



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                     |                                                                                   |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title               | 超格子における音響フォノンの分散関係ならびに共鳴透過と反射に関する研究                                               |
| Author(s)           | 加藤, 初儀                                                                            |
| Degree Grantor      | 北海道大学                                                                             |
| Degree Name         | 博士(工学)                                                                            |
| Dissertation Number | 乙第5304号                                                                           |
| Issue Date          | 1998-03-25                                                                        |
| DOI                 | <a href="https://doi.org/10.11501/3137267">https://doi.org/10.11501/3137267</a>   |
| Doc URL             | <a href="https://hdl.handle.net/2115/51490">https://hdl.handle.net/2115/51490</a> |
| Type                | doctoral thesis                                                                   |
| File Information    | 000000322457.pdf                                                                  |





超格子における音響フォノンの分散関係  
ならびに共鳴透過と反射に関する研究

加藤 初儀



①

目次

# 超格子における音響フォノンの分散関係 ならびに共鳴透過と反射に関する研究

1998年1月

加藤 初儀



## 目 次

|           |   |
|-----------|---|
| 序 論 ..... | 1 |
|-----------|---|

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 第1章 基本的事項と Pure-Shear 波 ..... | 13 |
|-------------------------------|----|

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| 1.1. 座標変換した立方晶での弾性定数 .....          | 14 |
| 1.2. 層状媒質への SH 波の斜方入射 .....         | 18 |
| 1.2.1. 単一界面 .....                   | 18 |
| 1.2.2. 複数の層よりなる媒質 .....             | 20 |
| 1.3. 異方的媒質中でのエネルギー流束 .....          | 24 |
| 1.3.1. バルク中での pure-shear 波 .....    | 24 |
| 1.3.2. 互いに逆方向に進む pure-shear 波 ..... | 27 |
| 1.3.3. 超格子中での pure-shear 波 .....    | 29 |
| 1.4. Pure-shear 波の分散関係 .....        | 31 |
| 1.4.1. 超格子での分散関係 .....              | 31 |
| 1.4.2. 行列 $T$ の行列式とトレース .....       | 34 |

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 第2章 Quasi-Shear と Quasi-Longitudinal 波 ..... | 37 |
|----------------------------------------------|----|

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 2.1. スローネス曲線と偏極 .....         | 39 |
| 2.1.1. スローネス曲線 .....          | 39 |
| 2.1.2. 偏極 .....               | 41 |
| 2.2. (111) 界面をもつ超格子中の波動 ..... | 44 |
| 2.2.1. 歪と応力 .....             | 44 |
| 2.2.2. 界面での応力 .....           | 46 |
| 2.2.3. 転送行列 .....             | 47 |
| 2.2.4. ポインティングベクトル .....      | 48 |
| 2.2.5. 反射率と透過率 .....          | 50 |



|                            |    |
|----------------------------|----|
| 2.3. 構造因子 .....            | 54 |
| 2.3.1. 反射に対する構造因子 .....    | 54 |
| 2.3.2. 透過に対する構造因子 .....    | 55 |
| 2.3.3. 振幅反射係数と振幅透過係数 ..... | 57 |
| 2.4. 等方的媒質 .....           | 59 |
| 2.4.1. 転送行列 .....          | 59 |
| 2.4.2. 反射率および透過率 .....     | 62 |

### 第3章 (111)面を界面とする超格子内の $SH$ フォノン ..... 66

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 3.1. この章の概論 .....                     | 67 |
| 3.2. $SH$ フォノンの透過率 .....              | 68 |
| 3.3. $SH$ フォノンの分散関係 .....             | 72 |
| 3.4. 反射に対する構造因子 .....                 | 73 |
| 3.5. 転送行列の特徴 .....                    | 75 |
| 3.6. この章のまとめ .....                    | 80 |
| 3.7. 付録：運動方程式の書き換えと Rytov の分散関係 ..... | 81 |

### 第4章 (111)面を界面とする超格子での反射と透過 ..... 86

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 4.1. この章の概要 .....     | 87 |
| 4.2. 構造因子 .....       | 88 |
| 4.3. 振動数依存と角度依存 ..... | 90 |
| 4.4. 透過率の振動 .....     | 91 |
| 4.5. この章のまとめ .....    | 92 |

### 第5章 等方的媒質からなる超格子での共鳴的モード変換と透過 .. 95

|                     |    |
|---------------------|----|
| 5.1. この章の概要 .....   | 96 |
| 5.2. 摂動的な取り扱い ..... | 98 |



|               |     |
|---------------|-----|
| 5.3. 透過率の数値計算 | 101 |
| 5.4. 振動の物理的起源 | 102 |
| 5.5. この章のまとめ  | 105 |

## 第6章 等方的媒質からなる **CHIRP** 超格子での音響フォノンのモード変換

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 6.1. この章の概要       | 109 |
| 6.2. 転送行列         | 110 |
| 6.3. 差分方程式        | 112 |
| 6.4. 近似解          | 113 |
| 6.5. この章のまとめ      | 119 |
| 6.6. 付録：周期的超格子の場合 | 120 |

## 第7章 結 論

|     |     |
|-----|-----|
| 謝 辞 | 128 |
|-----|-----|



## 序 論

ナノスケールヘテロ半導体薄膜積層構造である人工超格子(以降,単に超格子と呼ぶ)は,高温超伝導体等と共に新しい光,電子材料として重要である.さらに,この数あるいは数十原子層からなるミクロ(または,メソスコピック)な構造における音響振動(フォノン)のダイナミクスは単に基礎物性の解明上のみならず,THz領域における応用としてのフォノン反射器および,フォノン共振器,さらにはフォノンを増幅するフォノンメーザー等のフォノン光学素子への応用上からも興味をもたれている.本研究では,この超格子におけるフォノン物性の基礎的事項の整理と新たな物性の解明を目的とし,超格子の例として半導体ヘテロ接合超格子を考察対象とした.

半導体ヘテロ接合超格子の研究は1970年にL. EsakiとR. Tsuにより,電気的性質の一つである負性抵抗を扱ったことから始まる<sup>1</sup>.結晶中の原子配列に長周期の構造を人工的に導入したことに起因して,電子の波数空間に形成されるブリルアンゾーンがバルクのものより小さく折り返され,ミニゾーンと呼ばれている.(超格子中のフォノンの分散関係も同様である.)超格子中の層状構造の空間的周期を電子の平均自由行程程度の100 Å以内にすると,比較的小さな電界を加えたときでも電子がミニゾーンの境界まで容易に加速できる.このミニゾーンの境界付近では電子が負の有効質量をもち,ミニゾーンの中央での電子の加速方向とは逆方向に加速される.この機構より,超格子中で電子が空間的に振動する現象が現れ,Bloch振動と呼ばれている.電子がある緩和時間で散乱されることを考慮すると,超格子は電子のBloch振動に起因して負性抵抗をもつことが示される.この負性抵抗のデバイスとしての応用<sup>2</sup>には,周波数がGHz程度のマイクロ波の発振等がある.なお,L. Esaki等がこの概念を発表したときは,超格子の層として,Ge, Si, Ge-Si合金;III-V族化合物とその合金;II-VI族化合物とその合金等を提案している.

近年では,分子線エピタキシー法(MBE)<sup>3</sup>等による薄膜結晶成長技術の急速な発展にともない,単原子層の厚さ程度の範囲で急激な組成変化を示す半導体ヘテロ構造界面の作製が容易になった.この応用で,異種の半導体を層状に積み重ねて長周期の構造をもたせたものを半導体ヘテロ接合超格子とよぶ.ヘテロ構造の素材としては,GaAsと $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ が主流となっている.これは,格子定数が非常に近いこと等が挙げられる.



しかし最近では、格子定数にある程度差がある場合にも格子欠陥などの殆どない超格子が作製可能となっている。さらに一般的には、結晶のある方向に周期的な空間変調を与え、結晶内での現象が関与する有効な次元数を減らした系を広義の意味で超格子とよぶこともある。空間変調の方法としては、上述のように層ごとに素材を変化させるヘテロ構造の他に、結晶内の音波による周期的なポテンシャル変調、不純物濃度の周期的な変化などによる方法もある。この薄膜結晶成長技術の応用で、GaAs 薄膜上に Si をドーピングしながら AlGaAs の薄膜を成長させて得られる界面での高移動度 2 次元電子ガスを利用した高電子移動度トランジスタ (HEMT) や、GaAs-AlGaAs ポテンシャル井戸構造を用いた量子井戸構造半導体レーザー等の、電気的および光学的研究が行われている<sup>4</sup>。

本研究における考察対象であるフォノンは、固体結晶を構成する各原子の振動の量子である。広義の意味での音波を量子化した準粒子で、音響量子または音子とも呼ばれる。固体中の各原子は互いに力を及ぼすため各々の原子の振動は独立したものでなく連成されて波動をつくる。この波動を特徴づける物理量は、波動の進行方向に向きをもつ波数ベクトルと周波数、および振動モードである。結晶が単位胞に  $n$  個の原子をもつ場合には、特定の波数ベクトルに対して一般には  $3n$  個の周波数が存在する。波数ベクトルは結晶の周期性を反映して、その逆格子空間を  $2\pi$  倍した波数空間のなかで定義されたいわゆる第 1 ブリルアン領域内に一様に分布する点で表わされる。これと周波数の関係で定義される分散関係は、フォノンの特徴に対する重要な知見を与える。分散関係は結晶の種類によって異なり、中性子散乱等を用いて実験的に求められる。

結晶が単位胞に同等でない 2 個以上の異なる原子をもつ場合、周波数が波数ベクトルに緩やかに依存する周波数をもつモードと、波数ベクトルの小さな領域で周波数が波数ベクトルの大きさに比例するモードが分散関係中に現れる。単位胞に 1 個の原子が存在すると後者のモードのみが現れる。この後者は長波長のとき伝搬速度が一定になり、音波の性質をもつので音響モードと呼ばれ、前者は周波数の領域が赤外線と同程度にあるので光学モードと呼ばれる。イオン結晶の光学モードのとき隣接する正負のイオンが逆方向に変位する場合には、結晶中に電気的振動が生じることがある。

上記のように固体が原子よりなる質点の集合体と考えず、一様に質量が分布する連続体として固体を近似し、さらに等方近似を行うとその振動



モードは連続体の変位する様式によって、波数ベクトルに平行に変位する1つの縦波 ( $L$ ) と波数ベクトルに垂直に変位し、音速について縮退した2つの横波 ( $T$ ) との3つに分類される。連続近似に結晶の異方性を残した場合には、縦波と横波の変位方向と波数ベクトルとの角度は等方近似の場合よりわずかに変化し、またそれぞれのモードの音速は伝搬方向（波数ベクトルの方向）と共に変化する。これら  $L$ 、 $T$  の波はともに波数ベクトルの大きさが小さく波長が固体結晶中の原子間の間隔より長いとき近似として成立し、波数ベクトルの大きさが小さくなると一定の速度をもつ音響モードであり、光学モードは扱えない。

なお、固体中を伝搬する振動は古典的にみるといわゆる弾性波である。固体中の弾性波は格子振動とも呼ばれ、GHz から THz 程度までの高い周波数をもつことができる。格子振動がこの程度の高い周波数をもつと、その波長は電磁波の可視光から X 線の波長と同程度となり、光や結晶中の電子と相互作用するようになる。このとき、古典的には波動である格子振動が量子力学的な粒子として振る舞う性質が現れフォノンと呼ばれている。

一般的に層状構造をなす弾性媒質中を伝搬する弾性波については、古くから研究されてきた。その一つが地震波の研究である<sup>5</sup>。19 世紀の後半、ドイツの天文学者 Rebeur Paschwitz は、小型の水平振子の動きを光学的に記録する装置を用いて、月の運動による鉛直線の傾きを研究する間に、その記録の中にある種の攪乱があるのに気付いた。これが遠方で起こった地震によるものであることが、1889 年に確認された。地震は地球上に限られた範囲での現象であるとの当時までの認識が改められ、振動は地球全体に及ぶ現象であることが示された。20 世紀になってから地震波の解析より、地球内部の密度の変化が地表より地球の中心にむかって大きくなるが、連続的に変化するのではなく、幾つかの深さで不連続に変化することが明らかとなった。これに基づいて地表より、地殻、マントル、外核、内核と分類される層状の構造をもつ地球像が確立された。また、地表を形成する大陸部の地殻に於いてもさらに、花崗岩質層と玄武岩質層よりなる層状構造があることが認識されるようになった。ただし、1970 年代から 1990 年代にかけて行われた、スカンジナビア半島に近い旧ソ連のコラ半島でのボーリング調査では、地下 12,261 m まで掘削したが、この地殻の層状構造が確認されなかったとの報告<sup>6</sup>もあるので、さらに研究の必要がある。コラ半島が掘削地として選ばれたのは、長期にわたる氷河や風化の浸食で、地表が 5,000 m 以上削られており、地殻の深部まで掘削しやす



かったためである。掘削した岩盤は 30 億年前につくられた層まで達している。

地震波の解析は、基本的には岩盤を等方媒質とし、震源から発生した P 波 (primary wave) と S 波 (secondary wave) が地表の観測点までに達する時間 (走時) と震央 (震源の真上の地表点) から観測点までの距離 (震央距離) との関係 (走時曲線) を基に行われる。各モードの波は、地球内の層状構造で反射やモード変換などを受けるため、走時曲線は複雑となる。また、地表では S 波より速度の遅いレイリー波 (Rayleigh wave) や S 波と同程度の速度をもつラブ波 (Love wave) などの表面波が存在し、層の境界に局在して伝搬する界面波 (Stoneley wave) が存在することもある。地震波の解析の為に標準的な走時曲線が与えられているが、鉱脈などの探査で、地表面近くの詳細な地下の構造を探るには人工地震波等の観測結果を基にして有限要素法や境界要素法などの数値計算を行う。これらの数値計算は多量の計算量を必要とするため、現在では高速の電子計算機が用いられている。

一方、超格子中のフォノンに対する物性研究は、人工的層状構造物を透過する弾性波を扱った 1956 年の S. M. Rytov の研究に始まる<sup>7</sup>。二つの等方媒質よりなる層状構造中の弾性波の波長が層の厚さに対して十分に長いとき、平均として層状構造物が一様な媒質のように振る舞う。彼は二つの層の種類と層の厚さより、この条件下における実効的な弾性定数を導いている。この導出の過程で、層の界面に垂直に弾性波を入射したときの波数と周波数の間に成立する分散関係を求めており、周期的層状構造を扱ったその後の多くの論文で引用されている<sup>8</sup>。

1978 年に T. J. Delph 等は、層を一様等方とした場合の弾性波の伝搬問題を扱っている<sup>9</sup>。考察した弾性波は、層状構造の界面に平行に偏極する SH モード (Shear Horizontal, 横波) であり、界面に任意の角度で入射させている。このとき、弾性波の分散関係がバルクのものとは異なり、層の厚さに関係する幾つかの点で跳びが生じることが示されている。この跳びの中に存在する周波数では、弾性波が透過できないので、これを stopping band と呼んでいる。(以降、これを ストップバンドと呼ぶ。) 一方、弾性波が伝搬可能な周波数の範囲を passing band と呼んでいる。(以降、これを 周波数バンドと呼ぶ。) この分散関係の導出は、周期系に於ける Floquet の定理に基づくもので、固体の電子物性におけるバンド理論 (Bloch の定理に基づく議論) と本質的に同じものである。



やはり 1978 年に A. S. Barker 等は, GaAs と AlAs を単原子層の精度で交互に重ねた半導体ヘテロ接合超格子で界面に弾性波の量子 (音響量子) であるフォノンを垂直入射した場合, 単位周期内の原子層数が多いほど分散関係がバルクのものよりも小さな波数領域に折り返されることを示した<sup>10</sup>. 後にミニブリルアンゾーン (ミニゾーン) と呼ばれるものである. この分散関係の折り返し効果に基づきミニゾーンの中央に多くのストップバンドが現れることを, ラマン散乱等を用いて観測している.

その後, 1979 年に V. Narayanamurti 等<sup>11</sup>は, GaAs と  $\text{Al}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{As}$  を交互に層状に重ね, 界面として (001) 面または (111) 面をもつ半導体ヘテロ接合超格子を用いてフォノン分光 (フォノン スペクトロスコピー) 法による実験を行った. 用いた超格子は, (001) 超格子で周期 93 Å, 周期数 50; (111) 超格子で周期 122 Å, 周期数 50 より構成されている. この実験で初めてフォノン ストップバンドの存在によるブラッグ反射を観測し, 超格子がフォノンの周波数フィルターとして作用することを明かにした. 上記の (111) 超格子でのフィルターは, 中心周波数が約 230 GHz で遮断周波数帯幅が約 39 GHz の縦波に対する帯域遮断フィルターである. なお, この研究では, 超格子の層厚 (周期) に 10% 程度の乱れがあってもフォノンの反射に大きな変化がないことも示されている. さらに, 1987 年, O. Koblinger 等は, 非晶質の層をもつ超格子におけるフォノンの透過実験をフォノン分光法により行った<sup>12</sup>. 用いた超格子は, Si/SiO<sub>2</sub> 超格子で周期 100 Å, 周期数 7; Si/SiN<sub>x</sub> 超格子で周期 90 Å, 周期数 130 より構成される二種類である. この結果, Narayanamurti 等 (1979) が扱った結晶質の層よりも非晶質の層で構成される超格子の方が, フォノンの周波数フィルターとしての特性が鋭敏であることを示した. この起因については, 論文中に記されていないが, 現在では, フィルター作用は一般に周期数および基本周期を構成する層間の音響不整合の大きさに依存することが分かっている.

1987 年, D. C. Hurley 等は  $\text{In}_{0.15}\text{Ga}_{0.85}\text{As}/\text{AlAs}$  を層とする超格子を扱い, 音響フォノン透過の入射角依存性をフォノンイメージング法 (phonon imaging experiment) によって測定した<sup>13</sup>. この実験では検出されるフォノンの周波数はほぼ固定 (約 800GHz) されており, フォノン ストップバンドの空間分布が観測される. 結果として, フォノンの分散関係中のゾーン境界で生じる縦波 (L) および横波 (T) のブラッグ反射によるストップバンドの異方性を観測した. また, モード間の相互作用により生じるゾーン内部にできるストップバンド (intrazone stop band) の存在を発見した. これは, 実験の直前に理論的考察で予想されていたものである. これまで



の研究では、上述のように、ゾーンの中央のストップバンドが ラマン散乱等で観測されているのみであったため、この研究で始めてゾーン内部のようすがフォノンイメージング法によって観測可能となった。なお、この理論的研究としては、1988 年に S. Tamura 等が構成層の弾性的異方性を取り込んで解析を行い、実験との良い一致をみている<sup>14</sup>。

一般に、本研究で考察した周期的な超格子におけるフォノンの物理的特性は、波数と周波数の間に成立する分散関係によって支配される。これは、無限周期系において意味をもち、フォノンのバンド構造を決めている。一方、現実には作製される有限周期超格子において、この分散関係と直接比較できる物理量としてフォノンの透過率があり、前者の周波数ギャップ内で後者は鋭くゼロに落ちこむ。これらの量は共に超格子系におけるフォノン場の転送行列を用いて計算され、その計算結果とフォノン スペクトロスコピー法あるいはフォノン イメージング法に基づく実験結果とは良く一致している<sup>13</sup>。

しかし、これまでのフォノンの分散関係の計算は、主に立方晶の [001] 方向に積層された超格子に対するものが殆どである。一方、立方晶の [111] 方向にも超格子は成長可能であり、実際縦波フォノンの透過実験が初めて行われたのは (111)GaAs/AlGaAs 超格子においてである<sup>11</sup>。(111) 超格子においては界面が鏡面对称性をもたないため、斜方入射に対してフォノンの入射角と反射角は等しくならず、その分散関係に (001) 超格子とは異なる特徴が期待される。本論文ではこの点を詳細に検討し、分散関係にゾーンの中央と端以外の波数で周波数ギャップが生じることを見出した。さらに、その物理的特徴を転送行列に基づいて議論した<sup>15</sup>。

一方、フォノンの斜方入射においては、垂直入射で生じるフォノンの単一モード間のブラッグ反射の他に、モード遷移を伴うブラッグ反射が理論、実験の両面から新たに見い出されている。これらは、フォノンの分散関係で二つの分枝が音速の違いにより互いに交差しようとする周波数で生じる。その様な周波数においては、さらにフォノン間にモード変換を伴う共鳴的透過が生じる可能性がある。本論文では、この共鳴的透過が実際に存在すること、またそれが単に周期的超格子のみならず<sup>16</sup>、層厚を「共鳴透過条件」を満たす値の前後で徐々に変化させた非周期的超格子 (CHIRP 超格子と呼ばれる) においても生じる事を、解析的および数値的計算により示した<sup>17</sup>。



周期的超格子での共鳴透過および CHIRP 超格子での透過フォノンの特徴は、それぞれ次に記す電子線における **Pendellösung** 効果とニュートリノ振動に関係した **MSW** 効果と物理的に同一のものとみなせる。

完全な結晶に電子線や X 線を入射した場合、相互作用のために透過波と回折波が交互に強度を強めたり、弱めたりして結晶内を伝搬する。(光学における結晶内での複屈折と類似した現象である。) これは、透過波と回折波をそれぞれ振動周期が等しい振子にたとえたとき、相互作用するふたつの振子の連成振動と類似していることより **Pendellösung** 効果と呼ばれている。振動の空間的周期は、電子線で  $10\text{\AA}$  程度、X 線で  $10^3\text{\AA}$  程度である。A. Howie 等の基礎的解析<sup>18</sup>では電子線の入射波と回折波を平面波とし、その振幅の伝搬距離に対する変化を支配する方程式として連立一階微分方程式が成立することが導出されている。これは、波動の空間的振動の周期が結晶の格子定数より大きなために可能となる。本研究で扱った共鳴透過条件を満たす周期的超格子内でのフォノンの **Pendellösung** 効果では、電子線等の透過波と回折波に対応するのが、透過フォノンの二つのモード  $T$  と  $L$  である。このとき、周期的超格子を透過するフォノンについてはその波長(本研究では  $40\text{\AA}$  から  $80\text{\AA}$  程度)が超格子の基本周期と同程度の大きさになるため各モードの振幅を支配する方程式は連立一階差分方程式になり、A. Howie 等の解析を適用することができない。ただし、周期的な超格子では、この連立一階差分方程式が定数係数であるため、解析解を求めることができ、二つのモードの透過率が振動することを直ちに示すことができる。

素粒子の標準理論では、ニュートリノの質量はないものとされているが、この検証が近年議論されている。ニュートリノは基本粒子(クォークとレプトン)のなかで、唯一電荷をもたない。このため、ニュートリノの質量を測定するには、ニュートリノと物質との相互作用を利用しなければならない。ニュートリノが質量をもつと、物質中の伝搬に際し、二種類のニュートリノ( $\nu_e$  と  $\nu_\mu$ )の間に変換が生じ、その遷移確率が伝搬距離と共に振動する。これは、ニュートリノ振動<sup>19</sup>と呼ばれている。これを詳細に議論したのが、S. P. Mikheev と A. Yu. Smirnov である<sup>20</sup>が、最初に物質中での振動を考察したのが L. Wolfenstein である<sup>21</sup>ことより、これを **MSW** 効果と呼ぶ。ニュートリノの質量を測定する実験としては、太陽内の核融合から生じるニュートリノを用いたものがあるが、詳細は、参考文献をあげるにとどめる<sup>19,22,23</sup>。**MSW** 効果は素粒子の問題であるが、これと原理的に同じ現象がすでに知られている。即ち、断熱、非断熱過程の



議論である<sup>24</sup>。物理の分野のみでなく、化学反応の分野でも議論されており、1932年のL. LandauとC. Zenerが独立に行った理論的研究<sup>25,26</sup>から始まっている。基本的には、ある一般座標の関数として二つの物理的要素のエネルギーを表したとき（フォノンで考えると二つのモードの分散関係）、各要素の分枝が交差しようとするとき、相互作用の為に二つの分枝間で反発が生じる。この近傍で、一方の要素と他方の要素の間にエネルギーの授受が生じる。

H. J. Maris等<sup>27</sup>は上と同等の問題を、二つの連成振子の問題として扱っており、上記のPendellösung効果と比較しやすい。一つの振子の長さを固定して振動させ、他方の振子の長さを一定の速さで変化させるとき、振動のエネルギーがどのようにふたつの振子で変化するかを考察したものである。また、時間が十分に大きくなって相互作用が生じなくなった時点で、一つの振子のエネルギーが他方に移らずに残る確率を導出している。さらに、この古典的な問題を量子論的な問題に対応づけて考察して、断熱、非断熱過程を論じている。振子の長さの変化を超格子の層の厚さをわずかずつ増加（または、減少）させることに対応させると；二つの振子の各エネルギーは、ひとつのフォノンモードのエネルギーと、超格子の界面で変換されて生じる他方のモードのエネルギーに対応させることができる。このような超格子においてMSW効果と類似の現象が生じることが期待できる。層の厚さをわずかずつ一定の割合で変化させて作製された非周期的超格子は電子の挙動との関係でCHIRP(coherent hetero-interfaces for reflection and penetration)超格子と呼ばれている<sup>28</sup>。

本論文の構成は次の通りである。第1章では、弾性定数テンソルの座標変換の下での変換則ならびに、(111)超格子内での独立なフォノンモードである界面に平行に偏極する横波(SHモード)に対する転送行列を導いた。さらに、反射率および、透過率、エネルギー流束、分散関係等の導出を行った。

第2章では、(111)超格子内で相互作用する二つのフォノンモード、つまりSHモードに垂直に偏極する横波(Tモード)と縦波(Lモード)に対する転送行列を導き、さらに等周波数曲線、偏極ベクトル、エネルギー流束、透過と反射に関する構造因子等の導出を行った。また、等方近似した構成層をもつ超格子を考察する準備として転送行列等の等方媒質での表現を導出した。



第3章では、周期的な(111)超格子の具体例としてGaAs/AlAs超格子を考察し、*SH*モードの透過率および反射率、分散関係を第1章で与えた手法に基づき数値計算により求めた。鏡面对称性をもつ界面の超格子と異なり、周波数ギャップは一般にブリルアンゾーンの中央や端でなく、ゾーン内部に現われる。摂動論的考察に基づき反射過程を記述する構造因子を導入することより、これらの周波数ギャップにおけるフォノンのブラッグ反射を解析した。この際、構造因子の算出に必要な界面からの振幅反射係数が転送行列より与えられる事を示した。さらに、分散関係中に周波数ギャップが発生する条件および、ブラッグ反射の条件、ブラッグ反射の消滅則、周波数ギャップのゾーン内部での位置を転送行列を用いて表現した。また、フォノンの垂直入射のときに有効であるRytovによる分散関係が*SH*モードの斜方入射に対しても拡張可能であることを示した。

第4章では、周期的な(111)超格子内のフォノンの結合モードである*T*と*L*モードに対する第2章の具体例として、第3章と同様のGaAs/AlAs超格子を考察した。特に透過過程を記述する構造因子を算出し、「共鳴透過条件」の存在を明かにした。共鳴透過条件が成立する周波数では、二つの*T*と*L*モードが超格子中を伝搬する際にエネルギーの授受を行い、エネルギー保存則を満たすように各モードの透過率が逆位相で振動する。また、転送行列より得られるフォノンの透過率および反射率の周波数依存性と入射角依存性は、構造因子の結果と良く一致していることを明らかにした。この際、構造因子の算出に必要な界面での複数のモードに対する振幅反射係数と振幅透過係数が第3章と同様に転送行列より与えられる事を示した。

第5章では、第4章で議論した共鳴透過現象を解析的に解くことを次章で試みる準備として、周期的超格子の各層を等方的と近似し、分散関係および、透過率の数値計算を行なった。さらに、第4章で示した伝搬距離に対する各モードの透過率の振動がこの等方近似でも存在することを示した。また、*T*と*L*モードの透過に対する構造因子を用いて、透過率の振動周期を表現する式を与えた。

第6章では、等方近似した構成層をもつ超格子に対し、*T*および*L*モードのフォノン振幅に対する連立一階差分方程式を転送行列から導出した。これより、非周期的なCHIRP超格子の中央に共鳴透過条件を満たす層を配置した場合、フォノンが伝搬するに従いモード変換を伴いながら透過率が振動し、次第に一方のモードから他方のモードにエネルギーが移動する現象を解析した。また、第5章で示した共鳴透過条件が成立する周期的超



格子における各モードの透過率の伝搬距離依存性に対し、厳密な解析解を与えた。

第7章は研究の総括であり、本論文の結論および、結果の応用、今後の課題について述べた。

上記のように、主に構造因子および、転送行列、差分方程式を用いて、超格子中のフォノンの性質を詳細に考察した。特に、*SH*モードに対する考察からは、これまで知られていなかった転送行列の性質を明らかにできた。また、*T* と *L* モードのフォノンが超格子中を伝搬する際に、共鳴的モード変換を伴う透過率が伝搬距離に対して振動する現象を異方的および等方的な層の双方で存在することを理論的に示した。

パラメータとして本論文中に記した値を次の表に示す<sup>29</sup>。特にことわらない限り、数値計算で用いた値も同じである。

| Crystalline | GaAs  | AlAs  | unit               |
|-------------|-------|-------|--------------------|
| $c_{11}$    | 11.88 | 12.02 | $10^{10}\text{Pa}$ |
| $c_{44}$    | 5.94  | 5.89  | $10^{10}\text{Pa}$ |
| $c_{12}$    | 5.38  | 5.70  | $10^{10}\text{Pa}$ |
| $\rho$      | 5.360 | 3.760 | $\text{g/cm}^3$    |

| Amorphous                  | GaAs  | AlAs   | unit               |
|----------------------------|-------|--------|--------------------|
| $c_{11}$                   | 13.46 | 13.445 | $10^{10}\text{Pa}$ |
| $c_{44}$                   | 4.884 | 4.873  | $10^{10}\text{Pa}$ |
| $\rho$                     | 5.360 | 3.760  | $\text{g/cm}^3$    |
| $v_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ | 5.011 | 5.980  | $10^3\text{m/s}$   |
| $v_T = \sqrt{c_{44}/\rho}$ | 3.019 | 3.600  | $10^3\text{m/s}$   |

ここで、 $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  は立方晶の弾性定数であり； $\rho$  は密度； $v_L$ ,  $v_T$  は、それぞれモード *L* と *T* の位相速度である。



# 参考文献

- <sup>1</sup> L. Esaki, and R. Tsu, IBM J. Res. & Dev., **14**, 61(1970).
- <sup>2</sup> R. S. Mackey, Am. J. Phys. **26**, 60(1958).
- <sup>3</sup> 権田俊一 監修,「薄膜作製応用ハンドブック」, エヌ ティー エス (1995).
- <sup>4</sup> 日本物理学会編,「半導体超格子の物理と応用」, 培風館 (1984).
- <sup>5</sup> 一般的な解説:「地球科学入門」, 森下晶, 朝倉書店 (1982). 波動の詳細な取り扱いは次の書にある:「弾性波動論」, 佐藤泰夫, 岩波書店 (1978).
- <sup>6</sup> 脇田宏, 藤井直之, 徳山英一, 科学 **62**(3),141 (岩波書店, 1992).
- <sup>7</sup> S. M. Rytov, Akust. Zh. **2**, 71 (1956), [Sov. Phys. Acoust. **2**, 68 (1956)].
- <sup>8</sup> 本文の第3章の節 3.7 を参照.
- <sup>9</sup> T. J. Delph, G. Herrmann, and R. K. Kaul, Journal of Applied Mechanics, **45**, 343 (1978).
- <sup>10</sup> A. S. Barker, Jr., L. Merz, and A. C. Gossard, Phys. Rev. **B 17**, 3181(1978).
- <sup>11</sup> V. Narayanamurti, H. L. Strömer, M. A. Chin, A. C. Gossard, and W. Wiegman, Phys. Rev. Lett., **43**, 2012(1979).
- <sup>12</sup> O. Koblinger, J. Mebert, E. Dittrich, S. Döttinger, W. Eisenmenger, P. V. Santos, and L. Ley, Phys. Rev. **B 35**, 9372(1987).
- <sup>13</sup> D. C. Hurley, S. Tamura, and J. P. Wolfe, and H. Morkoc, Phys. Rev. Lett. **58**, 2446(1987).
- <sup>14</sup> S. Tamura, D. C. Hurley, and J. P. Wolfe, Phys. Rev. **B 38**, 1427(1988).
- <sup>15</sup> H. Kato, J. Acoust. Soc. Am. **101**, 1380(1997).
- <sup>16</sup> H. Kato, H. J. Maris, and S. Tamura, Phys. Rev. **B 53**, 7884(1996); H. Kato, H. J. Maris, and S. Tamura, Physica B **219 & 220**, 696(1996).
- <sup>17</sup> H. Kato, and S. Tamura, J. Phys. C. **32**, 6791(1997).
- <sup>18</sup> A. Howie, M. J. Whelan, Proc. Roy. Soc. **A 263**, 217(1961).
- <sup>19</sup> 戸塚洋二,「素粒子物理」, pp.175-189, 岩波講座 現代の物理学 第10巻 (1992).
- <sup>20</sup> S. P. Mikheev, and A. Yu. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**(6), 913(1985).
- <sup>21</sup> L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D 17**, 2369(1978).
- <sup>22</sup> 鈴木洋一郎, 日本物理学会誌, **51**(2), 95(1996).
- <sup>23</sup> J. N. Bahcall, F. Calaprice, A. B. McDonald, and Y. Totsuka, Physics Today **49**(7), 30(1996).
- <sup>24</sup> 中村宏樹, 日本物理学会誌, **51**(11), 829(1996).



<sup>25</sup> L. Landau, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Vol.1, 88(1932); Vol.2, 46(1932).

<sup>26</sup> C. Zener, *Proc. R. Soc. London Ser.A* **137**, 696(1932).

<sup>27</sup> H. J. Maris, and Quan Xiong, *Am. J. Phys.* **56**(12), 1114(1988).

<sup>28</sup> T. Nakagawa, N. J. Kawai, K. Ohta, and M. Kawashima, *Electron. Lett.* **19**, 823(1983).

<sup>29</sup> For crystalline materials: Sadao Adachi, *J. Appl. Phys.* **58**(3), R1(1985).

For isotropic materials: Shin-ichiro Tamura, personal communication.



## 第1章 基本的事項と Pure-Shear 波

### 1.1. 座標変換した立方晶での弾性定数

### 1.2. 層状媒質への SH 波の斜方入射

#### 1.2.1. 単一界面

#### 1.2.2. 複数の層よりなる媒質

### 1.3. 異方的媒質中でのエネルギー流束

#### 1.3.1. バルク中での pure-shear 波

#### 1.3.2. 互いに逆方向に進む pure-shear 波

#### 1.3.3. 超格子中での pure-shear 波

### 1.4. Pure-shear 波の分散関係

#### 1.4.1. 超格子での分散関係

#### 1.4.2. 行列 $T$ の行列式とトレース

### 参考文献

この章では, Shear Horizontal( $SH$ ) 波に対する波動的性質の基本的性質の導出をおこなう.  $SH$ 波の波数ベクトルが異方的な立方晶の  $(\bar{1}10)$  面内にあるとき,  $SH$ 波を媒質の界面に斜方入射しても, 他のモードと相互作用しないので独立に取り扱える. このとき,  $SH$ 波の偏極は界面と常に平行であるだけでなく, 波数ベクトルと常に直交している. つまり,  $SH$ 波は pure-shear である. 一般的な場合には, この章の議論を繰り返せばよい.



