジェクトリーは教師信号をよく近似していることがわかる。ただし、図(a')からは図(a)の教師信号に見られる周期軌道の帯が消滅し、ほぼ一本の閉曲線軌道としての推定結果が得られている。このときの教師信号のポアンカレ断面 $X[t + 2\tau] = 0.5$ において、正のリアプノフ指数 0.339 が計算されており、カオス状態であることが証明されている。

一方、図(b')ではカオス性のある図(b)の教師信号のトラジェクトリーの形をほぼ再現した良好な推定をしている。いずれにしても $Re = 10^5$ の場合はトラジェクトリーの形状が本条件のリカレントネットに対して比較的推定しやすいものであるといえる。

次に、図5.17 (c)(c')に、 Re 数を上げて $Re = 10^6$ としたときの教師信号とリカレントネットの推定結果を示した。ここで得られたアトラクターは、これまでになく軌道が交差する形状をとっているため、推定に困難さが生じると推察される。そこで学習回数を40万回としたが、運用結果は図に示すとおり教師信号とは部分的にかけ離れたものとなった。すなわち、 $X[t + \tau]$ 方向へは尖り度をもつ軌道の特徴を再現しているが、 $X[t]$ 方向へは不確定な推定結果を示している。しかしながら、時空間の短期的な予測可能性をカオス解において示すことはできた。なお、学習回数が1万回オーダー程度では、これほどまで再現可能な状態ではないこと

が確かめられている。

非周期軌道や周期の不明な軌道を学習する場合は、誤差を評価する区間を区切り、誤差が大きくなれば再度その地点で学習し直す手法があるが、今回は修正を施していないため、このことも影響していることが推察される。また、アトラクターの形状および軌道に分布する教師データの不均一性に依存するなどの理由も考えられるが定量的なことは今後の検討課題である。

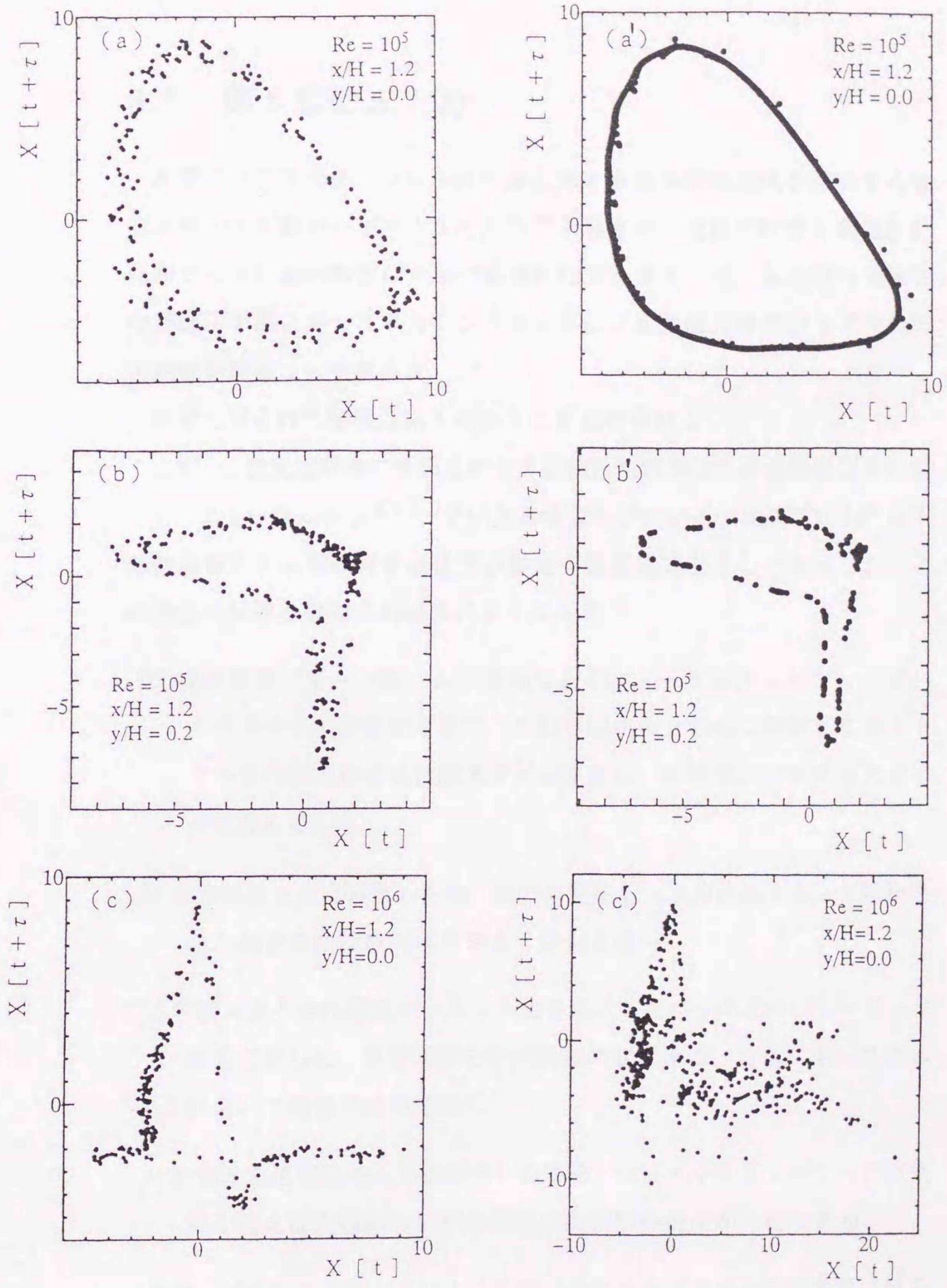


図 5.17 リカレントネットによる非周期解の同定
 (a), (b), (c) ; 教師信号, (a'), (b'), (c') ; リカレント出力

5.5 第5章のまとめ

本章では二次元チャンネル内の非定常の剥離再循環領域を形成する噴流が有する変動モードをNNを用いて学習させ、流れの状態を数値的に判断させる能動的制御のための基礎的知見を得ること、ならびに噴流中の非線形挙動に対してリカレントネットによる基礎方程式のモデル化の可能性を探ることを試みた。

本章で得られた結果は以下のようにまとめられる。

まず、二次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流の自励振動現象に対して、ニューラルネットワークによる学習を行いレイノルズ数が 10^4 以下の数値解析の結果に対する状態の推定を数値化できることを示した。この部分の結果を要約すれば次のようになる。

- [1] 教師信号パターン数、入力層数などのニューラルネットワークアーキテクチャの決定が重要で、これらの組み合わせに依存してネットワークの出力が2値化的スタイルまたは、中間値が存在するスタイルに変わる。
- [2] 学習誤差を対数表示した際、負の勾配をもつ学習曲線を辿って構築された結合係数は教師信号をよく近似する。
- [3] 学習スタイルは修正モーメント法を導入したバックプロパゲーション法を採用した。学習回数と学習誤差の収束率は、ともに本システムにおいて最良の結果を得た。
- [4] 変動する速度場を入力情報とした場合、ニューラルネットワークの条件が整えば周期解の学習結果で非周期解の推定が可能である。

次に、リカレントネットによって噴流のフリップフロップの挙動に見られる周期性と非周期性の推定から力学系モデルの同定を試み、以下の結果を得た。

[1] 周期解に対するモデル化は、「軌道の再構成図」オリジナルデータとループを描く性質についてトポロジ的にも一致し、成功を見た。

[2] 非周期解に対するモデル化は、トラジェクトリーの形状によって成功する場合と困難な場合とあるが、後者でも短期的な予測の可能性を示すことができた。しかし、推定期間や推定箇所などは今後の研究課題である。

第6章 吹込みを援用したニューラルネットワークによる能動制御

前章では、非定常の剥離泡が影響をおよぼすフリッフロップ現象に着目して二次元チャンネル内噴流が有する偏流モードを NN を用いて学習し、流れの状態を数値的に判断することの可能性を述べた。そこでは変動する速度場の入力情報に対して周期解、非周期解の推定が可能であることを示した。本章では、この NN のセンサリング性能を流れ場の制御に適用し、目的とする偏流状態に早々と遷移させる手法を提案する。数値解析による吸込みの効果についての研究は、佐野(1991)がスリットからの定常の吹込みを伴う二次元の乱流境界層について行っているが、平均特性、乱流特性を変化させる効果がないことやモデルの高次精度化の有効性が少ないことが確かめられている。ここでは流れ場の NN による状況推定結果を吸込み制御力に連動し、非定常で ON-OFF 駆動する。また本研究は制御の開始前後と同期して NN の教師データの切替を導入し、流れ場の実現値に即応したオブザーブ機構を構築した。また制御則の評価も行いエネルギーコストを小さくするような最適化の条件も策定した。

本章の構成は次の通りである。

6.1 節では、二次元チャンネル内噴流のニューラルネットワークによるインターアクティブ制御の意義について述べる。

6.2 節では、計算条件を述べる。

6.3 節では、ニューラルネットワークの切替方法の概要を述べる。

6.4 節では、制御則とその評価法について述べる。

6.5 節では、制御結果を周期解とカオス解についてそれぞれ述べる。

6.6 節は本章のまとめである。

6.1 ニューラルネットワークによるインターアクティブ制御の意義

本章では二次元チャンネル内噴流の噴流近傍の剥離泡に対する能動制御を行い、フリップフロップ現象の抑制の効果を述べる。制御力の付与は、主流と平行かつ下壁面近傍に設置した吸込みによる。また、制御の監視役を務めるオブザーバとして NN の切替を提案し、 NN からのフィードバックゲインを制御指令として吸込みの駆動に連動させる。この吸込みを援用した制御により、チャンネル空間内全体に揺動する噴流のフリップフロップ現象を予測し必要に応じて二次元チャンネル内の片側壁に偏流したままの状態を維持させる。これにより流動損失の原因となる剥離泡の発生を抑え、流体の運動に不必要な変動エネルギーを削減したり、流れ場全域にわたるフリップフロップ現象を局所的な領域に限定した発振現象に変えることが可能となる。しかも振幅の大きさや振動の周波数を遷移させて混合促進、エネルギー伝達、冷却・放熱効率向上など工学的評価も十分期待できる。なお、本流れ場は比較的古くから実験、数値解析の両面から多くの報告がされているにもかかわらず、以上に述べた流れ場の不安定性に着目し能動的に制御しようとした例は見あたらない。木谷(1996)の報告によれば、少数の例外を除いて剥離制御に関する従来の研究は、流れ場の情報をアクチュエータにフィードバックしないノン・インターアクティブ制御に分類される。しかし、本章の研究は流れ場の情報を吸込みにフィードバックしている点でインターアクティブ制御(図6.1)となり工学的意義も大きい。

本研究の NN アーキテクチャに関する特徴は、制御に用いた教師データの少なさにある。その理由のひとつは流れ場の挙動が可視化でもわかるように単純であることが考えられるが、前章における入力条件や学習回数など NN 運用の事前調査が十分に行われたことも教師データ数減の要因と思われる。

飯田ほか(1995)は、熱対流系の対流パターン遷移の場合には47パターンというかなり多くの遷移過程の状態値を抽出し利用している。よって

レイリー数によっては対流パターンの安定モードの区分が明白となり、パターン数を減らした制御も可能であると考えられる。しかしこのことと比較しても、 NN の切替によるオブザーブ規範引継の導入により、3パターンという少ない数での制御が達成されるなら画期的なことである。当然ながら、誤動作を招かない条件をつけて、パターン数を減らすことができれば教師データの準備に要する情報収集の負担軽減が得られたことになり、学習時間の効率化につながると考えられる。なお、この数であってもレイノルズ数 $Re = 10^3$ の周期変動および 10^4 のカオス的変動のどちらの場合でも、十分な制御結果が得られている¹。このことは、予測精度の向上のためにむやみに教師データを増加すべきではないという増本ほか(1995)の報告にも一致している。本章で試したレイノルズ数の種類は多くはないが、制御方法の指針を示したことは意義深い。

