

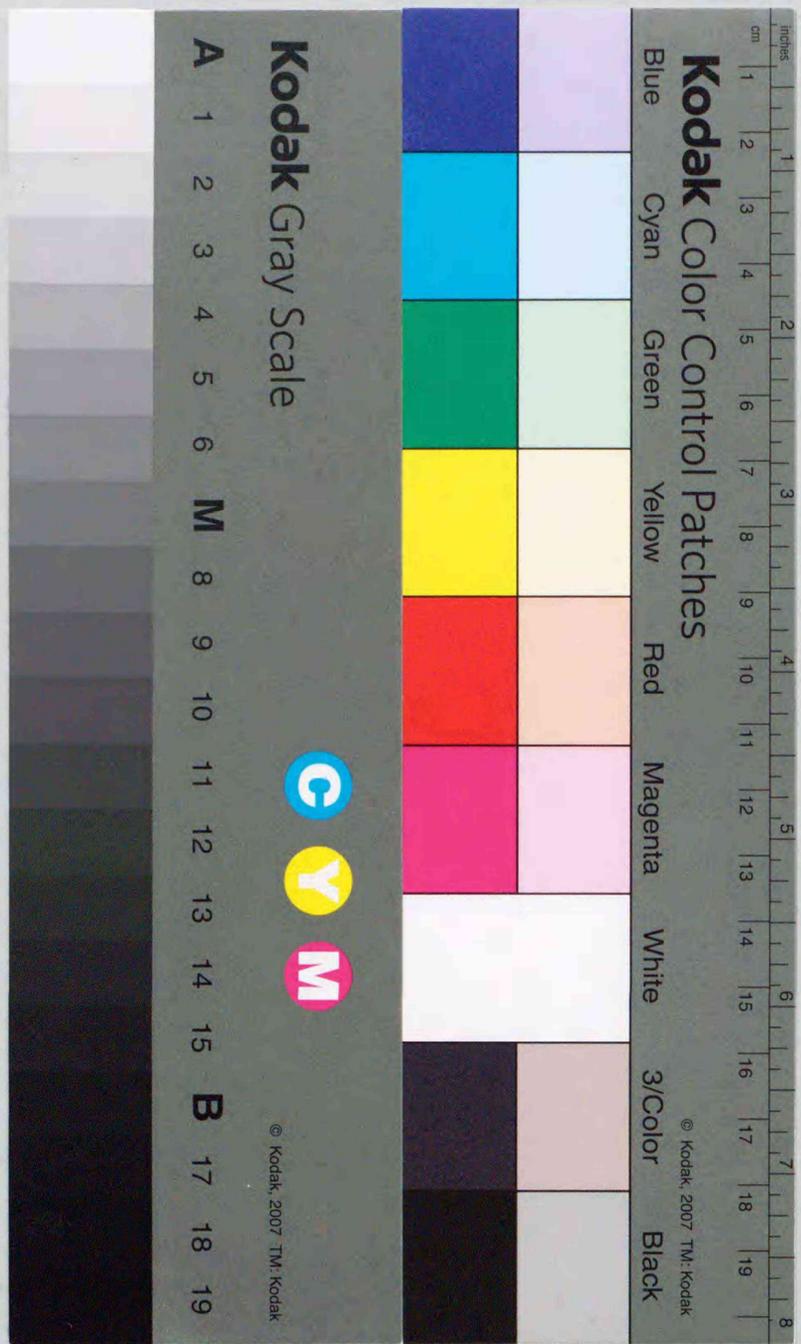


Title	極異方性を有する回転円板の曲げ振動に関する研究
Author(s)	佐藤, 満弘
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第5261号
Issue Date	1997-12-25
DOI	https://doi.org/10.11501/3132245
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51460
Type	doctoral thesis
File Information	000000317435.pdf



極異方性を有する回転円板の
曲げ振動に関する研究

佐藤 満 弘



①

極異方性を有する回転円板の
曲げ振動に関する研究

1997年 6月

佐藤 満弘

目次

第1章 緒言	1
1.1 研究目的	1
1.2 回転円板に関する従来の研究動向	3
1.3 本論文の概要	4
1.4 本論文で用いられる主な記号	6
第2章 等方性回転円板の理論解析	8
2.1 基礎方程式	8
2.2 振動数方程式と応答	12
2.2.1 固有値解析	12
2.2.2 定常応答解析	14
2.3 一定角加速度で加速される場合	16
2.4 第2章の結果	20
第3章 極異方性回転円板の理論解析	21
3.1 極異方性回転円板	21
3.2 応力成分	21
3.3 運動方程式	26
3.4 面外方向変位	28
3.5 振動数方程式と応答	30
3.5.1 固有値解析	30
3.5.2 定常応答解析	33
3.6 一定角加速度で加速される場合	35
3.7 円周方向繊維強化材の弾性特性	41
3.8 第3章の結果	42

第4章 等方性回転円板の振動特性	43
4.1 数値計算における解の収束	43
4.2 固有円振動数と角速度との関係	45
4.3 駆動点インピーダンスと振動モード	47
4.4 一定角加速度で加速される場合	67
4.5 第4章の結果	84
第5章 極異方性回転円板の振動特性	85
5.1 数値計算に用いる材料物性値と解の収束	85
5.2 応力成分	89
5.3 固有円振動数と角速度との関係	91
5.4 駆動点インピーダンスと振動モード	100
5.5 一定角加速度で加速される場合	119
5.6 第5章の結果	134
第6章 実験による理論の検証	135
6.1 実験概要	135
6.2 実験装置	135
6.3 実験方法	138
6.3.1 打撃実験	138
6.3.2 加振実験	139
6.3.3 回転円板の固有振動数	140
6.4 供試円板	140
6.5 実験結果	144
第7章 結 論	150
参 考 文 献	153
謝 辞	157

第1章 緒 言

1.1 研究目的

近年、科学技術の進展はめざましく、その技術革新には目を見張るものがある。機械工学の分野においてもそれは例外ではない。情報化時代、そして、インターネットに代表される各種ネットワークの充実とともに飛躍的に拡充してきたマルチメディアの時代と呼ばれる現代社会において、情報機器産業においては、このような社会のニーズに則し、機器の小形高性能化、高速処理化、軽量化が急速に行われてきている。そのような状況において、古くから基本的な構造要素として多種多様の機械に用いられてきた回転円板は、大型計算機からパーソナルコンピュータに至る各種計算機において情報の記憶・保存装置の主たる要素として使用されている。代表的なものとして、ハードディスク装置(HDD)やフレキシブルディスク装置(FDD)に組み込まれる磁気ディスクやフロッピーディスク、また、最近多く用いられるようになった CD-ROM 装置や光磁気ディスク装置(MO)に使用されるコンパクトディスク、光磁気ディスクなど、各種円板が用いられている。これらで扱われる情報は、文字・音声・画像・動画などであり、そのデータ量はますます増えてきている。最近の記憶装置は、これら膨大な情報量を取り扱うため、情報が高密度化され、また、データの入出力時におけるアクセス時間の短縮のため、ディスクの回転速度はますます高速化してきている。ハードディスク装置では完全に固定された交換不可能な精密なディスクを使用することにより、高速回転域においてもデータの読み取り精度の確保に成功し、信頼性も向上している。これに対し CD-ROM 装置で使用するディスクは簡単に交換可能で、異なったディスクを使用するため、回転軸中心とディスク中心のずれ、ディスクのそりや不均一な厚みなどが原因となって発生する慣性力により振動を誘発する。また、回転数は500 rpm 程度だったものが、現在では5000~6000 rpm のスピードで回転し、かつピックアップの位置によってディスクの回転数が変動するなど、多くの振動誘発の要因を持っている。そして、このような高速回転域におけるディスク自体の動的特性として円板の面外方向の曲げ振動による不安定現象が頻繁に生じるようになる。その結果、記録再生のエラーの増加に伴う信頼性の低下、さらに、ディスクやヘッドの破損等の問題が生じるようになってきた。また、計算機

を含むこれら機器は、以前は屋内に設置されて使用されていたが、小形軽量化されたことにより、自動車や飛行機、ロケットなどに搭載されるようになってきた。このような環境下では、エンジンや走行時の振動や衝撃など、常に外部からの加振力がディスクに作用し、場合によっては、共振現象を引き起こすなど、非常に過酷な状況の下に置かれている。高密度化され高速回転しているディスク上の1トラックをヘッドが正確に追従する位置決め制御は非常に高精度な技術を要するため、その母体であるディスクが振動を伴わない安定した回転であることが不可欠である。それゆえ、情報機器における回転円板の動的挙動や振動特性を正確に把握することは極めて重要な課題となってきた。

本研究では、このような情報機器の記憶装置として用いられているディスク、特に、ヘッドとディスクが非接触である磁気ディスク、光磁気ディスク及び、コンパクトディスクに着目し、それらを内周が固定され外周が自由の等方性の回転円板としてモデル化することにより、その振動特性を理論的に解明する。また、繊維強化プラスチック(FRP)に代表される複合材料は高い比強度(強度/密度)と比剛性(剛性/密度)を有し、機械の高性能化、軽量化のため近年、先端工業材料として等方性材料に代わり多くの構造要素に使用され、その用途は急速に拡大してきている。このような状況を踏まえ、現在、アルミニウムやポリカーボネイト等の各種プラスチック材からなる等方性材料を母材として作製されているこれらディスクが、複合材料から成る極異方性材料でその母材が置き換えられた場合、すなわち、ディスクの円周方向に強化繊維を入れることにより、円周方向の剛性を高めた極異方性回転円板としてモデル化できるとして、その振動特性について理論解析を行う。

さらに、回転円板が静止から任意の回転数へと変動するとき、角加速度は一定であると見なし、その間の円板の動的挙動を明らかにするため、一定角加速度で加速される円板を等方性と極異方性の場合について取り上げ、変動する角速度に対する円板の動的挙動についての理論解析を行う。

これら解析結果に基づき数値計算を行い、固有円振動数、駆動点インピーダンス、および、振動モード等を求め、角速度、角加速度、内部減衰等のパラメータが等方性と極異方性回転円板の振動特性に与える影響を明らかにするとともに、極異方性を有する回転円板の動的安定性に対する有用性について検討する。さらに、回転円板に関する実験を実施し、理論解析の妥当性を検証している。

1.2 回転円板に関する従来の研究動向

回転円板の面外方向における振動問題に関する研究は古くから行われてきている。対象とする振動系が製材用および、石材切断用の丸のこ、ディスクブレーキ、鉄道の車輪、そして、タービンディスク等に代表される産業・工業用機器として使用されている円板、また、近年においては、磁気ディスクやフレキシブルディスクなど記憶装置として情報機器の分野において使用されている円板についての研究が多く報告されるようになってきた。これらの機器で使用されている円板は空間に固定されたある位置において拘束されて回転しているものが多い。解析においてもこれら回転円板を薄肉回転円板としてモデル化し、空間に固定された点において拘束力または、外力を受け曲げ振動を起こす場合についての研究がなされている。古くは Lamb と Southwell⁽¹⁾⁽²⁾ により行われ、Tobias と Arnold⁽³⁾ は回転円板の固有振動数や強制変位振幅等を実験的にも測定している。Iwan と Stahl, Moeller⁽⁴⁾⁽⁵⁾ は、円板に作用する拘束力をばね・質量・ダッシュポットからなる力学モデルに置き換え、中央で点固定された回転円板のその安定性について解析し、Benson と Bogy⁽⁶⁾ は内周をハブで固定された回転円板に静止横荷重が作用するときの応答解析を行い振動モードを求めた。また、Hutton ら⁽⁷⁾ は製材用丸のこに関する解析をガラーキン法を用いて行い、振動防止に有効なガイドの位置を求め、長南ら⁽⁸⁾ は同様に製材用丸のこについて理論解析と実験を行い、円板形状とハブ外径寸法の違いによるそれぞれの固有円振動数と回転数との関係を調べ、危険速度についても求めている。松久と佐藤⁽⁹⁾ は石材切断用丸のこの振動と騒音に関する研究を行っている。

末岡ら^{(10)~(13)} は鉄道車輪のブレーキや曲線路走行時に発生する鳴きについての問題を回転円板の自励振動の問題として解析を行い、太田ら⁽¹⁴⁾ はディスクブレーキの鳴きとディスクの自励振動モードとの関係について実験を行いその対策について検討している。

フレキシブルディスクの振動特性に関する研究としては、小寺⁽¹⁵⁾ が、一点で支持された回転円板の固有振動数と固有モードを求め、小野ら^{(16)~(18)} は、ヘッドとディスクの静的特性と動的変形特性について有限要素法を用いて解析し、実験による検証も行っている。長南と江⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾ は、フレキシブルディスク装置自体が軸方向およびピッチング加振される場合の定常振動特性と5.25"ディスクとR/Wヘッドの連成自由振動特性についてガラーキン法を適用し解析している。Renshaw と Mote⁽²¹⁾ はディスクの一点で横荷重が作用する場合、そのディスクが

大変形する非線形問題として解析と実験を行っている。

フォイルディスクに関する研究としては、蓮池と堀⁽²²⁾により実験的研究が行われ、保坂と西田⁽²³⁾は、フォイル変形を求めるため、空気膜圧力を考慮し近似的に基礎式を解く解析法を提案した。また実験による検証も行っている。

本田ら^{(24)~(28)}は空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答解析を遠心力や基礎励振により生じる慣性力とコリオリ力を考慮し、固有関数展開法を用いて解き、また、点で拘束された回転円板の安定性についても研究している。Lee⁽²⁹⁾は、変厚回転円板における危険速度をラグランジュの方程式を解くことにより求め、鳥居ら⁽³⁰⁾⁽³¹⁾は、回転円板の主共振点付近で調和外力を受けるときの強制振動解析を大変形による非線形の問題とし、ガラーキソ法を適用して解析を行い、実験による検証も行っている。

1.3 本論文の概要

第1章は緒言であり、本研究の意義と目的について述べると共に、回転円板に関する現在までの研究動向や本論文の概要について説明している。

第2章では、極異方性回転円板の振動特性に関する基礎資料として、回転円板の基本的な特性を把握するために、等方性回転円板の振動解析を行う。具体的には、等方性回転円板について、一定角速度で回転する場合と一定角加速度で加速される場合の二通りについて理論解析を行い、等方性回転円板の各種基礎方程式を誘導する。はじめに、一定角速度で回転する場合において、慣性力として遠心力を考慮した回転円板の半径方向の力の釣り合い方程式と運動方程式を板厚一定の薄肉回転円板についての基礎弾性理論に基づき求める。これら方程式で用いる座標系を円板と共に回転する回転座標系から空間に固定した静止座標系に座標変換する。その力の釣り合い方程式より円板の半径方向及び、周方向の応力成分を求める。また、複素ヤング率を用いて内部(構造)減衰を考慮した。そして、運動方程式を導出し、面外方向変位を未知の時間関数と未知の座標関数とで変数分離した形で近似し代入する。そして、ガラーキソ法を適用する事により、固有値解析と定常応答解析を行う。固有値解析では円板に作用する外力を0として、振動数方程式を導く。定常応答解析では空間に固定された円板上の任意の一点において調和起振力が作用する場合の応答を導き、伝達関数としての駆動点インピーダンス、円板の各点における変位式を導出する。また、一定角加速度で加速され

るときの慣性力の影響を考慮した運動方程式を導出し、同様に、固有値解析と定常応答解析を行う。そして、振動数方程式、駆動点インピーダンス、変位式を導出している。

第3章では、円板の周方向に強化繊維を入れ、プラスチック等で円板を成形することにより、半径方向と周方向の弾性係数が異なる極異方性回転円板について理論解析を行う。ここでも第2章同様に、一定角速度で回転する場合と一定角加速度で加速される場合の二通りについてそれぞれ、固有値解析と定常応答解析を行う。はじめに、空間に固定された静止座標系での力の釣り合い方程式をスプライン補間法により解き、半径方向と周方向の応力成分を導出している。運動方程式は異方性弾性板の古典理論に基づき、直交異方性板の2次元における軸対称問題に置き換え、導出した。内部(構造)減衰は導出された基礎方程式中の各弾性係数を複素数を用いて表すことにより考慮した。そして、面外方向変位関数を未知の時間関数と未知の座標関数とによって変数分離した形で近似し、ガラーキソ法を適用して運動方程式を解き、一定角速度と一定角加速度で加速される二通りの場合についてそれぞれ、振動数方程式、駆動点インピーダンス、そして、変位式を導出する。また、極異方性円板の弾性特性として、円周方向繊維強化材の弾性特性を用いて、各異方性主軸に関する弾性係数等を決定している。なお、理論解析における基礎式の導出に当たっては、第2章における等方性の場合と重複する部分があるが、そのような部分については第3章において重点的に解析手順を記述している。

第4章では、第2章の等方性回転円板に関する理論解析より導出した各基礎式を用いて、数値計算を行い、等方性回転円板の振動特性について検討する。最初に振動数方程式を解くことにより固有円振動数を求め、角速度に対する固有円振動数分布を求める。角速度、角加速度、起振振動数、起振点、そして、減衰係数をパラメータとしたときの駆動点インピーダンス、振動モード等を計算した。そして、これらのパラメータの違いが等方性円板の振動現象に与える影響について検討し、角速度および、起振振動数に対する円板の安定・不安定領域を明らかにしている。

第5章においては、極異方性円板をガラス繊維を巻きエポキシ樹脂で成形した円周方向繊維強化材とし、第4章にて数値計算したのと同様に、極異方性円板についても第3章にて導出した各種基礎式を用いて、各パラメータを変えて数値計算を行う。特に強化繊維の含有率を増やすことにより、異方性の度合いを変えた

場合の固有円振動数分布の違いと、角速度および、起振振動数に対する極異方性円板の安定・不安定領域を明らかにする。そして、第4章で得られた等方性回転円板の振動特性と比較することにより、極異方性を有する複合材料で成形された回転円板を採用することの有用性について検討している。

第6章においては、等方性回転円板の振動変位を測定するための実験装置を作製し、打撃実験と加振実験の二通りの方法で実際の円板の固有円振動数を測定する。打撃実験では、回転している円板に打撃を加え、その振動変位波形をFFTを用いて周波数分析を行い鋼製円板の固有円振動数を計測する。加振実験では電磁加振機によって円板上の一点を調和的に起振し、共振時の振動変位波形から、固有円振動数を特定する。一方、第3章において誘導した極異方性回転円板の振動数方程式を等方性円板に適用することから固有円振動数を計算している。これらの計算値を実験から得られた値と比較することにより、理論解析の妥当性について検討している。

第7章は結論であり、本論文において得られた研究成果を取りまとめている。

1.4 本論文で用いられる主な記号

Ψ	: 無次元固有円振動数
Ω	: 角速度
α	: 角加速度
δ	: ディラックのデルタ関数
δ_E	: 等方性円板の減衰係数
$\delta_{Er}, \delta_{E\theta}, \delta_{E\phi}$: 極異方性円板の減衰係数
θ	: 回転座標系における円周方向座標
λ	: 無次元起振円振動数
ν	: 等方性円板のポアソン比
ν_r, ν_θ	: 極異方性円板のポアソン比
ξ	: 円板中心からの無次元半径
ρ	: 密度
σ_r	: 半径方向の応力

σ_θ	: 円周方向の応力
τ	: 無次元時間
ϕ	: 静止座標系における円周方向座標
ω	: 起振円振動数
ω_n	: 固有円振動数
C_{mn}, S_{mn}	: 面外方向変位における未知時間関数
E	: 等方性円板の縦弾性係数
E_r, E_θ	: 極異方性円板の縦弾性係数
F	: 外力の振幅
$G_{r\theta}$: 極異方性円板の横弾性係数
$H_{\epsilon\phi}$: ねじりモーメント
M_ϵ	: 曲げモーメント
M_s	: 円板の質量
N_ϵ	: 剪断力
P	: 起振力
R_{mn}	: 面外方向変位における未知座標関数
$2a$: 円板の外径
$2b$: 円板の内径
$2c$: ハブの外径
h	: 板厚
m	: 節円の数
n	: 節直径の数
r	: 半径方向座標
t	: 時間
u	: 面外方向変位
v	: 半径方向変位
w	: 回転座標系における面外方向変位
*	: 次元を持つことを意味する添字
~	: 内部減衰を考慮していることを意味する添字

第2章 等方性回転円板の理論解析

極異方性回転円板の振動解析にあたり、その基礎資料を提供するため、まず、基本的な回転円板の振動特性を把握する目的で、図2.1に示した等方性回転円板の振動解析を行う。解析には、板厚一定の薄肉回転円板についての弾性理論に基づき、空間に固定された静止座標空間上における基礎式を導出する。慣性力として遠心力の影響を考慮した力の釣り合い方程式と複素ヤング率を用いて内部（構造）減衰を考慮した運動方程式を解くことにより、一定角速度で回転する場合と、一定角加速度で加速される場合の固有値解析と定常応答解析を行う。

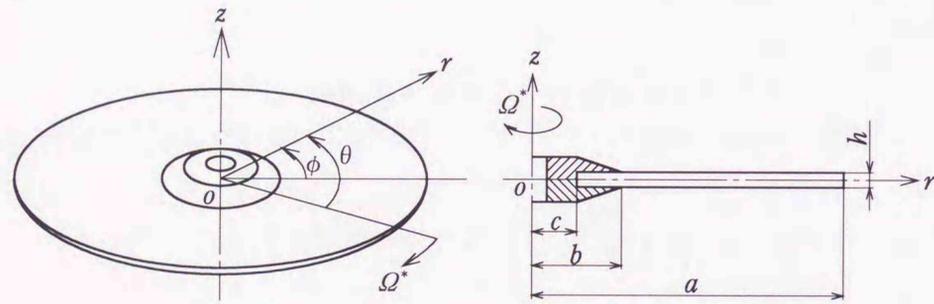


図2.1 回転円板の座標系

2.1 基礎方程式

一般的な回転円板は、回転軸に円板をはめ、その円板の上下をハブで押さえ込むことにより固定し、円板は回転する。このような場合を図2.1に示すように、半径 a 、板厚 h 、回転軸が通る半径 c の穴を有する薄い円板が、半径 b のハブで固定され回転するモデルとする。この円板が一定角速度 Ω^* で回転しているとき、

円板と共に回転する回転座標系 (r, θ) におけるたわみを w^* とすると、半径方向の力の釣り合い方程式と、運動方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r^*) - \sigma_\theta^* + \rho\Omega^{*2}r^2 = 0$$

$$\tilde{D}\nabla^{*4}w^* + \rho h\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - h\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_r^*\frac{\partial w^*}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma_\theta^*\frac{\partial w^*}{\partial \theta}\right)\right\} = P^*$$

$$\nabla^{*4} = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]^2$$

..... (2.1)

空間に固定された静止座標系を (r, ϕ) とし、この座標系における回転円板の面外方向変位を u^* とすると回転座標系 (r, θ) との間には式 (2.2) の関係が成り立つ。

$$\theta = \phi + \Omega t$$

$$w^*(r, \theta, t) = w^*(r, \phi + \Omega t, t) = u^*(r, \phi, t)$$

$$\sigma_r^*(r, \theta) = \sigma_r^*(r, \phi), \quad \sigma_\theta^*(r, \theta) = \sigma_\phi^*(r, \phi)$$

..... (2.2)

式 (2.1) に式 (2.2) を適用して、回転座標系から静止座標系に座標変換する。さらに、円板の形状寸法と材料物性値等を用いた無次元量 (2.3) を代入することにより、すべて無次元化された釣り合い方程式と運動方程式はそれぞれ式 (2.4)、(2.5) となる。

$$u = \frac{u^*}{a}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad \sigma_\xi = \frac{a^2 h}{D} \sigma_r^*, \quad \sigma_\phi = \frac{a^2 h}{D} \sigma_\phi^*, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \eta = \frac{c}{a}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}} t, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D}} \Omega^*, \quad P = \frac{a^3}{D} P^*$$

..... (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \sigma_\xi) - \sigma_\phi + \Omega^2 \xi^2 = 0$$

..... (2.4)

$$\frac{\tilde{D}}{D} \xi \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]^2 u + \xi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \phi} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right)$$

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \sigma_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{1}{\xi} \sigma_{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right\}=\xi P \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここで、 \tilde{D} は円板の内部減衰を考慮した曲げ剛性、 \tilde{E} は複素ヤング率であり、それぞれ次式で与えられる。内部減衰の影響は、板の振動挙動に及ぼす減衰係数 δ_E の効果を論じることにより調べられる。

$$\tilde{D}=\frac{\tilde{E} h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \tilde{E}=E(1+i \delta_E), \quad D=\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

つぎに、円板が一定角速度 Ω で回転しているときの半径方向と周方向の応力成分を求める。無次元化した半径方向の変位を v とする。このときの歪と変位の関係は、弾性学より、また、歪と応力の関係は、フックの法則より求められ、それぞれ次式で与えられる。

$$\varepsilon_{\xi}=\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\phi}=\frac{v}{\xi}$$

$$\varepsilon_{\xi}=\frac{1}{E} \frac{D}{a^2 h}\left(\sigma_{\xi}-\nu \sigma_{\phi}\right), \quad \varepsilon_{\phi}=\frac{1}{E} \frac{D}{a^2 h}\left(\sigma_{\phi}-\nu \sigma_{\xi}\right)$$

ただし、上式は、無次元量 (2.3) によりすべて無次元化した式である。これらの関係を用いて、半径方向と周方向の各応力を半径方向変位 v で表すと式 (2.6) となる。

$$\sigma_{\xi}=\frac{12 a^2}{h^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}+\nu \frac{v}{\xi}\right), \quad \sigma_{\phi}=\frac{12 a^2}{h^2}\left(\frac{v}{\xi}+\nu \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

面内方向における境界条件は、円板の内周 ($\xi=\eta$)、外周 ($\xi=1$) において自由であるので、次式で表される。

$$\sigma_{\xi}(\eta, \phi)=0, \quad \sigma_{\xi}(1, \phi)=0 \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

式 (2.6) を応力の釣り合い方程式 (2.4) に代入し、求められた微分方程式を式 (2.7) の境界条件を用いて解くことにより、応力成分は式 (2.8) で表される。

$$\sigma_{\xi}=\frac{3+\nu}{8} \Omega^2\left(1+\eta^2-\frac{\eta^2}{\xi^2}-\xi^2\right)$$

$$\sigma_{\phi}=\frac{3+\nu}{8} \Omega^2\left(1+\eta^2+\frac{\eta^2}{\xi^2}-\frac{3+3 \nu}{3+\nu} \xi^2\right) \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

回転円板の無次元面外方向変位 u を次式で近似する。

$$u(\xi, \phi, \tau)=\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_{mn}(\tau) \cos (n \phi)+S_{mn}(\tau) \sin (n \phi)\right\} R_{mn}(\xi)$$

$$R_{mn}(\xi)=\xi^m+\xi^{m+1}+G_{mn}^{(1)} \xi^{m+2}+G_{mn}^{(2)} \xi^{m+3}+G_{mn}^{(3)} \xi^{m+4}+G_{mn}^{(4)} \xi^{m+5} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ここで、 m は固有振動モードに現れる節円の数、 n は節直径の数を示す。また、 $G_{mn}^{(1)} \sim G_{mn}^{(4)}$ は未定係数である。図 2.1 に示したように解析に用いた円板は、中央の穴に回転軸とハブを取り付け、円板の上下を固定し回転している。一方、円板の外周は面外方向には自由である。よって、境界条件はそのハブにより固定した円板内周 ($\xi=\eta$) では、変位とたわみ角が 0 であり、円板外周 ($\xi=1$) では、曲げモーメントと剪断力が 0 となり、それぞれ、次式で表される。

$$u(\eta, \phi, \tau)=0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} u(\eta, \phi, \tau)=0$$

$$M_{\xi}(1, \phi, \tau)=0, \quad N_{\xi}(1, \phi, \tau)-\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \phi} H_{\xi \phi}(1, \phi, \tau)=0$$

$$M_{\xi}=-\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\nu\left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right)\right\}$$

$$H_{\xi \phi}=(1-\nu)\left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \phi}-\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

$$N_{\xi}=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right) \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

式 (2.10) において、 M_{ξ} 、 $H_{\xi \phi}$ 、 N_{ξ} は、それぞれ曲げモーメント、ねじりモーメント、剪断力である。式 (2.9) を境界条件式 (2.10) に代入すると次式となる。

$$C_{i 1}+C_{i 2}+C_{i 3} G_{m n}^{(1)}+C_{i 4} G_{m n}^{(2)}+C_{i 5} G_{m n}^{(3)}+C_{i 6} G_{m n}^{(4)}=0 \quad (i=1, 2, \dots, 4)$$

$$C_{1 j}=\xi^{m+j-1}, \quad C_{2 j}=(m+j-1) \xi^{m+j-2}$$

$$C_{3j} = (m+j-2)(m+j-1) + \nu(m+j-1-n^2)$$

$$C_{4j} = (m+j-3)\{(m+j-1)^2 - n^2\} - n^2(1-\nu)(m+j-2)$$

($j = 1, 2, \dots, 6$)

上式の連立方程式を解くことにより、未定係数 $G_{mn}^{(1)} \sim G_{mn}^{(4)}$ が決定される。よって、式 (2.9) は円板の半径方向の変位関数 $R_{mn}(\xi)$ に関して、幾何学のおよび、力学的境界条件を満たす変位関数として表される。

2.2 振動数方程式と応答

2.1で得られた回転円板の運動方程式、応力成分と面外方向変位関数より、固有値解析として、外力が作用しない場合について運動方程式を解き、振動数方程式を求める。また、外力として、空間に固定された一点 (ξ_0, ϕ_0) で調和起振力が円板に作用する場合の定常応答解析を行い、無次元変位と伝達関数を求める。

2.2.1 固有値解析

運動方程式 (2.5) の右辺を0とした式に、式 (2.9) を代入すると次式となる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\} (1+i\delta_E) \xi \nabla^4 R_{mn}(\xi) \right.$$

$$+ \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 C_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} + 2n\Omega \frac{\partial S_{mn}(\tau)}{\partial \tau} - n^2 \Omega^2 C_{mn}(\tau) \right\} \cos(n\phi) \right.$$

$$+ \left. \left\{ \frac{\partial^2 S_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} - 2n\Omega \frac{\partial C_{mn}(\tau)}{\partial \tau} - n^2 \Omega^2 S_{mn}(\tau) \right\} \sin(n\phi) \right\} \xi R_{mn}(\xi)$$

$$- \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\}$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{n^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{mn}(\xi) \right\} \right\} = 0$$

$$\nabla^4 = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]^2$$

..... (2.11)

次に、式 (2.11) の解をガラーキソ法を適用することにより求める。式 (2.11)

に $R_{ql}(\xi) \sin(n\phi)$, $R_{ql}(\xi) \cos(n\phi)$ をかけ、 ξ に関して $\varepsilon \sim 1$ まで、 ϕ に関して $0 \sim 2\pi$ まで積分する。さらに、節円の級数の項数を M までとし、節直径を $n=l$ とし、固有振動モードの直交性より式 (2.12) が得られる。

$$\sum_{m=0}^M \zeta_1 \left(I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 C_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} - I_{qml}^{(2)} \frac{\partial S_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} C_{ml}(\tau) \right) = 0$$

$$\sum_{m=0}^M \zeta_2 \left(I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 S_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} + I_{qml}^{(2)} \frac{\partial C_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} S_{ml}(\tau) \right) = 0$$

..... (2.12)

$$I_{qml}^{(1)} = \int_{\varepsilon}^1 \xi R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi, \quad I_{qml}^{(2)} = 2l\Omega I_{qml}^{(1)}$$

$$I_{qml}^{(3)} = (1+i\delta_E) \int_{\varepsilon}^1 \xi \nabla^4 R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi - (l\Omega)^2 I_{qml}^{(1)}$$

$$- \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{ml}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{ml}(\xi) \right) R_{ql}(\xi) d\xi$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 2\pi & (l = 0) \end{cases}, \quad \zeta_2 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 0 & (l = 0) \end{cases}, \quad m, q = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$$

さらに、式 (2.12) を展開し、以下に示したベクトルとマトリックスを用いることにより整理すると運動方程式 (2.12) は式 (2.13) で表される。

$$[A] \{\ddot{x}(\tau)\} + [B] \{\dot{x}(\tau)\} + [C] \{x(\tau)\} = 0$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(1)} & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{qml}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_1 I_{qml}^{(2)} \\ \zeta_2 I_{qml}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(3)} & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{qml}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\{x(\tau)\} = \begin{Bmatrix} C_{ml}(\tau) \\ S_{ml}(\tau) \end{Bmatrix}$$

$m, q = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$

..... (2.13)

ここで、 $\dot{}$ は無次元時間 τ に関する微分を示す。

式 (2.13) の解を $\{x(\tau)\} = \{X\} e^{i\Psi\tau}$ とする。 Ψ は回転円板の固有円振動数 ω_n を次式で無次元化した値である。この解を式 (2.13) に代入すると式 (2.14) が得られる。

$$[[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]] \{X\} = 0$$

$$\Psi^2 = \frac{\rho h a^4 \omega_n^2}{D} \dots\dots\dots (2.14)$$

式 (2.14) は {X} に関する同次連立方程式であり, {X} が振動の解となるためには, この式の解ベクトルは零ベクトルでないことから次式の振動数方程式が得られる.

$$|[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]| = 0 \dots\dots\dots (2.15)$$

よって, 無次元固有円振動数 Ψ は, 任意の一定角速度 Ω について上記の振動数方程式を解くことにより求められる.

2.2.2 定常応答解析

回転円板に外力 $P(\xi, \phi, \tau)$ が作用しているときの運動方程式 (2.5) に, 固有値解析で行ったのと同様に, 変位を近似した関数 (2.9) を代入し, ガラーキン法を適用する. さらに, 級数の項数を $M+1$ とし, モードの直交性より次式が得られる.

$$[A]\{\ddot{x}(\tau)\} + [B]\{\dot{x}(\tau)\} + [C]\{x(\tau)\} = \{Q(\tau)\}$$

$$\{Q(\tau)\} = \begin{Bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi \end{Bmatrix}$$

$$m, q=0, 1, 2, \dots, M, \quad l=0, 1, 2, \dots, L \dots\dots\dots (2.16)$$

回転円板に調和外力 $\{Q(\tau)\} = \{q\}e^{i\lambda\tau}$ が働くとき, 運動方程式 (2.16) の解を $\{x(\tau)\} = \{X\}e^{i\lambda\tau}$ とし, それぞれを代入し, 定常応答を求めると次式となる. ただし, ここでの λ は, 調和外力の無次元起振円振動数を表す.

$$\{x(\tau)\} = [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{q\}e^{i\lambda\tau} \dots\dots\dots (2.17)$$

いま, 大きさ F の外力 $Fe^{i\lambda\tau}$ が空間に固定された静止座標系の一点 (ξ_0, ϕ_0) で

回転している円板に作用する場合, 式 (2.16) の一般力 $\{Q(\tau)\}$ は, ディラックのデルタ関数を用いることにより, 式 (2.18) のベクトルで表される.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) \xi d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) \xi d\xi d\phi \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} FR_{ql}(\xi_0) \cos(l\phi_0) \xi_0 \\ FR_{ql}(\xi_0) \sin(l\phi_0) \xi_0 \end{Bmatrix}$$

$$= F\{p\} \dots\dots\dots (2.18)$$

次に, 式 (2.9) で近似した面外方向変位 $u(\xi, \phi, \tau)$ の級数の項数を節直径に関して $n=0 \sim L$ まで重ね合わせ, 節円に関して $m=0 \sim M$ とする. さらに, ベクトルの形に書き換えると式 (2.19) となる.

$$u(\xi, \phi, \tau) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \left\{ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \right\} \{x(\tau)\} R_{mn}(\xi) \dots\dots\dots (2.19)$$

式 (2.19) に, 式 (2.17), 式 (2.18) を代入すると次式が得られる.

$$\frac{u(\xi, \phi, \tau)}{F} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \left\{ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \right\} [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{p\} e^{i\lambda\tau} R_{mn}(\xi) \dots\dots\dots (2.20)$$

この式 (2.20) が空間に固定された静止座標系の一点 (ξ_0, ϕ_0) で調和起振された回転円板の無次元変位である.

物体に力が作用すると, その物体には変位, 速度, 加速度等が生じる. 一般にこのような入力と出力の比, すなわち現象の伝達状態を示す関数を伝達関数といふ. 主なものとしては, コンプライアンス (変位/力), モビリティ (速度/力), アクセラランス (加速度/力), 動剛性 (力/変位), 駆動点インピーダンス (力/速度), 動質量 (力/加速度) がある. 本論文では, 空間に固定された静止座標系上の任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で作用する調和起振力と, その点における速度との比である駆動点インピーダンスを求める.

調和起振力を大きさ F^* の外力 $F^*e^{i\omega t}$ で表し, 任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で作用するときのその点における変位を u^* とすると, 駆動点インピーダンス Z は次式で

与えられる.

$$Z = \frac{F^* e^{i\omega t}}{\frac{\partial u^*}{\partial t}} \quad \dots\dots\dots (2.21)$$

ただし, *は有次元量を表し, $u^* = au$, $F^* = (D/a^3)F$ とすると, 式 (2.20) より空間に固定された静止座標系上の任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) における無次元化した駆動点インピーダンスは次式で表される.

$$\left| \frac{Z}{i\omega M_s} \right| = \left| \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)\lambda^2 S_I} \right|$$

$$S_I = \sum_{n=0}^I \sum_{m=0}^M \{ \cos(n\phi_0) \sin(m\phi_0) \} [[C] + i\lambda [B] - \lambda^2 [A]]^{-1} \{p\} R_{mn}(\xi_0)$$

\dots\dots\dots (2.22)

ここで, M_s は円板の質量である.

2.3 一定角加速度で加速される場合

前節においては, 一定角速度で回転している円板の一点を調和起振したときの応答について解析を行った. この節においては, 円板の回転が一定ではなく, 任意の角加速度で, 加速される場合について解析を行う. 前節同様, 円板に作用する外力として, 空間に固定された任意の一点で作用する調和起振力を考え, そのときの応答を求める. 解析に当たって, 角速度が増加していくときの円板の慣性力を考慮した運動方程式を導きガラーキン法を適用し解を求めた.

図 2. 1 に示した円板が一定角加速度 α^* で加速される場合, 回転座標系 (r, θ) と空間に固定された静止座標系 (r, ϕ) との関係は次式となる.

$$\theta = \phi + \frac{\alpha^*}{2} t^2$$

$$w^*(r, \theta, t) = w^*(r, \phi + \frac{\alpha^*}{2} t^2, t) = u^*(r, \phi, t)$$

$$\sigma_r^*(r, \theta) = \sigma_r^*(r, \phi) \quad , \quad \sigma_\theta^*(r, \theta) = \sigma_\phi^*(r, \phi) \quad \dots\dots\dots (2.23)$$

また, 式 (2.1) の慣性力の項は, 角速度が時間関数で与えられることにより, 合成関数の微分法より次式で与えられる.

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} = (\alpha^* t)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} - 2\alpha^* t \frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial \phi} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial \phi}$$

\dots\dots\dots (2.24)

材料の内部減衰を考慮し, 式 (2.3) を用い, さらに, 式 (2.25) を定義する. そして, 式 (2.24) を式 (2.1) に代入し, すべて無次元化された運動方程式を求めると式 (2.26) となる.

$$\alpha = \frac{\rho h a^4}{D} \alpha^* \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

$$\frac{\tilde{D}}{D} \xi \nabla^4 u + \xi \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2(\alpha \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \phi} + (\alpha \tau)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial \phi} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sigma_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi} \sigma_\phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} = \xi P$$

$$\nabla^4 = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

運動方程式 (2.26) は, 一定角加速度 α で角速度が増加する場合の運動方程式である. また, 任意時刻 τ において一定角速度で回転する状態になった場合の運動方程式は, 式 (2.26) において, $\alpha \tau = \Omega$, $\alpha = 0$ を代入することにより得られる. その場合の運動方程式は, 2.1節で求めた式 (2.5) に一致する.

次に, 2.1節で求めた応力成分, 式 (2.8) と式 (2.9) で近似した無次元面外方向変位を用いて, 式 (2.26) で与えられた運動方程式を前節同様にして, ガラーキン法を適用すると運動方程式は次式で表される.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_1 \left\{ I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 C_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} - I_{qml}^{(2)} \frac{\partial S_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} C_{ml}(\tau) - I_{qml}^{(4)} S_{ml}(\tau) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi \\
\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_2 \left(I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 S_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} + I_{qml}^{(2)} \frac{\partial C_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} S_{ml}(\tau) + I_{qml}^{(4)} C_{ml}(\tau) \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi \quad \dots\dots\dots (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{qml}^{(1)} &= \int_{\epsilon}^1 \xi R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi, \quad I_{qml}^{(2)} = 2l\alpha\tau I_{qml}^{(1)} \\
I_{qml}^{(3)} &= (1+i\delta_E) \int_{\epsilon}^1 \xi \nabla^4 R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi - (l\alpha\tau)^2 I_{qml}^{(1)} \\
&\quad - \int_{\epsilon}^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{ml}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{ml}(\xi) \right) R_{ql}(\xi) d\xi \\
I_{qml}^{(4)} &= l\alpha I_{qml}^{(1)}
\end{aligned}$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 2\pi & (l = 0) \end{cases}, \quad \zeta_2 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 0 & (l = 0) \end{cases}, \quad m, q = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L$$

式 (2.27) を展開し、以下に示したベクトルとマトリックスを用いて整理すると運動方程式 (2.27) は式 (2.28) で表される。

$$\begin{aligned}
[A] \{\ddot{x}(\tau)\} + [B] \{\dot{x}(\tau)\} + [C] \{x(\tau)\} &= \{Q(\tau)\} \\
\{Q(\tau)\} &= \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(1)} & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{qml}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_1 I_{qml}^{(2)} \\ \zeta_2 I_{qml}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(3)} & -\zeta_1 I_{qml}^{(4)} \\ \zeta_2 I_{qml}^{(3)} & \zeta_2 I_{qml}^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\{x(\tau)\} &= \begin{bmatrix} C_{ml}(\tau) \\ S_{ml}(\tau) \end{bmatrix} \\
& \quad m, q = 0, 1, 2, \dots, M, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L \\
& \quad \dots\dots\dots (2.28)
\end{aligned}$$

また、式 (2.28) において外力の項を 0 とし、固有値解析を行う事により、次

式の振動数方程式が得られる。

$$|[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]| = 0 \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

前節で求めた振動数方程式は一定角速度 Ω で回転している時の Ψ に関する方程式であり、それを解くことによって、一定角速度で回転している円板の無次元固有円振動数が求められる。それに対して、式 (2.29) は任意の無次元固有円振動数 Ψ となるときに回転円板の角速度 $\Omega(\tau) = \alpha\tau$ が求められ、 $\Omega(\tau)$ に関する方程式であるといえる。

次に、2.2.1項における解析と同様に一定角加速度で回転する場合について応答解析を行う。回転円板に調和外力 $\{Q(\tau)\} = \{q\}e^{i\lambda\tau}$ が働くとき、式 (2.28) の運動方程式の解を $\{x(\tau)\} = \{X\}e^{i\lambda\tau}$ とし、それぞれを代入する。そして、大きさ F の外力 $Fe^{i\lambda\tau}$ が空間に固定された静止座標系の一点 (ξ_0, ϕ_0) で回転している円板に作用する場合の定常応答を求めると次式となる。

$$\begin{aligned}
\{x(\tau)\} &= [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{q\}e^{i\lambda\tau} \\
\{q\} &= \begin{bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) \xi d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) \xi d\xi d\phi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} FR_{ql}(\xi_0) \cos(l\phi_0) \xi_0 \\ FR_{ql}(\xi_0) \sin(l\phi_0) \xi_0 \end{bmatrix} \\
&= F\{p\} \quad \dots\dots\dots (2.30)
\end{aligned}$$

上式での λ は調和外力として円板に作用する無次元起振円振動数を表す。

次に、式 (2.9) で近似した面外方向変位 $u(\xi, \phi, \tau)$ の級数の項数を節直径に関して $n=0 \sim L$ 、節円に関して $m=0 \sim M$ とし、さらに、式 (2.30) を代入すると次式が得られる。

$$\frac{u(\xi, \phi, \tau)}{F} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{\cos(n\phi) \sin(n\phi)\} [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{p\} e^{i\lambda\tau} R_{mn}(\xi) \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

式 (2.31) が空間に固定された一点 (ξ_0, ϕ_0) で円板が調和起振され、さらに、角速度が一定角加速度 α で上昇する回転円板の任意時刻 τ における無次元振幅で

ある。また、その任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) における無次元化した駆動点インピーダンスを求めると次式となる。

$$\left| \frac{Z}{i\omega M_s} \right| = \left| \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)\lambda^2 S_I} \right|$$

$$S_I = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{ \cos(n\phi_0) \sin(n\phi_0) \} [[C] + i\lambda [B] - \lambda^2 [A]]^{-1} \{ p \} R_{nm}(\xi_0)$$

..... (2.32)

ここで、 M_s は円板の質量である。

前節で求めた駆動点インピーダンスの式 (2.22) は、一定角速度 Ω で回転している円板が任意の一点で調和起振されたときのその起振力の振動数に対する伝達関数を表す。それに対して、式 (2.32) で求められた駆動点インピーダンスは、任意の一点で一定の調和起振力が作用する円板が、角加速度 α で加速されるとき角速度 $\Omega(\tau) = \alpha \tau$ に対する伝達関数を表している。

2.4 第2章の結果

第2章においては、回転円板の一般的な振動特性を把握するため、等方性回転円板についての理論解析を行った。材質が等方性でかつ同質で板厚が薄く一定である円板の半径方向の力の釣り合い方程式と運動方程式を基礎弾性理論に基づいて求めた。これらの基礎式は空間に固定された静止座標系に座標変換し、一定角速度で回転する場合と一定角加速度で加速される場合の二通りについてそれぞれ導出した。複素ヤング率を用いることにより、内部(構造)減衰を考慮した。また、運動方程式の解法としてガラキン法を適用し、その解を求めた。そして、固有値解析より振動数方程式を求め、定常応答解析として、空間に固定された一点で調和起振力が作用するときの応答を求めた。さらに、その応答より、伝達関数である駆動点インピーダンスと無次元変位を導出した。

第4章における数値計算においては、角速度、角加速度、減衰係数、起振位置、起振振動数、ハブ外径と円板の内径との関係などを変化させて、各パラメータの円板の振動に及ぼす影響を定量的に論じる。

第3章 極異方性回転円板の理論解析

図3.1に示すように、円板の円周方向にカーボン繊維やガラス繊維などで代表される強化繊維を巻き、それらを含むようにエポキシ樹脂等のプラスチックにより円板を成形する。このような円板は円周方向と半径方向のヤング率が異なり、極異方性円板となる。この章では、上記のように極異方性を導入することによって円周方向の強度を強くした円板が一定角速度で回転するか、あるいは一定角加速度で加速される場合、空間に固定された静止座標系の、任意の一点で調和起振されるとき極異方性円板の曲げ振動現象を理論解析する。

3.1 極異方性回転円板

本章で取り扱う円板を図3.1に示す。形状は前章図2.1で示した図と同様で、半径 a 、中央に半径 c の穴を有し、半径 b のハブで固定された板厚一定の薄い円板とする。そして、以下の (i) ~ (iii) を仮定する。

- (i) 極異方性円板は直交異方性を持つものと考え、異方性軸を通るすべての半径方向の面は弾性対称面であるとする。
- (ii) 円板と共に回転する回転座標系 (r, θ) の原点と異方性の極が一致し、異方性の軸 (z 軸) に関して軸対称である。
- (iii) 板の中立面の z 方向変位 (たわみ) は微小であるとする。よって、板が面外方向の曲げを生じるとき、中立面上の点は鉛直方向のみに変位するものとし、変形前に中央面に垂直である断面は変形後も中央面に垂直な平面を保つものとする。

以上より、極異方性回転円板を2次元の軸対称問題として取り扱う。また、円板の内部(構造)減衰については、各異方性軸方向の弾性係数を複素数を用いて表すことにより考慮し、解析を行う。

3.2 応力成分

図3.1に示す極異方性円板が一定角速度 Ω で回転しているとき、円板に作用す

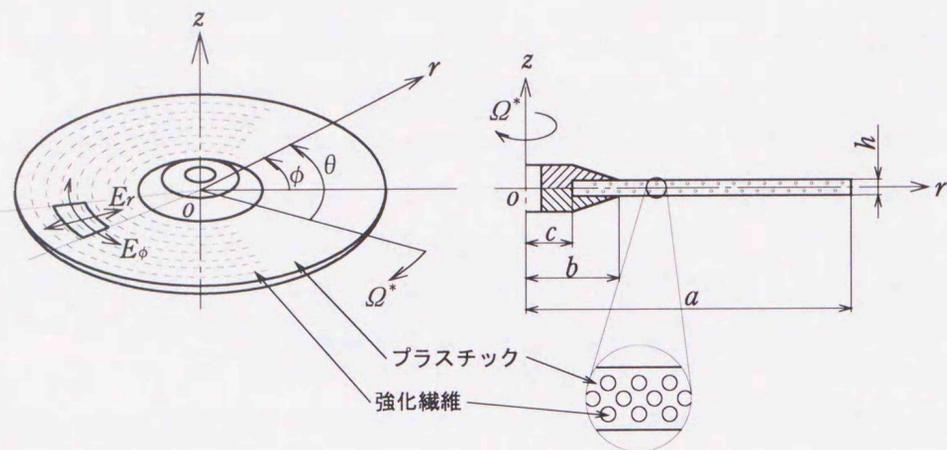


図 3. 1 極異方性円板

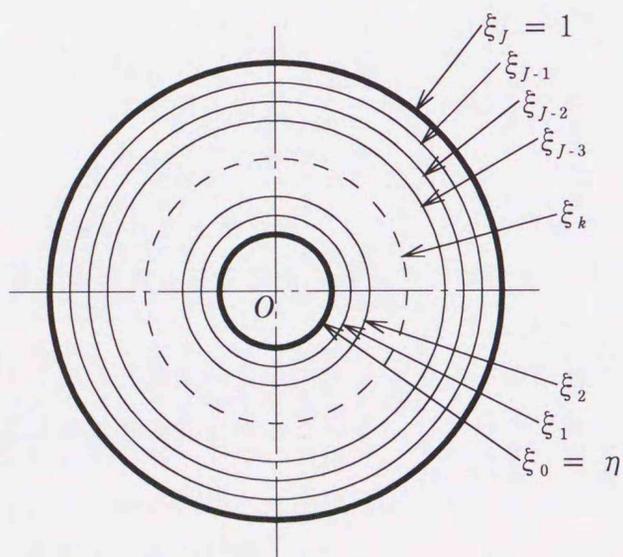


図 3. 2 円環状に J 等分した円板

る物体力として慣性力（遠心力）を考慮する．その場合の回転座標系 (r, θ) における力の釣り合い方程式は式 (3.1) で表される．

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r^*) - \sigma_\theta^* + \rho \Omega^{*2} r^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

また, v^* を半径方向変位とすると, 半径方向と周方向の各応力は次式となる．

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{\tilde{E}_r}{1-\nu_r\nu_\theta} \left\{ \frac{\partial v^*}{\partial r} + \nu_\theta \frac{v^*}{r} \right\} \\ \sigma_\theta^* &= \frac{\tilde{E}_\theta}{1-\nu_r\nu_\theta} \left\{ \frac{v^*}{r} + \nu_r \frac{\partial v^*}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

ここで, $\tilde{E}_r, \tilde{E}_\theta$ は半径方向と周方向における各弾性主軸方向の複素ヤング率であり, 次式で与えられる．また, ν_r は r 方向に引っ張り（圧縮）をうけるときの θ 方向の収縮（伸び）を表すポアソン比, ν_θ は θ 方向に引っ張り（圧縮）をうけるときの r 方向の収縮（伸び）を表すポアソン比である．

$$\tilde{E}_r = E_r(1+i\delta_{Er}), \quad \tilde{E}_\theta = E_\theta(1+i\delta_{E\theta}) \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

空間に固定された静止座標系 (r, ϕ) と回転座標系 (r, θ) の間には次式の関係が成り立つ．この関係より力の釣り合い方程式 (3.1) と式 (3.2) を回転座標系から静止座標系へと座標変換する．

$$\begin{aligned} \theta &= \phi + \Omega t \\ \sigma_r^*(r, \theta) &= \sigma_r^*(r, \phi), \quad \sigma_\theta^*(r, \theta) = \sigma_\theta^*(r, \phi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

さらに, 式 (3.5) を代入し, すべて無次元化して表すと式 (3.6) ~ 式 (3.8) となる．

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, \quad \partial r = a \partial \xi, \quad v = \frac{v^*}{a}, \quad h_0 = \frac{h}{a} \\ \sigma_\xi &= \frac{a^2 h}{\tilde{D}_r} \sigma_r^*, \quad \sigma_\phi = \frac{a^2 h}{\tilde{D}_r} \sigma_\theta^*, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h a^4}{\tilde{D}_r}} \Omega^*, \quad \tilde{D}_r = \frac{h^3 \tilde{E}_r}{12(1-\nu_r\nu_\theta)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

ここで、 \widetilde{D}_r は円板の内部減衰を考慮した曲げ剛性である。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \sigma_\xi) - \sigma_\phi + \xi^2 \Omega^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

$$\sigma_\xi = \frac{12}{h_0^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} + \nu_\theta \frac{v}{\xi} \right] \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

$$\sigma_\phi = \frac{12}{h_0^2} \frac{\widetilde{E}_\theta}{\widetilde{E}_r} \left[\frac{v}{\xi} + \nu_r \frac{\partial v}{\partial r} \right] \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

次に、力の釣り合い方程式 (3.6) をスプライン補間法により解き、式 (3.7)、(3.8) より半径方向と周方向の応力分布を求める。

図3.2のように、極異方性回転円板を円環状に J 等分する。そして、任意の時刻 τ における半径方向変位 $v(\xi, \tau)$ を式 (3.9) で示した3次の多項式で近似する。ここで、 a_0, a_1, a_2, b_j は未定係数である。

$$v(\xi, \tau) = a_0 + a_1(\xi - \eta) + a_2(\xi - \eta)^2 + \sum_{j=0}^{J-1} b_j (\xi - \xi_j)^3 H(\xi - \xi_j)$$

$$H(\xi - \xi_j) = \begin{cases} 1 & : \xi > \xi_j \\ 0 & : \xi \leq \xi_j \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

次に、無次元化された力の釣り合い方程式 (3.6) に式 (3.7)、(3.8) を代入すると次式となる。

$$\xi^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \xi \left[1 + \nu_\theta - \nu_r \frac{\widetilde{E}_\theta}{\widetilde{E}_r} \right] \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\widetilde{E}_\theta}{\widetilde{E}_r} v + \frac{h_0^2}{12} \xi^3 \Omega^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

さらに、式 (3.10) にベッティの相反定理 ($\widetilde{E}_r \nu_\theta = \widetilde{E}_\theta \nu_r$) とヤング率の比 $\kappa = \widetilde{E}_\theta / \widetilde{E}_r$ を用いて整理すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \kappa \frac{v}{\xi^2} = -\frac{h_0^2}{12} \Omega^2 \xi \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

円板の面内方向の境界条件は、円板の内周 ($\xi = \eta$) と外周 ($\xi = 1$) において自由であり、次式で与えられる。

$$\sigma_\xi(\eta, \phi) = 0 \quad , \quad \sigma_\xi(1, \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

式 (3.11) に近似した半径方向変位 (3.9) を代入し、境界条件式 (3.12) を用いることにより、次式が得られる。

$$\nu_\theta a_0 + \{1 + \nu_\theta(1 - \eta)\} a_1 + \{2 + \nu_\theta(1 - \eta)\} (1 - \eta) a_2 + \sum_{j=0}^{J-1} b_j \{3 + \nu_\theta(1 - \xi_j)\} (1 - \xi_j)^2 = 0$$

$$\frac{\nu_\theta}{\eta} a_0 + a_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