### 1.1. 座標変換した立方晶での弾性定数

立方晶の媒質を重ねて作成した超格子中の波動伝播を考えると、座標軸を回転した場合の弾性定数の表現が必要になるので、ここではこれを導く。まず、座標軸が結晶軸と一致している場合の弾性定数は次のように表わされる。

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Fig. 1.1 では、 $X, Y, Z$  で立方晶の結晶軸を示している。 $x, y, z$  は、それぞれ  $[11\bar{2}], [\bar{1}10], [111]$  方向を示す。座標系  $(x, y, z)$  は、座標系  $(X, Y, Z)$  に2回の直交変換を行って得られる。始めに  $(X, Y, Z)$  を  $Z$  軸のまわりに  $45^\circ$  回転させる。次に、 $y$  軸（回転後の  $Y$  軸）を中心に  $\arccos(1/\sqrt{3})$  だけ回転すればよい。この変換後、座標系  $(x, y, z)$  での弾性定数の表現は、

$$C = R_y R_Z c R_Z^t R_y^t = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

となる。ここで、 $R_Z$  と  $R_y$  は変換行列で次のように定義される。

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_Z & \sin^2 \theta_Z & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta_Z \\ \sin^2 \theta_Z & \cos^2 \theta_Z & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta_Z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_Z & -\sin \theta_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_Z & \cos \theta_Z & 0 \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta_Z & \frac{1}{2} \sin 2\theta_Z & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta_Z \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$



$$R_y = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_y & 0 & \sin^2 \theta_y & 0 & -\sin 2\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta_y & 0 & \cos^2 \theta_y & 0 & \sin 2\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta_y & 0 & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_y & 0 & \cos 2\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

回転角は  $\theta_z = \pi/4$ ,  $\theta_y = \arccos(1/\sqrt{3})$  である.  $C$  は対称行列となる. 立方晶のスローネス曲面を求めるときに有用な一般的な弾性定数の表現がすでに与えられているが<sup>1</sup>, それらの表現では数値計算に不都合な表現となっている. そのため, 以降では上に示した座標系  $(x, y, z)$  での弾性定数を用いる.  $C$  の各要素は, 立方晶の独立な弾性定数  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  を用いて表現されるが, 表記を明瞭にするためそれぞれ  $c_{11} = a$ ,  $c_{12} = b$ ,  $c_{44} = c$  として以下に示す. また,  $Q = \arctan(1/\sqrt{2})$  としている.

$$C_{11} = \frac{3a + 5b + 10c}{8} + \frac{a - b - 2c}{8}(2 + 3 \cos 2Q) \cos 2Q,$$

$$C_{12} = \frac{a - b - 2c}{2} \sin^2 Q + b,$$

$$C_{13} = \frac{3}{8}(a - b - 2c) \sin^2 2Q + b,$$

$$C_{14} = 0,$$

$$C_{15} = -\frac{a - b - 2c}{8}(1 + 3 \cos 2Q) \sin 2Q,$$

$$C_{16} = 0,$$

$$C_{21} = C_{12},$$

$$C_{22} = \frac{a + b + 2c}{2},$$

$$C_{23} = \frac{a - b - 2c}{2} \cos^2 Q + b,$$

$$C_{24} = 0,$$

$$C_{25} = \frac{a - b - 2c}{4} \sin 2Q,$$

$$C_{26} = 0,$$

$$C_{31} = C_{13},$$



$$\begin{aligned}
C_{32} &= C_{23}, \\
C_{33} &= \frac{3a + 5b + 10c}{8} + \frac{a - b - 2c}{8}(3 \cos 2Q - 2) \cos 2Q, \\
C_{34} &= 0, \\
C_{35} &= \frac{a - b - 2c}{8}(3 \cos 2Q - 1) \sin 2Q, \\
C_{36} &= 0, \\
C_{41} &= C_{42} = C_{43} = 0, \\
C_{44} &= \frac{a - b - 2c}{2} \cos^2 Q + c, \\
C_{45} &= 0, \\
C_{46} &= \frac{a - b - 2c}{4} \sin 2Q = C_{25}, \\
C_{51} &= C_{15}, \\
C_{52} &= C_{25}, \\
C_{53} &= C_{35}, \\
C_{54} &= 0, \\
C_{55} &= \frac{3}{8}(a - b - 2c) \sin^2 2Q + c, \\
C_{56} &= 0, \\
C_{61} &= C_{62} = C_{63} = 0, \\
C_{64} &= C_{46}, \\
C_{65} &= 0, \\
C_{66} &= \frac{a - b - 2c}{2} \sin^2 Q + c.
\end{aligned}$$

回転後の座標系  $(x, y, z)$  を Fig. 1.1 の  $y$  軸を中心に、さらに角度  $\mu$  だけ  $[110]$  方向に回転したときの弾性定数の具体的な表現は上記の式で次の置き換えをすればよい。

$$Q \rightarrow Q - \mu. \quad (1.5)$$

これは、式 (1.4) で  $\theta_y = \arccos(1/\sqrt{3}) + \mu$  とすることに対応している。上記の弾性定数の要素は角度部分を  $\cos 2Q$  と  $\sin 2Q$  のみで表わすことが可



能であることがただちに解る。これは、動径の方向で波数ベクトルの方向を示し、動径の長さでこの波数ベクトルをもつ波動の位相速度の逆数を表わすスローネス曲線が、2回対称の対称性をもっていることを意味している。以上の表式を用いれば、入射波の波数ベクトルが $(\bar{1}10)$ 面上にある全ての界面を考察することが上記のCを用いて可能である。 $\mu = -\arccos(1/\sqrt{3})$ とおくと、 $(001)$ 面を界面とする超格子を扱える。各層が等方的だとすると、 $a-b-2c=0$ であり、界面をどのようにとっても同じ弾性定数が得られる。



## 1.2. 層状媒質への SH 波の斜方入射

上述した弾性定数を用いて、SH 波の層状媒質での透過と反射について考察を続ける。

### 1.2.1. 単一界面

はじめに、Fig. 1.2 に示す 2 つの媒質がひとつの界面で接している場合を考える。この場合、SH 波は他の 2 つのモードとは相互作用しない。異方的な媒質で界面に斜方入射する場合でも、SH 波の偏極は常に波数ベクトルと直交している。つまり、pure-shear である。立方晶の  $(\bar{1}10)$  面に波数ベクトルがのる SH 波の変位  $\mathbf{u}$  は  $[\bar{1}10]$  方向に偏極しており、次のように表現できる。

$$u_x^{(j)} = u_z^{(j)} = 0, \quad (1.6a)$$

ここで、 $j (= I, II)$  は媒質を示す。また、

$$u_y^{(I)} = A^{(I)} \exp(i\xi x + i\zeta_+^{(I)} z - i\omega t) + B^{(I)} \exp(i\xi x - i\zeta_-^{(I)} z - i\omega t), \quad (1.6b)$$

$$u_y^{(II)} = A^{(II)} \exp(i\xi x + i\zeta_+^{(II)} z - i\omega t), \quad (1.6c)$$

であり、 $u_x^{(j)}$ ,  $u_y^{(j)}$ ,  $u_z^{(j)}$  は変位  $\mathbf{u}^{(j)}$  の成分である。 $\xi$  は波数ベクトルの  $x$  成分を表わすが、系が  $x$  方向に並進対称性をもつため、媒質  $I, II$  ともに同じ値となる。波数ベクトルの  $z$  成分は媒質に依存し、 $\zeta_+^{(I)}$  と  $\zeta_+^{(II)}$  でそれぞれ入射波と透過波の  $z$  成分を示す。 $\zeta_-^{(I)}$  は反射波の  $z$  成分である。異方性のある媒質を考察しているので一般に  $\zeta_+^{(I)} \neq \zeta_-^{(I)}$  となる。

上記の変位に界面  $z = 0$  での境界条件を考える。条件は、

$$\mathbf{u}^{(I)}|_{z=0} = \mathbf{u}^{(II)}|_{z=0}, \quad (1.7a)$$



$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^{(I)}|_{z=0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^{(II)}|_{z=0}, \quad (1.7b)$$

である。ここで、 $\mathbf{n}$  は界面の法線ベクトル、 $\mathbf{T}$  は界面での応力テンソルである。行列で表現すれば、

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & T_6 & 0 \\ T_6 & 0 & T_4 \\ 0 & T_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

となり、非零の要素は次のようになる。

$$T_4 = C_{44}\partial_z u_y + C_{46}\partial_x u_y, \quad (1.10a)$$

$$T_6 = C_{64}\partial_z u_y + C_{66}\partial_x u_y. \quad (1.10b)$$

これより、境界条件は次のように変形される。

$$u_y^{(I)}|_{z=0} = u_y^{(II)}|_{z=0}, \quad (1.11a)$$

$$T_4^{(I)}|_{z=0} = T_4^{(II)}|_{z=0}. \quad (1.11b)$$

つまり、 $z=0$  において、

$$A^{(I)} + B^{(I)} = A^{(II)}, \quad (1.12a)$$

$$\alpha^{(I)} A^{(I)} + \beta^{(I)} = \alpha^{(II)} A^{(II)}, \quad (1.12b)$$



である。ここで  $j = I, II$  として、

$$\alpha^{(j)} = C_{46}^{(j)} \xi^{(j)} + C_{44}^{(j)} \zeta_+^{(j)}, \quad (1.13)$$

$$\beta^{(j)} = C_{46}^{(j)} \xi^{(j)} - C_{44}^{(j)} \zeta_-^{(j)}, \quad (1.14)$$

と定義した。上式を用いて振幅反射係数  $\mathcal{R}$  と振幅透過係数  $\mathcal{T}$  は次式のよう  
に算出できる。

$$\mathcal{R} \equiv \frac{B^{(I)}}{A^{(I)}} = \frac{\alpha^{(I)} - \alpha^{(II)}}{\alpha^{(II)} - \beta^{(I)}}, \quad (1.15)$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{A^{(II)}}{A^{(I)}} = \frac{\alpha^{(I)} - \beta^{(I)}}{\alpha^{(II)} - \beta^{(I)}} = 1 + \mathcal{R}. \quad (1.16)$$

この式は、よく知られている界面に垂直入射した際の式（上式で  $\xi = 0$  とした  
もの）を斜方入斜に拡張したものである。

### 1.2.2. 複数の層よりなる媒質

前節の議論は、Fig. 1.3 に示す複数の層よりなる媒質（つまり超格子）に容易に拡張できる。 $j$  番目の層における変位を記すと、

$$u_x^{(j)} = u_z^{(j)} = 0, \quad (1.17a)$$

$$u_y^{(j)} = A^{(j)} \exp(i\xi x + i\zeta_+^{(j)} z_j - i\omega t) + B^{(j)} \exp(i\xi x - i\zeta_-^{(j)} z_j - i\omega t). \quad (1.17b)$$

これ用いて、応力を表現すると

$$T_4^{(j)} = C_{44}^{(j)} \partial_{z_j} u_y^{(j)} + C_{46}^{(j)} \partial_x u_y^{(j)}$$



$$= i\alpha^{(j)} A^{(j)} \exp(i\xi x + i\zeta_+^{(j)} z_j - i\omega t) + i\beta^{(j)} B^{(j)} \exp(i\xi x - i\zeta_-^{(j)} z_j - i\omega t), \quad (1.18)$$

である。ここで

$$\alpha^{(j)} = C_{46}^{(j)} \xi + C_{44}^{(j)} \zeta_+^{(j)}, \quad (1.19)$$

$$\beta^{(j)} = C_{46}^{(j)} \xi - C_{44}^{(j)} \zeta_-^{(j)}, \quad (1.20)$$

とした。計算では、 $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z}$  であることを用いている。行列で  $u_y^{(j)}$  と  $T_4^{(j)}$  を表現すると、

$$\begin{bmatrix} u_y^{(j)} \\ T_4^{(j)} \end{bmatrix} = M^{(j)}(z_j) \begin{bmatrix} A^{(j)} \\ B^{(j)} \end{bmatrix} \exp(i\xi x - i\omega t), \quad (1.21)$$

ここで、次のように定義した行列を用いた。

$$M^{(j)}(z_j) = \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_+^{(j)} z_j) & \exp(-i\zeta_-^{(j)} z_j) \\ i\alpha^{(j)} \exp(i\zeta_+^{(j)} z_j) & i\beta^{(j)} \exp(-i\zeta_-^{(j)} z_j) \end{bmatrix} = M^{(j)} \Phi^{(j)}(z_j), \quad (1.22)$$

$$M^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\alpha^{(j)} & i\beta^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\Phi^{(j)}(z_j) = \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_+^{(j)} z_j) & 0 \\ 0 & \exp(-i\zeta_-^{(j)} z_j) \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

この境界条件を用いると、隣り合う  $j$  および  $(j+1)$  番目の層での振幅間に次の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} A^{(j+1)} \\ B^{(j+1)} \end{bmatrix} = [M^{(j+1)}(0)]^{-1} M^{(j)}(H_j) \begin{bmatrix} A^{(j)} \\ B^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$



ここで、 $H_j$  は  $j$  番目の層の厚さを示す。この関係式を繰り返し適用すれば、波動の検出層 ( $D$ ) と基盤 ( $S$ ) での振幅に次の関係式が成立する。

$$\begin{bmatrix} A^{(D)} \\ B^{(D)} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} A^{(S)} \\ B^{(S)} \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

ここで、

$$G = [M^{(D)}(0)]^{-1} T_N M^{(S)}(0), \quad (1.27)$$

$$T_N = \prod_{n=1}^{2N} T^{(n)}, \quad (1.28)$$

$$T^{(n)} = M^{(n)}(H_n) [M^{(n)}(0)]^{-1} = M^{(n)} \Phi^{(n)}(H_n) [M^{(n)}]^{-1}. \quad (1.29)$$

式 (1.28) で、 $n$  に対する積は降順にとる。つまり、

$$\prod_{n=1}^{2N} T^{(n)} = T^{(2N)} T^{(2N-1)} T^{(2N-2)} \dots T^{(2)} T^{(1)}$$

とする。周期的な超格子の場合奇数番目の層が全て同じ層で、偶数番目の層も同様であることより、 $T_N$  は次のように書き直せる。

$$T_N = \{T^{(II)} T^{(I)}\}^N. \quad (1.30)$$

検出層 ( $D$ ) 内で透過波が全て吸収されて反射波が存在しない。つまり、 $B^{(D)} = 0$  とすると、超格子全体に対しての振幅反射係数  $\mathcal{R}$  および振幅透過係数  $\mathcal{T}$  を次式で算出可能となる。

$$\mathcal{R} \equiv \frac{B^{(S)}}{A^{(S)}} = -\frac{G_{21}}{G_{22}}, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{A^{(D)}}{A^{(S)}} = G_{11} + G_{12} \mathcal{R}. \quad (1.32).$$



これは、単一界面に対する式 (1.15) と式 (1.16) を複数の界面に拡張したものである。

### 1.3.1. 多層媒質中の propagation 定数

ここで、異方性媒質中の多層媒質のスキームを図 1.4 に示す。このスキームは、式 (1.15) と式 (1.16) を複数の界面に拡張したものである。このスキームは、式 (1.15) と式 (1.16) を複数の界面に拡張したものである。このスキームは、式 (1.15) と式 (1.16) を複数の界面に拡張したものである。

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\
 C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\
 C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\
 C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 w_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 w_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (1.17)$$



### 1.3. 異方的媒質中でのエネルギー流束

この節では，上に述べてきた  $SH$  波に対してのエネルギー流束つまりポインティングベクトルについて，バルク，単一界面をもつ媒質，超格子，等方媒質などについての算出方法を考察する．

#### 1.3.1. バルク中での pure-shear 波

ここで，異方媒質のバルク中でのエネルギー流束（ポインティングベクトル）の表式を求める．界面のある場合には  $SH$  波は意味を持つ横波であるが，バルク中では  $SH$  波は意味を持つ概念ではないので，単に横波，つまり pure-shear 波を考える．今まで扱ってきた弾性定数は，次のように表わしていた．

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Pure-shear 波にたいする媒質の変位  $\mathbf{u}$  を，

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

と表わす．歪み  $\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \tilde{\nabla} \mathbf{u})$ （ $\sim$ は転置を示す）と応力  $\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{S}$  は次のように算出される．



$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial_y u_y \\ 0 \\ \partial_z u_y \\ 0 \\ \partial_x u_y \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} \partial_y u_y \\ C_{22} \partial_y u_y \\ C_{32} \partial_y u_y \\ C_{44} \partial_z u_y + C_{46} \partial_x u_y \\ C_{52} \partial_y u_y \\ C_{64} \partial_z u_y + C_{66} \partial_x u_y \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

一般的に、運動方程式は次のように表現される。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (1.37)$$

ここで、 $\rho$  は媒質の質量密度、 $\mathbf{T}$  は応力であり行列表現で次のようになる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Pure-shear 波に対する運動方程式を求めると、

$$(C_{12} + C_{66}) \partial_x \partial_y u_y + (C_{52} + C_{64}) \partial_y \partial_z u_y = 0, \quad (1.39a)$$

$$C_{66} \partial_x^2 u_y + C_{22} \partial_y^2 u_y + C_{44} \partial_z^2 u_y + 2C_{46} \partial_z \partial_x u_y = \rho \partial_t^2 u_y, \quad (1.39b)$$

$$(C_{52} + C_{46}) \partial_x \partial_y u_y + (C_{44} + C_{32}) \partial_y \partial_z u_y = 0. \quad (1.39c)$$



Fig. 1.4 のようにある方向に進む pure-shear 波を考えると，その変位は次のように表記できる．

$$u_y = |u_y| \exp(i\xi x + i\zeta z - i\omega t). \quad (1.40)$$

これと運動方程式より，

$$C_{66}\xi^2 + C_{44}\zeta^2 + 2C_{46}\xi\zeta = \rho \omega^2. \quad (1.41)$$

この関係式より， pure-shear 波に対するスローネス曲線を求めることも可能である．

一般的に，ポインティングベクトル  $\mathbf{P}$  は

$$\mathbf{P} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{T},$$

$$\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u}.$$

Steinmetz の表記方を用いているので，時間で平均したポインティングベクトルは次のように書き替えられる．

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{T}\}. \quad (1.42)$$

Pure-shear 波に対しては，次式を得る．

$$P_x = \frac{\omega}{2} (C_{64}\zeta + C_{66}\xi) |u_y|^2, \quad (1.43a)$$

$$P_y = 0, \quad (1.43b)$$

$$P_z = \frac{\omega}{2} (C_{44}\zeta + C_{46}\xi) |u_y|^2. \quad (1.43c)$$



以降,  $\mathbf{P}$  は, 時間平均を行ったポインティングベクトルを表わすこととする.

### 1.3.2. 互いに逆方向に進む pure-shear 波

立方晶の  $(\bar{1}10)$  面内の pure-shear 波で  $[\bar{1}10]$  方向に偏極する平面波を扱うのは前節と同様であるが, 互いに逆方向に進む二つの波動が存在する場合をこの節で考える. 変位を次のように仮定する.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.44a)$$

$$u_y = \{A \exp(i\zeta_+ z) + B \exp(-i\zeta_- z)\} \exp(i\xi x - \omega t). \quad (1.44b)$$

これより, 応力テンソルは

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & T_6 & 0 \\ T_6 & 0 & T_4 \\ 0 & T_4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

$$T_6 = C_{64} \partial_z u_y + C_{66} \partial_x u_y, \quad (1.46a)$$

$$T_4 = C_{44} \partial_z u_y + C_{46} \partial_x u_y. \quad (1.46b)$$

時間  $t$  について平均したポインティングベクトルは, 次のように与えられている.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -\frac{1}{2} \text{Re}\{(\partial_t \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{T})\} \\ &= -\frac{\omega}{2} \text{Re}\{i \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{T}\}. \end{aligned}$$



これに変位と応力の非零の成分を考慮することより,

$$P_x = -\frac{\omega}{2} \text{Re}\{iu_y^* T_6\}, \quad (1.47a)$$

$$P_y = 0, \quad (1.47b)$$

$$P_z = -\frac{\omega}{2} \text{Re}\{iu_y^* T_4\}. \quad (1.47c)$$

式 (1.44b) を上式に代入すれば,

$$P_x = \frac{\omega}{2} (C_{64}Z + C_{66}\Xi), \quad (1.48a)$$

$$P_y = 0, \quad (1.48b)$$

$$P_z = \frac{\omega}{2} (C_{44}Z + C_{46}\Xi), \quad (1.48c)$$

ここで,  $Z$ ,  $\Xi$  は次式で定義する.

$$Z = \zeta_+ |A|^2 - \zeta_- |B|^2 + \zeta_+ \text{Re}\{AB^* \exp(i\zeta_+ z + i\zeta_- z)\} - \zeta_- \text{Re}\{A^* B \exp(-i\zeta_+ z - i\zeta_- z)\}, \quad (1.49)$$

$$\Xi = \xi(|A|^2 + |B|^2) + 2\xi \text{Re}\{AB^* \exp(i\zeta_+ z + i\zeta_- z)\}. \quad (1.50)$$

考慮している二つの波がインコヒーレントもしくは検出する際に充分に分離できるとき,  $Z$  と  $\Xi$  の表式で  $\text{Re}\{\}$  の項が無視できる. これより, ポインティングベクトルは二つの部分  $P_{z+}$  と  $P_{z-}$  で次のように表現される.



$$P_z = P_{z+} - P_{z-}, \quad (1.51)$$

ここで,

$$P_{z+} = \frac{\omega}{2}(C_{44}\zeta_+ + C_{46}\xi)|A|^2, \quad (1.52)$$

$$P_{z-} = \frac{\omega}{2}(C_{44}\zeta_- - C_{46}\xi)|B|^2. \quad (1.53)$$

式 (1.51) で  $P_{z-}$  の前の負の符号は, エネルギーの流れが  $z$  軸の負の方向に向かう事を示す.

### 1.3.3. 超格子中での pure-shear 波

以上の議論で超格子に対する表現をまとめる. 転送行列法を用い, Fig. 1.5 の超格子での基盤と検出層内の振幅の関係を次のように表現できる.

$$\begin{bmatrix} A^{(D)} \\ 0 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} A^{(S)} \\ B^{(S)} \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

ここで,  $A^{(S)}$  は基盤中から超格子に入射する波動の変位振幅であり,  $B^{(S)}$  は超格子からの反射波の振幅である. さらに,  $A^{(D)}$  は検出層内での振幅であり, この検出層内では反射波が無いとして, その振幅を 0 としている. これより, 振幅の比は次のようになる.

$$\mathcal{R} \equiv \frac{B^{(S)}}{A^{(S)}} = -\frac{G_{21}}{G_{22}}, \quad (1.55)$$

$$\mathcal{T} \equiv \frac{A^{(D)}}{A^{(S)}} = G_{11} + G_{12}\mathcal{R}. \quad (1.56)$$

基盤中でのポインティングベクトルの  $z$  方向の成分は,



$$P_z^{(S)} \equiv P_{z+}^{(S)} - P_{z-}^{(S)}, \quad (1.57)$$

ここで,

$$P_{z+}^{(S)} \equiv \frac{\omega}{2} (C_{44}^{(S)} \zeta_+^{(S)} + C_{46}^{(S)} \xi) |A^{(S)}|^2, \quad (1.58)$$

$$P_{z-}^{(S)} \equiv \frac{\omega}{2} (C_{44}^{(S)} \zeta_-^{(S)} - C_{46}^{(S)} \xi) |B^{(S)}|^2. \quad (1.59)$$

検出層内でのポインティングベクトルの  $z$  成分は,

$$P_z^{(D)} = \frac{\omega}{2} (C_{44}^{(D)} \zeta_+^{(D)} + C_{46}^{(D)} \xi) |A^{(D)}|^2. \quad (1.60)$$

ゆえに,  $z$  軸に沿ってのエネルギーの透過率  $T$  と反射率  $R$  は, 次のように導出される.

$$T \equiv \frac{P_z^{(D)}}{P_{z+}^{(S)}} = \frac{C_{44}^{(D)} \zeta_+^{(D)} + C_{46}^{(D)} \xi}{C_{44}^{(S)} \zeta_+^{(S)} + C_{46}^{(S)} \xi} |\mathcal{T}|^2, \quad (1.61)$$

$$R \equiv \frac{P_{z-}^{(S)}}{P_{z+}^{(S)}} = \frac{C_{44}^{(S)} \zeta_-^{(S)} - C_{46}^{(S)} \xi}{C_{44}^{(S)} \zeta_+^{(S)} + C_{46}^{(S)} \xi} |\mathcal{R}|^2. \quad (1.62)$$



## 1.4. Pure-shear 波の分散関係

### 1.4.1. 周期超格子での分散関係

Fig. 1.6 に示す超格子の二重層内での pure-shear 波の変位は、層  $j$  で次のようになる。

$$u_y^{(j)} = A^{(j)} \exp(i\xi x + i\zeta_+^{(j)} z_j - i\omega t) + B^{(j)} \exp(i\xi x - i\zeta_-^{(j)} z_j - i\omega t), \quad (1.63)$$

ここで、 $j = I, II$  である。層  $j$  での非零の応力成分は、

$$\begin{aligned} T_4^{(j)} &= C_{44}^{(j)} \partial_{z_j} u_y + C_{46}^{(j)} \partial_x u_y \\ &= i\alpha^{(j)} A^{(j)} \exp(i\xi x + i\zeta_+^{(j)} z_j - i\omega t) + i\beta^{(j)} B^{(j)} \exp(i\xi x - i\zeta_-^{(j)} z_j - i\omega t), \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\alpha^{(j)} = C_{44}^{(j)} \zeta_+^{(j)} + C_{46}^{(j)} \xi, \quad (1.65)$$

$$\beta^{(j)} = -C_{44}^{(j)} \zeta_-^{(j)} + C_{46}^{(j)} \xi. \quad (1.66)$$

超格子が二重層の繰り返しによる周期的な構造をもつとして、境界条件は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_y^{(II)} \\ T_4^{(II)} \end{bmatrix}_{z_{II}=0} = \begin{bmatrix} u_y^{(I)} \\ T_4^{(I)} \end{bmatrix}_{z_I=H_I}. \quad (1.67)$$

振幅を用いて明記すれば、

$$A^{(II)} + B^{(II)} = \exp(i\zeta_+^{(I)} H_I) A^{(I)} + \exp(-i\zeta_-^{(I)} H_I) B^{(I)}, \quad (1.68a)$$

$$\alpha^{(II)} A^{(II)} + \beta^{(II)} B^{(II)} = \alpha^{(I)} \exp(i\zeta_+^{(I)} H_I) A^{(I)} + \beta^{(I)} \exp(-i\zeta_-^{(I)} H_I) B^{(I)}. \quad (1.68b)$$



行列表記を用いて書き直せば,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^{(II)} & \beta^{(II)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(II)} \\ B^{(II)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_+^{(I)} H_I) & \exp(-i\zeta_-^{(I)} H_I) \\ \alpha^{(I)} \exp(i\zeta_+^{(I)} H_I) & \beta^{(I)} \exp(-i\zeta_-^{(I)} H_I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(I)} \\ B^{(I)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

周期性は, Floquet の定理に対応し, 次のように表現できる.

$$\begin{bmatrix} u_y^{(II)} \\ T_4^{(II)} \end{bmatrix}_{z_{II}=H_{II}} = \chi \begin{bmatrix} u_y^{(I)} \\ T_4^{(I)} \end{bmatrix}_{z_I=0}, \quad (1.70)$$

ここで  $|\chi|=1$ . つまり, 実数  $q$  を用いて  $\chi = \exp(iqD)$  ( $D = H_I + H_{II}$ ) とおくことが可能である. 行列表記を用いて, つぎの関係式がえられる.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_+^{(II)} H_{II}) & \exp(-i\zeta_-^{(II)} H_{II}) \\ \alpha^{(II)} \exp(i\zeta_+^{(II)} H_{II}) & \beta^{(II)} \exp(-i\zeta_-^{(II)} H_{II}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(II)} \\ B^{(II)} \end{bmatrix} \\ &= \chi \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^{(I)} & \beta^{(I)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(I)} \\ B^{(I)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

ここで, 行列  $M^{(j)}(z_j)$  を次のように定義する.

$$M^{(j)}(z_j) = \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_+^{(j)} z_j) & \exp(-i\zeta_-^{(j)} z_j) \\ \alpha^{(j)} \exp(i\zeta_+^{(j)} z_j) & \beta^{(j)} \exp(-i\zeta_-^{(j)} z_j) \end{bmatrix}. \quad (1.72)$$

これを用いれば, 境界条件と周期性は次のように表現可能である.

$$\begin{bmatrix} M^{(I)}(H_I) & -M^{(II)}(0) \\ \chi M^{(I)}(0) & -M^{(II)}(H_{II}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^{(I)} \\ W^{(II)} \end{bmatrix} = 0, \quad (1.73)$$

ここで,

$$W^{(I)} = \begin{bmatrix} A^{(I)} \\ B^{(I)} \end{bmatrix}, \quad (1.74a)$$



$$W^{(II)} = \begin{bmatrix} A^{(II)} \\ B^{(II)} \end{bmatrix}. \quad (1.74b)$$

ベクトル  $W^{(I)}$  と  $W^{(II)}$  は非零である。ゆえに、次式が要請される。

$$\det \begin{bmatrix} M^{(I)}(H_I) & -M^{(II)}(0) \\ \chi M^{(I)}(0) & -M^{(II)}(H_{II}) \end{bmatrix} = 0. \quad (1.75)$$

変形してゆけば、

$$\{M^{(II)}(H_{II}) - \chi M^{(I)}(0)[M^{(I)}(H_I)]^{-1}M^{(II)}(0)\}W^{(II)} = 0, \quad (1.76a)$$

または、

$$\{M^{(II)}(H_{II})[M^{(II)}(0)]^{-1}M^{(I)}(H_I) - \chi M^{(I)}(0)\}W^{(I)} = 0. \quad (1.76b)$$

$W^{(II)} \neq 0$  および  $W^{(I)} \neq 0$  であることより、

$$\det\{M^{(II)}(H_{II}) - \chi M^{(I)}(0)[M^{(I)}(H_I)]^{-1}M^{(II)}(0)\} = 0, \quad (1.77a)$$

$$\det\{M^{(II)}(H_{II})[M^{(II)}(0)]^{-1}M^{(I)}(H_I) - \chi M^{(I)}(0)\} = 0. \quad (1.77b)$$

一般に、 $\det[AB] = \det[A]\det[B] = \det[BA]$  である。この等式を用いれば、次式を得る。

$$\det\{\chi 1 - M^{(I)}(0)[M^{(I)}(H_I)]^{-1}M^{(II)}(0)[M^{(II)}(H_{II})]^{-1}\} \det\{M^{(II)}(H_{II})\} = 0, \quad (1.78a)$$



$$\det\{M^{(II)}(H_{II})[M^{(II)}(0)]^{-1}M^{(I)}(H_I)[M^{(I)}(0)]^{-1}-\chi\mathbf{1}\}\det\{M^{(I)}(0)\}=0, \quad (1.78b)$$

ここで、 $\mathbf{1}$  は  $2 \times 2$  の単位行列である。さらに、次の行列を定義する。

$$T = T^{(II)}T^{(I)}, \quad (1.79)$$

$$T^{(j)} = M^{(j)}(H_j)[M^{(j)}(0)]^{-1}. \quad (1.80)$$

以上の議論より、次の関係式が得られる。

$$\det[T^{-1} - \chi^{-1}\mathbf{1}] = 0, \quad (1.81a)$$

$$\det[T - \chi\mathbf{1}] = 0. \quad (1.81b)$$

上記の二式は等価である。値  $\chi = \exp(iqD)$  は、行列  $T$  の固有値である。ここで、 $q$  と  $D$  は実数である。振動数と入射角を与えれば、行列  $T$  が得られ、固有値  $\chi$  が求められる。さらに、 $\chi$  によって超格子中の波数  $q$  が与えられる。以上の手順で、与えた入射角に対する波数と振動数の関係つまり分散関係が求められる。

#### 1.4.2. 行列 $T$ の行列式とトレース

次のように行列  $f^{(I,II)}$  と  $\Phi^{(j)}$  を定義する。

$$\begin{aligned} f^{(I,II)} &= [M^{(II)}]^{-1}M^{(I)} \\ &= \frac{1}{\beta^{(II)} - \alpha^{(II)}} \begin{bmatrix} \beta^{(II)} - \alpha^{(I)} & \beta^{(II)} - \beta^{(I)} \\ -\alpha^{(II)} + \alpha^{(I)} & -\alpha^{(II)} + \beta^{(I)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.82)$$



$$\Phi^{(j)} = \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_+^{(j)} H_j) & 0 \\ 0 & \exp(-i\zeta_-^{(j)} H_j) \end{bmatrix}, \quad (1.83)$$

これより、ただちに  $f^{(I,II)}$  が次の関係式を満たすことがわかる。

$$f^{(II,I)} = [f^{(I,II)}]^{-1}. \quad (1.84)$$

これより、 $T$  の行列式とトレースが次のように算出できる。

$$\begin{aligned} \det[T^{(j)}] &= \det[\Phi^{(II)} f^{(I,II)} \Phi^{(I)} f^{(II,I)}] \\ &= \det[\Phi^{(II)} \Phi^{(I)}] \\ &= \exp(i\zeta_+^{(j)} H_j - i\zeta_-^{(j)} H_j). \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\det[T] = \exp(i\zeta_+^{(II)} H_{II} - i\zeta_-^{(II)} H_{II}) \exp(i\zeta_+^{(I)} H_I - i\zeta_-^{(I)} H_I). \quad (1.86)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}[T] &= \frac{1}{(\alpha^{(II)} - \beta^{(II)})(\alpha^{(I)} - \beta^{(I)})} \\ &\times [(\beta^{(II)} - \beta^{(I)})(\alpha^{(II)} - \alpha^{(I)})\{\exp(i\zeta_+^{(II)} H_{II} - i\zeta_-^{(I)} H_I) + \exp(i\zeta_-^{(II)} H_{II} - i\zeta_+^{(I)} H_I)\} \\ &- (\beta^{(II)} - \alpha^{(I)})(\alpha^{(II)} - \beta^{(I)})\{\exp(i\zeta_+^{(II)} H_{II} - i\zeta_+^{(I)} H_I) + \exp(i\zeta_-^{(II)} H_{II} - i\zeta_-^{(I)} H_I)\}]. \end{aligned} \quad (1.87)$$

なお、行列  $M$  は次の性質をもつ。

$$M^{(j)}(a+b) = M^{(j)}(a)\Phi^{(j)}(b). \quad (1.88)$$

$$M^{(j)}(H_j)[M^{(j)}(0)]^{-1} = M^{(j)}(0)[M^{(j)}(-H_j)]^{-1}. \quad (1.89)$$



## 参考文献

- <sup>1</sup> A. G. Every, Phys. Rev. Lett. **42**, 1065 (1979).

## Figure Captions

**Fig. 1.1** 弾性定数を求める座標系. 軸  $X, Y, Z$  は立方晶の結晶軸である. 軸  $x, y, z$  は,  $(X, Y, Z)$  に2回の直交変換を行って得られる. 座標軸  $x, y, z$  は, それぞれ  $[11\bar{2}]$ ,  $[\bar{1}10]$ ,  $[111]$  方向を向く.

**Fig. 1.2** 媒質  $I$  での入射波の波数ベクトル  $(\xi, 0, \zeta_+^{(I)})$  を示す. 媒質  $II$  との界面からの  $I$  への反射波は, 波数ベクトル  $(\xi, 0, \zeta_-^{(I)})$  をもつ. 媒質  $II$  への透過波に対しては  $(\xi, 0, \zeta_+^{(II)})$  となる. 系の  $x$  方向への並進対称性より, これら三つの波数ベクトルは, 同じ  $x$  成分  $\xi$  をもつ.

**Fig. 1.3** 超格子の構造を示す. 各層は, 1 から  $2N$  までの番号を付してある. 周期的な超格子では, 奇数番目の層は等価であり媒質  $I$  よりなり, 偶数番目の層は等価な媒質  $II$  より成るとする. 軸  $z_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, 2N$ ) は全て  $z$  軸と平行で, それらの原点は層  $j$  と  $j-1$  の界面にある. 単一境界の場合と同様, 基盤 ( $S$ ) 中の波数ベクトル  $k_{\pm}^{(S)}$  は, 検出層 ( $D$ ) 中の  $k_{\pm}^{(D)}$  と同じ  $x$  成分  $\xi$  をもつ.

**Fig. 1.4** バルク中の波動の波数ベクトルを  $\mathbf{k} = (\xi, 0, \zeta)$  と表わす. 波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と  $z$  軸との角度を  $\phi$  と定義する.

**Fig. 1.5** 超格子の基盤と検出層での波動の入射, 反射, 透過の様子を示す. この構造は, 単一境界の場合と類似したものである. このふたつの相違点は基盤と検出層内での振幅の関係を表わす行列のみである.

**Fig. 1.6** 厚さ  $H_I$  と  $H_{II}$  のふたつの層より成る二重層を示す. 軸  $z$  は  $[111]$  方向を向き, 軸  $x$  は  $[11\bar{2}]$  を向いている. 軸  $z_I$  と  $z_{II}$  は各層  $I, II$  内にあり, 取り得る値はそれぞれ実数の区間  $[0, H_I], [0, H_{II}]$  にある.



## 第2章

### Quasi-Shear と Quasi-Longitudinal 波

#### 2.1. スローネス曲線と偏極

##### 2.1.1. スローネス曲線

##### 2.1.2. 偏極

#### 2.2. (111) 界面をもつ超格子中の波動

##### 2.2.1. 歪と応力

##### 2.2.2. 界面での応力

##### 2.2.3. 転送行列

##### 2.2.4. ポインティングベクトル

##### 2.2.5. 反射率と透過率

#### 2.3. 構造因子

##### 2.3.1. 反射に対する構造因子

##### 2.3.2. 透過に対する構造因子

##### 2.3.3. 振幅反射係数と振幅透過係数

#### 2.4. 等方的媒質

##### 2.4.1. 転送行列

##### 2.4.2. 反射率および透過率

第1章で述べたように、pure-shear 波は他の二つのモードとは相互作用しない。この章では、pure-shear 以外の二つのモードを扱う。これら



のモードは互いに相互作用し、偏極ベクトルは波数ベクトルの向きによって波数ベクトルとの相対的な角度が変化する。この二つのモードを  $T$  と  $L$  で以後表わすが、正確にはそれぞれ、 $SV$  (または *quasi-shear*)、 $P$  (または *quasi-compressional*, もしくは *quasi-logitudinal*) と呼ばれるモードに対応している。

第1章で扱った *pure-shear* 波は、弾性定数を等方的なものに置き換えれば、等方媒質中の  $SH$  波に対する議論にそのまま適応可能である。この章で扱う  $T, L$  の二つのモードも同様であるが、表記が複雑となっているため、最後の節で主要な行列等の等方媒質での表現を示すことにする。



## 2.1. スローネス曲線と偏極

波数ベクトルが  $(\bar{1}10)$  面にある場合のスローネス曲線と偏極について考察する。弾性定数は、第1章で導出したものを用いる。これにより、スローネス曲線や偏極のようすを調べる際に波動の入射角や伝搬方向を陽に考慮する必要がなくなる。波動の伝搬方向は、弾性定数に対する直交変換の行列  $R_y$  で角度  $\theta_y$  を変えればよい。ゆえに、この節では、波数ベクトルを常に  $z$  軸と平行と考える。

### 2.1.1. スローネス曲線

第1章とは異なり、変位を次のように  $x$  と  $z$  の2成分より成ると仮定する。

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Pure-shear 波の場合と同じ方法で、歪と応力を次のように算出できる。

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{S}. \quad (2.3)$$

これを成分で明示すると、

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_x u_x \\ 0 \\ \partial_z u_z \\ \partial_y u_z \\ \partial_z u_x + \partial_x u_z \\ \partial_y u_x \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$



$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}\partial_x u_x + C_{13}\partial_z u_z + C_{15}(\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ C_{21}\partial_x u_x + C_{23}\partial_z u_z + C_{25}(\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ C_{31}\partial_x u_x + C_{33}\partial_z u_z + C_{35}(\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ C_{44}\partial_y u_z + C_{46}\partial_y u_x \\ C_{51}\partial_x u_x + C_{53}\partial_z u_z + C_{55}(\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ C_{64}\partial_y u_z + C_{66}\partial_y u_x \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

変位の成分を,

$$u_x = |u_x| \exp(i\zeta z - i\omega t), \quad (2.6a)$$

$$u_z = |u_z| \exp(i\zeta z - i\omega t), \quad (2.6b)$$

とおくと, 運動方程式 (1.37) より, 次の行列表現を得る.

$$\begin{bmatrix} C_{55} & C_{35} \\ C_{35} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \end{bmatrix} = \chi \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

ここで,  $\chi$  は係数行列の固有値で,

$$\chi = \rho\omega^2/\zeta^2, \quad (2.8)$$

と定義する.  $\zeta$  は波数ベクトルの  $z$  成分,  $\omega$  は角振動数,  $\rho$  は媒質の質量密度である. 固有値  $\chi$  は, 次の方程式の解でなければならない.

$$\chi^2 - (C_{55} + C_{33})\chi + C_{55}C_{33} - C_{35}^2 = 0. \quad (2.9)$$

解は, 次のふたつである.

$$\chi_L = \frac{C_{55} + C_{33} + \sqrt{(C_{55} - C_{33})^2 + 4C_{35}^2}}{2}, \quad (2.10a)$$



$$\chi_T = \frac{C_{55} + C_{33} - \sqrt{(C_{55} - C_{33})^2 + 4C_{35}^2}}{2}. \quad (2.10b)$$

ここで、 $\chi_L > \chi_T$  であることが、直ちに判る。この不等式は、モード  $L$  の速さがモード  $T$  の速さより速いことを示す。上記の表式を用いれば、次のようにスローネス曲線を導出できる。

$$\frac{1}{v_L} = \sqrt{\frac{\rho}{\chi_L}}, \quad (2.11a)$$

$$\frac{1}{v_T} = \sqrt{\frac{\rho}{\chi_T}}. \quad (2.11b)$$

以降で示すが、モード  $L$  は quasi-longitudinal であり、モード  $T$  は quasi-shear である。スローネス曲線を GaAs を例として、Fig. 2.1 に示す。

### 2.1.2. 偏極

モード  $L$  と  $T$  の偏極は、スローネス曲線を求めたときの式 (2.7) にある弾性定数の行列から、その固有ベクトルとして導出される。つまり、

$$\begin{bmatrix} C_{55} & C_{35} \\ C_{35} & C_{33} \end{bmatrix} \mathbf{e} = \chi \mathbf{e}. \quad (2.12)$$

固有ベクトル  $\mathbf{e}$  を、次のような成分で表示する。

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_z \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

これより、式 (2.12) は

$$(C_{55} - \chi)e_x + C_{35}e_z = 0, \quad (2.14a)$$



$$C_{35}e_x + (C_{33} - \chi)e_z = 0, \quad (2.14b)$$

となる。e は、規格化されているとする。つまり、

$$|e| = e_x^2 + e_z^2 = 1. \quad (2.15)$$

これより、二つの固有値に対してそれぞれ次の関係式が得られる。

$$e_x = \frac{C_{35}}{\chi - C_{55}}e_z, \quad (2.16a)$$

$$e_z = \frac{C_{35}}{\chi - C_{33}}e_x, \quad (2.16b)$$

この自乗にたいしては、

$$e_z^2 = \frac{(\chi - C_{55})^2}{(\chi - C_{55})^2 + C_{35}^2}, \quad (2.16c)$$

$$e_x^2 = \frac{(\chi - C_{33})^2}{(\chi - C_{33})^2 + C_{35}^2}. \quad (2.16d)$$

偏極ベクトルの成分がモード  $L$  では  $e_z$  が常に正、モード  $T$  では  $e_x$  が常に正ととる。つまり、

$$e_z > 0 \quad (\text{for mode } L),$$

$$e_x > 0 \quad (\text{for mode } T).$$

上述の計算で、波数ベクトルは常に  $z$  軸と平行だとしている。偏極を示す波数ベクトルと偏極ベクトルとの相対角度  $\eta$  は、次のようになる。

$$\tan \eta_L = \frac{e_{Lx}}{e_{Lz}} = \frac{C_{35}}{\chi_L - C_{55}}, \quad (2.17a)$$



$$\tan \eta_T = \frac{e_{Tx}}{e_{Tz}} = \frac{\chi_T - C_{33}}{C_{35}}, \quad (2.17b)$$

ここで,

$$\mathbf{e}_L = \begin{bmatrix} e_{Lx} \\ e_{Lz} \end{bmatrix}, \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{e}_T = \begin{bmatrix} e_{Tx} \\ e_{Tz} \end{bmatrix}, \quad (2.18b)$$