¹詳細は6.5節参照のこと。

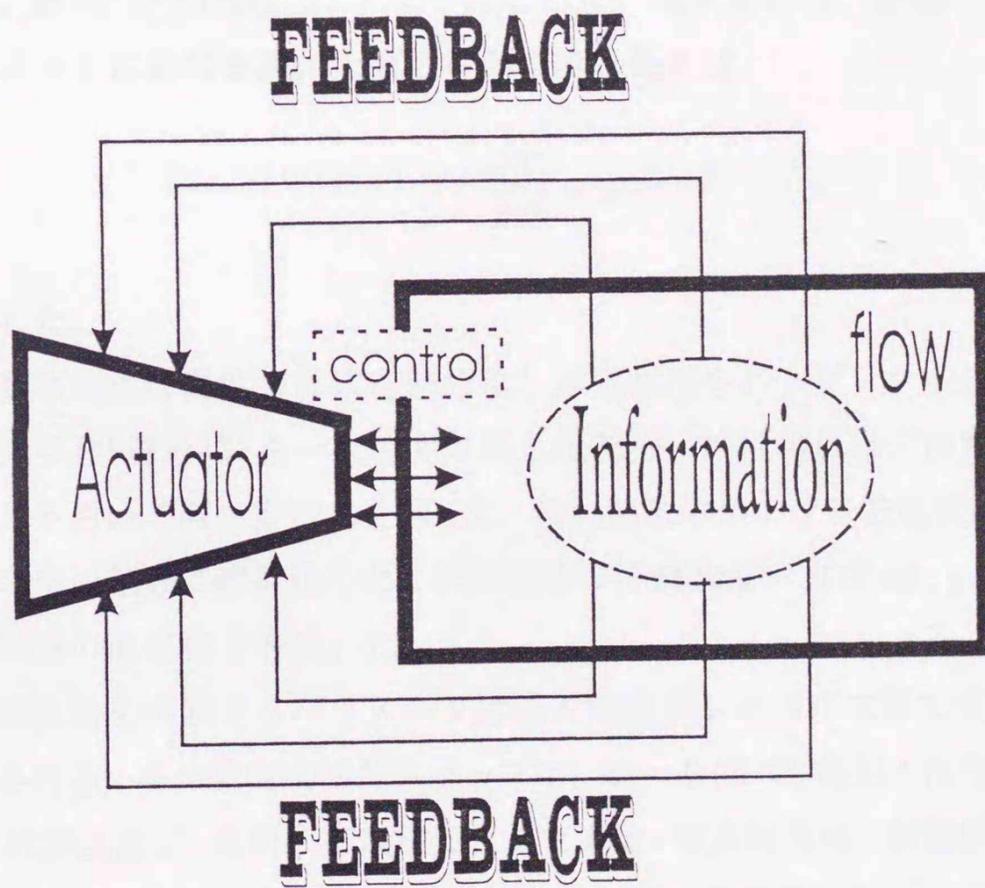


図 6.1 インターアクティブ制御の概略

6.2 計算条件

本研究では二次元チャンネル内に噴出する非圧縮性粘性流体の流れを数値的にシミュレートした。計算対象には、図6.2に示すようにアスペクト比 ($L : H$) が $6 : 1$ である二次元流路の左端中央部に、吹きだし幅 $D (D \leq H)$ で放物形 of 速度分布をもつ噴流が流入する場合を想定した。吸込みの位置は吸込み幅 d で左壁面下隅に設置し、 $D/d = 2$ とした。また、 H と D の比は $5 : 1$ で一定とした。境界条件は、壁面で滑りなし、 $x/H = 6$ における流出と吸込み部の境界条件は

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

とした。

数値解法は渦度方程式を差分化し非定常項をルンゲ・クッタ・ギル法、対流項(非線形項)を一次精度の風上化差分、粘性項には二次精度の中心差分を用いて解の安定化を図った。流れ関数のポアソン方程式は、二次精度の中心差分で離散化した。計算領域の分割数は x 方向 60、 y 方向 50 で等間隔の直交格子を用いた。

流れ場を代表するパラメータは流入噴流のレイノルズ数で式(2.5)で定義される。また計算の時間ステップは、 $dt = 0.05$ で、時刻 t は代表長さ H と代表速度 U_0 を用いて無次元化してある。なお計算は、計算開始の 0 ステップで速度分布をインパルスに与えているので、 $Re = 10^3$ の場合で 50 ステップ(無次元時間 3.0)までは周期変動に達していない過渡状態となっている。

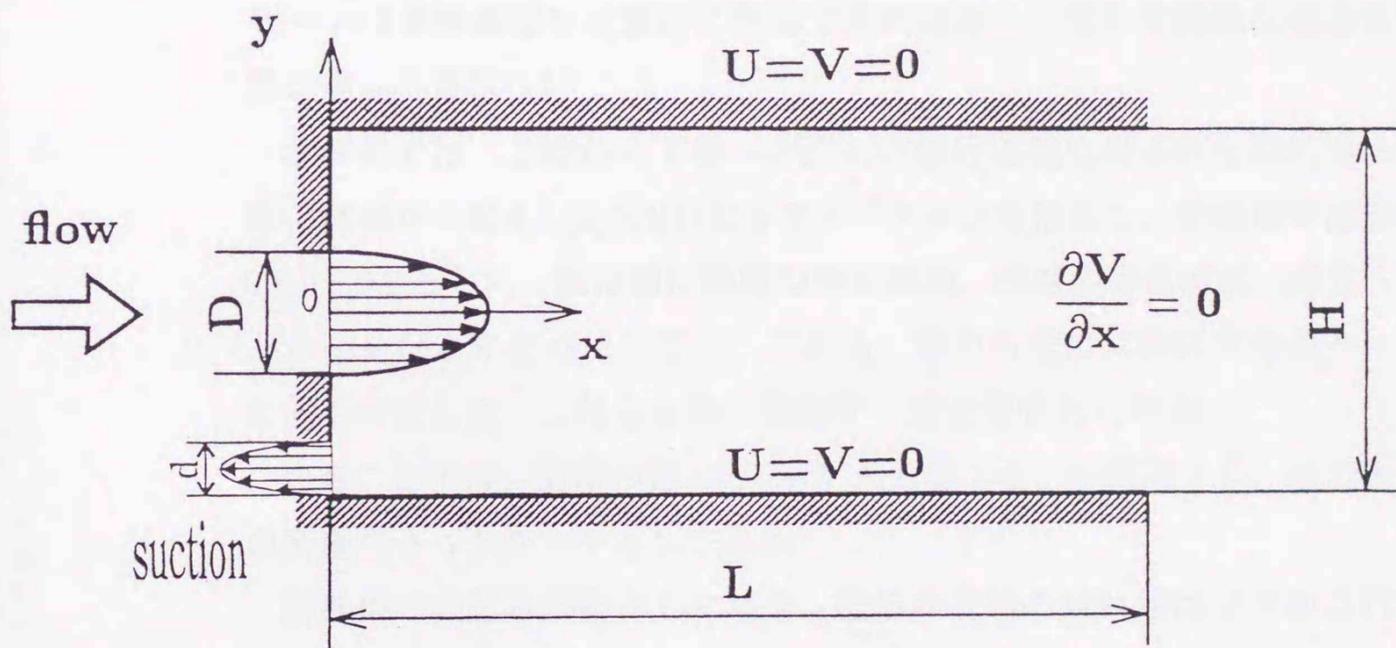


図 6.2 吸込み制御の概略

6.3 ニューラルネットワーク切替の概要

制御の有無に拘わらず教師信号の定義は次の通りとする.

上壁へ偏流する状態 : 1

下壁へ偏流する状態 : 0

流れ場が剥離泡の影響により現在どの方向にどれだけ偏流しているかを推定するには, 前章の結果を利用する. すなわち, チャンネル内の偏流の代表モードを流線図による可視化データを参考にし選定する. 代表モードは遷移過程を定量的に評価できれば良く, 決して複雑な偏流の状態を選ぶ必要はない.

本研究では, 上壁から下壁への流れの移行過程に得られた流れ場の可視化情報から図6.3 (a)(b)(c)に示す3パターンを抽出し, 教師信号は順に0.8, 0.6, 0.2とした. 図は順に渦度の等値線図, 流線の等値線図, 速度ベクトル図をひとまとめにして示してある. 図中右上には教師信号のモードの値も付記した. これらを第一教師データと便宜的に呼ぶ.

なおここでは, 前章の図5.5に示す入力層16, 中間層10, 出力層1の階層型ネットワークとしてある.

制御用の吸込みが動作した場合, 吸込み近傍の流れ場は NN がこれまで学習したことのない状態であるため, 制御効果が明らかに現れた場合でも NN の出力結果としては正しく判断されないことも予想される. そしてこの誤判断により制御の誤動作を招きかねない. 事実, 吸込みによって壁面への偏流が維持されたにもかかわらず NN の出力値がおよそ0.4というモードの中間値を示すことも経験している. この誤判断を避けるために教師データの差し替えをタイミングよく行って, 制御開始前と制御開始後のオブザーブ基準の切替を行う手法を考案した(図6.4). これには吸込み常時動作(ON-OFFしない)させた場合の計算結果から得られ状態(図6.5)を利用すれば良い. このときは, 噴流固有のフリップフロップ現象が抑制されて下壁面に吸い寄せられた安定偏流となっていることが理解される. なおこの場合, 吸込み流量比は0.7の場合を用いている(流量比の定義は次節で詳細に述べる). よって流れがフリップフロップ現象により

下壁面に近づいたと判断されたなら、モード 0.1 である第一教師データ (図 6.3 (c)) の代わりに、吸込みにより十分安定した場合を示すモード 0.1 の図 6.5 を使用する。この状態図を勘案した教師データを第二教師データとする。

NN のアーキテクチャとしては、第一および第二教師データに対する結合(重み)係数を計算し、第一教師データによって制御が開始され NN 出力が下壁面に偏流した状態としての判定域に突入したと判断されたなら、第二教師データの NN にオブザーブ規範を受け渡して制御を継続遂行させる。この NN の切替による観測の引継を取り入れることにより、流れ場の現状をより効果的に認識することが可能となる。そして吸込みの ON-OFF を繊細に動作することで少ない制御流量と制御時間での流れ場の最適制御を行い、エネルギーコストダウンの可能性が考察できた。

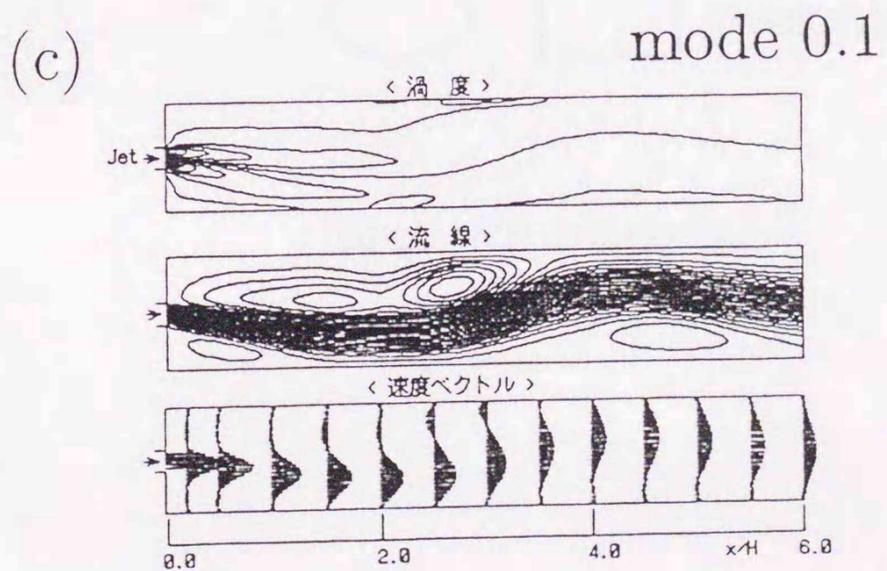
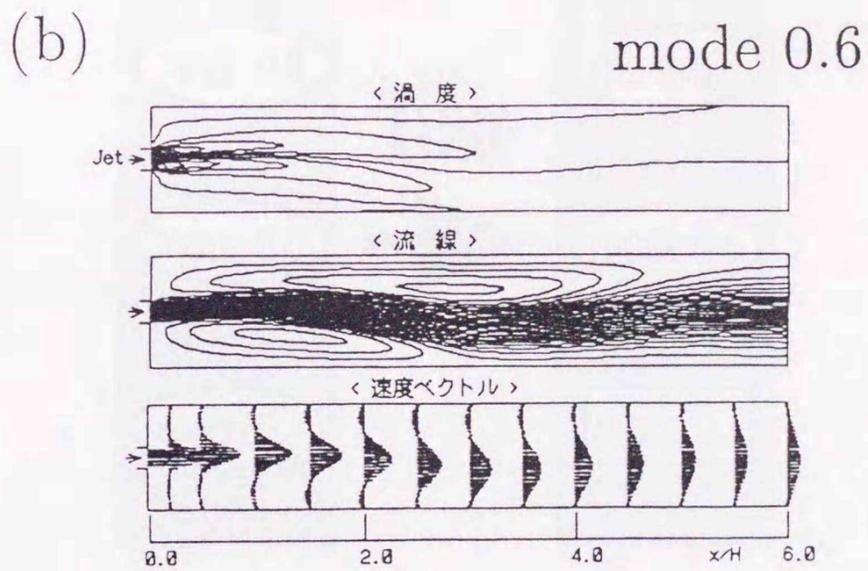
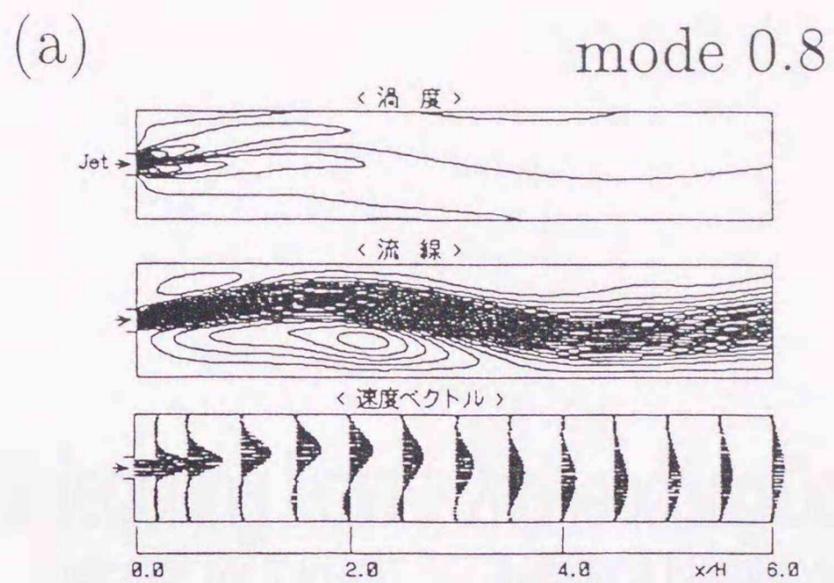