また、式 (3.9) で与えられる半径方向変位 v は $k=0, 1, 2, \dots, J$ の各分割点において微分方程式 (3.11) を満たさなくてはならない。よって、式 (3.11) に式 (3.9) を代入することにより、 $\xi = \xi_k$ ($k=1, 2, 3, \dots, J$) の各分割点において次式が成り立つ。

$$A_0^{(k)} a_0 + A_1^{(k)} a_1 + A_2^{(k)} a_2 + \sum_{j=0}^{J-1} B_j^{(k)} b_j H(\xi_k - \xi_j) = -\frac{h_0}{12} \Omega^2 \xi_k$$

$$H(\xi_k - \xi_j) = \begin{cases} 1 & : \xi_k > \xi_j \\ 0 & : \xi_k \leq \xi_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0^{(k)} = -\frac{\kappa}{\xi_k^2} \\ A_1^{(k)} = \frac{1}{\xi_k} \left\{ 1 - \frac{\kappa}{\xi_k} (\xi_k - \eta) \right\} \\ A_2^{(k)} = 2 + \frac{2}{\xi_k} (\xi_k - \eta) - \frac{\kappa}{\xi_k^2} (\xi_k - \eta)^2 \\ B_j^{(k)} = \left\{ 6 + \frac{3}{\xi_k} (\xi_k - \xi_j) - \frac{\kappa}{\xi_k^2} (\xi_k - \xi_j)^2 \right\} (\xi_k - \xi_j) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

よって、式 (3.9) の未定係数 a_0, a_1, a_2, b_j は、円板の面内方向の境界条件より得られた式 (3.13) と、各分割点 (ξ_k) においてもとの支配方程式を満足していることから得られた式 (3.14) から構成される連立方程式の解として決定される。

応力成分は、式 (3.7), (3.8) に上記により求められた未定係数を代入した式 (3.9) を用いることにより次式で表される。

$$\sigma_{\xi}(\xi, \phi) = \frac{12}{h_0^2} \left(\frac{\nu_{\theta}}{\xi} a_0 + \left[1 + \frac{\nu_{\theta}}{\xi} (\xi - \eta) \right] a_1 + \left[2 + \frac{\nu_{\theta}}{\xi} (\xi - \eta) \right] (\xi - \eta) a_2 + \sum_{j=0}^{l-1} b_j \left[3 + \frac{\nu_{\theta}}{\xi} (\xi - \xi_j) \right] (\xi - \xi_j)^2 H(\xi - \xi_j) \right) \dots (3.15)$$

$$\sigma_{\phi}(\xi, \phi) = \frac{12\kappa}{h_0^2} \left(\frac{1}{\xi} a_0 + \left[\frac{1}{\xi} (\xi - \eta) + \nu_r \right] a_1 + \left[\frac{1}{\xi} (\xi - \eta) + 2\nu_r \right] (\xi - \eta) a_2 + \sum_{j=0}^{l-1} b_j \left[\frac{1}{\xi} (\xi - \xi_j) + 3\nu_r \right] (\xi - \xi_j)^2 H(\xi - \xi_j) \right) \dots (3.16)$$

3.3 運動方程式

図3.1に示した板厚一定の薄い極異方性円板が一定角速度 Ω^* で回転しているとす。円板と共に回転する回転座標系 (r, θ) における面外方向変位を w^* とすると、極異方性回転円板の運動方程式は、直交異方性板の曲げに関する古典理論を適用すると以下の微分方程式が導かれる⁽³²⁾。

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_r \frac{\partial^4 w^*}{\partial r^4} + 2\tilde{D}_{r\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w^*}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \tilde{D}_{\theta} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w^*}{\partial \theta^4} + 2\tilde{D}_r \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w^*}{\partial r^3} \\ & - 2\tilde{D}_{r\theta} \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w^*}{\partial r \partial \theta^2} - \tilde{D}_{\theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + 2(\tilde{D}_{\theta} + \tilde{D}_{r\theta}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} + \tilde{D}_{\theta} \frac{1}{r^3} \frac{\partial w^*}{\partial r} \\ & + \rho h \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} - h \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sigma_r^* \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_{\theta}^* \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right) \right\} = P^* \end{aligned} \dots (3.17)$$

空間に固定された静止座標系 (r, ϕ) 上における面外方向変位を u^* とすると、円板と共に回転する回転座標系 (r, θ) との間には式 (3.18) が成り立つ。これらの関係と、式 (3.19) で表されるように、円板形状と材料物性値により無次元化した式を、式 (3.17) に代入すると式 (3.20) となる。

$$\theta = \phi + \Omega t$$

$$w^*(r, \theta, t) = w^*(r, \phi + \Omega t, t) = u^*(r, \phi, t)$$

$$\sigma_r^*(r, \theta) = \sigma_r^*(r, \phi), \quad \sigma_{\theta}^*(r, \theta) = \sigma_{\theta}^*(r, \phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m w^*}{\partial r^m} &= \frac{\partial^m u^*}{\partial r^m}, \quad \frac{\partial^m w^*}{\partial \theta^m} = \frac{\partial^m u^*}{\partial \phi^m} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial \phi} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

..... (3.18)

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad \partial r = a \partial \xi, \quad u = \frac{u^*}{a}, \quad P(\xi, \phi, \tau) = \frac{a^3}{D_r} P^*(r, \phi, t)$$

$$\sigma_{\xi} = \frac{a^2 h}{D_r} \sigma_r^*, \quad \sigma_{\phi} = \frac{a^2 h}{D_r} \sigma_{\theta}^*, \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D_r}} \Omega^*, \quad \tau = \sqrt{\frac{D_r}{\rho h a^4}}$$

$$D_r = \frac{h^3 E_r}{12(1 - \nu_r \nu_{\theta})}$$

..... (3.19)

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{D}_r}{D_r} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \frac{\tilde{D}_{r\theta}}{D_r} \frac{2}{\xi^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \frac{\tilde{D}_{\theta}}{D_r} \frac{1}{\xi^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \phi^4} + \frac{\tilde{D}_r}{D_r} \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \\ & - \frac{\tilde{D}_{r\theta}}{D_r} \frac{2}{\xi^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial \phi^2} - \frac{\tilde{D}_{\theta}}{D_r} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\tilde{D}_{\theta}}{D_r} + \frac{\tilde{D}_{r\theta}}{D_r} \right) \frac{2}{\xi^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ & + \frac{\tilde{D}_{\theta}}{D_r} \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \phi} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ & - \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sigma_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sigma_{\phi} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right\} = P \end{aligned}$$

..... (3.20)

ここで、 $\tilde{D}_r, \tilde{D}_{\theta}$ は、それぞれ半径方向と周方向の曲げ剛性、 \tilde{D}_k はねじり剛性であり、複素数を用いて内部(構造)減衰を考慮し、次式で表す。

$$\tilde{D}_r = \frac{h^3 \tilde{E}_r}{12(1 - \nu_r \nu_{\theta})}, \quad \tilde{D}_{\theta} = \frac{h^3 \tilde{E}_{\theta}}{12(1 - \nu_r \nu_{\theta})}, \quad \tilde{D}_k = \frac{h^3 \tilde{G}_{r\theta}}{12}$$

$$\tilde{D}_{r\theta} = \tilde{D}_r \nu_{\theta} + 2\tilde{D}_k$$

$$\tilde{E}_r = E_r (1 + i \delta_{Er}), \quad \tilde{E}_{\theta} = E_{\theta} (1 + i \delta_{E\theta}), \quad \tilde{G}_{r\theta} = G_{r\theta} (1 + i \delta_G)$$

..... (3.21)

さらに、式 (3.22) を式 (3.20) に代入し、両辺に ξ をかけると、式 (3.23) となる。

$$\frac{\widetilde{D}_r}{D_r} = \frac{\widetilde{E}_r}{E_r} = 1+i\delta_{Er} = \beta_r, \quad \frac{\widetilde{D}_\theta}{D_r} = \frac{\widetilde{E}_\theta}{E_r} = \frac{E_\theta}{E_r} (1+i\delta_{E\theta}) = \beta_\theta$$

$$\frac{\widetilde{D}_{r\theta}}{D_r} = \frac{1}{D_r} (\widetilde{D}_r \nu_\theta + \widetilde{D}_\theta) = (1+i\delta_{Er}) \nu_\theta + 2 \frac{G_{r\theta}}{E_r} (1-\nu_r \nu_\theta) (1+i\delta_c) = \beta_c$$

..... (3.22)

$$\xi \Lambda u + \xi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \phi} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sigma_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi} \sigma_\phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} = \xi P$$

$$\Lambda = \beta_r \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{2\beta_c}{\xi^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \frac{\beta_\theta}{\xi^4} \frac{\partial^4}{\partial \phi^4} + \frac{2\beta_r}{\xi} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}$$

$$- \frac{2\beta_c}{\xi^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \phi^2} - \frac{\beta_\theta}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2(\beta_\theta + \beta_c)}{\xi^4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\beta_\theta}{\xi^3} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

..... (3.23)

式 (3.23) が本研究で取り上げる一定角速度で回転し、内部 (構造) 減衰を有する極異方性円板の運動方程式である。

3.4 面外方向変位

極異方性回転円板の面外方向変位 u を次式のように、未知の時間関数 $C_{mn}(\tau)$, $S_{mn}(\tau)$ と未知の座標関数 $R_{mn}(\xi)$ とによって変数分離した形で近似する。

$$u(\xi, \phi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\} R_{mn}(\xi)$$

$$R_{mn}(\xi) = \xi^m + \xi^{m+1} + G_{mn}^{(1)} \xi^{m+2} + G_{mn}^{(2)} \xi^{m+3} + G_{mn}^{(3)} \xi^{m+4} + G_{mn}^{(4)} \xi^{m+5}$$

..... (3.24)

ただし、上式は式 (3.18) により回転座標系から空間に固定された静止座標系に座標変換し、さらに式 (3.19) により、すべて無次元化した式である。また、 m

は円板の固有振動モードに現れる節円の数、 n は節直径の数を示し、 $G_{mn}^{(1)} \sim G_{mn}^{(4)}$ は未定係数である。

図3.1に示した極異方性回転円板の面外方向における境界条件は、ハブにより固定した円板内周 ($\xi = \varepsilon$) では、変位とたわみ角が0となる。また、円板外周 ($\xi = 1$) では、自由であるので曲げモーメントと剪断力が0となる。すなわち、境界条件は、次式で表される。

$$u(\varepsilon, \phi, \tau) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} u(\varepsilon, \phi, \tau) = 0$$

$$M_\xi(1, \phi, \tau) = 0, \quad N_\xi(1, \phi, \tau) - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \phi} H_{\xi\phi}(1, \phi, \tau) = 0$$

..... (3.25)

式 (3.25) において、 M_ξ , $H_{\xi\phi}$, N_ξ は、それぞれ曲げモーメント、ねじりモーメント、剪断力であり次式で表される。また、これらの式は回転座標系から静止座標系に座標変換し、式 (3.21) の曲げ剛性とねじり剛性、および、円板半径 a で無次元化して表示した。

$$M_\xi = - \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \right\}$$

$$H_{\xi\phi} = (1-\nu_r \nu_\theta) \frac{2\widetilde{G}_{r\theta}}{\widetilde{E}_r} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \phi} - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right)$$

$$N_\xi = - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) - \left\{ \nu_\theta + (1-\nu_r \nu_\theta) \frac{2\widetilde{G}_{r\theta}}{\widetilde{E}_r} \right\} \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{u}{\xi} \right)$$

$$+ \frac{\kappa}{\xi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right)$$

..... (3.26)

次に、式 (3.24) を境界条件式 (3.25) に代入すると次式が得られる。

$$C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} G_{mn}^{(1)} + C_{i4} G_{mn}^{(2)} + C_{i5} G_{mn}^{(3)} + C_{i6} G_{mn}^{(4)} = 0$$

($i = 1, 2, \dots, 4$)

$$C_{1j} = \varepsilon^{m+j-1}$$

$$C_{2j} = (m+j-1) \varepsilon^{m+j-2}$$

$$C_{3j} = (m+j-2)(m+j-1) + \nu_\theta (m+j-1-n^2)$$

$$C_{4j} = (m+j-1) \{ (m+j-2)^2 - \kappa \} - n^2 \left\{ \nu_{\theta} + (1 - \nu_r \nu_{\theta}) \frac{4\tilde{G}_{r\theta}}{\tilde{E}_r} \right\} (m+j-2) - \kappa$$

(j = 1, 2, \dots, 6)

\dots\dots\dots (3.27)

さらに、式 (3.27) をマトリックス形で書き表すと、次式で表される非同次連立方程式となる。

$$\begin{bmatrix} C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{mn}^{(1)} \\ G_{mn}^{(2)} \\ G_{mn}^{(3)} \\ G_{mn}^{(4)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{11} + C_{12} \\ C_{21} + C_{22} \\ C_{31} + C_{32} \\ C_{41} + C_{42} \end{bmatrix}$$

\dots\dots\dots (3.28)

よって、式 (3.28) の連立方程式を解くことにより、未定係数 $G_{mn}^{(1)} \sim G_{mn}^{(4)}$ を決定することができる。そして、これらの係数を式 (3.24) に代入することにより、その近似関数は幾何学的、力学的境界条件を満足した極異方性回転円板の面外方向変位として与えられる。ただし、時間関数については未知であり、これは次節で求める。

3.5 振動数方程式と応答

前節において求められた極異方性回転円板の応力成分、運動方程式、そして、近似した面外方向変位より、第2章と同様に、固有値解析として、外力が作用しない場合の運動方程式をガラーキソ法を適用して解き、振動数方程式を求める。また、外力として、空間に固定された一点 (ξ_0, ϕ_0) で調和起振力が円板に作用する場合の定常応答解析を行い、無次元変位と伝達関数を求める。

3.5.1 固有値解析

式 (3.23) の右辺を0として、外力が作用していない場合の極異方性回転円板の運動方程式に、式 (3.24) を代入すると運動方程式は次式で表される。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\} \xi \Lambda'$$

$$+ \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 C_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} \cos(n\phi) + \frac{\partial^2 S_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} \sin(n\phi) \right\} \right.$$

$$- 2n\Omega \left\{ -\frac{\partial C_{mn}(\tau)}{\partial \tau} \sin(n\phi) + \frac{\partial S_{mn}(\tau)}{\partial \tau} \cos(n\phi) \right\}$$

$$- n^2 \Omega^2 \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\} \left. \right\} \xi R_{mn}(\xi)$$

$$- \left\{ C_{mn}(\tau) \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \sin(n\phi) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{n^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{mn}(\xi) \right\} = 0$$

$$\Lambda' = \beta_r \frac{\partial^4 R_{mn}(\xi)}{\partial \xi^4} - \frac{2\beta_c n^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 R_{mn}(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\beta_{\theta} n^4}{\xi^4} R_{mn}(\xi)$$

$$+ \frac{2\beta_r}{\xi} \frac{\partial^3 R_{mn}(\xi)}{\partial \xi^3} + \frac{2\beta_c n^2}{\xi^3} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\beta_{\theta}}{\xi^2} \frac{\partial^2 R_{mn}(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$- \frac{2n^2(\beta_{\theta} + \beta_G)}{\xi^4} R_{mn}(\xi) + \frac{\beta_{\theta}}{\xi^3} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi}$$

\dots\dots\dots (3.29)

さらに、式 (3.29) を $\sin(n\phi)$ と $\cos(n\phi)$ の項で整理すると、運動方程式は次式で表される。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_{mn}(\tau) \xi \Lambda' \cos(n\phi) + S_{mn}(\tau) \xi \Lambda' \sin(n\phi) \right\}$$

$$+ \left\{ \left\{ \frac{\partial^2 C_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} - 2n\Omega \frac{\partial S_{mn}(\tau)}{\partial \tau} - n^2 \Omega^2 C_{mn}(\tau) \right\} \cos(n\phi) \right.$$

$$+ \left\{ \frac{\partial^2 S_{mn}(\tau)}{\partial \tau^2} + 2n\Omega \frac{\partial C_{mn}(\tau)}{\partial \tau} - n^2 \Omega^2 S_{mn}(\tau) \right\} \sin(n\phi) \left. \right\} \xi R_{mn}(\xi)$$

$$- C_{mn}(\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{n^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{mn}(\xi) \right\} \cos(n\phi)$$

$$- S_{mn}(\tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{mn}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{n^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{mn}(\xi) \right\} \sin(n\phi) \left. \right\} = 0$$

\dots\dots\dots (3.30)

式 (3.30) で表される運動方程式において、 σ_{ξ} 、 σ_{ϕ} には3.1節で求めた式

(3.15), (3.16) を代入する. そして, ガラーキン法を適用して解を求める. 式 (3.30) に $R_{ql}(\xi)\sin(n\phi)$, $R_{ql}(\xi)\cos(n\phi)$ をかけ, ξ に関して $\varepsilon \sim 1$ まで, ϕ に関して $0 \sim 2\pi$ まで積分する. ただし, ϕ に関して $0 \sim 2\pi$ で積分した結果は, $l=0$ と $l \neq 0$ とで次式のように異なる.

$$\int_0^{2\pi} \cos(l\phi) \sin(l\phi) d\phi = 0 \quad (l=0, l \neq 0)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(l\phi) d\phi = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 2\pi & (l=0) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(l\phi) d\phi = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 0 & (l=0) \end{cases}$$

よって, 上記積分値を式 (3.31) とおく. さらに, 節円の級数の項数 m を M までとし, 節直径を $n=l$ とし, 固有振動モードの直交性より, 式 (3.30) は式 (3.32) で表される.

$$\zeta_1 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 2\pi & (l=0) \end{cases}, \quad \zeta_2 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 0 & (l=0) \end{cases}$$

..... (3.31)

$$\sum_{m=0}^M \zeta_1 \left(I_{qmi}^{(1)} \frac{\partial^2 C_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} - I_{qmi}^{(2)} \frac{\partial S_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qmi}^{(3)} C_{ml}(\tau) \right) = 0$$

$$\sum_{m=0}^M \zeta_2 \left(I_{qmi}^{(1)} \frac{\partial^2 S_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} + I_{qmi}^{(2)} \frac{\partial C_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qmi}^{(3)} S_{ml}(\tau) \right) = 0$$

$$I_{qmi}^{(1)} = \int_{\varepsilon}^1 \xi R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi, \quad I_{qmi}^{(2)} = 2l\Omega I_{qmi}^{(1)}$$

$$I_{qmi}^{(3)} = \int_{\varepsilon}^1 \xi \Lambda' R_{ql}(\xi) d\xi - (l\Omega)^2 I_{qmi}^{(1)}$$

$$- \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{ml}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{ml}(\xi) \right) R_{ql}(\xi) d\xi$$

$$m, q=0, 1, 2, \dots, M, \quad l=0, 1, 2, \dots, L$$

..... (3.32)

さらに, 式 (3.32) を展開し, 以下に示すベクトルとマトリックスを用いることにより整理すると運動方程式 (3.32) は式 (3.33) と書き改められる.

$$[A]\{\ddot{x}(\tau)\} + [B]\{\dot{x}(\tau)\} + [C]\{x(\tau)\} = 0$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \zeta I_{qmi}^{(1)} & 0 \\ 0 & \zeta I_{qmi}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta I_{qmi}^{(2)} \\ \zeta I_{qmi}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \zeta I_{qmi}^{(3)} & 0 \\ 0 & \zeta I_{qmi}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\{x(\tau)\} = \begin{Bmatrix} C_{ml}(\tau) \\ S_{ml}(\tau) \end{Bmatrix} \quad m, q=0, 1, 2, \dots, M, \quad l=0, 1, 2, \dots, L$$

..... (3.33)

ここで, $\dot{}$ は無次元時間 τ に関する微分を示す. 式 (3.33) の解を $\{x(\tau)\} = \{X\}e^{i\Psi\tau}$ と置き, 式 (3.33) に代入することにより式 (3.34) が導かれる. ただし, Ψ は極異方性回転円板の固有円振動数 ω_n を無次元化した値である.

$$[[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]]\{X\} = 0$$

$$\Psi^2 = \frac{\rho h a^4 \omega_n^2}{D}$$

..... (3.34)

式 (3.34) は $\{X\}$ に関する同次連立方程式であり, この式の解ベクトルが零ベクトルでないことから次式の振動数方程式が得られる.

$$|[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]| = 0$$

..... (3.35)

よって, 任意の一定角速度 Ω を与えたときの極異方性回転円板の無次元固有円振動数 Ψ は, 振動数方程式 (3.35) を解くことにより求められる.

3.5.2 定常応答解析

図3.1に示した極異方性回転円板に外力 $P(\xi, \phi, \tau)$ が作用しているときの運動方程式は3.3節で誘導された. この運動方程式をもとに固有値解析で行ったのと同様に, 3.4節において求めた変位の近似式 (3.24) を代入し, ガラーキン法を適用する. さらに, 級数の項数 m を M までとし, 節直径を $n=l$ とし, モードの直交性より, 運動方程式 (3.23) は次式のマトリックス形で表される.

$$[A]\{\ddot{x}(\tau)\} + [B]\{\dot{x}(\tau)\} + [C]\{x(\tau)\} = \{Q(\tau)\}$$

$$\{Q(\tau)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi \end{array} \right\} \\ m, q=0, 1, 2, \dots, M, \quad l=0, 1, 2, \dots, L \\ \dots\dots\dots (3.36)$$

極異方性回転円板に調和外力 $\{Q(\tau)\}=\{q\}e^{i\lambda\tau}$ が働くとき、式(3.36)の運動方程式の解を $\{x(\tau)\}=\{X\}e^{i\lambda\tau}$ とし、それぞれを代入し、定常応答を求めると次式となる。ただし、ここでの λ は、調和外力の無次元起振円振動数を表す。

$$\{x(\tau)\} = [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{q\} e^{i\lambda\tau} \\ \dots\dots\dots (3.37)$$

いま、空間に固定された静止座標系の一点 (ξ_0, ϕ_0) で大きさ F の外力 $Fe^{i\lambda\tau}$ が、回転している極異方性円板に作用する場合、式(3.36)の一般力 $\{Q(\tau)\}$ は、ディラックのデルタ関数を用いることにより、次式のベクトルで表される。

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) \xi d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\xi}^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) \xi d\xi d\phi \end{array} \right\} \\ = \begin{bmatrix} FR_{ql}(\xi_0) \cos(l\phi_0) \xi_0 \\ FR_{ql}(\xi_0) \sin(l\phi_0) \xi_0 \end{bmatrix} \\ = F\{p\} \\ \dots\dots\dots (3.38)$$

次に、式(3.24)で近似した面外方向変位 $u(\xi, \phi, \tau)$ の級数の項数を節直径に関して $n=0\sim L$ 、節円に関して $m=0\sim M$ まで重ね合わせ、さらに、ベクトルの形に書き換えると式(3.39)となる。

$$u(\xi, \phi, \tau) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \} \{x(\tau)\} R_{mn}(\xi) \\ \dots\dots\dots (3.39)$$

式(3.39)に式(3.37)と式(3.38)を代入することにより次式が得られる。

$$\frac{u(\xi, \phi, \tau)}{F} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \} [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{p\} e^{i\lambda\tau} R_{mn}(\xi) \\ \dots\dots\dots (3.40)$$

この式(3.40)が空間に固定された静止座標系における円板上の任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で調和起振された極異方性回転円板の無次元変位である。

次に、第2章で求めたのと同様に極異方性回転円板に、空間に固定された任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で作用する調和起振力と、その点における円板の速度との比として駆動点インピーダンスを求める。

調和起振力を大きさ F^* の外力 $F^*e^{i\omega t}$ で表し、任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で作用するときのその点における変位を u^* とすると、駆動点インピーダンス Z は次式で与えられる。

$$Z = \frac{F^* e^{i\omega t}}{\frac{\partial u^*}{\partial t}} \\ \dots\dots\dots (3.41)$$

ただし、 $*$ は有次元量を表す。ここで、次の記号を導入する。

$$u^* = au, \quad F^* = \frac{D_r}{a^3} F, \quad \omega = \sqrt{\frac{D_r}{\rho ha^4}} \lambda, \quad t = \sqrt{\frac{\rho ha^4}{D_r}} \tau \\ \dots\dots\dots (3.42)$$

式(3.41)に式(3.40)、式(3.42)を代入し無次元化した駆動点インピーダンスを求めると次式となる。ただし、 M_s は極異方性円板の質量である。

$$\left| \frac{Z}{i\omega M_s} \right| = \left| \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)\lambda^2 S_I} \right|$$

$$S_I = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \{ \cos(n\phi_0) \sin(n\phi_0) \} [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{p\} R_{mn}(\xi_0) \\ \dots\dots\dots (3.43)$$

この式(3.43)が空間に固定された座標系から見た、円板上の任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) に調和起振力が作用するときのその点における無次元化した駆動点インピーダンスである。

3.6 一定角加速度で加速される場合

第2章、2.3節において行った等方性回転円板についての理論解析と同様に、本節においても、一定角速度で回転している極異方性回転円板の任意の一点を調和起振したときの応答解析から得られた結果を用いて、極異方性円板の回転が一

定ではなく、任意の角加速度で、加速される場合について解析を行う。解析に当たって、角速度が増加するときの極異方性円板の慣性力を考慮した運動方程式を導きガラキン法を適用し解を求め、振動数方程式を導く。さらに、その円板に作用する外力として、空間に固定された任意の一点から調和起振力が作用する場合を考え、そのときの応答より、無次元変位と駆動点インピーダンスを求める。

図3.3は角速度 $\Omega^*(t)$ で回転する極異方性円板を示す。また、 $\Omega^*(0) = 0$ とし、一定の角加速度 α^* で加速される場合を想定する。その場合の任意時刻 t における角速度と、円板と共に回転する回転座標系の角度 Θ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\Omega^*(t) = \alpha^* t, \quad \Theta = \frac{\Omega^*(t)}{2} t \quad \dots\dots\dots (3.44)$$

よって、回転座標系 (r, θ) と空間に固定された静止座標系 (r, ϕ) との関係は、 $\theta = \phi + \Theta$ であるので、式(3.44)を代入することにより式(3.45)が得られる。

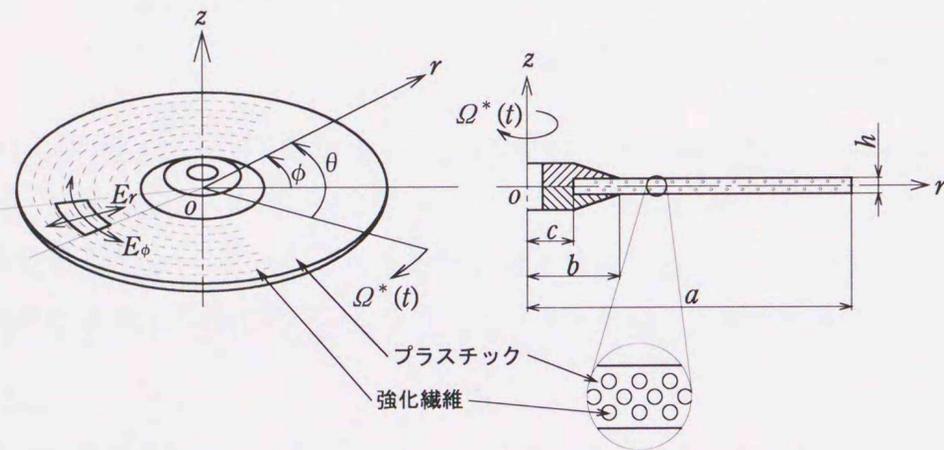


図3.3 角速度が変化する極異方性回転円板

$$\theta = \phi + \frac{\alpha^*}{2} t^2$$

$$w^*(r, \theta, t) = w^*(r, \phi + \frac{\alpha^*}{2} t^2, t) = u^*(r, \phi, t)$$

$$\sigma_r^*(r, \theta) = \sigma_r^*(r, \phi), \quad \sigma_\theta^*(r, \theta) = \sigma_\theta^*(r, \phi) \quad \dots\dots\dots (3.45)$$

これらの関係を用いることにより、極異方性回転円板の基礎方程式等を回転座標系から空間に固定された静止座標系で表した方程式に変換できる。式(3.17)で表される極異方性回転円板の運動方程式において、円板に作用する慣性力の項 $\rho h(\partial^2 w^*/\partial t^2)$ は、角速度が時間関数で与えられることにより、時間に関する2階微分は合成関数の微分法より次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} = (\alpha^* t)^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial \phi^2} - 2\alpha^* t \frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial \phi} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \alpha^* \frac{\partial u^*}{\partial \phi} \quad \dots\dots\dots (3.46)$$

材料の内部減衰を考慮するために、式(3.19)、式(3.21)と式(3.22)を用い、さらに式(3.47)を定義する。

$$\alpha = \frac{\rho h \alpha^4}{D} \alpha^* \quad \dots\dots\dots (3.47)$$

式(3.46)を式(3.17)に代入し、すべて無次元化された極異方性回転円板の運動方程式を求めると式(3.48)となる。

$$\xi \Lambda u + \xi \left(\alpha^2 \tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - 2\alpha \tau \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \sigma_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi} \sigma_\theta \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} = \xi P$$

$$\Lambda = \beta_r \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{2\beta_c}{\xi^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \phi^2} + \frac{\beta_\theta}{\xi^4} \frac{\partial^4}{\partial \phi^4} + \frac{2\beta_r}{\xi} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \frac{2\beta_c}{\xi^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \phi^2} - \frac{\beta_\theta}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2(\beta_\theta + \beta_c)}{\xi^4} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\beta_\theta}{\xi^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots (3.48)$$

運動方程式 (3.48) は、一定角加速度 α で角速度が増加する場合の運動方程式である。また、任意時刻 τ において一定角速度で回転する状態になった場合の運動方程式は、式 (3.48) において、 $\alpha \tau = \Omega$, $\alpha = 0$ を代入することにより得られる。その場合の運動方程式は、3.3節で求めた式 (3.23) に一致する。

次に、3.2節で求めた応力成分 (3.15), (3.16) と3.4節で近似した無次元面外方向変位 (3.24) を、極異方性回転円板の運動方程式 (3.48) に代入する。そして、ガラーキン法を適用して解を求める。3.5.1項同様、式 (3.24) を代入した後に $R_{ql}(\xi) \sin(n\phi)$, $R_{ql}(\xi) \cos(n\phi)$ を乗じ、 ξ に関して $\varepsilon \sim 1$ まで、 ϕ に関して $0 \sim 2\pi$ まで積分する。さらに、節円の級数の項数 m を M までとし、節直径を $n=l$ とし、固有振動モードの直交性より、次式が得られる。

$$\sum_{m=0}^M \zeta_1 \left(I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 C_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} - I_{qml}^{(2)} \frac{\partial S_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} C_{ml}(\tau) - I_{qml}^{(4)} S_{ml}(\tau) \right) = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi$$

$$\sum_{m=0}^M \zeta_2 \left(I_{qml}^{(1)} \frac{\partial^2 S_{ml}(\tau)}{\partial \tau^2} + I_{qml}^{(2)} \frac{\partial C_{ml}(\tau)}{\partial \tau} + I_{qml}^{(3)} S_{ml}(\tau) + I_{qml}^{(4)} C_{ml}(\tau) \right) = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi$$

$$I_{qml}^{(1)} = \int_{\varepsilon}^1 \xi R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi, \quad I_{qml}^{(2)} = 2l\alpha \tau I_{qml}^{(1)}$$

$$I_{qml}^{(3)} = (1+i\delta_E) \int_{\varepsilon}^1 \xi \nabla^4 R_{ml}(\xi) R_{ql}(\xi) d\xi - (l\alpha \tau)^2 I_{qml}^{(1)} - \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \sigma_{\xi} \frac{\partial R_{ml}(\xi)}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\xi} \sigma_{\phi} R_{ml}(\xi) \right) R_{ql}(\xi) d\xi$$

$$I_{qml}^{(4)} = l\alpha I_{qml}^{(1)}$$

$$\zeta_1 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 2\pi & (l = 0) \end{cases}, \quad \zeta_2 = \begin{cases} \pi & (l \neq 0) \\ 0 & (l = 0) \end{cases}, \quad m, q=0, 1, 2, \dots, M, \quad l=0, 1, 2, \dots, L$$

..... (3.49)

さらに、式 (3.49) を m, q に関して展開し、以下に示すベクトルとマトリックスを用いて整理すると極異方性回転円板の運動方程式は式 (3.50) で表される。

$$[A] \{\ddot{x}(\tau)\} + [B] \{\dot{x}(\tau)\} + [C] \{x(\tau)\} = \{Q(\tau)\}$$

$$\{Q(\tau)\} = \begin{Bmatrix} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \cos(l\phi) d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^1 \xi P(\xi, \phi, \tau) R_{ql}(\xi) \sin(l\phi) d\xi d\phi \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(1)} & 0 \\ 0 & \zeta_2 I_{qml}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_1 I_{qml}^{(2)} \\ \zeta_2 I_{qml}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \zeta_1 I_{qml}^{(3)} & -\zeta_1 I_{qml}^{(4)} \\ \zeta_2 I_{qml}^{(4)} & \zeta_2 I_{qml}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\{x(\tau)\} = \begin{Bmatrix} C_{ml}(\tau) \\ S_{ml}(\tau) \end{Bmatrix}$$

$$m, q=0, 1, 2, \dots, M, \quad l=0, 1, 2, \dots, L$$

..... (3.50)

ただし、 $\dot{}$ は無次元時間 τ に関する微分を示す。

次に、式 (3.50) において外力の項 $\{Q(\tau)\}$ を 0 とし、固有値解析を行う。式 (3.50) の解を $\{x(\tau)\} = \{X\} e^{i\psi\tau}$ とおく。この解を式 (3.50) に代入することにより式 (3.51) が得られる。ただし、 Ψ は一定角加速度で回転する極異方性円板の固有円振動数 ω_n を次式で無次元化した値である。

$$[[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]] \{X\} = 0$$

$$\Psi^2 = \frac{\rho h a^4 \omega_n^2}{D}$$

..... (3.51)

式 (3.51) は $\{X\}$ に関する連立同次方程式である。この式の解ベクトル $\{X\}$ は零ベクトルでないことから、次式の振動数方程式が得られる。

$$|[C] + i\Psi[B] - \Psi^2[A]| = 0$$

..... (3.52)

3.5.1項の式 (3.35) で表された振動数方程式は、一定角速度 Ω で回転しているときの Ψ に関する方程式であり、それを解くことによって、一定角速度で回転している極異方性円板の無次元固有円振動数が求められる。それに対して、振動数方程式 (3.52) を解くことにより、任意の無次元固有円振動数 Ψ となるときの極異方性回転円板の角速度 $\Omega(\tau) = \alpha \tau$ が求められるので、振動数方程式 (3.52) は $\Omega(\tau)$ に関する方程式であると言える。また、言い換えると、一定角加速度 α で加速されるとき、任意の無次元固有円振動数で共振するときの無次元時間を定めることができることになる。

次に、一定角加速度で加速される極異方性円板の場合について応答解析を行う。一定角加速度で加速される極異方性回転円板に調和外力 $\{Q(\tau)\}=\{q\}e^{i\lambda\tau}$ が働くとき、運動方程式 (3.50) の解を $\{x(\tau)\}=\{X\}e^{i\lambda\tau}$ とし、定常応答を求めると式 (3.53) となる。ただし、ここでの λ は、調和外力の無次元起振円振動数を表す。

$$\{x(\tau)\} = [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{q\} e^{i\lambda\tau} \quad \dots\dots\dots (3.53)$$

いま、大きさ F の外力 $Fe^{i\lambda\tau}$ が空間に固定された座標系における円板上の任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で一定角加速度で加速される極異方性円板に作用する場合、式 (3.50) の一般力 $\{Q(\tau)\}$ は、ディラックのデルタ関数を用いることにより、次式のベクトルで表される。

$$\begin{aligned} \{q\} &= \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \int_0^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{\phi}(\xi) \cos(l\phi) \xi d\xi d\phi \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\phi - \phi_0) R_{\phi}(\xi) \sin(l\phi) \xi d\xi d\phi \end{array} \right\} \\ &= \begin{Bmatrix} FR_{\phi}(\xi_0) \cos(l\phi_0) \xi_0 \\ FR_{\phi}(\xi_0) \sin(l\phi_0) \xi_0 \end{Bmatrix} \\ &= F\{p\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.54)$$

次に、式 (3.24) で近似した面外方向変位 $u(\xi, \phi, \tau)$ の級数の項数を節直径に関して $n=0\sim L$ 、節円に関して $m=0\sim M$ まで重ね合わせ、さらに、ベクトルの形に書き換えると式 (3.55) となる。

$$u(\xi, \phi, \tau) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \left\{ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \right\} \{x(\tau)\} R_{mn}(\xi) \quad \dots\dots\dots (3.55)$$

式 (3.55) に式 (3.53) と式 (3.54) を代入することにより次式が得られる。

$$\frac{u(\xi, \phi, \tau)}{F} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \left\{ \cos(n\phi) \sin(n\phi) \right\} [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{p\} e^{i\lambda\tau} R_{mn}(\xi) \quad \dots\dots\dots (3.56)$$

この式 (3.56) が空間に固定された座標系における円板上の任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) で調和起振され、さらに、一定角加速度で加速される極異方性回転円板

の無次元変位である。またこの変位は、一定の調和起振力が作用した状態で、角加速度 α で角速度が増加するときの時刻 τ における円板の各座標の瞬間の変位を与えることになる。また、その任意の一点 (ξ_0, ϕ_0) における無次元駆動点インピーダンスを3.5.2項と同様にして求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{Z}{i\omega M_s} \right| &= \left| \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)\lambda^2 S_I} \right| \\ S_I &= \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^M \left\{ \cos(n\phi_0) \sin(n\phi_0) \right\} [[C] + i\lambda[B] - \lambda^2[A]]^{-1} \{p\} R_{mn}(\xi_0) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3.57)$$

ここで、 M_s は円板の質量である。

前節で求めた駆動点インピーダンスの式 (3.43) は、一定角速度 Ω で回転している円板を任意の一点で調和起振したときのその起振力の振動数 λ に対する伝達関数を表す。それに対して、式 (3.57) で求められた駆動点インピーダンスは、任意の一点で一定の調和起振力が作用している円板が、角加速度 α で加速されるときの任意時刻 τ における瞬間の角速度 $(\Omega(\tau) = \alpha\tau)$ に対する伝達関数を与える。言い換えると、前者は一定の角速度で回転している円板に対する伝達関数を、後者は角速度が増加する場合の円板に対する伝達関数を表す。

3.7 円周方向繊維強化材の弾性特性

一般的な異方性材としては、繊維を各種樹脂(プラスチック)に代表されるマトリックスに含有することにより強化された複合材料が工業材料としてよく用いられている。本研究における極異方性円板は強化繊維を円周方向に巻き、それを円板状にマトリックス成形した円周方向繊維強化材から成るものとする。

2次元単層板としたときの一方向繊維強化材における平均弾性係数の求め方は以下のように与えられており、実験的にも検証されている⁽³³⁾。円板とした場合の平均弾性係数を、微小要素における繊維方向は2次元単層板のその方向と一致すると仮定する。よって、周方向、半径方向における平均弾性係数が繊維の含有率が低い場合、繊維とマトリックスの各弾性係数との間に次式で示す関係が成り立つものとする。添え字 f, m はそれぞれ強化繊維とマトリックスに関する諸量を示し、添え字 r, θ はそれぞれ円板の半径方向と周方向に関する諸量を示す。

$$E_r = \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)}, \quad E_\theta = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

$$G_{r\theta} = \frac{G_f G_m}{G_m V_f + G_f (1 - V_f)}, \quad G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}$$

$$\nu_r = \nu_\theta \frac{E_r}{E_\theta}, \quad \nu_\theta = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f)$$

V_f : 強化繊維の体積含有率

..... (3.58)

3.8 第3章の結果

第3章においては、円板状に成形されたマトリックス内に円板の円周方向に強化繊維を巻き込むことにより、円周方向と半径方向の弾性係数が異なる極異方性の特性を持った回転円板の理論解析を行った。板厚が薄く一定である極異方性円板の半径方向の応力の釣り合い方程式と運動方程式を直交異方性板の曲げに関する古典理論に基づいて求めた。これらの基礎式を空間に固定された静止座標系に座標変換し、一定角速度で回転する場合と一定角加速度で加速される場合の二通りについてそれぞれ導出した。複素数表示した各弾性係数を用いて円板の内部(構造)減衰を考慮し、運動方程式の解はガラキン法を適用して求めた。そして、固有値解析より振動数方程式を求めるとともに、定常応答解析として、空間に固定された一点で調和起振力が作用するときの応答を求めた。さらに、その応答より、伝達関数である駆動点インピーダンスと無次元変位を導出した。極異方性円板の弾性特性として、円周方向繊維強化材を想定し、各弾性係数を強化繊維の含有率に基づき算出した。

第5章では、角速度、角加速度、減衰係数、起振位置、起振振動数、強化繊維の体積含有率などを変化させて数値計算を実施し、各パラメータの影響を定量的に評価する。

第4章 等方性回転円板の振動特性

第2章において、固有値解析及び、定常応答解析により得られた等方性回転円板の振動数方程式、駆動点インピーダンス、そして、変位関数の各理論式を用いて、いくつかの場合について数値計算を行う。そして、等方性回転円板の基本的な振動特性について検討する。

4.1 数値計算における解の収束

第2章で示した力の釣り合い方程式や回転円板の運動方程式を解く方法として、面外方向変位を級数で表される関数で近似し、ガラキン法を適用して解を求めた。従って、得られた理論式から数値計算により解を求める場合、求められた数値はその級数の項数に依存し、一般的にはその項数を大きくすることによって、計算された解は厳密解へと収束していく。そこで、本数値計算における解の収束性を調べるため、回転していない円板について、振動数方程式(2.15)を解き、級数の項数(M)を変化させたときの各振動モードに対する固有円振動数を計算する。そして、数値計算により求めた固有円振動数の値と、厳密解として求められている固有円振動数とを比較することによって、解の収束性を検討する。

表4.1は、回転していない円板の各(m, n)モードの無次元固有円振動数(ψ)を級数の項数(M)を2~6と変化させ計算した結果である。円板の形状寸法、材料物性値等の値は式(4.1)に示した各値を使用した。また、表中の各数値は式(4.2)を用いて無次元化した円板の固有円振動数である。表中の項数の下に書かれた数字6×6,, は、その項数で展開したときの振動数方程式が6行6列,, の行列式となることを示している。回転していない円板の固有円振動数を厳密解として求めた高橋ら^(3,4)の結果を同時に記載した。

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3 \\ \delta_E = 0.0, \quad \Omega = 0.0, \quad \nu = 0.3 \end{array} \right. \dots\dots\dots (4.1)$$

$$\psi^4 = \frac{\rho h a^4 \omega_n^2}{D} \dots\dots\dots (4.2)$$

表4. 1 無次元固有円振動数の収束状況

M		2	3	4	5	6	(34)
m	n	6×6	8×8	10×10	12×12	14×14	Takahasi
0	1	2.564	2.560	2.560	2.560	2.560	2.560
	2	2.827	2.822	2.821	2.821	2.821	2.821
	3	3.648	3.645	3.644	3.644	3.644	3.644
	4	4.700	4.699	4.698	4.698	4.698	4.698
	5	5.794	5.793	5.793	5.793	5.793	5.793
1	1	6.693	6.683	6.681	6.681	6.681	6.681
	2	7.152	7.142	7.139	7.138	7.138	7.138
	3	7.892	7.883	7.879	7.878	7.877	7.877
	4	8.852	8.845	8.840	8.839	8.839	8.839
	5	9.952	9.946	9.940	9.939	9.939	9.939
2	1	11.244	11.220	11.218	11.218	11.217	11.217
	2	11.553	11.540	11.539	11.537	11.536	11.536
	3	12.078	12.077	12.075	12.072	12.070	12.070
	4	12.826	12.819	12.818	12.811	12.809	12.809
	5	13.796	13.741	13.739	13.728	13.726	13.726

表4.1より明らかなように、ここで計算された値と高橋らが求めた厳密解とを比較すると、(0,1)モード～(1,5)モードの固有円振動数については、 $M=5$ で実用上十分収束している。

以上の結果より、以後の数値計算においてはすべて $M=5$ として計算を行った。

4.2 固有円振動数と角速度との関係

図4.1は各パラメータを式(4.3)と設定して振動数方程式を解き、それぞれの角速度に対する無次元固有円振動数を示す。縦軸は無次元固有円振動数(Ψ)、横軸は無次元角速度(Ω)で0～12まで求めることとし、節直径に関しては $L=9$ まで計算した。図中に示した(m, n)は、前の数字が節円の数、後値が節直径の数を意味し、それぞれが m, n 本の場合の固有振動モードを表している。また、実線は、節円を持たない($m=0$)固有振動モードの場合に対応し、一点鎖線は節円が1本($m=1$)の固有振動モードの場合の無次元固有円振動数を示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3 \\ \delta_E = 0.0, \quad \nu = 0.3 \end{array} \right. \dots\dots\dots (4.3)$$

節円を持たない固有振動モードの固有円振動数 Ψ は、0から高い振動数まで広い範囲にわたって分布している。それに対して、一点鎖線で示される節円を1本持つ振動モードの固有円振動数は、 Ψ が高い領域にのみ現れている。このことにより、工学的に問題となる固有円振動数は節直径と節円を持たない(0,0)の固有振動モードと、節直径のみを有する固有振動モード(0, n)であると言える。したがって、以下では、節円を持つ振動モードについては考えず、数値計算結果としては(0,0)、(0, n)モードの結果のみを表示することとする。

(0,0)モードの固有円振動数は角速度の増加に伴い単調に増加する。また、節直径のみを有する振動モードの固有円振動数は、回転していない場合($\Omega=0$)には各モードに対して1つ存在するが、円板が回転することにより、同一モードに対して、固有円振動数が2つ存在するようになる。これは空間に固定された静止座標系上において固有円振動数を観測するために生じる現象であり、以下

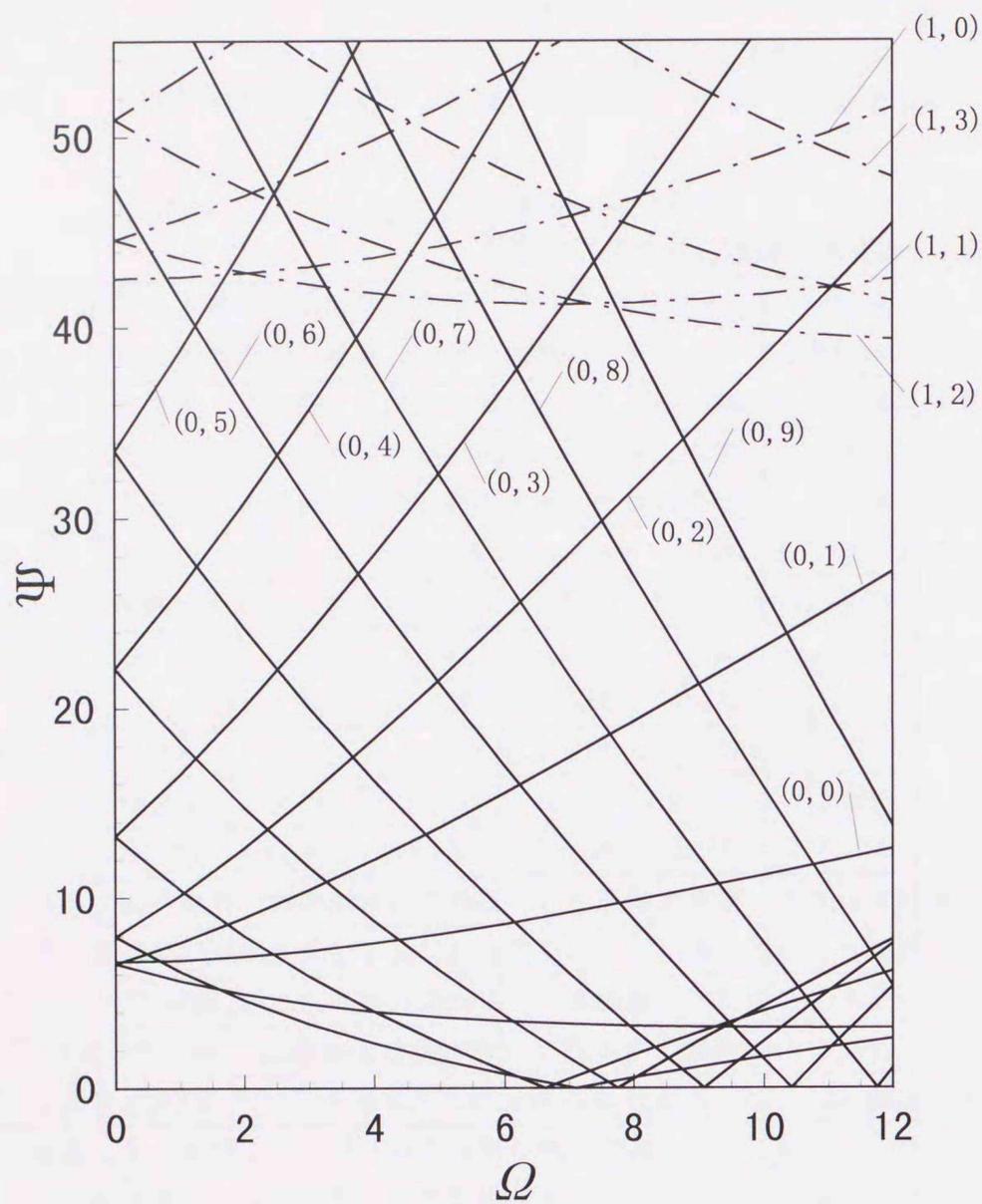


図4.1 無次元固有円振動数と角速度との関係

——: 節円を持たない固有振動モード
 - - - : 節円を1本持つ固有振動モード

のように説明する事ができる。円板と共に回転する回転座標系上では、固有円振動数は、各固有振動モードに対して一つ存在する。しかし、空間に固定された静止座標系上から観た場合、円板の面内を回転方向に伝播する曲げ波は、その伝播速度が円板の回転角速度分加算されることになる。逆に、回転方向と反対方向に伝播する曲げ波は速度が減速される。このような一種のドップラー効果により、回転円板の固有円振動数は2つ存在することになる。また、固有円振動数の高い方の振動モードは、節直径が時間の経過と共に円板の回転方向と同方向に回転する振動モードとなり、低い方の振動モードは、回転方向と逆方向に回転する振動モードとなる^{(8)・(24)}。そして、これらの振動モードにおける固有円振動数を以下ではそれぞれ単に進行波、後退波の振動数と呼ぶことにする。また、節直径が2本以上有するモードの後退波の振動数は、角速度が増加するに従い減少し、やがて0となり、その後再び増加する。この振動数が0となる角速度を危険速度と呼ぶ。さらに、 $(0, n)$ モードの進行波と後退波の振動数を合わせて、 n 次固有振動数曲線と呼ぶことにする。

以上のように回転円板の固有円振動数は各角速度に対して広い振動数範囲に分布している。このことにより、外力の振動数がこれら固有円振動数と一致し、共振現象を生じる不安定領域が多く存在する。特に $\Omega=6.5$ を越え、比較的振動数の低い領域においては、危険速度を通過し、増加する後退波の固有円振動数と危険速度通過前の減少する後退波の固有円振動数とが重なり合った状態となり、共振状態が生じやすい非常に不安定現象となる領域であると言える。

図4.2は、円板をモータの軸に固定するハブの影響を調べるため、理論上ハブのない場合とハブを取り付けた場合のそれぞれの固有振動数曲線を計算し、図4.1と同様に示した図である。実線で示した固有振動数曲線はハブがない場合に対応する。そして、ハブの影響を考慮して計算した結果を一点鎖線で示した。円板にあけた回転軸のはめあい穴の径とハブの外径の差が大きくなると角速度の小さい範囲では固有振動数 Ψ の差はあまり認められないが、角速度が大きくなるとその差は広がる。さらに、節直径の数が増すとその差は拡大する。そして、ハブの影響を考慮したときの危険速度の値はハブがないときの値に比べて小さくなる。

4.3 駆動点インピーダンスと振動モード

図4.3~図4.12に角速度 Ω が1.0, 2.0, …, 10.0 のときの駆動点インピーダ

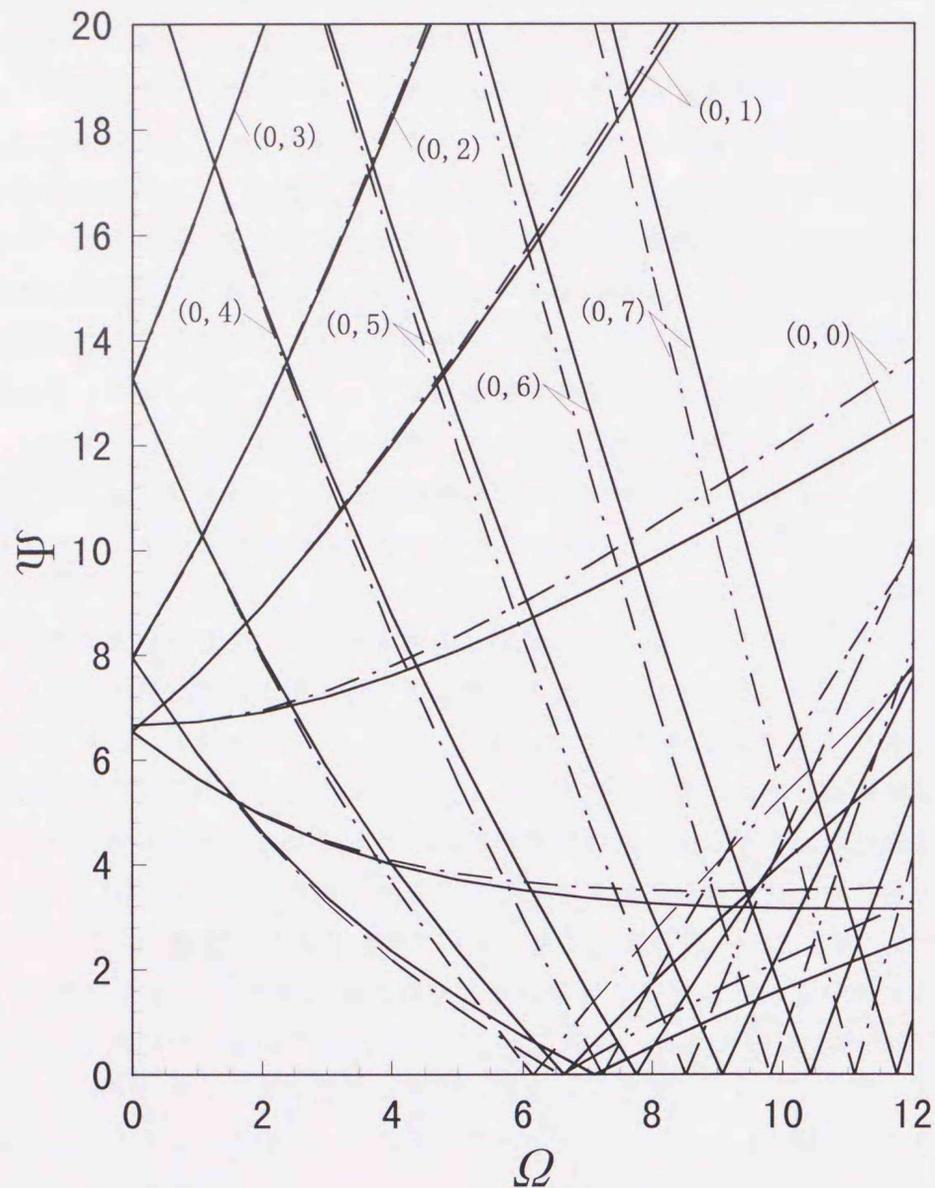


図4. 2 無次元固有円振動数と角速度との関係

———: $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 0.3$
 - - - - : $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 0.15$

ンスを示す。数値計算に用いた各パラメータは式(4.4)に示した値を用いた。また、節直径に関しては、 $L=7$ まで考慮し計算した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3 \quad , \quad \eta = 0.2 \quad , \quad \nu = 0.3 \quad , \quad \tau = 1.0 \\ \delta_E = 0.001 \sim 1.0 \quad , \quad \xi_0 = 1.0 \sim 0.4 \quad , \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right.$$

..... (4.4)

各図は、横軸に調和起振振動数、縦軸に無次元化した駆動点インピーダンスを取り、それぞれの角速度に対する駆動点インピーダンスを計算した。そして、各図の上から順に、円板に作用する調和外力の作用位置を円板外周から中心に向かって4カ所に移動させたときの駆動点インピーダンスを示す。また、それぞれの図において、等方性円板の減衰係数を $\delta_E=0.001\sim 1.0$ の範囲で5通りに変化させ、図示している。