は、それぞれモード  $L$  と  $T$  に対する偏極ベクトルである。これらの偏極ベクトルは、互いに直交している。つまり、

$$\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_T = 0. \quad (2.19)$$

なお、固有値には次の関係がある。

$$\chi_T + \chi_L = C_{55} + C_{33}. \quad (2.20)$$

波数ベクトルと偏極ベクトルの空間的配置を Fig. 2.2(a),(b) に示す。偏極ベクトルを求めた例が Fig. 2.2(c) であり、動径の方向で波数ベクトルの方向を示し、動径の長さで偏極ベクトルの波数ベクトルとの相対的な角度を示す。媒質は GaAs としている。これらの図より、モード  $T$  は、波数ベクトルと偏極ベクトルが常に直交しておらず、モード  $L$  は、波数ベクトルと偏極ベクトルが常に平行でないことが判る。これより、それぞれを quasi-shear, quasi-longitudinal と呼ぶ。



## 2.2. (111) 界面をもつ超格子中の波動

### 2.2.1. 歪と応力

超格子中の  $j$  番目の層内での変位を、次のように定義する。

$$\mathbf{u}^{(j)} = \begin{bmatrix} u_x^{(j)} \\ u_z^{(j)} \end{bmatrix} = \sum_{J=T,L} \{A_J^{(j)} \mathbf{e}_{J+}^{(j)} \exp(i\zeta_{J+}^{(j)} z_j) + B_J^{(j)} \mathbf{e}_{J-}^{(j)} \exp(-i\zeta_{J-}^{(j)} z_j)\} \exp(i\xi x - i\omega t), \quad (2.21)$$

ここで、 $\xi$  と  $\zeta_{J\pm}^{(j)}$  は、それぞれ波数ベクトルの  $x, z$  成分であり、 $\omega$  は角振動数である。また、

$$\mathbf{e}_{J\pm}^{(j)} = \begin{bmatrix} e_{J\pm x}^{(j)} \\ e_{J\pm z}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

は、層  $j = A, B$  でのモード  $J = T, L$  の偏極ベクトルである。行列表現で、変位は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_x^{(j)} \\ u_z^{(j)} \end{bmatrix} / \exp(i\xi x - i\omega t) = \begin{bmatrix} e_{T+x}^{(j)} & e_{L+x}^{(j)} & e_{T-x}^{(j)} & e_{L-x}^{(j)} \\ e_{T+z}^{(j)} & e_{L+z}^{(j)} & e_{T-z}^{(j)} & e_{L-z}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_{T+}^{(j)} z_j) A_T^{(j)} \\ \exp(i\zeta_{L+}^{(j)} z_j) A_L^{(j)} \\ \exp(-i\zeta_{T-}^{(j)} z_j) B_T^{(j)} \\ \exp(-i\zeta_{L-}^{(j)} z_j) B_L^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

歪  $\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u}$  は、次の成分をもつ。

$$S_1^{(j)} = \partial_x u_x^{(j)} = \sum_{J=T,L} i\xi \{A_J^{(j)} e_{J+x}^{(j)} \exp(i\zeta_{J+}^{(j)} z_j) + B_J^{(j)} e_{J-x}^{(j)} \exp(-i\zeta_{J-}^{(j)} z_j)\} \exp(i\xi x - i\omega t), \quad (2.24a)$$

$$S_2^{(j)} = 0, \quad (2.24b)$$

$$S_3^{(j)} = \partial_z u_z^{(j)}$$



$$= \sum_{J=T,L} \{i\zeta_{J+}^{(j)} A_J^{(j)} e_{J+z}^{(j)} \exp(i\zeta_{J+}^{(j)} z_j) - i\zeta_{J-}^{(j)} B_J^{(j)} e_{J-z}^{(j)} \exp(-i\zeta_{J-}^{(j)} z_j)\} \exp(i\xi x - i\omega t), \quad (2.24c)$$

$$S_4^{(j)} = \partial_x u_z^{(j)} = \sum_{J=T,L} i\xi \{A_J^{(j)} e_{J+z}^{(j)} \exp(i\zeta_{J+}^{(j)} z_j) + B_J^{(j)} e_{J-z}^{(j)} \exp(-i\zeta_{J-}^{(j)} z_j)\} \exp(i\xi x - i\omega t), \quad (2.24d)$$

$$\begin{aligned} S_5^{(j)} &= \partial_z u_x^{(j)} + \partial_x u_z^{(j)} = \\ &\sum_{J=T,L} \{i\zeta_{J+}^{(j)} A_J^{(j)} e_{J+x}^{(j)} \exp(i\zeta_{J+}^{(j)} z_j) - i\zeta_{J-}^{(j)} B_J^{(j)} e_{J-x}^{(j)} \exp(-i\zeta_{J-}^{(j)} z_j)\} \exp(i\xi x - i\omega t) \\ &+ \sum_{J=T,L} i\xi \{A_J^{(j)} e_{J+z}^{(j)} \exp(i\zeta_{J+}^{(j)} z_j) + B_J^{(j)} e_{J-z}^{(j)} \exp(-i\zeta_{J-}^{(j)} z_j)\} \exp(i\xi x - i\omega t), \end{aligned} \quad (2.24e)$$

$$S_6^{(j)} = \partial_y u_x^{(j)} = 0. \quad (2.24f)$$

これと弾性定数  $\mathbf{C}$  を用いて、応力は  $\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{S}$  となる。成分で表示すれば、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11}S_1 + C_{13}S_3 + C_{15}S_5 \\ C_{21}S_1 + C_{23}S_3 + C_{25}S_5 \\ C_{31}S_1 + C_{33}S_3 + C_{35}S_5 \\ C_{44}S_4 \\ C_{51}S_1 + C_{53}S_3 + C_{55}S_5 \\ C_{64}S_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。



### 2.2.2. 界面での応力

界面が  $z$  軸と直交しているので、

$$\vec{\tau} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{T},$$

を定義する。ここで、 $\mathbf{e}_z$  は界面の法線ベクトルである。成分で表示すれば、

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} T_1 & 0 & T_5 \\ 0 & T_2 & 0 \\ T_5 & 0 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_5 \\ 0 \\ T_3 \end{bmatrix}.$$

となる。ゆえに、層  $j$  での  $\vec{\tau}$  を次のように再定義する。

$$\vec{\tau}^{(j)} = \begin{bmatrix} \tau_x^{(j)} \\ \tau_z^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_5^{(j)} \\ T_3^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{51}^{(j)} S_1^{(j)} + C_{53}^{(j)} S_3^{(j)} + C_{55}^{(j)} S_5^{(j)} \\ C_{31}^{(j)} S_1^{(j)} + C_{33}^{(j)} S_3^{(j)} + C_{35}^{(j)} S_5^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

この式中の歪を式 (2.24) を用いて展開すれば、

$$\begin{aligned} & \tau_x^{(j)} / i \exp(i\xi x - i\omega t) \\ &= \sum_{J=T,L} \{ C_{51}^{(j)} \xi e_{J+x}^{(j)} + C_{53}^{(j)} \zeta_{J+} e_{J+z}^{(j)} + C_{55}^{(j)} \zeta_{J+} e_{J+x}^{(j)} + C_{55}^{(j)} \xi e_{J+z}^{(j)} \} \exp(i\zeta_{J+z}) A_J^{(j)} \\ &+ \sum_{J=T,L} \{ C_{51}^{(j)} \xi e_{J-x}^{(j)} - C_{53}^{(j)} \zeta_{J-} e_{J-z}^{(j)} - C_{55}^{(j)} \zeta_{J-} e_{J-x}^{(j)} + C_{55}^{(j)} \xi e_{J-z}^{(j)} \} \exp(-i\zeta_{J-z}) B_J^{(j)}, \end{aligned} \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned} & \tau_z^{(j)} / i \exp(i\xi x - i\omega t) \\ &= \sum_{J=T,L} \{ C_{31}^{(j)} \xi e_{J+x}^{(j)} + C_{33}^{(j)} \zeta_{J+} e_{J+z}^{(j)} + C_{35}^{(j)} \zeta_{J+} e_{J+x}^{(j)} + C_{35}^{(j)} \xi e_{J+z}^{(j)} \} \exp(i\zeta_{J+z}) A_J^{(j)} \\ &+ \sum_{J=T,L} \{ C_{31}^{(j)} \xi e_{J-x}^{(j)} - C_{33}^{(j)} \zeta_{J-} e_{J-z}^{(j)} - C_{35}^{(j)} \zeta_{J-} e_{J-x}^{(j)} + C_{35}^{(j)} \xi e_{J-z}^{(j)} \} \exp(-i\zeta_{J-z}) B_J^{(j)}. \end{aligned} \quad (2.27b)$$

これを行列表現すると、



$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \tau_x^{(j)} \\ \tau_z^{(j)} \end{bmatrix} / i \exp(i\xi x - i\omega t) = \begin{bmatrix} T_5^{(j)} \\ T_3^{(j)} \end{bmatrix} / i \exp(i\xi x - i\omega t) \\
& = \begin{bmatrix} \kappa_{T+}^{(j)} & \kappa_{L+}^{(j)} & \kappa_{T-}^{(j)} & \kappa_{L-}^{(j)} \\ \lambda_{T+}^{(j)} & \lambda_{L+}^{(j)} & \lambda_{T-}^{(j)} & \lambda_{L-}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_{T+}^{(j)} z_j) A_T^{(j)} \\ \exp(i\zeta_{L+}^{(j)} z_j) A_L^{(j)} \\ \exp(-i\zeta_{T-}^{(j)} z_j) B_T^{(j)} \\ \exp(-i\zeta_{L-}^{(j)} z_j) B_L^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (2.28)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\kappa_{J+}^{(j)} = (C_{51}^{(j)} e_{J+x}^{(j)} + C_{55}^{(j)} e_{J+z}^{(j)}) \xi + (C_{55}^{(j)} e_{J+x}^{(j)} + C_{53}^{(j)} e_{J+z}^{(j)}) \zeta_{J+}^{(j)}, \quad (2.29a)$$

$$\kappa_{J-}^{(j)} = (C_{51}^{(j)} e_{J-x}^{(j)} + C_{55}^{(j)} e_{J-z}^{(j)}) \xi - (C_{55}^{(j)} e_{J-x}^{(j)} + C_{53}^{(j)} e_{J-z}^{(j)}) \zeta_{J-}^{(j)}, \quad (2.29b)$$

$$\lambda_{J+}^{(j)} = (C_{31}^{(j)} e_{J+x}^{(j)} + C_{35}^{(j)} e_{J+z}^{(j)}) \xi + (C_{35}^{(j)} e_{J+x}^{(j)} + C_{33}^{(j)} e_{J+z}^{(j)}) \zeta_{J+}^{(j)}, \quad (2.30a)$$

$$\lambda_{J-}^{(j)} = (C_{31}^{(j)} e_{J-x}^{(j)} + C_{35}^{(j)} e_{J-z}^{(j)}) \xi - (C_{35}^{(j)} e_{J-x}^{(j)} + C_{33}^{(j)} e_{J-z}^{(j)}) \zeta_{J-}^{(j)}, \quad (2.30b)$$

と定義した。

### 2.2.3. 転送行列

上述の計算を用いて、層  $j$  での変位と応力の行列表現を求めると、

$$\frac{1}{\exp(i\xi x - i\omega t)} \begin{bmatrix} u_x^{(j)} \\ u_z^{(j)} \\ \tau_x^{(j)}/i \\ \tau_z^{(j)}/i \end{bmatrix} = M^{(j)} \Phi^{(j)}(z_j) \begin{bmatrix} A_T^{(j)} \\ A_L^{(j)} \\ B_T^{(j)} \\ B_L^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$



となる。ここで、

$$M^{(j)} = \begin{bmatrix} e_{T+x}^{(j)} & e_{L+x}^{(j)} & e_{T-x}^{(j)} & e_{L-x}^{(j)} \\ e_{T+z}^{(j)} & e_{L+z}^{(j)} & e_{T-z}^{(j)} & e_{L-z}^{(j)} \\ \kappa_{T+}^{(j)} & \kappa_{L+}^{(j)} & \kappa_{T-}^{(j)} & \kappa_{L-}^{(j)} \\ \lambda_{T+}^{(j)} & \lambda_{L+}^{(j)} & \lambda_{T-}^{(j)} & \lambda_{L-}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\Phi^{(j)}(z_j) = \begin{bmatrix} \exp(i\zeta_{T+}^{(j)} z_j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\zeta_{L+}^{(j)} z_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-i\zeta_{T-}^{(j)} z_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\zeta_{L-}^{(j)} z_j) \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

と定義した。変位と応力が界面で連続になると云う境界条件を考慮すると、Fig. 2.3 に示した超格子でのモード  $T$  と  $L$  に対する転送行列を得ることができる。これを用いて、基盤 ( $S$ ) と検出層 ( $D$ ) の振幅は次のように表記できる。

$$\begin{bmatrix} A_T^{(D)} \\ A_L^{(D)} \\ B_T^{(D)} \\ B_L^{(D)} \end{bmatrix} = [M^{(D)}]^{-1} T^N M^{(S)} \begin{bmatrix} A_T^{(S)} \\ A_L^{(S)} \\ B_T^{(S)} \\ B_L^{(S)} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$T = M^{(B)} \Phi^{(B)}(H_B) [M^{(B)}]^{-1} M^{(A)} \Phi^{(A)}(H_A) [M^{(A)}]^{-1}, \quad (2.35)$$

ここで、 $N$  は二重層の総数であり、超格子は周期的にこの二重層が繰り返すとしている。上付の添え字 ( $S$ ) と ( $D$ ) は、それぞれ基盤と検出層での量を表わす。さらに、( $A$ ) と ( $B$ ) は、ひとつの二重層内の各層での値を示す。

#### 2.2.4. ポインティングベクトル

第1章で述べたように、時間平均したポインティングベクトルは、



$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\frac{1}{2}\text{Re}\{(\partial_t \mathbf{u})^* \cdot \mathbf{T}\} \\ &= -\frac{\omega}{2}\text{Re}\{i\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{T}\}.\end{aligned}$$

この定義を, quasi-shear と quasi-longitudinal の波動に適応すると, 次の式を得る.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} &= -\frac{\omega}{2}\text{Re} \left[ i \begin{bmatrix} u_x \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} T_1 & 0 & T_5 \\ 0 & T_2 & 0 \\ T_5 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \right] \\ &= -\frac{\omega}{2}\text{Re} \begin{bmatrix} iu_x^* T_1 + iu_z^* T_5 \\ 0 \\ iu_x^* T_5 + iu_z^* T_3 \end{bmatrix}. \quad (2.36)\end{aligned}$$

変位と応力を展開すると, 層  $j$  内で次のように表記できる.

$$\begin{aligned}P_x^{(j)} &= \frac{\omega}{2} \{ (e_{T+x}^{(j)} \varepsilon_{T+}^{(j)} + e_{T+z}^{(j)} \kappa_{T+}^{(j)}) |A_T^{(j)}|^2 + (e_{L+x}^{(j)} \varepsilon_{L+}^{(j)} + e_{L+z}^{(j)} \kappa_{L+}^{(j)}) |A_L^{(j)}|^2 \\ &\quad + (e_{T-x}^{(j)} \varepsilon_{T-}^{(j)} + e_{T-z}^{(j)} \kappa_{T-}^{(j)}) |B_T^{(j)}|^2 + (e_{L-x}^{(j)} \varepsilon_{L-}^{(j)} + e_{L-z}^{(j)} \kappa_{L-}^{(j)}) |B_L^{(j)}|^2 \}, \quad (2.37a)\end{aligned}$$

$$P_y^{(j)} = 0, \quad (2.37b)$$

$$\begin{aligned}P_z^{(j)} &= \frac{\omega}{2} \{ (e_{T+x}^{(j)} \kappa_{T+}^{(j)} + e_{T+z}^{(j)} \lambda_{T+}^{(j)}) |A_T^{(j)}|^2 + (e_{L+x}^{(j)} \kappa_{L+}^{(j)} + e_{L+z}^{(j)} \lambda_{L+}^{(j)}) |A_L^{(j)}|^2 \\ &\quad + (e_{T-x}^{(j)} \kappa_{T-}^{(j)} + e_{T-z}^{(j)} \lambda_{T-}^{(j)}) |B_T^{(j)}|^2 + (e_{L-x}^{(j)} \kappa_{L-}^{(j)} + e_{L-z}^{(j)} \lambda_{L-}^{(j)}) |B_L^{(j)}|^2 \}, \quad (2.37c)\end{aligned}$$

ここで, モード  $T$  と  $L$  のクロスタームは無視しており,

$$\varepsilon_{J+}^{(j)} = (C_{11}^{(j)} e_{J+x}^{(j)} + C_{15}^{(j)} e_{J+z}^{(j)}) \xi + (C_{15}^{(j)} e_{J+x}^{(j)} + C_{13}^{(j)} e_{J+z}^{(j)}) \zeta_{J+}^{(j)}, \quad (2.38a)$$



$$\varepsilon_{J-}^{(j)} = (C_{11}^{(j)} e_{J-x}^{(j)} + C_{15}^{(j)} e_{J-z}^{(j)}) \xi - (C_{15}^{(j)} e_{J-x}^{(j)} + C_{13}^{(j)} e_{J-z}^{(j)}) \zeta_{J-}^{(j)}, \quad (2.38b)$$

と定義した.

第1章で考慮した pure-shear 波との比較のため, pure-shear 波で反射の無いときのポインティングベクトルを再記しておく.

$$P_x = \frac{1}{2} \omega \zeta (C_{15} |u_x|^2 + C_{53} |u_z|^2) + \text{Re}\{C_{13} u_x^* u_z + C_{55} u_z^* u_x\},$$

$$P_y = 0,$$

$$P_z = \frac{1}{2} \omega \zeta (C_{55} |u_x|^2 + C_{33} |u_z|^2) + 2\text{Re}\{C_{35} u_x^* u_z\}.$$

### 2.2.5. 反射率と透過率

転送行列を用いて, 基盤 ( $S$ ) と検出層 ( $D$ ) での振幅に対する関係を次のように表わせる.

$$\begin{bmatrix} A_T^{(D)} \\ A_L^{(D)} \\ B_T^{(D)} \\ B_L^{(D)} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} A_T^{(S)} \\ A_L^{(S)} \\ B_T^{(S)} \\ B_L^{(S)} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

ここで,  $G$  は  $4 \times 4$  行列で, 転送行列  $T$  を用いて次のように定義される.

$$G = [M^{(D)}]^{-1} T^N M^{(S)}. \quad (2.40)$$

入射波が  $T$  モードのみを含む場合, 上記の関係は次のようになる.



$$\begin{bmatrix} A_T^{(D)} \\ A_L^{(D)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} A_T^{(S)} \\ 0 \\ B_T^{(S)} \\ B_L^{(S)} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

この関係式より、振幅反射係数  $\mathcal{R}$  と振幅透過係数  $\mathcal{T}$  は以下のように算出可能である。これらは、一つのモードに対する式 (1.55) と式 (1.56) を、複数のモードに対して拡張したものである。

$$\mathcal{R}_{TT} \equiv \frac{B_T^{(S)}}{A_T^{(S)}} = \frac{G_{34}G_{41} - G_{31}G_{44}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{R}_{TL} \equiv \frac{B_L^{(S)}}{A_T^{(S)}} = \frac{G_{43}G_{31} - G_{33}G_{41}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}, \quad (2.43)$$

$$\mathcal{T}_{TT} \equiv \frac{A_T^{(D)}}{A_T^{(S)}} = G_{11} + G_{13}\mathcal{R}_{TT} + G_{14}\mathcal{R}_{TL}, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{T}_{TL} \equiv \frac{A_L^{(D)}}{A_T^{(S)}} = G_{21} + G_{23}\mathcal{R}_{TT} + G_{24}\mathcal{R}_{TL}, \quad (2.45)$$

$L$  モード入射の場合には、

$$\begin{bmatrix} A_T^{(D)} \\ A_L^{(D)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 0 \\ A_L^{(S)} \\ B_T^{(S)} \\ B_L^{(S)} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

$T$  モード入射の場合と同様にして、次のように振幅反射係数と振幅透過係数を得られる。

$$\mathcal{R}_{LL} \equiv \frac{B_L^{(S)}}{A_L^{(S)}} = \frac{G_{43}G_{32} - G_{33}G_{42}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}, \quad (2.47)$$



$$\mathcal{R}_{LT} \equiv \frac{B_T^{(S)}}{A_L^{(S)}} = \frac{G_{34}G_{42} - G_{44}G_{32}}{G_{33}G_{44} - G_{43}G_{34}}, \quad (2.48)$$

$$\mathcal{T}_{LL} \equiv \frac{A_L^{(D)}}{A_L^{(S)}} = G_{22} + G_{23}\mathcal{R}_{LT} + G_{24}\mathcal{R}_{LL}, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{T}_{LT} \equiv \frac{A_T^{(D)}}{A_L^{(S)}} = G_{12} + G_{13}\mathcal{R}_{LT} + G_{14}\mathcal{R}_{LL}. \quad (2.50)$$

ポインティングベクトルの  $z$  成分より、エネルギーに対する反射率と透過率を次のように算出できる。  $T$  モード入射にたいしては、

$$R_{TT} = \frac{e_{T-x}^{(S)}\kappa_{T-}^{(S)} + e_{T-z}^{(S)}\lambda_{T-}^{(S)}}{d_T} |\mathcal{R}_{TT}|^2, \quad (2.51)$$

$$R_{TL} = \frac{e_{L-x}^{(S)}\kappa_{L-}^{(S)} + e_{L-z}^{(S)}\lambda_{L-}^{(S)}}{d_T} |\mathcal{R}_{TL}|^2, \quad (2.52)$$

$$T_{TT} = \frac{e_{T+x}^{(D)}\kappa_{T+}^{(D)} + e_{T+z}^{(D)}\lambda_{T+}^{(D)}}{d_T} |\mathcal{T}_{TT}|^2, \quad (2.53)$$

$$T_{TL} = \frac{e_{L+x}^{(D)}\kappa_{L+}^{(D)} + e_{L+z}^{(D)}\lambda_{L+}^{(D)}}{d_T} |\mathcal{T}_{TL}|^2, \quad (2.54)$$

ここで、

$$d_T = e_{T+x}^{(S)}\kappa_{T+}^{(S)} + e_{T+z}^{(S)}\lambda_{T+}^{(S)}. \quad (2.55)$$

同様に、  $L$  モード入射に対しては、

$$R_{LL} = \frac{e_{L-x}^{(S)}\kappa_{L-}^{(S)} + e_{L-z}^{(S)}\lambda_{L-}^{(S)}}{d_L} |\mathcal{R}_{LL}|^2, \quad (2.56)$$



$$R_{LT} = \frac{e_{T-x}^{(S)} \kappa_{T-}^{(S)} + e_{T-z}^{(S)} \lambda_{T-}^{(S)}}{d_L} |\mathcal{R}_{LT}|^2, \quad (2.57)$$

$$T_{LL} = \frac{e_{L+x}^{(D)} \kappa_{L+}^{(D)} + e_{L+z}^{(D)} \lambda_{L+}^{(D)}}{d_L} |\mathcal{T}_{LL}|^2, \quad (2.58)$$

$$T_{LT} = \frac{e_{T+x}^{(D)} \kappa_{T+}^{(D)} + e_{T+z}^{(D)} \lambda_{T+}^{(D)}}{d_L} |\mathcal{T}_{LT}|^2, \quad (2.59)$$

ここで,

$$d_L = e_{L+x}^{(S)} \kappa_{L+}^{(S)} + e_{L+z}^{(S)} \lambda_{L+}^{(S)}. \quad (2.60)$$



## 2.3. 構造因子

この節では、超格子中の quasi-shear 波と quasi-longitudinal 波に対する、反射および透過に対する構造因子を導出する。なを、ここでの議論は、第1章での pure-shear (SH) 波にも直接適応できる。

### 2.3.1. 反射に対する構造因子

まず、モードの変換を伴う反射について考察する。Fig. 2.4(a) にあるような反射に対して、位相の変化をみるために次の量を定義する。

$$\theta_A \equiv \zeta_{T+}^{(A)} H_A + \zeta_{L-}^{(A)} H_A, \quad (2.61a)$$

$$\theta_B \equiv \zeta_{T+}^{(B)} H_B + \zeta_{L-}^{(B)} H_B, \quad (2.61b)$$

ここで、 $\zeta$  はみな正の実数である。あるモードの波動が、層 B 内での層 A との境界で反射されるとき、振幅反射係数を  $r_{BA}$  とする。また、この逆で層 A 内での層 B との境界での振幅反射係数を  $r_{AB}$  とする。各界面からの反射は一回のみとして、反射波の振幅を基盤内で足し合わせることに、基盤中の反射波の振幅を表わす超格子の構造因子  $S_R$  を定義する。算出過程を示すと、

$$\begin{aligned} S_R &= r_{BA} + r_{AB} \exp(i\theta_A) \\ &\quad + r_{BA} \exp(i\theta_A + i\theta_B) + r_{AB} \exp(i2\theta_A + i\theta_B) \\ &\quad + r_{BA} \exp(i2\theta_A + i2\theta_B) + r_{AB} \exp(i3\theta_A + i2\theta_B) \\ &\quad + \dots \\ &= r_{BA} \sum_{n=0}^N \exp(in\theta_A + in\theta_B) + r_{AB} \exp(i\theta_A) \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{in(\theta_A + \theta_B)\}. \end{aligned}$$

総和を計算することで、次の結果を得る。



$$S_R = r_{BA} \exp\{iN(\theta_A + \theta_B)\} + \{r_{BA} + r_{AB} \exp(i\theta_A)\} \frac{1 - \exp\{iN(\theta_A + \theta_B)\}}{1 - \exp\{i(\theta_A + \theta_B)\}}. \quad (2.62)$$

モード変換を伴わない場合は、上記の表現で入射と反射のモードを同じとすることでよい。この構造因子より、反射が強く生じる条件は次のようになることが解る。

$$\theta_A + \theta_B = 2\pi k, \quad (2.63)$$

ここで  $k$  は整数である。これは、Fig. 2.4(b) に示す層状媒質でのブラッグ反射の条件式となっている。つまり、経路  $P_1$  から  $P_5$  までの位相の変化と、経路  $Q_1$  から  $Q_3$  までの位相の変化の差が  $2\pi$  の整数倍となっている。なを、 $S_R$  の第2項目の因子が次の条件

$$r_{BA} + r_{AB} \exp(i\theta_A) = 0, \quad (2.64)$$

を満たすと反射が抑圧されることを表わしている。これは、二重層内の構造によって生じる消滅則である。

構造因子  $S_R$  は、和の順序を変えることによって、次のようにも表現できる。

$$S_R = r_{BA} + \{r_{BA} + r_{AB} \exp(-i\theta_B)\} \exp\{iN(\theta_A + \theta_B)\} \frac{1 - \exp\{iN(\theta_A + \theta_B)\}}{1 - \exp\{i(\theta_A + \theta_B)\}}. \quad (2.65)$$

この表現でも、ブラッグ条件である式 (2.63) が得られ、消滅則もブラッグ条件より上記の式 (2.64) と一致することが分かる。

### 2.3.2. 透過に対する構造因子

モード変換を伴う場合での透過に対する構造因子を考える。まず、次の量を定義する。



$$\theta_J^{(j)} \equiv \zeta_{J+}^{(j)} H_j \quad (j = A, B; J = T, L), \quad (2.66)$$

ここで、 $\zeta_{J+}^{(j)}$  は正の実数である。層  $B$  から  $A$  に透過する場合の振幅透過係数を  $t_{BA}$ 、その逆の場合の透過に対する振幅透過係数を  $t_{AB}$  とする。反射の構造因子と同様に、Fig. 2.5 に示すような透過を考える。検出層にモード変換ともなつて達した各透過波の振幅を求め、その和をとると、モード変換を伴つて検出層に現われる透過波の振幅である超格子での透過に対する構造因子が得られる。結果は次のようになる。

$$S_T = t_{BA} \exp\{iN(\theta_L^{(A)} + \theta_L^{(B)})\} \\ + [t_{BA} + t_{AB} \exp\{i(\theta_L^{(B)} - \theta_T^{(B)})\}] \sum_{n=1}^N \exp\{in(\theta_T^{(A)} + \theta_T^{(B)}) + i(N-n)(\theta_L^{(A)} + \theta_L^{(B)})\}.$$

総和を算出し、次式を得る。

$$S_T = t_{BA} \\ + [t_{BA} + t_{AB} \exp\{i(\theta_L^{(B)} - \theta_T^{(B)})\}] \exp\{i(\theta_T - \theta_L)\} \frac{1 - \exp\{iN(\theta_T - \theta_L)\}}{1 - \exp\{i(\theta_T - \theta_L)\}}, \quad (2.67)$$

ここで、

$$\theta_J \equiv \theta_J^{(A)} + \theta_J^{(B)} \quad (J = T, L), \quad (2.68)$$

であり、式 (2.67) の二つの項に現われる共通の因子  $\exp(iN\theta_L)$  を無視している。これより、次の条件が成立する時にモードの変換を伴つた透過が強く生じることが分かる。

$$\theta_T - \theta_L = 2\pi k, \quad (2.69)$$

ここで、 $k$  は整数である。ブラッグ条件と同様に、 $S_T$  の第 2 項が次の条件をみたすと、式 (2.69) の条件が成立してもモード変換を伴つた透過が抑えられることが解る。



$$t_{BA} + t_{AB} \exp\{i(\theta_L^{(B)} - \theta_T^{(B)})\} = 0. \quad (2.70)$$

この構造因子  $S_T$  は、モード変換を伴う透過についてのみ有効である。これは、算出過程で基盤より入射したモードが超格子中を伝搬してゆくとき、減衰しないと考え、界面からのモード変換は摂動として扱っているためである。このため、検出層には入射したモードが減衰せずに、そのままの強度で現われると仮定している。この仮定は、超格子の層数が少ないときに成立する。

### 2.3.3. 振幅反射係数と振幅透過係数

転送行列の導出のために導入した行列を用いて、次の  $4 \times 4$  の行列を定義する。

$$f^{(BA)} = [M^{(A)}]^{-1} M^{(B)}, \quad (2.71a)$$

$$f^{(AB)} = [M^{(B)}]^{-1} M^{(A)} = [f^{(BA)}]^{-1}. \quad (2.71b)$$

この行列で、ひとつの界面をはさんだ隣合う二つの層  $j$  と  $k$  の振幅に次の関係が成立する。

$$\begin{bmatrix} A_T^{(k)} \\ A_L^{(k)} \\ B_T^{(k)} \\ B_L^{(k)} \end{bmatrix} = \Phi^{(k)} f^{(jk)} \begin{bmatrix} A_T^{(j)} \\ A_L^{(j)} \\ B_T^{(j)} \\ B_L^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

この表現で、 $f^{(jk)}$  が媒質  $j$  から  $k$  に波動が通過するときの振幅に対する透過係数を表わし、界面からの反射係数を近似的に表わしている。さらに、層  $k$  を伝搬する波動の位相の変化が  $\Phi^{(k)}$  で表現されていることが分かる。透過に対する構造因子  $S_T$  に現われる振幅透過係数は、次のように  $f^{(jk)}$  を用いて書くことができる。



$$t_{BA} = [f^{(BA)}]_{21}, \quad (2.73a)$$

$$t_{AB} = [f^{(AB)}]_{21}. \quad (2.73b)$$

同様にして、反射に対する構造因子  $S_R$  中の振幅反射係数は次のように近似できる。

$$r_{BA} = [f^{(BA)}]_{41}, \quad (2.73c)$$

$$r_{AB} = [f^{(AB)}]_{41}. \quad (2.73d)$$



## 2.4. 等方的媒質

これまでの議論は、異方的媒質について述べてきたものであるが、弾性定数を等方的なものに置き換えれば等方的な媒質にも適応できる。そのために必要な行列等の表現を以下に示す。

### 2.4.1. 転送行列

まず、行列  $M^{(j)}$  は異方的媒質で式 (2.32) ように定義した。再度しめすと、

$$M^{(j)} = \begin{bmatrix} e_{T+x}^{(j)} & e_{L+x}^{(j)} & e_{T-x}^{(j)} & e_{L-x}^{(j)} \\ e_{T+z}^{(j)} & e_{L+z}^{(j)} & e_{T-z}^{(j)} & e_{L-z}^{(j)} \\ \kappa_{T+}^{(j)} & \kappa_{L+}^{(j)} & \kappa_{T-}^{(j)} & \kappa_{L-}^{(j)} \\ \lambda_{T+}^{(j)} & \lambda_{L+}^{(j)} & \lambda_{T-}^{(j)} & \lambda_{L-}^{(j)} \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

等方的媒質では、入射角と反射角が等しいため、次の関係がある。

$$\phi_{J+}^{(j)} + \phi_{J-}^{(j)} = \pi. \quad (2.75)$$

等方的媒質ではモード  $T$  と  $L$  の波数ベクトルと偏極間の角度は常に次のようになる。

$$\eta_{T\pm}^{(j)} = \frac{\pi}{2},$$

$$\eta_{L\pm}^{(j)} = 0.$$

これらの角度の関係を Fig. 2.6 に示す。これより、偏極ベクトルの表現は次のようになる。

$$e_{T\pm x}^{(j)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{T\pm}^{(j)} - \eta_{T\pm}^{(j)}\right) = \cos \phi_{T\pm}^{(j)}, \quad (2.76a)$$



$$e_{T\pm z}^{(j)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{T\pm}^{(j)} - \eta_{T\pm}^{(j)}\right) = -\sin \phi_{T\pm}^{(j)}, \quad (2.76b)$$

$$e_{L\pm x}^{(j)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{L\pm}^{(j)} - \eta_{L\pm}^{(j)}\right) = \sin \phi_{L\pm}^{(j)}, \quad (2.77a)$$

$$e_{L\pm z}^{(j)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{L\pm}^{(j)} - \eta_{L\pm}^{(j)}\right) = \cos \phi_{L\pm}^{(j)}. \quad (2.77b)$$

$\kappa$  や  $\lambda$  の定義に使われている弾性定数は,

$$C_{15} = C_{51} = 0,$$

$$C_{35} = C_{53} = 0,$$

$$C_{55} = C_{44} = c_{44},$$

$$C_{13} = C_{31} = C_{21} = C_{12} = c_{12},$$

$$C_{33} = C_{11} = c_{11},$$

$$C_{11} - C_{12} - 2C_{44} = 0.$$

となる. (n.b. よく用いられる Lamé 定数との対応は  $\mu = C_{44}$ ,  $\lambda = C_{12}$ ,  $\lambda + 2\mu = C_{11} = C_{12} + 2C_{44}$  である.)

以上より,

$$\kappa_{J\pm}^{(j)} = C_{44}^{(j)} (e_{J\pm z}^{(j)} \xi \pm e_{J\pm x}^{(j)} \zeta_{J\pm}^{(j)}), \quad (2.78)$$



$$\lambda_{J\pm}^{(j)} = C_{12}^{(j)} e_{J\pm x}^{(j)} \xi \pm C_{11}^{(j)} e_{J\pm z}^{(j)} \zeta_{J\pm}^{(j)}. \quad (2.79)$$

$\zeta_{J\pm}^{(j)} > 0$  ( $J = T, L$ ) となっていること, および

$$\pm \zeta_{J\pm}^{(j)} = \frac{\xi}{\tan \phi_{J\pm}^{(j)}}, \quad (2.80)$$

より, 転送行列の要素  $\kappa$  と  $\lambda$  は, 次のようになる.

$$\kappa_{T\pm}^{(j)} = \xi C_{44}^{(j)} \frac{\cos 2\phi_{T\pm}^{(j)}}{\sin \phi_{T\pm}^{(j)}}, \quad (2.81a)$$

$$\kappa_{L\pm}^{(j)} = 2\xi C_{44}^{(j)} \cos \phi_{L\pm}^{(j)}, \quad (2.81b)$$

$$\lambda_{T\pm} = -2\xi C_{44}^{(j)} \cos \phi_{T\pm}^{(j)}, \quad (2.82a)$$

$$\lambda_{L\pm}^{(j)} = \xi \frac{C_{11}^{(j)}}{\sin \phi_{L\pm}^{(j)}} \left( 1 - 2 \frac{C_{44}^{(j)}}{C_{11}^{(j)}} \sin^2 \phi_{L\pm}^{(j)} \right).$$

ここで,

$$\xi = k_{T\pm}^{(j)} \sin \phi_{T\pm}^{(j)} = k_{L\pm}^{(j)} \sin \phi_{L\pm}^{(j)}$$

および

$$\frac{C_{44}^{(j)}}{C_{11}^{(j)}} = \left( \frac{v_T^{(j)}}{v_L^{(j)}} \right)^2 = \left( \frac{k_{L\pm}^{(j)}}{k_{T\pm}^{(j)}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \phi_{T\pm}^{(j)}}{\sin^2 \phi_{L\pm}^{(j)}},$$

であることを用いれば, 次のようになる.



$$\lambda_{L\pm}^{(j)} = \xi C_{11}^{(j)} \frac{\cos 2\phi_{T\pm}^{(j)}}{\sin \phi_{L\pm}^{(j)}} = \xi C_{44}^{(j)} \sin \phi_{L\pm}^{(j)} \frac{\cos 2\phi_{T\pm}^{(j)}}{\sin^2 \phi_{T\pm}^{(j)}}. \quad (2.82b)$$

ここで  $\phi_{J-}^{(j)} = \pi - \phi_{J+}^{(j)}$  であることより、反射角の三角関数は入射角を用いて次のように書換れる。

$$\cos \phi_{J-}^{(j)} = -\cos \phi_{J+}^{(j)},$$

$$\sin \phi_{J-}^{(j)} = \sin \phi_{J+}^{(j)},$$

$$\cos 2\phi_{J-}^{(j)} = \cos 2\phi_{J+}^{(j)}.$$

このようにして、行列  $M^{(j)}$  は等方媒質に対して次のように表現できる。

$$M^{(j)} = \begin{bmatrix} \cos \phi_T^{(j)} & \sin \phi_L^{(j)} & -\cos \phi_T^{(j)} & \sin \phi_L^{(j)} \\ -\sin \phi_T^{(j)} & \cos \phi_L^{(j)} & -\sin \phi_T^{(j)} & -\cos \phi_L^{(j)} \\ \xi C_{44}^{(j)} \frac{\cos 2\phi_T^{(j)}}{\sin \phi_T^{(j)}} & 2\xi C_{44}^{(j)} \cos \phi_L^{(j)} & \xi C_{44}^{(j)} \frac{\cos 2\phi_T^{(j)}}{\sin \phi_T^{(j)}} & -2\xi C_{44}^{(j)} \cos \phi_L^{(j)} \\ -2\xi C_{44}^{(j)} \cos \phi_T^{(j)} & \xi C_{44}^{(j)} \sin \phi_L^{(j)} \frac{\cos 2\phi_T^{(j)}}{\sin^2 \phi_T^{(j)}} & 2\xi C_{44}^{(j)} \cos \phi_T^{(j)} & \xi C_{44}^{(j)} \sin \phi_L^{(j)} \frac{\cos 2\phi_T^{(j)}}{\sin^2 \phi_T^{(j)}} \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

ここで、 $\phi_{J+}^{(j)}$  の添字 + を省略している。必要であれば、3行目と4行目にある波数の  $x$  成分  $\xi$  を行列の定義から省いてもよい。ただし、 $C_{44}^{(j)}$  は、層に依存するので省略できない。式 (2.35) で定義される転送行列に上記の行列  $M^{(j)}$  を用いれば、等方的な層をもつ超格子に対する表現を得ることができる。