図 6.3 第一教師データ

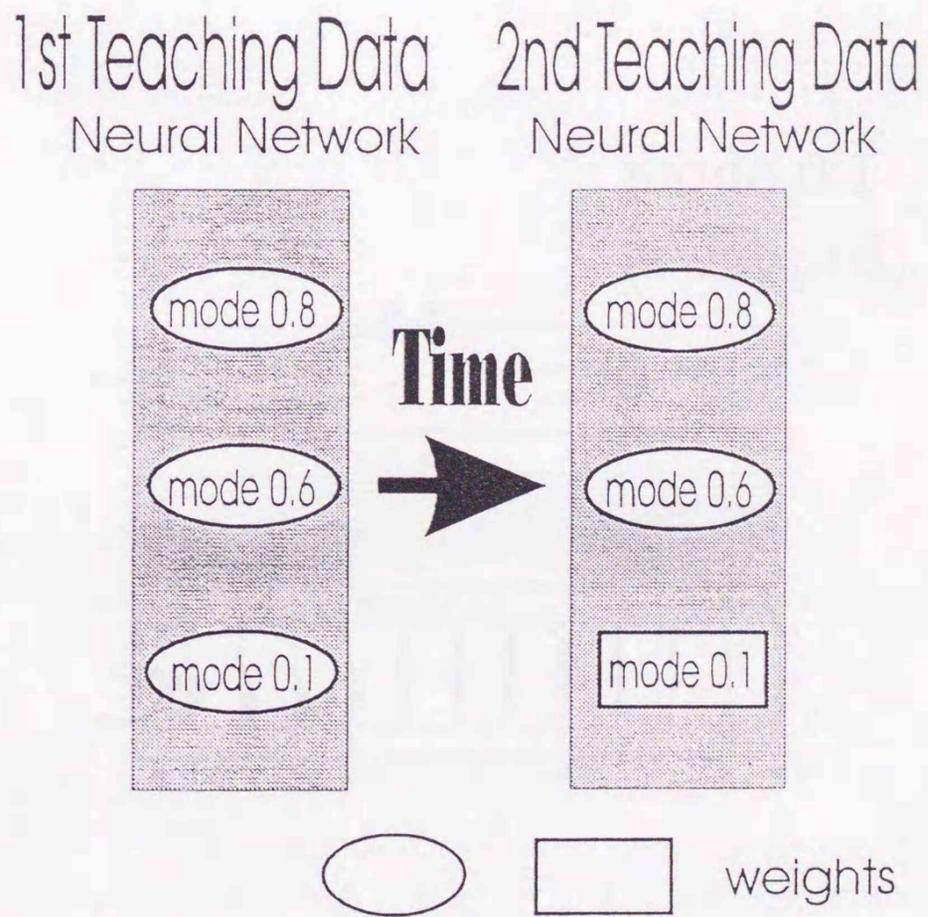


図 6.4 NN の切替の概念

6.4 制御則とその評価法

本研究の制御則の評価は噴流の流量比 q/Q と制御時間 t_c とにより行う。流量の定義式は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \text{噴流の流入流量} \quad Q &= D \cdot \bar{U} \\ \text{吸込みによる流出流量} \quad q &= d \cdot \bar{U}_s \end{aligned}$$

ここで \bar{U} は噴流の流入平均速度, \bar{U}_s は吸込みの流出平均速度とする。

図6.2 に示す入力位置で常時吸込みを続けることは, フリップフロップ現象を抑制し安定した下壁面に付着したモード0の状態を維持できるが, 制御としてのエネルギーコストの観点からは好ましくはない。そこで飯田ほか(1995)のON-OFF制御のアルゴリズムを参考にして以下の手順で行う。

- (1) NN の出力値がある数居値の上限を越えたら, 吸込み動作を開始する。
- (2) 吸込みにより偏流の壁側への戻りが始まり下限の数居値を下回ったら, 制御動作を停止する。

数居値の設定水準や数居値の幅などのパラメータによっても評価が異なるので議論を簡単にするために, ことわりのある場合を除いて NN の出力値 0.1 を基準に定めこの値の ± 0.02 での数居値幅をもつ制御について評価した。

6.5 制御結果

6.5.1 周期解の制御

$Re = 10^3$ の周期解に対する制御結果について述べる。図6.6は目的とする制御が一応達成されたものと見なせる流量比0.2の場合の偏流の状態である。この様な弱い吸込みでも下壁側の剥離泡が消滅して準定常の偏流を実現できる。図6.7(a)(b)(c)は吸込みによる制御力(流量比)がそれぞれ0.7,0.35,0.2において動作したときの制御の履歴である。図中の左縦軸は NN の出力、右縦軸は流量比を示している。横軸は無次元化された時間である。図中実線は NN の出力、破線は流量比を示す。制御開始はフリップフロップ現象が最初に下壁面に偏流したと判断された NN の出力が0.1以下になった時点であり、同時に NN の切替が行われる。切替は1時刻ステップで行うため、無次元時刻100付近でこの交代が原因と思われる NN 出力の突発的变化が認められた。ここでの制御則は、 NN の出力が0.1を越えたなら流量比0.75で動作するように指示してあるので、破線の履歴からも切替の状況が読みとれる。なお、それ以後の制御は NN の出力が数居値0.12を越えたら流量比一定で吸込み動作が開始され NN の出力が数居値0.08以下になれば吸込み動作を終了する。この単純な繰り返し動作により、流れ場全体に存在していたフリップフロップ現象が抑制され、代わりに偏流壁面近傍での微少な振幅の高周波振動にとどまる様子が示された。結果として、下壁面に偏流したままの、ほぼ安定な流れが維持できることが分かる。図6.7(a)(b)(c)の流量比による制御力の違いを見比べると、制御力が弱まると制御時間 t_c の時間間隔が伸びる傾向が伺える。また NN の出力結果から見ると、(a)の流量比0.7が強いと NN の出力波形に鋭いピークが認められ、吸込みのON-OFFによる反動の影響が表れている様子も伺える。(c)の流量比0.2の場合では、(a)に比べ NN の出力波形に穏やかさが認めれている。このことは、強い吸込みによるON-OFF制御が必ずしも偏流の良好な安定化につながるとは言えないことが推察される。図6.8(a)(b)は図6.7(a)と(c)に対応する吸込みが

動作したときの流れの状態図である。

図6.9 (a)は、流量比 0.1 での制御の履歴である。この場合、吸込みが流れを下側壁面にとどまらせるための十分なエネルギーを持っていないことが分かる。よって安定した偏流を維持するには、安全を考慮して流量比 0.2 以上でなければならないことが示された。図6.9 (b)は制御力が全く存在しないときの流れ場のフリップフロップ現象の NN の判定の様子を示している。図(a)では、流れが上壁へ移行しようとした時、制御則により一時偏流の移行が食い止められている。しかも弱い吸込みが存在することで図(b)に示すようにフリップフロップ現象の周期は変わらないが上壁での停留時間が短縮されている。これによりフリップフロップ現象を抑制できない場合であっても、弱い吸込みにより偏流の時間調整が可能であることが判った。

流量比と制御時間の関係を図6.10 に示す。この図から最適制御の条件が読みとれることになる。縦軸に流量比、横軸に制御時間を示した。 NN 判定の数居値 0.1 ± 0.02 (図中黒丸)における制御が他の線図と比較してフリップフロップ現象を抑止するのにエネルギーコストがもっとも少ない関係を示している。なお流量比が0.2より少なくなると図6.9 (a)に示したとおり、偏流の維持を目的とする制御とは異なる結果を招くのでこの線図上からは評価できない。

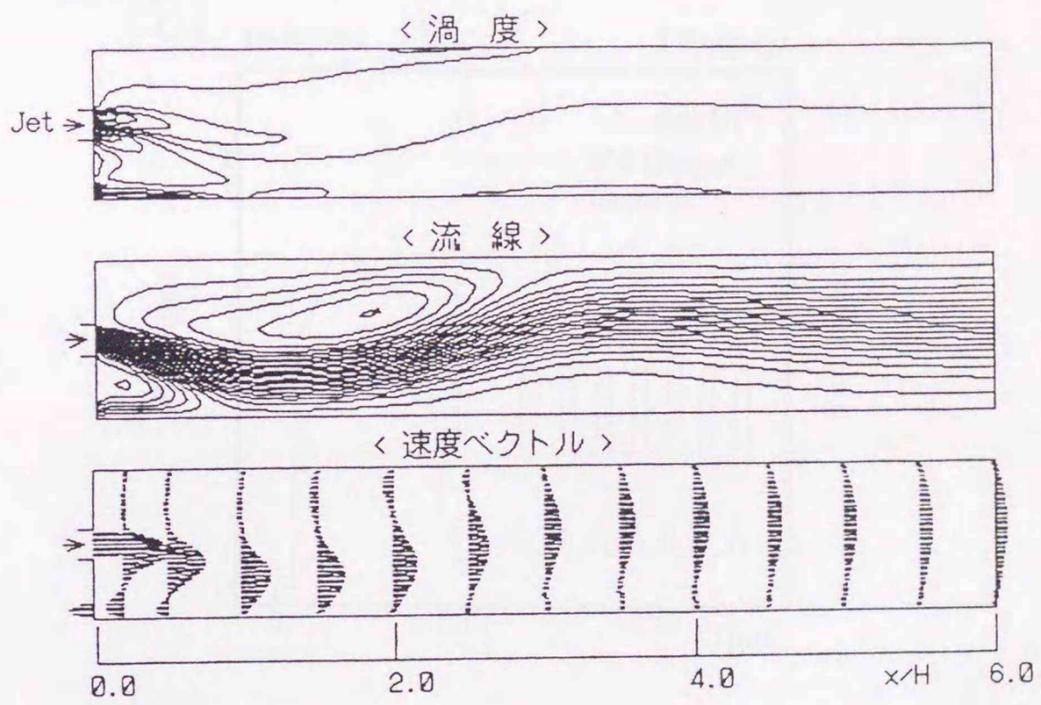


図 6.6 吸込みの代表図 (流量比0.2)