これらの駆動点インピーダンスの値が小さい方へ突出するピークの加振振動数は、円板のそれぞれの固有振動モードで共振する共振点を示し、振動数方程式より求めた固有円振動数に一致する。図4.13は、式(4.4)のパラメータを用いて振動数方程式を解き、図4.1と同様に固有振動数曲線を図示した。上述の共振点は、各角速度と固有振動数曲線との交点となる振動数に等しい。また、逆に大きい方へ突出するピークの振動数は、反共振点であり、その起振振動数において起振した場合、その起振点における変位が0となる振動数を与える。

円板の内部減衰を表す δ_E が駆動点インピーダンスに及ぼす影響は、この値が大きくなるにつれ、共振点、反共振点のピークが鈍化してくる。どの角速度に対しても $\delta_E=0.1$ 以上になるとほとんどピークは現れなくなる。また、特に図4.3の λ_{1f} 、図4.4の λ_{2d} 、図4.5の λ_{3f} 、図4.6の λ_{4e} などの共振点においては、 $\delta_E=0.05$ 以上においてそのピークは消滅しているのが認められる。これらの共振点は(0,3)モードより高次モードの後退波に相当するピークである。よって、(0,3)モードより高次のモードの後退波に対して大きく作用する。この現象は角速度が高い場合でも同様である。特に $\Omega=8$ 以上で、起振振動数が低いときに現れる多くのピークは、図4.13に示された危険速度通過後の増加する後退波の固有円振動数と減少してくる後退波の固有円振動数が重なり合い、共振現象を生じる多数の起振振動数に対応している。それら多くのピークについても内部減衰が $\delta_E=0.05$

以上においてほとんど消滅している。

起振位置が円板中央へ近づくと、反共振点が共振点に接近するようになる。このように、上向きと下向きのピークが接近することによって、 δ_E の値が少し大きくなるだけで、個々のピークは急激に鈍化する。また、 $\delta_E=0.001$ でのピークは、立ち上がりは鋭くなる。しかし、図4.7～図4.12の $\xi_0=0.4$ の場合に現れているように、それぞれのピークが打ち消し合うようになり、共振点が消失したような応答となる。

図4.14～図4.17に図4.3～図4.6に示した $\Omega=1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ のときの共振時の各振動モードを図示した。また、図4.18～4.19は、図4.5に示した $\Omega=3.0$ のとき、起振位置を $\xi_0=1.0\sim 0.4$ と変えた場合の反共振点におけるそれぞれの振動モードである。このときのパラメータの値を式(4.5)に示す。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3 \quad , \quad \eta = 0.2 \quad , \quad \nu = 0.3 \quad , \quad \tau = 1.0 \\ \delta_E = 0.01 \quad , \quad \xi_0 = 1.0 \sim 0.4 \quad , \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right.$$

..... (4.5)

これらの振動モードは、計算された変位振幅分布の最大値を $|u_{max}/F|=100$ とし、20おきにその等高線を細線で示した。また、太い実線部分は回転円板の振幅が零となる点であり、*は起振点を示す。起振振動数の下に記入した $|u_{max}/F|$ の値は、計算されたその振動モードの変位振幅の最大値である。

図4.14～図4.17に示すように、回転円板の振動特性は、後退波が危険速度を通過する前の角速度の領域($\Omega \leq 6$)では、節直径数が0～4本の振動モードに依存する。起振振動数が増加するにつれて、 $\Omega=1.0$ では、節直径数がそれぞれ、1, 2, 0, 1, 2, 3本有する振動モードの順に現れるが、 $\Omega=3.0$ においては、2, 1, 3, 0, 1, 4本有す振動モードの順に現れる。このように、起振振動数が上昇するに従い現れる共振点での振動モードは、角速度の違いにより変わる。そして、そのとき生じる最大振幅は、現れる振動モードに依存する。よって、与えた回転数と起振振動数に対する円板の挙動は、そのとき、どの振動モードに依存するかを把握することによって容易に推測することができる。また、これらの図中において、共振振動数の異なる(0, 1)モードが2つ存在している。これらは、最初に現れる共振振動数の低い振動モードが、時間の経過と共に節直径が円板の回転方向と逆方向に回転する後退波の振動モードであり、次に現れる共振振動数の高い振動モ

ードが、回転方向と同方向に節直径が回転する進行波の振動モードである。また、図4.18と図4.19に示した図より、起振位置が外周近くにあるときは変位振幅レベルの小さい領域が外周まで広がっているのが認められる。

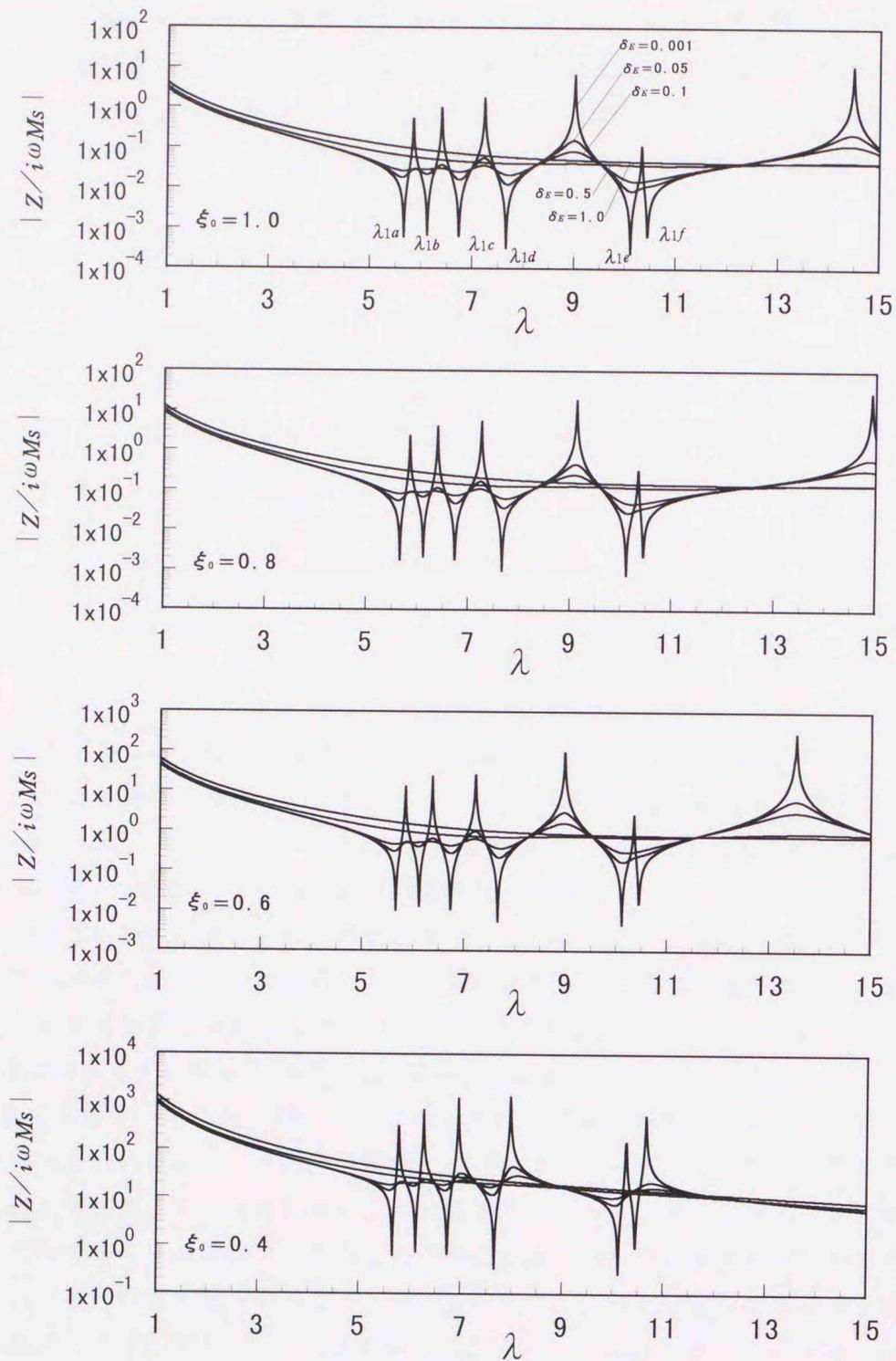


図4.3 駆動点インピーダンス ($Q=1.0$)

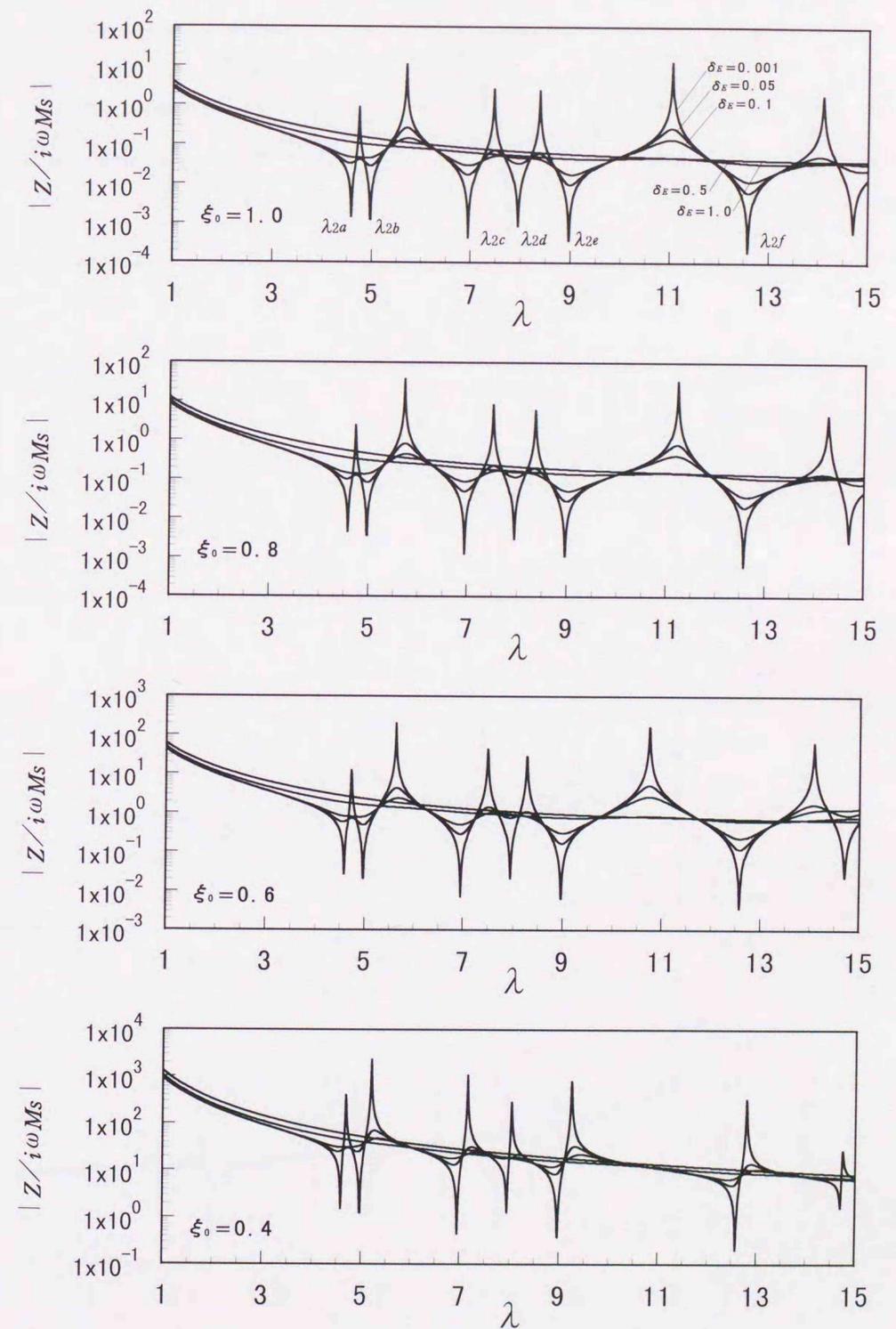


図4.4 駆動点インピーダンス ($Q=2.0$)

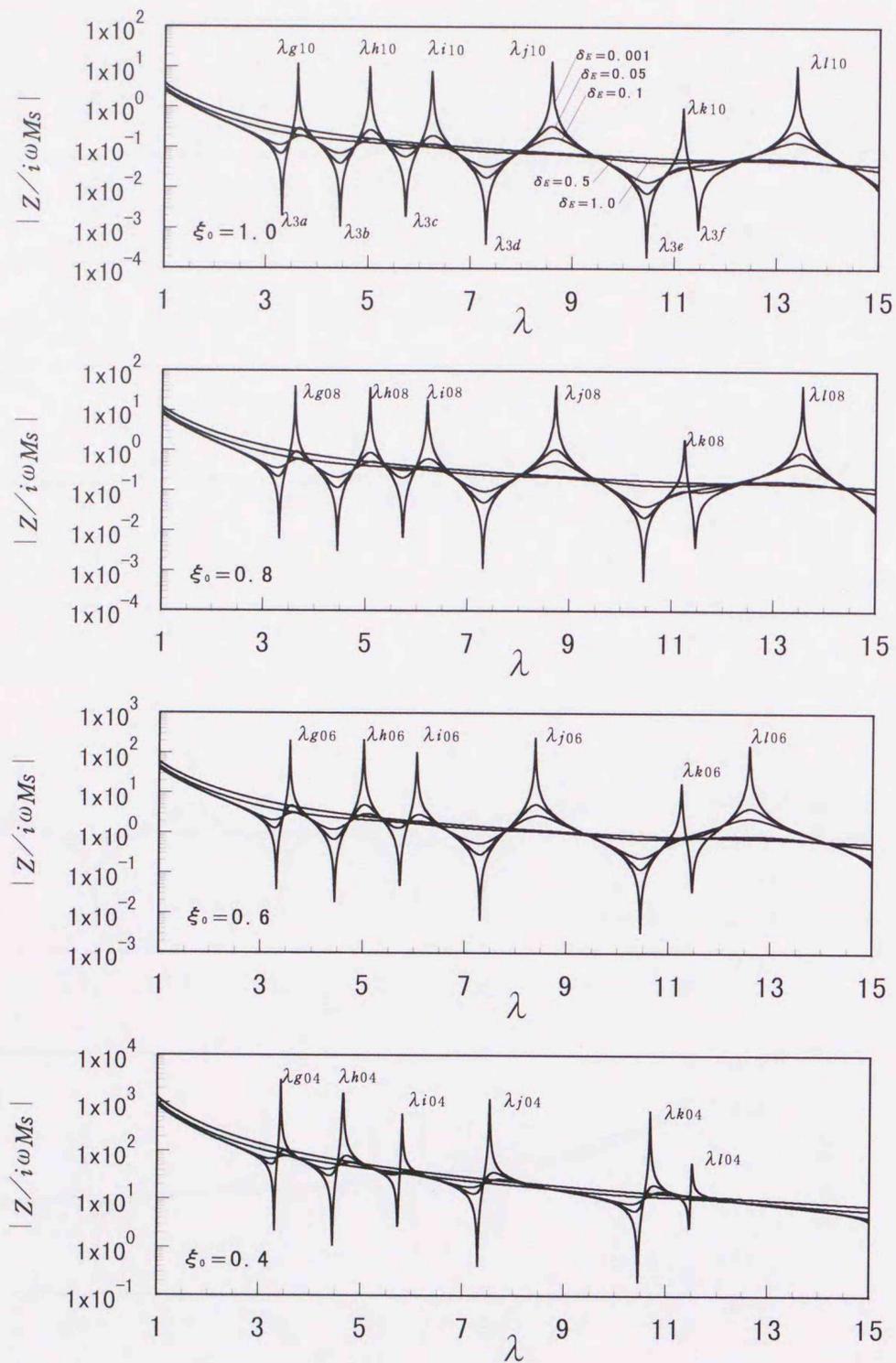


図4.5 駆動点インピーダンス ($\Omega=3.0$)

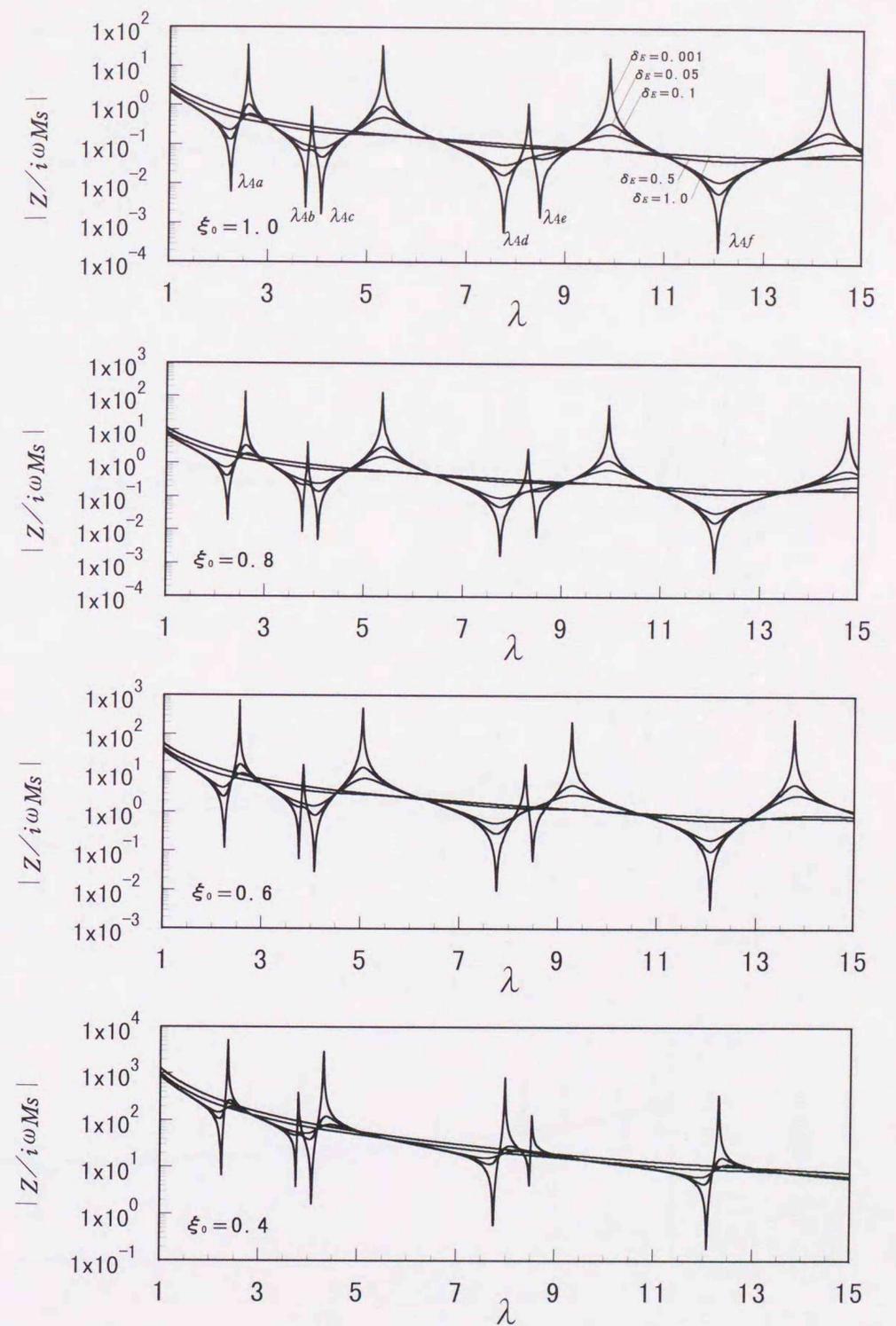


図4.6 駆動点インピーダンス ($\Omega=4.0$)

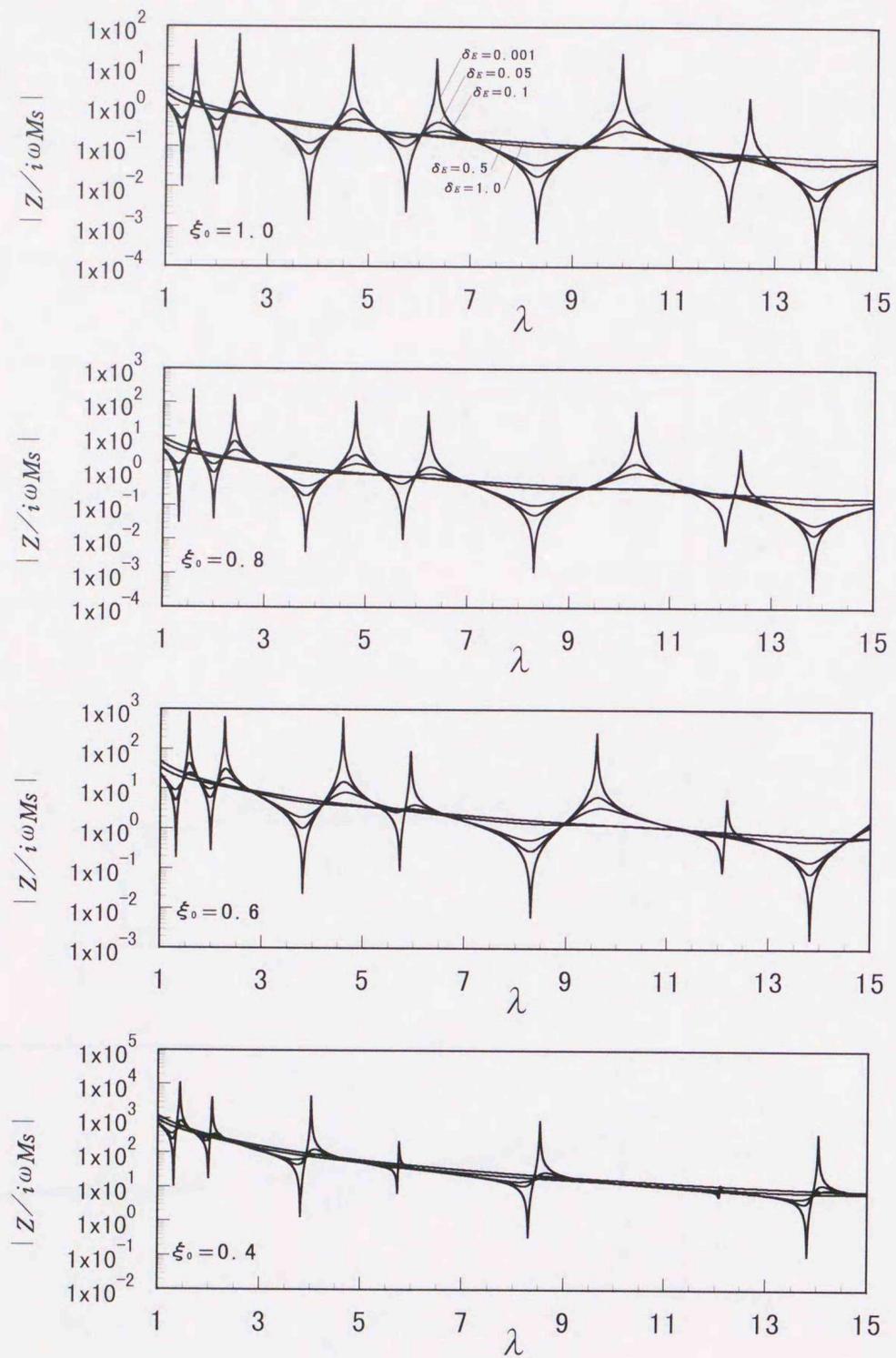


図4.7 駆動点インピーダンス ($\Omega=5.0$)

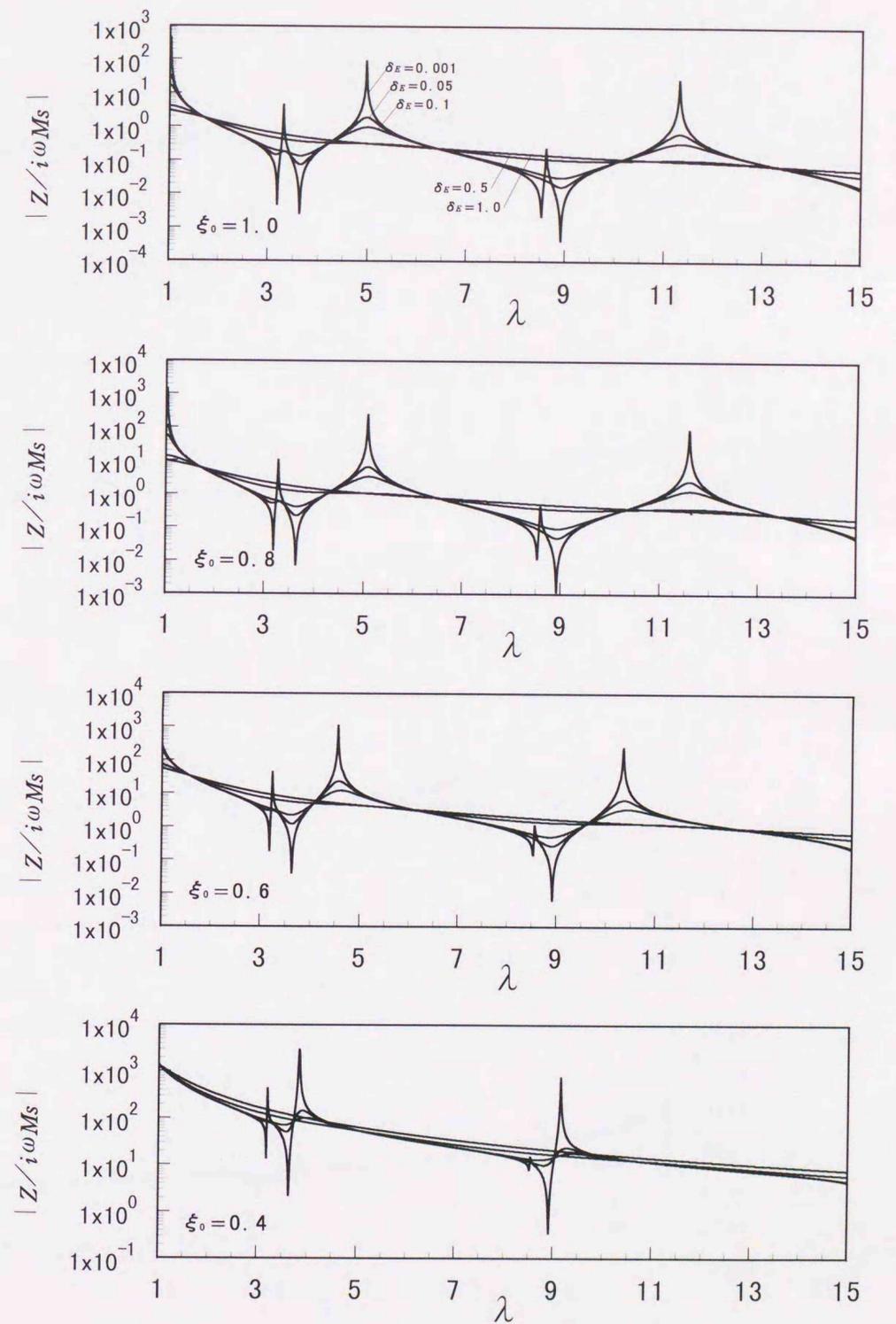


図4.8 駆動点インピーダンス ($\Omega=6.0$)

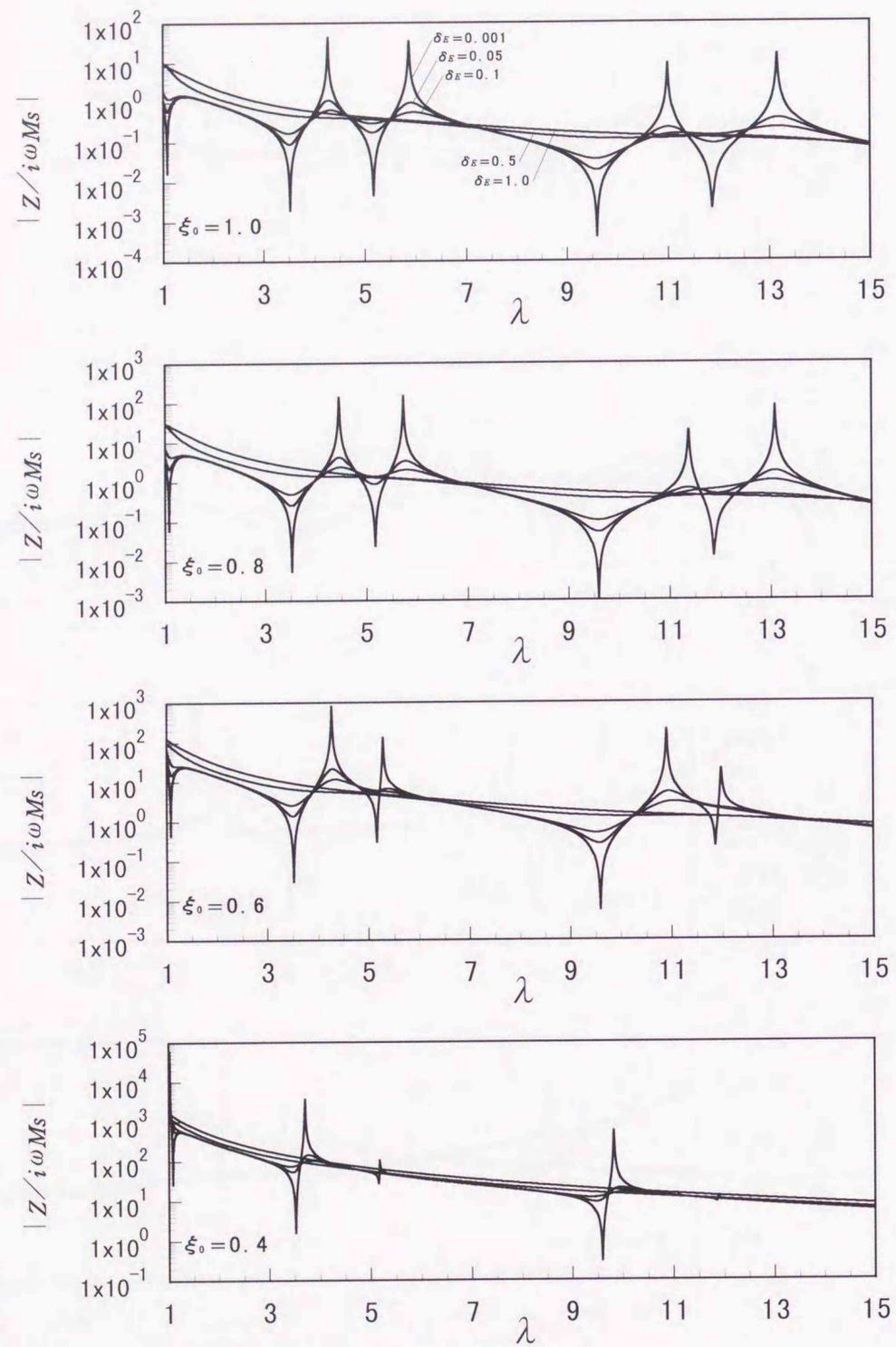


図4. 9 駆動点インピーダンス ($\Omega=7.0$)

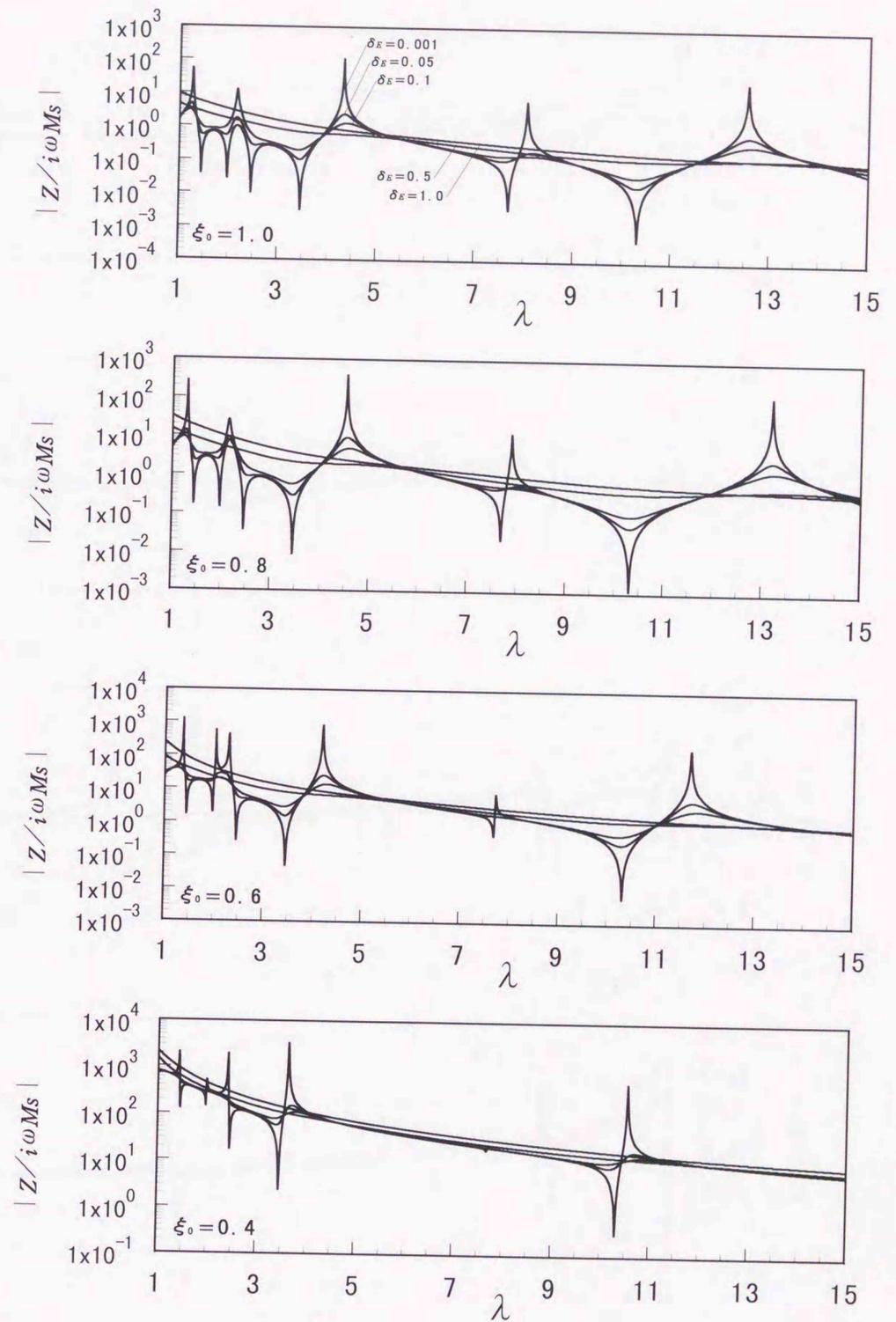


図4. 10 駆動点インピーダンス ($\Omega=8.0$)

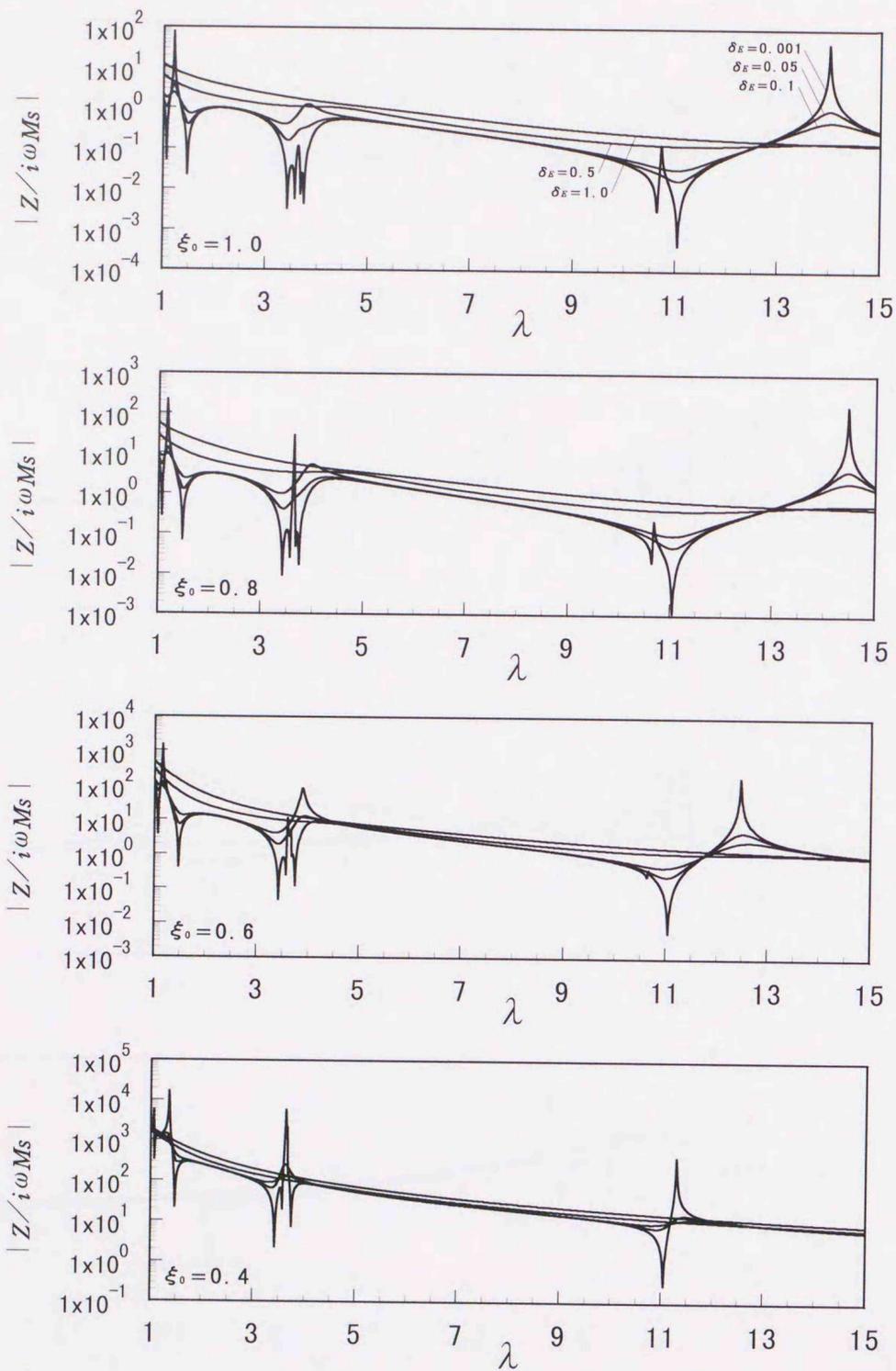


図4. 11 駆動点インピーダンス ($Q=9.0$)

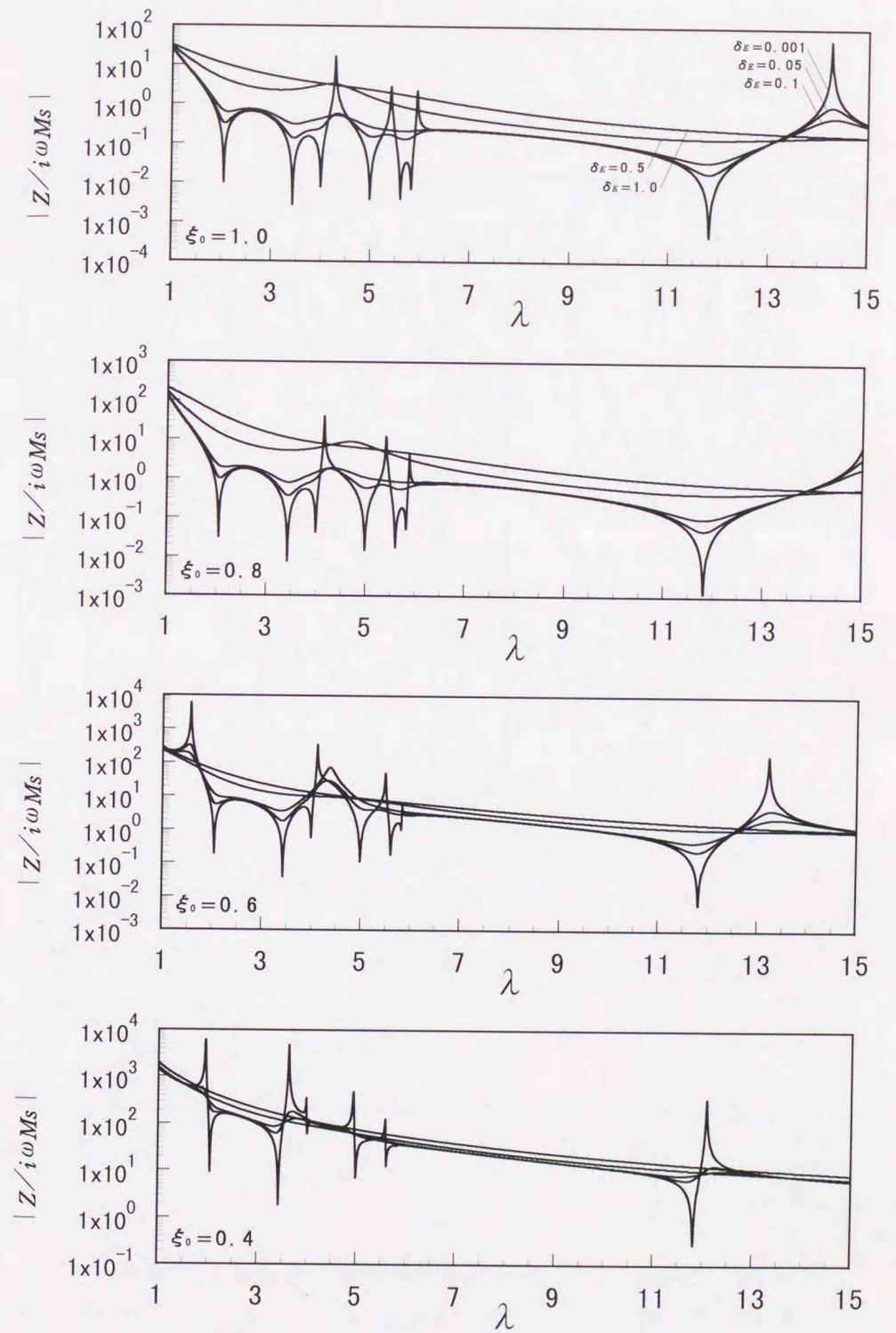


図4. 12 駆動点インピーダンス ($Q=10.0$)

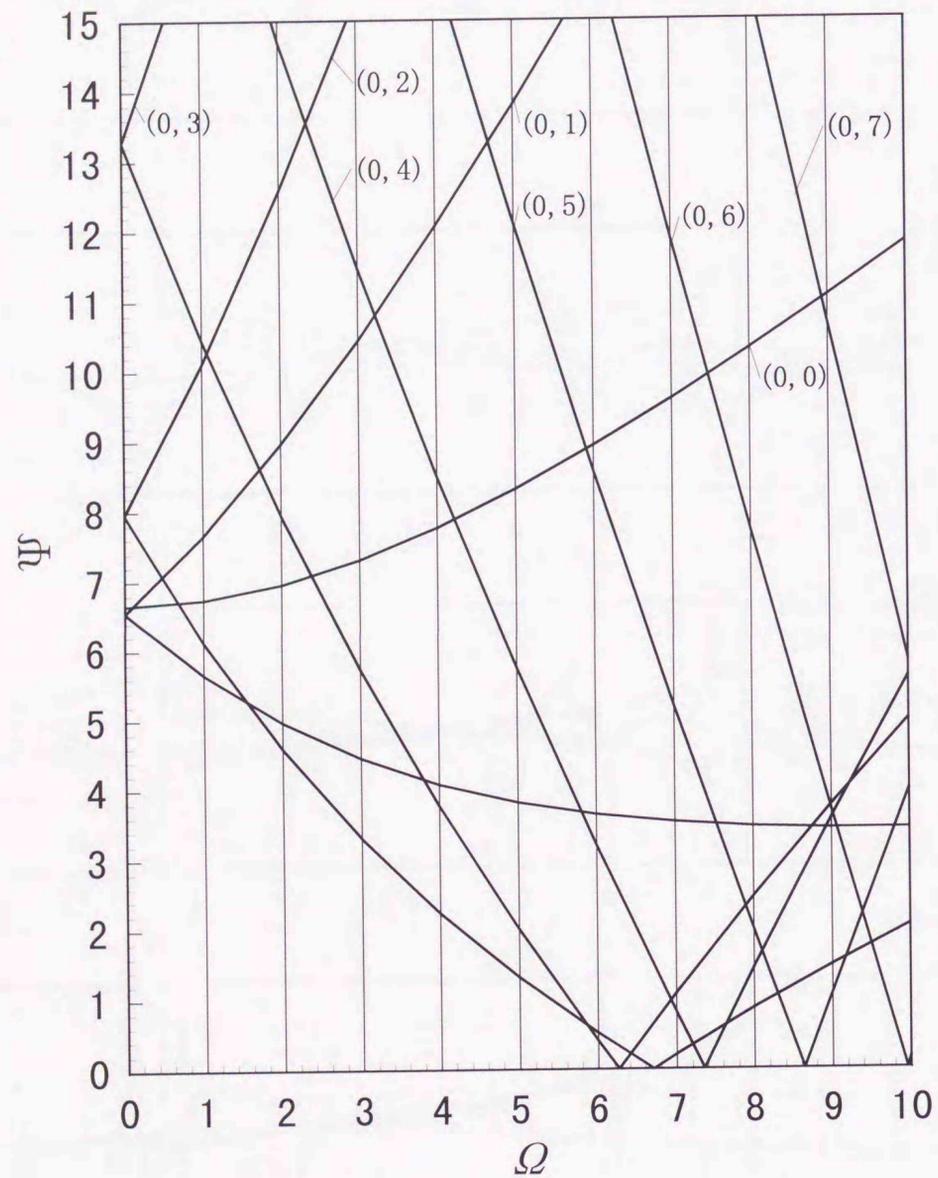


図 4. 13 無次元起振振動数と角速度との関係
 $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 0.2$

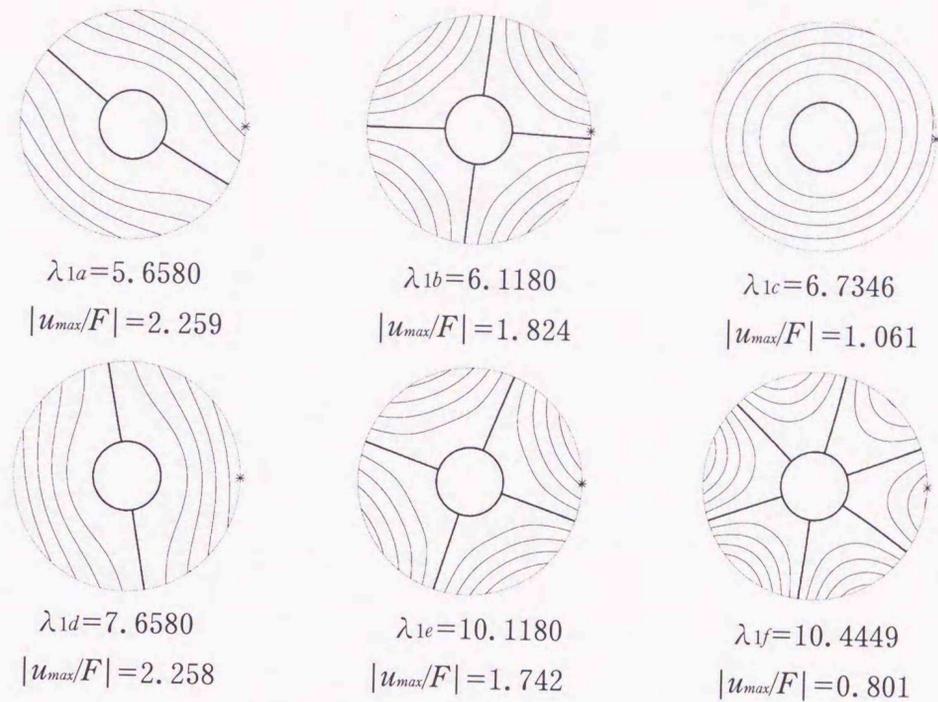


図 4. 14 共振点の振動モード

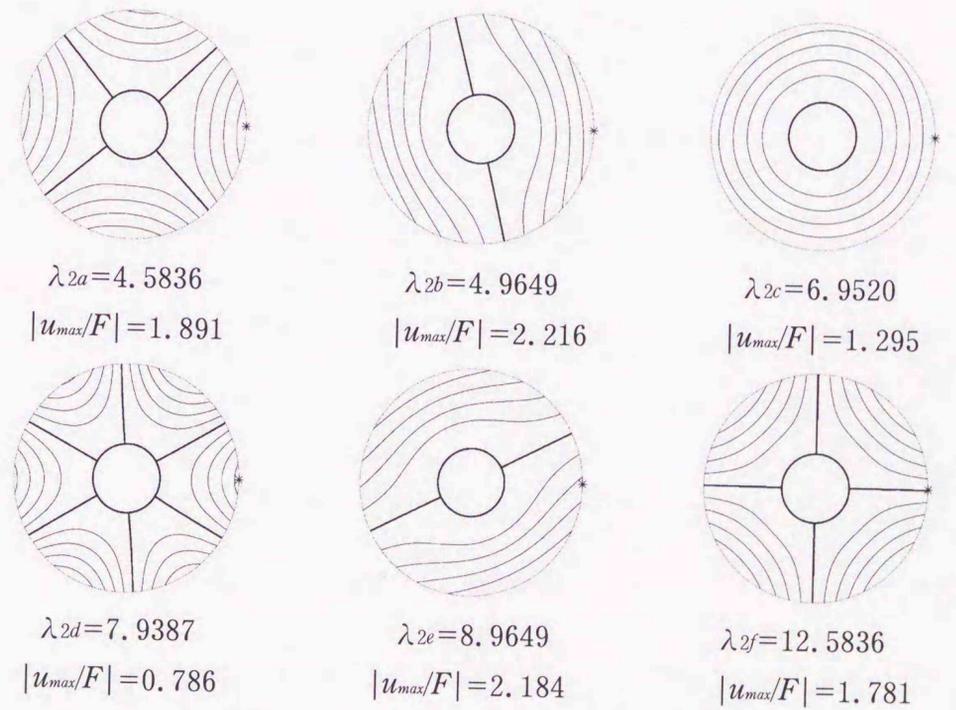


図 4. 15 共振点の振動モード

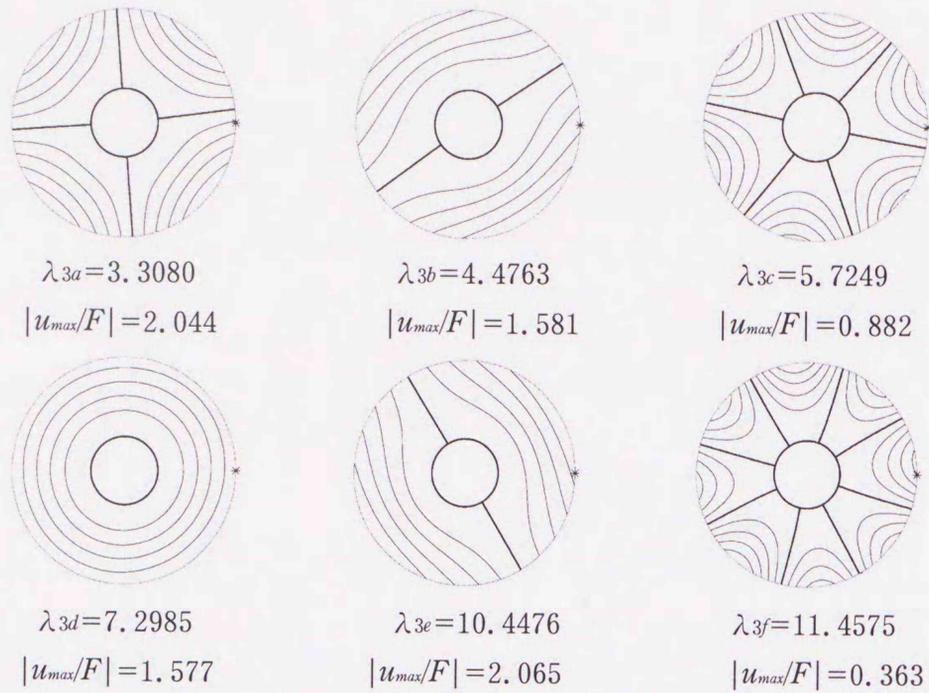


図 4. 16 共振点の振動モード

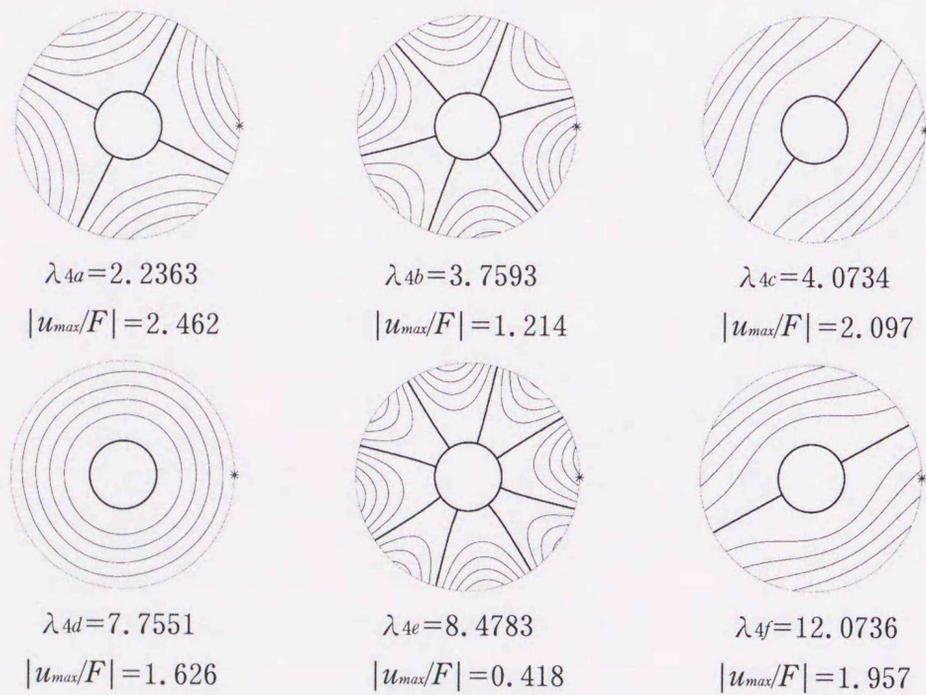


図 4. 17 共振点の振動モード

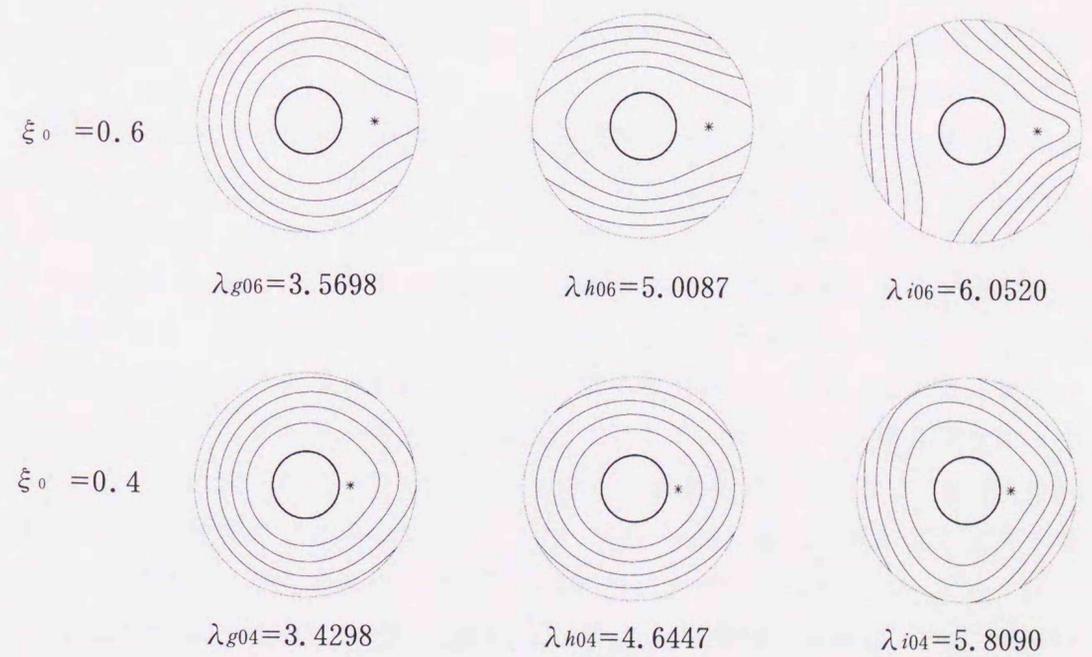
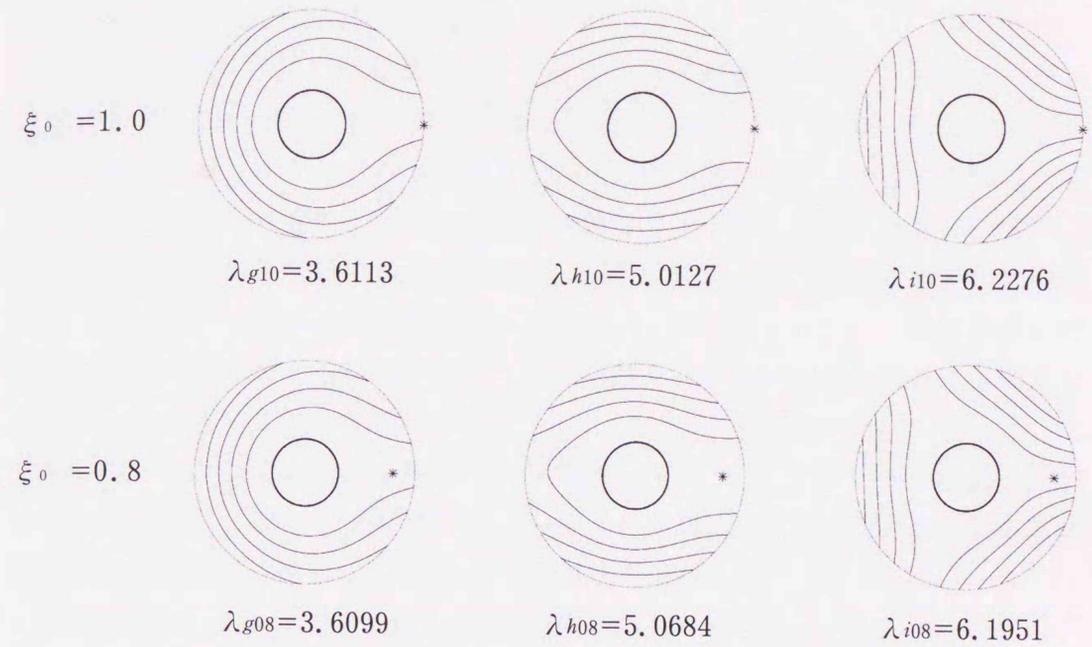