#### 2.4.2. 反射率および透過率

等方的な媒質の層をもつ超格子での、エネルギーに対する反射率と透過率は、定義式 (2.51)-(2.60) に上記の諸式 (2.76), (2.77), (2.81), (2.82) を用いて書換ればよい。Tモード入射の場合は、次のように表現できる。



$$R_{TT} = \frac{n_{T-}}{d_T} |\mathcal{R}_{TT}|^2 = -|\mathcal{R}_{TT}|^2, \quad (2.84)$$

$$R_{TL} = \frac{n_{L-}}{d_T} |\mathcal{R}_{TL}|^2, \quad (2.85)$$

$$T_{TT} = \frac{n_{T+}}{d_T} |\mathcal{T}_{TT}|^2, \quad (2.86)$$

$$T_{TL} = \frac{n_{L+}}{d_T} |\mathcal{T}_{TL}|^2, \quad (2.87)$$

ここで,  $n_{J\pm}$  は式 (2.51)-(2.54), 式 (2.56)-(2.59) の右辺の分子の因数を示し,

$$\begin{aligned} n_{T-} &= -\xi C_{44}^{(S)} \sin 2\phi_{T+}^{(S)} \left( 1 + \frac{\cos 2\phi_{T+}^{(S)}}{2 \sin^2 \phi_{T+}^{(S)}} \right) \\ &= -\frac{\xi C_{44}^{(S)}}{2} \sin 2\phi_{T+}^{(S)} \operatorname{cosec}^2 \phi_{T+}^{(S)}, \end{aligned} \quad (2.88a)$$

$$n_{L-} = -\frac{\xi C_{44}^{(S)}}{2} \sin 2\phi_{L+}^{(S)} \operatorname{cosec}^2 \phi_{T+}^{(S)}, \quad (2.88b)$$

$$n_{T+} = \frac{\xi C_{44}^{(D)}}{2} \sin 2\phi_{T+}^{(D)} \operatorname{cosec}^2 \phi_{T+}^{(D)}, \quad (2.88c)$$

$$n_{L+} = \frac{\xi C_{44}^{(D)}}{2} \sin 2\phi_{L+}^{(D)} \operatorname{cosec}^2 \phi_{T+}^{(D)}, \quad (2.88d)$$

$$d_T = \frac{\xi C_{44}^{(S)}}{2} \sin 2\phi_{T+}^{(S)} \operatorname{cosec}^2 \phi_{T+}^{(S)}. \quad (2.89)$$

$L$  モード入射に対しては, 次の表現を得る.



$$R_{LL} = \frac{n_{L-}}{d_L} |\mathcal{R}_{LL}|^2 = -|\mathcal{R}_{LL}|^2, \quad (2.90)$$

$$R_{LT} = \frac{n_{T-}}{d_L} |\mathcal{R}_{LT}|^2, \quad (2.91)$$

$$T_{LL} = \frac{n_{L+}}{d_L} |\mathcal{T}_{LL}|^2, \quad (2.92)$$

$$T_{LT} = \frac{n_{T+}}{d_L} |\mathcal{T}_{LT}|^2, \quad (2.93)$$

ここで,

$$d_L = \frac{\xi C_{44}^{(S)}}{2} \sin 2\phi_{L+}^{(S)} \operatorname{cosec}^2 \phi_{T+}^{(S)}. \quad (2.94)$$

$\mathcal{R}_{mn}$  と  $\mathcal{T}_{mn}$  ( $m, n = T, L$ ) は、それぞれ振幅反射係数と振幅透過係数であり、式 (2.42)-(2.45) と式 (2.47)-(2.50) で定義される。式 (2.40) の行列  $G$  の表現を得るには、式 (2.83) で定義した行列  $M^{(j)}$  を用いる。



### Figure Captions

**Fig. 2.1** バルク GaAs の  $(\bar{1}10)$  面でのスローネス曲線を示す。軸の単位は  $\text{s/m}$  である。

**Fig. 2.2** モード  $L, T$  の偏極ベクトルを示す。波数ベクトルは、 $z$  軸と平行としているので、 $x, y$  成分は零である。波数ベクトルを基準にとった偏極の角度は、(a) モード  $L$  に対して  $\eta_L$ 、(b) モード  $T$  に対して  $\eta_T$  として示してある。成分  $e_{Lz}$  と  $e_{Tz}$  は、常に正の実数としている。(c) GaAs を例として、偏極の角度  $\eta$  を示す。

**Fig. 2.3** 超格子の構造を示す。基本的な構造は、第 1 章で考慮したものと同じである。

**Fig. 2.4** (a) 摂動として、超格子からの波動の反射を示す。超格子に対する反射の構造因子の算出では、透過する波動は減衰しないとしている。(b) 超格子でのブラッグ反射を図示する。経路  $P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5$  と  $Q_1 - Q_2 - Q_3$  の位相差が  $2\pi$  の整数倍のときに反射が強く生じる。

**Fig. 2.5** モードの変換を伴う透過を摂動として図示する。基本的な考え方は、ブラッグ反射と同じである。

**Fig. 2.6** 波数ベクトルと偏極ベクトルの角度の定義を、モード  $J = T, L$  に対して図示する。



### 第3章

#### (111)面を界面とする超格子内の $SH$ フォノン

- 3.1. この章の概論
- 3.2.  $SH$  フォノンの透過率
- 3.3.  $SH$  フォノンの分散関係
- 3.4. 反射に対する構造因子
- 3.5. 転送行列の特徴
- 3.6. この章のまとめ
- 3.7. 付録：運動方程式の書き換えと Rytov の分散関係

#### 参考文献

立方晶の (111) 面を界面にもつ超格子での  $SH$  フォノンの透過率と分散関係を算出する。(100) 面の界面の超格子と異なりこの場合には、フォノンのストップバンドはブリルアンゾーンの中央や端でなく、ゾーン内部に現われる。超格子に対する構造因子を導入することにより、フォノン反射（ブラッグ反射）を説明する。

転送行列から分散関係を導出可能であることは第1章で示したが、分散関係中の周波数バンドまたはストップバンドの形成条件をも含むことを示す。また、転送行列でブラッグ反射の消滅則を表現することが可能である。さらに、ストップバンドのゾーン内での位置も、フォノンの基盤からの入射角と振動数の関数として転送行列を用いて与えられる。



### 3.1. この章の概論

周期的な半導体超格子のフォノンフィルターとしての動作<sup>1</sup>の例証以来、ナノメータ程度の厚さの結晶質または等方的薄膜より成る層状構造での高振動数音響フォノン伝搬に対して多く研究が発表されている<sup>2-4</sup>。周期的超格子中のフォノンの反射および透過に関する基本的性質は、層状構造物を伝搬するフォノンに対する分散関係により理解可能である。人工的に形成した超格子の周期性は分散曲線をミニブリルアンゾーン内に折込み、そのサイズは超格子の周期（単位構造）の大きさに依って決まる。偶数回の回転対称をもつ界面をもつ超格子での振動数ギャップは、ゾーンの中央や端に現われる。この振動数ギャップは、周期構造内での同じモード間の遷移によるブラッグ反射の性質に起因するものである<sup>1,5-7</sup>。これらのギャップは、フォノンが伝搬することのできない振動数が超格子に存在することを示す。これをストップバンドと呼ぶ。

本論では (111) 面を界面とする超格子を考察の対象とし、 $(\bar{1}10)$  面に波数ベクトルを制限した  $SH$  フォノンがこの界面に斜方入射する場合を扱う。このとき、偶数回の回転対称（正確には、鏡面对称）の場合にはみられない、入射角と反射角の違いが生じる。

これから考察する周期的超格子の構造を Fig. 3.1 に示す。単位構造は、Fig. 3.1(a) にしめすように AlAs が 150 単一層、GaAs が 60 単一層よりなる。各単一層は  $[111]$  方向に  $0.326 \text{ nm}$  の層厚をもっているため、単位構造厚は  $D = 68.5 \text{ nm}$  となる。簡単のため Fig. 3.1(b) に示すように、超格子の基盤は GaAs より成り、フォノンの検出層は AlAs より成っているものとする。

GaAs の  $(\bar{1}10)$  面でのスローネス曲線を Fig. 3.2(a) に示す。AlAs のものは、このものと同じ形でやや小さめのものとなる。Fig. 3.2(b) では、左側に AlAs のスローネス曲線を、右側に GaAs のものを置いている。 $(111)$  面の界面は紙面に垂直である。Fig. 3.2(a),(b) とともに太い曲線が pure-shear 波 ( $SH$  フォノン) のスローネス曲線であり、その偏極ベクトルは常に  $(\bar{1}10)$  面に垂直である<sup>8</sup>。



### 3.2. SHフォノンの透過率

Fig. 3.3 に透過率の算出に用いた立方晶内の座標系を示す。座標軸  $X, Y, Z$  が結晶軸である。  $x, y, z$  が用いる座標軸で、それぞれ  $[11\bar{2}], [\bar{1}10], [111]$  方向をむいている。座標系  $(x, y, z)$  は、  $(X, Y, Z)$  に対して2回の直交変換を行って得られる。まず、  $(X, Y, Z)$  に対して、  $Z$  軸のまわりに  $45^\circ$  回転し、次に、  $y$  軸について  $\arccos(1/\sqrt{3})$  の回転を行う。このようにして得られた座標系  $(x, y, z)$  での弾性定数は次のように行列で表現される。

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{64} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

この行列の各要素は第1章の1.1.節に示したように、立方晶の3つの独立な弾性定数  $c_{11}, c_{12}, c_{44}$  で表現可能である。座標系  $(x, y, z)$  で、SHフォノンの変位ベクトル  $\mathbf{u}$  は

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$u_y = |u_y| \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t), \quad (3.3)$$

となる。つまり、SHフォノンは  $(\bar{1}10)$  面内を  $[11\bar{2}]$  方向に偏極して伝搬する。式(3.1)-(3.3)を用いて運動方程式は、次式で表わされる。

$$C_{66}k_x^2 + C_{44}k_z^2 + 2C_{46}k_x k_z = \rho\omega^2. \quad (3.4)$$

この方程式から、SHフォノンのスローネス曲線を得ることができる<sup>9</sup>。歪テンソルの非零の独立な成分は、式(3.2)、式(3.3)より次の二つのみである。



$$\sigma_{yz} = i(C_{44}k_z + C_{46}k_x)u_y, \quad (3.5a)$$

$$\sigma_{xy} = i(C_{64}k_z + C_{66}k_x)u_y. \quad (3.5b)$$

このフォノンに対する，時間平均したエネルギー流束は次のようになる。

$$P_x = \frac{1}{2}(C_{64}k_z + C_{66}k_x)\omega|u_y|^2, \quad (3.6a)$$

$$P_y = 0, \quad (3.6b)$$

$$P_z = \frac{1}{2}(C_{44}k_z + C_{46}k_x)\omega|u_y|^2. \quad (3.6c)$$

この結果を Fig. 3.1 に示す超格子に適用する。各層  $j$  での変位は，

$$u_x^{(j)} = u_z^{(j)} = 0, \quad (3.7a)$$

$$u_y^{(j)} = A^{(j)} \exp(ik_x x + ik_{z+}^{(j)} z_j - i\omega t) + B^{(j)} \exp(ik_x x - ik_{z-}^{(j)} z_j - i\omega t), \quad (3.7b)$$

と示される。ここで， $z_j$  は， $j$  番目と  $(j-1)$  番目の層間の界面に原点をもち， $z$  方向に平行な座標である。この変位をもとに算出される応力テンソルで，独立な非零の要素は，

$$\sigma_{yz}^{(j)} = i\alpha^{(j)} A^{(j)} \exp(ik_x x + ik_{z+}^{(j)} z_j - i\omega t) + i\beta^{(j)} B^{(j)} \exp(ik_x x - ik_{z-}^{(j)} z_j - i\omega t), \quad (3.8a)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = i\gamma^{(j)} A^{(j)} \exp(ik_x x + ik_{z+}^{(j)} z_j - i\omega t) + i\delta^{(j)} B^{(j)} \exp(ik_x x - ik_{z-}^{(j)} z_j - i\omega t), \quad (3.8b)$$

である。ここで，

$$\alpha^{(j)} = C_{44}^{(j)} k_{z+}^{(j)} + C_{46}^{(j)} k_x, \quad (3.9a)$$

$$\beta^{(j)} = -C_{44}^{(j)} k_{z-}^{(j)} + C_{46}^{(j)} k_x, \quad (3.9b)$$

$$\gamma^{(j)} = C_{64}^{(j)} k_{z+}^{(j)} + C_{66}^{(j)} k_x, \quad (3.9c)$$

$$\delta^{(j)} = -C_{64}^{(j)} k_{z-}^{(j)} + C_{66}^{(j)} k_x, \quad (3.9d)$$



と定義した。変位と応力に対する界面での境界条件を考慮すると、式 (3.7) と式 (3.8) に含まれる変位の振幅に対して、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} A^{(j+1)} \\ B^{(j+1)} \end{bmatrix} = \left[ M^{(j+1)}(0) \right]^{-1} M^{(j)}(H_j) \begin{bmatrix} A^{(j)} \\ B^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

ここで、

$$M^{(j)}(z_j) = \begin{bmatrix} \exp(ik_{z+}^{(j)} z_j) & \exp(-ik_{z-}^{(j)} z_j) \\ i\alpha^{(j)} \exp(ik_{z+}^{(j)} z_j) & i\beta^{(j)} \exp(-ik_{z-}^{(j)} z_j) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

これを繰り返して用いることで、基盤 ( $S$ ) と検出層 ( $D$ ) での振幅間に対し、つぎの関係を得る。

$$\begin{bmatrix} A^{(D)} \\ B^{(D)} \end{bmatrix} = \left[ M^{(D)}(0) \right]^{-1} T^N M^{(S)}(0) \begin{bmatrix} A^{(S)} \\ B^{(S)} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

ここで、 $T$  は転送行列であり、 $N$  は超格子に含まれる単位構造の数である。式 (3.12) の導出で、超格子の偶数番目の層は全て同じ、奇数番目の層も同じであると仮定している。

$$T = T^{(2)} T^{(1)}, \quad (3.13a)$$

であり転送行列と呼ばれる。ここで、

$$T^{(j)} = M^{(j)}(H_j) \left[ M^{(j)}(0) \right]^{-1}. \quad (3.13b)$$

である。検出層 ( $D$ ) は透過して来たフォノンを全て吸収すると仮定すると、振幅  $B^{(D)} = 0$  と置ける。この条件より、基盤 ( $S$ ) から入射した  $SH$  フォノンが検出層 ( $D$ ) に達するときの透過率は次のようになる。

$$\frac{P_z^{(D)}}{P_{z+}^{(S)}} = \frac{\alpha^{(D)}}{\alpha^{(S)}} |\tau|^2, \quad (3.14)$$



ここで、 $\alpha^{(D)}$  と  $\alpha^{(S)}$  は、それぞれ、検出層 ( $D$ ) と基盤 ( $S$ ) において式 (3.9a) と同様にして定義されるものである。また、

$$\tau = \frac{A^{(D)}}{A^{(S)}}. \quad (3.15)$$

としている。簡単のため、基盤 ( $S$ ) は媒質 B と、検出層 ( $D$ ) は媒質 A と同じものとする。式 (3.15) の値は式 (3.12) より導出可能である。式 (3.14) での  $P_{z+}^{(S)}$  は基盤からの入射フォノンのエネルギー流束の  $z$  成分であり、 $P_z^{(D)}$  は検出層に透過したフォノンのエネルギー流束の  $z$  成分である。数値計算例を Fig. 3.4 に示す。



### 3.3. SHフォノンの分散関係

第1章1.4節に示したように、 $(\bar{1}10)$ 面内のフォノンの分散関係は、転送行列を用いて導出可能である。周期的超格子に対しては、層の番号  $j$  でなく、層の媒質を示す上付添字  $A, B$  を用いて、次のように転送行列を再定義するほうが簡便である。

$$T = T^{(B)} T^{(A)}. \quad (3.16)$$

ここで、 $T^{(A)}$  と  $T^{(B)}$  は、それぞれ、奇数番目の層と偶数番目の層に対して定義されている行列である。超格子の波数  $q$  は、転送行列  $T$  の固有値  $\chi$  と関連している。解くべき方程式は次に示す特性方程式である。

$$\det[T - \chi E] = 0, \quad (3.17)$$

ここで、 $E$  は  $2 \times 2$  の単位行列であり、

$$\chi \equiv e^{iqD}, \quad (3.18)$$

が固有値である。数値計算例を、透過率とともに Fig. 3.4 に示す。

ここで、転送行列の行列式が、1 とならないことに注意が必要である。つまり、

$$\det[T] = \exp[i(k_{z+}^{(B)} - k_{z-}^{(B)})H_B] \exp[i(k_{z+}^{(A)} - k_{z-}^{(A)})H_A]. \quad (3.19)$$

である。このため、 $\chi$  が式 (3.17) の固有値であっても、 $1/\chi = e^{-iqD}$  は  $T$  の固有値にならない。これは、偶数回転対称の  $(001)$  面を界面とする超格子の場合と異なる。 $(111)$  界面では超格子基盤での入射角と反射角が異なり、 $k_{z+}^{(J)} \neq k_{z-}^{(J)}$  ( $J = A, B$ ) となることが起因である。



### 3.4. 反射に対する構造因子

振幅透過係数を得るため、式 (3.12) を次のように書き換える。

$$\begin{bmatrix} A^{(D)} \\ B^{(D)} \end{bmatrix} = f^{(BA)} F^N \begin{bmatrix} A^{(S)} \\ B^{(S)} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

ここで、

$$f^{(JK)} = [M^{(K)}(0)]^{-1} M^{(J)}(0), \quad (3.21)$$

$$F = \Phi^{(B)}(H_B) f^{(AB)} \Phi^{(A)}(H_A) f^{(BA)}, \quad (3.22)$$

$$\Phi^{(J)}(H_J) = \begin{bmatrix} \exp(ik_{z+}^{(J)} H_J) & 0 \\ 0 & \exp(-ik_{z-}^{(J)} H_J) \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

であり、 $J, K = A, B$  である。この表記で  $f^{(JK)}$  が振幅透過係数と振幅反射係数を表わす行列であり、 $\Phi^{(J)}(H_J)$  は  $SH$  フォノンが厚さ  $H_J$  の層  $J$  を透過、反射するときの位相変化を示す行列と解釈できる。

超格子のフォノン反射に対する構造因子を導出するため、入射フォノンと反射フォノンに対して摂動的取り扱いを行う。Fig. 3.5 のように界面での複数回の反射を無視し、構造因子  $S$  を求めると次のようになる。

$$S = r_{BA} + (r_{BA} + r_{AB} \exp(-i\theta_B)) \exp[i(\theta_A + \theta_B)] \frac{1 - \exp[iN(\theta_A + \theta_B)]}{1 - \exp[i(\theta_A + \theta_B)]}, \quad (3.24)$$

ここで、

$$\theta_J = k_{z+}^{(J)} H_J + k_{z-}^{(J)} H_J. \quad (J = A, B), \quad (3.25)$$

であり、 $r_{JK}$  は媒質  $J$  と  $K$  の界面での振幅反射係数を表わす。これは、



式 (3.21) で定義された行列を用いて  $[f^{(JK)}]_{21}$  と近似できる.  $|S|^2$  がピークをもつのは, 次の条件を満たすときである.

$$\theta_A + \theta_B = 2\pi m, \quad (3.26a)$$

これを書き換えて,

$$k_{z+}^{(A)} H_A + k_{z-}^{(A)} H_A + k_{z+}^{(B)} H_B + k_{z-}^{(B)} H_B = 2\pi m, \quad (3.26b)$$

ここで,  $m$  は整数である. 式 (3.26) は, 超格子での  $SH$  フォノンに対するブラッグ反射条件と解釈できる. Fig. 3.6 はこれを図示したものである. ただし, 次の条件が同時に成立するときには,  $|S| \approx 0$  となり, 反射が抑えられる.

$$r_{BA} + r_{AB} \exp(-i\theta_B) \approx 0. \quad (3.27)$$

これは, 単位構造に起因する反射の消滅則と解釈できる.



### 3.5. 転送行列の特徴

ここまで、転送行列から透過率、分散関係、構造因子の算出に必要な振幅反射係数の導出が可能であることを示した。この節では、転送行列の性質について更に詳しく考察する。

ここで、 $e^{iq_1 D}$  と  $e^{iq_2 D}$  を転送行列  $T$  の固有値とする。( $D = H_A + H_B$  は単位周期の厚さである。) このとき、固有値方程式の性質より、

$$e^{iq_1 D} e^{iq_2 D} = \det[T], \quad (3.28)$$

が成立する。 $T$  の行列式は、式 (3.19) で与えられている。これより、次式を得る。

$$q_1 D + q_2 D = (k_{z+}^{(B)} - k_{z-}^{(B)})H_B + (k_{z+}^{(A)} - k_{z-}^{(A)})H_A + 2\pi m, \quad (3.29)$$

ここで、 $m$  は整数であり、 $H_A$  と  $H_B$  は層の厚さである。( $H_A$  と  $H_B$  は、それぞれ  $H_1$  と  $H_2$  の置き換えである。) 一般に、転送行列の固有値は複素数である。つまり、 $q_1 D$  と  $q_2 D$  も複素数である。式 (3.29) の右辺は実数であるため、左辺の虚数部は零となる。つまり、

$$\text{Im}[q_1 D + q_2 D] = 0. \quad (3.30)$$

ここで  $q_1 D$  または  $q_2 D$  の一方が虚部をもつなら、他方の虚部は絶対値が等しく符号が逆でなければならない。また、一方が実数なら他方も実数となる。フォノンが界面において全反射しなければ、式 (3.29) での波数  $k_{z\pm}^{(J)}$  は、フォノン振動数に比例し実数である。さらに、波数の絶対値は振動数  $\omega$  と基盤からのフォノンの入射角  $\phi_{\text{inc}}$  の関数として表現可能である。これを、実関数  $L$  で表わせば、

$$\begin{aligned} L(\omega, \phi_{\text{inc}}; m) &= \frac{1}{2}[(k_{z+}^{(B)} - k_{z-}^{(B)})H_B + (k_{z+}^{(A)} - k_{z-}^{(A)})H_A] + \pi m \\ &= \frac{1}{2}(q_1 D + q_2 D), \end{aligned} \quad (3.31)$$



または、式 (3.28) より、

$$L(\omega, \phi_{\text{inc}}; m) = \frac{1}{2i} \log(\det[T]) + \pi m, \quad (3.32)$$

と表現できる。

転送行列  $T$  のトレースを計算すると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}[T] = & \frac{1}{(\alpha^{(B)} - \beta^{(B)})(\alpha^{(A)} - \beta^{(A)})} \times \\ & [(\beta^{(B)} - \beta^{(A)})(\alpha^{(B)} - \alpha^{(A)})(e^{ik_{z+}^{(B)} H_B - ik_{z-}^{(A)} H_A} + e^{-ik_{z-}^{(B)} H_B + ik_{z+}^{(A)} H_A}) \\ & - (\beta^{(B)} - \alpha^{(A)})(\alpha^{(B)} - \beta^{(A)})(e^{ik_{z+}^{(B)} H_B + ik_{z+}^{(A)} H_A} + e^{-ik_{z-}^{(B)} H_B - ik_{z-}^{(A)} H_A})]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

式 (3.28) で導入した固有値を用いて、 $\text{Tr}[T]$  を表現すると次のようになる。

$$e^{iq_1 D} + e^{iq_2 D} = \text{Tr}[T]. \quad (3.34)$$

フォノンが周波数バンドにあると、 $q_1 D$  と  $q_2 D$  は実数である。これより、式 (3.34) は次のようになる。

$$\left| \frac{1}{2} \text{Tr}[T] \right|^2 = \cos^2 \frac{q_1 D - q_2 D}{2}. \quad (3.35)$$

つまり、 $SH$ フォノンが周波数バンドにあるには、条件

$$\left| \frac{1}{2} \text{Tr}[T] \right| \leq 1 \quad (3.36)$$

が成立する必要がある。一方、

$$\left| \frac{1}{2} \text{Tr}[T] \right| > 1 \quad (3.37)$$



が成立すると、 $q_1 D$  と  $q_2 D$  が同時に複素数となる。つまり、この条件式はフォノンがストップバンド内にあることを示す。ゆえに、式 (3.37) はフォノンが反射される周波数範囲を決定できるため、単一周波数で満たされるブラッグ反射条件である式 (3.26) よりも詳細な反射条件となる。

つぎに、フォノンのストップバンドに対する波数  $q$  と角振動数  $\omega$  の関係式を求める。 $e^{iqD}$  を  $e^{iq_1 D}$  か  $e^{iq_2 D}$  のどちらか一方とすると、

$$e^{iqD} = \frac{1}{2} \text{Tr}[T] \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{Tr}[T]\right)^2 - \det[T]}. \quad (3.38)$$

と書ける。ブラッグ条件の式 (3.26) が成立すると、 $T$  のトレースと行列式は次のようになる。

$$\left(\frac{1}{2} \text{Tr}[T]\right)^2 = \det[T] R^2, \quad (3.39)$$

ここで、

$$R = 1 - \frac{2(\beta^{(B)} - \beta^{(A)})(\alpha^{(B)} - \alpha^{(A)})}{(\alpha^{(B)} - \beta^{(B)})(\alpha^{(A)} - \beta^{(A)})} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad (3.40)$$

$$\psi = (k_{z+}^{(B)} + k_{z-}^{(B)})H_B = -(k_{z+}^{(A)} + k_{z-}^{(A)})H_A + 2\pi m, \quad (3.41)$$

とする。 $|\det[T]| = 1$  であることより、

$$\left|\frac{1}{2} \text{Tr}[T]\right| = |R|. \quad (3.42)$$

$R$  は実数であることより、式 (3.38) は次のようになる。

$$qD = \arg\left(\frac{1}{2} \text{Tr}[T]\right) + \frac{1}{i} \log |R| + \frac{1}{i} \log(1 \pm \sqrt{1 - 1/R^2}), \quad (3.43)$$



ここで、 $q$  はブラッグ条件での波数である。振動数がフォノンのストップバンド内にあると、式 (3.37) が成立する。このとき、式 (3.37) と (3.40) から  $|R| > 1$  および  $1/R^2 < 1$  となる。これより、式 (3.43) の第2項と第3項は、純虚数となり、 $qD$  の実数部は次のよう書ける。

$$\text{Re}[qD] = \arg\left(\frac{1}{2}\text{Tr}[T]\right). \quad (3.44)$$

この関係式と式 (3.30) より、ストップバンドが生じる波数  $q_B$  は、

$$q_B D = \text{Re}[q_1 D] = \text{Re}[q_2 D] = \frac{q_1 D + q_2 D}{2} = L(\omega_B, \phi_{inc}; m), \quad (3.45)$$

となる。ここで、 $\omega_B$  はブラッグ条件である式 (3.26b) を満たす角振動数である。これより、 $q = q_B$  で分散関係の二つのブランチが交わることが分かる。関数  $L$  は角振動数  $\omega$  に比例することより、式 (3.45) を満たす分散関係中の点  $(q_B, \omega_B)$  は、関数  $L$  が示す直線上にある。Fig. 3.7 での直線 ( $L_1$  と  $L_2$ ) はこの直線を示す。

ブラッグ条件が成立するとき、式 (3.43) より

$$\text{Im}[qD] \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad |R| \rightarrow 1_{+0}, \quad (3.46)$$

となる。 $qD$  の虚部が零になることは、ブラッグ反射が抑えられることを意味する。ゆえに、式 (3.27) で示される消滅則は、転送行列を用いて次のように表現できる。

$$\left| \frac{1}{2}\text{Tr}[T] \right| = 1. \quad (3.47)$$

この節で次のことが明らかとなった。超格子への  $SH$  フォノンの斜方入射において：(1) Fig. 3.7 に示すように、ストップバンドは一般に分散関係のゾーン内に現われる。ストップバンドの分散関係での位置は式 (3.45) で与えられる波数  $q_B$  で決まり、ブラッグ条件をみたす角振動数  $\omega_B$  に比例する。(2) ストップバンド内のフォノンには強い反射が現われる。この条件は式 (3.37) に示すように転送行列のトレースを用いて表わされる。



さらに、周波数バンドの条件も式 (3.36) にあるように転送行列のトレースを用いて表現される。(3) ブラッグ条件の消滅則は転送行列を用いて、Fig. 3.8 に示すように式 (3.47) によって表現できる。



### 3.6. この章のまとめ

Fig. 3.2 に示すスローネス曲線から、 $SH$ フォノンの(111)面でのブラッグ反射はモード  $ST$  と  $FT$  間の変換を伴う。Fig. 3.4 で示したように、分散関係はゾーン内に周波数ギャップ(ストップバンド)が現われる。このギャップ内では、透過率が鋭い低下をみせる。この結果は、超格子の界面の3回回転対称と媒質の異方性に起因する。

Fig. 3.2 で示すように、これまで考察してきた  $SH$ (pure-shear) フォノン以外に二つのモードがある。そのひとつが quasi-longitudinal で、他方が quasi-shear である。このふたつのモードにも以上と同じ結果が期待できる。

転送行列は超格子中の  $SH$ フォノンに対して種々の情報を含んでいる。この例が分散関係、ブラッグ条件より詳細な反射条件である式(3.37)、ブラッグ条件の消滅則、および分散関係におけるストップバンドの位置である。

超格子中のフォノンの反射と透過は、これまでに実験的に観測されているが、ここで明かにしたようにフォノンの斜方入射で、ストップバンドがゾーンの中央や端からゾーン内部に移動する現象を観測することは興味深い。ラマン散乱を用いると、この現象を観測できる可能性がある。界面に垂直なフォノンに対して、ラマン散乱でゾーン中央のストップバンドからのふたつのストークス線を観測することは可能である。界面に垂直でないフォノンが関与する場合に、このふたつのストークス線の間隔が広がることを期待できる。<sup>7,10-15</sup> これより、垂直入射のフォノンによるゾーンの中央のストップバンドの分枝による跳びが、フォノンの斜方入射によってあたかも広がるように観測され、ストップバンドのゾーン内部への移動が確認できる。

なお、上記のブラッグ反射条件を拡張した式(3.37)の結果は、転送行列法より一般的に得られたものである。ゆえに、(001)面を界面にもつ超格子や等方的な層からなる超格子でも同様の結果を得ることが示唆できる。



### 3.7. 付録：運動方程式の書き換えと Rytov の分散関係

式 (3.1) の各要素は、第 1 章の 1.1 節で示したものである。一般的な表現が与えられているが<sup>16</sup>、この章では用いなかった。この節で、運動方程式である式 (3.4) と弾性定数との対応を調べる。必要な弾性定数は、次に示すもののひとつのみである。

$$C_{44} = \frac{a - b - 2c}{2} \cos^2 Q + c,$$

ここで、 $Q = \arctan(1/\sqrt{2})$  と定義した。座標系  $(x, y, z)$  を  $y$  軸を中心に  $[110]$  方向にさらに  $\mu$  だけ回転したときには、上記の弾性定数  $C_{44}$  で次の置き換えをすればよい。

$$Q \rightarrow Q - \mu.$$

式 (3.4) は上記の弾性定数をと類似した次の式に書き替えることができる。

$$\frac{a - b - 2c}{2} \cos^2(Q - \mu) + c = \rho \left( \frac{\omega}{k} \right)^2,$$

ここで、 $k$  は波数ベクトルの絶対値であり、 $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$  (ここで、 $k_y = 0$ ) である。また、 $Q = \arctan(1/\sqrt{2})$  とおいている。この運動方程式が  $C_{44}$  の表現と類似するのは、異方的な媒質を扱っているが、 $SH$  フォノンが pure-shear であることによる。つまり、等方的な超格子での  $T$  モードと類似することに起因する。

仮に、フォノンの波数ベクトルの  $z$  成分が同じ値をもつとすると、 $k_{z+}^{(J)} = k_{z-}^{(J)} \equiv k_z^{(J)}$  となり、式 (3.33) は次のように書き替えられる。

$$\frac{1}{2} \text{Tr}[T] = \cos k_z^{(B)} H_B \cos k_z^{(A)} H_A + V \sin k_z^{(B)} H_B \sin k_z^{(A)} H_A,$$

ここで、



$$V = \frac{(C_{46}^{(B)} - C_{46}^{(A)})^2}{2C_{44}^{(B)}C_{44}^{(A)}} \frac{k_x^2}{k_z^{(B)}k_z^{(A)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{C_{44}^{(B)}k_z^{(B)}}{C_{44}^{(A)}k_z^{(A)}} + \frac{C_{44}^{(A)}k_z^{(A)}}{C_{44}^{(B)}k_z^{(B)}} \right).$$

式 (3.28) より,  $\det[T] = 1$  であり,  $\text{Tr}[T]$  が実数であることより, 分散関係は次のように表現できる.

$$\cos qD = \cos k_z^{(B)} H_B \cos k_z^{(A)} H_A + V \sin k_z^{(B)} H_B \sin k_z^{(A)} H_A.$$

この式は,  $SH$ フォノンの斜方入射に対するものである. ただし, 媒質中の三つのフォノンのモードが互いに相互作用しない, 界面に垂直なフォノン入射の場合のものと, その形が類似している.<sup>4,5,10-15</sup> これも, 上記の運動方程式と同様に  $SH$ フォノンが *pure-shear* であることに起因する. [なお, (001) 界面をもつ超格子では,  $C_{46} = 0$  であり,  $V$  の表現の第1項目は零になる. 等方的媒質の超格子に対しても同様である.]



# 参考文献

- <sup>1</sup> V. Narayanamurti, H. L. Stormer, M. A. Chin, A. C. Gossard, and W. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **43**, 2012 (1979).
- <sup>2</sup> O. Koblinger, J. Mebert, E. Dittrich, S. Dottinger, W. Eisenmenger, P. V. Santos, and L. Ley, Phys. Rev. B **35**, 9375 (1987).
- <sup>3</sup> D. C. Hurley, S. Tamura, J. P. Wolfe, and H. Morkoc, Phys. Rev. Lett. **58**, 2446 (1987).
- <sup>4</sup> S. Tamura, D. C. Hurley, and J. P. Wolfe, Phys. Rev. B **38**, 1427 (1988).
- <sup>5</sup> S. M. Rytov, Akust. Zh. **2**, 71 (1956) [Sov. Phys. Acoust. **2**, 68 (1956)].
- <sup>6</sup> A. S. Barker, Jr., J. L. Merz, and A. C. Gossard, Phys. Rev. B **17**, 3181 (1979).
- <sup>7</sup> C. Colvard, R. Merlin, M. V. Klein, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **45**, 298 (1980); C. Colvard, T. A. Gant, M. V. Klein, R. Merlin, R. Fischer, H. Morkoc, and A. C. Gossard, Phys. Rev. B **31**, 2080 (1985).
- <sup>8</sup> Parameters for GaAs and AlAs used in the present paper are listed in a paper: Sadao Adachi, J. Appl. Phys. **58**(3), R1(1985).
- <sup>9</sup> B. A. Auld, 2nd ed. *Acoustic Fields and Waves in Solids* vol. I, II, (Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1990).
- <sup>10</sup> T. J. Delph, G. Herrman, R. K. Kaul, J. Applied Mechanics, **45**, 343 (1978).
- <sup>11</sup> L. M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, 2nd ed., p86, Academic Press, 1980.
- <sup>12</sup> R. E. Camley, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **27**, 7318 (1983); B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, O. Hardouin Duparc, R. E. Camley, and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **28**, 1711 (1983).
- <sup>13</sup> H. T. Grahn, H. J. Maris, J. Tauc, and B. Abeles, Phys. Rev. B **38**, 6066 (1988).
- <sup>14</sup> A. Yamamoto, T. Mishina, Y. Masumoto, and M. Nakayama, Phys. Lett. **73**, 740 (1994).
- <sup>15</sup> M. W. C. Dharma-wardana, D. J. Lockwood, J.-M. Baribeau, and D. C. Houghton, Phys. Rev. B **34**, 3034 (1986); D. J. Lockwood, M. W. C. Dharma-wardana, J.-M. Baribeau, and D. C. Houghton, Phys. Rev. B **35**, 2243 (1987).
- <sup>16</sup> A. G. Every, Phys. Rev. Lett. **42**, 1065 (1979).



### Figure Captions

**Fig. 3.1** 超格子の構造を示す. (a) 単位構造は, GaAs の 60 単一層と AlAs の 150 単一層からなる. その厚さは, それぞれ,  $H_2 = 60 \times 0.326 \text{ nm}$ ,  $H_1 = 150 \times 0.326 \text{ nm}$  となる. ゆえに, 単位構造の厚さは  $D = H_1 + H_2 = 68.5 \text{ nm}$  である. (b) 基盤は GaAs よりなる. 界面から, 入射フォノンの一部が反射される. 透過したフォノンは, 検出層に現われるが, 検出で全ての透過波のエネルギーが吸収されるとしているので, 検出層では反射波が存在しない.

**Fig. 3.2**  $(\bar{1}10)$  面上のスローネス曲線を示す. (a) GaAs のバルク中でのスローネス曲線である. 太い楕円の線が  $SH$  波 (pure-shear) のもので, 他のふたつが quasi-shear と quasi-longitudinal なフォノンのものである. (b) AlAs と GaAs のスローネス曲線を  $(111)$  界面を境に左右に示した. ある振動数で GaAs から AlAs に伝搬してゆく入射フォノンを考えると, 対応する波数ベクトルを図のように置くことができる. 他の反射フォノン, 透過フォノンの波数ベクトルも同様である. 並進対称性より, 反射フォノンと透過フォノンは入射フォノンと同じ波数の  $x$  成分をもつ.

**Fig. 3.3** 本論で使用する弾性定数のための座標系を示す. 軸  $X, Y, Z$  は立方晶の結晶軸を表わす. 軸  $x, y, z$  が式 (3.1) に対する座標系で, それぞれ  $[11\bar{2}]$ ,  $[\bar{1}10]$ ,  $[111]$  方向と一致する.

**Fig. 3.4** 三つの異なる入射角に対する透過率と分散関係を示す. 分散関係での超格子波数は,  $\pi/D$  を単位としている. 単位構造の個数  $N$  は, 5 としている. 振動数に対する透過率の沈みは, 分散関係中のストップバンドに対応している. これは, 図中で番号を付して表わしている. (a)  $(111)$  界面に垂直入射した場合である. 各ストップバンドは, ゾーンの中央か端にある. (b) Fig. 3.2 に示したように,  $[111]$  方向から  $[001]$  方向に  $36^\circ$  傾けてフォノンを入射した場合を示す. (c)  $[111]$  方向から  $[110]$  方向に  $36^\circ$  傾けてフォノンを入射した場合を示す. 異方性より (b) に示した図と異なっていることが分かる.