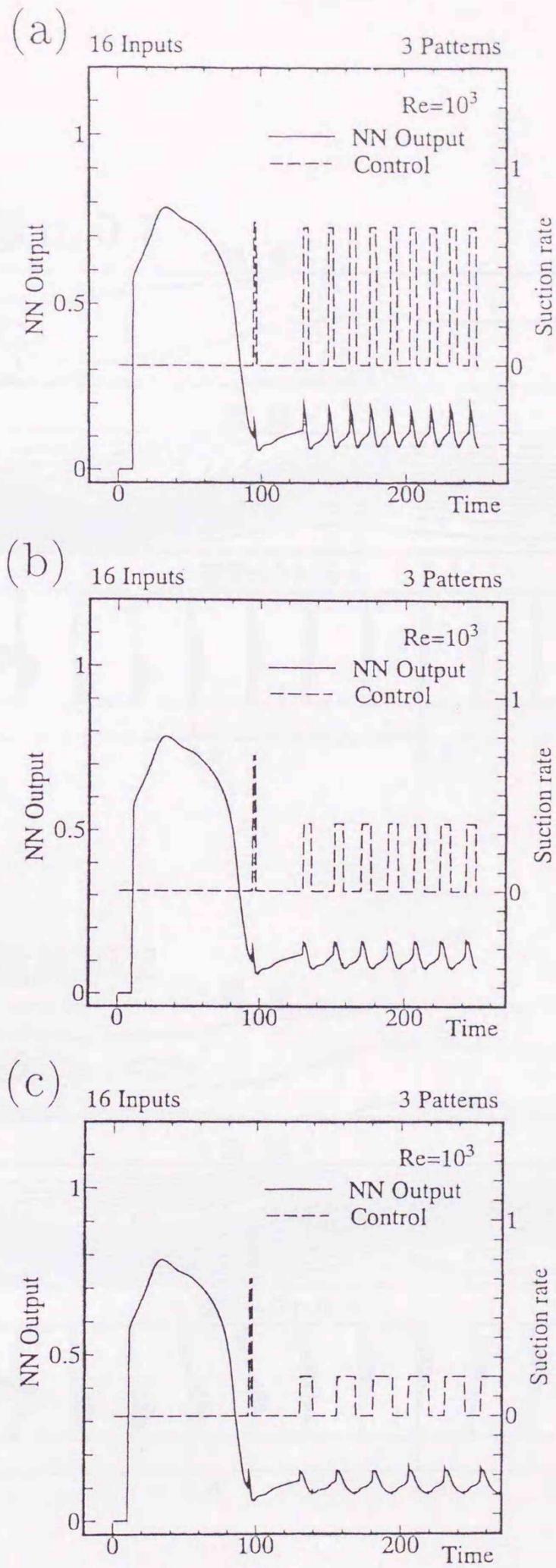
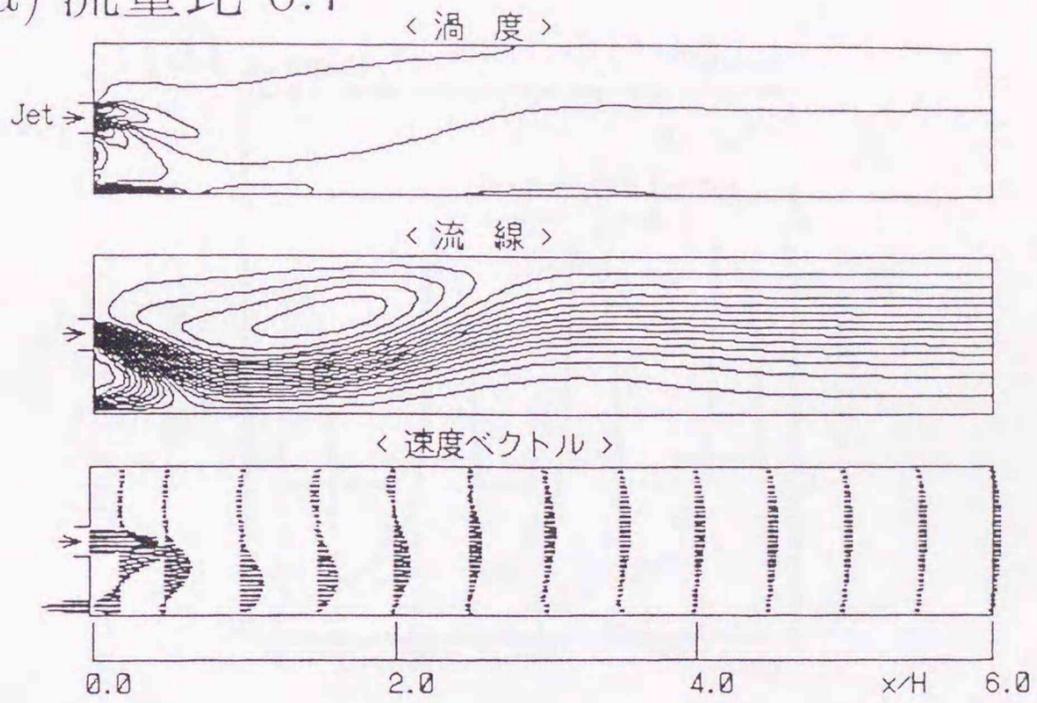