図 4. 18 反共振点の振動モード

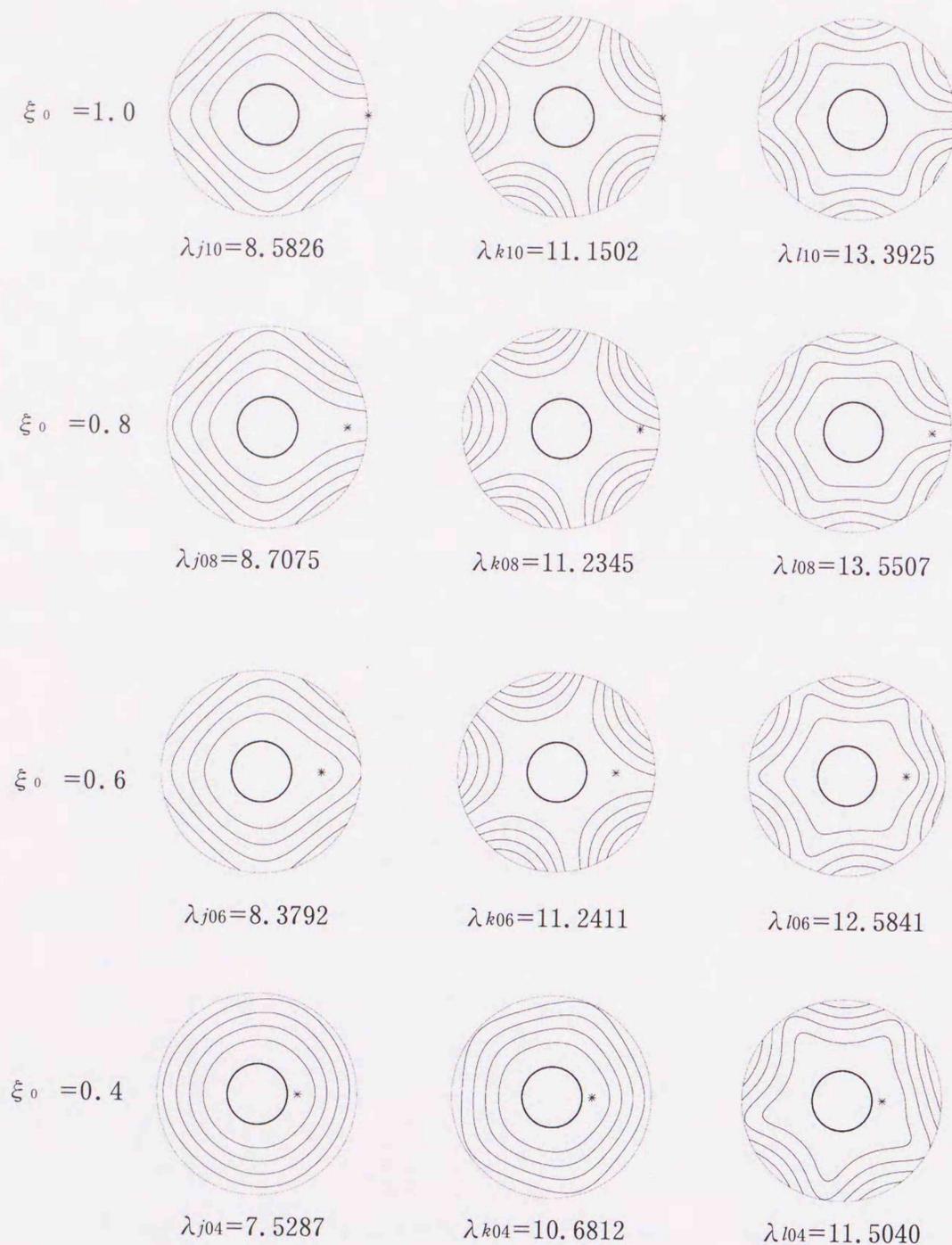


図4.19 反共振点の振動モード

4.4 一定角加速度で加速される場合

4.3節において計算した駆動点インピーダンスと振動モードは、円板が一定角速度で回転しているときの起振振動数に対する応答として求められた。4.4節においては、円板がある一定の角加速度で加速され、角速度が0から次第に増加していく場合のその角速度に対する応答を数値計算する。これは、時間に対する応答を計算することと同じである。外力は、空間に固定された静止座標系における任意の一点で、一定の調和起振力が作用しているとする。よって、駆動点インピーダンスは時間に関する伝達関数と言え、振動モードはその時間における瞬間の振動モードを表すことになる。

図4.20～図4.29に起振振動数 λ が1.0, 2.0, …, 10.0のときの駆動点インピーダンスを示す。数値計算に用いた各パラメータは式(4.6)に示した値を用いた。また、節直径に関しては、 $L=7$ まで考慮し計算した。

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.15, \quad \nu = 0.3, \quad \alpha = 0.01, 0.1, 1.0 \\ \delta_E = 0.001 \sim 0.2, \quad \xi_0 = 0.9, \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right. \dots \dots \dots (4.6)$$

各図は、それぞれの起振振動数に対して横軸に無次元角速度 $\alpha\tau$ 、縦軸に無次元化した駆動点インピーダンスを取り、上から順に角加速度 α を0.01, 0.1, 1.0とした場合についてそれぞれ計算した。 α が大きくなると無次元角速度が0からスタートし、12に達するまでの時間が短縮されるので、各共振点を通過する際の間も短くなる。駆動点インピーダンスの値が小さい方へ突出するピークの角速度は、円板のそれぞれの固有振動モードで共振する角速度を示す。この角速度は、振動数方程式より求めた一定の起振振動数に対して、共振を起こす角速度に一致する。図4.30に式(4.6)のパラメータを用いて振動数方程式を解き、図4.1と同様に示した。前述の駆動点インピーダンスのピークは、各起振振動数と固有振動数曲線との交点となる角速度に等しい。また逆に大きい方へ突出するピークは、反共振点である。このときの角速度は、そのピークを通過する瞬間には、起振点において変位が0となる角速度である。

4.3節で求めた一定角速度で回転する時の駆動点インピーダンス(図4.3～図4.12)と、起振振動数を一定として、角速度が増加する時の駆動点インピーダンスを比較すると、角速度が増加する時の後者の応答の方が共振状態となるピーク

が多数存在している。加速され角速度が増加する場合において、起振振動数が比較的低い場合（図4.20～図4.23）では、角速度が遅い範囲において安定した領域が一部分存在する。そして、角速度が早くなると、ピークが多数存在している。これらのピークは図4.30に示された危険速度を通過し、増加する後退波の固有円振動数と危険速度通過前の減少してくる後退波の固有円振動数が重なり合い共振現象を生じる多数の角速度に対応している。また、起振振動数が高くなると、その応答は、各振動モードにおける後退波に依存し、ほぼ一定間隔でピークが現れる。

角加速度による影響は、角加速度が小さい場合（ $\alpha=0.01$ ）、共振点および反共振点に対応するそれぞれのピークは、鋭く現れる。それに対し、角加速度が大きくなると（ $\alpha=1.0$ ）、それらのピークは鈍化し、小さく現れる。このことより、各共振点のピークを通過する際、角加速度が大きい場合には、回転円板は、共振状態まで達せず通過することになる。この影響は減衰が大きくなると、より顕著に現れる。

図4.31と図4.32は図4.26に示した $\alpha=0.01$ と $\alpha=1.0$ の $\alpha\tau=4.5$ 付近にある(0,4)モードの共振点のピーク①、②と、反共振点のピーク③、④を通過する瞬間の振動モードを示した図である。また、減衰係数 δ_E を0.001, 0.01, 0.1の3通りの場合についてそれぞれ図示した。各振動モード図は、4.3節で示した振動モード図と同様に作成した。また、それらの図の下に記入した数字は、その振動モードにおける無次元最大振幅の値である。①の共振点の場合、 $\delta_E=0.001$ の円板は、節直径が4本現れ、明確な(0,4)モードで共振し、通過する。 $\delta_E=0.01$ の円板では、節直径は4本現れるが、その間隔は均等ではなく、少し崩れた(0,4)モードでその共振点を通過する。さらに $\delta_E=0.1$ の円板に至っては、節直径は4本現れず、不明瞭なモードとなる。また、最大振幅は δ_E の値が大きいかほど小さく、減衰の影響により共振現象が回避されている。次に角加速度が大きい（ $\alpha=1.0$ ）場合で共振点を通過する時の振動モード②は、 $\delta_E=0.001$ の場合、節直径を4本持った(0,4)モードで共振点を通過するが、このような小さな減衰係数においても、そのモードの節直径にゆがみが認められ、明確な(0,4)モードまでには至らない。減衰の値が大きくなり、 $\delta_E=0.01$ となるとその振動モードは、さらにゆがみ大きくなり、 $\delta_E=0.1$ に至っては、節直径も現れず対称性もなくなり、共振状態には至らない。また、減衰の値が同じである円板の①、②とを比較すると、角加速度の大きい方が、振動モードがより乱れ、最大振幅も小さく

なる。このように、 α の値により振動モードが共振状態まで至らず崩れた振動モードとなる。また、減衰の影響を受けることによって生じる振動モードは、さらに崩れ、共振状態には至らず、共振点を通過する。

反共振点のピークを通過するときの③の各振動モードは、 $\delta_E=0.001$ の場合、起振点が振幅が0となる太い実線上にあり、反共振点モードで通過している。 $\delta_E=0.01$ の場合、振動モードは $\delta_E=0.001$ のときと同様なモードであるが、起振点の位置と振幅が0となる太い実線とがわずかにずれてきている。さらに、 $\delta_E=0.1$ においては、起振点において振幅が生じるようになり、反共振点モードとはならず、反共振点を通過する。次に、角加速度が大きい場合の反共振点モードは、④に示した振動モードとなる。減衰係数の小さな $\delta_E=0.001$ の場合においても、起振点で振幅が生じるようになり、明確な反共振点モードにはならない。

駆動点インピーダンスのピークの鋭さは、振動モードが明瞭な共振モードまで成長することを示している。そして、振動モードが明瞭な固有振動モードになるほど最大振幅は大きくなり回転円板は不安定な状態となる。また、減衰と角加速度の値が大きいほど、共振点と反共振点での振動モードは、崩れたモードとなり、明確な振動モードまで成長せず、これらの各ピークを通過する。また、その時の最大振幅は非常に小さくなり、より安定した状態となる。

図4.33は一定角速度 Ω で回転する円板の調和起振振動数 λ に対する無次元最大振幅を示した図である。無次元時間は $\tau=1.6$ 、減衰係数を $\delta_E=0.01, 0.05$ の2つの場合について計算し求めた図である。図4.34は一定角加速度で加速した回転円板に一定の調和起振力が作用しているときの無次元最大振幅を示した図である。減衰係数は $\delta_E=0.01$ とし、角加速度の値を $\alpha=0.1, 1.0$ の2つの場合について示した図である。共に円板形状は $\varepsilon=0.15, \eta=0.075$ とした場合である。どちらの図においても最大振幅分布は、各次数の固有振動数曲線に一致し、進行波と後退波の振動数に対応する最大振幅のピークが現れる。また、減衰の影響が大きい場合や角加速度が大きくなると最大振幅のピークは減少し、鈍化した応答となる。

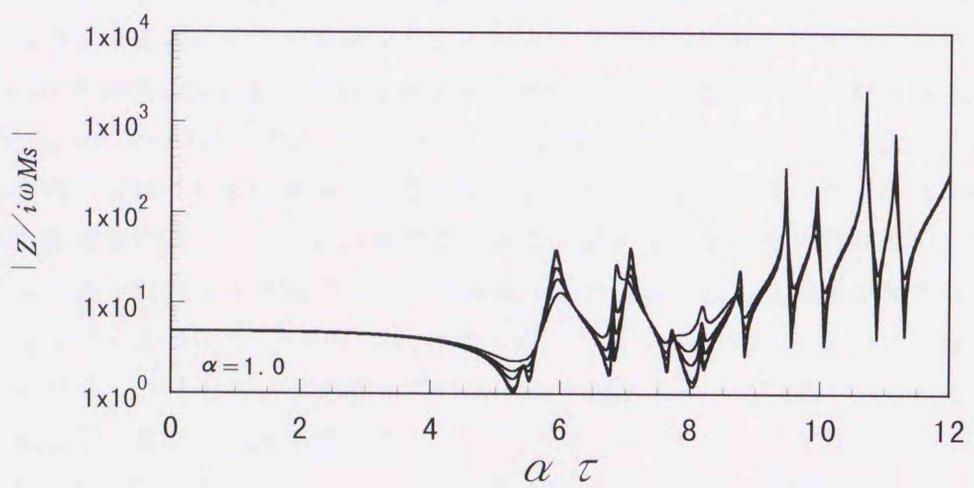
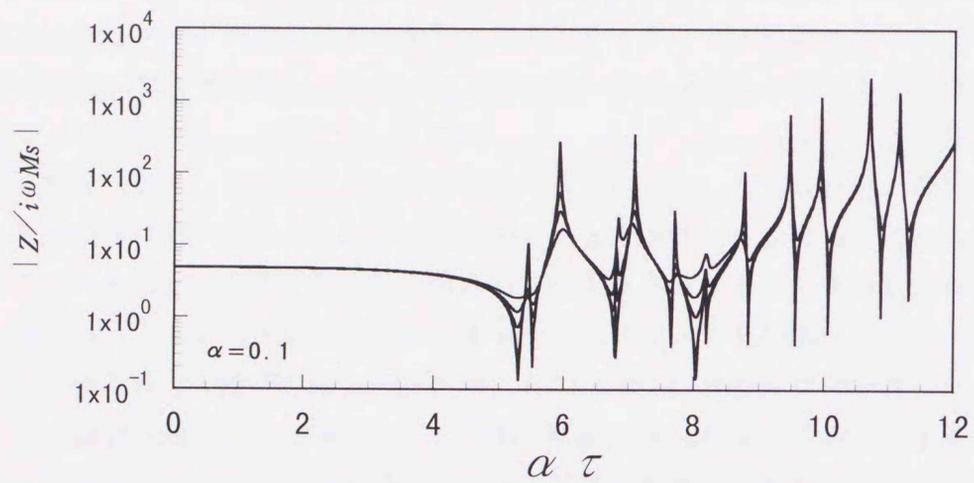
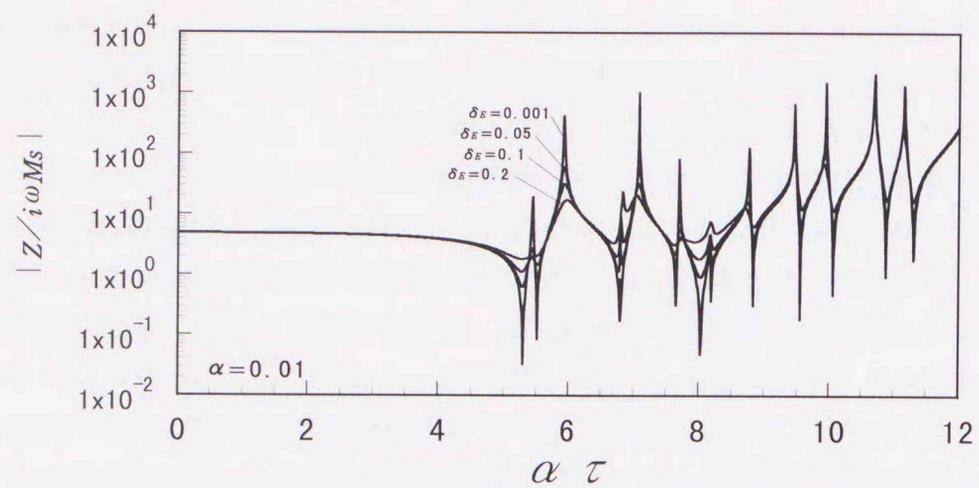


図4. 20 駆動点インピーダンス ($\lambda=1.0$)

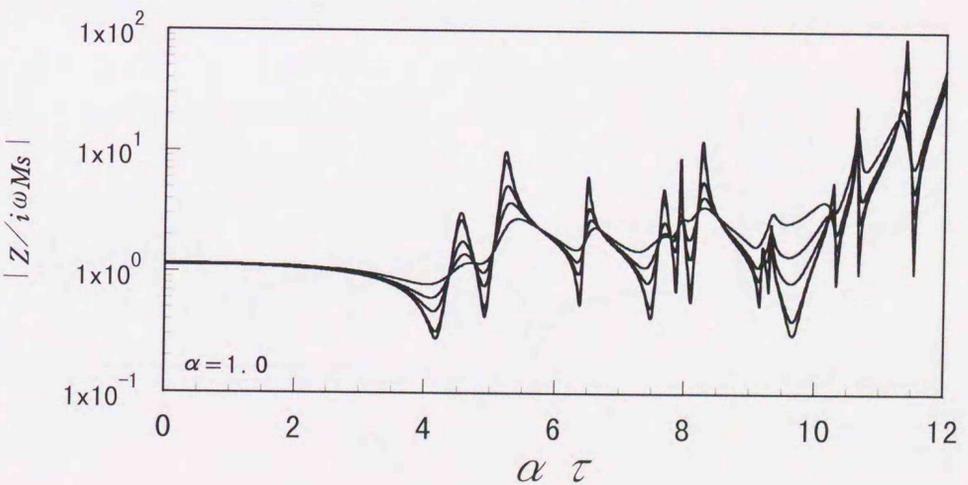
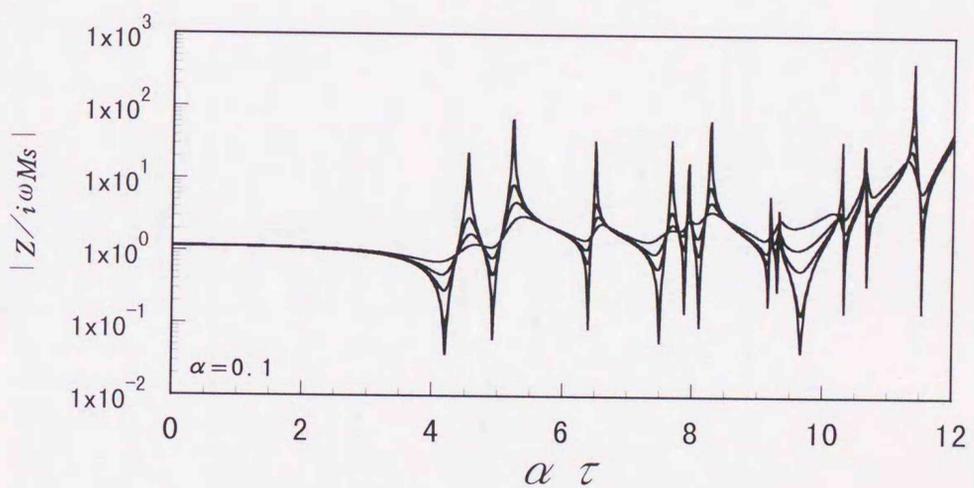
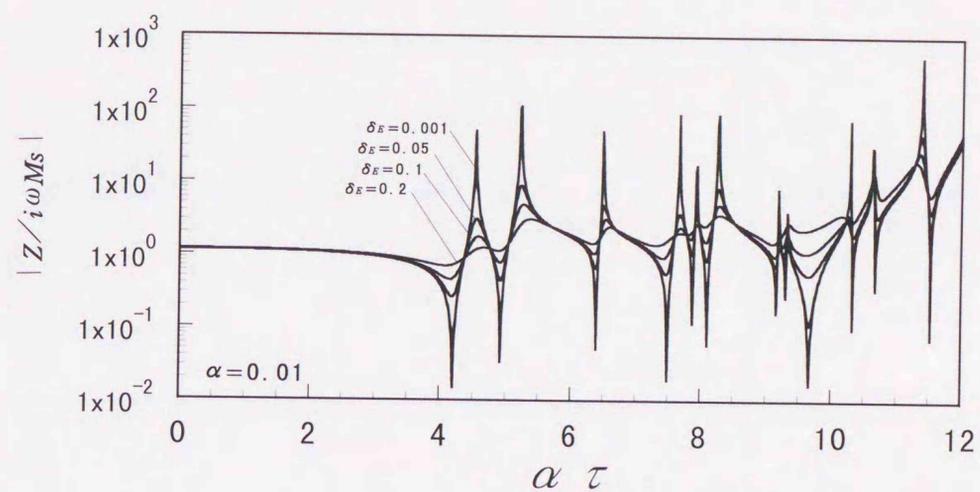


図4. 21 駆動点インピーダンス ($\lambda=2.0$)

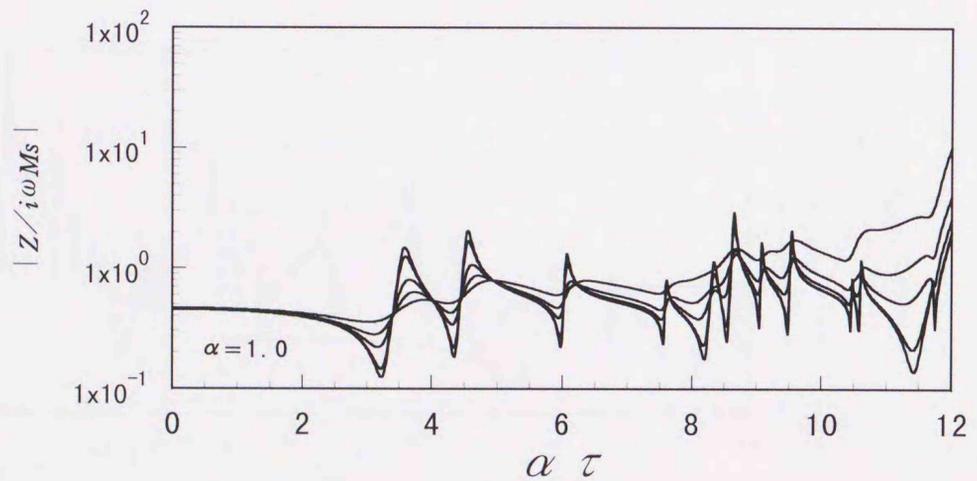
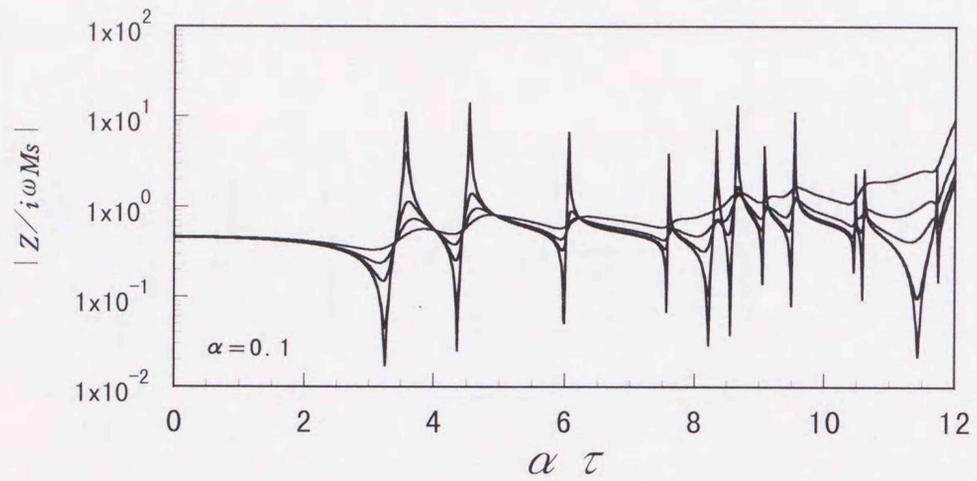
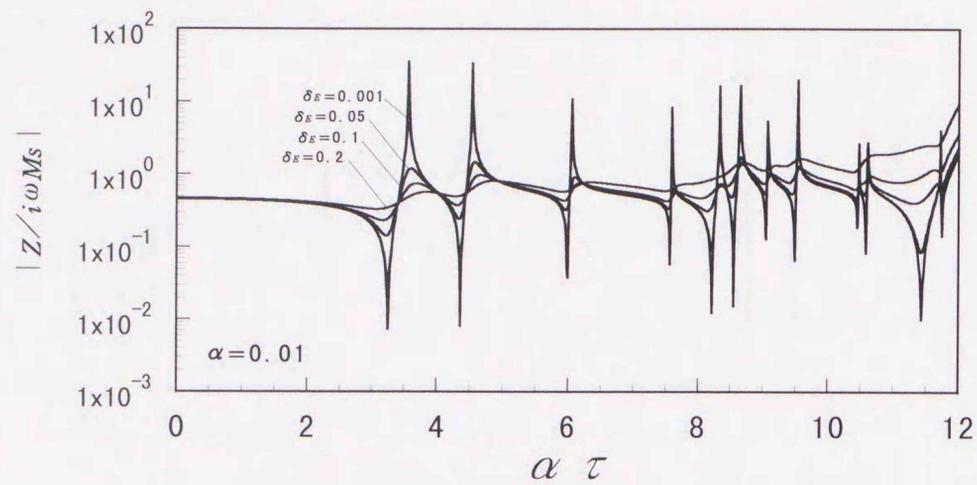


図 4. 2 2 駆動点インピーダンス ($\lambda = 3.0$)

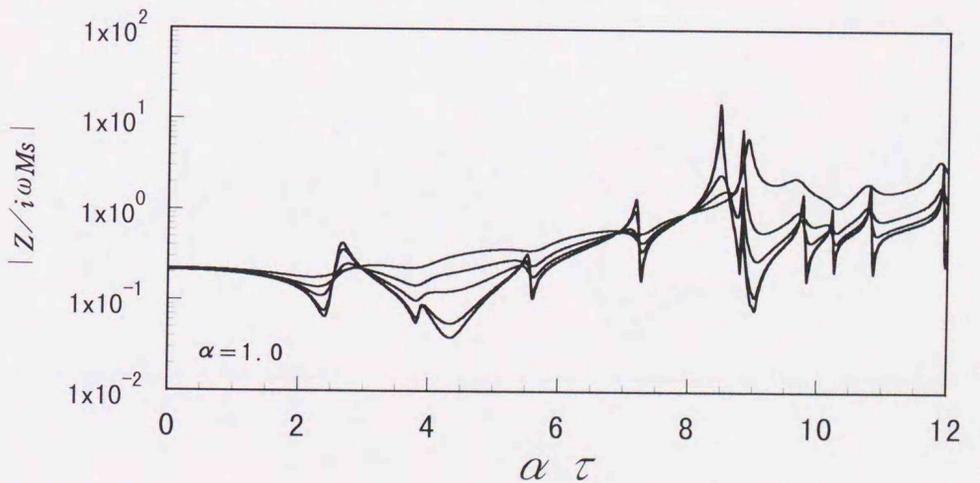
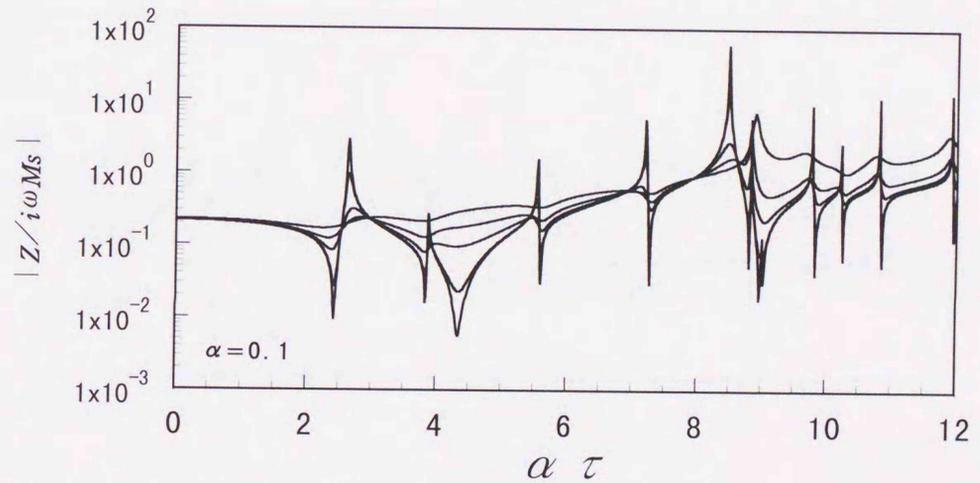
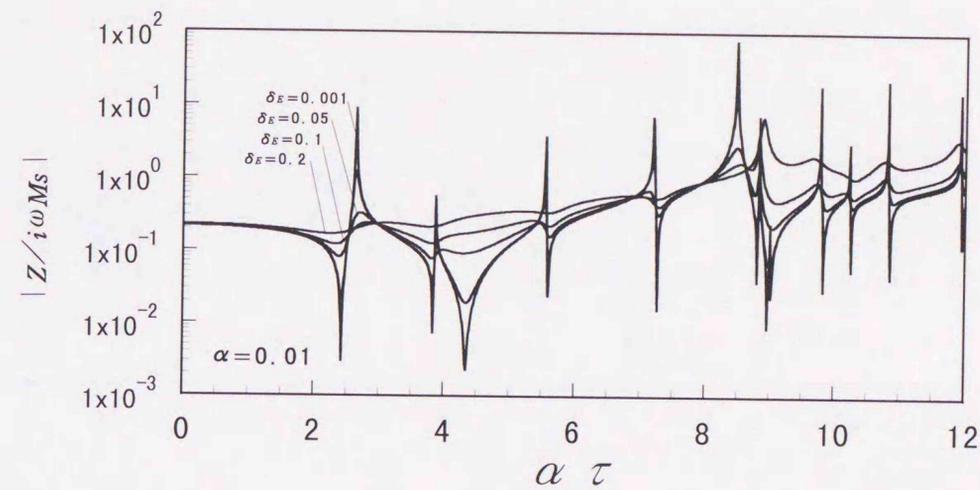


図 4. 2 3 駆動点インピーダンス ($\lambda = 4.0$)

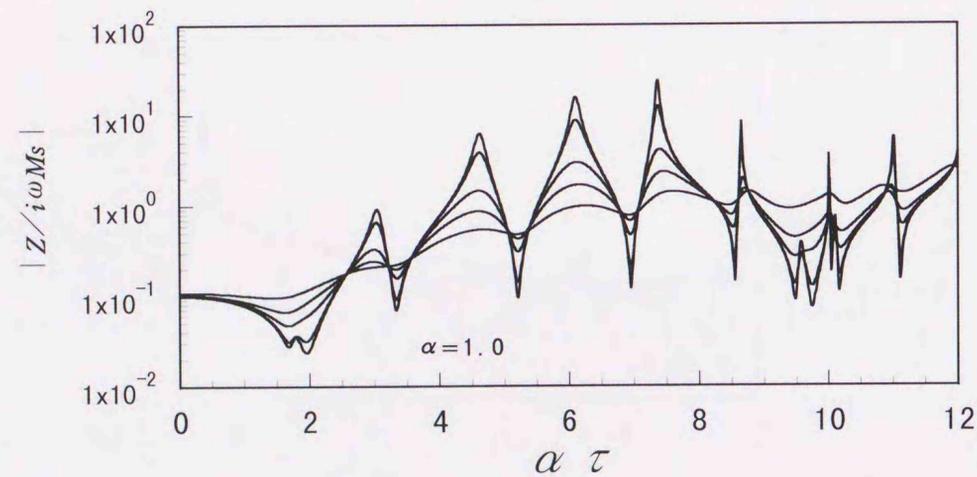
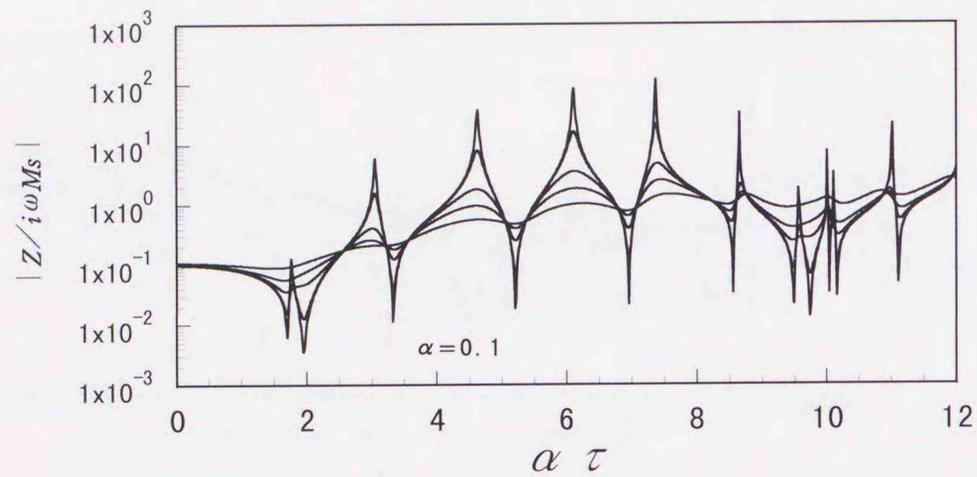
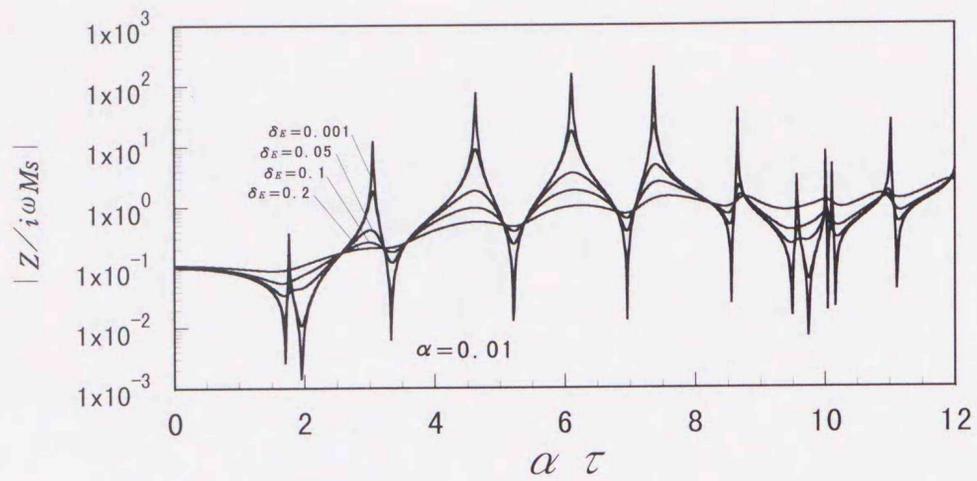


図4. 24 駆動点インピーダンス ($\lambda=5.0$)

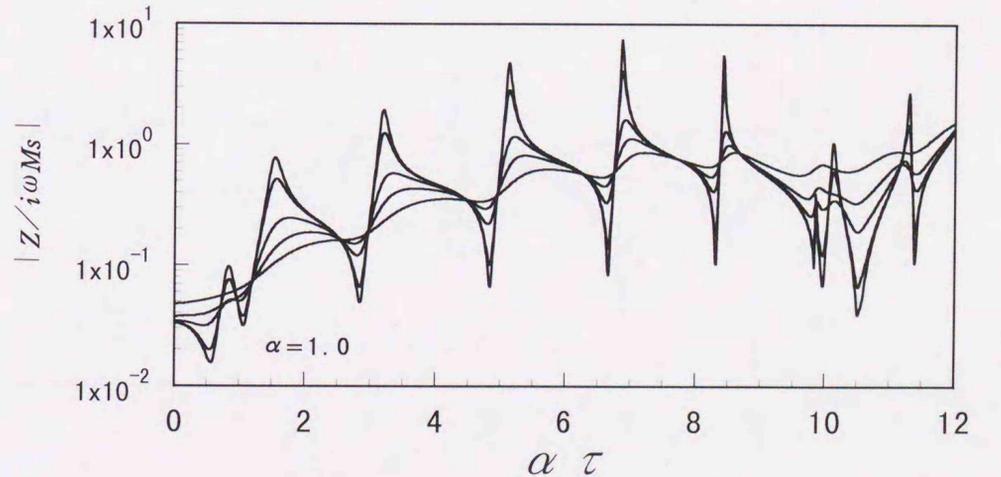
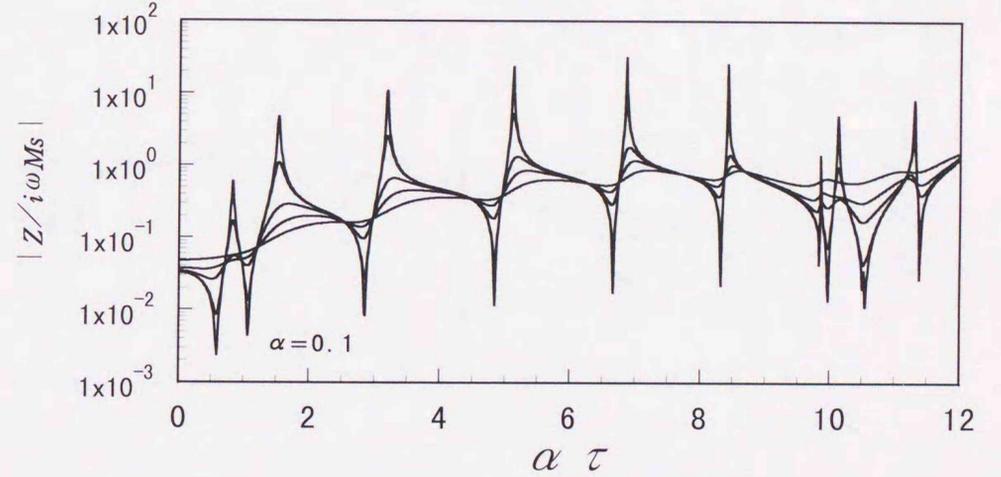
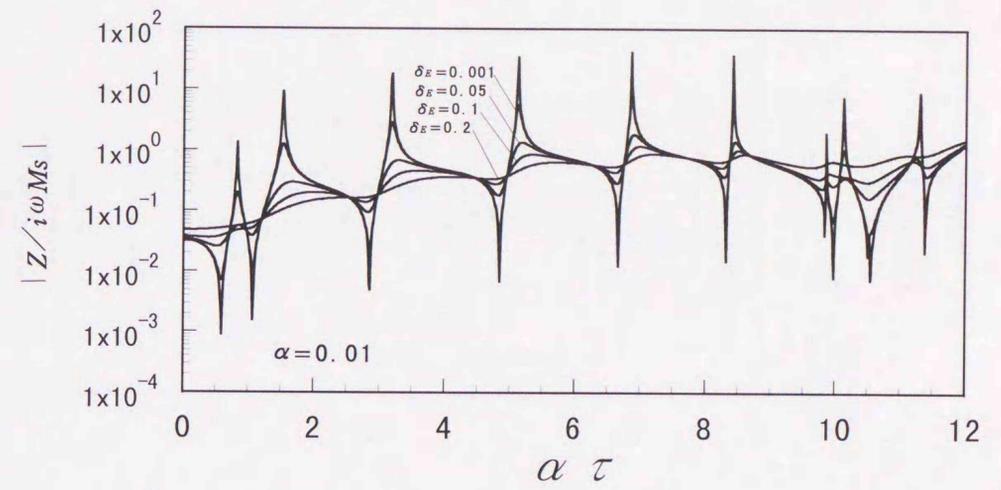


図4. 25 駆動点インピーダンス ($\lambda=6.0$)

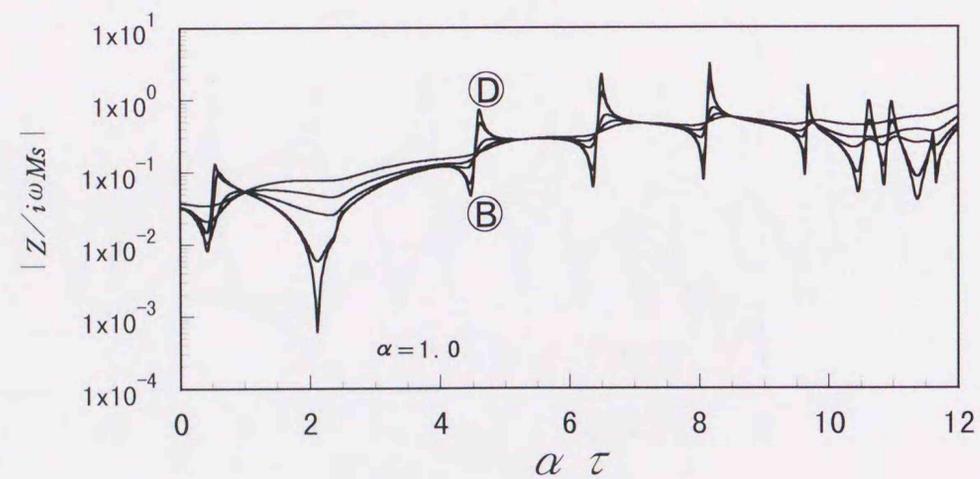
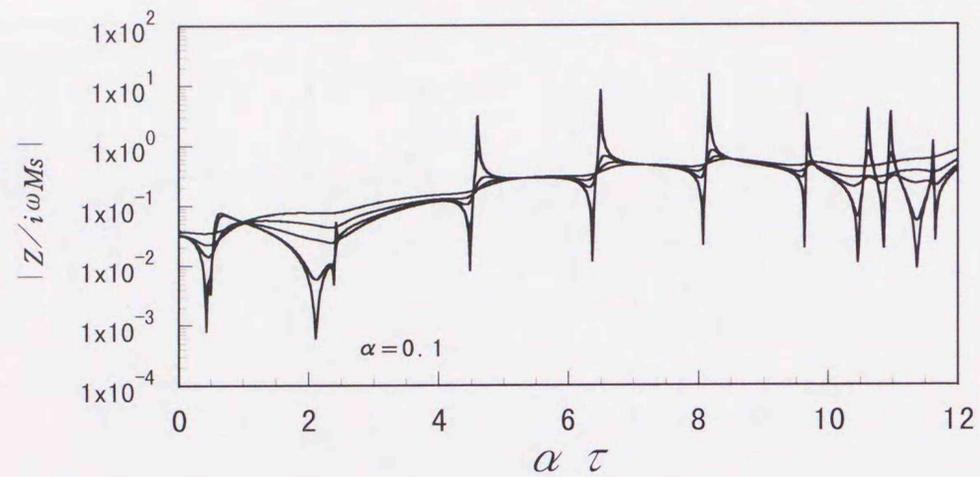
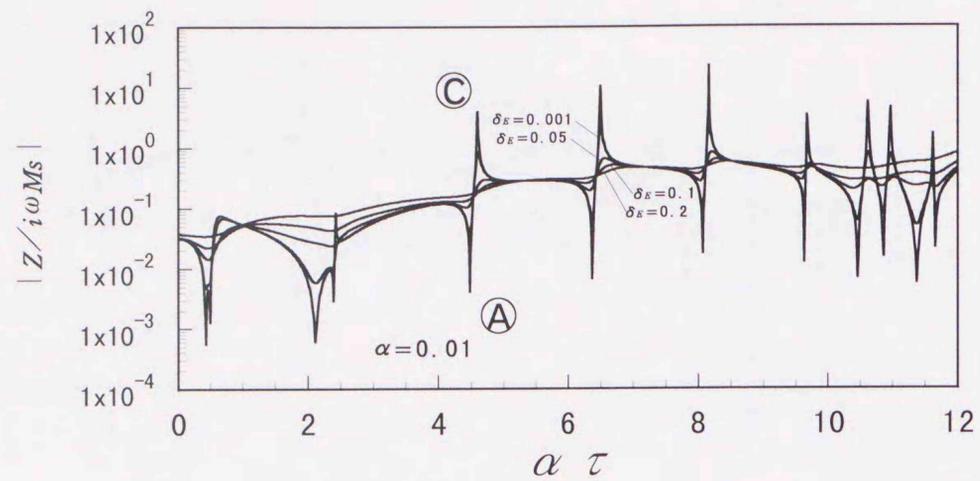


図 4. 26 駆動点インピーダンス ($\lambda=7.0$)

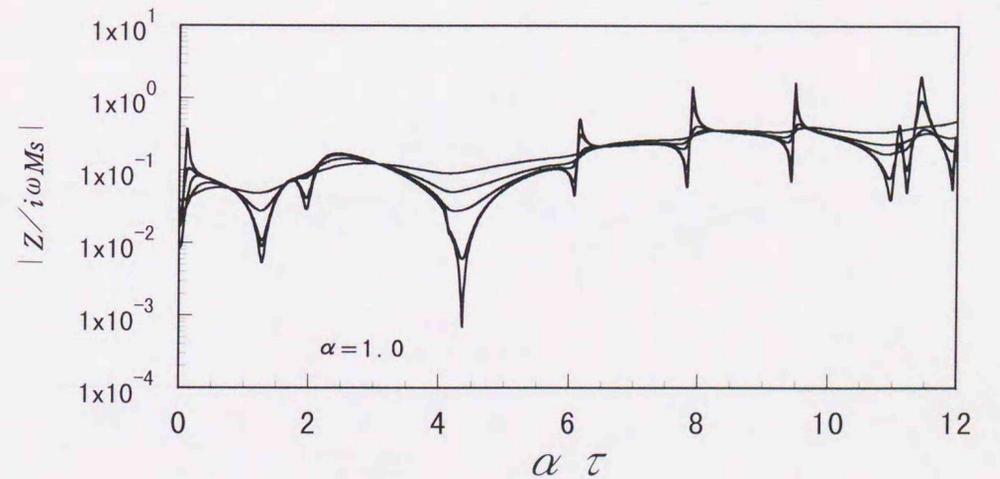
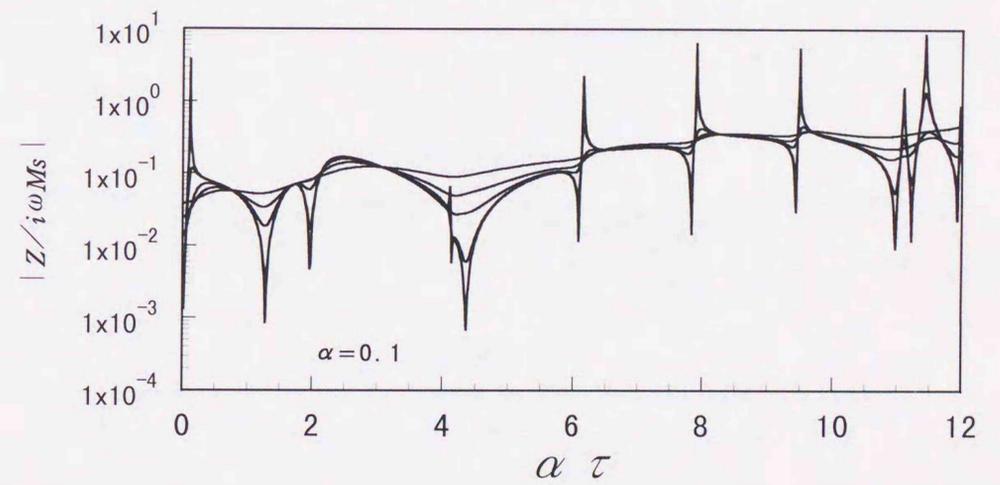
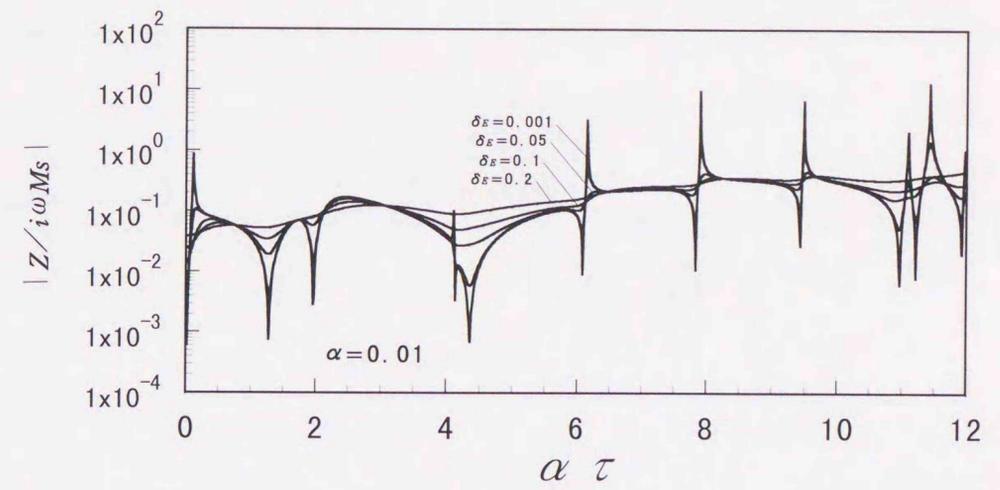


図 4. 27 駆動点インピーダンス ($\lambda=8.0$)

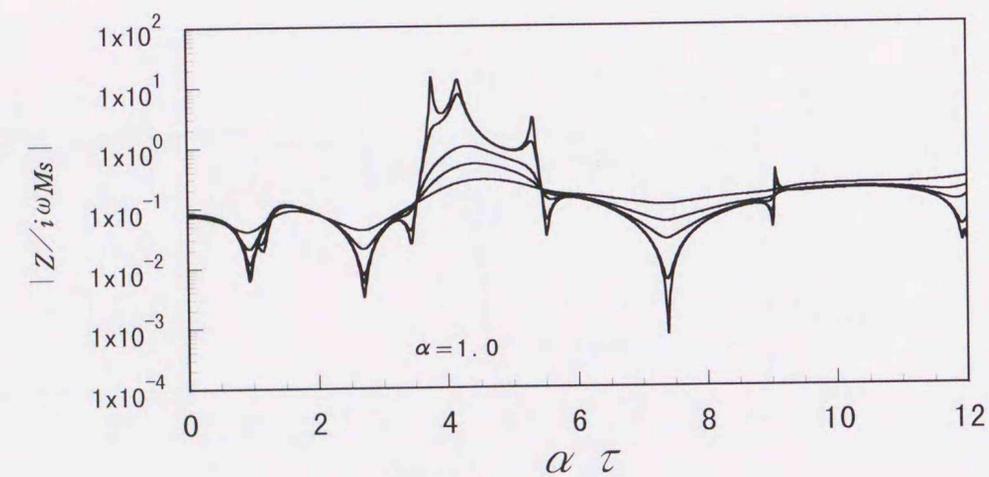
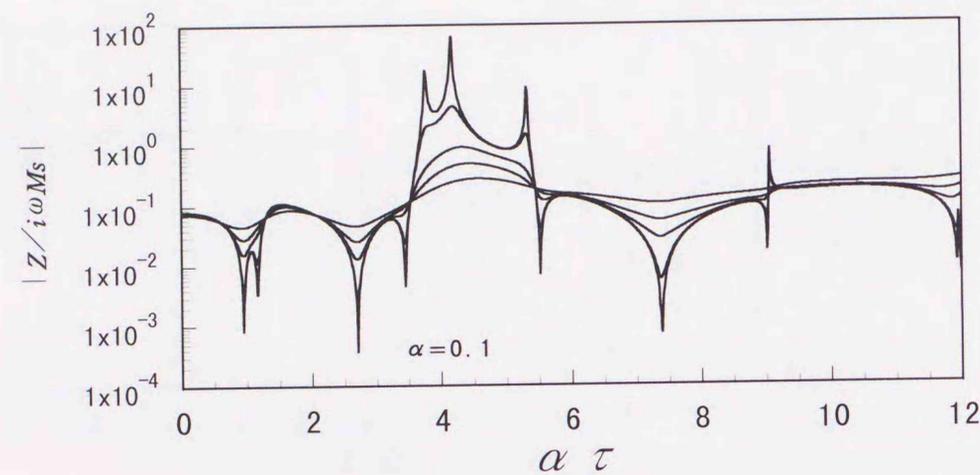
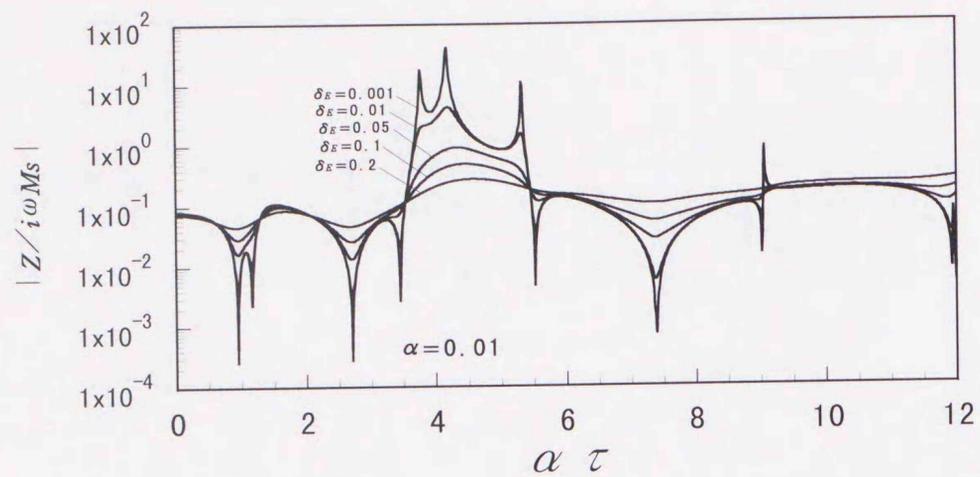


図4. 28 駆動点インピーダンス ($\lambda=9.0$)