**Fig. 3.5** フォノンの反射のようすを図示したものである. 界面での複数の反射は, 無視されている.



**Fig. 3.6** 経路  $P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5$  と  $Q_1 - Q_2 - Q_3$  との位相差が  $2\pi$  の整数倍になるとき、反射が強く生じる。これが、式 (3.26) に示した超格子でのブラッグ条件である。

**Fig. 3.7**  $[111]$  方向から  $[110]$  方向に  $20^\circ$  傾けてフォノンを入射したときの分散関係を示す。直線  $L_1$  と  $L_2$  については、本文を参照のこと。ブラッグ反射は、式 (3.45) を満たす点  $(q_B, \omega_B)$  で現われる。

**Fig. 3.8** (a)  $SH$ フォノンの斜方入射に対する反射率を示す。垂直な直線は、ブラッグ条件を満たす振動数にある。仮定したパラメータは、Fig. 3.7 と同じである。(b) 構造因子の絶対値の自乗を示す。ここでも、垂直な直線は、ブラッグ条件を満たす振動数にある。(c) 転送行列のトレースの  $1/2$  を示す。(挿入した図は、全体の形を示すものである。) ブラッグ条件が満たされると、この値は1より大きくなる。消滅則が成立すると、これが1となる。式 (3.40) で定義された  $R$  は、ピークをつなぐ包絡線となっている。



## 第4章

### (111)面を界面とする超格子での反射と透過

#### 4.1. この章の概要

#### 4.2. 構造因子

#### 4.3. 振動数依存と角度依存

#### 4.4. 透過率の振動

#### 4.5. この章のまとめ

#### 参考文献

ここでは、(111)面を界面とする超格子における、音響フォノンのモード変換を伴う透過について考察する。第3章で扱った  $SH$  フォノン以外のふたつのモードをこの章で扱うことになる。この二つのモードに対する基本的項目は、第2章に記した。つまり、モード  $T$  と  $L$  をこの章で扱うことになる。本文で与える共鳴透過条件を満たすと、二つのモードが超格子中を伝搬するときにエネルギーの授受を行い、(エネルギー保存を満たしながら)透過率が振動する。このとき、反射はほぼ無視できる。この現象を説明するため、反射と透過に対する構造因子を導入した。この振動は、電子線に対する *Pendellösung* 効果、もしくは  $X$  線に対する *Borrmann* 効果と類似したものである。この章では、異方的媒質にたいする現象を扱っているが、異方性に起因する種々の効果は特に考慮せず、透過率の振動に着目し考察する。



#### 4.1. この章の概要

近年、種々の超格子に対する音響フォノンの性質について多くの報告がある。Tamura, Hurley, Wolfe はフォノン イメージング法に基づいて実験および理論的に超格子を透過するフォノンについて考察した<sup>1</sup>。さらに、Tamura は、電子の共鳴的トンネルリングと類似した音響フォノンの共鳴的透過現象を報告している<sup>2</sup>。また、等方的媒質を層としてもつ超格子での音響フォノンの共鳴的モード変換についても報告されている<sup>3</sup>。

本論文では、電子線に対する Pendellösung 効果<sup>4</sup>と、X 線に対する Borrmann 効果<sup>5</sup> と類似の現象が、異方的媒質の層をもつ超格子についても現われることを発見したので、ここで報告する。完全な結晶を伝搬する粒子線では、回折波と透過波の強度が振動しながら伝搬する。フォノンの場合の透過率の振動は、二つのモード間に強い相互作用が存在することを示すものである。ただし、このフォノンモード間の相互作用は、超格子の界面にフォノンを斜方入射したときにのみ生じることに注意しなければならない。

Fig. 4.1 にここで考慮する超格子の構造を示す。これは、第3章で考慮したものと全く同じものである。単位構造は 150 単一層の AlAs と 60 単一層の GaAs よりなり、界面は Fig. 4.1(a) に示すように (111) 面である。単一層の厚さは、0.326 nm であるため単位構造の厚さ（空間的周期）は  $D = 68.5$  nm となる。Fig. 4.1(b) には、5つの単位構造をもつ場合の超格子の様子を示した。基盤 ( $S$ ) は GaAs, 検出層 ( $D$ ) は AlAs を仮定する。図中の  $x, y, z$  は、それぞれ  $[11\bar{2}]$ ,  $[\bar{1}10]$ ,  $[111]$  方向を示す。

一般的に、結晶中には三つのモードが存在するが、フォノンの波数ベクトルが  $(\bar{1}10)$  面内に限られているとして、二つのモード quasi-shear と quasi-longitudinal のみを考慮する。本論中で、これらのモードをそれぞれ  $T$  と  $L$  で示す。もうひとつのモード  $SH$  (pure-shear) は、ここで考察する効果とは関係がないので、考察対象から除く。Fig. 2(a) に、考慮するフォノンがのる面上でのスローネス曲線を示す。このフォノンの偏極ベクトルの方向と波数ベクトルの方向との角度を、Fig. 2(b) に示す。



## 4.2. 構造因子

フォノンの反射率と透過率の振動数依存性を示すために、第2章で導入した反射と透過に対する二種の構造因子を用いる。

反射に対しては、モード変換を伴うものと伴わないもの、双方をひとつの構造因子で表現できる。この構造因子は、次のようになる。

$$S_{JK}^{<R>} = r_{BA} + (r_{BA} + r_{AB}e^{-i\theta_{JK}^{(B)}}) \frac{1 - e^{iN(\theta_{JK}^{(A)} + \theta_{JK}^{(B)})}}{1 - e^{i(\theta_{JK}^{(A)} + \theta_{JK}^{(B)})}}, \quad (4.1a)$$

$$\theta_{JK}^{(j)} \equiv \zeta_{J+}^{(j)} H_j + \zeta_{K-}^{(j)} H_j, \quad (4.1b)$$

ここで、 $N$  は超格子中の単位構造の総数である。また、 $J, K = T, L; j, k = A, B$  とする。層  $j$  内で、フォノンモード  $J$  の波数ベクトルの  $z$  成分の絶対値を  $\zeta_{J\pm}^{(j)} > 0$  とし (符号 '+' は  $z$  軸の正の方向、符号 '-' は  $z$  軸の負の方向に進むフォノンに対する量であることを示す)、 $H_j$  は層  $j$  の厚さである。 $r_{jk}$  は振幅反射係数を示すが、 $J = K$  のとき、式 (4.1) はモード変換を伴わない反射に対する構造因子であることを意味する。 $J \neq K$  ではモード変換を考慮したものになる。式 (4.1) より、次のようにブラッグ反射の条件を得る。

$$\zeta_{J+}^{(A)} H_A + \zeta_{J+}^{(B)} H_B + \zeta_{K-}^{(B)} H_B + \zeta_{K-}^{(A)} H_A = 2\pi m, \quad (4.2)$$

ここで、 $m$  は整数である。この条件を満たすと、 $|S_{JK}^{<R>}|^2$  がピークをもち、反射が強く現われる。

モード変換を伴う透過に対する構造因子は次のようになる。

$$S_{JK}^{<T>} = t_{BA} + (t_{BA} + t_{AB}e^{i(\theta_K^{(B)} - \theta_J^{(B)})}) e^{i(\theta_J - \theta_K)} \frac{1 - e^{iN(\theta_J - \theta_K)}}{1 - e^{i(\theta_J - \theta_K)}}, \quad (4.3a)$$

$$\theta_J^{(j)} \equiv \zeta_{J+}^{(j)} H_j, \quad (4.3b)$$



$$\theta_J \equiv \theta_J^{(A)} + \theta_J^{(B)}, \quad (4.3c)$$

ここで、 $J \neq K$  である。[これは、式 (4.3) が摂動的手法から導出されたため、 $J = K$  に対しては適用できない。] また、 $t_{jk}$  は振幅透過係数を示す。(これも振幅反射係数と同様にモード  $J, K$  に依存する。)  $|S_{JK}^{<T>}|^2$  がピークをもつ条件で、モード変換を伴ったフォノンの透過が強く生じる。式 (4.3) より、この条件は次のようになる。

$$\zeta_{T+}^{(A)} H_A + \zeta_{T+}^{(B)} H_B = \zeta_{L+}^{(A)} H_A + \zeta_{L+}^{(B)} H_B + 2\pi m, \quad (4.4)$$

ここで  $m$  は整数である。これを以下では、共鳴透過条件とよぶ。波数は振動数に比例するので、層が厚くなると式 (4.4) より共鳴透過条件を満たす振動数は低くなることが分かる。

構造因子の振動数依存性を Fig. 4.3 に示す。Fig. 4.3(a) は、入射角が  $20^\circ$  のときの  $T$  モード入射に対するものである。各  $B$  層内での  $T$  モードの伝搬も同じ角度である。正の値で示したものがモード  $T$  から  $L$  に変換する透過に対する構造因子で、負のものが反射に対する構造因子である。Fig. 4.3(b) は、 $L$  モードの入射に対する構造因子である。このときの入射角は  $34.2^\circ$  である。透過の構造因子がピークをもつ振動数で、反射に対する構造因子がともに零になっている。これは以下に示す透過率の振動を引き起こす。



### 4.3. 振動数依存と角度依存

転送行列法によって、反射率と透過率を求める。ここでは、二つのモードのみを扱っているので、転送行列は、 $4 \times 4$  となる。(最も一般的な場合には、3つのモードが結合し、 $6 \times 6$  の行列が必要である。)

転送行列を用いて算出した反射率と透過率を Fig. 4.4(a),(b) に示す。 $T_{JK}$  がモード  $J$  から  $K$  に変換されて検出層に現われる透過波に対する透過率である。 $R_{JK}$  は、基盤に戻る反射波に対する反射率である。図では比較のため、 $T_{JK}$  を正、 $R_{JK}$  を負の値としている。ブラッグ反射の条件が成立しても、消滅則のために反射が強く現われない場合もある。モード変換を伴わない反射率は図に示していないが、エネルギーの保存則より容易に得ることができる。

Fig. 4.4(c) には、Fig. 4(a), (b) に対応する分散関係を示している。ゾーンの中央で対称になっていないのは、媒質の異方性に起因する。波数は  $D/\pi$  で規格化してある。縦の線は、共鳴透過条件である式 (4.4) を満たす振動数 (117.6 GHz) の位置を示している。この振動数の周囲で、二つのブランチがアンチクロスしていることが図より分かる。Fig. 4.4(c) 中のストップバンドにおいて、(a), (b) での反射率が大きなピークをもっている。Fig. 4.3 と Fig. 4.4 を比較すると、構造因子と反射率/透過率と正確にピークが対応していることが分かる。

Fig. 4.5 は角度依存性を表わすグラフである。Fig. 4.5(a) に、構造因子を描いている。Fig. 4.5(b) では、透過率/反射率を示す。ここでの、縦の線も共鳴透過条件を満たす振動数に置いてある。しかし、構造因子のピークがこの振動数の位置にない。これは、構造因子での消滅則を与える因子の効果による。このような特徴があるが、式 (4.3) と式 (4.1) の構造因子は正確に透過率と反射率の角度依存性を説明している。



#### 4.4. 透過率の振動

超格子の界面をフォノンが透過してゆくとき、二つのモードのエネルギーが互いに交換され、伝搬距離に対して振動することを示す。この効果は、共鳴透過条件が成立するときに生じる。この振動の様子をフォノンが伝搬した単位構造に対して示したものが、Fig. 4.6 である。フォノンの振動数が 117.6 GHz であるとき、透過率は周期  $\Delta N = 13.6$  で振動している。モード  $T$  の入射角は  $20^\circ$  である。このときの振動の起源は、次のように説明できる。

”共鳴透過条件が成立する振動数で、反射に対する構造因子は、モードの変換があるか無いかによらず全て零である (Fig. 4.3 を参照のこと)。これより、入射したフォノンは反射を生じることなく超格子中を伝搬してゆく。このとき同時に、モード変換を伴う構造因子はピークをもつ。つまり、モード間でエネルギーの授受が強く生じる。このように、透過したフォノンは超格子中を反射せずに伝搬し、モード間ではエネルギーの授受が生じる。ゆえに、フォノンの伝搬に対して各モードの透過率が振動する。”

数値計算によると、このときの反射エネルギーは入射エネルギーの 5% 以下である。

なお、共鳴透過条件から離れた振動数においては、振動の振幅は小さくなる。ストップバンドでは、フォノンの反射が生じ、透過と振動は抑えられる。



#### 4.5. この章のまとめ

本章での構造因子の数値計算で用いた振幅透過係数と振幅反射係数は、第2章で導出したものである。これより、透過に対する構造因子を算出し、モード変換を伴う透過率とよく一致する結果を得ることができた。また、共鳴透過条件を、この構造因子から式(4.4)に示すように与えることができた。透過の構造因子は、モード変換を伴う場合の透過率の振動数依存性、角度依存性を説明できる。モード変換を伴う場合とモード変換を伴わない場合の双方の反射率も反射の構造因子で説明可能である。これら透過と反射に対する構造因子を用いて、フォノンの伝搬に対する振動の起因について考察できた。

本論では、(111)面を界面とする超格子を扱ったが、(001)面を界面にもつ超格子や等方的な媒質よりなる超格子についても同様の現象が生じることが期待できる<sup>3</sup>。

たとえ共鳴透過条件が成立しても、透過率が振動しない場合もあるので、式(4.4)が常に透過でのモード間のエネルギー授受による振動を示すと言い切れないので注意が必要である。分散関係中のブランチがフォノンの音速の違いによってアンチクロスする条件も透過率の振動を見つけるために重要といえる。ただし、このアンチクロスする部分が常に振動を予見するとは云えないことにも注意しなければならない。(例えば、Fig. 4.4(c)にある分散関係で振動数が90 GHzと170 GHzの付近。)

本論で述べた透過率の振動以外にも、フォノンの伝搬層数に対する振動が生じている。例えば、振動数が35 GHzでTモードの入射角が20°のときに、 $T_{TT}$ と $R_{TL}$ 間にも振動がある。これは、本論で議論しなかった、異方性の効果(e.g. the phonon focusing and the conical refraction)と共に、さらに研究すべき課題である。



#### 参考文献

- <sup>1</sup> S. Tamura, D.C. Hurley, and J.P. Wolfe, Phys. Rev. **B 38**, 1427(1988).  
<sup>2</sup> S. Tamura, Phys. Rev. **B 43**, 12646(1991).  
<sup>3</sup> H. Kato, H. J. Maris, S. Tamura, Phys. Rev. **B53**, 7884(1996); Physica **B 219 & 220**, 696(1996).  
<sup>4</sup> A. Howie and M.J. Whelan, Proc. Roy. Soc. **A263**, 217(1961).  
<sup>5</sup> N. Kato, Acta Cryst. **16**, 276(1963); **14**, 526(1961). B.E. Warren, *X-ray Diffraction*, p339, (Addson-Wesley,1969).  
<sup>6</sup> H. Kato, J. Acoust. Soc. Am., **101**(3),1380(1997). For basic formulations: B. A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, 2nd Ed. vol. I and II (Robert E. Krieger,1990).

#### Figure Captions

**Fig. 4.1.** (a) 単位構造は, GaAs 60 単一層と GaAs 150 単一層よりなる. (b) 本論で議論する超格子は単位構造を周期的に積み重ねたものである.

**Fig. 4.2.** (a) スローネス曲線を示す. 右側に GaAs のもの, 左側に AlAs のものを描いてある. 界面は (111) 面で, 軸の単位は s/m である. (b) フォノンの偏極の波数ベクトルとの角度を示す.

**Fig. 4.3.** 構造因子を示す. (a) *T*モード入射, と (b) *L*モード入射に対する構造因子である.

**Fig. 4.4.** 反射率/透過率, 分散関係を示す. 反射率は負の値, 透過率は正の値としている. (a) 入射モードは *T*, 入射角は  $20^\circ$  としている. (b) 入射モードは *L*, 入射角は  $34.2^\circ$  の場合を示す. (c) 分散関係を示す. 入射角は *T*モードで  $20^\circ$ , *L*モードで  $34.2^\circ$  であり, 双方ともに同一の分散関係をもつ.



**Fig. 4.5.** 角度依存性を示す. (a)  $T$ モード入射に対する構造因子である. 振動数は  $117.6 \text{ GHz}$  である.  $L$ モード入射に対する構造因子は示していないが, モード変換を伴う透過に対する構造因子は  $T$ モードの場合と同様の形をもち, そのピークの位置も同じである. (b) 反射率と透過率を示す. 縦の線は共鳴透過条件を満たす位置にある.

**Fig. 4.6.** フォノンの通過した単位構造数に対する透過率の振動のようすを示す. 入射モード  $T$  で, 入射角は  $20^\circ$ . 入射モード  $L$  で, 入射角は  $34.2^\circ$  である. 振動数は, 双方ともに  $117.6 \text{ GHz}$  であり, 振動周期は  $\Delta N = 13.6$  となっている.



## 第5章

### 等方的媒質からなる超格子での共鳴的モード変換と透過

#### 5.1. この章の概要

#### 5.2. 摂動的な取り扱い

#### 5.3. 透過率の数値計算

#### 5.4. 振動の物理的起源

#### 5.5. この章のまとめ

#### 参考文献

等方的媒質からなる超格子の界面に斜方入射したフォノンに対する透過と反射について考察する。フォノンの分散関係でブランチがアンチクロスした振動数の近傍で、フォノンが超格子中を伝搬しながら、ふたつのモード間にエネルギーの授受と振動が生じる。この振動は、電子線や X 線の *Pendellösung* 効果と類似した現象である。理論的な解析には、第2章の終わりで示した等方的媒質に対する転送行列を用いる。



### 5.1. この章の概要

周期的な半導体超格子がフォノンのフィルターとして動作することの例証<sup>1</sup>以来、ナノメータ程度の厚さの結晶質あるいは非晶質よりなる層状構造内の高振動数音響フォノンの伝搬に対して多くの研究が行われてきた<sup>2-4</sup>。周期的超格子中のフォノンに対する透過と反射の基本的性質は、分散関係によって理解可能である。(001)面を界面とする GaAs/AlAs 超格子で、フォノンをこの界面に垂直に入射したときの分散関係を Fig. 5.1(a) に示す。この計算では、GaAs と AlAs の媒質中での音速を、それぞれ、 $L$ モードに対して  $5.03 \times 10^5$  と  $5.98 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$ 、 $T$ モードに対して  $3.03 \times 10^5$  と  $3.60 \times 10^5 \text{ cm s}^{-1}$  としている。質量密度は、それぞれ、 $5.32$  と  $3.76 \text{ g cm}^{-3}$  であり、各層の厚さは、ともに同じで  $40 \text{ \AA}$  である。今、扱っている超格子の各層は等方媒質なので、考慮すべきモードは純粋な縦 ( $L$ ) モードと横 ( $T$ ) モードである。人工的に導入した超格子の空間周期構造により、分散関係はミニゾーンに折り込まれている。分散関係の二つのブランチは、幾つかの点で交叉する。各モードに対しゾーンの中央と端に同じモード間のブラッグ反射に起因するギャップが生じる<sup>1,5-7</sup>。GaAs/AlAs の系に対しては、ふたつの媒質の弾性的性質の差が比較的少ないため、生じるギャップも小さなものとなる。これらのギャップは、超格子中を伝搬できないフォノン振動数があることを意味する。この振動数の範囲はストップバンドと呼ばれる。フォノンがこの範囲の振動数をもって超格子に入射されると、反射されて検出層にフォノンが現われない。

斜方入射したフォノンの伝搬に対しては、分散関係が Fig. 5.1(b) のようになり、上記の場合と幾つか異なる特徴をもつ。この図は、Fig. 5.1(a) と同じ超格子に対して得られたものである。算出において、フォノンの波数ベクトルの界面との角度は、 $L$  と  $T$  モードに対してそれぞれ、GaAs の層内で  $45^\circ$  と  $25.2^\circ$  ; AlAs の層内で  $56.9^\circ$  と  $30.4^\circ$  である。第一近似として、 $L$  と  $T$  モードが独立に伝搬するとできる。しかしこの近似において、 $L$  と  $T$  に対する分散曲線はそのモードの速度の違いによって幾つかの点で交叉する。モード間の結合により、交叉点に分散曲線の反発 (アンチクロス) が生じる。このアンチクロスは、二つの場合に分類できる。(I) 分散曲線のひとつのがゾーン中央から、他方がゾーンの端より発して”ぶつかる”場合が第一の種類である。(II) 第二の種類は、 $L$  モードの分散曲線が  $T$  モードの分散曲線を速度の違い (傾きの差) によって”追い越す”場合である。

アンチクロス (I) は超格子中のブラッグ条件によるものである。超格子



の周期を  $D_{AB}$  とすると、この条件を次のように書ける。

$$q_L + q_T = mG_0, \quad (5.1)$$

ここで、 $q_L$  と  $q_T$  は波数ベクトルの  $z$  成分である。 $m$  は整数で、 $G_0 = 2\pi/D_{AB}$  は超格子の最も小さい逆格子ベクトルの絶対値である<sup>3,4,8</sup>。

アンチクロス (II) は、モードの変換を伴う透過に起因する。入射フォノンが  $L$  モードであるとき、フォノンが超格子を進むにしたがって  $T$  モードのフォノンが界面で生じる。この  $T$  モードのフォノンが検出層に達するとして、 $T$  モードのフォノン振幅の和が大きくなる干渉条件は次のようになる。

$$q_T - q_L = mG_0, \quad (5.2)$$

ここで、 $m$  は整数である。

フォノンの斜方入射での  $T$  と  $L$  モードの相互作用より、超格子の各界面でモード変換した透過フォノンと反射フォノンがわずかつ発生する。異種モード間のブラッグ反射 [(I) のアンチクロス] について多くの研究が実験的理論的になされている<sup>3,4,8-10</sup>。しかし、(II) のアンチクロスについての研究は少なく、これを本論で考察した。この結果、ある振動数範囲で大きなモード変換が生じることが明かになった。さらに、入射した音響フォノンが伝搬するにしたがい、二つの  $L$  と  $T$  モードのエネルギーが保存則を満たしながら振動する。この振動は、電子線における *Pendellösung* 効果や、X 線における *Borrmann* 効果と類似した現象である<sup>11-13</sup>。

例として Fig. 5.2 に示す超格子での各モードのエネルギーの振動を考察する。超格子の単位構造内の各層は二つの媒質 A, B よりなり、フォノンを入射する基盤 (S) と検出する層 (D) でこの超格子を挟む。基盤は媒質 B と同じ弾性媒質である。検出層は媒質 A と同じ弾性媒質で、ここに現われる透過フォノンは全て吸収され超格子内にはもどらないとする。 $z$  軸は超格子の界面に垂直にとり、 $x$ - $z$  面をフォノンの波数ベクトルがのる面とする。簡単のため、弾性的異方性は考慮せず、フォノンは  $x$ - $z$  面で偏極している  $L$  と  $T$  モードを扱う。



## 5.2. 摂動的な取り扱い

この節では、摂動的取り扱いにもとずいてモード変換を伴った反射と透過を考察する。反射を扱う際に、一つの界面でのみ反射されると考える。さらに、入射フォノンの減衰も無視する。反射フォノンの振幅の和を超格子における構造因子と呼ぶ。Lモードの入射フォノンに対して反射されたTモードのフォノンの振幅の和より反射の構造因子  $S_R$  が次のように与えられる。

$$S_R = r_{BA} + (r_{BA} + r_{AB}e^{-i\theta^{(B)}})e^{i\Theta} \frac{1 - e^{in\Theta}}{1 - e^{i\Theta}}, \quad (5.3)$$

ここで、

$$\theta^{(i)} \equiv (k_L^{(i)} + k_T^{(i)})D_i, \quad (i = A, B), \quad (5.4)$$

$$\Theta = \theta^{(A)} + \theta^{(B)}. \quad (5.5)$$

$r_{ij}$  は、Lモードのフォノンが層  $i$  と  $j$  の界面に入射したときTモードとして反射されたフォノンの振幅を与える係数である。 $n$  は単位構造数、 $k_J^{(i)}$  はモード  $J$  の層  $i$  でのフォノンに対する波数ベクトルの  $z$  成分であり、 $D_i$  は層  $i$  の厚さである。

式 (5.3) より、次の条件が成立するとき、反射振幅は大きくなる。

$$\Theta = 2m\pi, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.6)$$

または、

$$(k_L^{(A)} + k_T^{(A)})D_A + (k_L^{(B)} + k_T^{(B)})D_B = 2m\pi. \quad (5.7)$$

$k_J^{(A)}D_A + k_J^{(B)}D_B$  が  $q_J D_{AB}$  と等価で、式 (5.7) は 5.1 節で与えた条件式  $q_L + q_T = mG_0$  の書き換えである。



$L$ モードから $T$ モードに変換するフォノン透過に対しは、透過の構造因子 $S_T$ が次のように与えられる。

$$S_T = t_{BA} + (t_{BA} + t_{AB}e^{i(\phi_T^{(B)} - \phi_L^{(B)})})e^{i(\Phi_L - \Phi_T)} \frac{1 - e^{in(\Phi_L - \Phi_T)}}{1 - e^{i(\Phi_L - \Phi_T)}}, \quad (5.8)$$

ここで、

$$\phi_J^{(i)} \equiv k_J^{(i)} D_i, \quad (5.9)$$

$$\Phi_J = \phi_J^{(A)} + \phi_J^{(B)}, \quad (5.10)$$

および、 $t_{ij}$ は層 $i$ と $j$ の界面に $L$ モードのフォノンが入射したとき透過してゆく $T$ モードのフォノン振幅を与える係数である。透過した $T$ モードが大きな振幅となる条件は次のようになる。

$$\Phi_T - \Phi_L = 2m\pi, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.11)$$

または、

$$(k_T^{(A)} - k_L^{(A)})D_A + (k_T^{(B)} - k_L^{(B)})D_B = 2m\pi. \quad (5.12)$$

これは、5.1節で与えた式 $q_T - q_L = mG_0$ と等価である。

むろん、式(5.3),(5.8)と同様の結果が $T$ モード入射でも生じる。さらに、 $T$ モード入射で大きな $L$ モードの振幅を得る条件は、上述した $L$ モード入射で大きな $T$ モードの振幅を得る条件と同じである。

この摂動的扱いは、単位構造の数が少ない超格子に対して有効である。共鳴時に、透過や反射でモード変換を受けたフォノンは、単位構造数 $n$ に比例する振幅をもつ。明らかに、モード変換を受けたフォノンが入射フォノンのエネルギーと同程度までになれば、この摂動的取り扱いは成立しない。この意味で、ここで扱った方法は、結晶に対するX線散乱での運動



学的理論と類似のものである。X線にたいしては、ひとつの単原子層で生じる反射が小さなため、この運動学的理論は多数の単原子層からなる結晶に対してでも成立する。摂動的取り扱いの音響フォノンに対する正当性の範囲は、超格子の界面にフォノンを入射するときの角度によって決まるモード間の相互作用の大きさに依存する。(単位構造の数が多いときには、透過の構造因子より共鳴透過条件を満たす周波数を得ることは可能であるが、この周波数近くでの共鳴透過の生じる周波数範囲を正確に示すことはできず、実際より小さな周波数範囲を予測する。) なお、界面に対しての垂直入射では、モード変換は生じない。



### 5.3. 透過率の数値計算

摂動的取り扱いよりさらに議論を進めるために、具体的な数値解を示す。このために、転送行列法を用いて透過率と反射率を算出する<sup>4</sup>。

Fig. 5.3 に透過率の振動数依存性を示す。これは GaAs/AlAs 超格子で、 $L$  モードを基盤から入射したとき、検出層に現れる  $L$  と  $T$  モードの透過率を示している。超格子の単位構造の厚さ（周期）は  $80 \text{ \AA}$ 、単位構造数は 19 である。モード  $L$  の入射角は  $45^\circ$  で、Fig. 5.1(b) と同じである。 $L$  モードの透過率は、Fig. 5.1 に示した振動数ギャップ 1-4 に対応する振動数範囲で急激に下がっている。このギャップから離れたほとんどの振動数で、透過エネルギーは主に  $L$  モードで運ばれている。しかし、 $800 \text{ GHz}$  の振動数の近くでは、 $T$  モードの音響フォノンによる強い透過が見られる。式 (5.2) で予測できる強いモード変換を伴った透過の振動数は、 $m=1$  として  $\nu_1 = 816 \text{ GHz}$  であり、 $T$  モードの透過率がピークをもつ振動数  $\nu_1^* = 812 \text{ GHz}$  とよく一致している。 $T$  モードによるエネルギー透過は、モード間のブラッグ反射による（図中の 1,3,4 で示す）振動数で抑えられている。

Fig. 5.3 で示した透過率は、超格子の単位構造が 19 のものである。振動数を  $\nu_1$  に固定してフォノンが進んだ単位構造数と透過率をプロットすると興味ある結果が得られる。Fig. 4(a) がこの図で、振動数以外の条件は Fig. 5.3 と同じである。伝搬距離が小さいとき、透過エネルギーが（入射した  $L$  モードから） $T$  モードに変換されて増加しているのが分かる。 $n=5$  で、透過したエネルギーがほぼ 100% 近く  $T$  モードに移っている。伝搬距離が大きくなるにしたがい、 $L$  と  $T$  のモードの透過率が振動し、その周期が約 11 である。一方、この二つの透過率の和は約 1 になってエネルギー保存則を満たす。Fig. 5.4(b) に、振動数が  $\nu_1$  から少し離れた場合での同様の図を示す。この振動数での振る舞いは (a) と同様のものであるが、 $T$  モードへのエネルギーの変換は最大で約 66% となる。



#### 5.4. 振動の物理的起源

モード変換を伴う透過率の振動に対する物理的起源は幾つかの方法で理解可能である。定性的には、入射した  $L$  モードのフォノンが超格子中を進むときに界面でわずかずつ  $T$  モードのフォノンを発生する。共鳴透過条件 [式 (5.2) または式 (5.12)] が満たされると、 $T$  モードのエネルギーが増加する。しかし、ある伝搬距離で全エネルギーが  $T$  モードのフォノンに移ると、エネルギーは  $L$  モードに戻ってゆく。各界面でのモード変換を伴う振幅透過係数が小さくなれば、エネルギーが  $L$  モードに再度戻る周期数  $n_0$  は大きくなる。

一方、例えば Fig. 5.1(b) に示した超格子の正規モード (normal mode) による考察より、振動数  $\nu$  と分散関係との関係の特徴として次の三つの場合がある。

- 1) 振動数  $\nu$  が振動数ギャップ [(I) のアンチクロス] に対応する範囲にあると、伝搬しながら相互作用するモードがないので、超格子中を透過するフォノンのエネルギーは指数関数的に減少する。
- 2) 振動数  $\nu$  が周波数バンドにあると、入射フォノンの振動数が同じで、波数が異なる二つのモードが超格子中を伝搬する。この波数を  $q_1$  と  $q_2$  で表わすこととする。この二つのモードがアンチクロスの点より充分離れていると、一方は本質的に  $L$ -like な性質をもち、他方は  $T$ -like な性質をもつ。これより、入射フォノンが  $L$  モードであるとき、超格子中で  $L$ -like なモードは大きな振幅で励起され、 $T$ -like なモードは小さな振幅で励起される。励起された二つの超格子モードの波数の違いより、超格子を伝搬するときビートが発生する。しかし、 $L$ -like なモードが  $T$ -like なモードより大きな振幅をもつため、ビートの振幅は小さくなる。
- 3) (II) のアンチクロスの近くの振動数  $\nu$  では、 $L$  モードの入射フォノンに対して、波数  $q_1$  と  $q_2$  の差は少ない。このため、超格子中を伝搬するフォノンは  $L$  と  $T$  モードの混合状態となる。入射フォノンは同程度の振幅をもつ二つの  $L$  と  $T$  モードを励起する。これより、大きな振幅をもつビートが現われる。はじめは、二つのモードが干渉しあい、 $L$  モードが  $T$  モードを増加させる。次の条件が成立するまでフォノンが  $n$  個の単位構造を通過すると、 $L$  モードのフォノンが消え、 $T$  モードのフォノンが残る。

$$|q_1 - q_2|nD_{AB} = \pi. \quad (5.13)$$



ゆえに、次に示す  $n_0$  がモード  $L$  にエネルギーが戻るフォノンの伝搬単位構造数（振動周期）となる。

$$n_0 = \frac{2\pi}{|q_1 - q_2|D_{AB}}. \quad (5.14)$$

$T$ モードのフォノンエネルギーは、次のように変化すると考えられる。

$$\sin^2(\pi n/n_0), \quad (5.15)$$

ここで、 $n$  は超格子中の単位構造を通過した総数である。 $L$ モードのフォノンエネルギーは  $\cos^2(\pi n/n_0)$  のように変化する。

5.2節で導入した振幅透過係数を用いて上記の結果を表現できる。共鳴透過条件の式 (5.11) が満たされるとき、摂動的議論より得た式 (5.8) より  $T$ モードのエネルギーは次のように増加する。

$$|S_T|^2 \approx n^2 |t_{BA} + t_{AB} e^{i(\phi_T^{(B)} - \phi_L^{(B)})}|^2. \quad (5.16)$$

$n \gg 1$  と仮定すると、式 (5.8) の右辺の第1項目 ( $t_{BA}$ ) を無視できる。変換されたエネルギーが1より小さいとすれば、摂動的扱いが可能である。ゆえに、式 (5.15) と式 (5.16) を比較すれば、次式を得る。

$$n_0 = \frac{\pi}{|t_{BA} + t_{AB} e^{i(\phi_T^{(B)} - \phi_L^{(B)})}|}. \quad (5.17)$$

この式 (5.17) の右辺の分母が零に近づくとき、振動周期が無限大になる。つまり、振動が消えることを意味する。この分母の因子は式 (5.8) の右辺にあるもので、これが零に近づくことは構造因子でもモード変換を伴う透過が抑えられることを意味する。数値計算では式 (5.14) と式 (5.17) にある周期がよく一致している。無論、超格子の各層内で生じるモード変換の量が充分小さいとの仮定が重要である。これは、フォノンの入射方向が界面の法線に近いときに成立する。

なお、この現象は結晶中の電子線やX線での Pendellösung 効果<sup>11-13</sup>、および、ニュートリノでの MSW 効果<sup>14,15</sup> と類似したものである。異方



性をもつ実際の超格子では、この効果が複雑なものとなり、二つの横 (T) モード間の相互作用も考慮しなければならない。



### 5.5. この章のまとめ

界面に斜方入射したフォノンが超格子を伝搬してゆく現象での透過率について考察してきた。共鳴透過条件を満たす振動数で  $L$  モードのフォノンを入射すると、 $T$  モードに変換された強い振幅のフォノンが検出層に現われる。(  $T$  モードの入射では、 $L$  モードが透過する。 ) この現象が生じる時、フォノンが伝搬する距離にたいして各モードの透過率が振動する。超格子中を伝搬する波束を考えると、含まれる波数の分布によって種々の効果が生じることが期待できる。本論で詳述しなかったが、単位構造の厚さをわずかつ増やしながら成長させた超格子 (CHIRP 超格子) がその一例である。これは、次章で考察する。

超格子中のフォノンのモード変換を伴う透過を実験で観測するには、フォノン イメージング法<sup>16,17</sup>を用いることで可能であろう。



### 参考文献

- <sup>1</sup> V. Narayanamurti, H. L. Stormer, M. A. Chin, A. C. Gossard, and W. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **43**, 2012 (1979).
- <sup>2</sup> O. Koblinger, J. Mebert, E. Dittrich, S. Dottinger, W. Eisenmenger, P. V. Santos, and L. Ley, Phys. Rev. **B 35**, 9375 (1987).
- <sup>3</sup> D. C. Hurley, S. Tamura, J. P. Wolfe, and H. Morkoc, Phys. Rev. Lett. **58**, 2446 (1987).
- <sup>4</sup> S. Tamura, D. C. Hurley, and J. P. Wolfe, Phys. Rev. **B 38**, 1427(1988).
- <sup>5</sup> S. M. Rytov, Akust. Zh. **2**, 71 (1956) [Sov. Phys. Acoust. **2**, 68 (1956)].
- <sup>6</sup> A. S. Barker, Jr., J. L. Merz, and A. C. Gossard, Phys. Rev. **B17**, 3181 (1979).
- <sup>7</sup> C. Colvard, R. Merlin, M. V. Klein, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **45**, 298 (1980); C. Colvard, T. A. Gant, M. V. Klein, R. Fischer, H. Morkoc, and A. C. Gossard, Phys. Rev. **B 31**, 2080 (1985).
- <sup>8</sup> S. Tamura and J. P. Wolfe, Phys. Rev. **B 35**, 2528 (1987).
- <sup>9</sup> P. V. Santos, J. Mebert, O. Koblinger, and L. Ley, Phys. Rev. **B36**, 1306 (1987).
- <sup>10</sup> F. Calle, M. Cardona, E. Richter, and D. Strauch, Solid State Commun. **72**, 1153 (1989).
- <sup>11</sup> A. Howie and M.J. Whelan, Proc. Roy. Soc. **A263**, 217(1961).
- <sup>12</sup> N. Kato, Acta Cryst. **14**, 526 (1961); **16**, 276 (1963).
- <sup>13</sup> B.E. Warren, *X-ray Diffraction*, (Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1969) p.339.
- <sup>14</sup> L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D 17**, 2369 (1978) and **D 20**, 2634 (1979).
- <sup>15</sup> S.P. Mikheyev and A.Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913 (1986); Sov. Phys. JETP **64**, 4 (1986).
- <sup>16</sup> For a review, see G. A. Northrop and J. P. Wolfe, in *Nonequilibrium Phonon Dynamics*, edited by W. E. Bron (Plenum, New York, 1985), Chapter 5.
- <sup>17</sup> B. Taylor, H. J. Maris, and C. Elbaum, Phys. Rev. Lett. **23**, 416 (1969); H. J. Maris, J. Acoust. Soc. Am. **79**, 906 (1971).