図 6.7 制御成功時の履歴

(a) 流量比 0.7



(b) 流量比 0.2

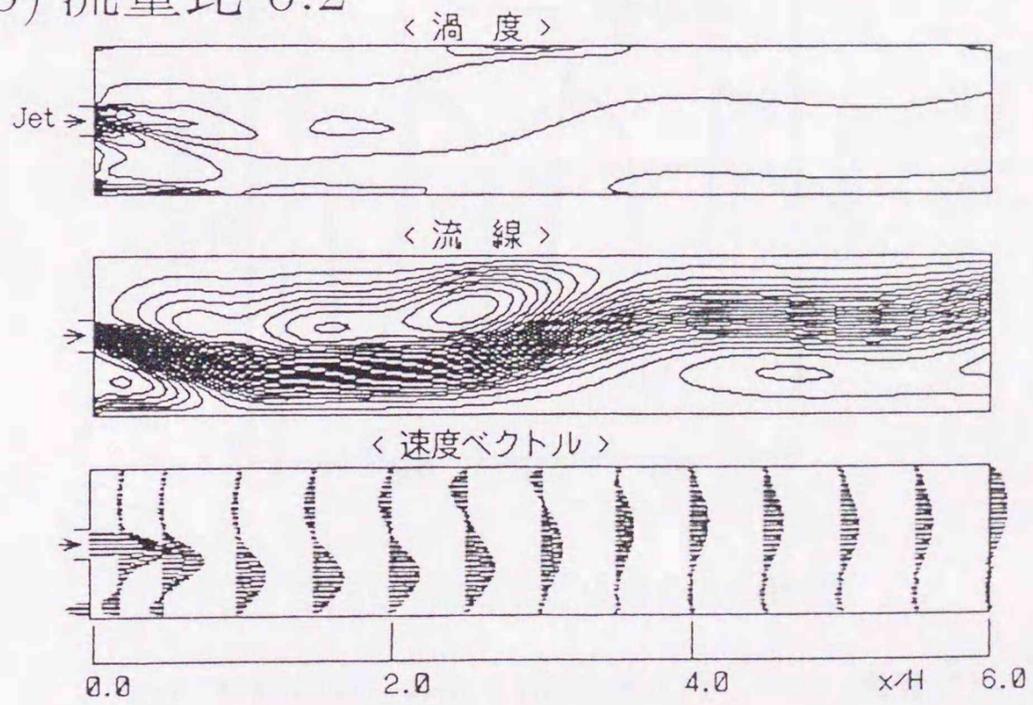


図 6.8 制御時の状態図

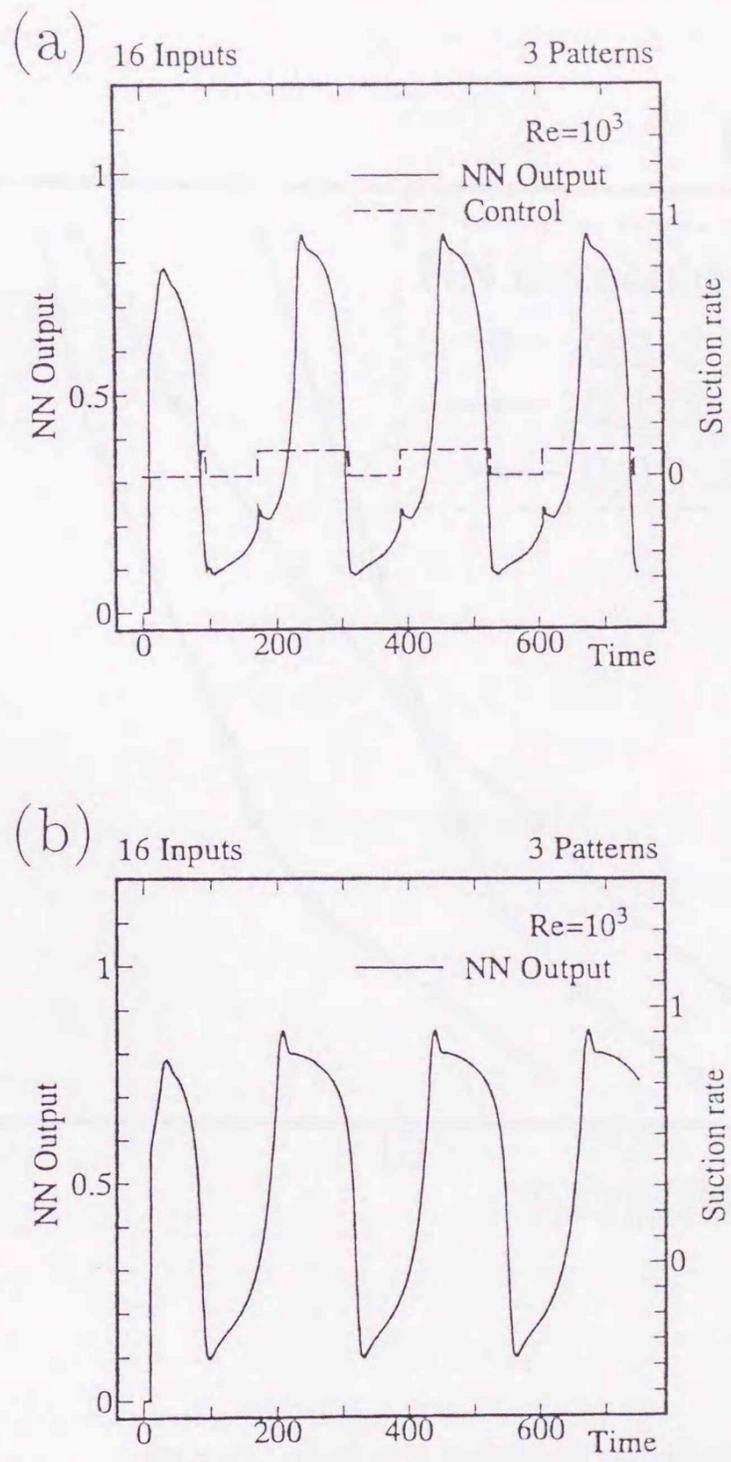


図 6.9 制御なしの場合との比較

(a) ; 制御の吸込みあり (流量比0.1) , (b) ; 制御なし

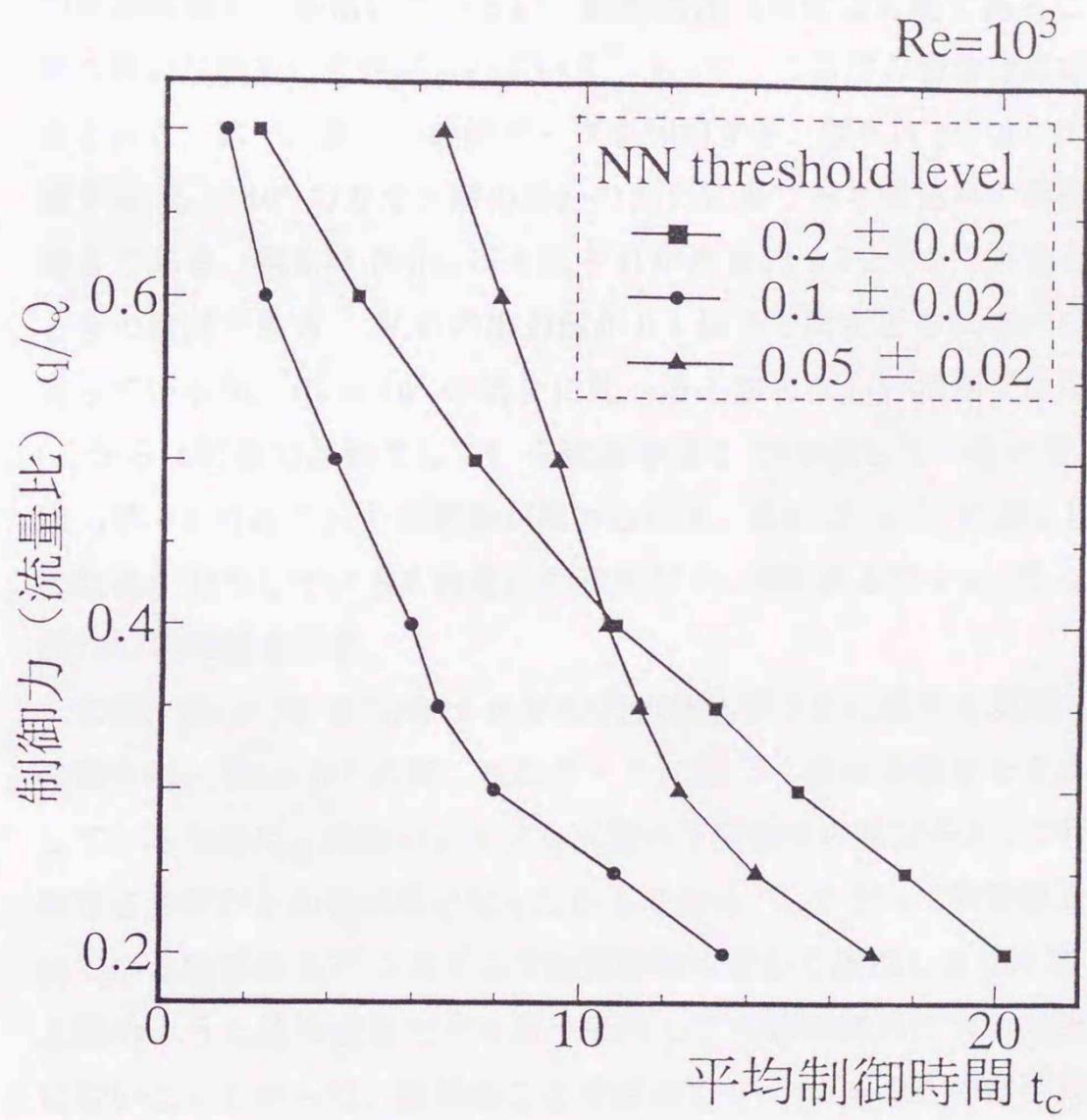


図 6.10 流量比と制御時間との関係

6.5.2 カオス解の制御

カオス解 ($Re = 10^4$) に対する制御結果を示す。教師データは $Re = 10^3$ の周期解のものを用いているが、非周期性の同定は可能であることは前章の詳細な調査にて保証されている。よって、ここでの制御は周期解の場合と同じ、第一、第二の教師データを利用する。図6.11 (a)は、 NN が判定する $Re = 10^4$ のカオス解の場合の出力結果であり吸込みの存在しない場合である。図6.11 (b)(c)はそれぞれが流量比 0.7と0.2で制御を行ったときの履歴である。 NN の出力値が 0.4 以下で両者ともに流れの偏流を保っているが、 $Re = 10^3$ の場合に比べるとおとなしい状態ではない。図(c)からは制御力が動作している制御時間 t_c が持続しているとき NN の出力値 0.3 付近で出力の停滞が認められる。図6.12 (a)(b)に図6.11 (b)(c)の制御が動作しているそれぞれの時刻が $t = 600$ および $t = 575$ における流れの状態図を示す。

なお、 $Re = 10^4$ の場合は NN の出力敷居値 0.2 に基準を変更した。この理由は、 $Re = 10^3$ の第二教師データに基づく結合係数をそのまま運用しているために、未知のレイノルズ数の下壁偏流の判定を 0.1で行うには無理な負荷がかかる結果となったからである。したがって周期解から得られている既存の NN システムで非周期解に対して運用しようとするなら、上記のように基準値をたとえ若干緩和しても観測結果に大きな支障は生じないことが判った。当然のことではあるが、 $Re = 10^4$ の常時吸込みの場合の教師データを NN に運用すれば偏流の判定基準を厳しくできることは言うまでもないが、レイノルズ数に応じて逐一教師データを提供して制御を行うのは制御則の決定に多大な時間を割くことになり、 NN の特徴を効果的に生かしているとは言い難い。本研究のように未知の挙動を既知のデータで制御できるという点が、 NN の長所を利用した制御と言える。

図6.13 (a)(b)は制御が芳しくない例でそれぞれが流量比 0.1, 0.05 と極めて制御力が脆弱な場合である。不規則性が卓越して制御が困難になっているが、特筆すべきは、主流の高々数%の弱い吸込みでも存在すれば下壁

に偏流した状態の頻度を高めることが可能である点である。よって、吸込み援用の効果は絶大なものがあり、以上からカオス解の制御についても十分な成果を得ることができた。流量比と制御時間の関係を図6.14に示す。縦軸に流量比、横軸に制御時間を示した。 $Re = 10^3$ の場合に比べると、いずれの場合も制御に要する時間は増加している。考察の結果、 NN の敷居値を変化した場合どの線図も似たような傾向を示したが、 NN の出力を0.3以下での流量比に対する最適制御の条件は、 NN 判定の敷居値 0.2 ± 0.02 (図中黒丸)であり、平均の制御時間を見比べても流量比の変化全体にわたって、もっとも短時間で行えることが読みとれる。流量比が0.15よりさらに絞られると、偏流の維持に要した時間に間欠性が見られたり上壁への偏流が認められるなど、十分な制御結果は得られなかった。