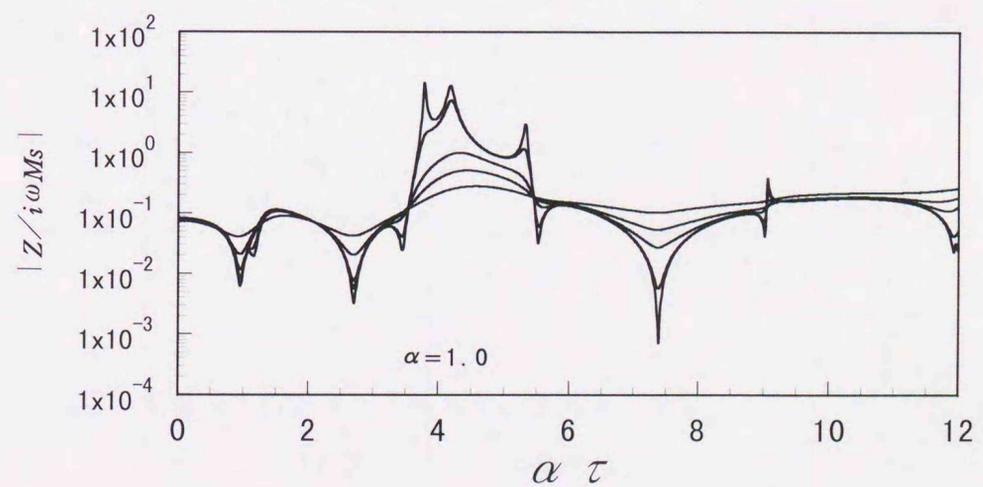
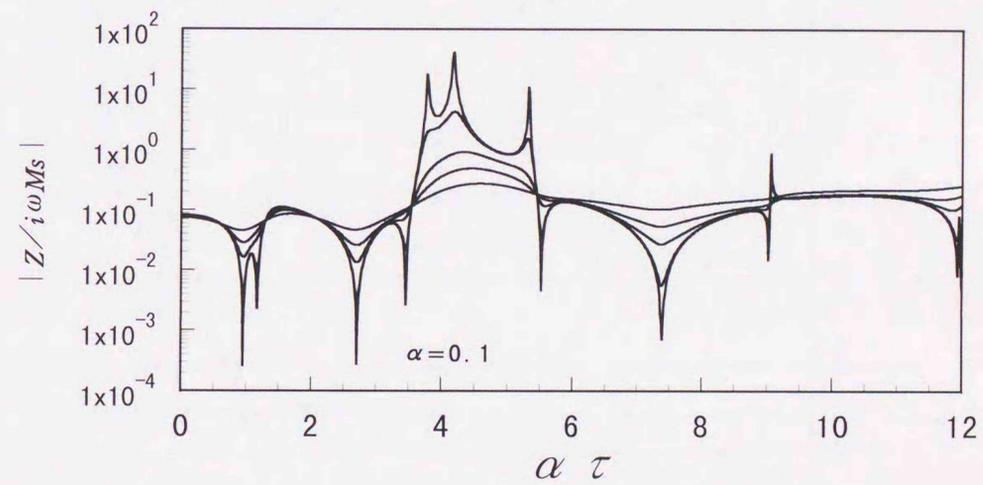
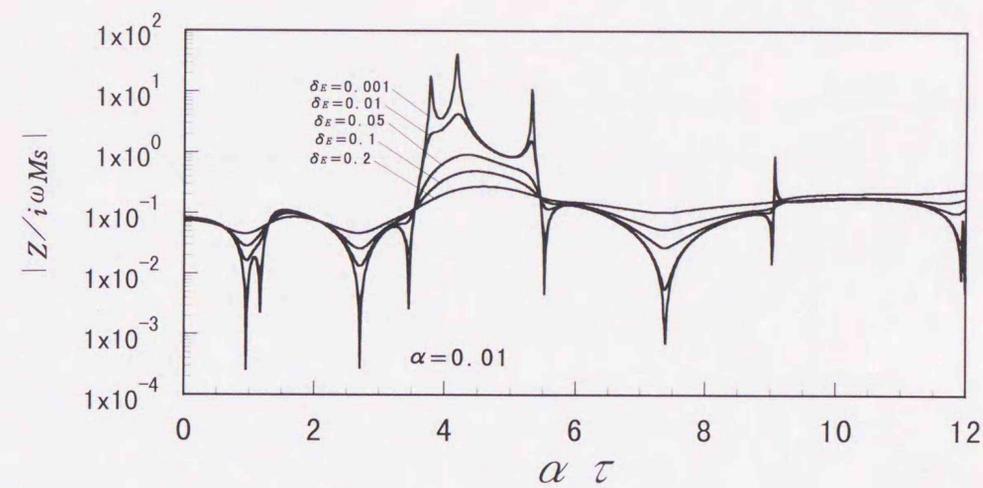


図4. 29 駆動点インピーダンス ($\lambda=10.0$)

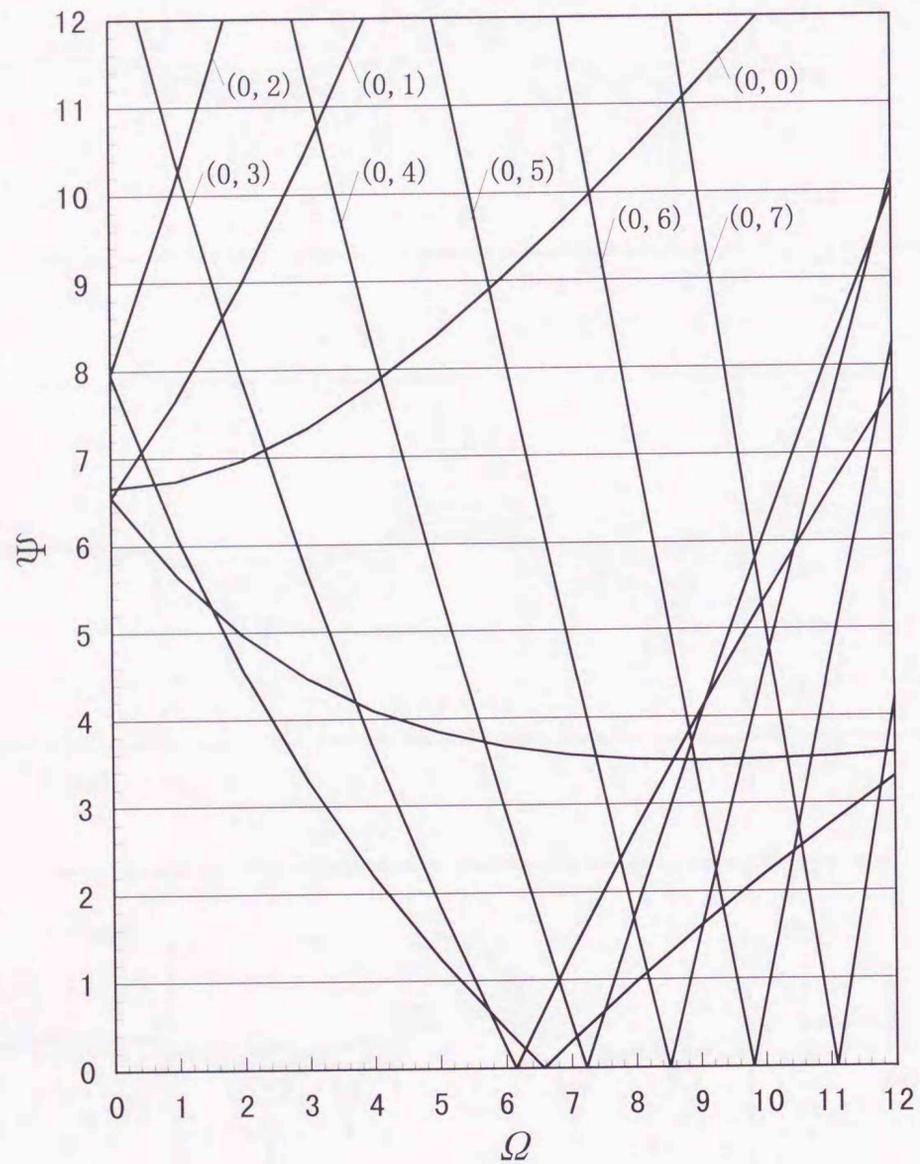


図4. 30 無次元起振振動数と角速度との関係
 $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 0.15$

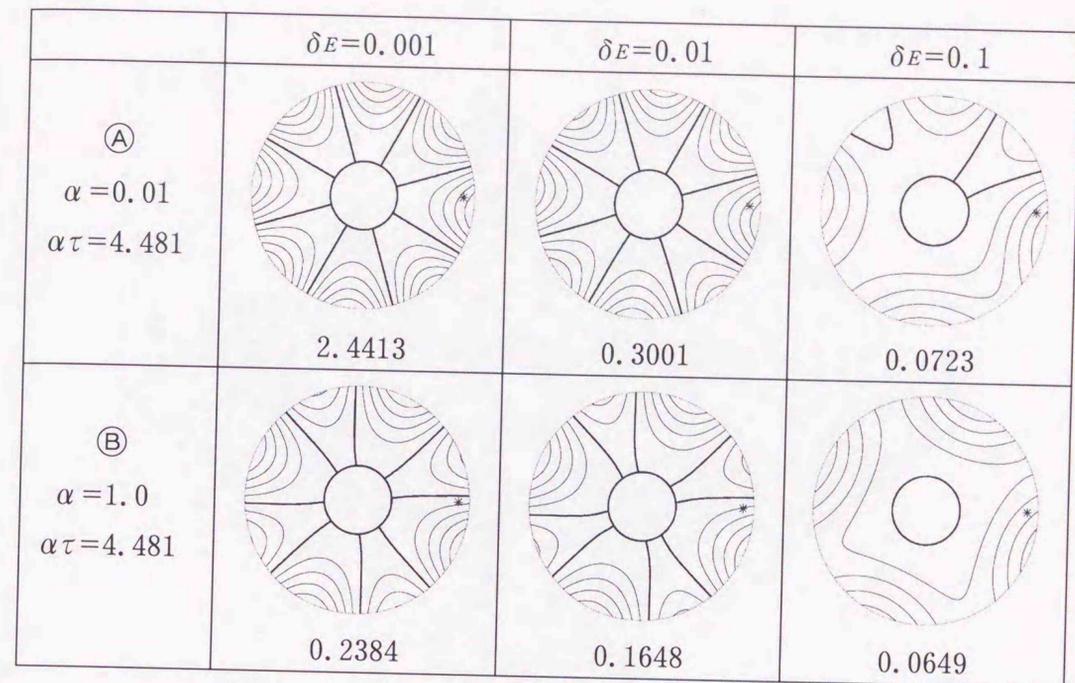


図4. 31 共振点を通過する際の振動モード

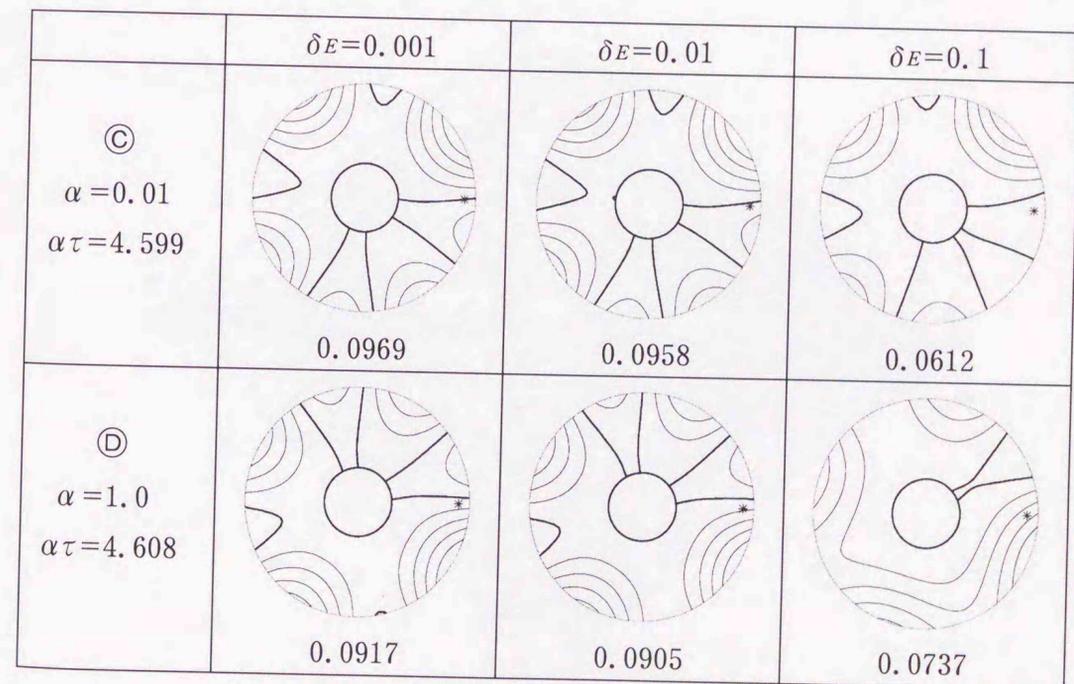


図4. 32 反共振点を通過する際の振動モード

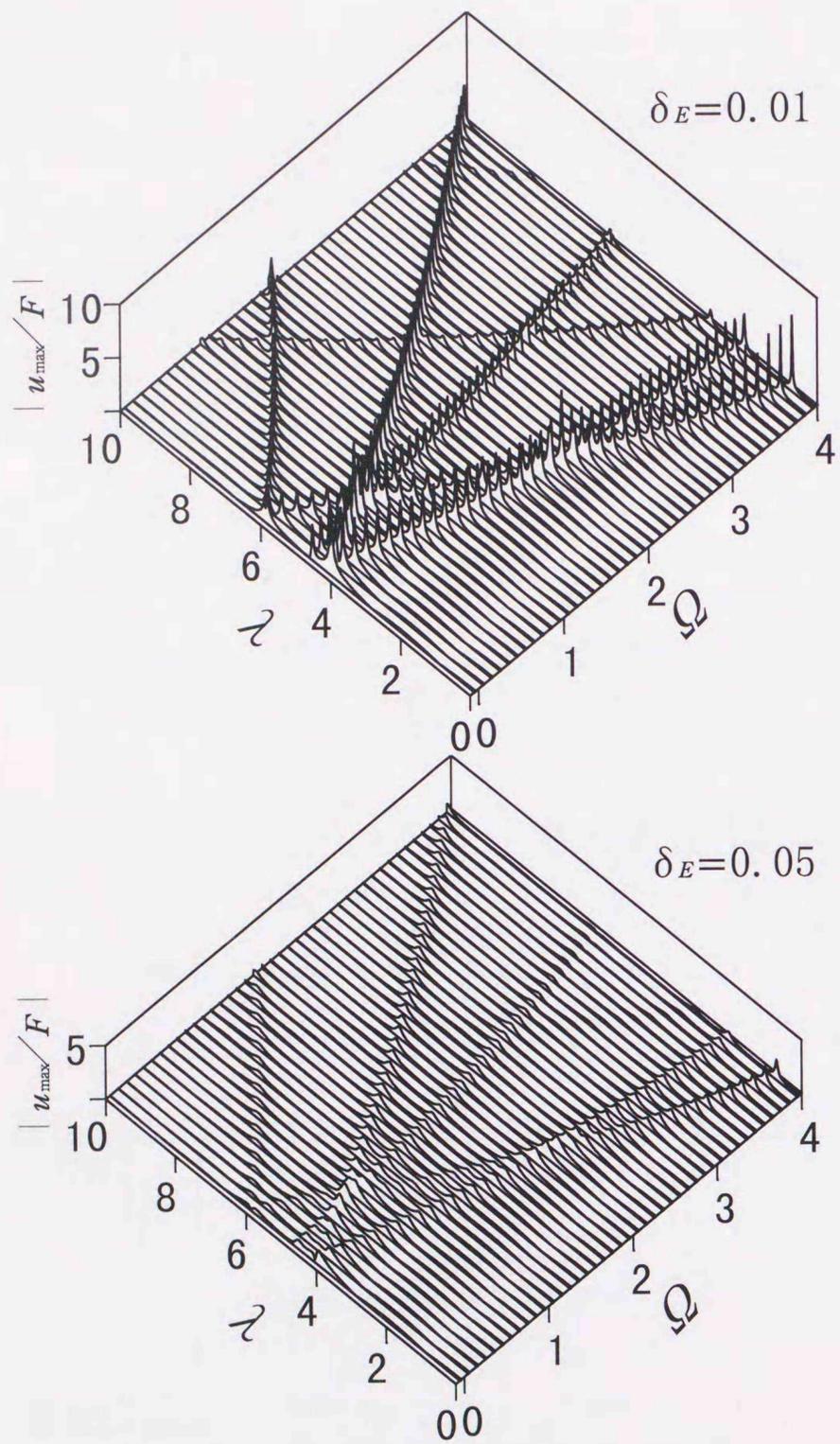


図4. 33 回転円板の最大振幅分布図 (Ω が一定の場合)

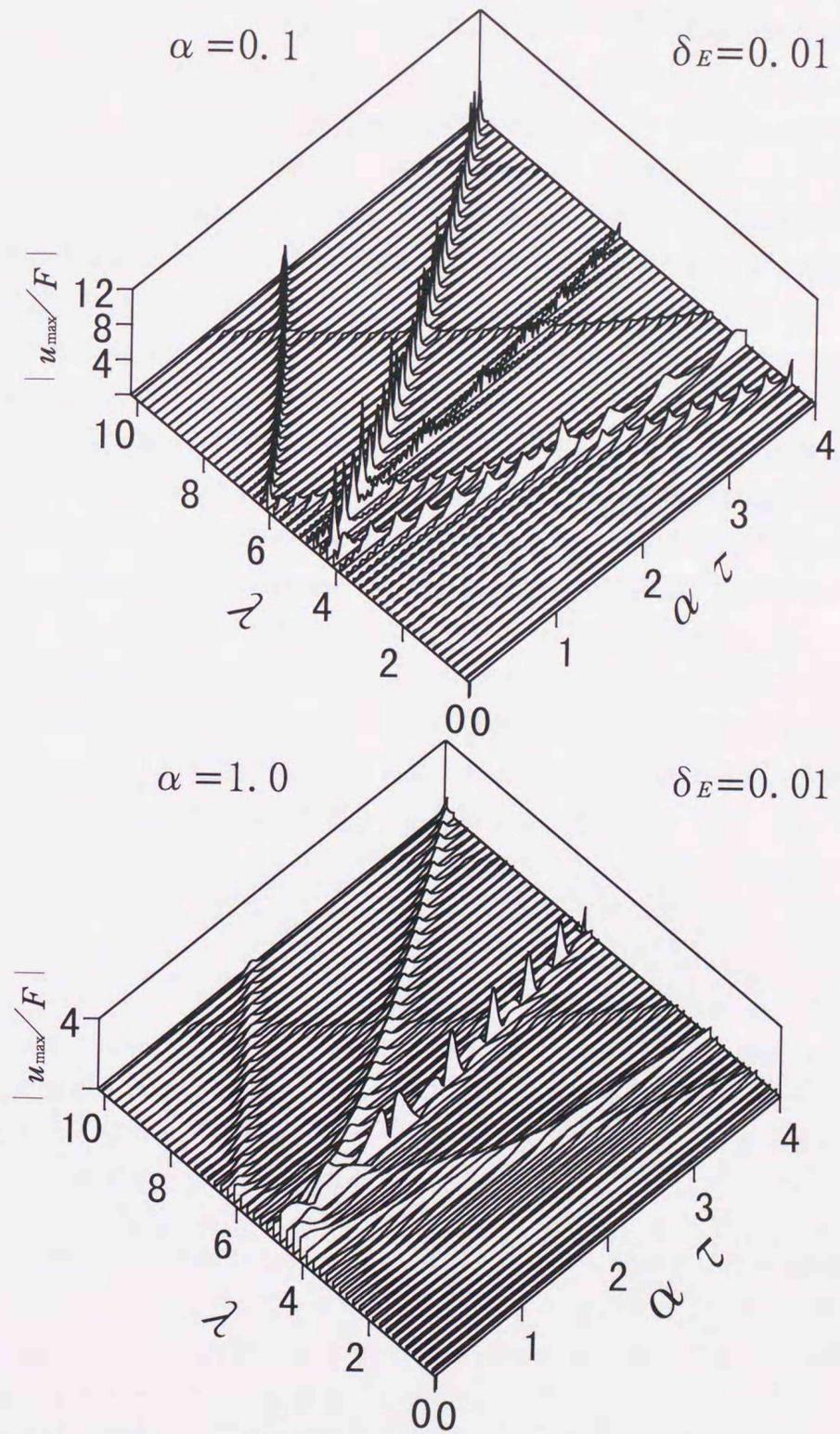


図4. 34 回転円板の最大振幅分布図 (λ が一定の場合)

4.5 第4章の結果

第4章においては、第2章において導出した等方性回転円板の各基礎式に基づいて数値計算を行った。無次元固有円振動数と角速度との関係を振動数方程式を解くことによって求めた。その結果、節円を持つ固有振動モードは振動数が高いときにのみ存在していることが解る。このことより、一般的な問題として工学的に重要となる振動モードは、(0, 0) および、節直径を有する固有振動モードである。これら節直径を持つ固有振動モードの固有円振動数は、空間に固定された静止座標系においては、円板が回転することにより、進行波と後退波の二つの振動数が現れ、さらに、節直径を2本以上有する振動モードの後退波の振動数は角速度が大きくなるに従い減少し、固有円振動数が0となる危険速度を持つ。その危険速度通過後には、振動数は上昇する。このように、等方性回転円板の無次元固有円振動数は各角速度に対して非常にたくさん存在している。このことにより、外力の振動数がこれら固有円振動数と一致し、共振現象を生じる不安定領域が広範囲に広がっている。

次に、一定角速度で回転している円板と一定角加速度で加速される場合のそれぞれの駆動点インピーダンスを計算した。これらは、調和起振振動数に対する定常応答と一定角加速度で増加する角速度に対する応答を計算したことになる。これら応答には、円板が不安定振動を伴う共振点が数多く存在し、特に、危険速度通過後には、それらのピークが密に存在するようになる。これらのピークは、内部減衰、起振位置、角加速度などの影響により、鈍化する。また、ある起振位置においては、反共振点と共振点が接近するようになり、それぞれのピークが打ち消し合い、共振点が消滅する場合が存在する。

さらに共振点におけるいくつかの振動モードを求めた。不安定現象となる共振点での振動モードは、角速度と起振振動数の違いにより、現れる振動モードの節直径の数は異なる。そして、そのとき生じる最大振幅は、そのときの振動モードに依存する。よって、任意の回転数と起振振動数に対する円板の挙動は、そのとき、どの振動モードに依存するかを把握することによって推測することができる。

第5章 極異方性回転円板の振動特性

本章では、第3章において導出した極異方性回転円板の理論式を用いて数値計算を行う。そして、応力分布、無次元固有円振動数、駆動点インピーダンス、振動モード等を求め、円周方向に繊維強化された極異方性回転円板の振動特性とその有用性について検討する。

5.1 数値計算に用いる材料物性値と解の収束

第3章、3.7節において、極異方性材として円周方向に繊維強化された円板を想定し、その場合の弾性係数等を表示した。このような弾性特性を有する極異方性回転円板の基礎式を用いて数値計算するに当たり、強化繊維にはガラス繊維、マトリックスにはエポキシ樹脂を用いることとする。そしてこれらの円周方向に繊維強化され成形された極異方性を有する円板を取り扱うこととする。実際に数値計算で使用したガラス繊維とエポキシ樹脂の各材料定数を下記に示す。

$$\text{ガラス繊維} : E_f = 68.67 \text{ GPa} , \quad \nu_f = 0.23$$

$$\text{エポキシ樹脂} : E_m = 2.94 \text{ GPa} , \quad \nu_m = 0.36$$

以下数値計算に用いる弾性係数等は、上記の材料定数を用いて、第3章、3.7節において示した円周方向に繊維強化された円板の平均弾性係数を求める式に代入する。そして、極異方性円板の半径方向と周方向におけるそれぞれの弾性係数等を決定する。

図5.1は、式(3.58)にガラス繊維とエポキシ樹脂の各材料定数を代入し、体積含有率の変化に対する円板の半径方向と周方向の縦弾性係数とポアソン比の値を示した図である。円板に含有する繊維がマトリックスに占める割合である体積含有率 V_f の値が大きくなると、円周方向の縦弾性係数 E_θ の値が増加し、半径方向の縦弾性係数 E_r との差が大きくなる。また、ポアソン比の値は、 ν_r が急激に減少し ν_θ との差が大きくなる。言い換えると、 V_f の値が大きくなると、円板にガラス繊維がより多く入った状態となり、円周方向の曲げ剛性が強くなり極異方性の影響が大きく生じるようになる。

第3章において導出した各種基礎式は第2章と同様に、近似解法を使用してそ

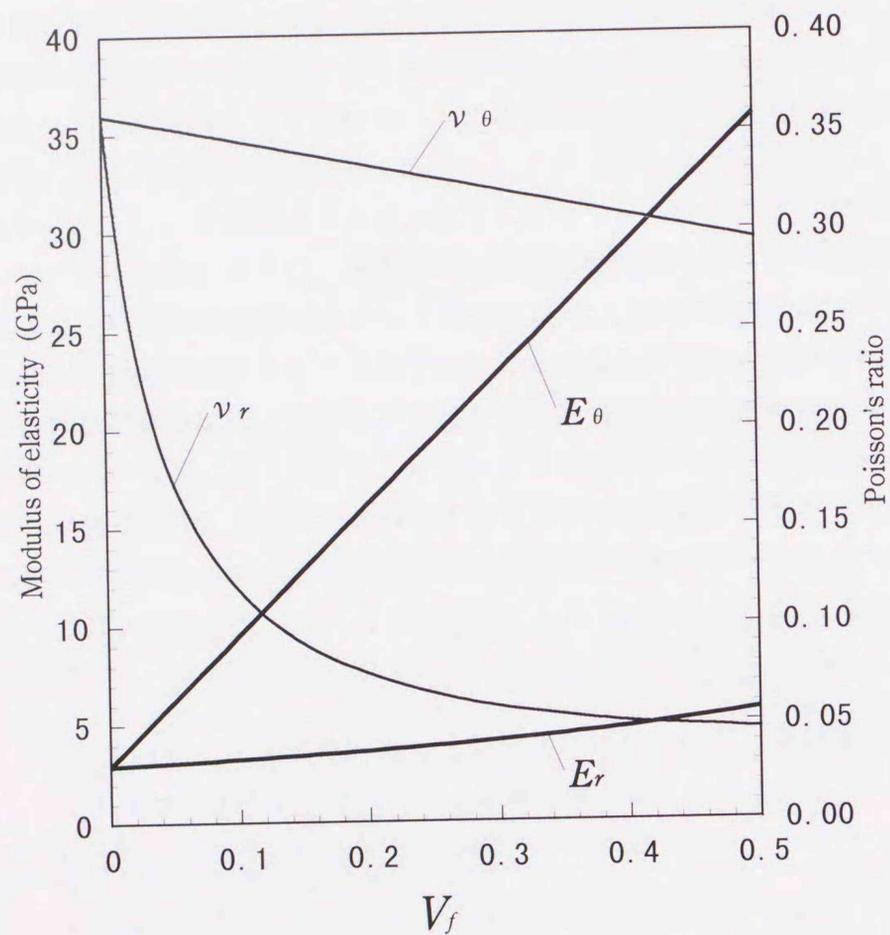


図5.1 体積含有率 V_f と半径，周方向の縦弾性係数，ポアソン比の関係

表5.1 スプライン補間法で求めた各応力値の収束状況
 $\varepsilon = 0.2, \eta = 0.2, \Omega = 1.0$

J	ξ									
	0.2		0.4		0.6		0.8		1.0	
	σ_ξ	σ_ϕ								
20	0.00	0.8159	0.2623	0.4859	0.2357	0.3869	0.1396	0.3012	0.00	0.2067
40	0.00	0.8279	0.2605	0.4930	0.2349	0.3887	0.1393	0.3024	0.00	0.2077
80	0.00	0.8302	0.2602	0.4936	0.2348	0.3891	0.1393	0.3026	0.00	0.2079
100	0.00	0.8313	0.2600	0.4939	0.2347	0.3892	0.1392	0.3027	0.00	0.2080
160	0.00	0.8317	0.2600	0.4941	0.2347	0.3893	0.1392	0.3028	0.00	0.2080
	0.00	0.8320	0.2600	0.4941	0.2347	0.3893	0.1392	0.3028	0.00	0.2080

れぞれ解を求めた。次に、これら近似解法に従い数値計算を行うため、得られた解の収束性について検討する。第3章、3.1節において求めた式(3.15)、(3.16)より、応力成分を求める際、近似解法としてスプライン補間法を用いて数値計算した。実際には、半径方向変位を式(3.9)で表される3次の多項式で近似していることより、計算された応力値は、式(3.9)における級数の J の値に依存し収束する。表5.1に式(5.1)に示した各値を使用し、材料物性値を等方性となるような値として計算した半径方向と円周方向における各応力値を示す。 $\xi=0.2\sim 1.0$ の5点における各応力値を J の値を変えそれぞれ示した。また、表の一番下に記載した数値は Timoshenko ら⁽³⁵⁾が求めた等方性回転円板の各応力値である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.2, \quad \eta = 0.2 \\ \Omega = 1.0, \quad \nu = 0.3, \quad \delta_{Er} = \delta_{E\theta} = \delta_G = 0.0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (5.1)$$

表5.1より、本方法を用いて計算された値を Timoshenko らの値と比較すると分割数は $J=100$ で十分収束していることが解る。

極異方性回転円板の運動方程式を解く方法として、ここでは近似解法の一つであるガラキン法を適用した。これは、第2章と同様に面外方向変位を級数で表される関数で近似することによって解いた。そして、式(3.35)で表される極異方性回転円板の振動数方程式を、回転していない等方性円板の振動数方程式となるように各弾性係数を定め計算した。その結果、計算された固有円振動数は、第2章同様に $M=5$ で十分収束した。また、その値は厳密解として示されている高橋らが求めた円板の固有円振動数に一致した。

以上の結果より、以下の数値計算において、応力値を求めるには $J=100$ を用い、運動方程式を解くには $M=5$ を用いてすべて計算した。また、内部減衰の影響を表すパラメータは $\delta_{Er} = \delta_{E\theta} = \delta_G$ とし、また板厚は $h_0=0.001$ として数値計算を行う。

5.2 応力成分

図5.2に第3章で求めた応力成分、式(3.15)、(3.16)を用いて $\varepsilon = \eta = 0.1, 0.2, 0.3$ の場合における半径方向と周方向の応力分布を示した。ガラス繊維の体積含有率が $V_f=0.0\sim 0.5$ と変化させた場合についてそれぞれ求めた。横軸は無次元座標 ξ 、左側の図の縦軸は円板の半径方向の応力、右側の図の縦軸は円周方向の応力をそれぞれ示す。また、すべて $\Omega=1.0$ として計算した。 $V_f=0.0$ のときはガラス繊維が含まれないエポキシ樹脂のみで成形された等方性の円板となり、そのときの応力分布は、Timoshenko らが求めた等方性回転円板の応力値にすべて一致する。体積含有率 V_f の値が大きくなると、等方性回転円板と比較して半径方向応力 σ_r の値は全体的に減少する。また、その応力値が最大となる位置は、 $\eta=0.3$ の場合、含有率の増加につれて $\xi=0.55$ から $\xi=0.6$ と変化し、外周方向へずれていく。その差は、 η の値が小さいほど大きい。円周方向応力 σ_θ の分布は、最大値となる位置は等方性回転円板の場合では固定端($\xi=\eta$)であるが、極異方性を持つことにより、 $\eta=0.3, V_f=0.5$ の場合、 $\xi=0.73$ で最大値となり、その分布状態は大きく変化する。このように等方性から極異方性へと円板の特性が変わることにより、高速回転時に生じる円板の亀裂、破損等の発生位置が変わる。さらに、極異方性を有することにより、等方性円板に比較して、全体的に剛性の高い円板となることがわかる。また、半径方向、周方向の両方の応力とも、ガラス繊維を等方性円板に少し含有($V_f=0.1$)するだけで、その分布状態を大きく変化させることが可能となった。

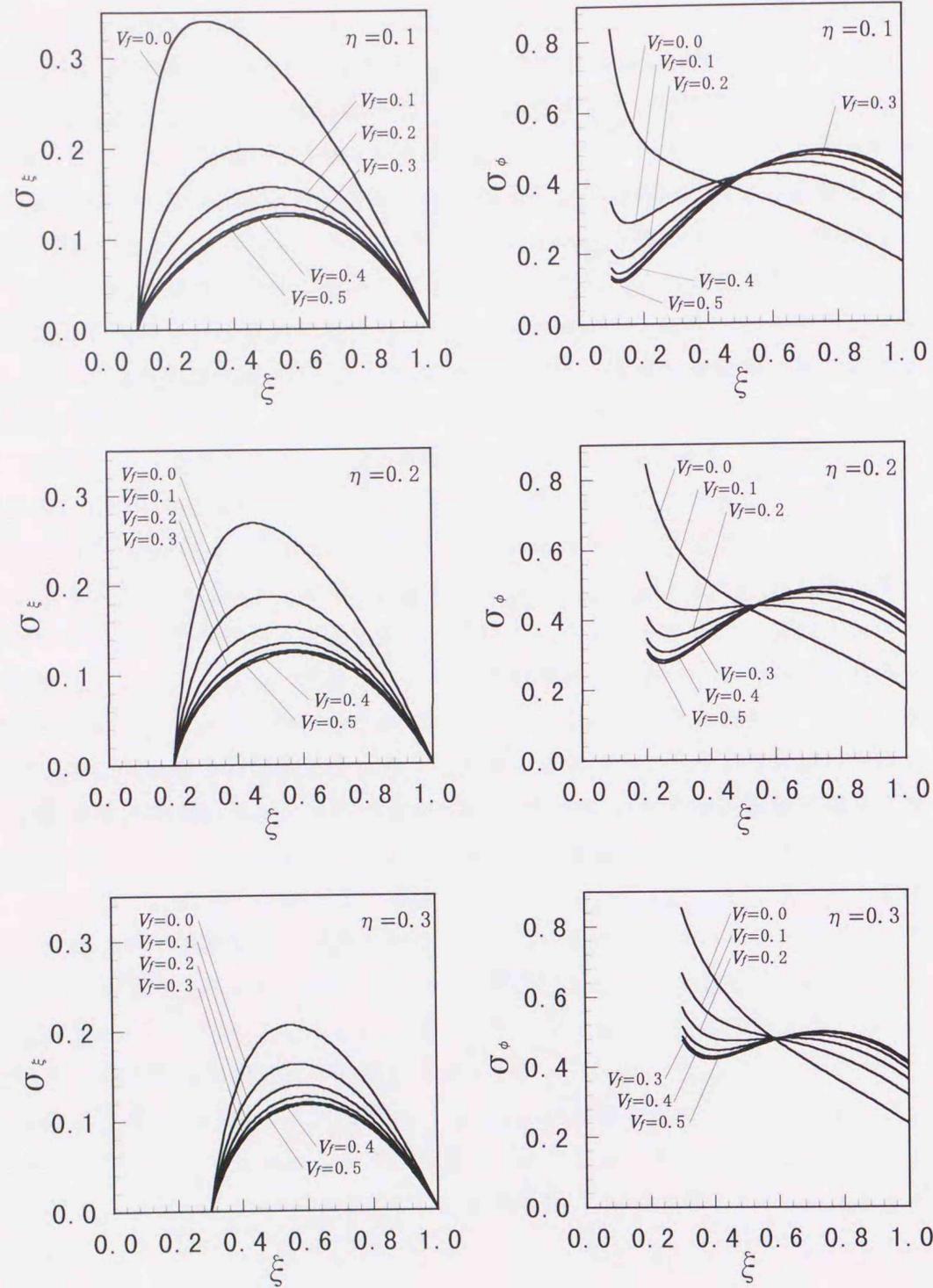


図5.2 半径，円周方向の応力分布

5.3 固有円振動数と角速度との関係

図5.3～図5.8は数値計算に用いた各パラメータを式(5.2)として，極異方性回転円板の振動数方程式を解き，ガラス繊維の体積含有率が違う場合のそれぞれの固有振動数曲線を第4章で図示したのと同様に作成し示した図である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3, \quad h_0 = 0.001 \\ \delta_{E_r} = \delta_{E_\theta} = \delta_G = 0.0 \end{array} \right.$$

..... (5.2)

図5.3に示した $V_f=0.0$ の場合は，ガラス繊維が含まれず，エポキシ樹脂のみで成形された等方性回転円板の場合である。縦軸は無次元固有円振動数，横軸は無次元角速度であり，0～12まで，節直径に関しては $L=5$ まで考慮して計算した。

極異方性回転円板の固有振動数曲線は，第4章で求めた等方性回転円板の固有振動数曲線同様，節直径を持つ振動モードの場合回転することにより，進行波と後退波が発生し，後退波は危険速度を有する。全体的に，極異方性回転円板の固有振動数曲線は，ガラス繊維の体積含有率 V_f の値が大きくなると，(0,3)モードより高次の固有振動モードに対する固有円振動数が高くなり，危険速度の値も高くなる。このことより，等方性回転円板の場合(図5.3)と比較すると，各モードの固有振動数曲線の間隔が非常に広がり，固有円振動数の曲線が粗となり，安定領域が多く存在するようになる。このことは，等方性回転円板に比較して，極異方性回転円板は共振現象を避けやすいと言える。

図5.9～図5.14は，先に示した無次元固有円振動数と角速度との関係(図5.3～図5.8)より，体積含有率をパラメータとして同じ固有振動モードについて固有振動数曲線を示した図である。(0,0)および(0,1)モードの場合は，体積含有率が大きくなるにつれ，固有円振動数の値が高くなる。しかし，角速度 Ω が増加するにつれてその差は次第に小さくなっていく。(0,2)モードの固有振動数曲線の固有円振動数および，危険速度の値は，体積含有率が大きくなると若干ではあるが高い値へと変わる。これら節直径数の少ない固有振動モードの固有振動数曲線に比較して，(0,3)モードより高次の固有振動数曲線は，等方性円板からガラス繊維を入れ極異方性円板とすることにより，それぞれの固有振動数曲線の間隔が広がる。そして，固有円振動数と危険速度の値は非常に高い値となる。また，その影響は，等方性円板にガラス繊維を少量含有($V_f=0.1$)するだけで，

固有円振動数と危険速度の値を大きく変化させることができる。

図5.15と図5.16は、前述と同様に式(5.2)で与えられた各パラメータによる円板が一定角速度 $\Omega=3.0$ と 5.0 で回転している場合の最大振幅と体積含有率 V_f の関係をも(0,0)～(0,3)モードの場合について計算した。これらの図より、体積含有率が最大振幅に及ぼす影響は、 V_f が0.2以下において、最大振幅が減少している。特に、(0,0)、(0,1)モードの最大振幅の減少率が大きい。しかし、 V_f が0.2以上となると、最大振幅は、ほぼ一定の値となる。

以上のように、エポキシ樹脂にガラス繊維を含有することにより、等方性から極異方性円板へと変わるが、固有円振動数と危険速度の値は、節直径数の多い振動モードの固有振動数に影響を及ぼし、その値は高くなる。また、そのときの最大振幅は、逆に節直径数の少ない振動モードにおいて影響が大きく、その最大振幅が低減する。これらの影響は、その双方とも体積含有率が小さい場合に十分変えることができ、全体として、振動を伴わない安定した回転を得ることができる。

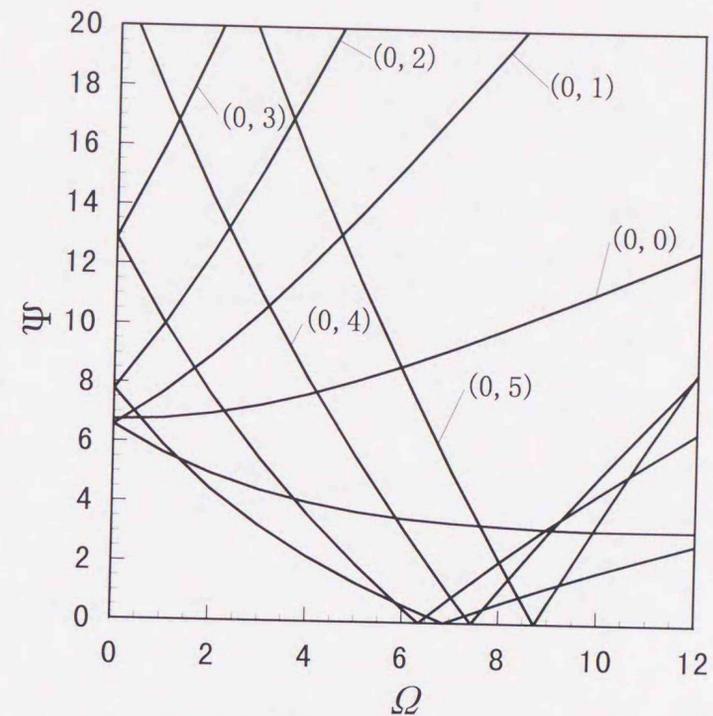


図5.3 無次元固有円振動数と角速度との関係 ($V_f=0.0$)

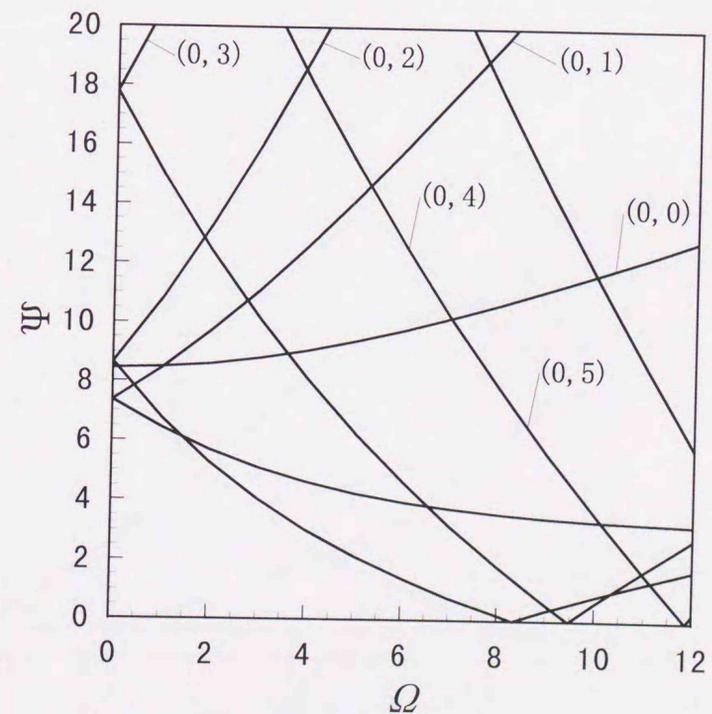


図5.4 無次元固有円振動数と角速度との関係 ($V_f=0.1$)

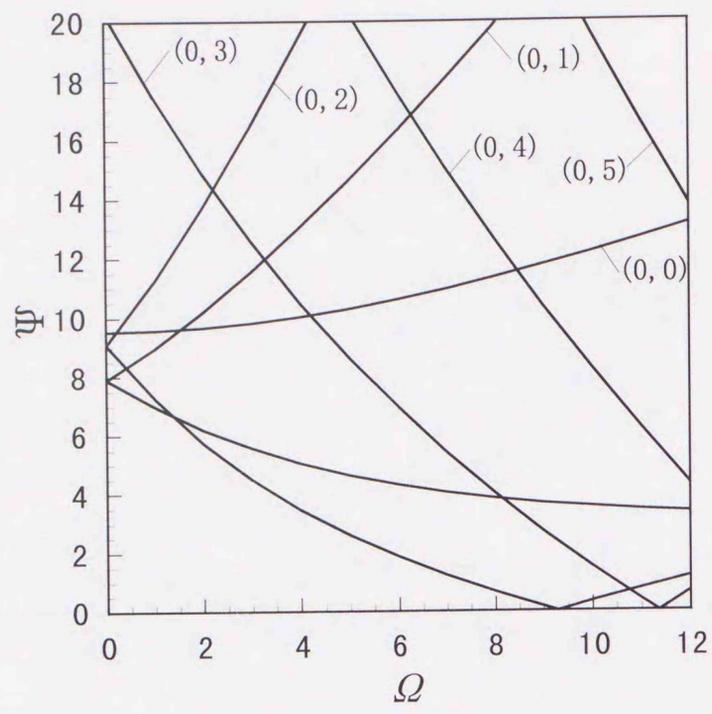


図 5. 5 無次元固有円振動数と角速度との関係 ($V_f=0.2$)

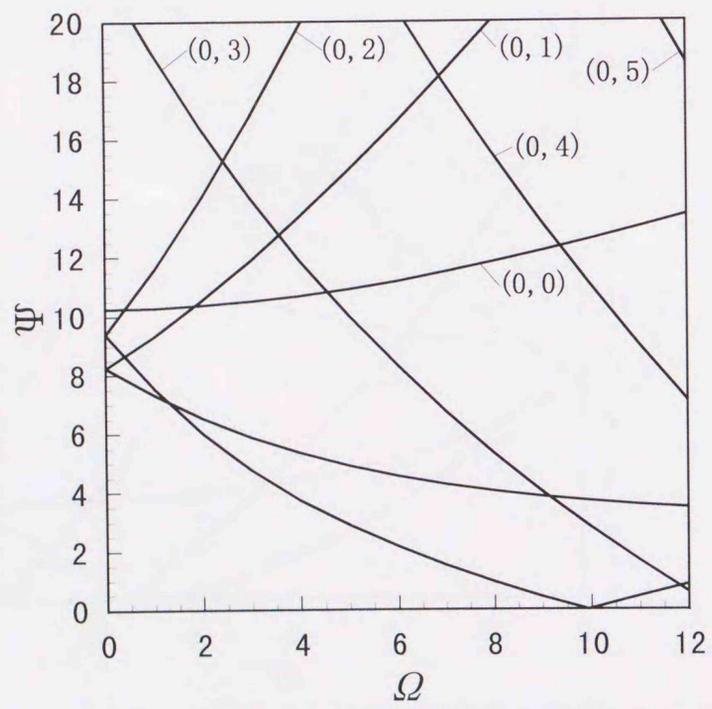


図 5. 6 無次元固有円振動数と角速度との関係 ($V_f=0.3$)

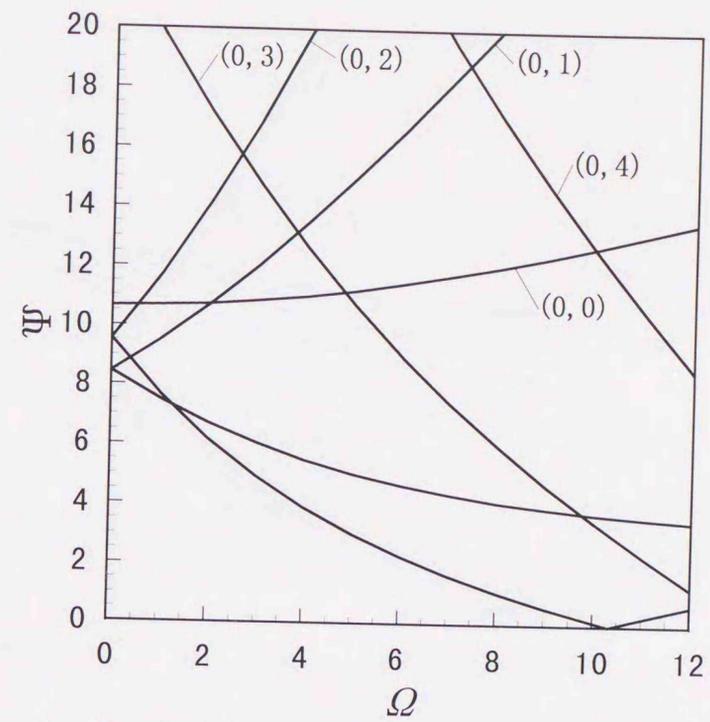


図 5. 7 無次元固有円振動数と角速度との関係 ($V_f=0.4$)

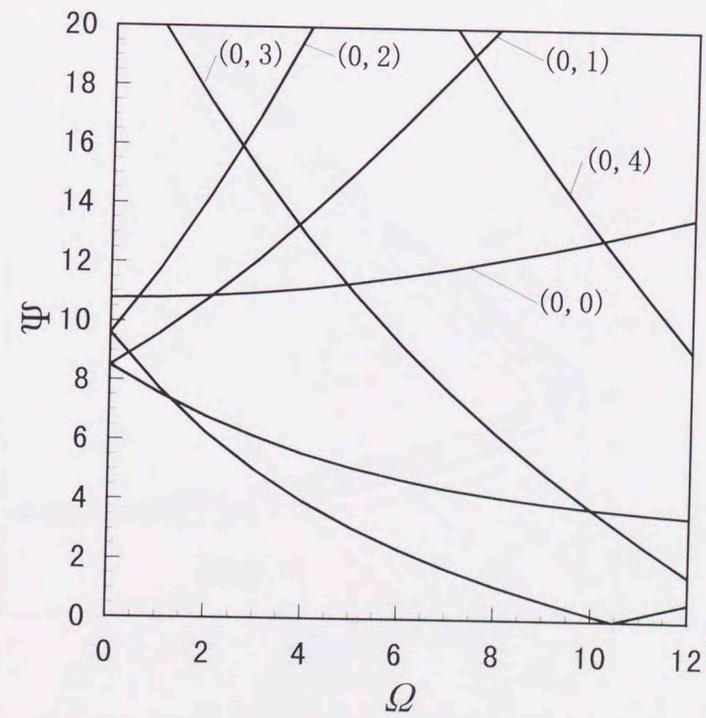


図 5. 8 無次元固有円振動数と角速度との関係 ($V_f=0.5$)

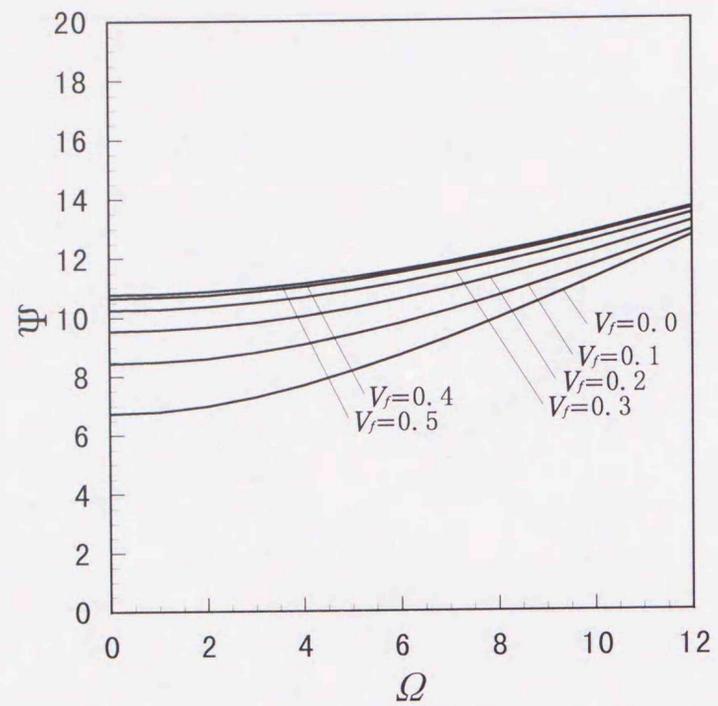


図5. 9 (0,0) モードの固有振動数曲線

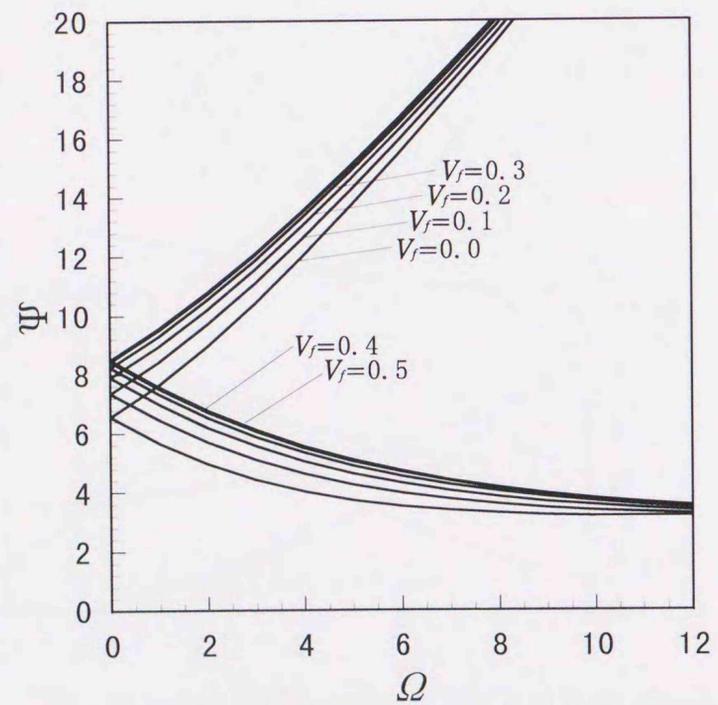


図5. 10 (0,1) モードの固有振動数曲線

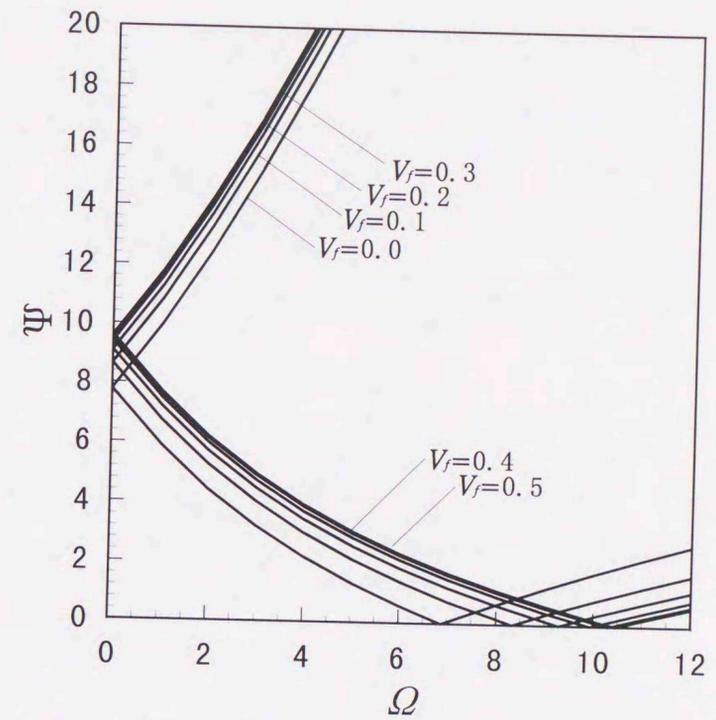


図5. 11 (0,2) モードの固有振動数曲線

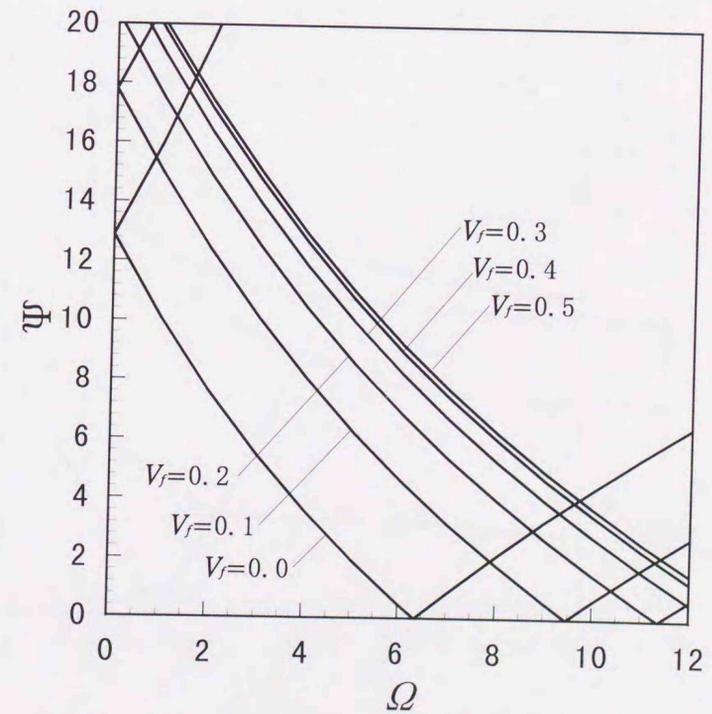


図5. 12 (0,3) モードの固有振動数曲線

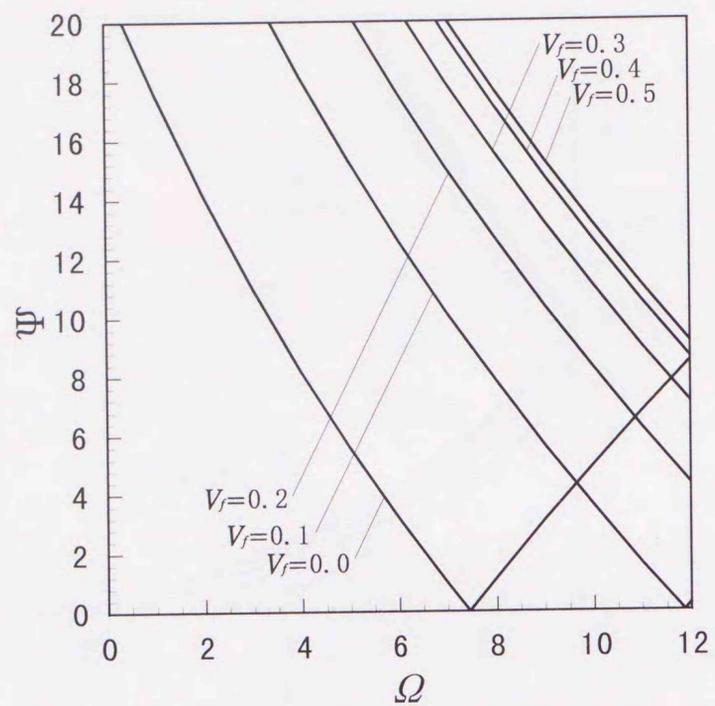


図5. 13 (0,4) モードの固有振動数曲線

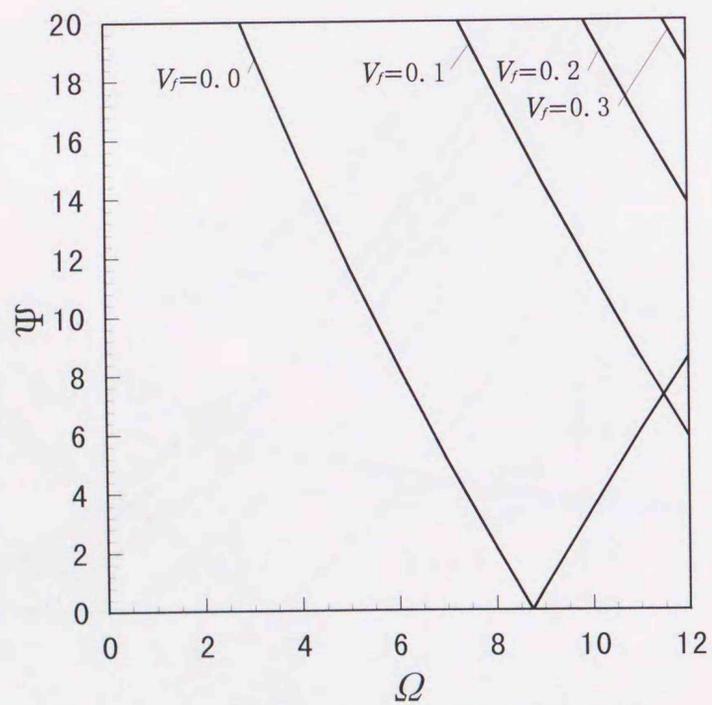


図5. 14 (0,5) モードの固有振動数曲線

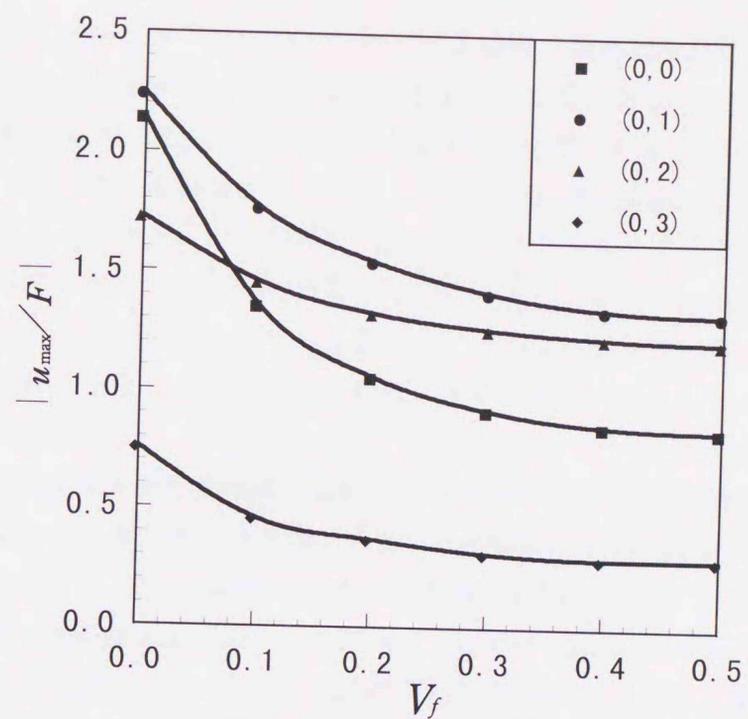


図5. 15 最大振幅と V_f の関係 ($\Omega=3.0$)