### Figure Captions

**Fig. 5.1** 等方的媒質の層をもつ GaAs/AlAs 超格子で、連続体近似した分散関係を示す。  $D_A$  は AlAs (A 層) の厚さ、  $D_B$  は GaAs (B 層) の厚さであり、双方ともに  $40\text{\AA}$  としている。フォノンの速度と層の質量密度は本文に示す。 (a) 垂直入射の場合。 (b) 斜方入射の場合。入射角は本文に示してある。振動数ギャップに付した番号は、  $L$  フォノンに対するものである。入射モードと同じ反射モードに対する (1,3,4 の番号を付した) ギャップはブラッグ反射に対応する。

**Fig. 5.2** 超格子の構造を示す。A 層は AlAs, B 層は GaAs とする。基盤 (S) は B 層、検出層 (D) は A 層と同じ弾性的性質をもたせている。

**Fig. 5.3** GaAs/AlAs 超格子の基盤から  $L$  モードのフォノンを入射したときの透過率の振動数依存性を示す。太線が入射フォノンの  $L$  モードから  $T$  モードに変換されて透過したエネルギーを示す。細線は  $L$  モードのまま透過したものである。このときの、単位構造数は 19 であり、その単位構造内の各層の厚さは  $D_A = D_B = 40\text{\AA}$  である。その他の条件は Fig.5.1(b) と同じである。Fig. 5.1(b) に付した番号は、この図の透過率の落ち込みに付した番号と対応している。

**Fig. 5.4**  $L$  モードを斜方入射したときの、透過率と透過単位構造数 (伝搬距離) との関係を示す。超格子への入射条件は Fig. 5.1(b) および Fig. 5.3 と同じである。 (a) 振動数は、  $\nu_1^* = 812\text{ GHz}$  とした。このときに、モードの混合が強く生じる。 (b) 振動数  $760\text{ GHz}$  とした場合である。モード変換の現象が弱く現れている。



## 第6章

### 等方的媒質からなる CHIRP 超格子での音響フォノンのモード変換

#### 6.1. この章の概要

#### 6.2. 転送行列

#### 6.3. 差分方程式

#### 6.4. 近似解

#### 6.5. この章のまとめ

#### 6.6. 付録：周期的超格子の場合

#### 参考文献

第5章で扱ったモード変換を伴う音響フォノンの透過現象について、定量的な議論を行う。特に、単位構造の厚さを次第に厚くして形成する超格子 (CHIRP 超格子) で、中央に共鳴透過条件を満たす層を置くとモード変換が強められる。フォノンは界面に対して斜方入射させる場合を扱い、超格子の各層は等方的媒質からなるものとする。現象の解析には、転送行列法を用いる。これより、透過に対する差分方程式を導入し、CHIRP 超格子に対して近似解を与える。第5章で扱った周期的な超格子に対する厳密解は、付録で論じる。



### 6.1. この章の概要

周期的な超格子にフォノンを斜方入射したときの反射と透過について第5章で議論した<sup>1</sup>。このとき、超格子の分散関係中のアンチクロスする振動数で、フォノンの伝搬距離に対してふたつのモードの透過率が振動する現象を扱った。この現象は、電子線の *Pendellösung* 効果、X線の *Borrmann* 効果と類似の現象である<sup>2,3</sup>。

一方、ニュートリノに対する *Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein* (MSW) 効果<sup>4,5</sup>と類似した現象が超格子内で生じる。これを本章で議論する。Fig. 6.1に考察の対象とする超格子の構造を示す。この構造は、電子デバイスの分野で *CHIRP* 超格子<sup>6</sup>と呼ばれ、超格子の単位構造の厚さを少しずつ増加させて成長させた超格子である。第2章と第5章で扱った共鳴透過条件を満たす層をこの超格子の中央に置く。各層は、解析を容易にするため等方的だと仮定する。これより、結晶中の複雑な現象を無視できる。*CHIRP* 超格子でも透過率の振動が生じるが、周期的な超格子と異なる特徴が現れる。



## 6.2. 転送行列

入射フォノンは平面波として、各層内での変位ベクトル  $\mathbf{u}$  を次のように仮定する。

$$\mathbf{u} = \sum_{m=T,L} \{A_m \mathbf{e}_{m+} e^{ik_{mz}Z} + B_m \mathbf{e}_{m-} e^{-ik_{mz}Z}\} e^{ik_x X - i\omega t}, \quad (6.1)$$

ここで、 $A_m, B_m$  は、それぞれ透過波と反射波の振幅である。ベクトル  $\mathbf{e}_{m\pm}$  は、モード  $m$  の偏極ベクトルである (添え字の  $+$  は透過、 $-$  は反射に対する量を示す。) これは、規格化されているとする。つまり、 $|\mathbf{e}_{m\pm}| = 1$  である。各層は等方的と考えているため、透過フォノンと反射フォノンは、双方とも同じ絶対値の波数  $k_{mz}$  をもつ。系の並進対称性より、波数の  $x$  成分  $k_x$  は反射および透過フォノンともに同じ値をもつ。上記の式 (6.1) の表現で、簡単のため層を示す添え字を省略してある。以降では、上添え字  $j, k$  は Fig. 6.1 で示す層 A, B を示し、下添え字  $m$  は、フォノンのモード  $T, L$  を示すものとする。

フォノンの透過率と反射率を転送行列で算出する。等方的媒質では第2章で示したように、モードは  $T, L$  の二つを考慮すればよく、転送行列は  $4 \times 4$  の行列となる。Fig. 6.1 にある一つの単位構造を挟んだ位置での振幅の関係を次のように表現する。

$$\begin{bmatrix} A'_T \\ A'_L \\ B'_T \\ B'_L \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} A_T \\ A_L \\ B_T \\ B_L \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

ここで  $A_m$  と  $B_m$  は、変位の振幅である。一つの単位構造を透過したときの振幅は、 $A'_m$  及び  $B'_m$  としている。さらに、

$$F = \Phi^{(B)} f^{(AB)} \Phi^{(A)} f^{(BA)}, \quad (6.3)$$



$$\Phi^{(j)} = \begin{bmatrix} \exp(ik_{Tz}^{(j)} D_j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(ik_{Lz}^{(j)} D_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-ik_{Tz}^{(j)} D_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-ik_{Lz}^{(j)} D_j) \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$f^{(jk)} = [M^{(k)}]^{-1} M^{(j)}, \quad (6.5)$$

$$M = \begin{bmatrix} \cos \phi_T & \sin \phi_L & -\cos \phi_T & \sin \phi_L \\ -\sin \phi_T & \cos \phi_L & -\sin \phi_T & -\cos \phi_L \\ c_{44} \frac{\cos 2\phi_T}{\sin \phi_T} & 2c_{44} \cos \phi_L & c_{44} \frac{\cos 2\phi_T}{\sin \phi_T} & -2c_{44} \cos \phi_L \\ -2c_{44} \cos \phi_T & c_{44} \sin \phi_L \frac{\cos 2\phi_T}{\sin^2 \phi_T} & 2c_{44} \cos \phi_T & c_{44} \sin \phi_L \frac{\cos 2\phi_T}{\sin^2 \phi_T} \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

ここで、 $D_j$  は層  $j$  の厚さであり、 $\Phi^{(j)}$  はフォノンが層  $j$  を通過したときの位相の変化を示す。 $\phi_m$  はフォノンモード  $m$  の反射角であり、入射角と同じである。簡単のため、式 (6.6) にある全ての量に対して上添え字  $(j)$  を省略してある。 $j$  と  $k$  は層 A, B を示す。式 (6.5) より、行列  $f^{(jk)}$  が次の条件を満たすことが分かる。

$$f^{(kj)} = [f^{(jk)}]^{-1}. \quad (6.7)$$

第2章および第3章で示したように、この行列はフォノンの振幅透過係数と振幅反射係数を表わす。

これらの表現を用いて、Fig. 6.2 に示す透過率の伝搬距離依存性を示すことができる。ここで、層 A の媒質は AlAs、層 B は GaAs としている。層厚の増加量を  $\Delta D$  とすると、図は  $\nu \Delta D / v_T = 2.46 \times 10^{-3}$ 、超格子の中央では  $\nu D_A / v_T = \nu D_B / v_T = 0.984$  としている。ここで、 $\nu$  はフォノンの振動数であり、 $v_T$  は GaAs 中でのモード  $T$  の音速である。基盤からの入射モードは  $L$  であり、入射角は  $45^\circ$  である。また、フォノンの振動数は超格子の全ての層でストップバンド内ないように設定しており、フォノンの反射はほぼ無視できる。



### 6.3. 差分方程式

転送行列で透過の現象を解析的に扱えるようにするため転送行列を  $2 \times 2$  に近似する。考察の対象とする振幅を  $A_T$  と  $A_L$  にするためである。式 (6.3)-(6.5) を以下のように近似する。

$$\hat{F} = \hat{\Phi}^{(B)} \hat{f}^{(AB)} \hat{\Phi}^{(A)} \hat{f}^{(BA)}, \quad (6.8)$$

$$\hat{\Phi}^{(j)} = \begin{bmatrix} \exp(ik_{Tz}^{(j)} D_j) & 0 \\ 0 & \exp(ik_{Lz}^{(j)} D_j) \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

$$\hat{f}^{(jk)} = \begin{bmatrix} [f^{(jk)}]_{11} & [f^{(jk)}]_{12} \\ [f^{(jk)}]_{21} & [f^{(jk)}]_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

これらの行列を用いて、式 (6.2) は次のような差分方程式となる。

$$\begin{bmatrix} A'_T \\ A'_L \end{bmatrix} = \hat{F} \begin{bmatrix} A_T \\ A_L \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

上記の近似で、 $2 \times 2$  の行列  $\hat{f}^{(jk)}$  が  $4 \times 4$  の行列  $f^{(jk)}$  で振幅反射係数を無視したことより与えられていることに注意すべきである。つまり、反射振幅  $B_m$  を無視したものでなく、超格子の単位構造内での反射は考慮されている。ただし、式 (6.7) と同様に次の関係式が成立するように  $\hat{f}^{(kj)}$  を定義する。

$$\hat{f}^{(kj)} = [\hat{f}^{(jk)}]^{-1}. \quad (6.12)$$

これらの近似を用いた式 (6.11) は、Fig. 6.3 に示すように、 $4 \times 4$  の転送行列ので求めた透過率と同様の性質を表現できる。Fig. 6.3 にある点は  $4 \times 4$  の転送行列ので求めた透過率を示し、実線が式 (6.11) で描いた透過率を示す。



#### 6.4. 近似解

式 (6.11) を記した超格子中の次の単位構造も考慮して、次の関係を与える。(Fig. 6.1 を参照のこと)

$$\begin{bmatrix} A_T'' \\ A_L'' \end{bmatrix} = \hat{F}' \begin{bmatrix} A_T' \\ A_L' \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

ここで、 $\hat{F}'$  は、 $\hat{F}$  の定義における式 (6.8)-(6.10) の表現で層の厚さを  $D_j$  から  $D_j + \Delta D$  に置き換えたものより与えられる。 $A_m''$  は、Fig. 6.1 に示す超格子中の位置での透過振幅を表わす。式 (6.11) と式 (6.13) より次の差分方程式がモード  $T$  と  $L$  に成立する。

$$A_T'' - (\hat{F}'_{11} + \hat{F}_{22} \frac{\hat{F}'_{12}}{\hat{F}_{12}}) A_T' + (\hat{F}_{11} \hat{F}_{22} \frac{\hat{F}'_{12}}{\hat{F}_{12}} - \hat{F}'_{12} \hat{F}_{21}) A_T = 0, \quad (6.14a)$$

$$A_L'' - (\hat{F}_{11} \frac{\hat{F}'_{21}}{\hat{F}_{21}} + \hat{F}'_{22}) A_L' + (\hat{F}_{11} \hat{F}_{22} \frac{\hat{F}'_{21}}{\hat{F}_{21}} - \hat{F}_{12} \hat{F}'_{21}) A_L = 0. \quad (6.14b)$$

この差分方程式を解析的に解くことは難しく、周期超格子での解析解 (付録参照) をもとに、近似的に解を求める。モード  $T$  と  $L$  の相互作用の大きさは単位構造の厚さには依存しないと考えて、 $\hat{F}'_{12} = \hat{F}_{12}$  および  $\hat{F}'_{21} = \hat{F}_{21}$  と近似する。これより、式 (6.14) は次のようになる。

$$A_T^{<n+2>} - 2\tau_n^T A_T^{<n+1>} + \delta_n A_T^{<n>} = 0, \quad (6.15a)$$

$$A_L^{<n+2>} - 2\tau_n^L A_L^{<n+1>} + \delta_n A_L^{<n>} = 0, \quad (6.15b)$$

ここで、 $A_T^{<n>}$  と  $A_L^{<n>}$  は  $n$  番目の単位構造での透過振幅である。また、

$$\tau_n^T = \frac{1}{2}(\hat{F}'_{11} + \hat{F}_{22}), \quad (6.16a)$$



$$\tau_n^L = \frac{1}{2}(\hat{F}_{11} + \hat{F}'_{22}), \quad (6.16b)$$

$$\delta_n = \hat{F}_{11}\hat{F}_{22} - \hat{F}_{12}\hat{F}_{21} = \det[\hat{F}], \quad (6.17)$$

とし,  $\hat{F}$  は  $n$  番目の単位構造での転送行列,  $\hat{F}'$  は  $n+1$  番目の単位構造での転送行列とする.

$\tau_n^T$  と  $\tau_n^L$  の  $n$  依存をみるため, 行列  $\hat{F}$  のトレースと行列式を次のように書き下す.

$$\begin{aligned} \text{tr}[\hat{F}] = & [f_{11}^{(BA)} f_{22}^{(BA)} \{ \exp(ik_{Tz}^{(A)} D_A + ik_{Tz}^{(B)} D_B) + \exp(ik_{Lz}^{(A)} D_A + ik_{Lz}^{(B)} D_B) \} \\ & - f_{12}^{(BA)} f_{21}^{(BA)} \{ \exp(ik_{Tz}^{(A)} D_A + ik_{Lz}^{(B)} D_B) + \exp(ik_{Lz}^{(A)} D_A + ik_{Tz}^{(B)} D_B) \} ] \\ & \div (f_{11}^{(BA)} f_{22}^{(BA)} - f_{12}^{(BA)} f_{21}^{(BA)}), \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\det[\hat{F}] = \exp(ik_{Tz}^{(A)} D_A + ik_{Tz}^{(B)} D_B + ik_{Lz}^{(A)} D_A + ik_{Lz}^{(B)} D_B), \quad (6.19)$$

ここで,  $f^{(jk)}$  は  $n$  に依存しない. フォノンの振動数は, 超格子の中央で共鳴透過条件を満たすとしているので, 超格子の中央で次式が成立する.

$$k_{Tz}^{(A)} D_A + k_{Tz}^{(B)} D_B = k_{Lz}^{(A)} D_A + k_{Lz}^{(B)} D_B + 2\pi\ell, \quad (6.20)$$

ここで,  $\ell$  は整数である. この条件より, 式 (6.18) と (6.19) は次の関係をもつ.

$$\text{tr}[\hat{F}] = 2 \left( \det[\hat{F}] \right)^{1/2} e_n, \quad (6.21a)$$

$$e_n = \frac{f_{11}^{(BA)} f_{22}^{(BA)} - f_{12}^{(BA)} f_{21}^{(BA)} \cos p}{f_{11}^{(BA)} f_{22}^{(BA)} - f_{12}^{(BA)} f_{21}^{(BA)}}, \quad (6.21b)$$



ここで,

$$p = k_{Tz}^{(A)} D_A - k_{Lz}^{(A)} D_A,$$

式 (6.20) より,

$$p = k_{Tz}^{(B)} D_B - k_{Lz}^{(B)} D_B,$$

とも表現可能である。ここで,  $e_n$  は実数である。フォノンが超格子の中央になくとも, この関係が近似的に成立すると期待でき,  $e_n$  の  $n$  依存は緩やかである。ここで,

$$\varepsilon_n^T = \tau_n^T / (\delta_n)^{1/2}, \quad (6.22a)$$

$$\varepsilon_n^L = \tau_n^L / (\delta_n)^{1/2}, \quad (6.22b)$$

を定義する。  $\varepsilon_n^T$  と  $\varepsilon_n^L$  が  $\frac{1}{2}\text{tr}[\hat{F}]$  に大まかに比例するため,  $e_n$  のように緩やかな  $n$  依存を期待できる。ゆえに,  $\tau_n$  と  $\delta_n$  は次のようになる。

$$\tau_n^T = \varepsilon_n^T e^{i(\alpha+\beta n)}, \quad (6.23a)$$

$$\tau_n^L = \varepsilon_n^L e^{i(\alpha+\beta n)}, \quad (6.23b)$$

$$\delta_n = e^{i(2\alpha+2\beta n)}, \quad (6.24)$$

ここで, 簡単のため,  $D_A = D_B \equiv D_0$  とする。  $\alpha$  と  $\beta$  は実定数で, 次のようになる。

$$\alpha = \frac{1}{2}(k_{Tz}^{(A)} + k_{Tz}^{(B)} + k_{Lz}^{(A)} + k_{Lz}^{(B)})D_0, \quad (6.25)$$



$$\beta = \frac{1}{2}(k_{Tz}^{(A)} + k_{Tz}^{(B)} + k_{Lz}^{(A)} + k_{Lz}^{(B)})\Delta D. \quad (6.26)$$

これらの表現を用いると、式 (6.15) は

$$A^{<n+2>} - 2\varepsilon_n e^{i(\alpha+\beta n)} A^{<n+1>} + e^{i(2\alpha+2\beta n)} A^{<n>} = 0, \quad (6.27)$$

となる。ここで、 $A^{<n>}$  は  $A_T^{<n>}$  か  $A_L^{<n>}$  の一方であり、これと対応して  $\varepsilon_n$  は、 $\varepsilon_n^T$  または  $\varepsilon_n^L$  を示す。 $\varepsilon_n^T$  と  $\varepsilon_n^L$  が  $n$  に緩やかに依存するため、 $\varepsilon$  の  $n$  依存を無視して定数と近似し、 $\varepsilon$  と記す。これより、解はつぎのようにもとまる。

$$A^{<n>} = (X_1 \rho_1^n + X_2 \rho_2^n) \exp\{i(\alpha - \frac{3}{2}\beta)n + \frac{i}{2}\beta n^2\}, \quad (6.28)$$

ここで、

$$\rho_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - e^{i\beta}}, \quad (6.29)$$

$$X_1 = \frac{A^{<1>} - r_2 A^{<0>}}{r_1 - r_2}, \quad (6.30a)$$

$$X_2 = \frac{r_1 A^{<0>} - A^{<1>}}{r_1 - r_2}, \quad (6.30b)$$

$$r_1 = \rho_1 e^{i(\alpha-\beta)}, \quad (6.31a)$$

$$r_2 = \rho_2 e^{i(\alpha-\beta)}, \quad (6.31b)$$

であり、 $A^{<0>}$  は基盤での振幅、 $A^{<1>}$  は超格子の第一番目の単位構造中での振幅である。



上記の解の物理的意味をみるため、基盤内に  $T$  モードのフォノンがなく、 $L$  モードのフォノンのみが超格子に入射される場合を考察する。モード  $T$  のエネルギーは振幅の自乗に比例する。つまり、

$$|A_T^{<n>}|^2 = \left| \frac{\hat{F}_{12} I_L}{r_1 - r_2} \right|^2 (|\rho_1|^{2n} + |\rho_2|^{2n} - 2\text{Re}\{(\rho_1 \rho_2^*)^n\}), \quad (6.32)$$

ここで、 $I_L$  は基盤から入射された  $L$  モードのフォノン振幅である。括弧内の第一項と第二項が  $T$  モードのエネルギーが  $n$  に依存して増加してゆくことを示す項である。第三項は、エネルギーの増加に伴う小さな振動を表わす項である。(ここで、 $|\rho_1 \rho_2^*| \approx 1$  である。等号が正確に成立するのは、 $\beta = 0$  のときである。) この振動の振幅は、 $T$  と  $L$  モードのフォノン間相互作用の大きさ  $\hat{F}_{12}$  にはほぼ比例することが分かる。

パラメータ  $\varepsilon$  が定数と考えると上記の式 (6.32) を得たが、次にこれを  $\varepsilon_n$  と表記して  $n$  依存を考慮する。式 (6.28) の振幅を、

$$A^{<n>} = \left[ \hat{X}_1 \prod_{k=1}^n \rho_1^{<k>} + \hat{X}_2 \prod_{k=1}^n \rho_2^{<k>} \right] \exp\{i(\alpha - \frac{3}{2}\beta)n + \frac{i}{2}\beta n^2\}, \quad (6.33)$$

のように置くと、近似的に次の表現が得られる。

$$\left. \begin{matrix} \rho_1^{<k>} \\ \rho_2^{<k>} \end{matrix} \right\} = \varepsilon_{k-1} \pm (\varepsilon_{k-1}^2 - e^{i\beta})^{1/2}, \quad (6.34)$$

$$\hat{X}_1 = \frac{A^{<1>} - \hat{r}_2 A^{<0>}}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}, \quad (6.35a)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{\hat{r}_1 A^{<0>} - A^{<1>}}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}, \quad (6.35b)$$

$$\hat{r}_1 = \rho_1^{<1>} e^{i(\alpha - \beta)}, \quad (6.36a)$$



$$\hat{r}_2 = \rho_2^{<1>} e^{i(\alpha-\beta)}. \quad (6.36b)$$

つまり，式 (6.28) の  $\rho$  が変化すると考える．この表現による数値計算の結果を Fig. 6.4 に示す．(計算の条件は Fig. 6.2 と同じである．) Fig. 6.4(a) が透過率を示し，太い実線が式 (6.33) から得られる結果である．振動の中心も図中に示してあり，透過率の増加が指数関数的に近似されていることが分かる．細線と点で示したグラフが  $4 \times 4$  の転送行列から得た厳密な解である．振動の周期を Fig. 4(b) に示す．点は  $4 \times 4$  の転送行列から得たものである．実線は式 (6.32) から得られたもので，次の表現をもつ．

$$\Delta n = \frac{2\pi}{|\arg(\rho_1^{<n>}) - \arg(\rho_2^{<n>})|}, \quad (6.37)$$

ここで， $\rho_1$  と  $\rho_2$  は式 (6.34) より与えられる．この式を  $\beta$  で展開し，さらに近似すると次式を得る．

$$\Delta n = \frac{\pi}{\tan^{-1} \sqrt{|\varepsilon_{n-1}^T|^{-2} - 1}} = \frac{\pi}{\cos^{-1} |\varepsilon_{n-1}^T|}. \quad (6.38)$$

数値計算で，この二つの振動周期の表現は十分な精度で一致し，厳密な計算ともよく一致する．しかし，振動の振幅とモード  $T$  のエネルギーの増加の様子は厳密な計算と一致しているとは言い難い．これらの点については，考察の余地が残る．



### 6.5. この章のまとめ

この章では、次の三つの方法で CHIRP 超格子中のフォノンモード変換について考察した。

- (1) 転送行列 ( $4 \times 4$ ) を用いて差分方程式 (6.2) を得た。これにより、モード変換が強く生じるとき、反射が無視できることを示した。
- (2) 振幅反射係数を無視することより、差分方程式 (6.11) を得た。このとき、転送行列を  $4 \times 4$  から  $2 \times 2$  に書き換えた。特に、 $2 \times 2$  の行列  $\hat{f}(jk)$  が重要な役目をはたし、 $2 \times 2$  の転送行列  $\hat{F}$  を決定する。これによって、フォノンが伝搬するときの各モードのエネルギーの増加および減少を示すことができた。
- (3) 周期的超格子に対する差分方程式の解 (6.28) から近似によって式 (6.33) を得、Fig. 6.4(a) に示す透過率の振る舞いのある程度説明できた。特に、振動周期はよく一致した。

フォノンの波束を考慮する場合、 $T$ モードと  $L$ モードのフォノンの波束は、超格子を伝搬して検出層に達すると分離して現れると予想できる。この特徴を用いれば、フォノンモードを  $T$  から  $L$  に、もしくは  $L$  から  $T$  に変換するデバイスを作成できる。または、フォノンのモードを分離することも可能であろう。



## 6.6. 付録：周期的超格子の場合

Fig. 6.5 に共鳴透過条件を全ての層で満たされる周期的超格子において、フォノンが伝搬するときの透過率振動の様子を示す<sup>1</sup>。入射フォノンは  $L$  モードとしている。

6.4 節で扱った超格子で  $\Delta D = 0$  とすると周期的超格子を扱うことになり、全ての単位構造で  $\hat{F}' = \hat{F}$  となる。このとき、二階差分方程式 (6.14) は次の解をもつ。

$$A_T^{<n>} = X_1 r_1^n + X_2 r_2^n, \quad (A1)$$

$$A_L^{<n>} = Y_1 r_1^n + Y_2 r_2^n, \quad (A2)$$

ここで、 $n$  はフォノンが伝搬した単位構造数で、 $A_m^{<n>}$  がその点でのモード  $m$  の透過フォノンの振幅である。 $r_1$  と  $r_2$  は行列  $\hat{F}$  の固有値である。

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \text{tr}[\hat{F}] \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \text{tr}[\hat{F}]\right)^2 - \det[\hat{F}]}. \quad (A3)$$

さらに、

$$X_1 = \frac{(\hat{F}_{11} - r_2)I_T + \hat{F}_{12}I_L}{r_1 - r_2}, \quad (A4)$$

$$X_2 = \frac{(r_1 - \hat{F}_{11})I_T - \hat{F}_{12}I_L}{r_1 - r_2}, \quad (A5)$$

$$Y_1 = \frac{(\hat{F}_{22} - r_2)I_L + \hat{F}_{21}I_T}{r_1 - r_2}, \quad (A6)$$

$$Y_2 = \frac{(r_1 - \hat{F}_{22})I_L - \hat{F}_{21}I_T}{r_1 - r_2}, \quad (A7)$$



ここで、 $I_T$  と  $I_L$  は、それぞれモード  $T$  と  $L$  の基盤から入射したフォノンの振幅である。層 A を AlAs、層 B を GaAs とし、その厚さを双方ともに  $D_A = D_B = 40\text{\AA}$  とすると、共鳴透過条件を満たすフォノンの振動数は  $\nu = 812\text{ GHz}$  となる。このときのモード  $T$  と  $L$  の透過率の振動が Fig. 6.5 に示されている。図中の点は Fig. 6.2 と同じであり、実線は上記の差分方程式の解である。

上記の解で周期的超格子の場合の解が与えられるが、第 5 章との対応を見るために、この解を書き換える。

$$[\det(\hat{F})]^{1/2} = e^{i\alpha}, \quad (\text{A8})$$

と置けば、式 (A3) から

$$r_{1,2} = e^{i\alpha \pm \theta}, \quad (\text{A9})$$

として  $\theta$  を定義できる。式 (A1) と式 (A2) に、式 (A4), (A5) を代入し、上記の表現を用いて計算を続けると、次のように解を示すことができる。

$$A_m^{<n>} = \frac{e^{i\alpha n}}{\sinh \theta} \{-A_m^{<0>} \sinh(n-1)\theta + A_m^{<1>} e^{-i\alpha} \sinh n\theta\}, \quad (\text{A10})$$

ここで、 $m = T, L$  はフォノンのモードを示す。 $A_m^{<0>}$  はモード  $m$  の入射フォノンの基盤での振幅を表わし、 $A_m^{<1>}$  はの基盤と接するはじめの単位構造中を検出層に向かって進むモード  $m$  のフォノンの振幅を表わす。



### 参考文献

- <sup>1</sup> H. Kato, H. J. Maris, S. Tamura, Phys. Rev. **B53**, 7884(1996);  
Proceeding of PHONONS95, Physica **B 219 & 220**, 696(1996).
- <sup>2</sup> A. Howie and M. J. Whelan, Proc. Roy. Soc. **A263**, 217 (1961).
- <sup>3</sup> N. Kato, Acta Cryst. **16**, 276(1963); **14**, 526(1961). B.E. Warren,  
p339, *X-ray Diffraction* (Addison-Wesley 1969).
- <sup>4</sup> L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978); **D20**, 2634 (1979).
- <sup>5</sup> S. P. Mikheyev and A. Y. Smirnov, Sov. J. Nucl. Phys. **42**, 913(1986);  
Sov. Phys. JETP **64**, 4(1986).
- <sup>6</sup> T. Nakagawa, N. J. Kawai, K. Ohta, M. Kawashima, Electron. Lett.  
**19**, 822(1983).



### Figure Captions

**Fig. 6.1.** 超格子の構造を示す。層を次第に厚くなるよう各層を成長させる。超格子の中央で、共鳴透過条件を満たす場合が本論で議論される。層  $j$  の厚さを  $D_j$  ( $j = A, B$ ) で示すと、次の層の厚さは  $D_j + \Delta D$  となる。

**Fig. 6.2.** フォノンが通過した単位構造数と透過率との関係を図示する。 $\nu \Delta D / v_T = 2.46 \times 10^{-3}$  とパラメータを設定してある。また、超格子の中央では  $\nu D_A / v_T = \nu D_B / v_T = 0.984$  である。ここで、 $\nu$  はフォノンの振動数、 $v_T$  は層 B での音速である。

**Fig. 6.3.**  $2 \times 2$  の転送行列で得た透過率を実線で示す。計算の条件は、Fig. 6.2 と同じで、この図と同じ値を点で示してある。

**Fig. 6.4.** (a) 入射フォノンのモードを  $L$  とし、モード変換をうけて  $T$  モードになる透過率を示している。条件は Fig. 6.2 と同じである。点と細線で Fig. 6.2 の  $T$  モードへの透過率を示してある。太い線が、式 (6.33) から得られる近似解の  $T$  モードへの透過率を示す。(b)  $T$  モードへの透過率での振動周期を示す。点が  $4 \times 4$  の転送行列で得た値を示し、実線で式 (6.33) から得られる近似解の振動周期を表わす。

**Fig. 6.5.** 周期的な超格子での透過率を示す。点と正方形の印は、Fig. 6.2 の値を示す。実線が差分方程式の解から得られる透過率である。両者は十分な精度で一致している。



## 第7章

### 結 論

周期的な超格子におけるフォノンの物理的特性は、波数と周波数の間に成立する分散関係によって支配される。これは、無限周期系において意味をもち、フォノンのバンド構造を決めている。一方、現実には作製される有限周期超格子において、この分散関係と直接比較できる物理量としてフォノンの透過率があり、前者の周波数ギャップ内で後者は鋭くゼロに落ちこむ。しかし、これまでのフォノンの分散関係の計算は、主に立方晶の[001]方向に積層された超格子に対するものが殆どであった。一方、立方晶の[111]方向にも超格子は成長可能である。(111)超格子においては界面が鏡面对称性をもたないため、斜方入射に対してフォノンの入射角と反射角は等しくならず、その分散関係に(001)超格子とは異なる特徴が期待される。本論文ではこの点を詳細に検討し、分散関係にゾーンの中央と端以外の波数で周波数ギャップが生じることを新たに見い出した。さらに、その物理的特徴を転送行列法に基づいて詳細に議論した。

一方、フォノンの斜方入射においては、垂直入射で生じるフォノンの単一モード間のブラッグ反射の他に、モード遷移を伴うブラッグ反射が理論、実験の両面から新たに見い出されていた。これらは、フォノンの分散関係で二つの分枝がブリルアンゾーンの折り返し効果と音速の違いにより互いに交差しようとする周波数で生じる。その様な周波数においては、さらにフォノン間にモード変換を伴う共鳴的透過が生じる可能性がある。本論文では、この共鳴的透過が実際に存在することを明かにした。またそれが単に周期的超格子のみならず、層厚を「共鳴透過条件」を満たす値の前後で徐々に変化した非周期的超格子においても生じる事を、解析的および数値的計算により示した。

より詳しくまとめると、第1章では、弾性定数テンソルの座標変換の下での変換則ならびに、(111)超格子内での独立なフォノンモードである界面に平行に偏極する $SH$ モードに対する転送行列を導いた。さらに、反射率および、透過率、エネルギー流束、分散関係等の導出を行った。第2章では、(111)超格子内で相互作用する二つのフォノンモード、つまり $T$ モードと $L$ モードに対する転送行列を導き、さらに等周波数曲線、偏極



ベクトル，エネルギー流束，透過と反射に関する構造因子等の導出を行った。これらは，第3章以降の具体的な超格子の性質を考察する際の基礎をなしている。第3章と第4章では結晶質の媒質からなる層で(111)面を界面とする超格子を，また第5章と第6章で等方的媒質よりなる層をもつ超格子を考察した。

特に第3章では，(111)超格子中で独立に存在できるモードである  $SH$  を扱い，転送行列が超格子中の  $SH$  フォノンに対する種々の情報を含んでいることを明らかにした。その例が分散関係，ブラッグ条件より詳細な反射条件，ブラッグ反射の消滅則，および分散関係内でのストップバンドの位置等の情報である。フォノンの斜方入射で，ストップバンドがゾーンの中央や端からゾーン内部に移動する現象も導出できた。この現象を観測することは興味ある問題であり，実際ラマン散乱で観測できる可能性がある。界面に垂直に入射する  $SH$  フォノンが関与する場合，ラマン散乱によってゾーン中央のストップバンドからのふたつのストークス線が観測されることを予測できる。さらに，界面に対して斜方入射の  $SH$  フォノンが関与する場合には，このふたつのストークス線の間隔が広がることが期待できる。Fig. 7.1(a) は(111)面に垂直な  $SH$  フォノンを観測する例であり，入射光の偏極方向は  $[11\bar{2}]$ ，散乱光は偏極方向が  $[\bar{1}10]$  とする。このとき，入射光，散乱光ともに波数ベクトルは(111)面に垂直である。この実験によって観測される散乱光は， $SH$  フォノンのみとでき，他の  $L$ ,  $T$  モードは散乱光より除去される。Fig. 7.1(b) は，(111)面に斜方入射する  $SH$  フォノンに関する観測例である。入射光は  $[11\bar{1}]$  方向の波数ベクトルを持ち，偏極方向は  $[\bar{1}10]$  である。散乱光は， $[111]$  方向に向かうもので，その偏極方向が  $[\bar{1}\bar{1}2]$  のものを観測すれば， $SH$  フォノンに起因するストークス線のみを観測できる。

第4章では，第3章と同じ(111)超格子を扱い， $T$  と  $L$  モードの透過過程における相互作用を考察した。特に透過過程を記述する構造因子を算出し，「共鳴透過条件」の存在を明らかにした。共鳴透過条件が成立する周波数では， $T$  と  $L$  モードが超格子中を伝搬する際にエネルギーの授受を行い，エネルギー保存則を満たすように各モードの透過率が逆位相で振動することを示した。また，転送行列より計算されるフォノンの透過率および反射率の周波数依存性と入射角依存性は，構造因子の結果と良く一致していることを明らかにした。この際，構造因子の算出に必要な界面での複数のモードに対する振幅反射係数と振幅透過係数が転送行列より導かれる事を示した。本論では，(111)面を界面とする超格子を扱ったが，(001)面を界面にもつ超格子や等方的な媒質よりなる層で構成された超格子につい



でも同様の透過率の振動が生じることが期待できる。

第5章からは、等方的媒質層をもつ超格子を扱い、超格子の界面に斜方入射したフォノンが伝搬してゆく際の透過率について考察した。共鳴透過条件をみたす周波数で  $L$  モードのフォノンを入射すると、 $T$  モードに変換された強い振幅のフォノンが検出層に現われる。(  $T$  モードの入射では、 $L$  モードが透過する。 ) この現象が生じるとき、フォノンが超格子中を伝搬する距離にたいして各モードの透過率が振動するが、これは第4章で示した透過率の振動と同一の起源をもつものである。なお、たとえ共鳴透過条件が成立しても、透過率が振動しない場合がある。これは、ブラッグ反射の消滅則が反射の構造因子より導かれるのと同様に、共鳴透過条件に対する消滅則がモード変換を伴う透過の構造因子から導かれることより理解可能である。本論文で明かにした超格子中のフォノンのモード変換を伴う透過の観測は、実験的には、フォノン・イメージング法を用いることで可能であると考えられる。

第6章では、第5章で定性的に扱った現象を定量的に記述することを試みた。特に、単位構造の厚さをわずかずつ増やしながら積層した非周期的 CHIRP 超格子中でのフォノンにもやはり共鳴的モード変換が存在することが明かとなった。ただし、このモード変換を発生させるためには、CHIRP 超格子の中央で共鳴透過条件を成立させることが必要である。

第4章から第6章において考察した共鳴透過を観測するには、例えば  $X$  線におけるペンデル縞の観測と同様の実験が参考になる。界面に対して鋭角に超格子を切断し、くさび型の試料とする。界面に平面波フォノンを入射すると、切断面に透過フォノンの強度がモードごとに分離して現れる。このとき切断面を液体内に置けば、透過フォノンの振動に含まれる液体に対するせん断成分が除去され圧力成分のみを液体内で観測できる。これによって、周期的超格子での共鳴透過の存在や CHIRP 超格子でのモード変換が検出できるであろう。具体的な実験用試料の加工例を Fig. 7.2 に示す。基盤も超格子と同時にくさび形に加工し、図のように基盤の切断面上部にトランスデューサーを置く。トランスデューサーより  $L$  モードの平面波を入射すれば、透過するフォノンの経路に超格子の界面が多く含まれるほどモードの変換を強く受ける。このため、超格子の切断面に現れるフォノンによる振動方向は、図の左から右に辿ってゆくとわずかずつ回転してゆく。超格子を液体中に置くと、周期的超格子の場合には液体の切断面近くの圧力は周期的に強弱を繰り返して観測される。(図の下に描いた



円は、その大きで液体中の圧力の大きさを示している。) CHIRP 超格子では Fig. 7.3 のように、この液体中の圧力が強弱を繰り返すが、次第に圧力成分が小さく成ってゆくことが観測される。なお、両超格子ともに界面から発生する  $T$  モードと  $L$  モードの伝搬方向が異なるため、実験に於いては入射するフォノンを界面に可能な限り垂直に近づける必要がある。入射角が大きな場合には、さらに正確な理論的解析が必要となる。

本研究のフォノン光学素子への応用上興味深い点として、フォノンの波束を超格子に入射したとき、 $T$  と  $L$  モードの波束は超格子を伝搬し、検出層に達すると分離して現れることが予想できる。この特徴を用いれば、フォノンのモードを  $T-L$  間で変換するデバイス、およびフォノンのモード  $T$  と  $L$  を分離するデバイスが作成可能である。超格子のフォノンに対する周波数フィルターとしての性質を組み合わせると、単一モードで特定の周波数のフォノンを抽出することも可能であろう。

一方、半導体である CdS 等の結晶に電場をかけると、電子のドリフト速度が音速に達する電場以上では電流が飽和する。これと同時に電子・フォノン相互作用によりフォノンが励起される。このフォノンによって結晶内の電子に対するポテンシャルが変形し、その谷に電子が集められる。フォノンの伝搬速度よりも電子のドリフト速度が大きくなると、電子はポテンシャルの壁にぶつかりエネルギーをフォノンに与えて、フォノンの強度を強める結果となる。これはマイクロ波に対する進行波管と同じ原理に基づくフォノンに対する進行波増幅である。L. Esaki 等が半導体ヘテロ接合超格子の概念を発表した当初より電子の散乱により電子のドリフト速度の飽和が議論されており、超格子に於いても進行波増幅器の機能が存在する可能性がある。このとき、本論文で明かにした共鳴透過条件をフォノンが満たすように超格子を設計すると、特定のモードのみを取り出すフォノン発振器を実現する可能性がある。

なお、本研究においてフォノンを平面波として扱った。実験等においてこの結論で示した現象を正確に検証するには、フォノンを波束として扱い、理論を整備し実験と対比することが必要である。さらに、フォノンの伝搬を時間的に考察する際には、波束の群速度を考慮しなければならない。これらは、本研究をさらに展開してゆく際の重要な課題である。



## 謝 辞

本研究を具体的に進めるにあたっては、北海道大学工学部固体量子工学講座（固体物理学分野）の田村信一郎教授より数年間にわたり多くの助言と指導を頂き、本研究の進行を助けて頂いた。

なお、本研究は、1990年3月より始めたものである。開始にあたっては、当時の北海道大学工学部工業数学講座の佐久間哲郎教授（現苫小牧工業高等専門学校校長）に便宜を頂き、本研究テーマを得ることができた。

また、著者が1994年3月から1995年1月まで文部省在外研究員として、アメリカ合州国の Brown 大学に滞在した際には、Humphrey J. Maris 教授のお世話になり、実験および理論に関し時間を惜しまずに有意義な議論を繰り返し行っていたが、本研究の重要な結果に対する著者の理解を深めることができた。

北海道大学工学部極限物理工学講座（数理物理工学分野）の中山恒義教授、および同講座（物性物理工学分野）の徳田直樹教授には、本論文に対する貴重な意見をいただいた。

苫小牧工業高等専門学校の岡本幸雄教授からは、本研究の一部と本論文の序論に関し種々のご意見を頂いた。

上記に記すことのできなかった、苫小牧工業高等専門学校の教官および事務官など、多くの方々からのご支援に対して、この場で深く感謝の意を表します。



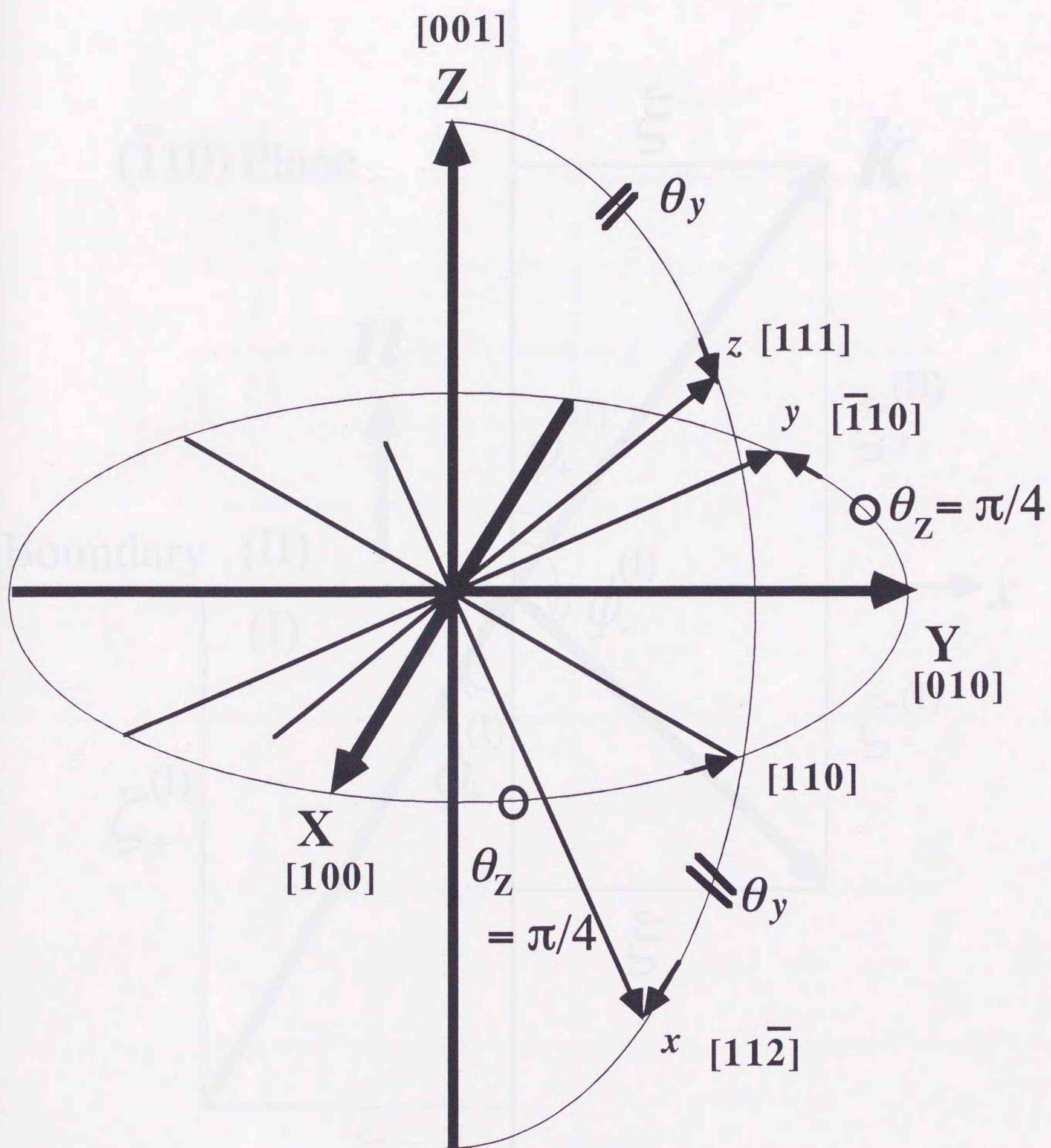
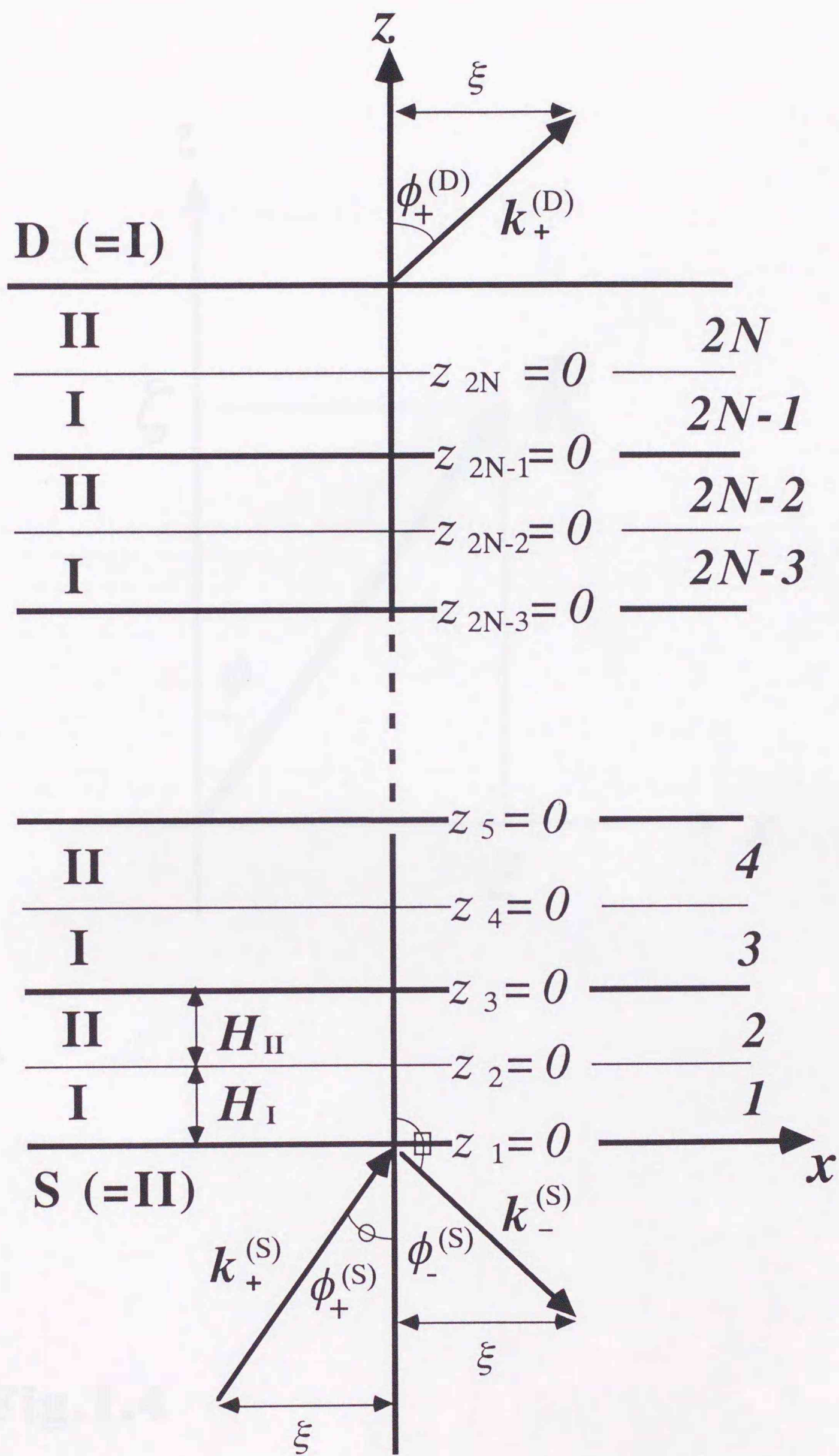