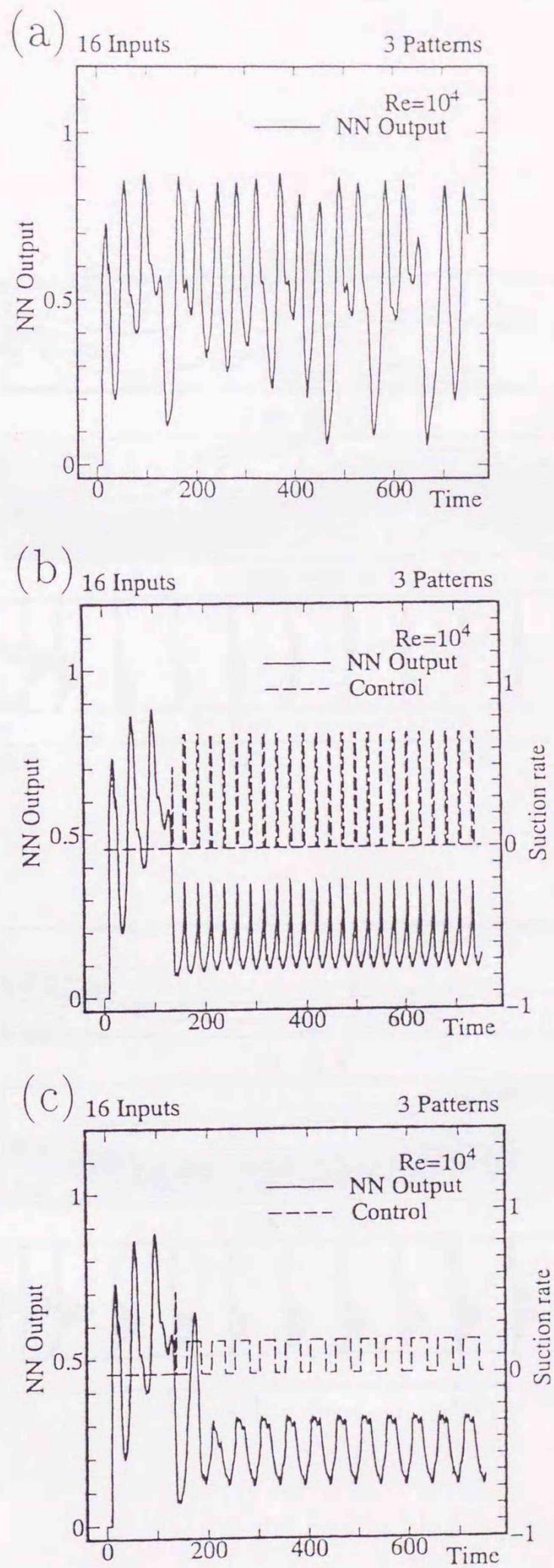


図 6.11 NN の出力と制御の関係

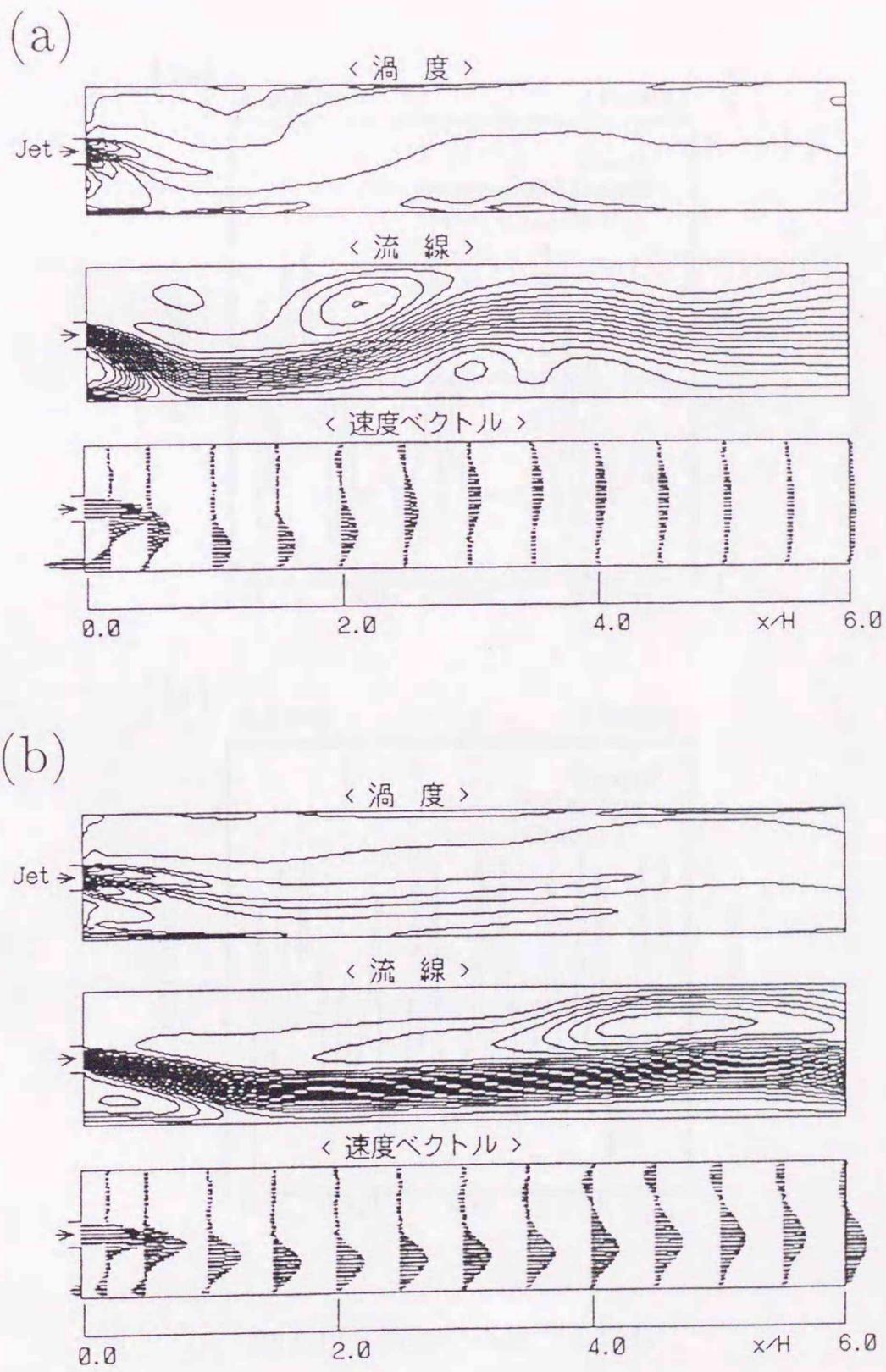


図 6.12 レイノルズ数に応じた NN による制御の結果

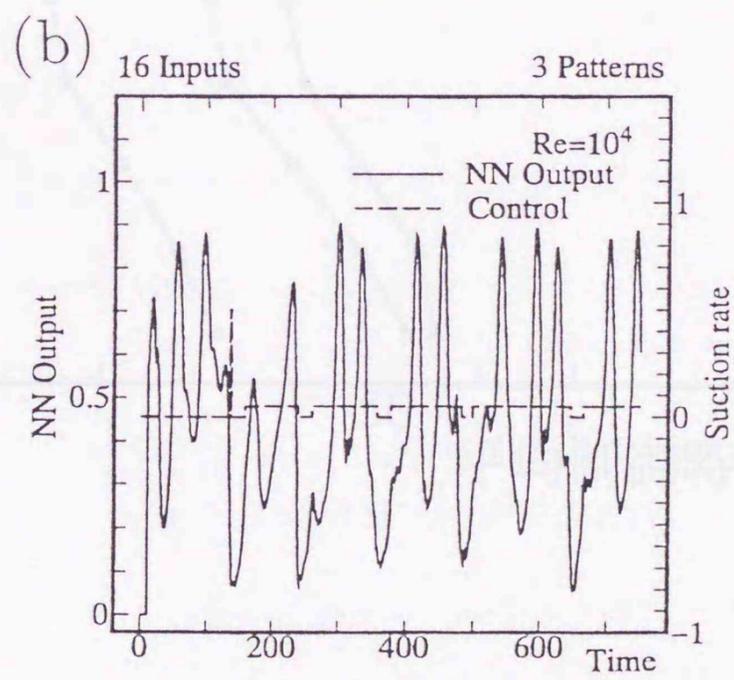
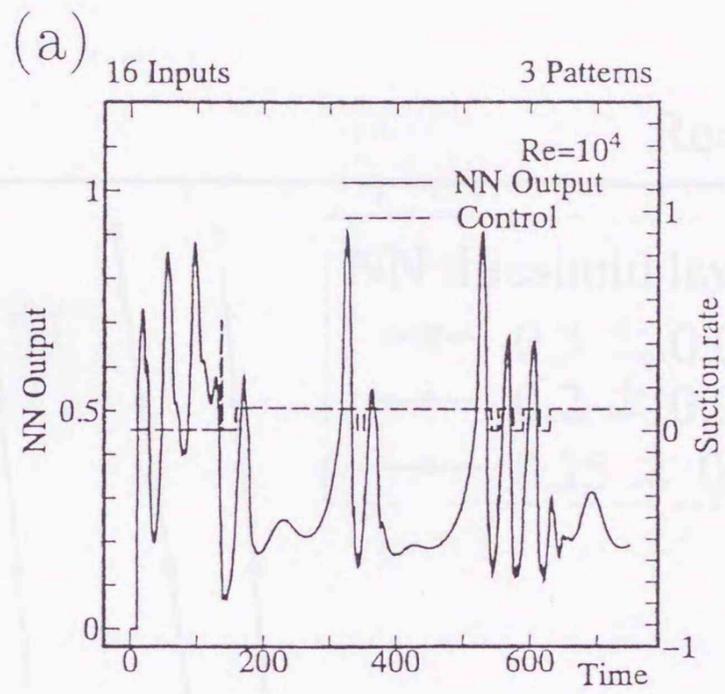


図 6.13 制御の不成立の場合

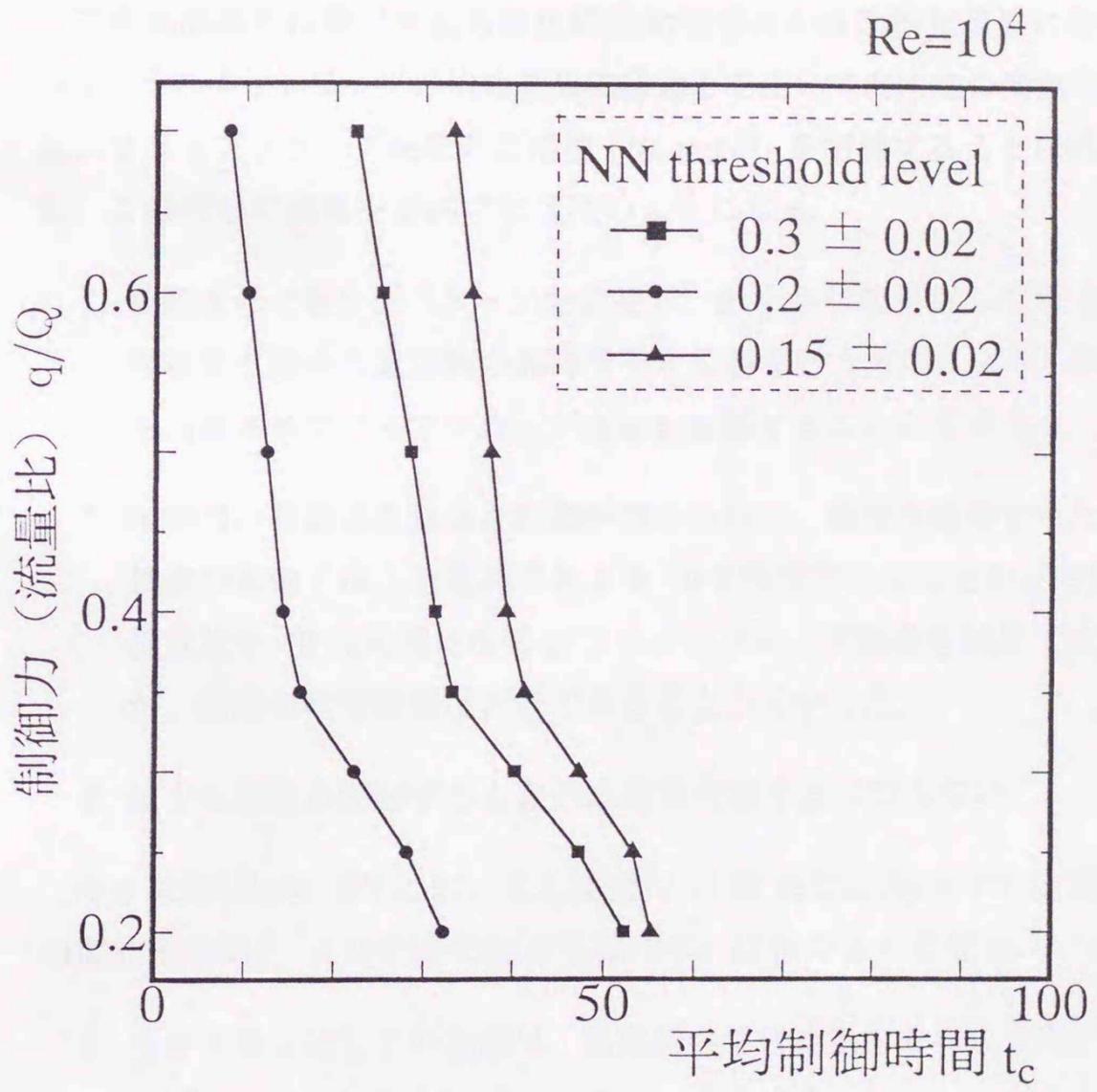


図 6.14 流量比と制御時間との関係

6.6 第6章のまとめ

本章で得られた結果を以下にまとめる。

二次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流の自励振動現象に対してニューラルネットワークの出力結果に吸込みを用いて剥離泡の発生を抑止し、フリップフロップ現象の周期性 ($Re = 10^3$) を制御することに成功した。この部分の結果を要約すれば次のようになる。

1. 教師信号は僅か3パターンを使用し、あらかじめ用意した吸込みが存在する場合の定常解の教師信号と切替を行う方法により、剥離泡を消滅させフリップフロップ現象を制御することができた。
2. 制御則の評価は流量比と制御時間から行い、偏流を維持するための最適制御強さは、流量比でおよそ10%程度であることが示された。流量比が10%未満になるとフリップフロップ現象を抑制できないが、偏流の時間調整は可能であることが分かった。
3. 強力な吸込みが必ずしも良好な結果を招くとは限らない。

カオス解 ($Re = 10^4$) においても流量比15%までは $Re = 10^3$ と同様の制御結果を得た。この部分の結果を要約すれば次のようになる。

1. カオス解に対しての制御は、周期解の学習結果をそのまま用いても周期解同様の制御が可能であることが示された。
2. 流量比10%以下の弱い吸込みでは安定した偏流の維持を目的とした制御は困難ではあるが、本来のカオス解に微妙な影響を与えることが示された。これはカオスの初期条件依存性が制御結果に現れているものと推察される。

第7章 結 論

本研究は、二次元チャンネル内噴流におけるフリップフロップ現象の挙動について数値的研究を行い、

- (1) 非線形ダイナミクスの抽出と定性的・定量的評価（第3章）.
- (2) カオス性を積極的に利用した制御（第4章）.
- (3) ニューラルネットワークを用いた力学系の推定とリカレントネットワークによる力学系の同定（第5章）.
- (4) ニューラルネットワークによる二次元チャンネル内噴流のインターアクティブ制御（第6章）.

を試みた。以下に本研究で得られた主要な結果をまとめる。なお、各々の結果について論じた章を末尾の[]内に示してある。

- [1] 急拡大率が4.0の場合、レイノルズ数が200では定常な対称の剥離再循環領域が形成される流動現象が認められる。しかし、急拡大率が5.0で同じレイノルズ数で計算を実行すると、定常の対称流れではあるが、剥離再循環領域の流れ方向への成長は鈍く抑えられる[第2章].
- [2] 二次元チャンネルの急拡大率が5.0、レイノルズ数が300では非定常の非対称流となり、周期がおおよそ $t=200.0$ ほどのフリップフロップ現象が確認される。レイノルズ数が500 および 10^3 では周期性に大きな変化は認められなかったが、第三の剥離領域が新たに発生したり、剥離領域の伸張、分割が活発になる。また、渦度の分布図から主流と剥離泡との分離流線の推測が可能である[第2章].
- [3] 噴流中心軸上の流れ方向垂直の速度変動時系列は、フリップフロップ現象を端的に示す物理量であり、流れ場の支配パラメータである急

拡大率，レイノルズ数に大きく依存する．また，時系列の変動量は剥離泡と主流との運動量交換，周波数は周期，非周期の評価基準としても適当である．よって，速度変動時系列は二次元チャンネル内噴流の力学的挙動の解明に寄与するものと考えられる[第2章]．

[4] 二次元チャンネル内噴流のダイナミクスを抽出することを目的として，コントロールパラメータであるレイノルズ数増加にすることによって得られた周期解，非周期解の速度情報時系列データを以下の手法により定性的，定量的評価が可能である[第3章]．

- Takens の提唱した埋め込み理論によって，アトラクターの位相再構成を行った結果，周期倍増分岐から多重周期型への軌道構成の遷移が認められる．
- カオス的挙動の時系列のパワースペクトルは周波数が高周波成分まで連続分布を示す．また，パワースペクトルのフーリエ変換である自己相関関数は，二時刻間の値が増加するにつれて相関が急激に消滅し，任意の時刻における相似性は存在しない．
- ウェーブレット解析によりカオス解特有の階層的樹状構造が認められ，Rössler モデルのカオス解の同様の解析と定性的な一致を見る．
- ポアンカレ断面上の写像行列 M の固有値は， $\lambda_u = 1.4078$ および $\lambda_s = 0.5922$ となり， $|\lambda| > 1$ となるリアプノフ指数の存在を示す．
- 埋め込み次元から求めた相関次元は，次元 $p = 2$ 以上で既に傾きが飽和状態を示し，その勾配からフラクタル次元が，1.226 という結果を得，ヘノンアトラクターの次元 (1.26) と極めて近い値を示す．

[5] 二次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流のカオスと判断される自励振動現象に対してフィードバック制御のひとつである OGY 制御を試みたところ， N 次元非線形システムのカオス軌道を方程式の解

析的知識に頼らず、位相空間上の *fixed point* を求め *impulsive* な制御入力を付加して単一周期軌道に封じ込めることができる [第4章].

- 目的とする軌道の上にカオス軌道を封じ込めるには、Poincaré 断面の選択に決定的な定説がないので、任意の Poincaré 断面上の安定方向固有ベクトルの決定方法や *fixed point* 近傍を通過する条件などを整えることが重要となる.
- *fixed point* 通過判定 $\|Z_n Z_0\| \leq r$ の与え方によっては、制御されたシステムが周期状態に封じ込められる時間的な持続長さに影響が現れることも示される.
- 制御入力小さく *impulsive* であることから、安定した周期軌道に一度は落ち着いても、将来的に破綻して再度カオス軌道へと移行する傾向も認められたので、安定した軌道を保つにはシステムの監視を行って再制御の必要性があると考えられる.
- 制御入力を *nonimpulsive* (時間的バンド幅を与えた) にした場合には制御力が著しく低下することも認められる.
- 周期軌道が発見できた場合でも、制御に成功する時としない場合があり、制御に成功した *fixed point* 付近では安定方向と不安定方向との写像ベクトルがほぼ直交する.