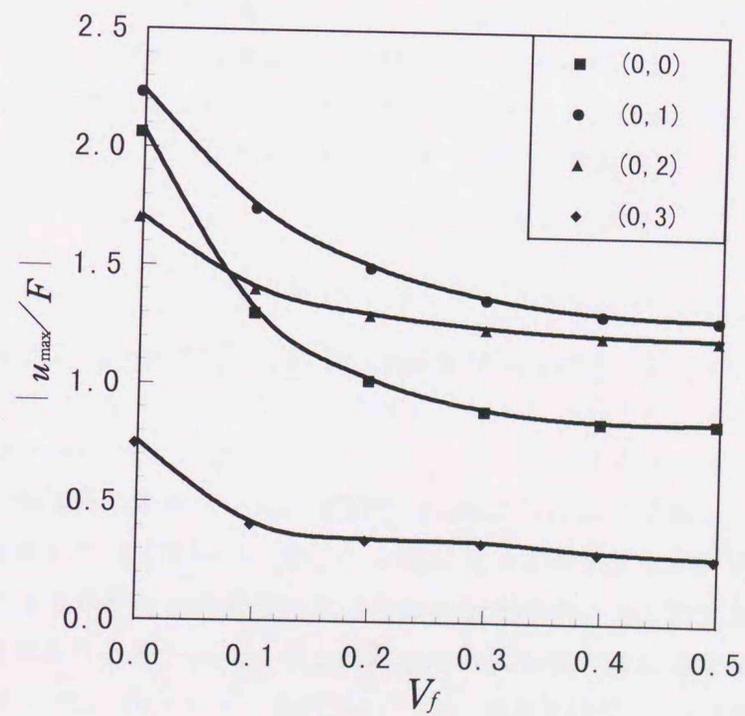


図5. 16 最大振幅と V_f の関係 ($\Omega=5.0$)

5.4 駆動点インピーダンスと振動モード

図5.17～図5.22にガラス繊維の体積含有率が0.0～0.5のそれぞれの場合の駆動点インピーダンスを示す。数値計算に用いた各パラメータは式(5.3)に示した値を用いて、また、節直径に関しては $L=7$ まで考慮し計算した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3, \quad h_0 = 0.001 \\ \delta_{Er} = \delta_{E\theta} = \delta_G = 0.001 \sim 0.2, \quad \xi_0 = 0.8, \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (5.3)$$

各図は、それぞれの体積含有率に対して横軸に調和起振振動数、縦軸が無次元化した駆動点インピーダンスである。上から順に一定角速度 $\Omega=1.0, 3.0, 5.0, 7.0$ で回転している場合の駆動点インピーダンスであり、それぞれの図に減衰の値として δ_{Er} の値が4つの場合について図示した。また、図5.17は体積含有率 V_f が0であることより等方性回転円板の場合と一致する。内部減衰の影響は、極異方性回転円板においても第4章で求めた結果同様、 δ_{Er} の値が大きくなるにつれて、共振点、および、反共振点でのピークが鈍化し、 $\delta_{Er}=0.1$ 以上ではほとんどピークは現れなくなる。

図5.23～図5.28に図5.17～図5.22と同様、ガラス繊維の体積含有率が0.0～0.5のそれぞれの場合の駆動点インピーダンスを示す。数値計算に用いた各パラメータは式(5.4)に示した値を用いた。また、節直径に関しては $L=7$ まで考慮し計算した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3, \quad h_0 = 0.001 \\ \delta_{Er} = \delta_{E\theta} = \delta_G = 0.001, \quad \xi_0 = 0.6, 0.8, 1.0, \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (5.4)$$

前述の図5.17～図5.22においては、内部減衰の違いが極異方性回転円板の応答にどの様に影響するかを計算したのに対して、図5.23～図5.28では起振位置の違いによる応答を計算した。起振位置の違いによる影響は、極異方性とした場合についても、第4章で求めた等方性円板と同様であり、反共振点の振動数に影響を及ぼす。

図5.17～図5.28で示した各駆動点インピーダンスの図より、一定角速度で回転

している円板の体積含有率が $V_f=0.1 \sim 0.5$ と増え、極異方性の影響が大きくなると、それら駆動点インピーダンスに現れる共振点、反共振点でのピークは、高い方へと移動する。さらに、そのピーク間の間隔も広くなり、全体の応答のピーク数は減少していく。これは、前節で述べたように、極異方性としたことにより、節直径数の多い振動モードの共振点の振動数が非常に高くなると同時に、そのピークが起振振動数の高い方へと移動するからである。よって、極異方性回転円板の駆動点インピーダンスに現れる共振点のピークは、起振振動数が15以下において、比較的節直径数の少ない固有振動モードの共振点のみとなる。

図5.29と図5.30は、 $\Omega=3.0$ の一定角速度で回転している極異方性円板の共振点における振動モードを起振振動数が小さい順から4つ求め、縦に上から並べて示した図である。また、ガラス繊維の体積含有率が0.0～0.5の6通りの場合についてそれぞれ示した。振動モードの等高線図の表記の仕方は、第4章で図示した振動モードの等高線図と同様にして求めた。また、図中に記述した $\lambda_{a0}, \lambda_{b0}, \dots, \lambda_{c5}, \lambda_{d5}$ の値は、図5.17～図5.22において、 $\Omega=3.0$ のときの駆動点インピーダンスの各図中に記入した共振点の起振振動数を示す。また、その下の数字はそのときの振動モードの無次元最大振幅を与える。数値計算に用いた各パラメータは式(5.5)に示した値を用いて、また、節直径に関しては $L=5$ まで考慮し計算した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3, \quad h_0 = 0.001, \quad \tau = 1.0 \\ \delta_{Er} = \delta_{E\theta} = \delta_G = 0.01, \quad \xi_0 = 1.0, \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (5.5)$$

体積含有率 V_f の値が大きくなると、等方性回転円板($V_f=0.0$)の3番目に現れている(0,3)モードは、極異方性円板となることにより、共振点での振動数が高くなる。そのことにより、 $V_f=0.2$ 以上において5番目以降に高い振動数となり図中には現れていない。主に現れる振動モードは、 λ の小さい順に並べると、(0,2)の後退波のモード、(0,1)の後退波のモード、(0,0)モード、(0,1)の進行波のモードと比較的節直径数が少ない振動モードとなる。また、体積含有率 V_f が大きくなると、同一モードにおける最大振幅の値は減少する。ただし、節直径を持たない(0,0)モードについては、無次元時間 $\tau=1.0$ のときの最大振幅を記入したため、その値にはばらつきが生じる。しかし、その共振点の振動数

の一周期に相当する時間内の最大振幅を計算すると、その値は、節直径を有する固有振動モードと同様に減少する。

図5.31と図5.32は、 $\Omega=3.0$ の一定角速度で回転している極異方性円板の反共振点における振動モードである。ガラス繊維の体積含有率は0.0~0.5の4通りの場合である。また、それぞれの V_f の値に対して調和起振力が作用する位置を円板中央から外周方向へ($\xi_0=0.4\sim 1.0$)変化させ、それぞれの振動モードを同様な表記の仕方で作成した図である。図5.31に記述した $\lambda_{a0}, \lambda_{b0}, \dots, \lambda_{g5}$ と図5.32に記述した $\lambda_{h0}, \lambda_{i0}, \dots, \lambda_{j5}$ の値は、図5.23, 5.24, 5.26, 5.28における $\Omega=3.0$ のときの駆動点インピーダンスの図中に記入したそれぞれの反共振点の起振振動数を示す。また、その下にそのときの振動モードの無次元最大振幅を記入した。数値計算に用いた各パラメータは起振位置を除いて式(5.5)に示した値を用いて計算した。また、節直径に関しては $L=5$ まで考慮している。図5.31に示した反共振点モードは、図5.29と図5.30に示した $\lambda_{a0}\sim\lambda_{g5}$ の各(0,2)共振点モードに対応する反共振点モードである。図5.32に示した反共振点モードは図5.29と図5.30に示した $\lambda_{h0}\sim\lambda_{j5}$ の各(0,1)共振点モードに対応する反共振点モードである。調和起振力の作用する位置が円板内周から外周へと移動すると、変位振幅レベルの小さい領域が外周まで広がっていく。体積含有率 V_f の違いによる影響は、図5.31の(0,2)共振点モードに対する反共振点モードでは、等高線図自体には、ほとんど変化が認められず、各起振位置において同様な振動モードとなる。図5.32に示した(0,1)共振点モードに対する反共振点モードでは、体積含有率 V_f の値が大きくなると、起振位置の反対側においても変位振幅レベルの小さい領域が広がっていくのが認められる。また、いずれの場合においても、体積含有率 V_f の値が大きくなり、極異方性の影響が増すと、無次元最大振幅は減少する。

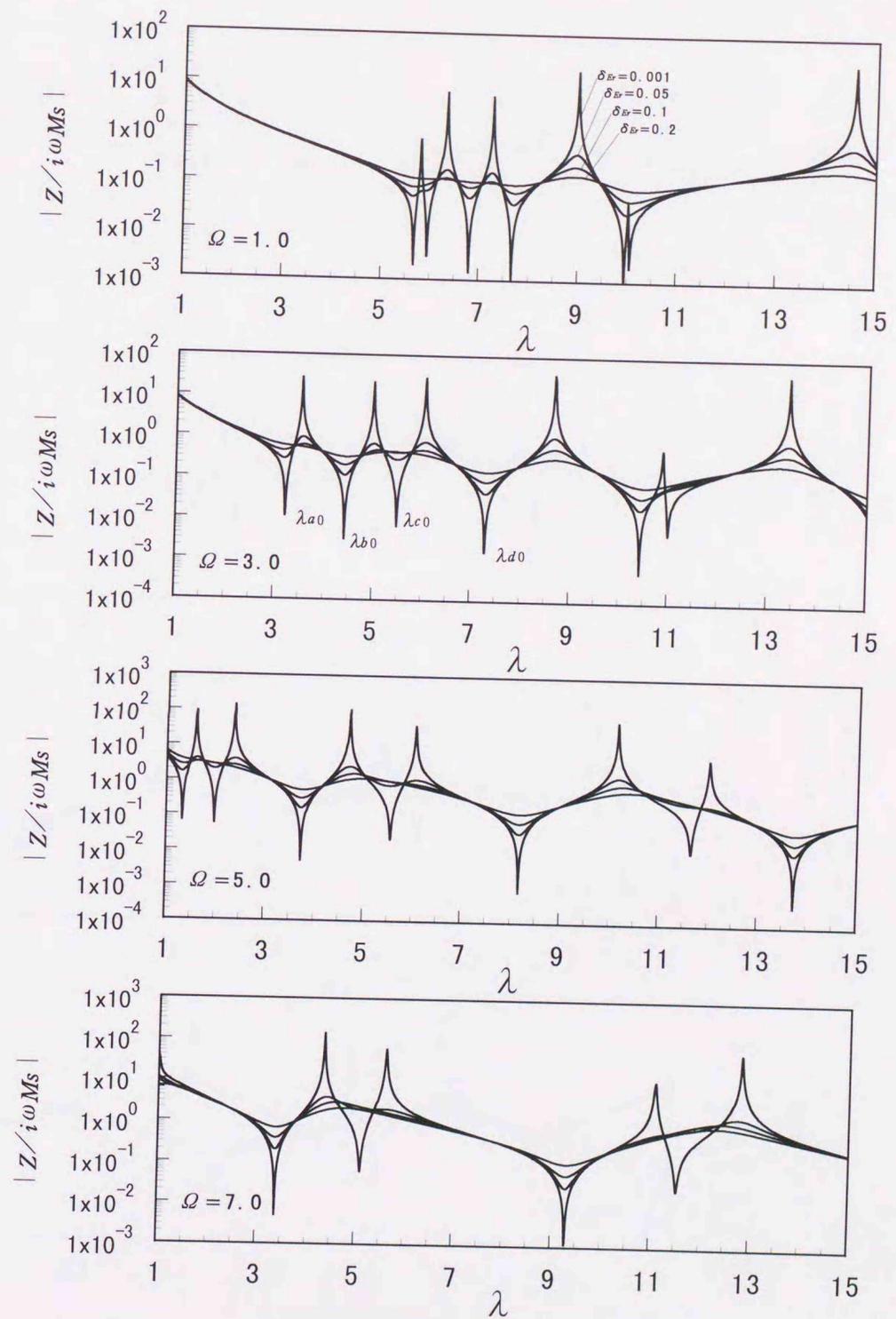


図5.17 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.0$)

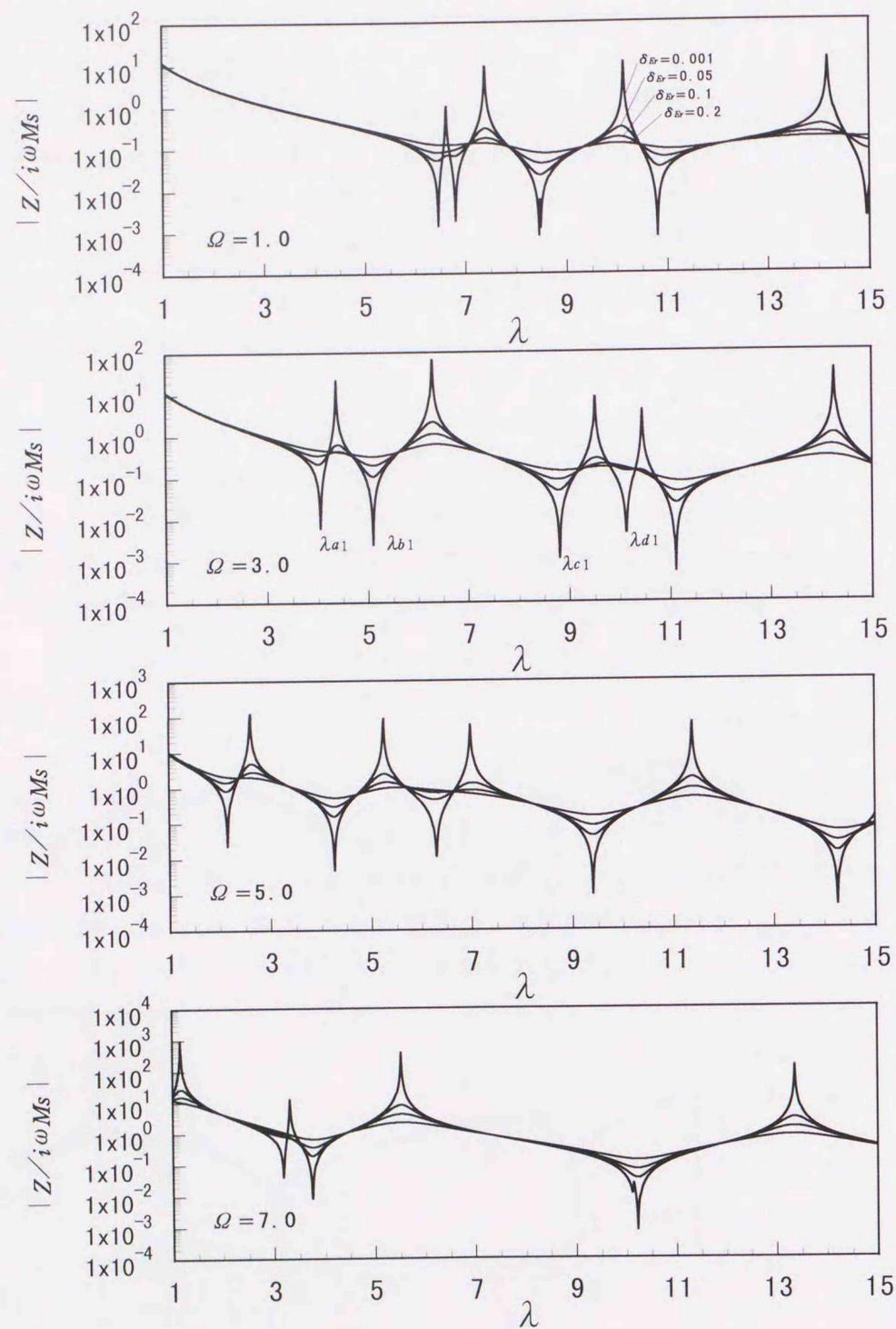


図 5. 18 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.1$)

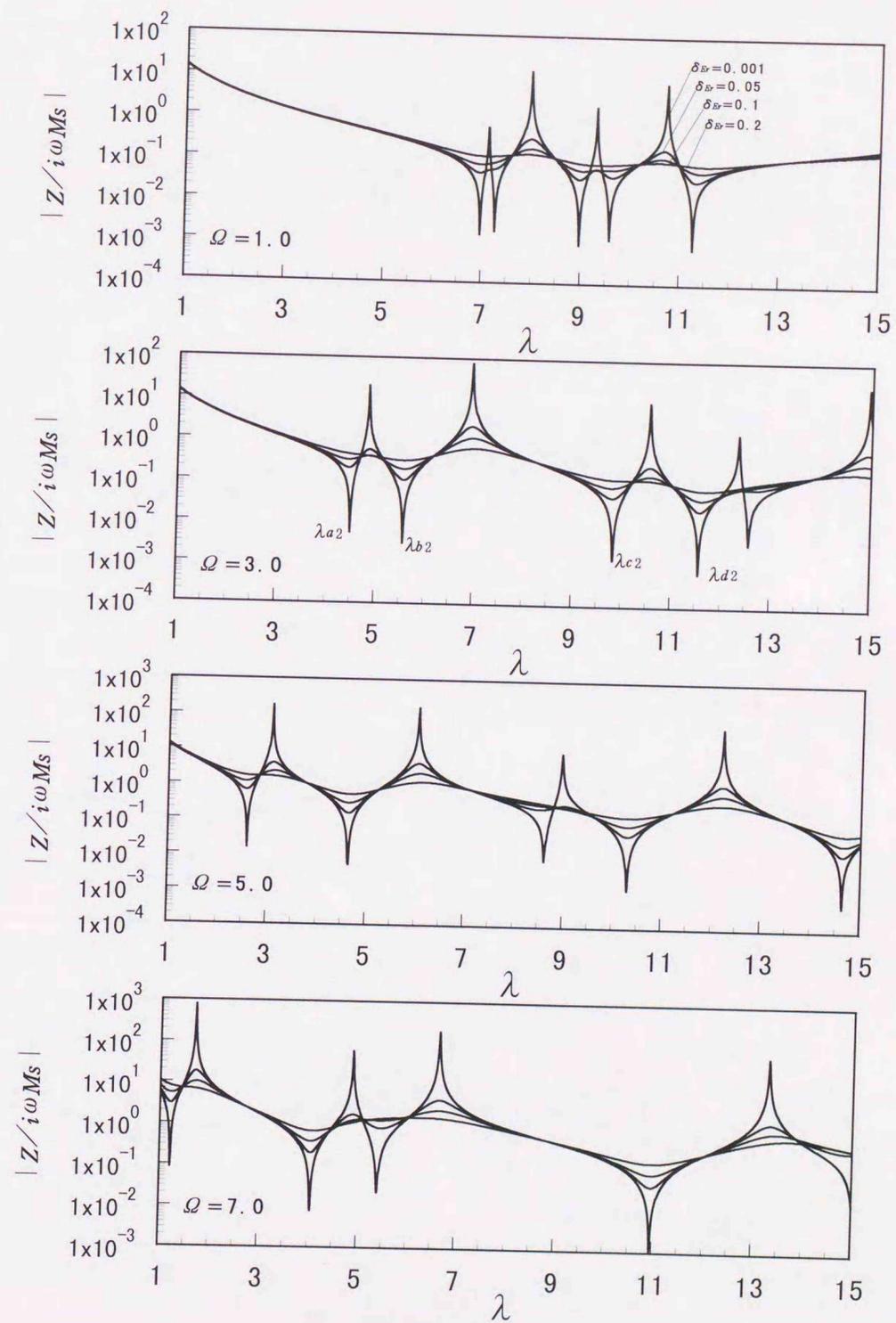


図 5. 19 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.2$)

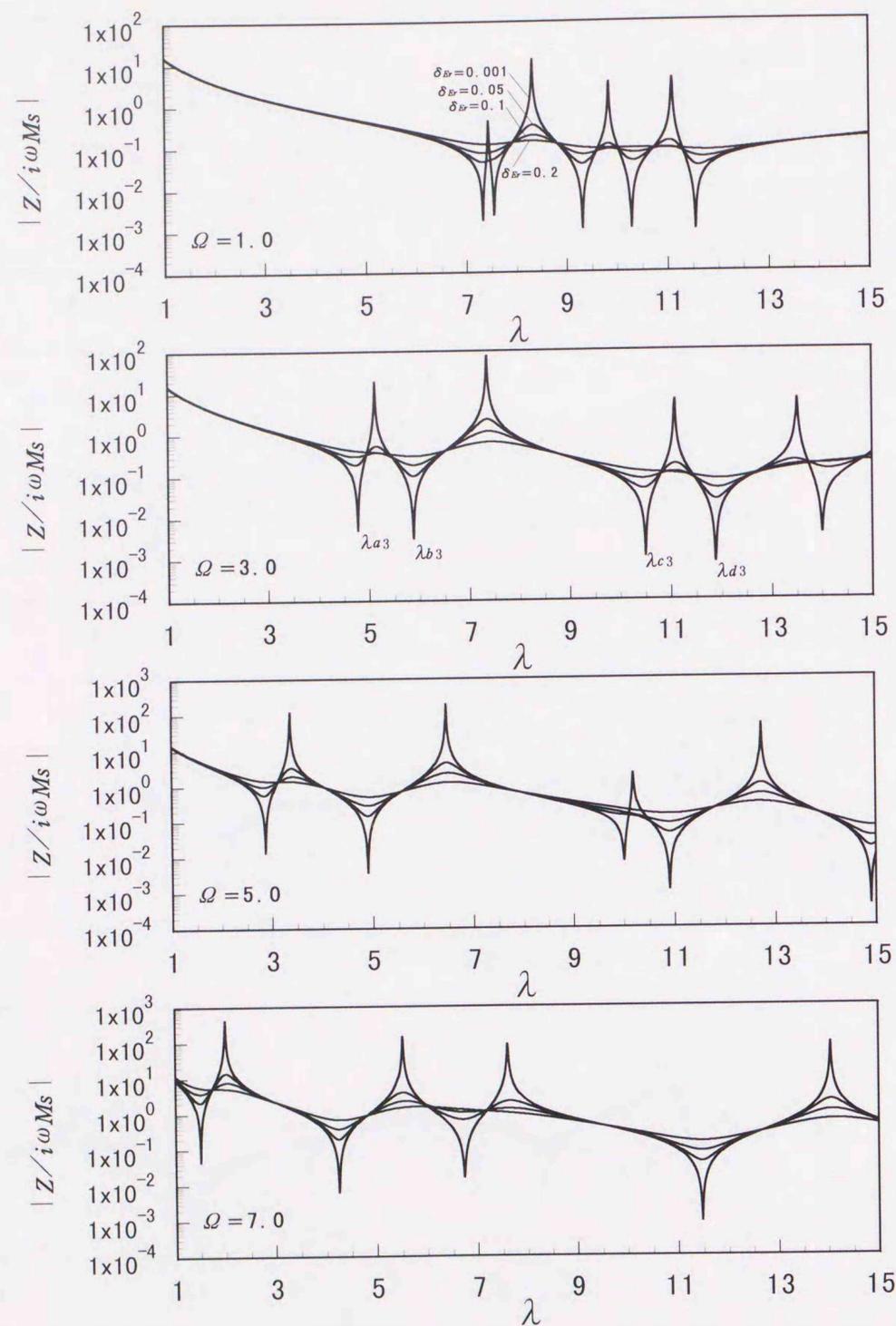


図 5. 20 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.3$)

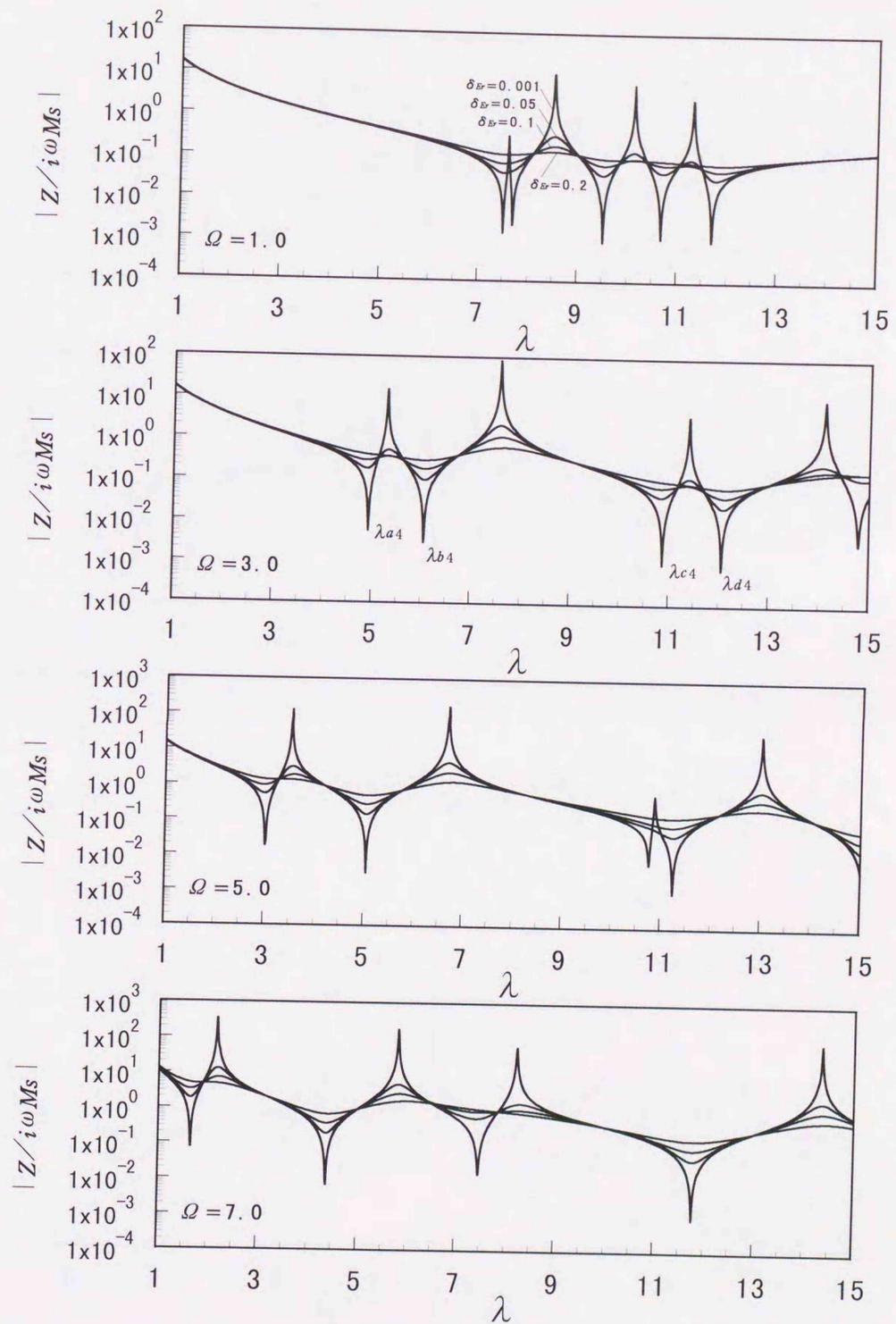


図 5. 21 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.4$)

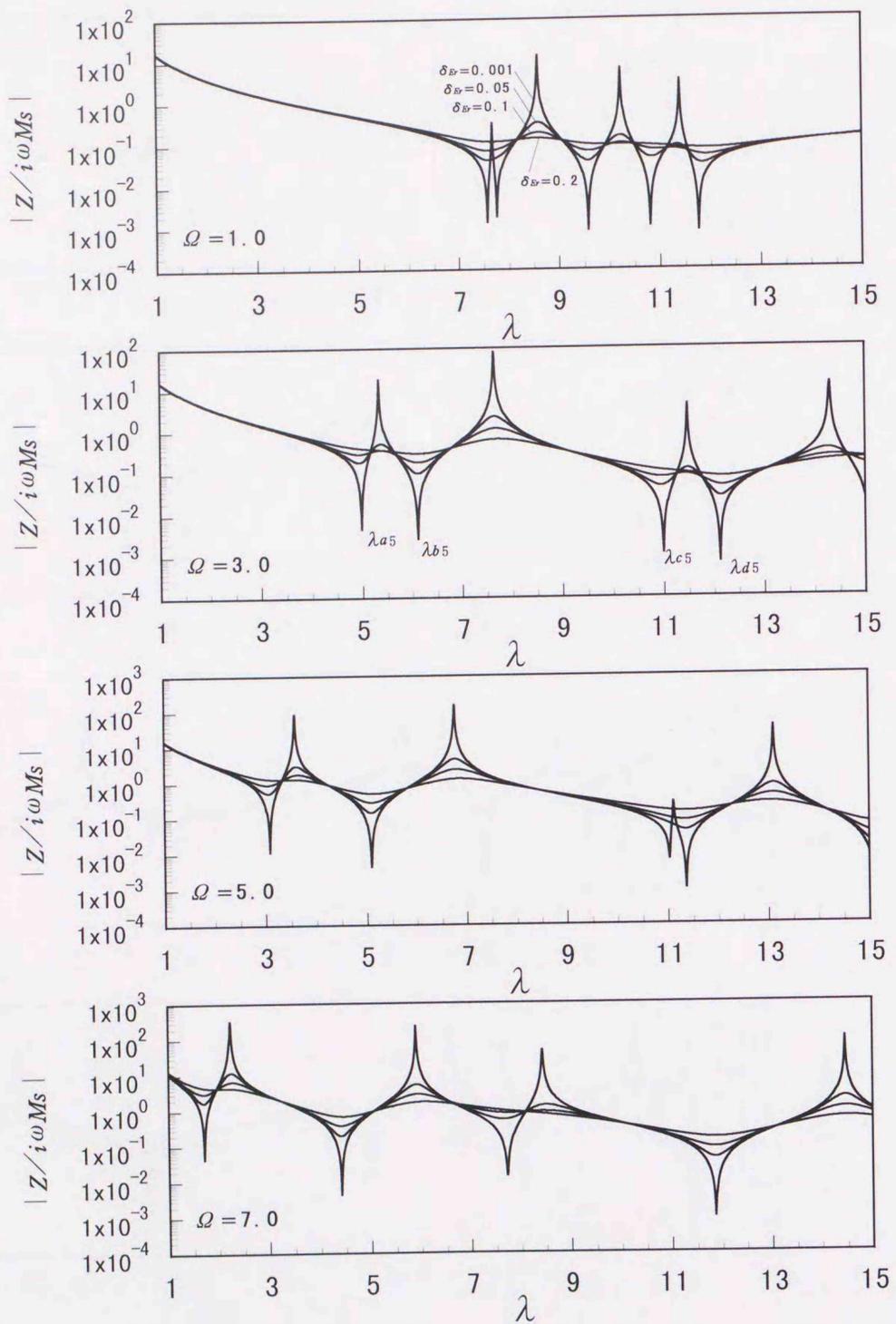


図 5. 22 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.5$)

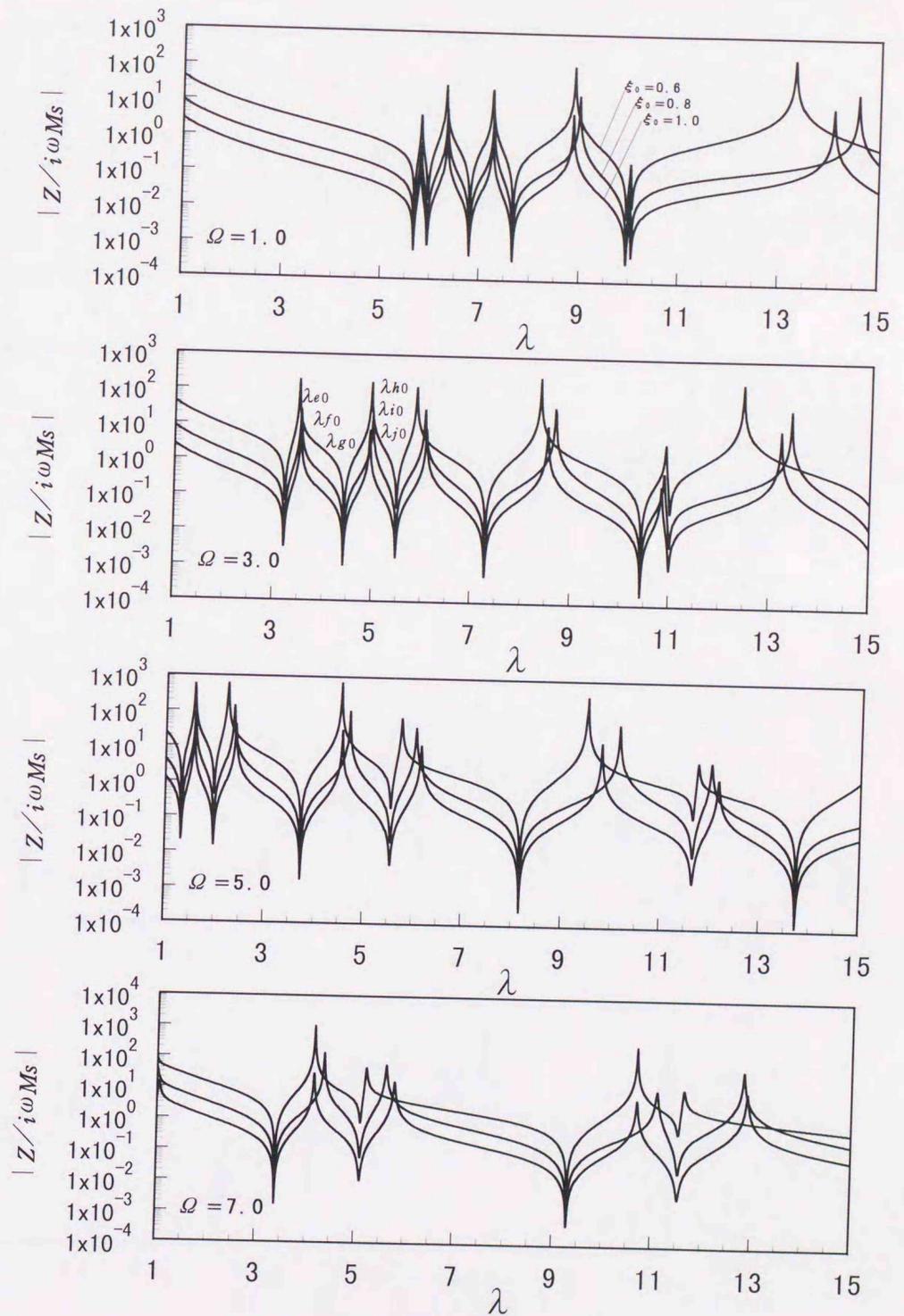


図 5. 23 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.0$)

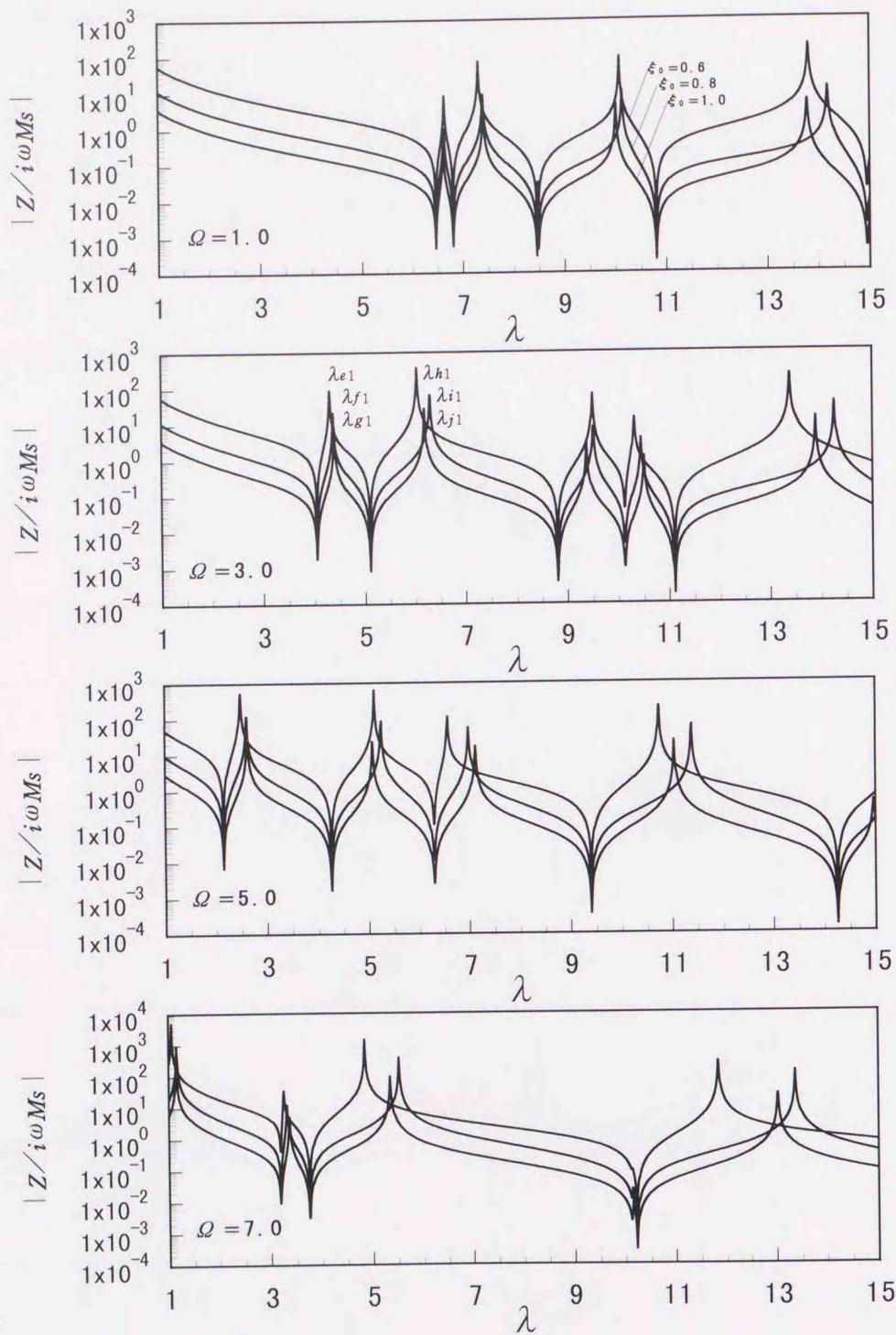


図 5. 24 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.1$)

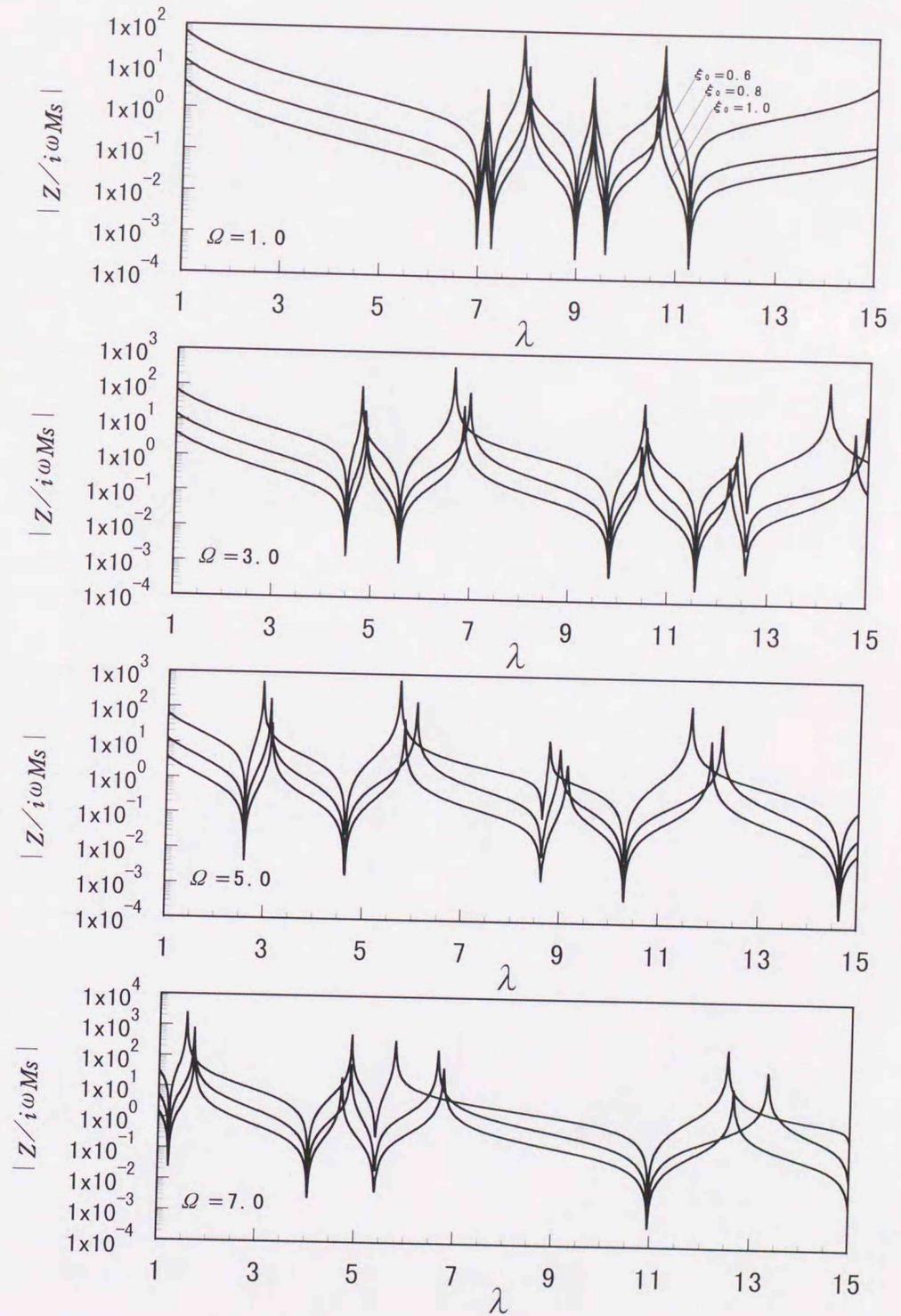


図 5. 25 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.2$)

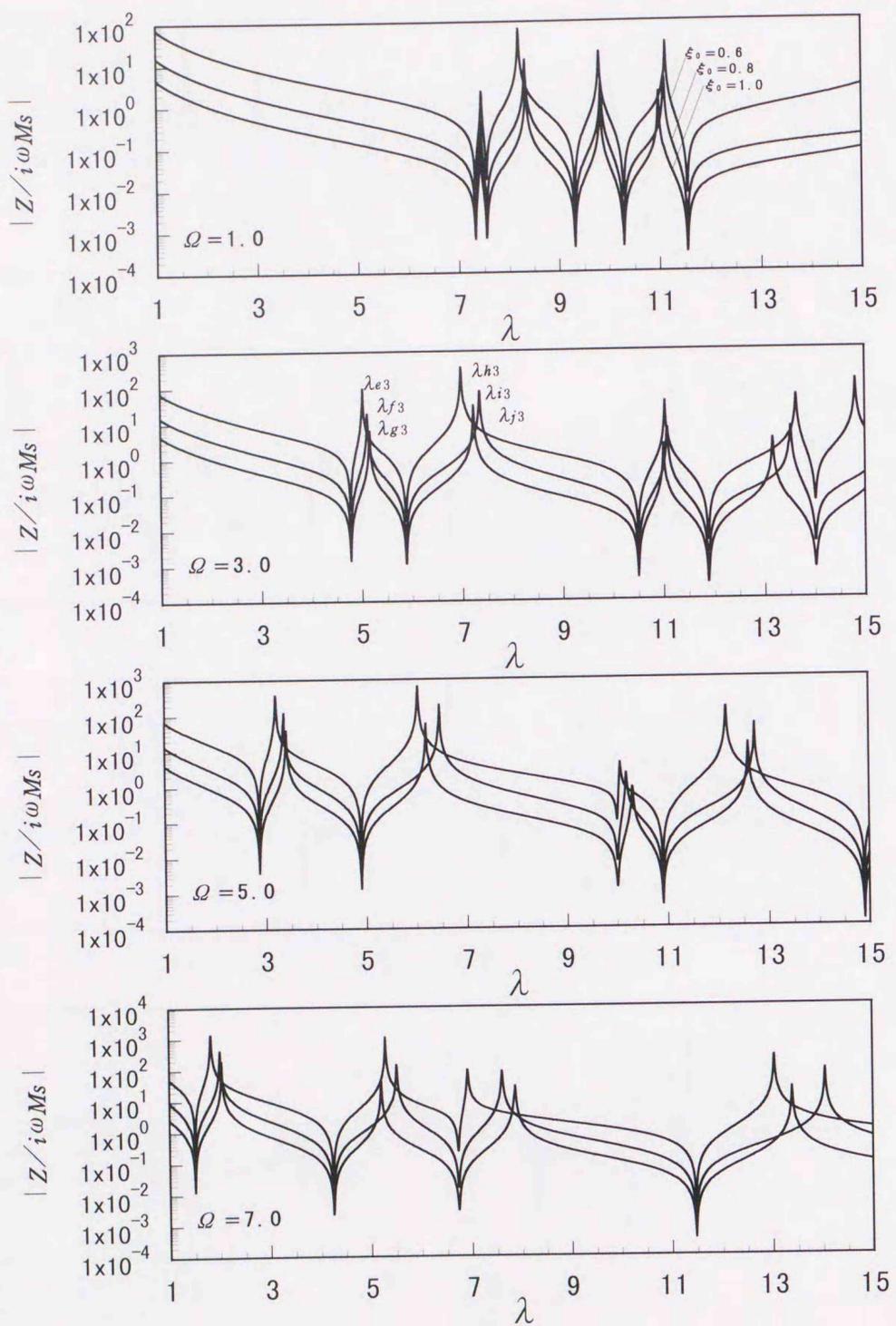


図 5. 26 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.3$)

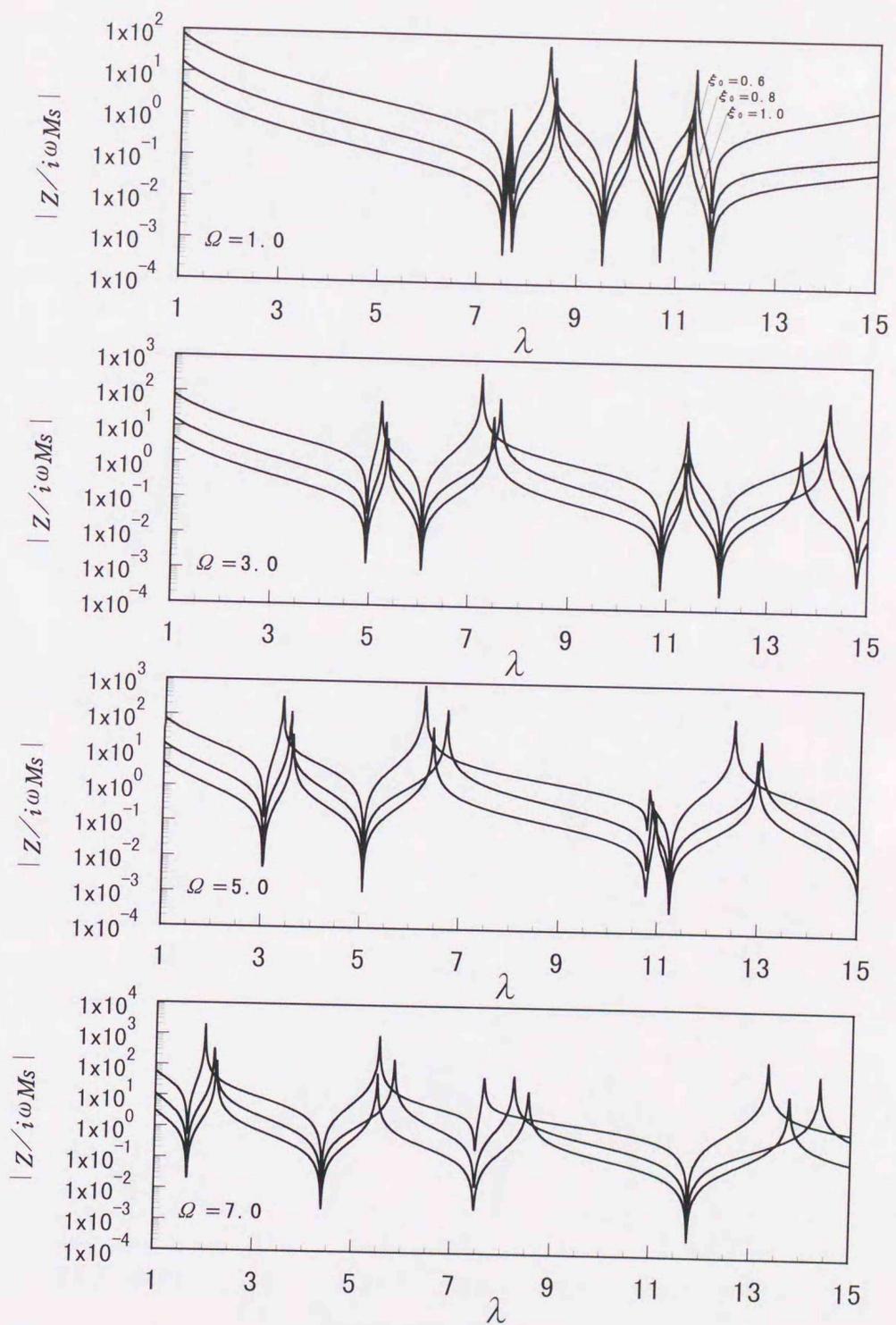


図 5. 27 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.4$)

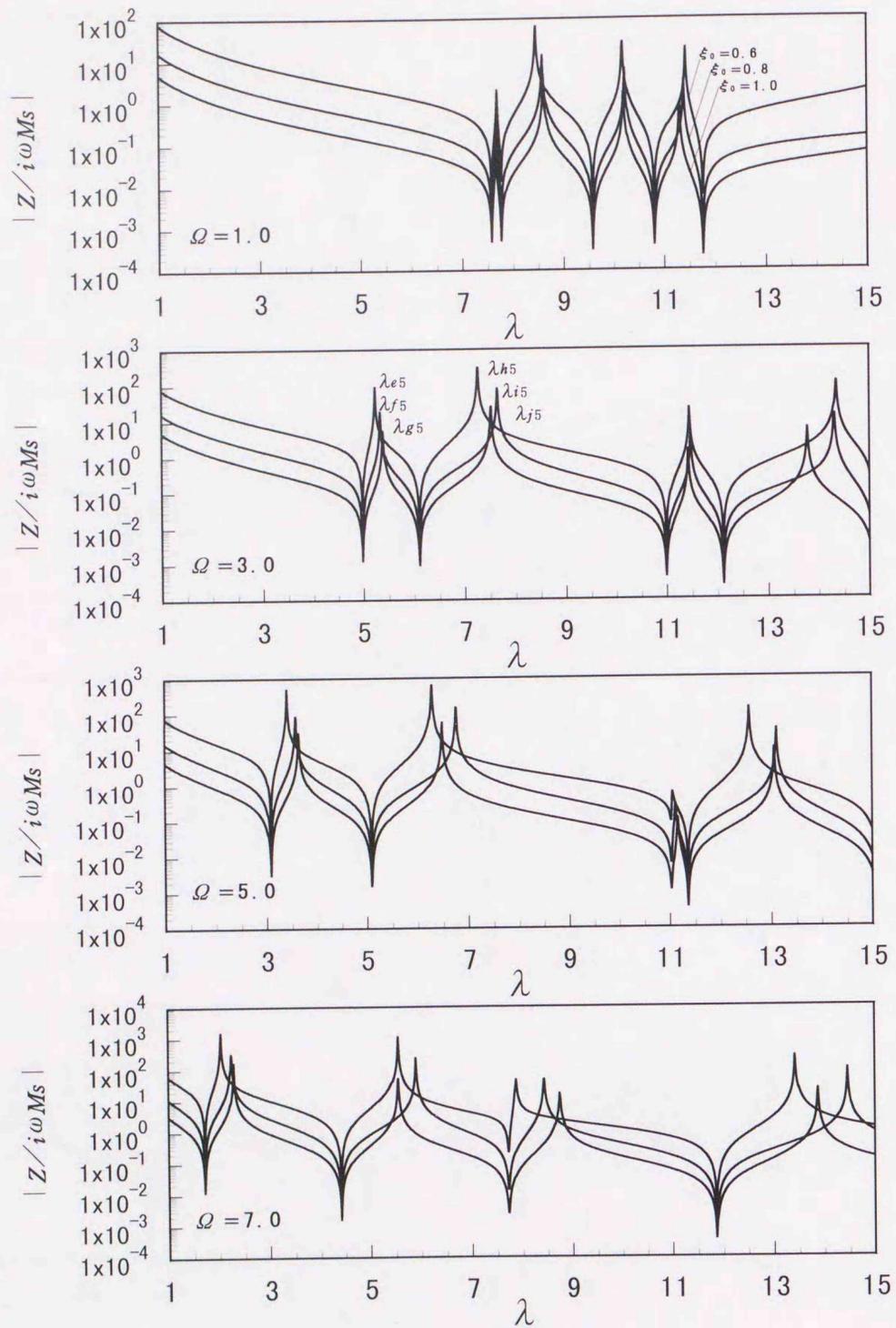


図 5. 28 駆動点インピーダンス ($V_f = 0.5$)