Fig. 1.1



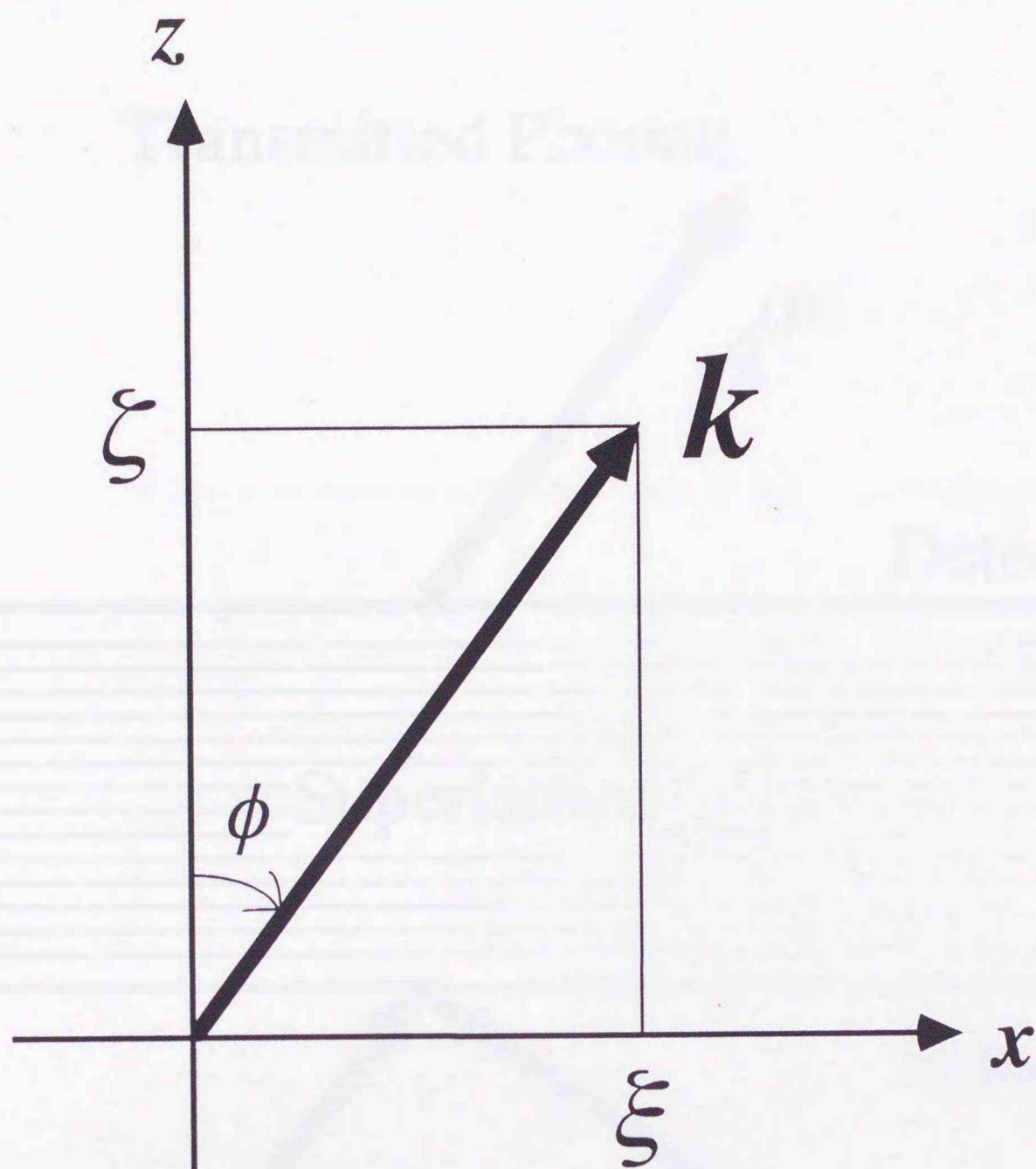






**Fig.1.3**





**Fig.1.4**



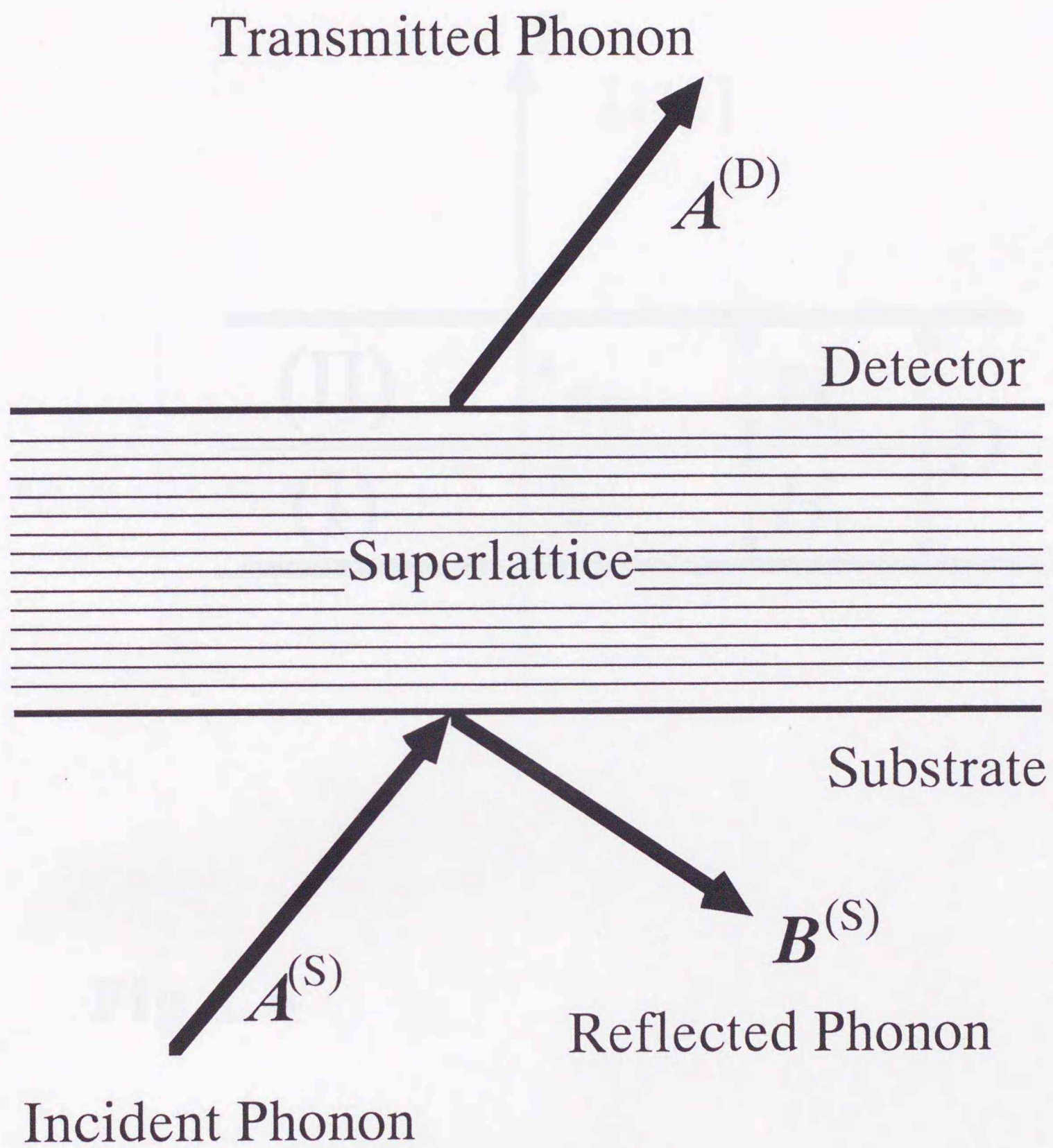
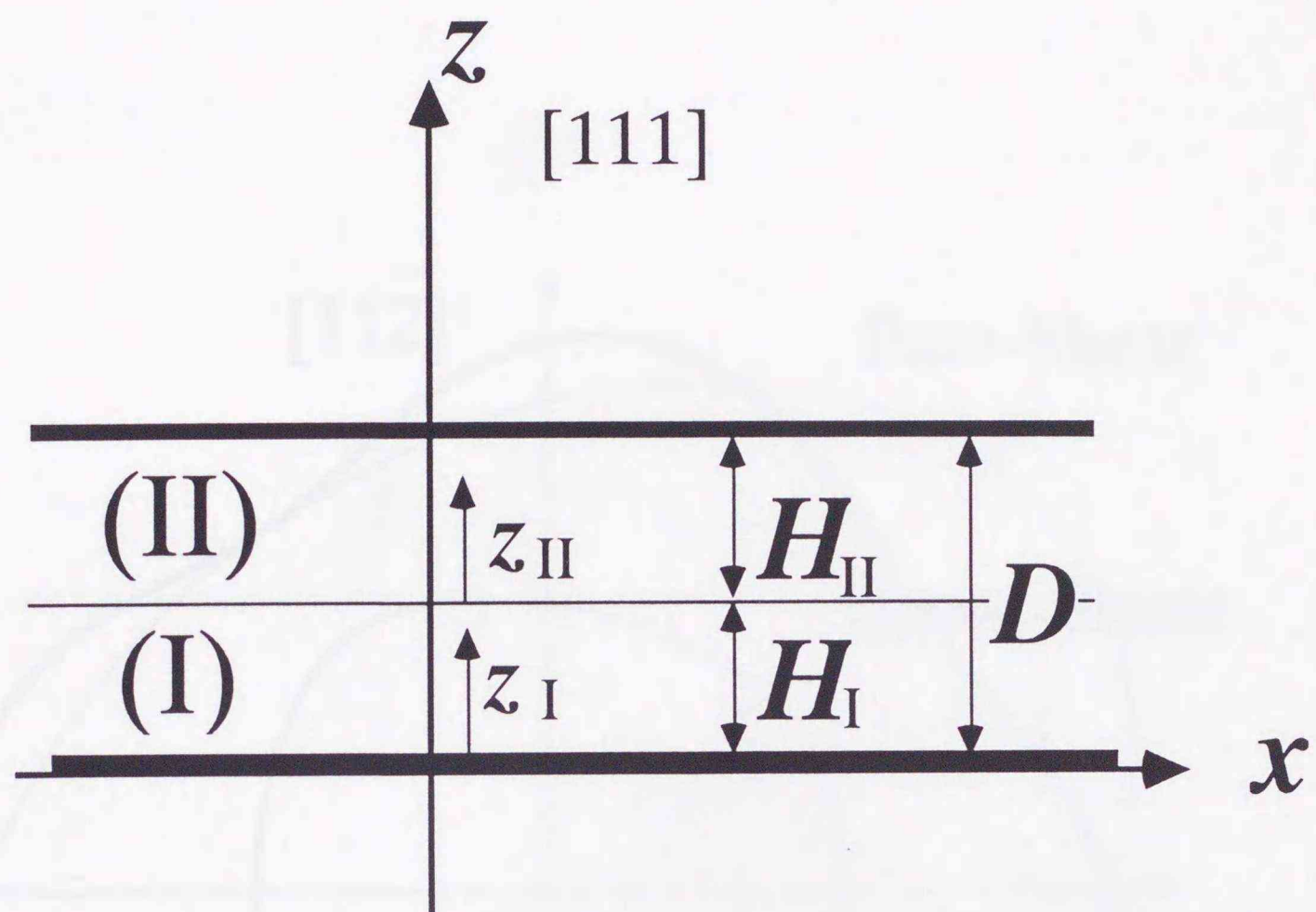


Fig.1.5





**Fig.1.6**



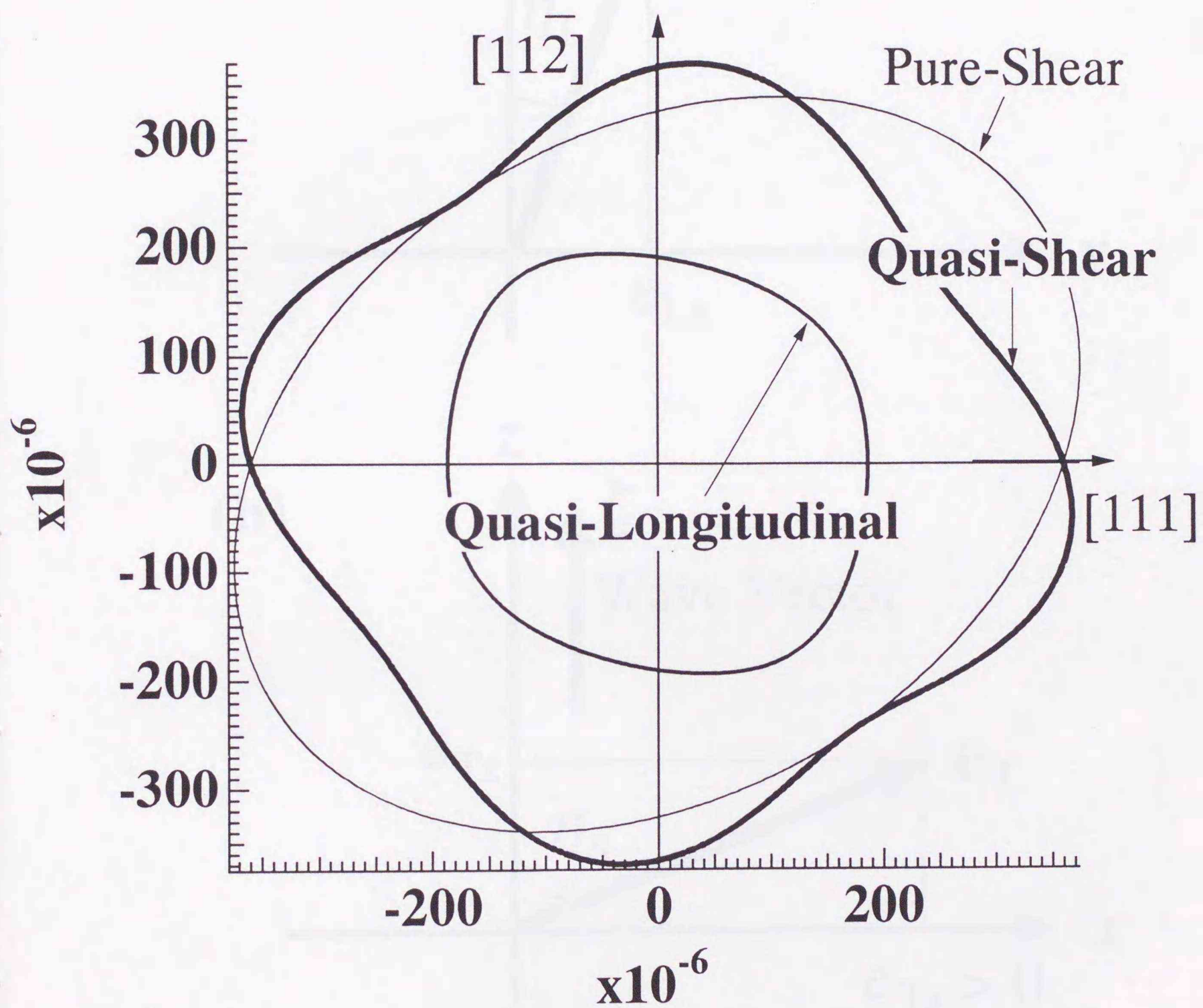
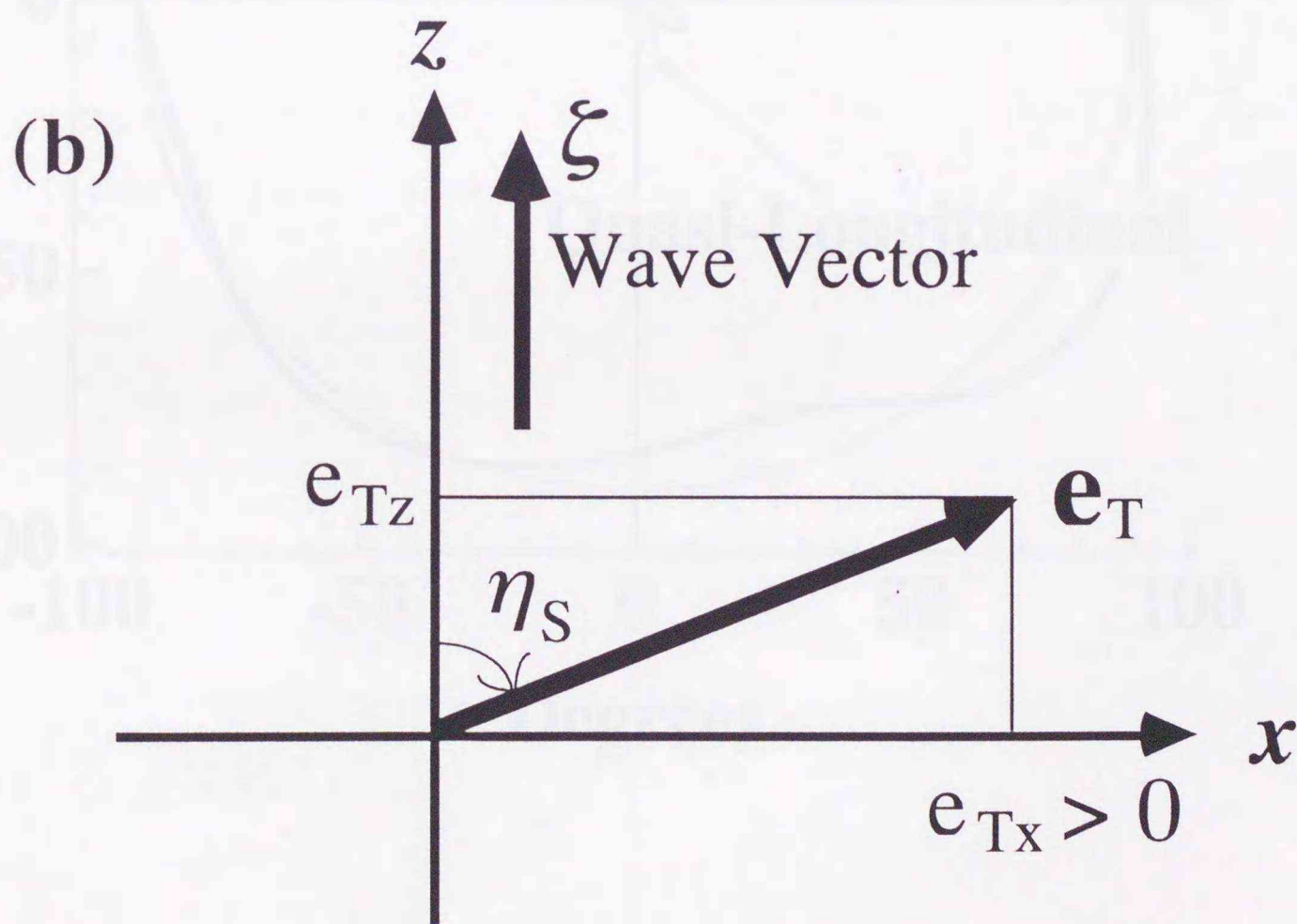
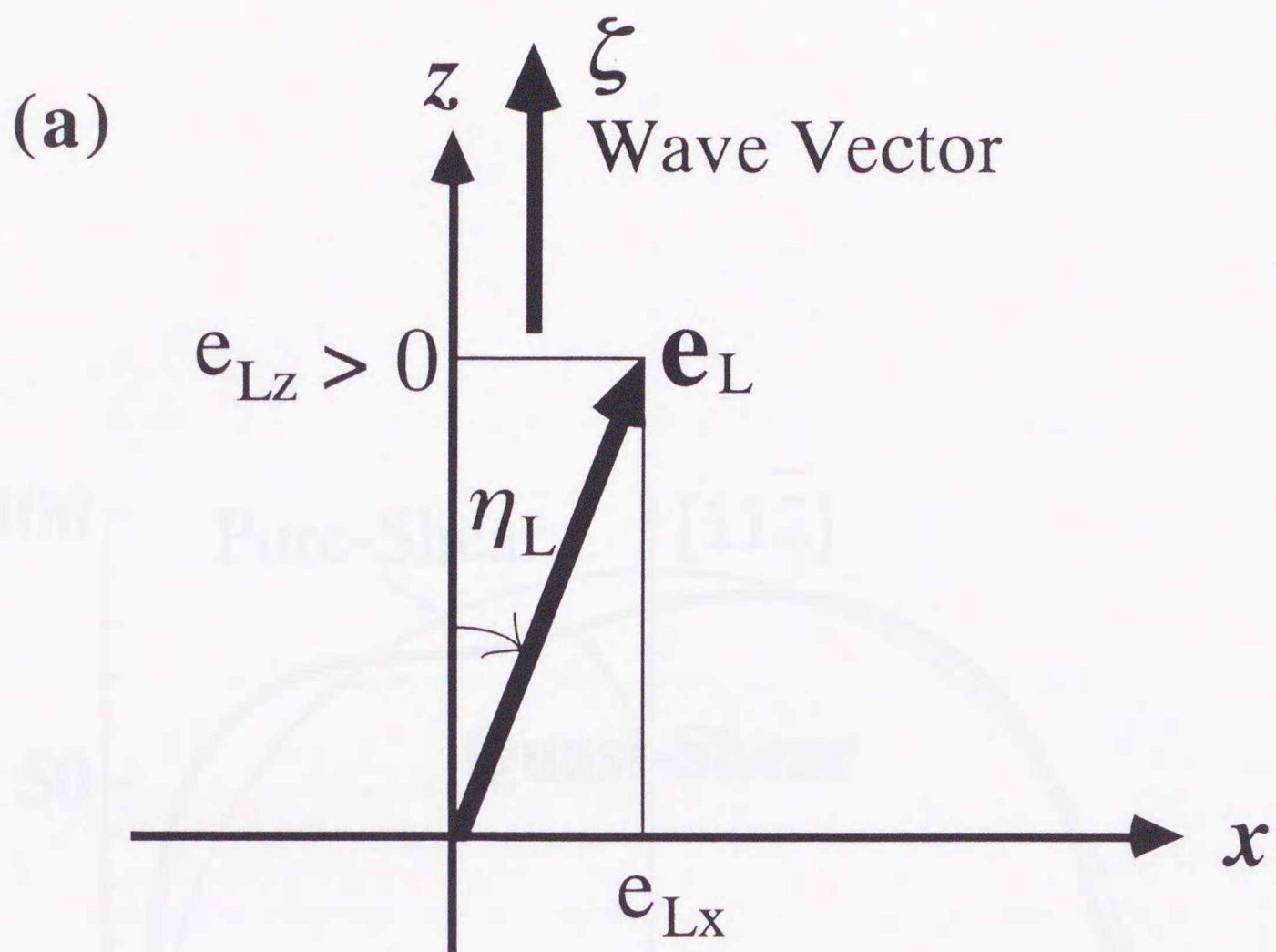


Fig.2.1





**Fig.2.2**



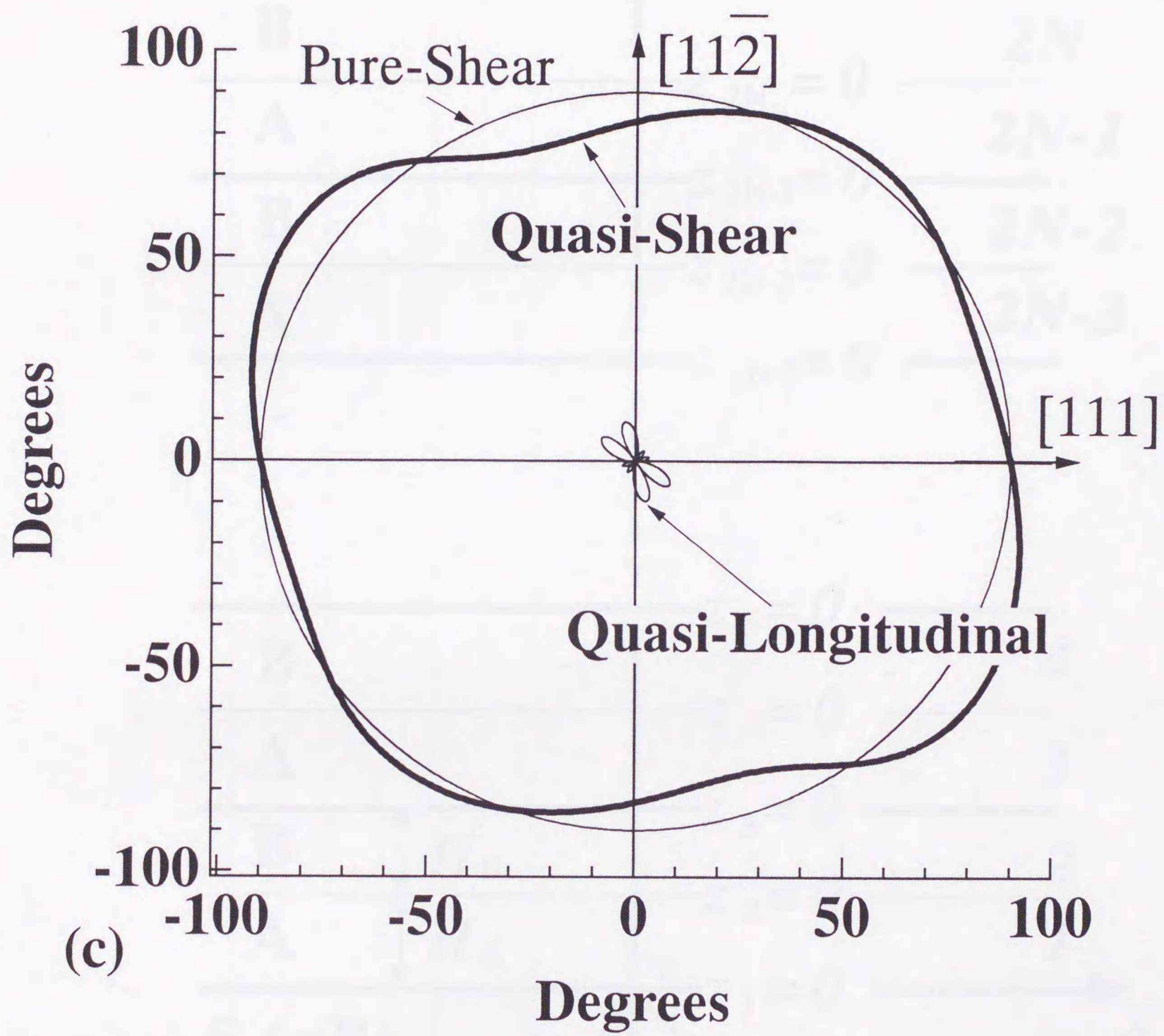


Fig.2.2



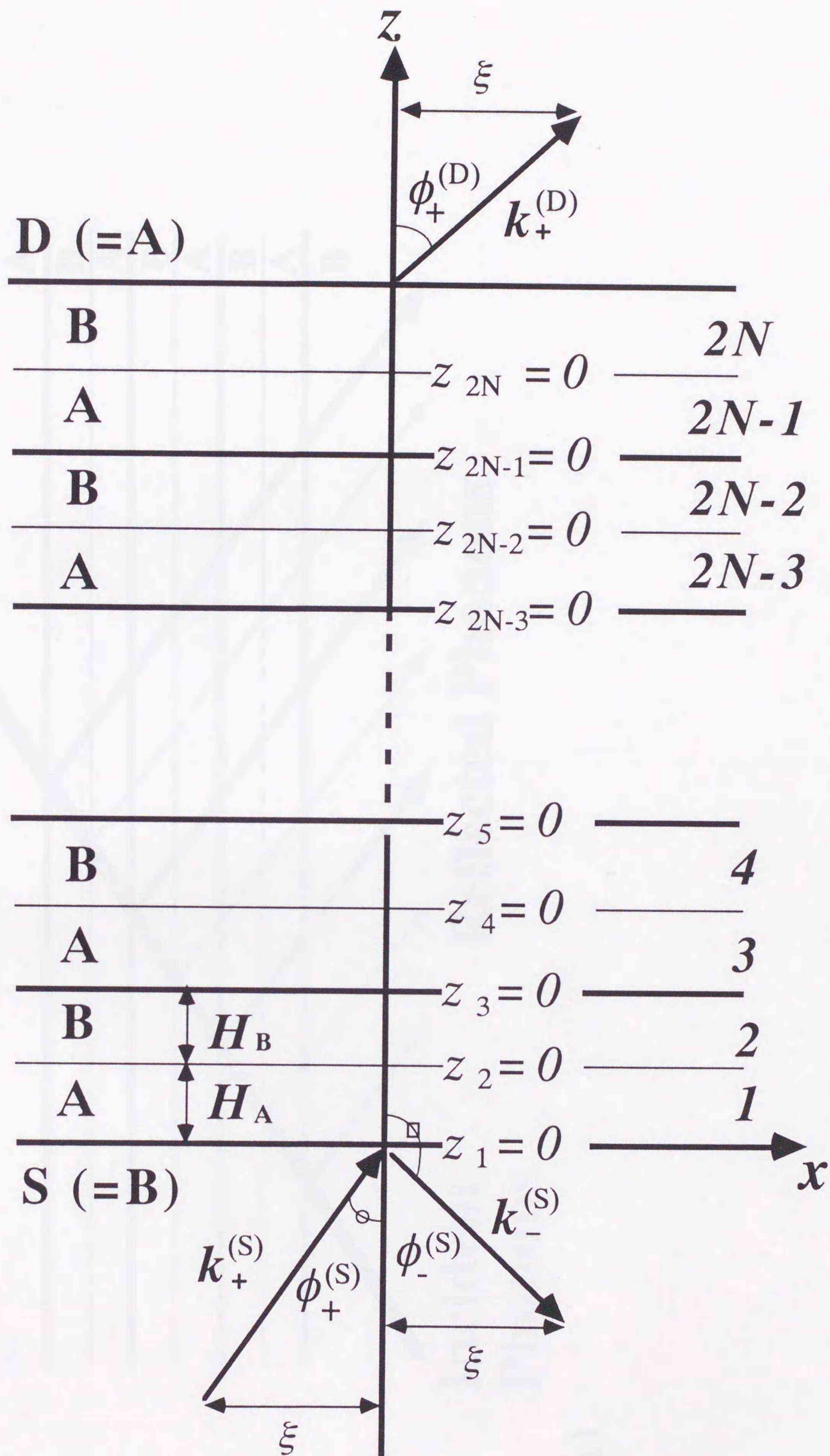
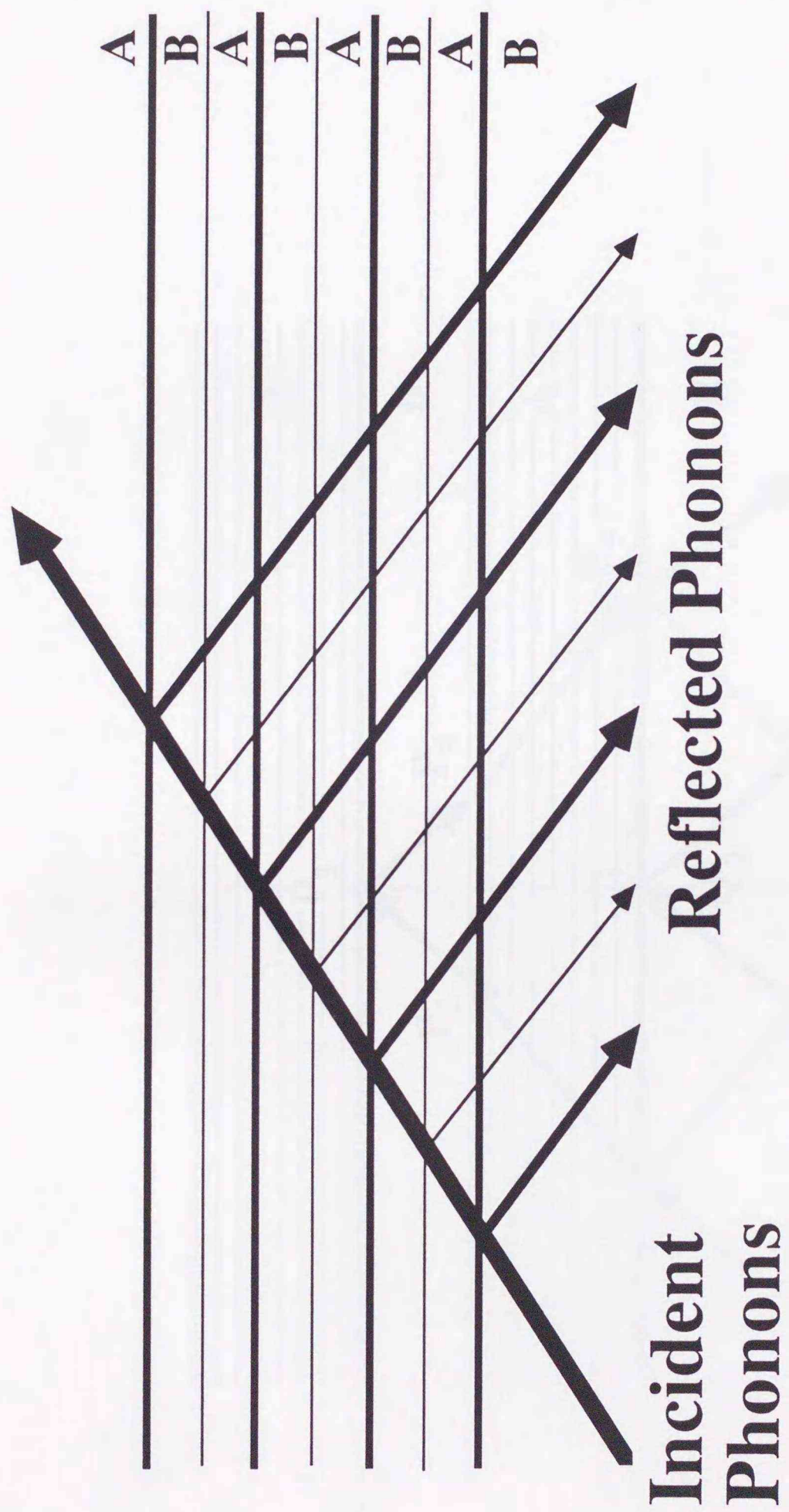


Fig.2.3





(a)