[6] 二次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流の自励振動現象に対し、ニューラルネットワークによる学習を行ってレイノルズ数が 10^4 以下の数値解析の結果に対する状態の推定が数値化できる [第5章].

- 教師信号パターン数、入力層数などのニューラルネットワークアーキテクチャの決定が重要で、これらの組み合わせに依存してネットワークの出力が2値化的スタイルまたは、中間値が存在するスタイルに変わる.
- 学習誤差を対数表示した際、負の勾配をもつ学習曲線を辿って構築された結合係数は教師信号をよく近似する.

- 学習スタイルは、修正モーメント法を導入したバックプロパゲーション法を採用すると学習回数と学習誤差の収束率ともに最良の結果となる。
- 変動する速度場を入力情報とした場合、ニューラルネットワークの条件が整えば周期解の学習結果で非周期解の推定が可能である。

[7] リカレントネットによって噴流のフリップフロップの挙動に見られる周期性と非周期性の推定を行い、力学系モデルの同定が可能である [第5章].

- 周期解に対してのモデル化は、「軌道の再構成図」オリジナルデータと閉曲線を描く部分においてはトポロジ的にも一致し成功と言える。
- 非周期解に対してのモデル化は、トラジェクトリーの形状によって成功する場合と困難な場合とあるが、後者でも短期的な予測が可能である。しかし、推定期間や推定箇所などは今後の研究課題である。

[8] 二次元流路内に噴出される非圧縮性粘性噴流の自励振動現象に対し、ニューラルネットワークからの出力結果に吸込みを用いて剥離泡の発生を抑止し、 $Re = 10^4$ 以下のフリップフロップ現象の周期・非周期性の制御が可能である [第6章].

- 教師信号は僅か3パターンを使用し、あらかじめ用意した吸込みが存在する場合の定常解の教師信号と切替を行う手法により、剥離泡を消滅させフリップフロップ現象を制御することが可能である。
- 制御則の評価は流量比と制御時間から行い、偏流を維持するための最適制御強さは、流量比でおよそ10%程度であることが示される。流量比が10%未満になると偏流維持の制御では成

立せずフリップフロップ現象を抑制できないが、偏流の時間調整は可能である。

- 強力な吸込みが必ずしも良好な結果を招くとは限らない。
- カオス解に対しての制御は、周期解の学習結果をそのまま用いても周期解同様の制御が可能であることが示される。
- 流量比 10% 以下の弱い吸込みでは安定した偏流の維持を目的とした制御は困難ではあるが、本来のカオス解に微妙な影響を与える。

本研究で得られた結果は以上であるが、おわりに本研究に関する今後の課題や展望について述べる。

今後の研究の展開で期待されるのは、ニューラルネットワークの実験体系への応用である。本研究ではロバストな制御をニューラルネットワークを使って行ったが、一方では structure conserved control と呼ばれる、流れのせん断層に見られる渦のロールアップなどの流れの構造を、ダイレクトに適切な制御力で制御できないかという試みもある。能動制御に関する多くの研究が物体表面からの吹出しや吸込みを用いることによりなされ、剥離せん断層の再付着の問題、主流の速度勾配への影響、空力特性におよぼす影響などの詳細が解明されつつあるが、本研究のような流れ場の情報をフィードバックするインターアクティブな制御の例はまだ数少ない。また、センシングのための観測機器設置の条件が、流れ場の本来の性質を変化させてしまう問題も克服しなければならない。ニューラルネットワークの信頼性は近年急速に高まりつつあるので、パターン認識の精度と流れ場の推定能力の開発が進歩すれば、将来的に実用性の高い応用が十分可能と思われる。そして今後、とりわけ open な流体系カオスに関する実験的研究が、能動制御と関連づけて精力的に行われ、本論文の解析結果と比較検討されることを強く念願するものである。

参考文献および参考図書

[著者名のアルファベット順]

[合原, 1993] 合原 一幸

”ニューラルシステムにおけるカオス”
東京電機大学出版局, p267, (1983).

[Antonini, 1989]

Antonini, M.
”Wavelets and Applications,”
Masson, Springer-Verlag, p.160, (1989).

[Argoul, 1989]

Argoul, F.
”Nature”
338(6210), p.51, (1989).

[Bergé et al., 1984]

Bergé, P., Pomeau, Y. and Vidal. C.
”L'ORDRE DANS LE CHAOS - Vers une approche déterministe de la turbulence - (Hermann)”
相澤 洋二 訳, 「カオスの中の秩序 - 乱流の理解に向けて-」, 産業図書, p.268,
(1992).

[Bhattacharjee et al., 1986]

Bhattacharjee, F. K., Scheelke, B., and Troutt, T. R.
”Modification of Vortex Interactions in a Reattachment Separated Flows ”
AIAA Journal, Vol.24, No4, p.623, (1986).

[Boguslawski & Popiel, 1979]

Boguslawski, L. and Popiel, Cz. O.
”Flow structure of the free round turbulent jet in the initial resion”
Journal of Fluid Mechanics, Vol.90, p.531, (1979).

[Broze & Hussain, 1994]

Broze, G. and Hussain, F.

"Nonlinear dynamics of forced transitional jet : periodic and chaotic attractors"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.263, p.93, (1994).

[Broze & Hussain, 1995]

Broze, G. and Hussain, F.

"Transition to chaos in a forced jet : intermittency, tangent bifurcation and hysteresis"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.311, p.37, (1995).

[Choi et al., 1993]

Choi, H., Temam, R., Moin, P. and Kim, J.

"Feedback control for unsteady flow and its application to the stochastic Burgers equation"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.253, p.509, (1993).

[Choi et al., 1994]

Choi, H., Moin, P. and Kim, J.

"Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.262, p.75, (1994).

[Crutchfield et al., 1983]

Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. and Swinney, H.L.

"Low dimensional chaos in a system"
Physical Review Letters, Vol.51, p.1442, (1983).

[Ding et al., 1994]

Ding, M., Ott, E. and Grebogi, C.

"Controlling chaos in a temporally irregular environment"
Physica D 74, p.386, (1994).

[Ditto et al., 1990]

Ditto, W. L., Raueo, S. N. and Spano, M. L.

"Experimental Control of Chaos"
Physical Review Letters, Vol.65, p.3211, (1990).

[Durst et al., 1974]

Durst, F., Melling, A. and Whitelaw, J. H.
"Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.64, p.111, (1974).

[Fearn et al., 1990]

Fearn, R. M., Mullin, T. and Cliff, K. A.
"Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.211, p.595, (1990).

[Gagnon, 1993]

Gagnon, Y., Giovannini, A. and Hébrard, P.
"Numerical simulation and physical analysis of high Reynolds number recirculating flows behind sudden expansions"
Physics of Fluids, A 5, p.2377, (1993).

[Garfinkel, 1992]

Garfinkel, A., Spano, M. A., Ditto, W. L., and Weiss, J. N.
"Controlling Cardiac Chaos"
SCIENCE, Vol.257, p.1230, (1992).

[Garreau, 1989]

Garreau, D.
"Wavelets and Applications,"
Masson, Springer-Verlag, p.126, (1989).

[Giona, 1990]

Giona, M.
"Local prediction of Chaotic time series"
Proceeding of the 33rd Midwest Symposium on Circuits and Systems , Vol.2,
p.894, (1990).

[Gleick, 1987]

Gleick, J.
"CHAOS-MAKING A NEW SCIENCE", (1987).
大貫昌子訳, 「カオス-新しい科学をつくる」, 新潮社(1991), p534.

[Goodwin & Schowalter, 1996]

Goodwin, R. T. and Schowalter, W. R.

"Interaction of two jets in a channel: solution multiplicity and linear stability"
Journal of Fluid Mechanics, Vol.313, p.55, (1996).

[Grassberger & Procaccia, 1983]

Grassberger, P. and Procaccia, I.

"Measuring strangeness of strange attractors"
Physica 9 D, p.189, (1983).

[半導体結晶材料ハンドブック, 1986]

半導体結晶材料ハンドブック (日本学術振興会編),
オーム社, p.325, (1986).

[羽二生ほか, 1995]

羽二生 博之, 坂本 弘志, 中村 順, 小畑 芳弘

"渦放出の不規則性における長周期変動

(局所rms値と循環変動のスペクトル解析)"

日本機械学会論文集, Vol.61, No.582, B, p.379, (1995).

[古沢ほか, 1992]

古沢 智, 飯田 誠一, 小河原 加久治

"リカレントネットによる熱対流力学系の挙動識別"

日本機械学会講演論文集, No.922-1, p.61, (1992).

[飯田ほか, 1993]

飯田 誠一, 萩原 直樹, 小河原 加久治

"カオス力学系のウェーブレット解析"

日本機械学会論文集, Vol.59, No.563, B, p.2117, (1993).

[飯田ほか, 1994]

飯田 誠一, 小河原 加久治, 古沢 智

"熱対流系パターン認識による解分岐制御に関する研究"

日本機械学会論文集, Vol.60, No.580, B, p.4045, (1994).

[飯田ほか, 1995]

飯田 誠一, 小河原 加久治, 向井 康祐, 新 雅善

"熱対流系セルパターンのモード遷移確率制御に関する数値実験"

日本機械学会論文集, Vol.61, No.592, B, p.4348, (1995).

[石川ほか, 1995]

石川 仁, 木谷 勝, 望月 修
"ウェーブレット変換による乱流後流の解析"
日本機械学会論文集, Vol.61, No.587, B, p.2409, (1995).

[伊藤ほか, 1973]

伊藤 忠哉, 末松 良一, 下川 行夫, 田中 勝之
"2安定形純流体素子負荷形発振器の研究"
日本機械学会論文集, Vol.39, No.321, 第2部, p.1599, (1973).

[木谷, 1996]

木谷 勝
"乱流剥離流れの能動制御"
日本機械学会講演論文集(III), 96-1, p.361, (1996).

[近藤ほか, 1995]

近藤孝弘, 矢ヶ崎一幸
"非線形振動とカオスに関する二,三の最近の話題(研究展望)"
日本機械学会論文集, Vol.61, No.583, C, p.746, (1995).

[Kwong et al., 1994]

Kwong, A. H. M. and Dowling, A. P.
"Active Boundary-Layer Control in Diffusers"
AIAA Journal, Vol.32, No.12, p.2409, (1994).

[増本ほか, 1995]

増本 憲泰, 山川 宏
"カオス理論に基づく短期予測法を用いた予測制御に関する研究
(第2報, 短期予測における諸パラメータの影響に関する検討)"
日本機械学会講演論文集, No.95-1, p.332, (1995).

[中村, 1992]

中村 育雄
"乱流現象"
朝倉書店, p.11, (1992).

[中村ほか, 1992]

中村 育雄, 辻 義之, 櫛田 武広, 笹本 健一郎
"Karhunen-Loève展開を用いた乱流境界層中の整構造解析"
日本機械学会講演論文集, Vol.C, No.920-78, p.455, (1992).

[中西ほか, 1995a]

中西 助次, 桜井 元康, 大坂 英雄

”非対称急拡大流路の層流はく離に関する数値的研究”

日本機械学会論文集, Vol.61, No.582, B, p.460, (1995).

[中西ほか, 1995b]

中西 助次, 桜井 元康, 大坂 英雄

”二次元対称急拡大流路内流れの数値的研究 (力学量特性)”

日本機械学会論文集, Vol.61, No.589, B, p.3182, (1995).

[中野ほか, 1989]

中野 馨, 飯沼 一元, 桐谷 滋

”入門と実習 ニューロコンピュータ”

技術評論社, p.60, (1989).

[Oseldec, 1968]

Oseldec, V. I.

”A Multiplicative Ergodic Theorem. Ljapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems”

Trans. Moscow Math. Soc., Vol.19, p.197, (1968).

[Otto et al., 1990]

Otto, E., Grebogi, C. and Yorke, J. A.

”Controlling Chaos”

Physical Review Letters, Vol.64, p.1196, (1990).

[Rajaratnam, 1976]

Rajaratnam, N.