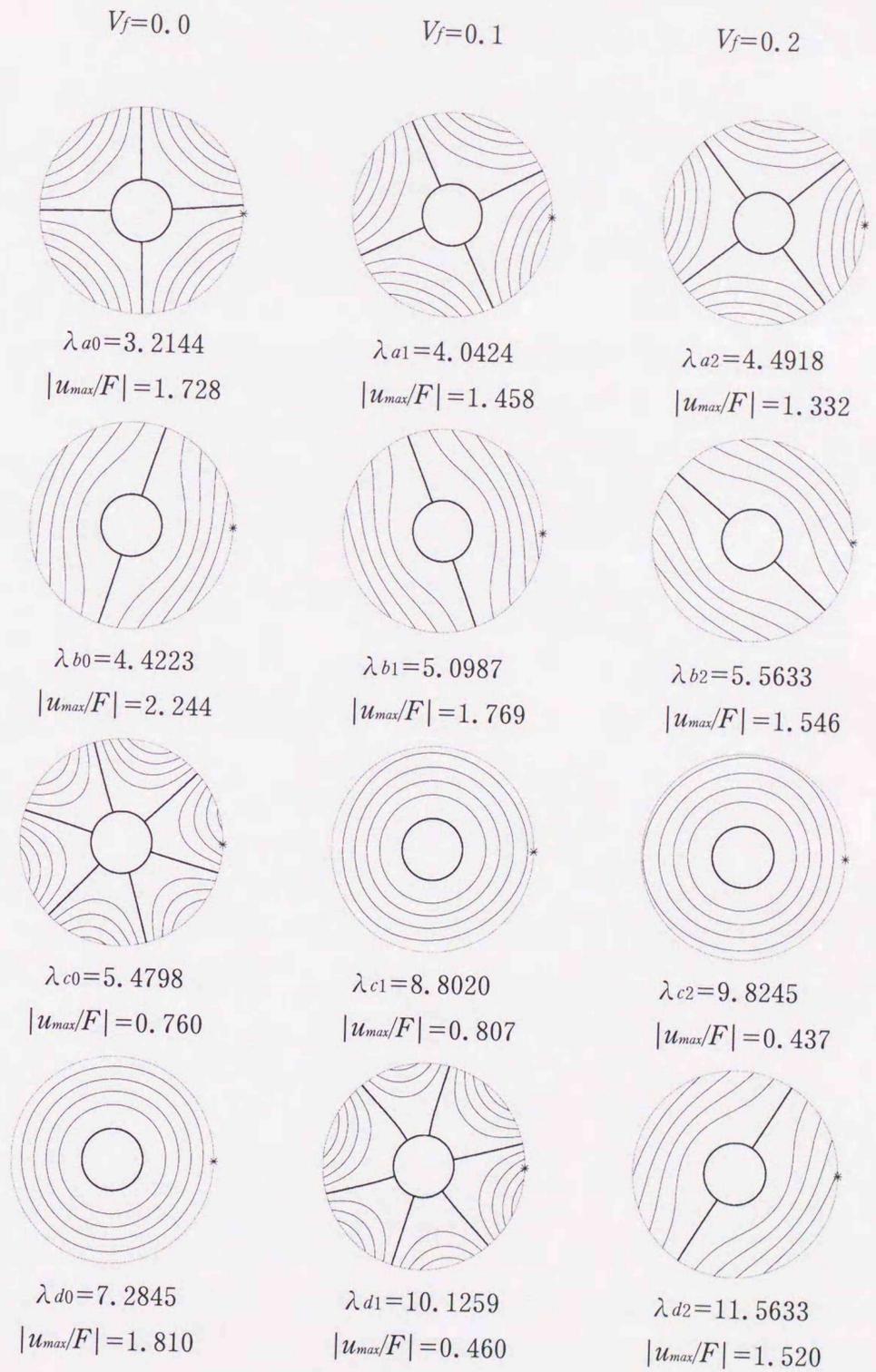


図 5. 29 共振点の振動モード ($\Omega = 3.0$)

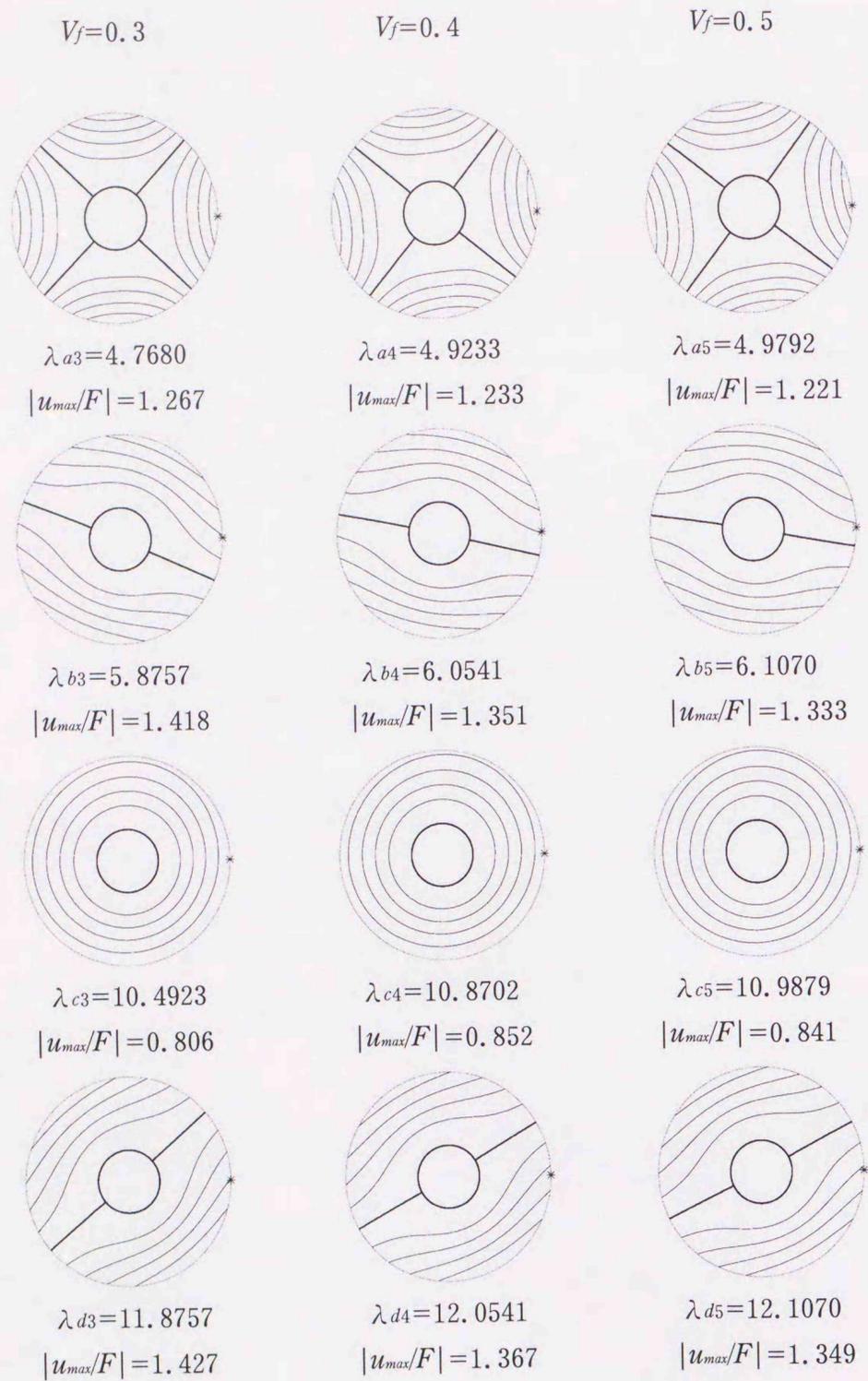


図 5. 30 共振点の振動モード ($\Omega = 3.0$)

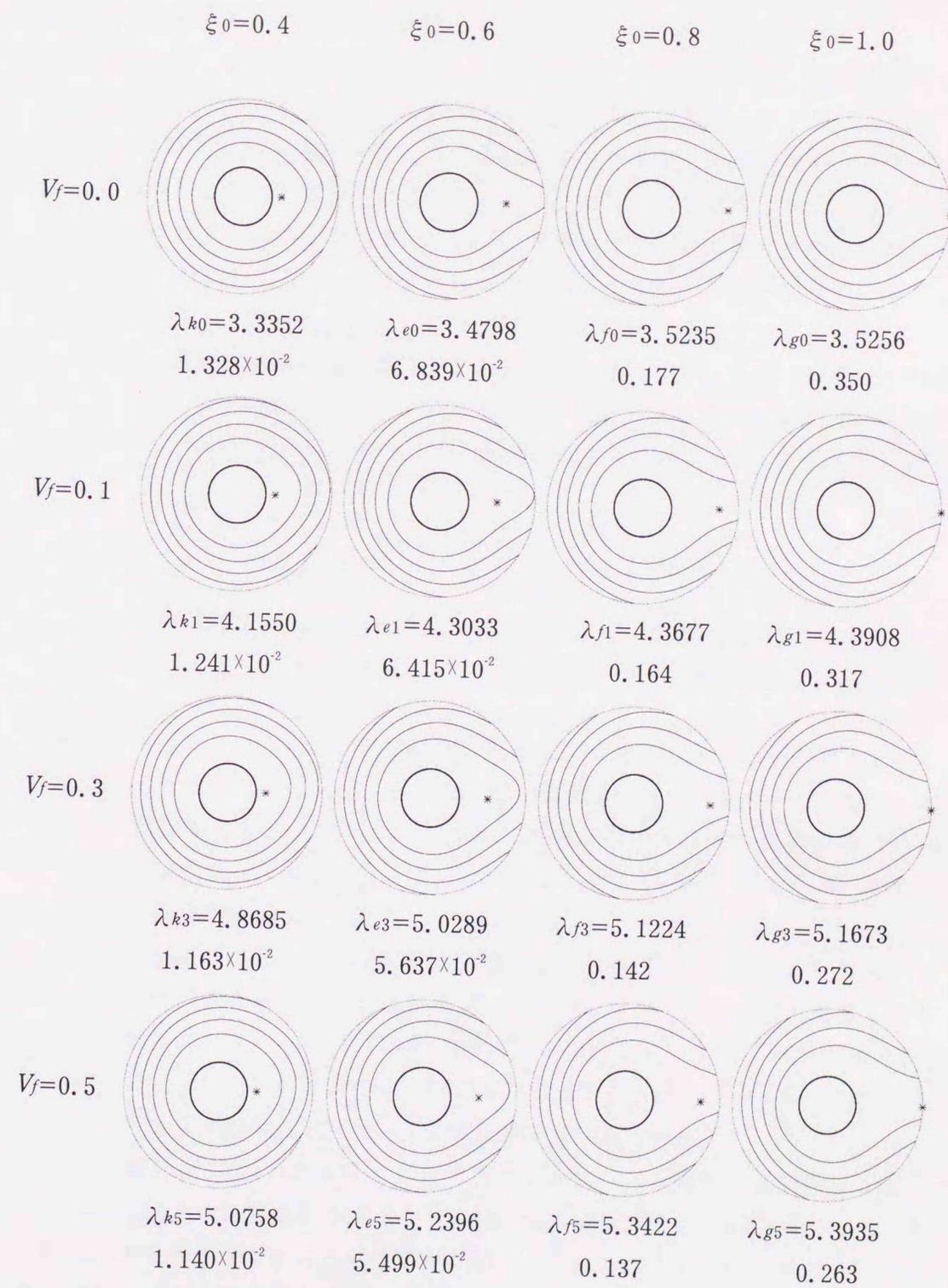


図 5. 31 反共振点の振動モード ($\Omega = 3.0$)

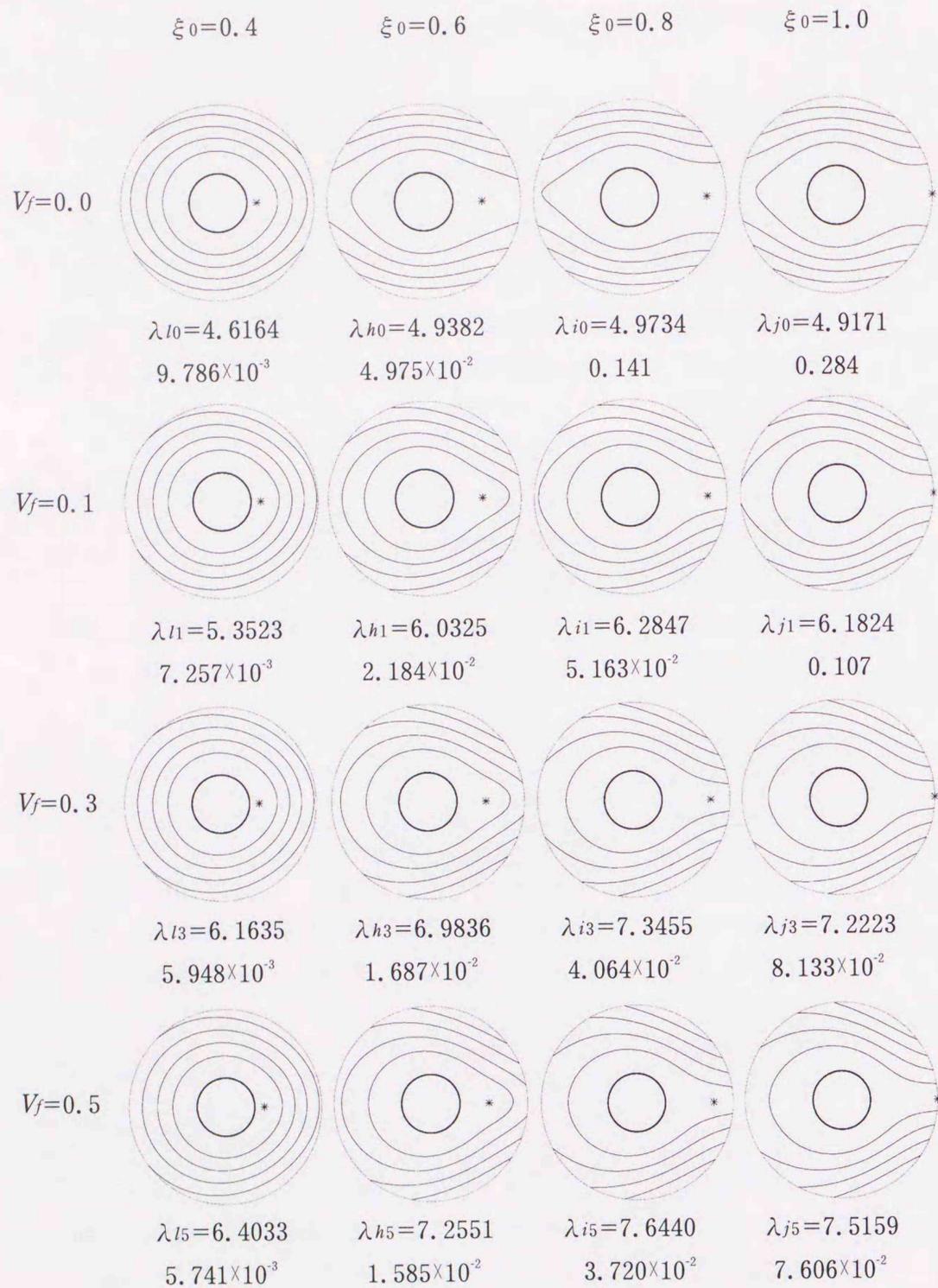


図5.32 反共振点の振動モード ($\Omega=3.0$)

5.5 一定角加速度で回転する場合

5.4節において計算した駆動点インピーダンスと振動モードは、極異方性円板が一定角速度で回転しているときの起振振動数に対する応答として求められた。5.5節においては、極異方性円板の空間に固定された静止座標系上の任意の一点で一定の調和起振力が作用し、角速度が0から一定の角加速度で加速される場合の角速度に対する応答を求める。そして、体積含有率 V_f が異なる場合についてそれぞれ計算する。このように求められた駆動点インピーダンスは時間に関する伝達関数と言え、振動モードはその時刻における瞬間の振動モードとなる。

図5.33～図5.37は起振振動数 $\lambda=2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$ の4つの場合について、それぞれの駆動点インピーダンスを表す。数値計算に用いた各パラメータは式(5.6)に示した値を用いた。また、節直径に関しては、 $L=5$ まで考慮し計算した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3, \quad \eta = 0.3, \quad \alpha = 0.01, 1.0, 2.0 \\ \delta_{Er} = 0.001, \quad \xi_0 = 0.9, \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right.$$

..... (5.6)

各図は、それぞれの起振振動数に対して横軸に角速度 $\alpha\tau$ 、縦軸に無次元化した駆動点インピーダンスを取り、上から順に体積含有率 V_f を大きくしたときのそれぞれの駆動点インピーダンスである。 $V_f=0.0$ の場合は等方性回転円板の場合である。 α が大きくなると角速度が0～12まで達する時間が短縮され、各共振点を通過する際の時間が短くなる。

図5.38～図5.42に図5.33～図5.37の駆動点インピーダンスにそれぞれ対応した極異方性回転円板の最大振幅分布を示す。各図の右縦軸は無次元最大振幅を表す。その他は駆動点インピーダンスの図と同様である。太い実線で示した曲線が $\delta_{Er}=0.001, \alpha=0.01$ のときの最大振幅である。また、図5.33～図5.37で示した $\alpha=0.01$ のときの駆動点インピーダンスを重ねて図示した。

角加速度が $\alpha=0.01$ のときは、各共振点となるピークを通過する時間は $\alpha=1.0$ や $\alpha=2.0$ の場合に比較すると長くなり、ゆっくり通過することになる。そのときの駆動点インピーダンスに現れるピークは、各共振点において鋭く突出している。角加速度の値が $\alpha=1.0$ や $\alpha=2.0$ と大きくなるにつれて、それらのピークは鈍化し、その値も小さくなる。等方性回転円板と同様に角加速度が大きき場合には、各共

振点を通過する際に円板は共振状態まで達せずに通過しているためと思われる。また、それぞれの一定起振振動数に対して、体積含有率 V_f が大きくなると、第4章4.4節で求めた等方性回転円板の場合と比較し、共振点に対応するピークの数が少なくなる。そして、比較的安定した領域が多く現れてくる。

最大振幅分布は、駆動点インピーダンスの共振点に対応して、その値が大きい方へピークを持つ曲線として現れる。これら最大振幅分布からも解るように、体積含有率 V_f が大きくなると、図示した $\alpha\tau$ での範囲内で、最大振幅のピーク数が減少する。そして、安定した領域が非常に多く現れることが最大振幅分布によっても解る。

極異方性回転円板の応答は図5.17～図5.22に示した一定角速度に対する起振振動数の応答より、図5.33～図5.37に示した一定起振振動数に対する角速度の応答の方がより共振点のピーク数が少なくなり、安定した領域が多く存在している。

図5.43と図5.44は、起振振動数 $\lambda = 8.0$ のときに現れる $(0, 2)$ 共振点と $(0, 4)$ 共振点を通過する際の瞬間の振動モードである。それぞれに対して角加速度 α と体積含有率 V_f を変え図示した。数値計算に用いた各パラメータは式(5.7)に示した値を用いた。また、節直径に関しては、 $L=5$ まで考慮し計算した。各振動モード図の左上に回転円板の最大振幅分布のピークから共振点となる角速度 $\alpha\tau$ の値を求め、記入した。また、右下にその振動モードでの最大振幅を記入した。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 0.3 \quad , \quad \eta = 0.3 \quad , \quad \alpha = 0.1, 1.0, 3.0, 5.0 \\ \delta_{Er} = 0.001 \quad , \quad \xi_0 = 0.8 \quad , \quad \phi_0 = 0.0 \end{array} \right.$$

..... (5.7)

これらの図より角加速度の影響は、それぞれの体積含有率の値に対して現れる振動モードについて第4章図4.31で示した等方性回転円板の場合と同様である。角加速度が大きくなると、共振点を通過する瞬間の振動モードは、明確な固有振動モードにはならず、共振状態に至る前に共振点を通過する。図5.44に示した $(0, 4)$ 共振点での振動モードでは $\alpha=0.1$ の場合でも4本の節直径が完全な形では現れず、不明瞭な振動モードとなっている。そして、振動モードが崩れていくと同様に、最大振幅の値も減少していく。体積含有率 V_f の値を大きくし、極

異方性の影響が大きくなると、節直径数の少ない $(0, 2)$ 共振点での振動モードは、角加速度が比較的小さい $\alpha=0.1$ の場合において、ほぼ正確な $(0, 2)$ モードの固有振動モードで共振点を通過する。それに対して、節直径数が多い $(0, 4)$ 共振点モードにおいては、その振動モードはさらに崩れ、 $(0, 4)$ モードの固有振動モードまで成長せず、その共振点を通過する。そして、その共振点となる角速度 $\alpha\tau$ の値は大きな値へと変化する。このように、極異方性の影響は、節直径数の比較的少ない固有振動モードに対しては、 V_f の値を大きくしても現れる振動モードは、あまり崩れずその固有振動モードで振動し、共振点となる角加速度の値はあまり変化しない。それに対して、節直径数の多い固有振動モードは共振時の固有振動モードと比較すると不明瞭な振動モードとなる。そして、その共振点となる角速度の値は大幅に増加する。また、最大振幅は、どちらの場合においても減少する。

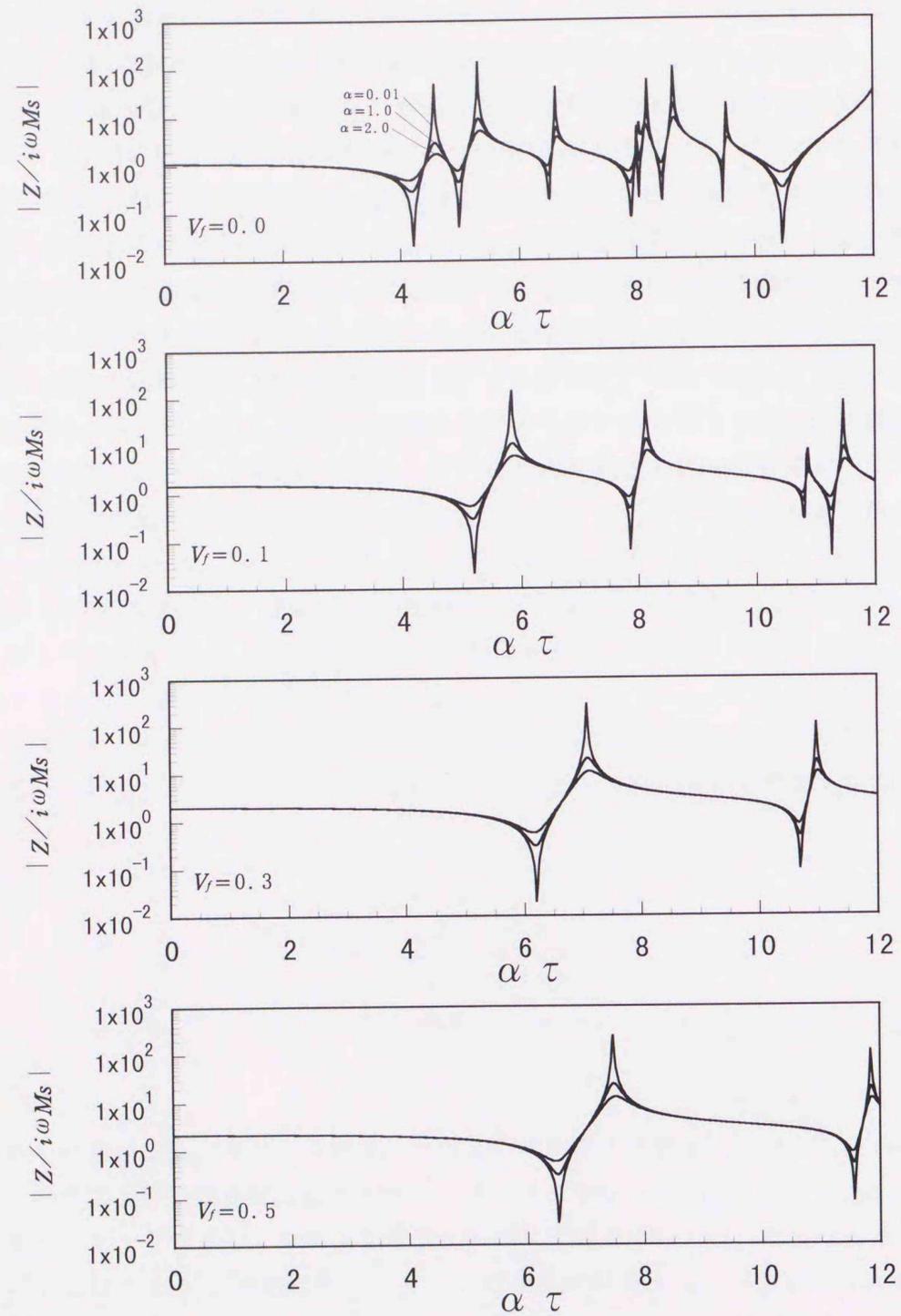


図 5. 33 駆動点インピーダンス ($\lambda=2.0$)

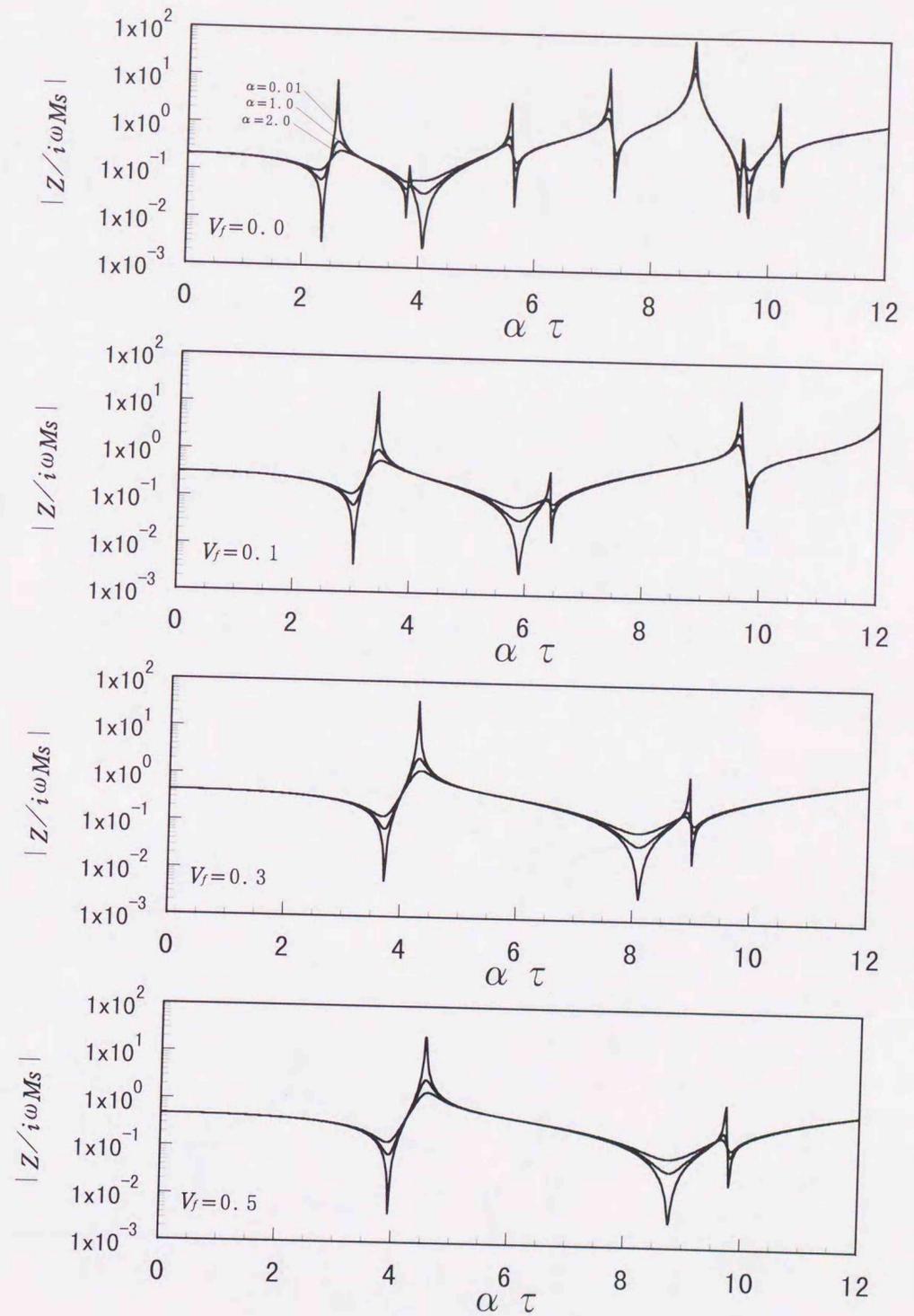


図 5. 34 駆動点インピーダンス ($\lambda=4.0$)

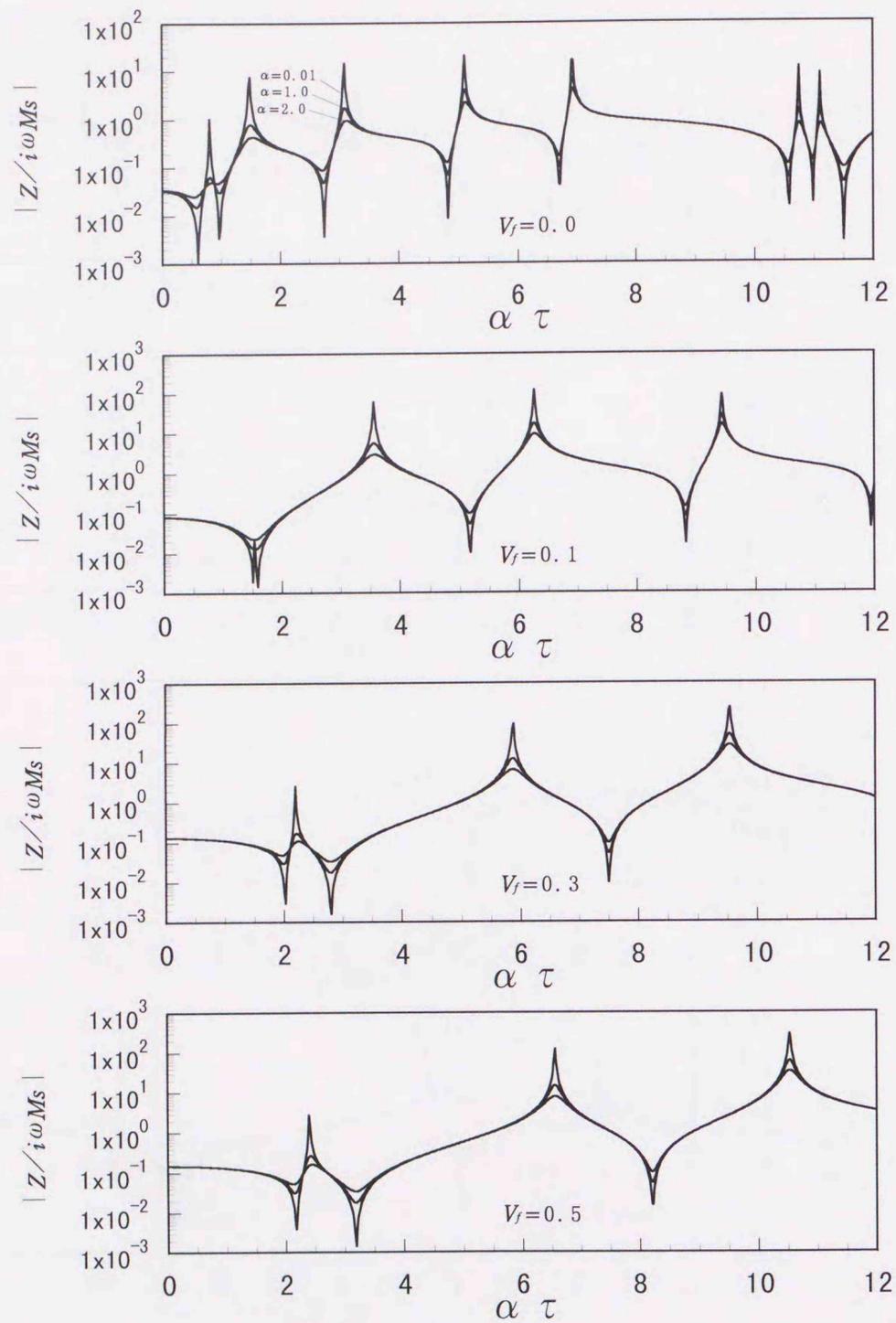


図 5. 35 駆動点インピーダンス ($\lambda = 6.0$)

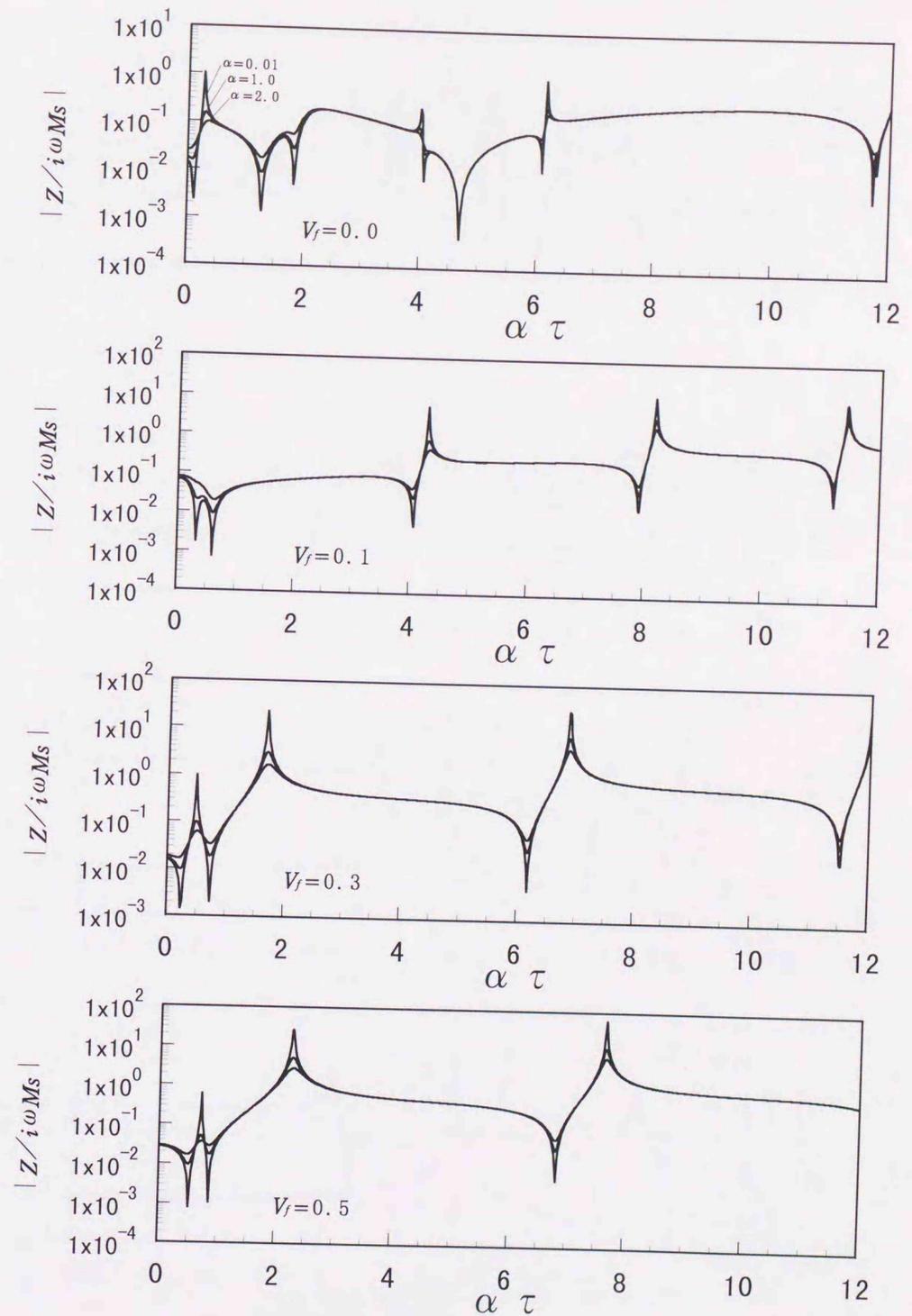


図 5. 36 駆動点インピーダンス ($\lambda = 8.0$)

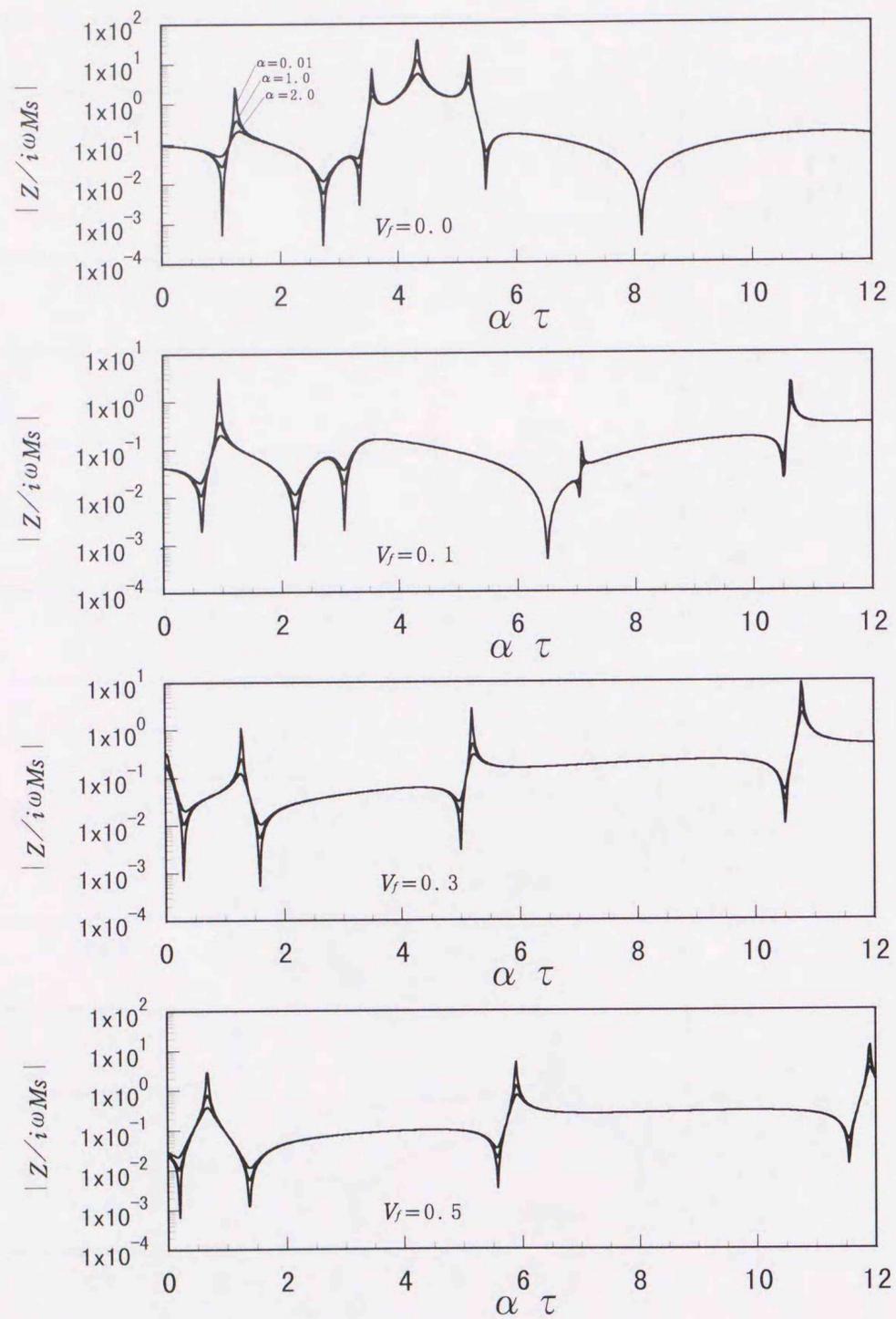


図5. 37 駆動点インピーダンス ($\lambda = 10.0$)

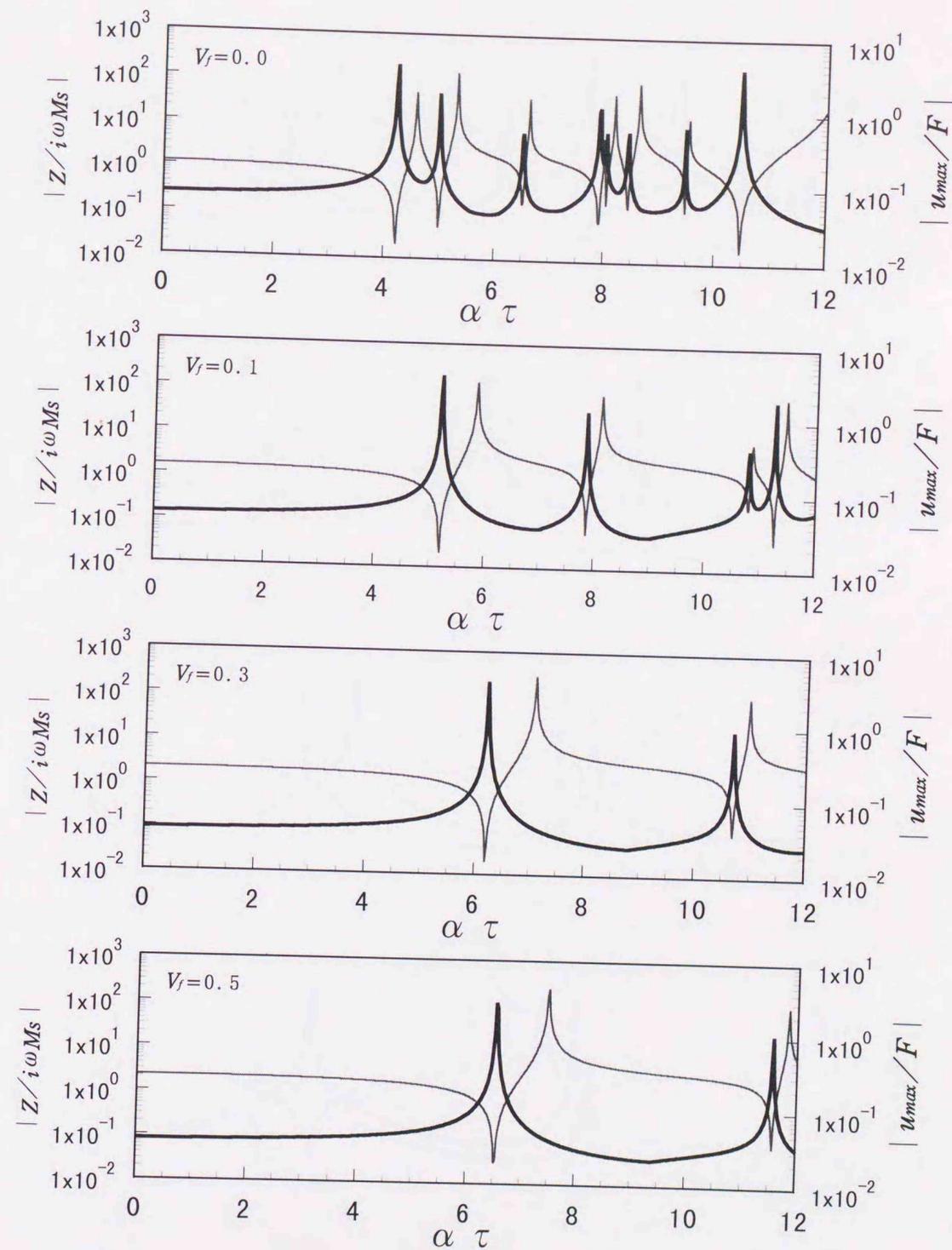


図5. 38 最大振幅分布 ($\lambda = 2.0$)

—— : 最大振幅 - - - : 駆動点インピーダンス

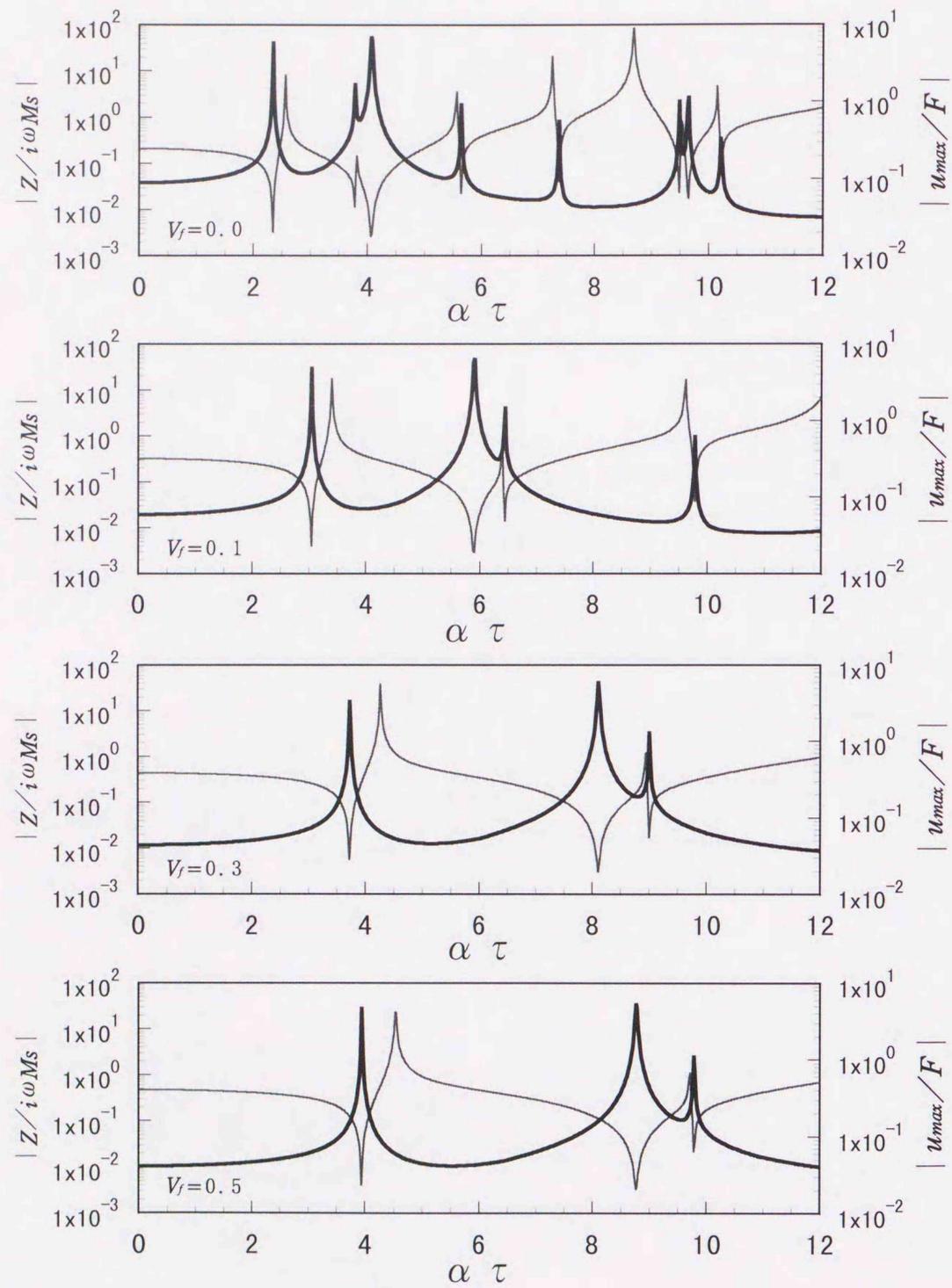


図 5. 39 最大振幅分布 ($\lambda = 4.0$)

— : 最大振幅 - - - : 駆動点インピーダンス

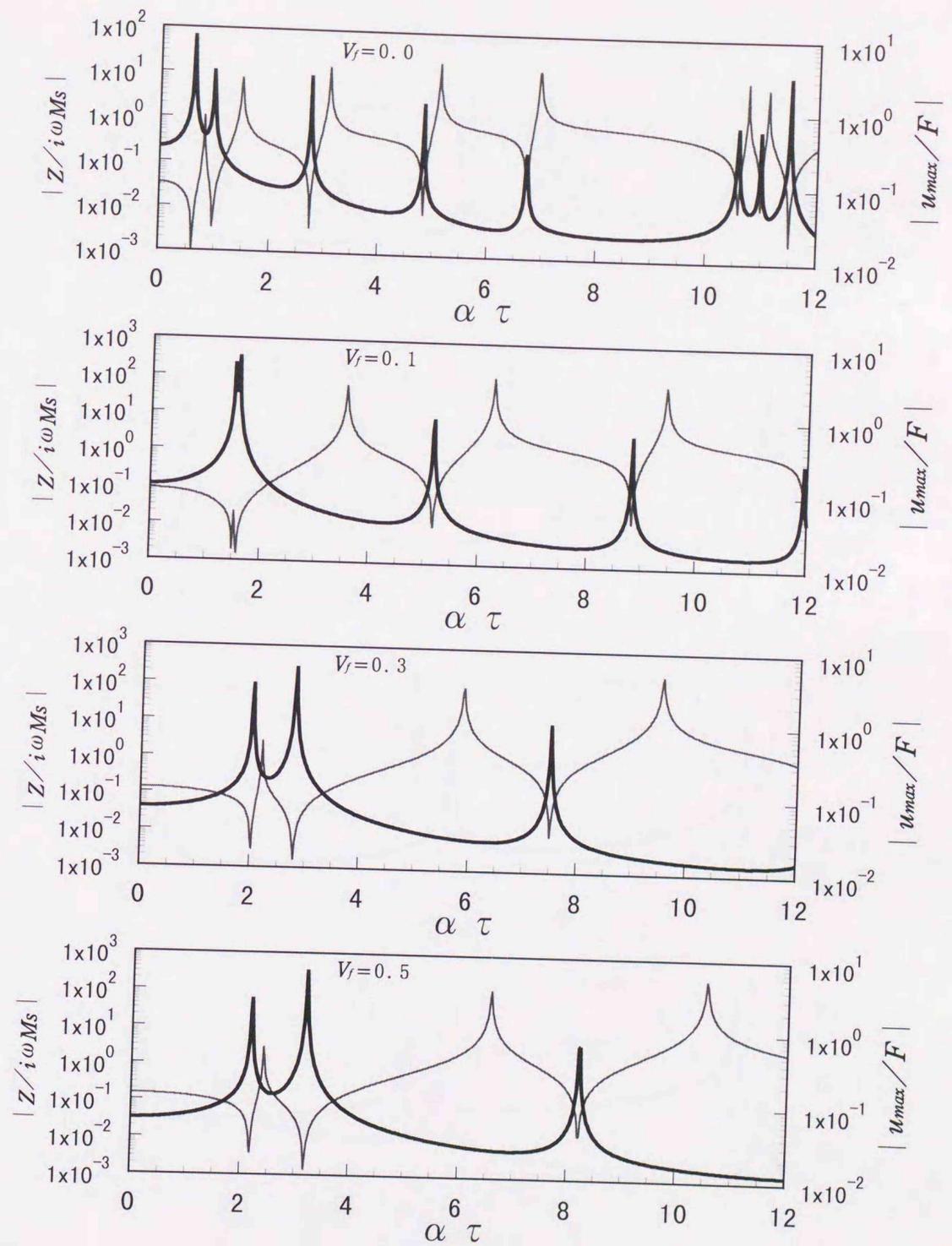


図 5. 40 最大振幅分布 ($\lambda = 6.0$)

— : 最大振幅 - - - : 駆動点インピーダンス

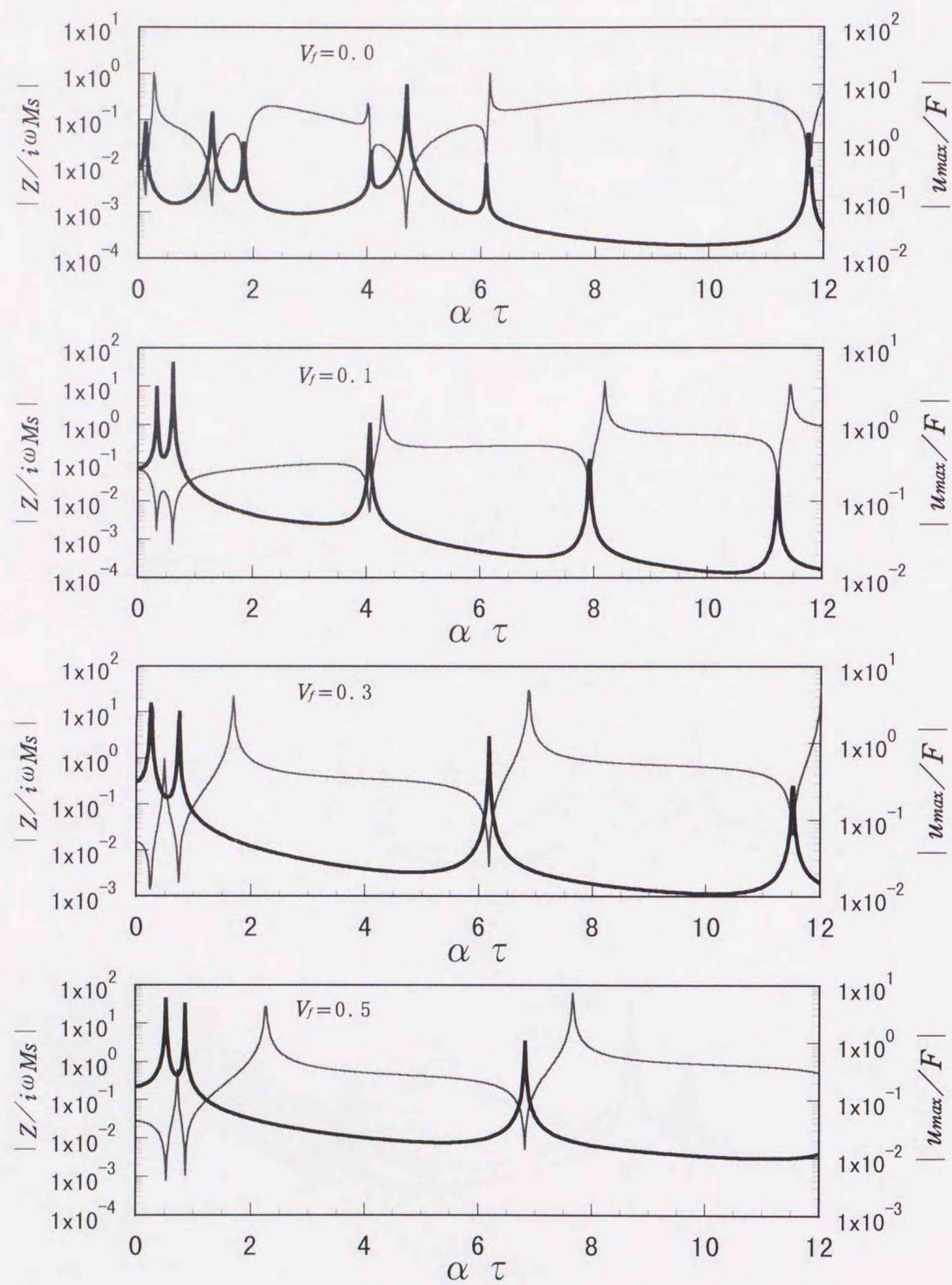


図 5. 41 最大振幅分布 ($\lambda = 8.0$)