”Turbulent Jets”, (1976)

野村 安正 訳, 噴流, 森北出版, (1981).

[Roache, 1976]

Roache, P. J.

”Computational Fluid Dynamics(Hermosa Publishers Inc.)”, (1976)

高橋 亮一 他訳, コンピュータによる流体力学 (上), 企画センター刊, p.212, (1978).

[崔ほか, 1996]

崔 宏武, 谷 順二, 柳瀬 浩之

”ガスジェットによる二重振子の振動制御”

日本機械学会論文集, Vol.61, No.585, C, p.1837, (1995).

[佐野, 1991]

佐野 正利

”スリットから吹出し・吸込みを伴う乱流境界層の数値解析”

日本機械学会論文集, Vol.57, No.540, B, p.2748, (1991).

[Schuster, 1984]

Schuster, H. G.

”Deterministic Chaos”

, (1984).

[Shimada et al., 1979]

Shimada, I. and Nagashima, T.

”A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems”

Prog. Theor. Phys., Vol.61-6, p.1605, (1979).

[Sobey, 1985]

Sobey, I. J.

”Observation of waves during oscillatory channel flow”

Journal of Fluid Mechanics, Vol.151, p.395, (1985).

[Sobey et al., 1986]

Sobey, I.J. and Drazin, P.G.

”Bifurcations of two-dimensional channel flows”

Journal of Fluid Mechanics, Vol.171, p.263, (1986).

[Sreenivasan, 1985]

Sreenivasan, K. R.

”Transition and turbulence in fluid flows and low-dimensional chaos”

In Fundamental of fluid mechanics, Springer, p.44, (1985).

[社河内ほか, 1996]

社河内 敏彦, 平井 一則, 藤田 和彦, 安藤 俊剛

”開水路中に噴出される三次元乱流噴流の自励振動”

日本機械学会論文集, Vol.62, No.594, B, p.527, (1996).

[朱ほか, 1995]

朱 勤, 石飛 光章

”ダフイング振動システムにおけるカオスのOGY制御”
第73期全国大会講演論文集(V), No.95-10, p.17, (1995).

[所在ほか, 1993]

所在 英治, 平田 勝哉, 舟木 治郎, 矢野 秀雄

”フリップフロップノズルの発振機構に関する実験的研究”
日本機械学会講演会論文集, No.934-4, p.35, (1993).

[田原および合原, 1992]

田原 総一郎, 合原 一幸

”カオスって何だ!”
TRIGGER 11(3), p.10, (1992).

[高崎ほか, 1991]

高崎 悟, 小河原 加久治, 飯田 誠一

”二次元キャビティ内振動流のカオス的混合に関する数値実験”
日本機械学会論文集, Vol.57, No.541, B, p.2905, (1991).

[高崎ほか, 1992]

高崎 悟, 小河原 加久治, 飯田 誠一

”二次元キャビティフロー内のカオス的混合に関する研究
(レイノルズ数と移動壁速度の変動振幅の影響について)”
日本機械学会論文集, Vol.58, No.549, B, p.1367, (1992).

[高安, 1987]

高安 秀樹

”フラクタル科学”
朝倉書店, p.89, (1987).

[Takens, 1981]

Takens, F.

”Detecting Strange Attractors in Turbulence, in Dynamical System and Turbulence”
Lecture Notes in Mathematics, Vol.898, Springer, p.366, (1981).

[田中および高橋, 1991]

田中 秀樹, 高橋 亮一

"流れの数値解法におけるモデル規範形適応制御"

日本機械学会論文集, Vol.57, No.540, B, p.2656, (1991).

[Thomas & Chu., 1989]

Thomas, F. O. and Chu, H. M.

"An experimental investigation of the transition of a planar jet: Subharmonic suppression and upstream feedback"

Physics of Fluids, A 1, p.1566, (1989).

[戸川, 1971]

戸川 隼人

"マトリクスの数値計算"

オーム社, p.64, (1971).

[渡辺ほか, 1992]

渡辺 崇, 中村 育雄, 遠藤 和広

"後ろ向きステップ流解析における有限要素法の計算条件の影響"

日本機械学会論文集, Vol.58, No.550, B, p.2010, (1992).

[Williams et al., 1990]

Williams-Stuber, K. and Gharib, M.

"Transition from order to chaos in the wake of an airfoil"

Journal of Fluid Mechanics, Vol.213, p.29, (1990).

[安田ほか, 1994]

安田 昌司, 小川 淳, 市川 寛, 鈴木 龍司, 大隅 正人

"強制振子のカオスとOGY制御"

日本機械学会論文集, Vol.60, No.572, C, p.1256, (1994).

[横井ほか, 1991]

横井 嘉文, 亀本 喬司

"二次元的な境界層はく離流れに潜在する初期の三次元渦構造
(円柱上層流境界層はく離の可視化観測)"

日本機械学会論文集, Vol.57, No.534, B, p.427, (1991).

[吉田ほか, 1994]

吉田 勝俊, 佐藤 啓仁, 山本 純雄, 横田 和隆

”同期カオスを用いた非線形システムの同定 (同期カオス規範の提案)”

日本機械学会論文集, Vol.60, No.578, C, p.3268, (1994).

[Zhou & Sirovich, 1992]

Zhou, X. and Sirovich, L.

”Coherence and chaos in a model of turbulent boundary layer”

Physics of Fluids, Vol.4, No.12, p.2855, (1992).

謝 辞

本研究の遂行にあたっては、飯田 誠一 教授をはじめとする北海道大学工学部流体物理工学講座流れ情報工学分野の教職員の方々、および本講座の大学院生、四年目学生諸君のご指導、ご協力を賜りました。

殊に飯田 誠一 教授におかれましては、博士課程社会人特別選抜制度の第一期生として、いち早く勉学の機会を頂き、大変感謝致します。学位取得という悲願成就のために、本研究全般にわたるきめ細やかなご指導、ご助言のみならず、論文執筆や学会活動などを通じて無類の研鑽を積ませて下さいました。

小河原 加久治 助教授には、本研究に関する流体工学における数々のトピックのご紹介、制御理論や数理解析関連のアドバイスを懇切丁寧にご指導賜りました。

早川道雄助手には、本研究に対する有意義なご助言、論文作成に関するポイントなど、経験豊かな学識を基礎に啓発的な指導を賜るとともに研究の姿勢をも学ばせて頂きました。

一條真古人助手には、本研究に関連する解析手法のご助言を詳細かつ親切にご指導賜りました。

野崎豊技官には、研究生活においての公私にわたった励ましを常に頂きました。

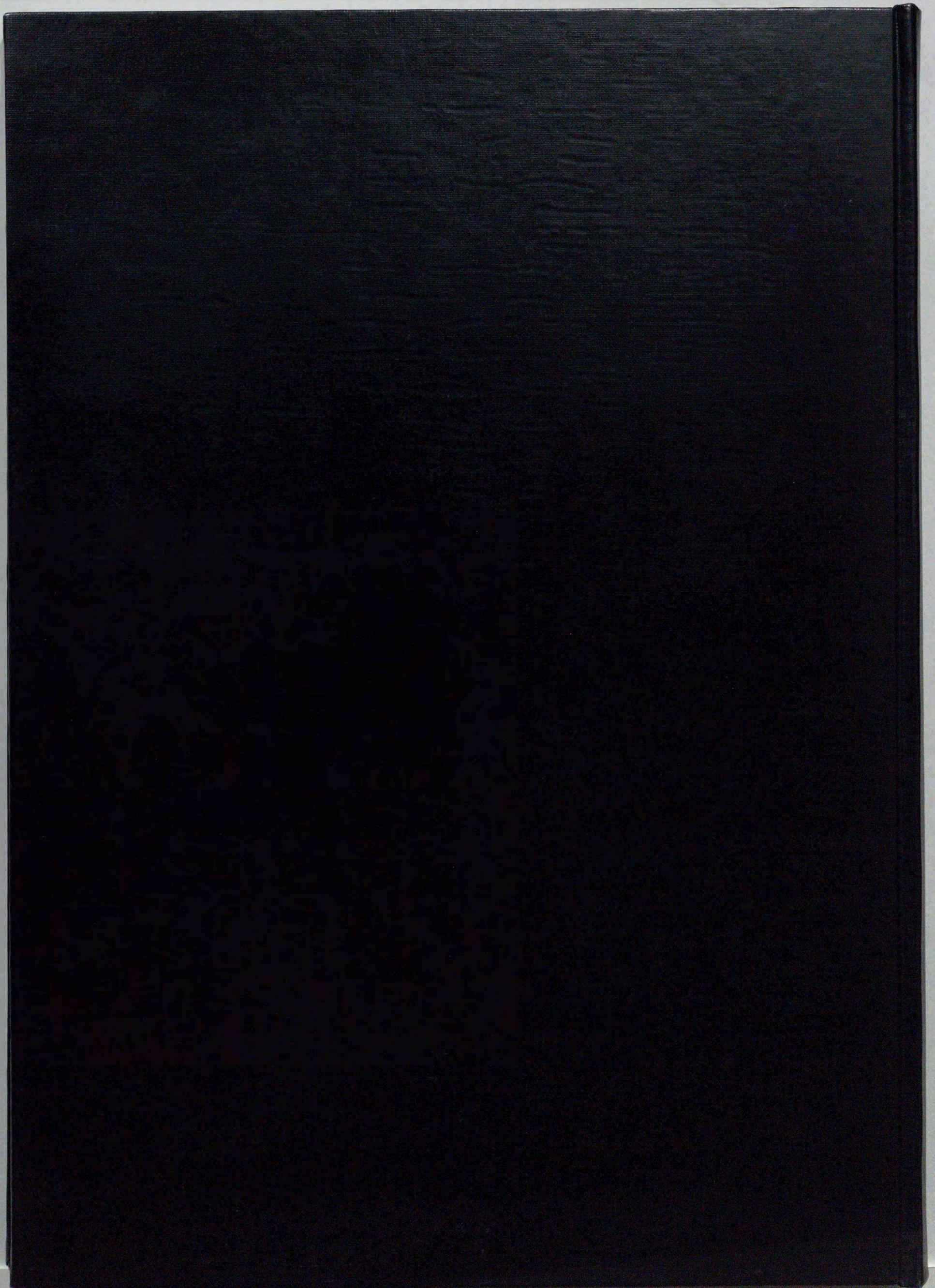
長谷部恵君、足羽賢治君、登里卓也君ほか、大学院生の諸君には、年齢差があるにもかかわらず、快い研究環境の提供と研究推進のための公私にわたるご協力を頂きました。

勤務先の北海道工業高等学校の教職員の方々には、リフレッシュ教育に対して深いご理解とご協力を頂きました。

私の家族、純子、充弘、美里には、精神面および健康面への優しい配慮と、家庭のくつろぎを提供してもらい、長い研究生活を支援してくれました。

ここに記して、心から感謝申し上げます。

竹澤 聡



Inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

Blue

Cyan

Green

Yellow

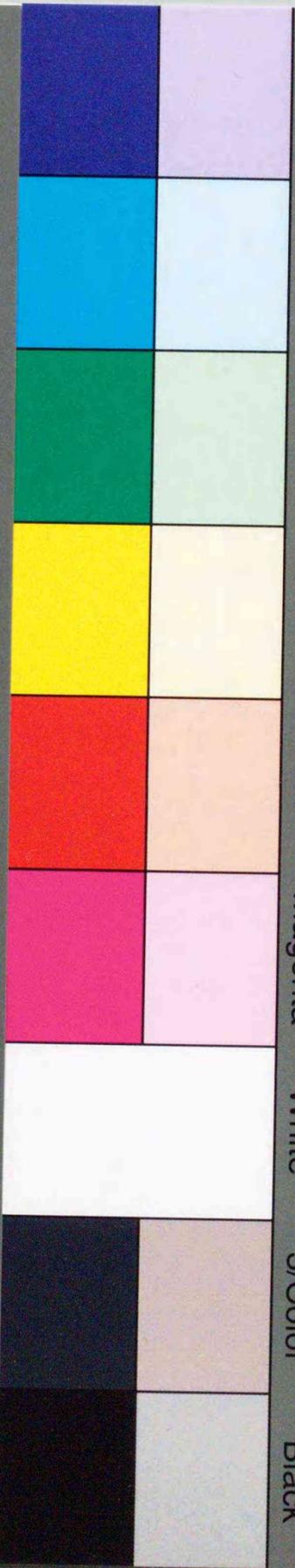
Red

Magenta

White

3/Color

Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