— : 最大振幅 — : 駆動点インピーダンス

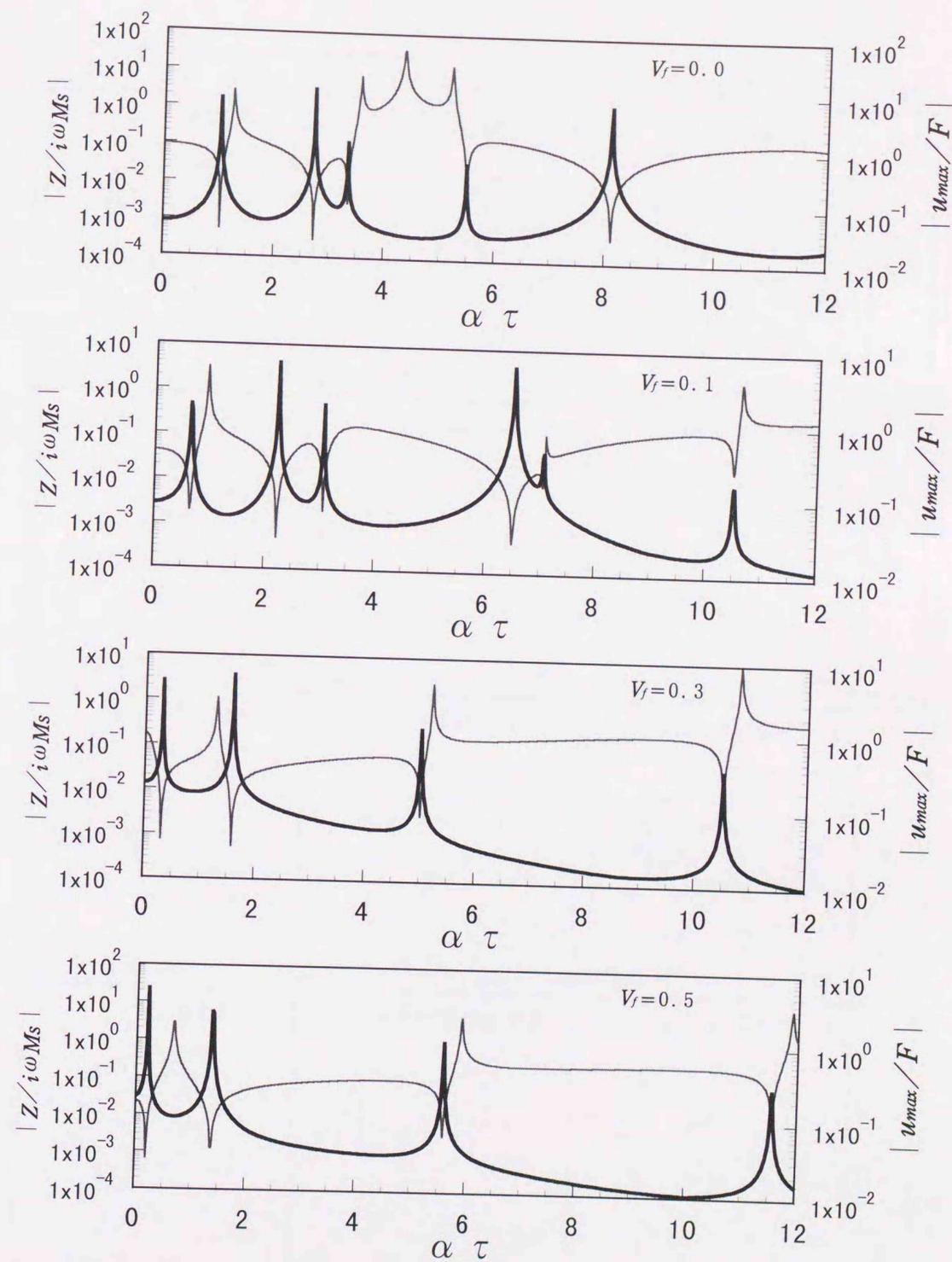


図 5. 42 最大振幅分布 ($\lambda = 10.0$)

— : 最大振幅 — : 駆動点インピーダンス

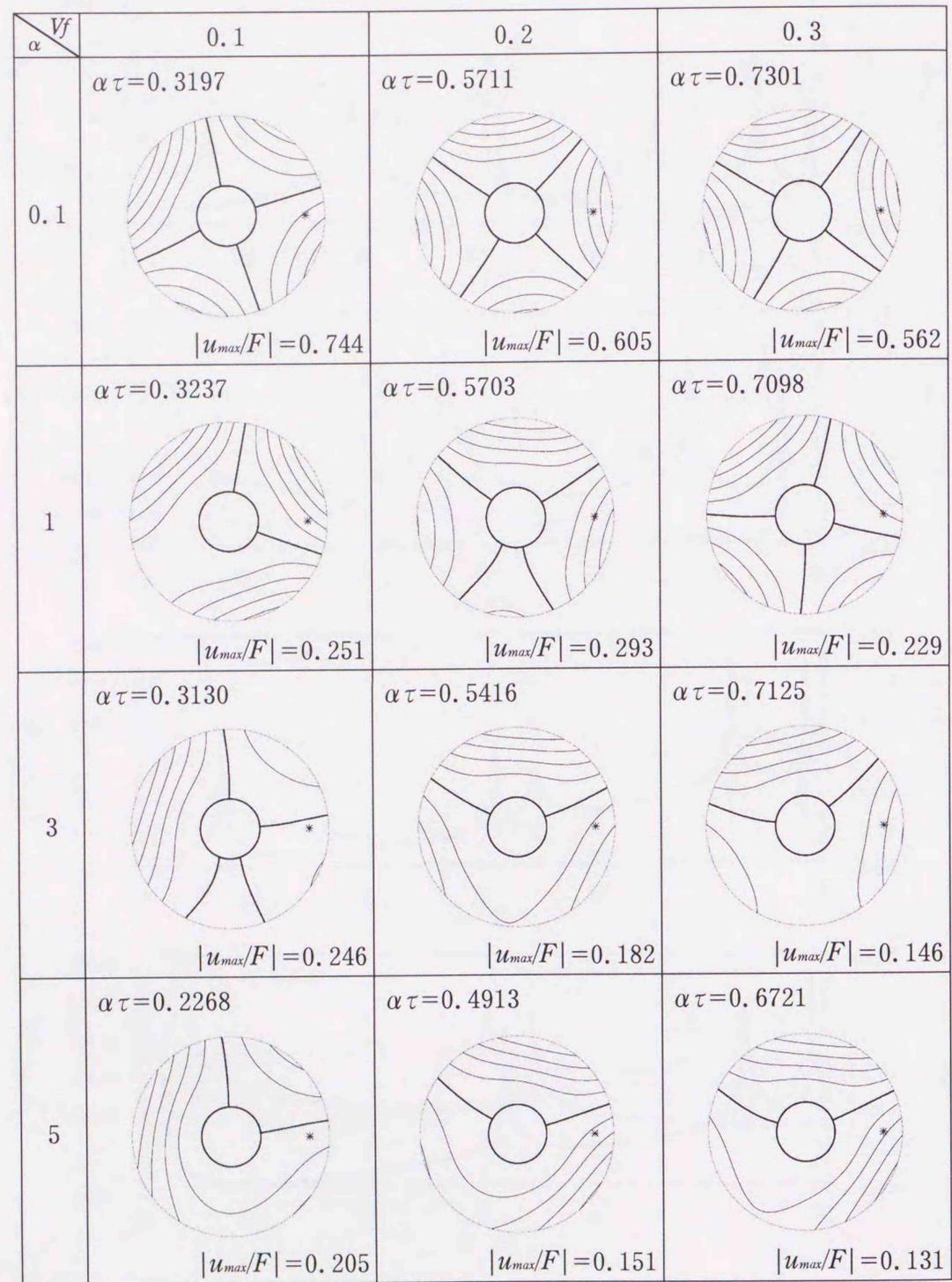


図 5. 43 (0, 2) 共振点の振動モード ($\lambda=8, 0$)

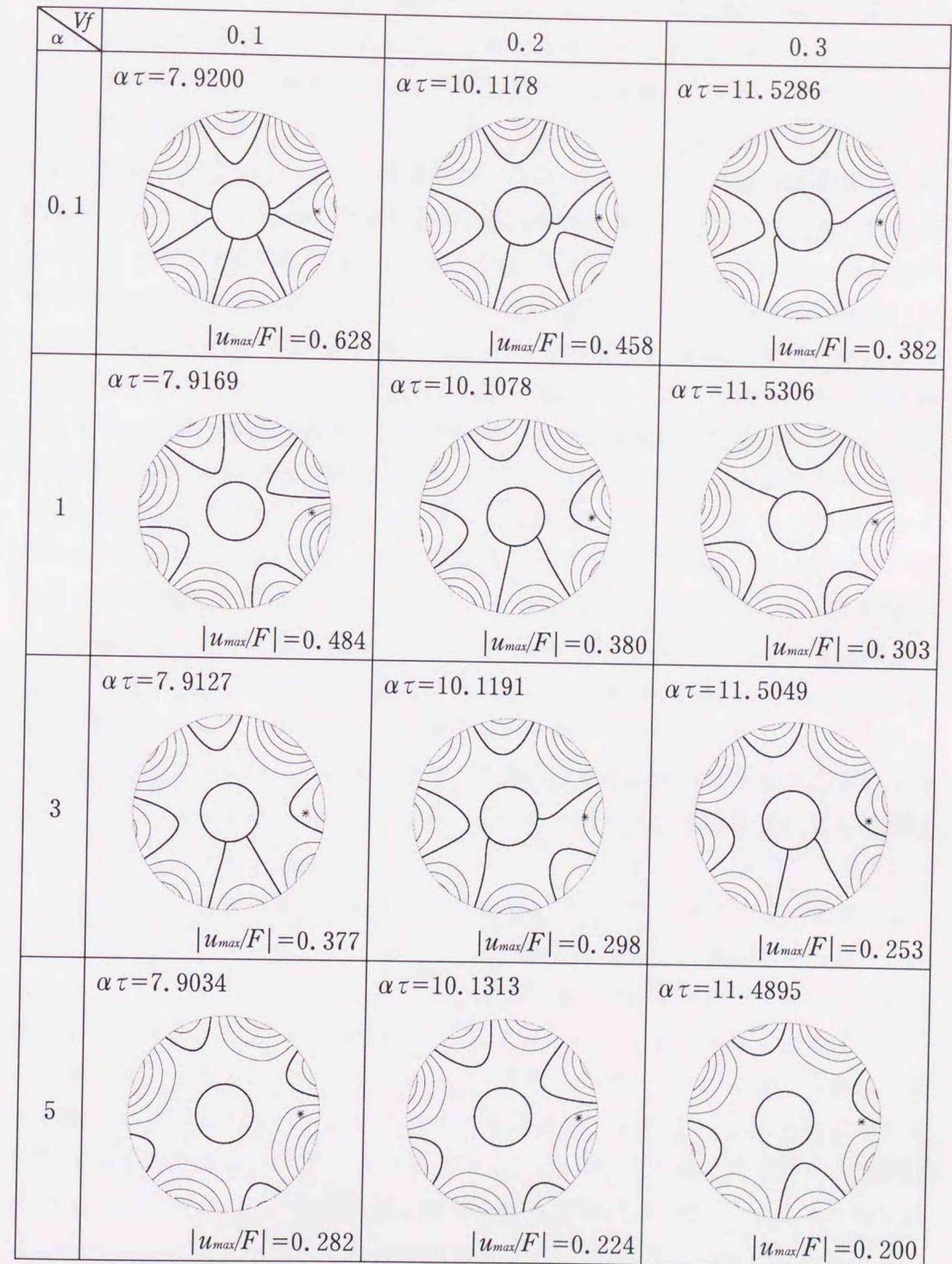


図 5. 44 (0, 4) 共振点の振動モード ($\lambda=8, 0$)

5.6 第5章の結果

第5章においては、第3章において導出した極異方性回転円板の各基礎式を用いて数値計算を行った。極異方性円板として、ガラス繊維とエポキシ樹脂で成形された円周方向強化繊維材を想定することにより、円板に含まれるガラス繊維の体積含有率をパラメータとして、極異方性の影響を表した。そして、無次元固有振動数、駆動点インピーダンス、振動モード等を計算し図示した。その結果、体積含有率を大きくし、極異方性の影響が強くなると、節直径数の少ない振動モードの固有円振動数はあまり変化しない。それに対して、節直径数が多い振動モードの固有円振動数は高い値となる。さらに、危険速度も高くなることより、固有振動数曲線間の間隔が広くなり安定な領域が広範囲に現れるようになる。また、角速度一定の場合と起振振動数一定の場合のそれぞれの駆動点インピーダンスを、体積含有率を変えそれぞれ求めた。これらの応答より明らかなように、等方性から極異方性とすることによって、安定して回転する領域が増えることが解る。本章にて計算した一般的、及び工学的に関係すると考えられる起振振動数と回転数の範囲内において、現れる振動モードは極異方性の影響が大きくなると、 $(0,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(0,2)$ など節直径数の少ない振動モードのみが存在するようになり、節直径数の多い振動モードは現れなくなる。

以上のことより、回転円板に極異方性を導入することにより、等方性回転円板に比較すると安定した領域が多く存在するようになる。このように極異方性回転円板は工学的に有用な振動特性を有すると言える。

第6章 実験による理論の検証

6.1 実験概要

本章では、以上論じてきた理論解析の妥当性を検証するため回転円板を用いた実験を実施する。実験は一定回転数で鋼製円板を回転させ、打撃実験と加振実験を行いその両方の結果より固有円振動数を特定し、回転数と固有円振動数の関係を得る。そして、第3章で得られた極異方性回転円板の振動数方程式において弾性係数等のある特定な値にすることにより等方性円板とし、実験で使用した円板形状と同じ形状寸法を用いて振動数方程式を解く、そして、これら数値計算より得られた固有円振動数と実験より測定された固有円振動数とを比較検討することから、解析手法の正当性を評価する。

6.2 実験装置

実験装置は図6.1に示すように、大きく分けて、駆動部、測定部、加振部から構成されている。各部において使用したそれぞれの機器とその形式一覧を表6.1に示す。

駆動部では、モータにハブで固定された円板を回転制御盤で所定の回転数で回転するように設定し、モータコントローラでその設定した回転数で円板が正確に回転するようにコントロールする。

測定部では、円板の面外方向変位を非接触変位計により測定する。測定値はアナログ電圧として得られ、ギャップディテクタにて増幅し、測定された変位がmm単位でアナログ表示される。また、この測定値は、パーソナルコンピュータの拡張スロットに装着したA/D変換ボードにてデジタル量に変換のちメモリーに記録され、ただちにデジタルオシロ・FFTアナライザにより、時間軸に対する電圧の波形としてCRTに出力される。また、記録されたデータに対してFFT処理を行う場合、FFTアナライザにより、デジタル量に変換された測定値の振幅スペクトラムが、周波数軸に対する電圧振幅で出力され、卓越した周波数を特定することができる。これら出力結果は、CRT以外にも必要に応じてプロッタに出力することができ、さらに、ネットワークを経由し、各種のデータ処理

表 6. 1 使用機器一覧

	機 器 名	形 式	
駆動部	DCブラシレスモータ	FLV9K16SA-0	日本サーボ(株)
	モータコントローラ	FVL2-0	日本サーボ(株)
	回転制御盤	(自作)	
測定部	非接触変位計	VE-133	(株)小野測器
	ギャップディテクタ	VT-510	(株)小野測器
	A/D変換ボード	D98H	カノープス(株)
	デジタルオシロ ・FFTアナライザ	DSS98-SV	カノープス(株)
	パーソナルコンピュータ	PC-9801BA3	日本電気(株)
加振部	電磁加振器	(自作)	
	電磁加振器制御回路	(自作)	
	バイポーラ電源	BVA25-1	(株)高砂製作所
	ファンクションジェネレータ	FG-273	KENWOOD

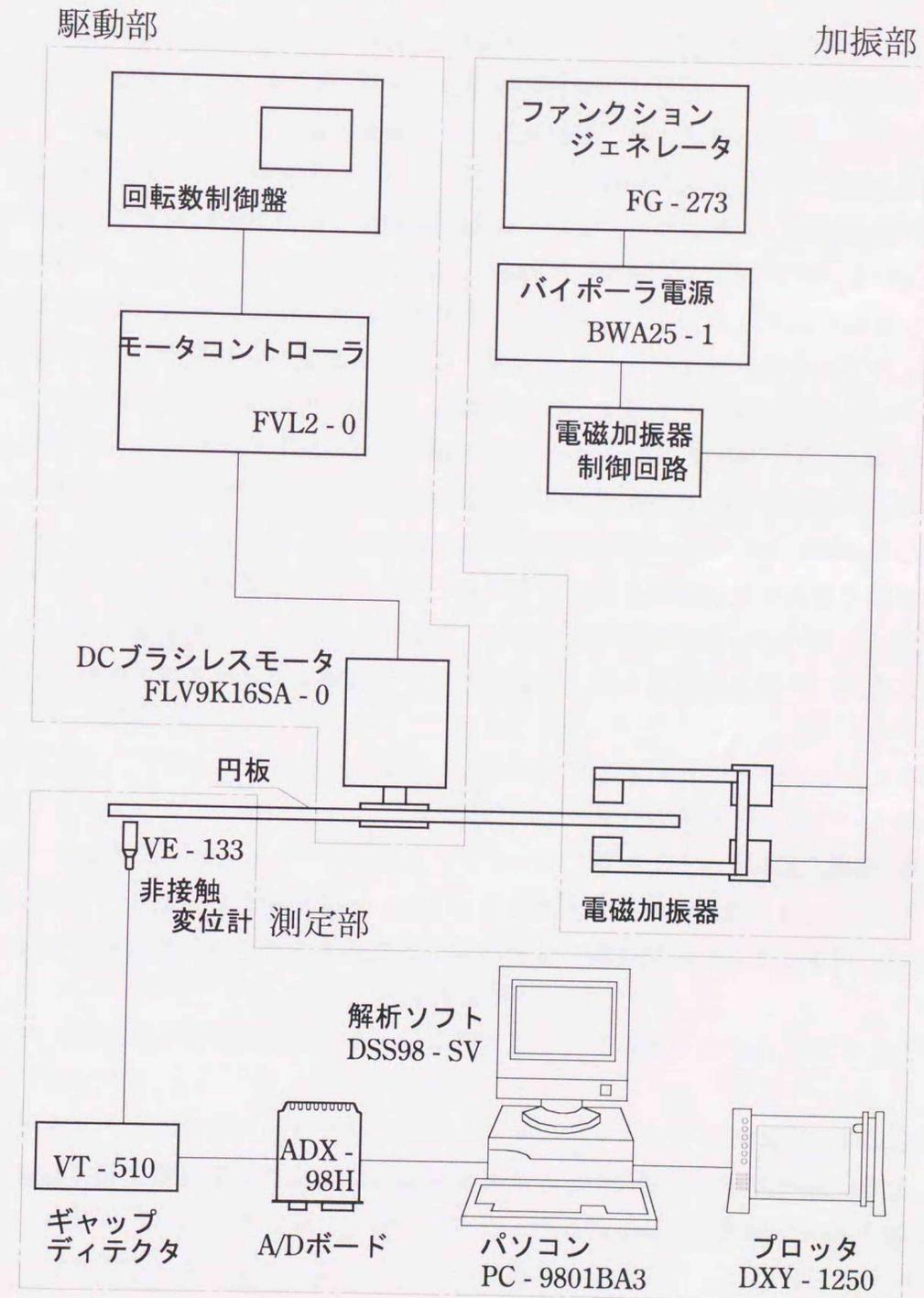


図 6. 1 実験装置概略図

が可能となっている。

加振部は加振実験を行う際に必要な回転円板の一点に作用する調和起振力を作り出す部分である。そして、その円板に作用させる外力として、電磁石の磁力を利用した。円板に作用させる起振振動数は周期電圧波形を出力するファンクションジェネレータで設定される。そのファンクションジェネレータの出力をバイポーラ電源によって増幅する。電磁加振器制御回路では、その周期波形電圧の正負の違いを、ダイオードを使用して分流し、円板の両側面に設置した2つの電磁石に交互に電流として流す。この信号を受けた電磁加振器は、それら二つの電磁石に入力された振動数に同調した磁力を交互に発するようになる。よって、ファンクションジェネレータで設定した振動数で、回転円板に非接触で加振を行うことが可能となる。また、起振力の大きさの調整には、ファンクションジェネレータの振幅の出力レベルを变化することにより行う。加振部の性能評価のため、この電磁加振器を用いて、片持ち梁による予備実験を行った。その結果、数 Hz から本実験で使用する100Hz 程度までで設定した加振振動数と電磁加振器により加振された物体の振動変位波形の振動数は、ほぼ等しい値となる結果を得ている。また、そのときの片持ち梁の固有円振動数は3次振動までほぼ正確に求めることができた。

6.3 実験方法

回転円板の固有振動数を測定するに当たり、一定回転数で回転している円板に対し、以下に示した打撃実験と加振実験の二種類の実験を行い固有円振動数を求めた。

6.3.1 打撃実験

打撃実験は以下の手順で行い、一定回転数で回転している円板の固有振動数と推定される振動数を求める。

打撃実験手順

- (1) 駆動部であるモータの軸にハブを固定し、そのハブに供試材の円板を非接触変位計に対して円板の面が垂直になるように取り付ける。

- (2) 非接触変位計を円板の所定の変位測定位置に固定する。
- (3) 円板の回転数を回転数制御盤で設定し、一定回転数で円板を回転させる。その状態における回転円板の測定点の変位を測定し、ただちに FFT 処理を行い振幅スペクトラムの周波数分布を記録する。
- (4) (3) の回転数で回転している円板に、打撃棒により打撃を加える。そして、加えた直後の変位データをメモリーに読み込む、そして、(3) と同様に FFT 処理を行い周波数分布を記録する。また、得られたデータはすべてハードディスクに保存する。
- (5) 手順 (3), (4) を回転数を変え繰り返し、記録する。

打撃実験において得られた周波数の中で、設定した回転数における固有円振動数は打撃を加えずに得られた手順 (3) の周波数データと、打撃を加えて得られた手順 (4) の周波数データを比較し、手順 (4) のデータにのみ突出し現れた周波数であると考えられる。

6.3.2 加振実験

打撃実験にて得られた振動数が設定した回転数で回転している円板の固有振動数であるか否かを確認するため、その測定された振動数で加振実験を行い、測定された変位振幅波形より、共振現象を起こしている振動数を特定し、回転円板の固有振動数を決定する。

加振実験手順

- (1) 打撃実験と同様に円板をモータに取り付け、非接触変位計を所定の位置に固定する。
- (2) 設定した回転数で円板を回転させ、ファンクションジェネレータの出力電圧を一定値まで上げた状態で、出力振動数を 0 Hz とし、円板に調和外力が作用しない状態の面外方向変位波形を測定部で記録する。
- (3) 徐々にファンクションジェネレータの出力振動数を上げ、回転円板を加振する。特に、打撃実験で求められた固有振動数と思われる周波数付近に注意しながら面外方向変位を測定し、その変位波形より共振現象が生じていると推定できる加振振動数を特定する。そして、その変位応答波形と共に

記録する。

(4) 手順 (2), (3) を円板の回転数を変え繰り返し, 記録する。

6.3.3 回転円板の固有振動数

打撃実験にて得られた回転円板の固有振動数と思われる周波数には, モータの振動や非接触変位計の取り付け部の振動など, 円板と変位計との相対的な距離の変化が測定振幅に加算される。そのデータを FFT 処理した際に, それら加算された外部からの振動の周波数が振幅スペクトルとして現れる。また, 実験に使用した円板には製作過程, 特に切削加工を行う際に歪みが生じ, 加工終了後はその歪みが面外方向のたわみとなって存在する。このような理由で生じたたわみを初期たわみと呼ぶことにする。そのような円板を回転させると, 非接触変位計での測定値には, その測定位置における初期たわみの変位が回転数に比例して周波数の高くなる振幅波形として測定される。そのため, その測定データを FFT 処理した際に, その初期たわみによる振幅波形の振幅スペクトルが円板の回転数に比例して大きくなる周波数として現れる。

これらの振動数が回転円板の固有振動数以外の振動数であることを加振実験での測定結果を用いることによって検証する。そして, 測定された共振状態と推測される変位波形から回転円板の固有振動数を特定することができる。

6.4 供試円板

本実験において使用した円板は板厚0.78mmの一般構造用圧延鋼 SS400 の板を所定の形状寸法に切削加工したものである。その円板の形状寸法を図6.2に示す。円板製作方法は, おおむね所定の形状寸法に近い寸法にて切断された多角形板を旋盤に取り付け所定の寸法に円板外周をバイトでカッティングする事により製作した。また, 実験装置内において非接触変位計を固定し, 回転円板の面外方向の変位を測定した位置を図6.3に示す。本研究において用いた非接触変位計 (VE-133) は使用測定範囲が0.0~1.0 mmであることより, 測定位置における回転円板の最大振幅が1 mm以下となるように, 非接触変位計のセンサ表面から円板表面までの距離を調整し, 測定位置 (中心からの距離: 100mm) に変位計を固定した。図6.3に示した変位測定位置における初期たわみの測定結果を図6.4に示

す。この図は, 円板を比較的回転数が低い状態 (25 rpm) で回転させたときの非接触変位計により測定された面外方向変位波形の一例を示した図である。横軸が測定経過時間, 縦軸が非接触変位計のセンサ表面から円板表面までの距離である。この図より, 実験に用いた供試円板は, 測定位置における初期たわみが最大振幅に置き換えると約0.35mmの初期変位を有する円板であることがわかる。また, 一般構造用圧延鋼 SS400 の材料物性値等は, それぞれ下記の値を使用することとする。

- 縦弾性係数 : $E = 2.1 \text{ G Pa}$
- ポアソン比 : $\nu = 0.3$
- 密度 : $\rho = 7.87 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$

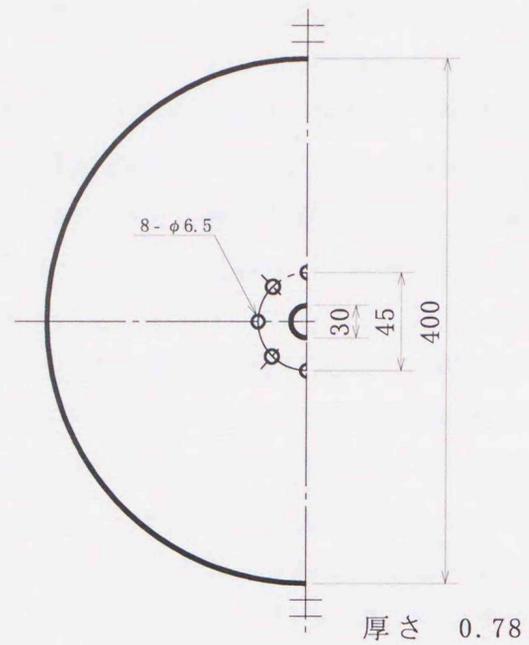


図6. 2 供試円板の形状寸法

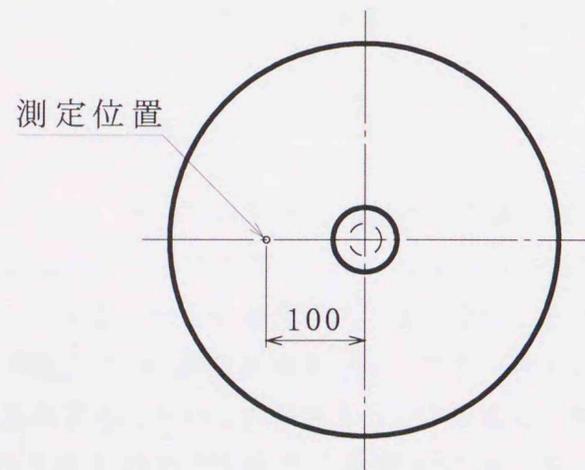


図6. 3 変位測定位置

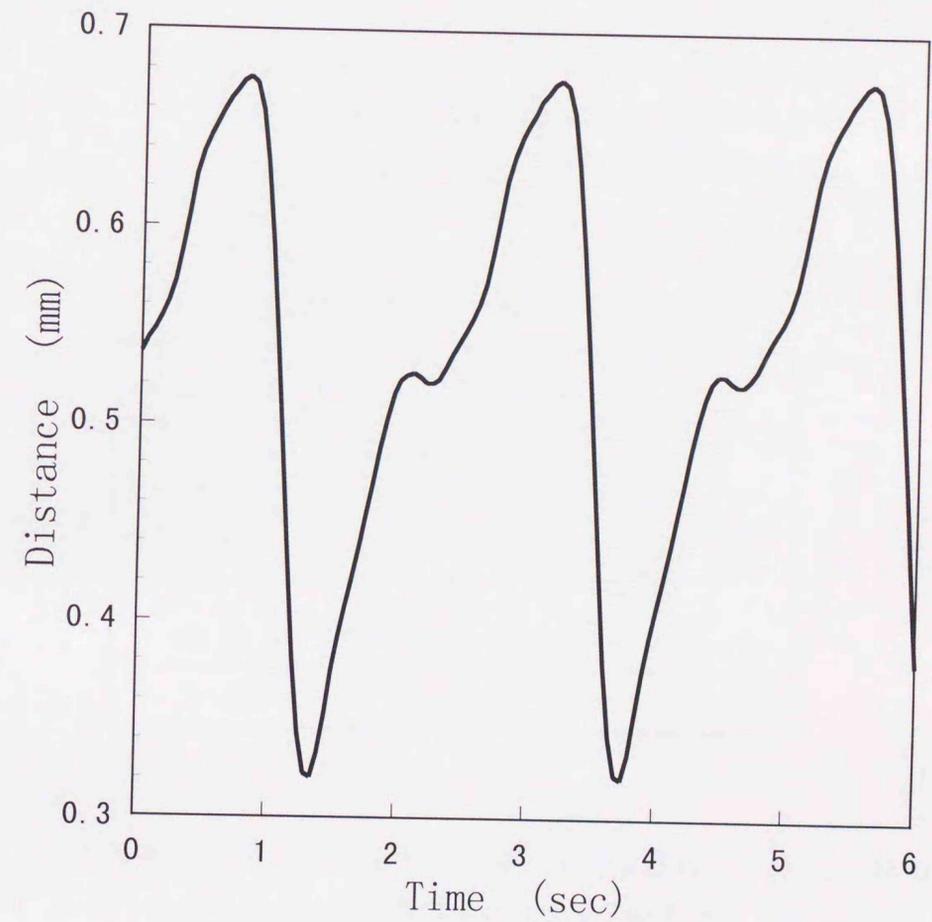


図6. 4 円板の初期たわみ

6.5 実験結果

表6.2は測定された変位応答波形を A/D 変換と FFT 処理する際に使用した各設定条件等である。これらの条件を用いて、6.3節の実験方法に示した打撃実験手順に従い得られた供試円板の振動数分布を図6.5に示す。この図は、円板の回転数を0~2500 rpm まで100 rpm ごとに変え、各回転数ごとに打撃実験を行う。そして、得られた変位応答波形を FFT 処理することによって振動数分布を求め図示した。図中の横軸は振動数、縦軸は円板の回転数、そして、立体軸には FFT 処理により得られたスペクトラムを表す。

表6.2 測定時における計測設定条件

サンプリング周波数	200 Hz
収録データ数	512 ケ
デジタルフィルタ	
・ローパスフィルタ	20 kHz
・ハイパスフィルタ	0.05 Hz
ウィンドウ関数	ハニング

図6.5に示された振動数分布は、各一定回転数において大小多数のスペクトラムを有している。図中破線で示した線上に現れているスペクトラムは、0を原点として回転数が高くなるのに比例し、スペクトラムの現れる周波数も高い周波数へと変化している。これら一連のスペクトラムの突出する振動数分布は6.4節において述べた、初期変位やモータの振動などにより現れた振動数であると考えられる。また、スペクトラムのピーク値は小さいが、その他の要因による振動数も多数測定されている。

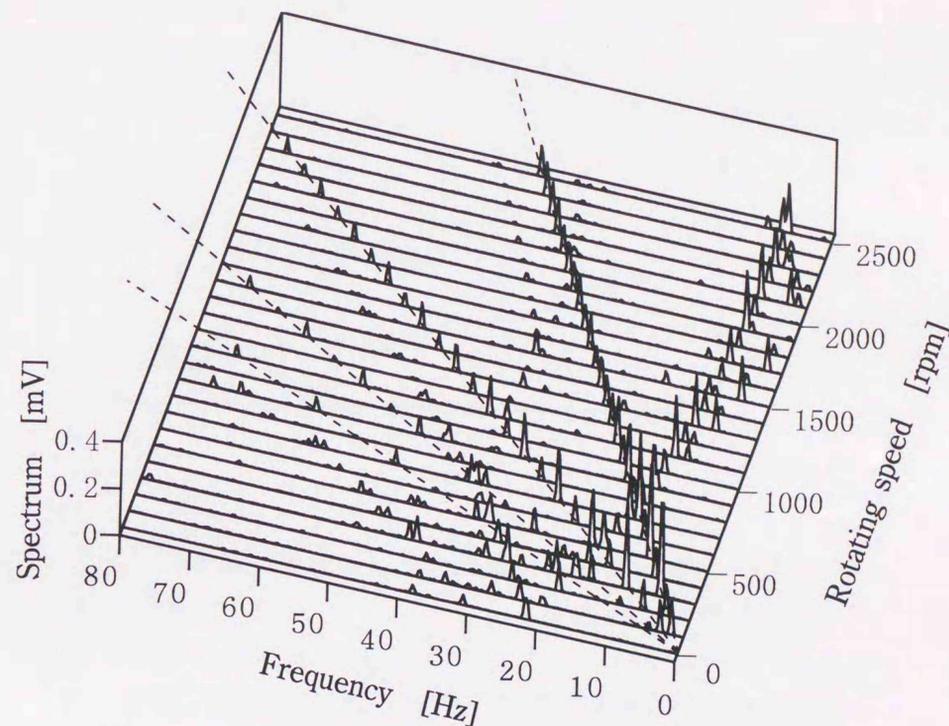


図6.5 打撃実験による振動数分布

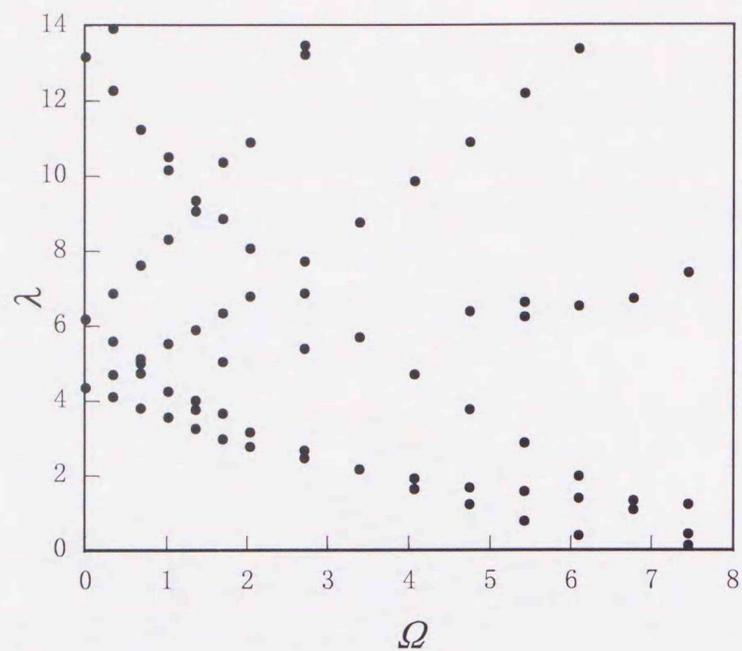


図6.6 固有円振動数分布 (加振実験結果)

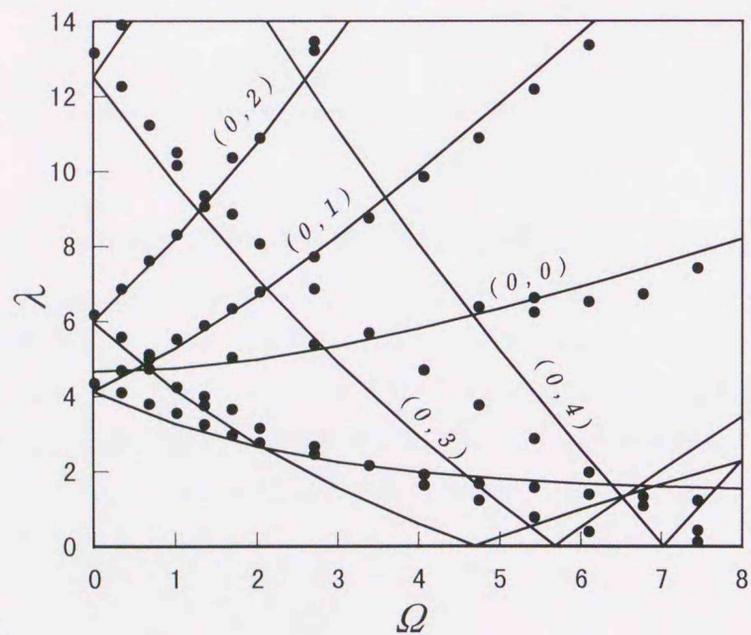


図6.7 固有円振動数分布
(— : 理論値 と ● : 実験値の比)

打撃実験により得られた振動数から加振実験を行うことによって、供試円板の固有円振動数を特定した結果を図6.6に示す。図中、●で示した部分が各回転数における供試円板の固有振動数である。これらは、図6.5でスペクトラムが突出した振動数で円板を加振し、その中で共振が起こった振動数をプロットしたものである。ただし、横軸には円板の回転数を式(6.1)により無次元角速度に、縦軸には加振振動数を式(6.2)により無次元加振円振動数にそれぞれ変換し、示した。

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho \pi a^4}{D}} (2\pi) \frac{R_{PM}}{60} \dots\dots\dots (6.1)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho \pi a^4}{D}} (2\pi) f \dots\dots\dots (6.2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- a : 円板の半径 (m) , h : 円板の板厚 (m)
- R_{PM} : 円板の回転数 (rpm) , f : 加振振動数 (Hz)
- E : 円板の縦弾性係数 (Pa) , ρ : 円板の密度 (kg/m^3)

この図から解るように、加振実験を行うことによって、供試円板の初期たわみやモータなどの外部からの影響により測定されていた周波数はなくなり、供試円板の角速度と固有円振動数の関係が測定される。この関係に、第3章にて導出した極異方性回転円板の振動数方程式(3.35)より、無次元固有円振動数を求め、図6.6に重ね合わせたのが図6.7である。ただし、振動数方程式を解く際には、形状寸法と材料物性値を供試円板の各値と同じくし、繊維の含有率を0、そして、各剛性に関する値に特別な値を代入し、等方性回転円板の振動数方程式に等しくなるようにして計算した。この図から解るように、節直径数の少ない(0,0)～(0,2)モードの固有円振動数は、理論解析より求めた値と実験値がよく一致している。しかしながら、(0,3)モードの後退波は回転数の上昇と共に理論値との差は大きくなり、(0,4)モード以上においては、固有円振動数を実験において測定することはできなかった。また、図6.6において、2000 rpm付近(図6.7では $\Omega=6.7 \sim 7.0$)で存在すると思われる危険速度に対応するスペクトラムの

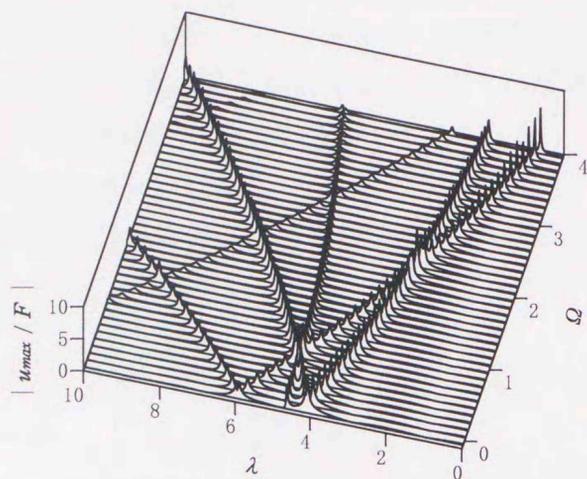


図 6. 8 無次元最大振幅 (理論値)

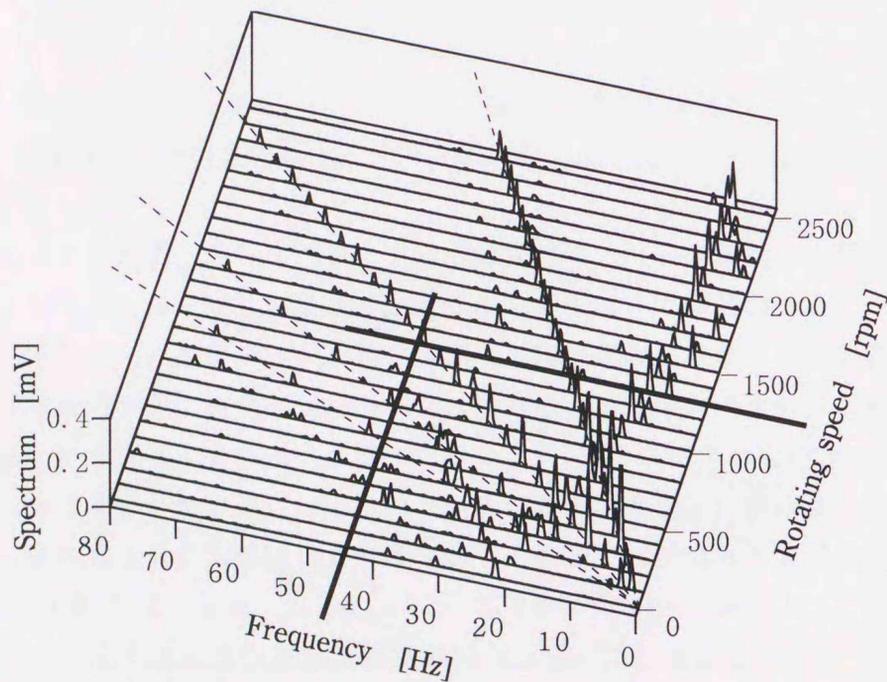


図 6. 9 打撃実験による振動数分布

ピークは現れず，危険速度近傍においては特に理論値と実験値との差は大きくなり，危険速度を実験より特定することはできなかった。

図6.8は，理論解析より計算された無次元角速度，起振振動数と無次元最大振幅の関係を示した図である．第3章で求めた無次元変位式 (3.40) を上記振動数方程式の場合と同様に等方性の場合に置き換え，一定回転数における最大振幅を危険速度が存在しない比較的回転数の低い領域内で示した．図6.9は，図6.5で示した打撃実験で得られた振動数分布に図6.8で示した領域を実線で表示した図である．この領域内においては，破線で示した初期たわみによる振動数分布等を除いて，おおむねその振動数の分布状態は一致している．

以上の結果より，本振動解析による理論値と実験により得られた結果は，ほぼ一致しており，理論解析の妥当性を裏付けているものと判定した．

第7章 結 論

本研究においては、情報機器の記憶装置として用いられているディスクに着目し、その動的挙動や振動特性を把握するため、それらディスクを内周が固定され外周が自由である板厚一定の薄肉回転円板としてモデル化し、ガラーキン法を適用して理論的に解析した。円板の材質は、等方性円板と円板の周方向に強化繊維を入れ、円周方向の剛性を高めた極異方性円板とした。また、弾性係数を複素数を用いて表すことにより内部（構造）減衰を考慮した。そして、固有値解析と一点で調和起振されるときに応答解析を行い、数値計算によってその固有円振動数、伝達関数と振動モードを求め、減衰や回転そして、極異方性の影響など各パラメータの違いが回転円板の振動特性に与える影響を検討し、角速度や起振振動数に対する円板の安定・不安定領域を明らかにした。そして、極異方性を有する複合材料で成形された円板の有用性について検討した。その得られた研究成果を要約すると以下のようなになる。

第1章は緒言であり、本研究の意義と目的について述べると共に、回転円板に関するこれまでの研究動向や本論文の概要について説明している。

第2章においては、等方性回転円板の一般的な振動特性を把握し、さらに、極異方性回転円板の振動特性に関する基礎資料を提供するため、等方性回転円板の各種基礎式を誘導した。等方性回転円板が一定角速度で回転する場合と一定角加速度で加速される場合のそれぞれの半径方向の力の釣り合い方程式と運動方程式を基礎弾性理論に基づき求め、それら基礎式を空間に固定された静止座標系に座標変換し、固有値解析より振動数方程式を求め、定常応答解析より駆動点インピーダンスと変位式を導出した。

第3章においては、強化繊維を円板の円周方向に巻き込み樹脂で成形することにより半径方向と周方向の弾性係数が異なる極異方性円板を想定し、このような極異方性回転円板の理論解析を行った。極異方性円板が一定角速度で回転する場合と一定角加速度で加速される場合のそれぞれの場合について各基礎式を誘導する。半径方向の力の釣り合い方程式をスプライン補間法により解き、半径方向と周方向の応力成分を導出し、運動方程式を異方性弾性板の古典理論に基づき、直交異方性板の2次元軸対称問題に置き換えることにより求めた。これら基礎式を第2章と同様に空間に固定された静止座標系に座標変換し、固有値解析より振動数方程式を求め、定常応答解析より駆動点インピーダンスと変位式を導出した。また、極異方性円板の弾性特性として、円周方向繊維強化材を想定し、各異方軸に関する弾性係数等を強化繊維の含有率に基づき算出した。

第4章においては、第2章において行った等方性回転円板の理論解析より導出した各基礎式に基づいて数値計算を行った。振動数方程式を解くことにより、角速度に対する固有円振動数分布を求め、工学的に重要となる振動モードは節円を持たない振動モードであること。また、固有円振動数分布には回転円板の特性である進行波、後退波、そして、危険速度を有する事を示した。角速度、角加速度、起振振動数、起振点、そして、減衰係数をパラメータとしたときの駆動点インピーダンスと振動モードを計算した。そして、これらのパラメータの違いが等方性回転円板の振動現象に与える影響を検討し、角速度および、起振振動数に対する円板の安定・不安定領域を明らかにした。

第5章においては、第3章で行った極異方性回転円板の理論解析結果を用いて、ガラス繊維とエポキシ樹脂から成る円周方向繊維強化材の円板を仮定し、円板に巻き込まれたガラス繊維の体積含有率をパラメータとして

加え数値計算を行った。この体積含有率が増加すると、円板の円周方向の曲げ剛性が強くなり極異方性の度合いも大きく生じるようになる。数値計算結果より、等方性から極異方性へとその特性を変化させることによって、固有円振動数と危険速度の分布状態が変わり、安定領域が広範囲に広がるということが認められた。また、一定角速度で回転する場合と、一定角加速度で加速する場合の駆動点インピーダンスによっても極異方性回転円板は等方性回転円板に比較して、現れる共振点の数が少なくなり、安定して円板が回転する領域が増えることが認められた。以上の結果より、極異方性回転円板は等方性回転円板に比較すると、工学的により有用な振動特性を有すると言える。

第6章においては、回転円板の振幅を測定する実験装置を作製し、鋼製円板について、打撃実験と加振実験を行い、固有円振動数を測定した。そして、極異方性回転円板の振動数方程式を入力する弾性係数等を変えることにより等方性の振動数方程式とし、固有円振動数を求め、実験値と比較した。その結果、実験値と理論解析値はほぼ一致しており、理論解析の妥当性を裏付けることができた。

以上が本研究で得られた研究成果を要約したものである。今後益々情報化時代は発展し続け、情報機器においてはさらに、高速化、高密度化、高性能化が予想される。その中において重要な構造要素である回転円板の動的設計の資料として、ここで得られた結果が有用な指針を与えるものと確信し、情報機器における記憶装置の性能の向上に貢献できることを期待している。

参考文献

- (1) Lamb,H. and Southwell,R.V., " The Vibration of a Spinning Disk " , *Proceedings of The Royal Society of London*, 99 (1921) , 272.
- (2) Southwell,R.V., " On the Free Transverse Vibration of a Uniform Circular Disc Clamped at its Centre;and on the Effects of Rotation " , *Proceedings of The Royal Society of London*, 101 (1922) , 133.
- (3) Tobias,S.H. and Arnold,R.N., " The Influence of Dynamical Imperfection on the Vibration of Rotating Disks " , *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 171 (1957) , 669.
- (4) Iwan,W.D. and Stahl,K.J., " The Response of an Elastic Disk With a Moving Mass System " , *Transactions of the ASME , Journal of Applied Mechanics*, ** (1973) , 445.
- (5) Iwan,W.D. and Moeller,T.L., " The Stability of a Spinning Elastic Disk With a Transverse Load System " , *Transactions of the ASME , Journal of Applied Mechanics*, 48 (1976) , 485.
- (6) Benson,R.C. and Bogy,D.B., " Deflection of a Very Flexible Spinning Disk Due to a Stationary Transverse Load " , *Transactions of the ASME , Journal of Applied Mechanics*, 45 (1978) , 636.
- (7) Hutton,S.G.,Chonan,S. and Lehmann,B.F., " Dynamic Respones of a Guided Circular Saw " , *Journal of Sound and Vibration*, 112-3 (1987) , 527.
- (8) 長南・三上・石川, " 製材用丸のこぎりの振動ならびに危険速度 " , 日本機械学会論文集, 52-478, C (1986) , 1805.
- (9) 松久・佐藤, " 石材切断用丸のこの振動・騒音に関する研究 (第1報, 振動解析) " , 日本機械学会論文集, 51-461, C (1985) , 35.

- (10) 末岡・吉武・田村・堀田, " 外周上の2点に摩擦力が作用する円板の自励振動 (第1報, 内部共振のない場合) ", 日本機械学会論文集, 52-473, C (1986), 16.
- (11) 末岡・吉武・田村・堀田, " 外周上の2点に摩擦力が作用する円板の自励振動 (第2報, 内部共振のある場合) ", 日本機械学会論文集, 52-473, C (1986), 24.
- (12) 末岡・吉武・劉・綾部・田村, " 回転円板の自励振動 (第1報, 内部共振のない場合) ", 日本機械学会論文集, 53-485, C (1987), 21.
- (13) 吉武・末岡・劉・田村, " 回転円板の自励振動 (第2報, 内部共振のある場合) ", 日本機械学会論文集, 53-486, C (1987), 364.
- (14) 太田・香川・江藤・西川, " ディスクブレーキ鳴きに関する研究 (モード修正法によるシミュレーション計算および実験) ", 日本機械学会論文集, 50-457, C (1984), 1585.
- (15) 小寺, " 回転円板の振動解析 (第1報, 外周の一点で支持された場合) ", 日本機械学会論文集, 55-516, C (1989), 1927.
- (16) 小野・海老原・田中・進藤, " フレキシブルディスク装置におけるヘッド・媒体インタフェースの研究 (第1報, 静的特性) ", 日本機械学会論文集, 51-466, C (1985), 1389.
- (17) 小野・前野・海老原, " フレキシブルディスク装置におけるヘッド・媒体インタフェースの研究 (第2報, 集中力による動的変形特性) ", 日本機械学会論文集, 52-473, C (1986), 326.
- (18) 小野・前野, " フレキシブルディスク装置におけるヘッド・媒体インタフェースの研究 (第3報, 点接触ヘッドによって生ずる3.5インチディスクの動的変形特性) ", 日本機械学会論文集, 52-484, C (1986), 3100.
- (19) 長南・江, " 軸方向およびピッチング加振される回転ディスクの動特性に関する研究 ", 日本機械学会論文集, 54-502, C (1988), 1181.

- (20) 江・長南, " 磁気ヘッドと接触する回転フロッピーディスクの自由振動特性並びにその解析法について ", 日本機械学会論文集, 54-507, C (1988), 2669.
- (21) Renshaw, A.A. and Mote, C.D., " A Perturbation Solution for the Flexible Rotating Disk: Non-Linear Equilibrium and Stability Under Transverse Loading ", *Journal of Sound and Vibration*, 183-2 (1995), 309.
- (22) 蓮池・堀, " フォイルディスクに関する基礎的研究 ", 日本機械学会論文集, 49-440, C (1983), 704.
- (23) 保坂・西田, " フォイルディスクの変形解析 (定在波の解析と実験) ", 日本機械学会論文集, 52-474, C (1986), 490.
- (24) 本田・松久・佐藤, " 空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答 ", 日本機械学会論文集, 54-507, C (1988), 2610.
- (25) 本田・松久・佐藤, " 空間に固定した点で拘束された回転円板の振動 ", 日本機械学会論文集, 55-516, C (1989), 1918.
- (26) 本田・松久・佐藤, " 空間に固定した点で拘束された回転円板の安定性 (減衰を無視した場合) ", 日本機械学会論文集, 60-576, C (1994), 2714.
- (27) 本田・松久・佐藤, " 空間に固定した点で拘束された回転円板の安定性 (減衰を考慮した場合) ", 日本機械学会論文集, 60-576, C (1994), 2722.
- (28) 本田・松久・佐藤, " 基礎励振を受ける回転円板の振動解析 ", 日本機械学会論文集, 60-579, C (1994), 3749.
- (29) Lee, H.P., " Vibration and Critical Speeds of a Spinning Annular disk of Varying Thickness ", *Journal of Sound and Vibration*, 187-1 (1995), 39.
- (30) 鳥居・安田・豊田, " 空間に固定された点で加振される回転円板の非線形強制振動 (主共振点付近で発生する結合調波振動) ", 日本機械学会論文集, 60-570, C (1994), 386.

- (31) 鳥居・安田・豊田, " 空間に固定された点で加振される回転円板の非線形強制振動 (超和差形結合調波振動の発生) " , 日本機械学会論文集, 61-584, C (1995), 1286.
- (32) 神谷 訳 , " 異方弾性板の理論 " , (1975) , 森北出版.
- (33) 林 , " 複合材料工学 " , (1971) , 日科技連出版社.
- (34) 谷口 , " 振動工学ハンドブック " , (1981) , 養賢堂.
- (35) Timoshenko,S. and Goodier,J.N., " Theory of Elasticity Third Edition" , (1970) , McGraw-Hill Book Co. Inc.

謝 辞

本論文は, 私が文部省内地研究員として, 昭和62年5月より10ヶ月の間, 北海道大学にて同大学 教授 山田 元 先生の御指導のもと, 回転円板の振動特性に関する研究に従事し, その後の研究成果をまとめたものであります.

本研究の遂行にあたり, 終始適切な御指導と多くの有益な御助言を賜りました北海道大学 教授 山田 元 先生に謹んで感謝の意を表し, 心より厚く御礼申し上げます.

また, 本論文作成にあたり, 適切なる御意見と御検討を頂きました北海道大学 教授 岸田 路也 先生, 三上 隆 先生に深く感謝の意を表すとともに, 御礼申し上げます.

さらに, 北見工業大学 教授 片岡 更一 先生には, 多くの貴重な御助言を頂くとともに, 本研究活動において多大なる便宜と御援助を賜りました. ここに深く御礼申し上げ感謝の意を表します.

また, 本論文に対し, 適切なる御助言を頂いた北海道大学 助教授 小林 幸徳 先生に深く感謝致します.

最後に, 本論文をまとめるに際し, また, 実験装置の製作に関して, 多大なる御協力を頂きました北見工業大学 技官 長谷川 稔 氏, そして, 北見工業大学 機械システム工学科 実習工場の皆様に心よりお礼申し上げます.

ありがとうございました.