Fig. 2.4



**Fig. 2.4**



Transmitted Phonons

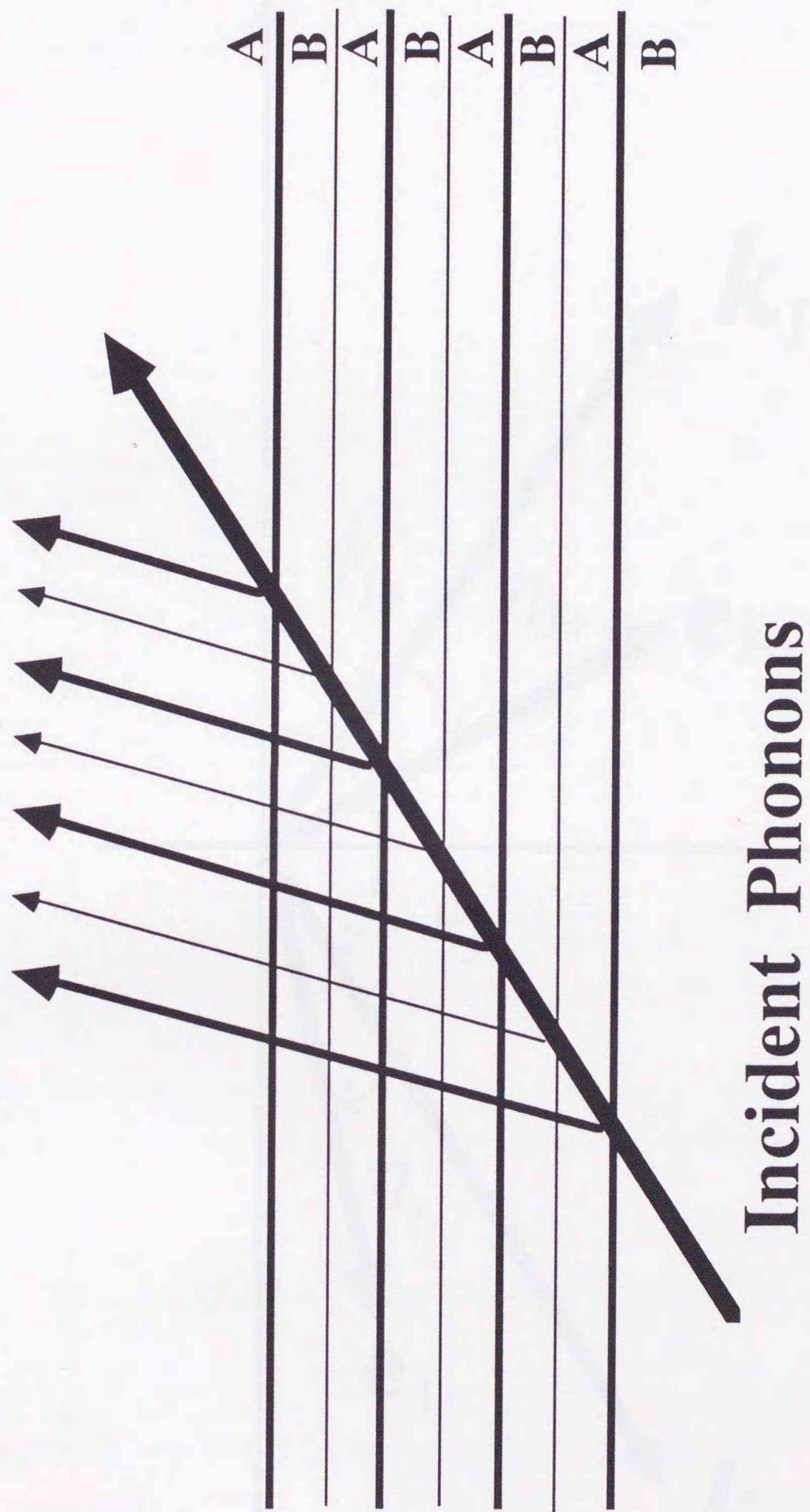


Fig.2.5



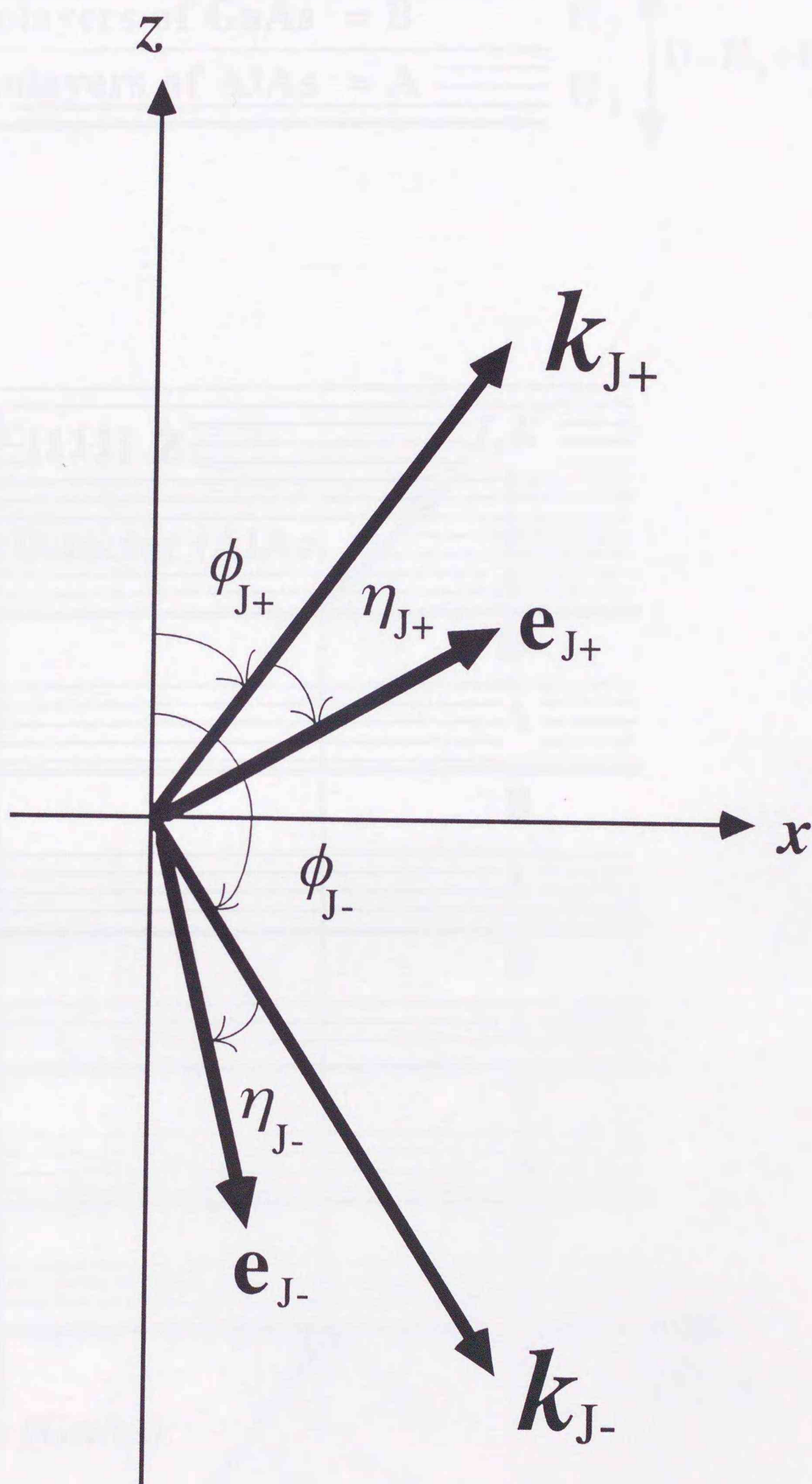


Fig.2.6



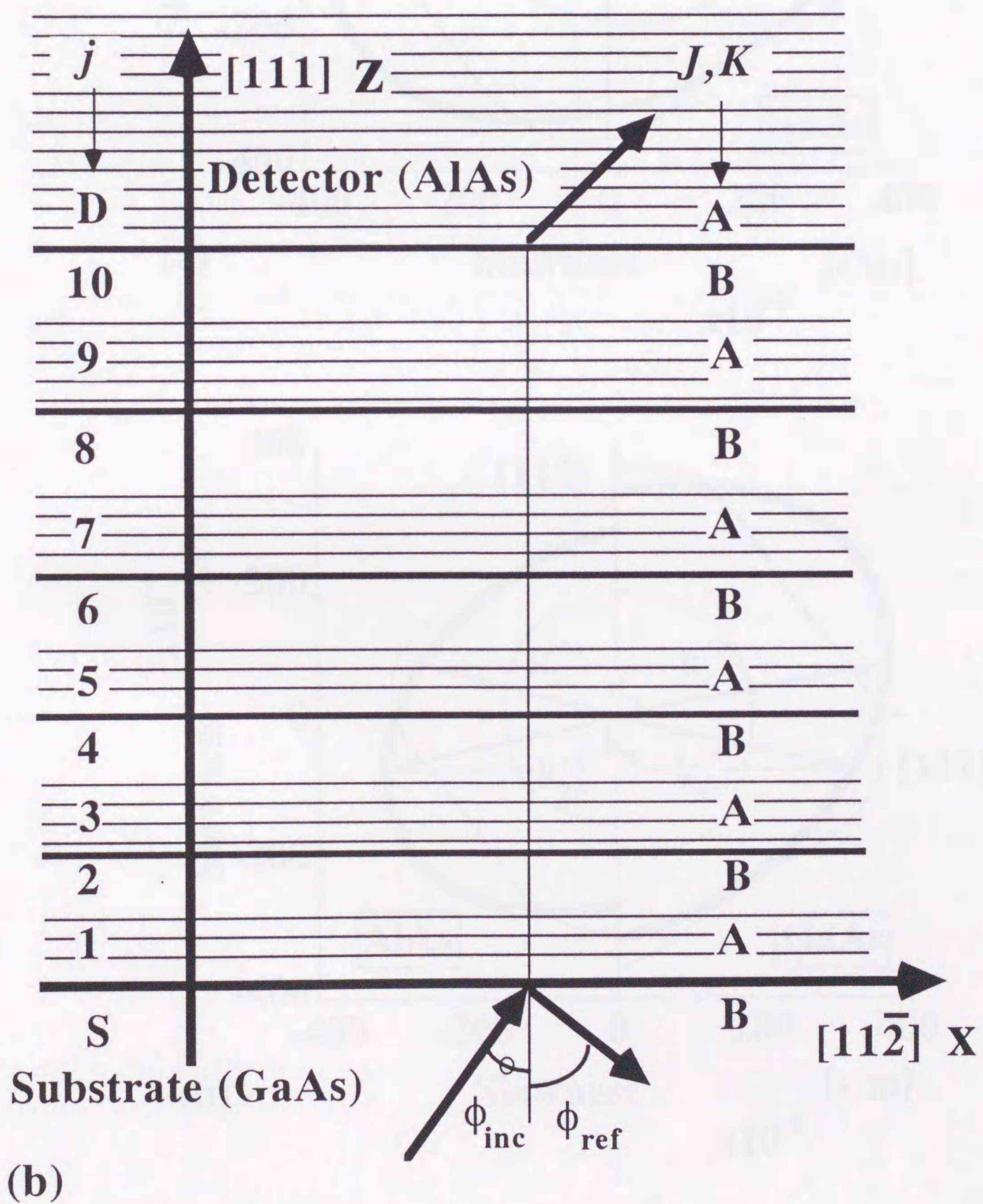
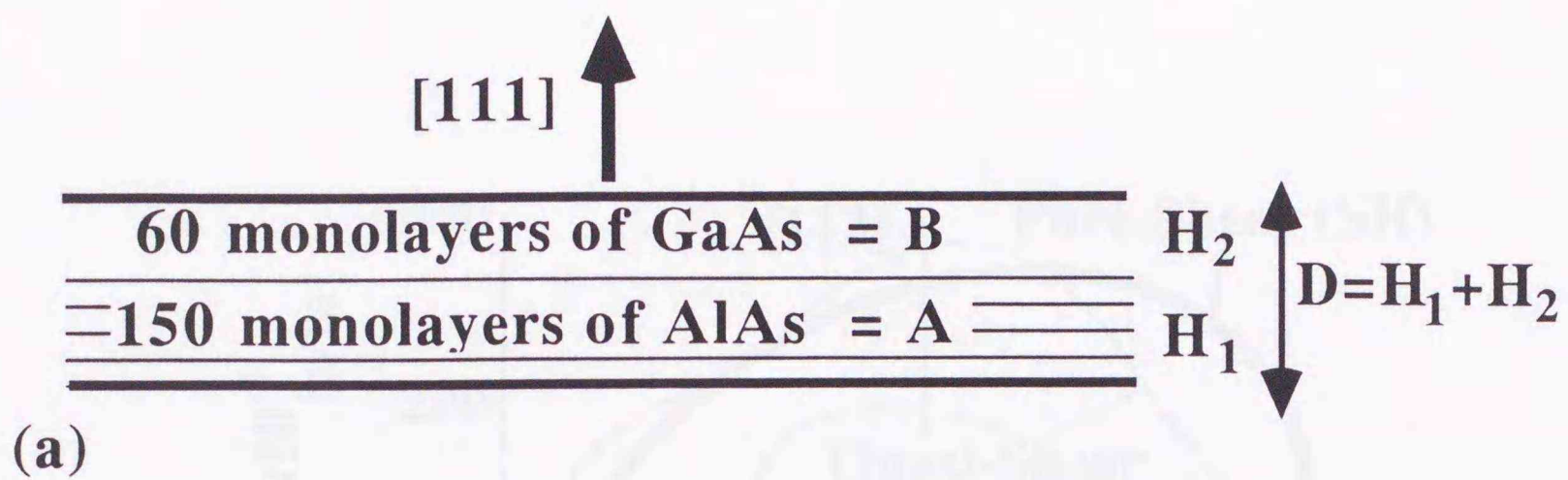


Fig. 3.1



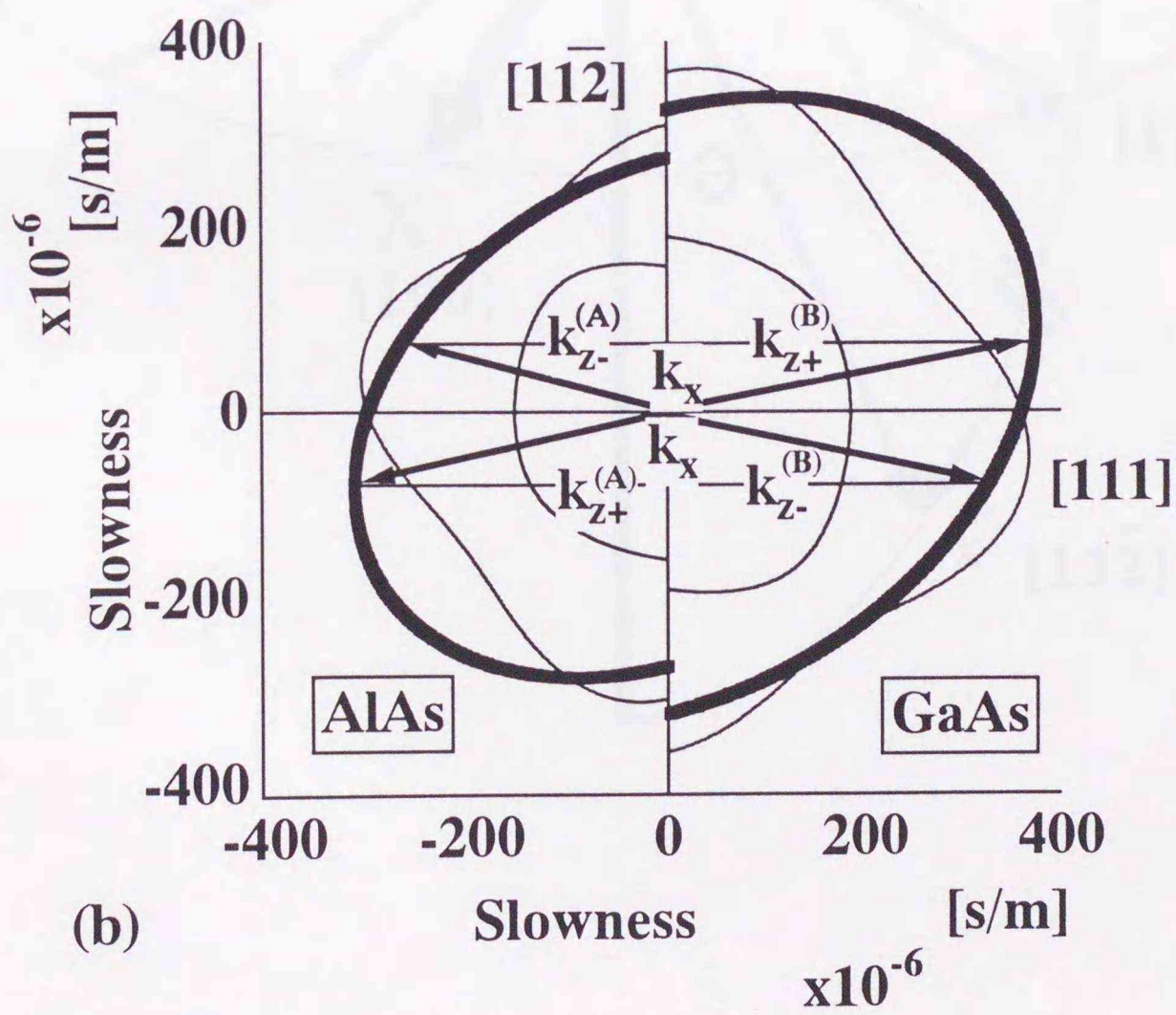
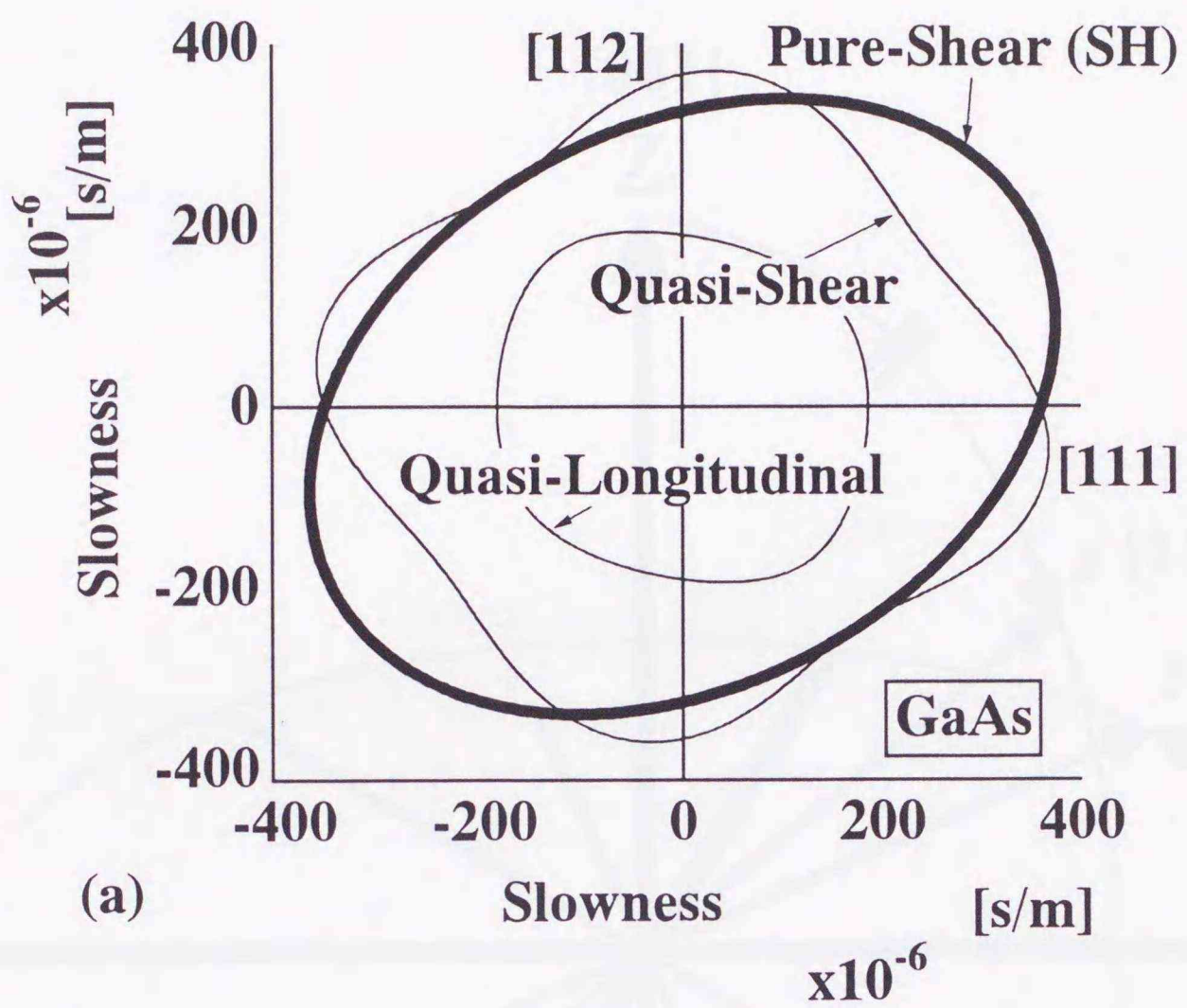


Fig.3.2



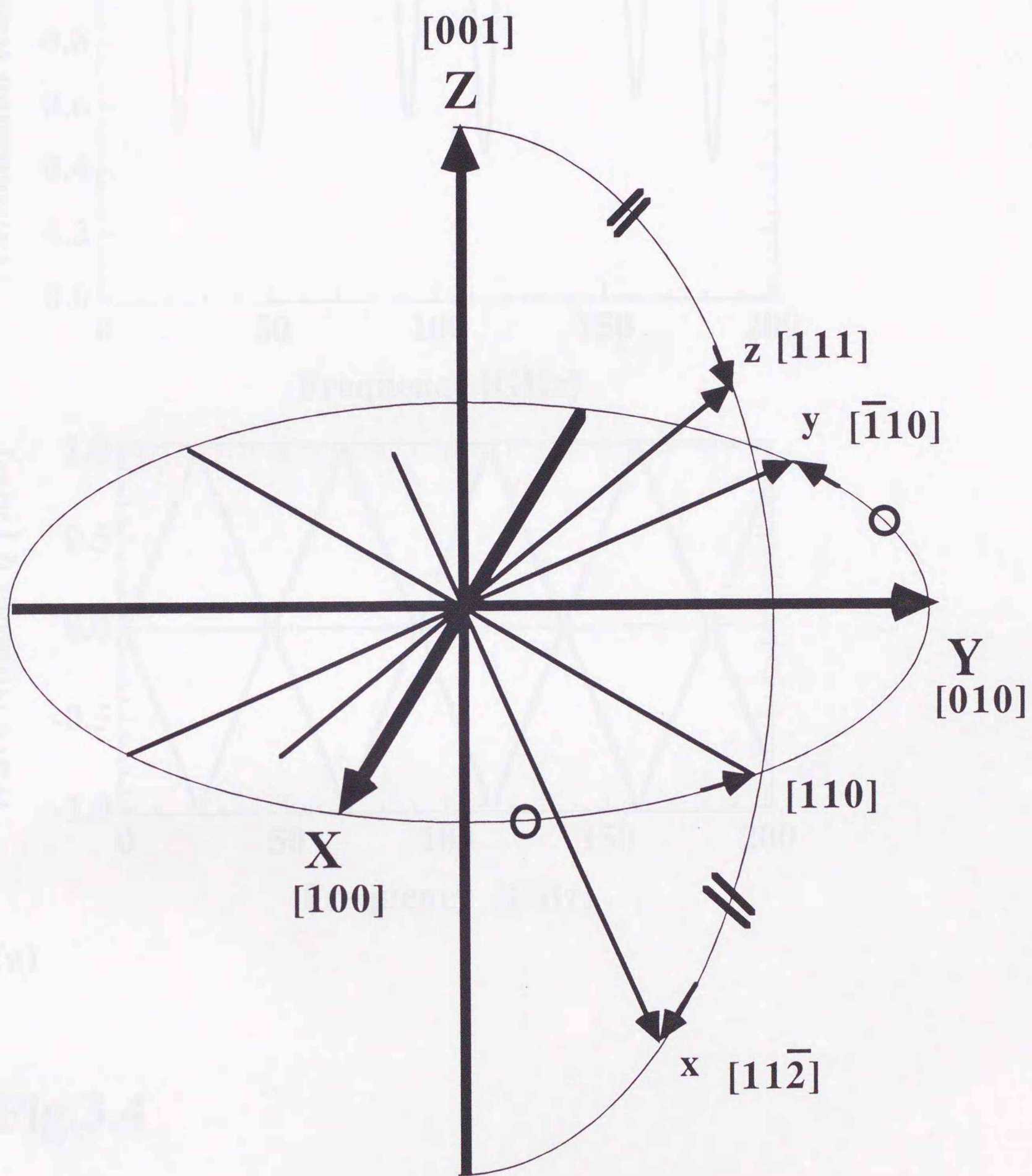
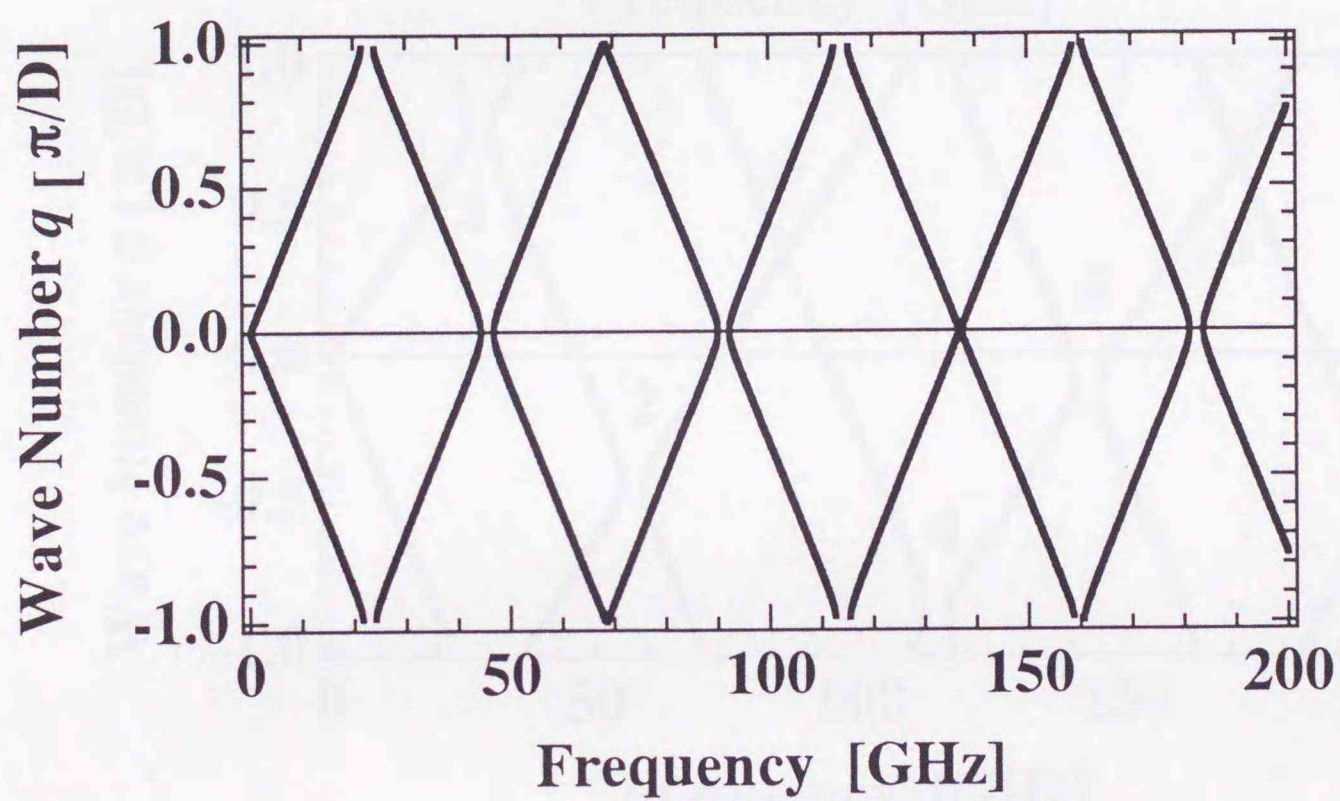
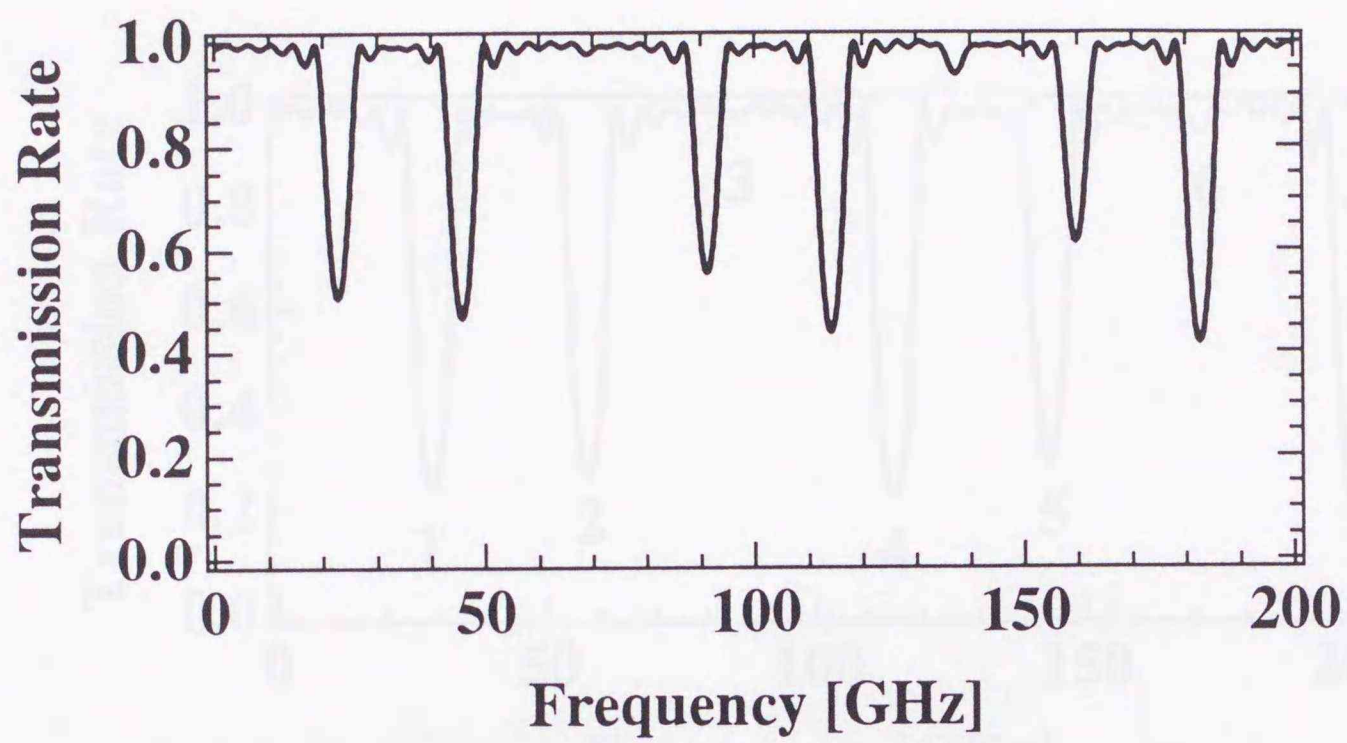


Fig.3.3

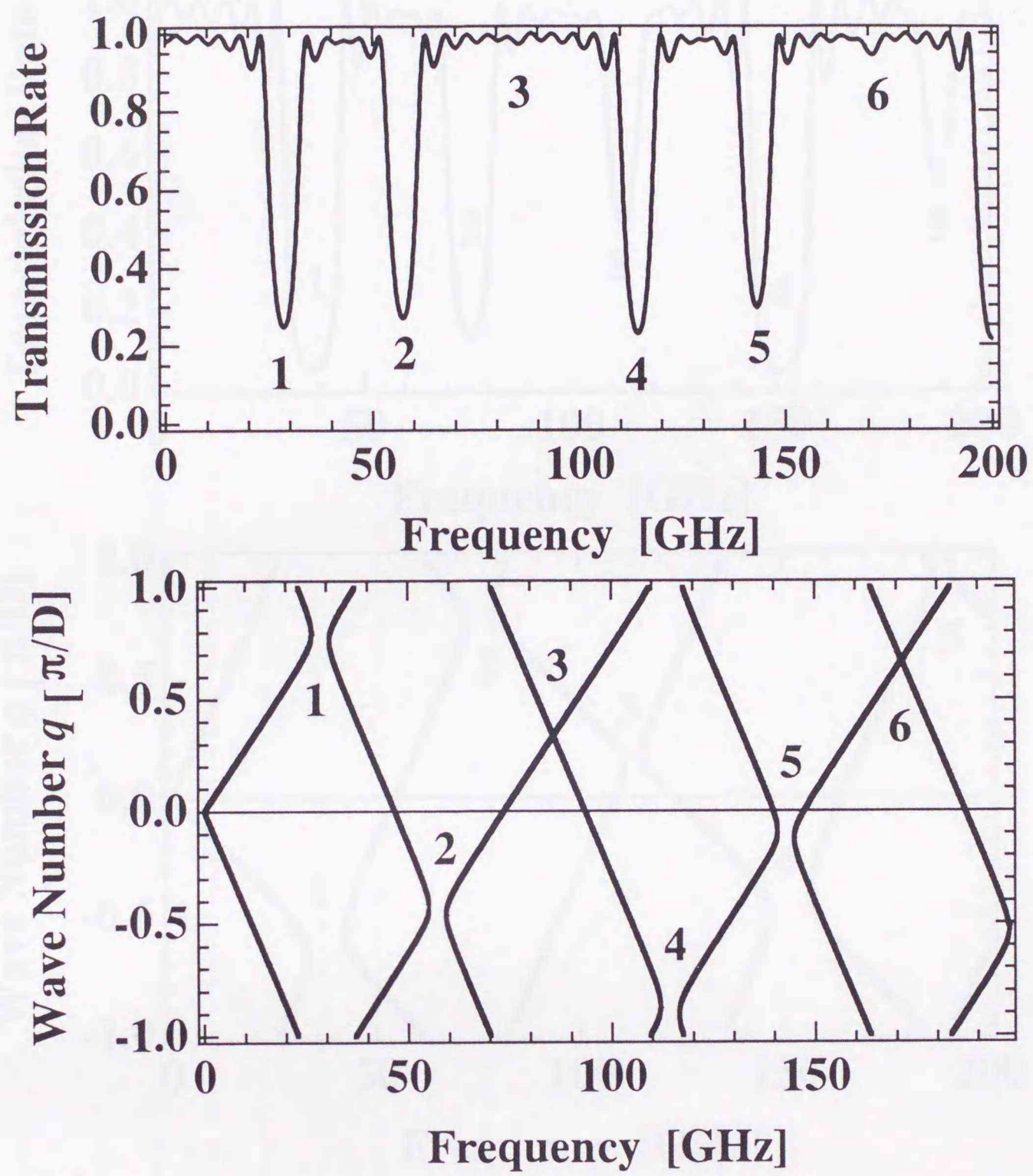




(a)

Fig.3.4

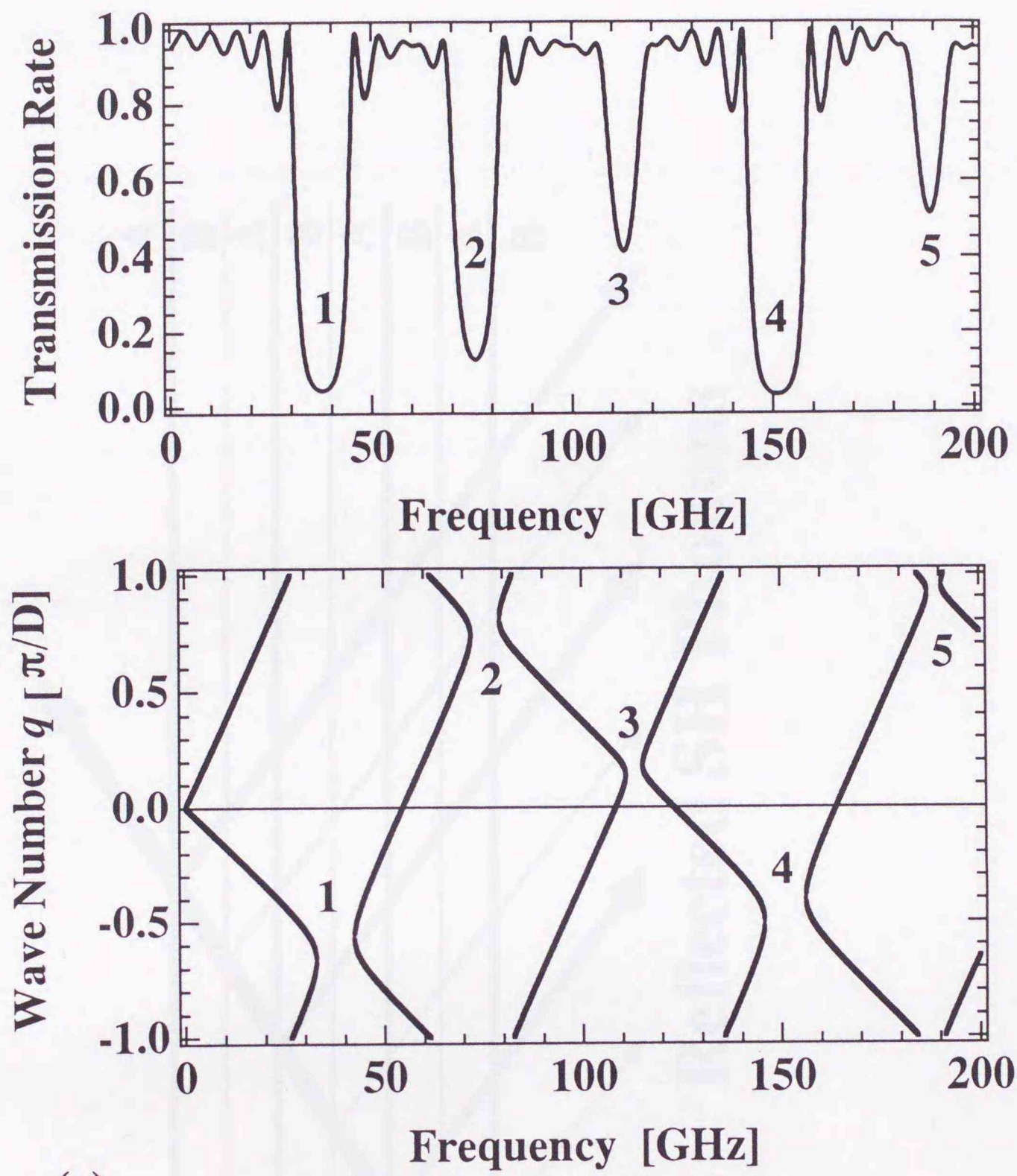




(b)

**Fig.3.4**





(c)

Fig.3.4



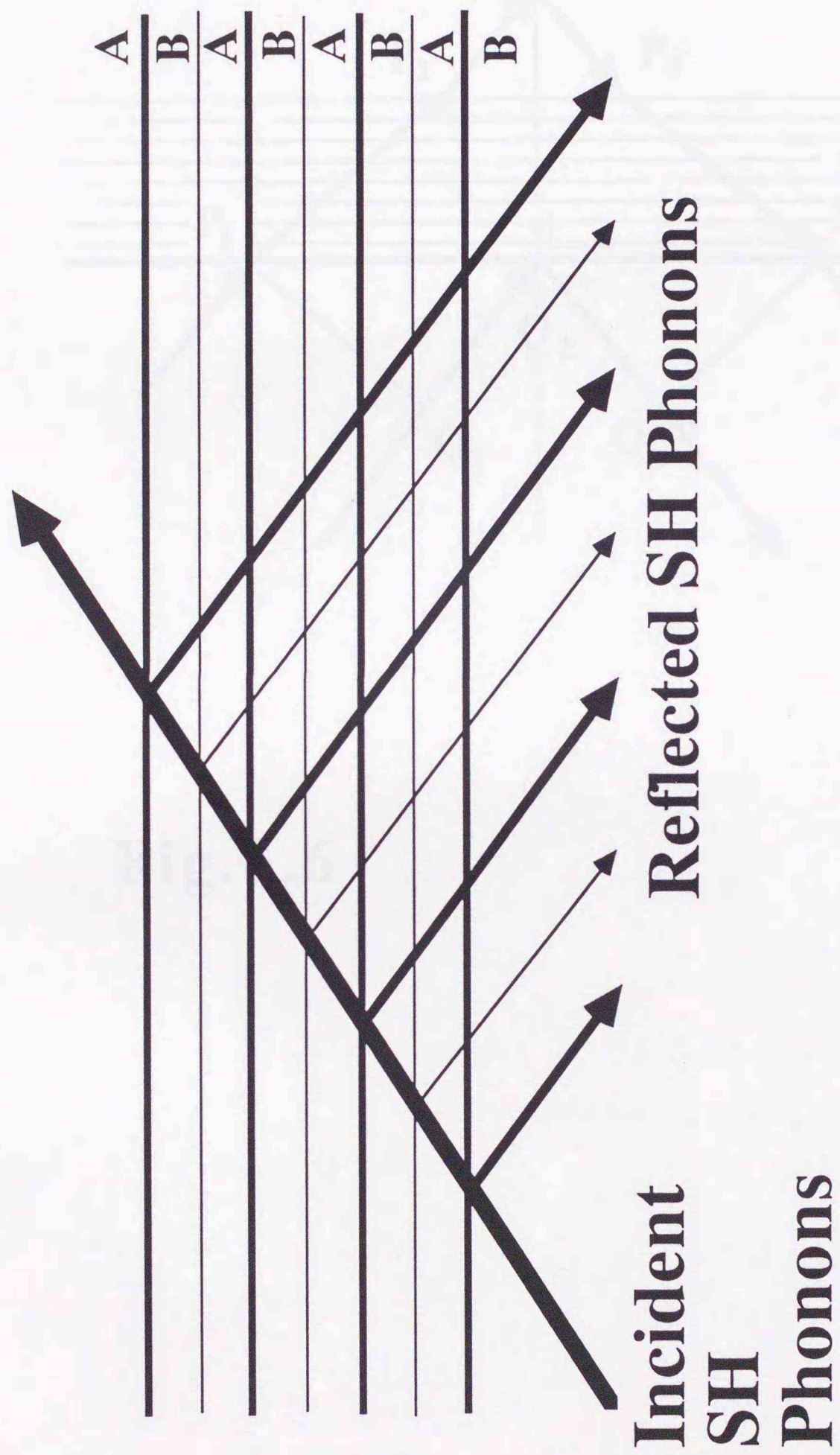
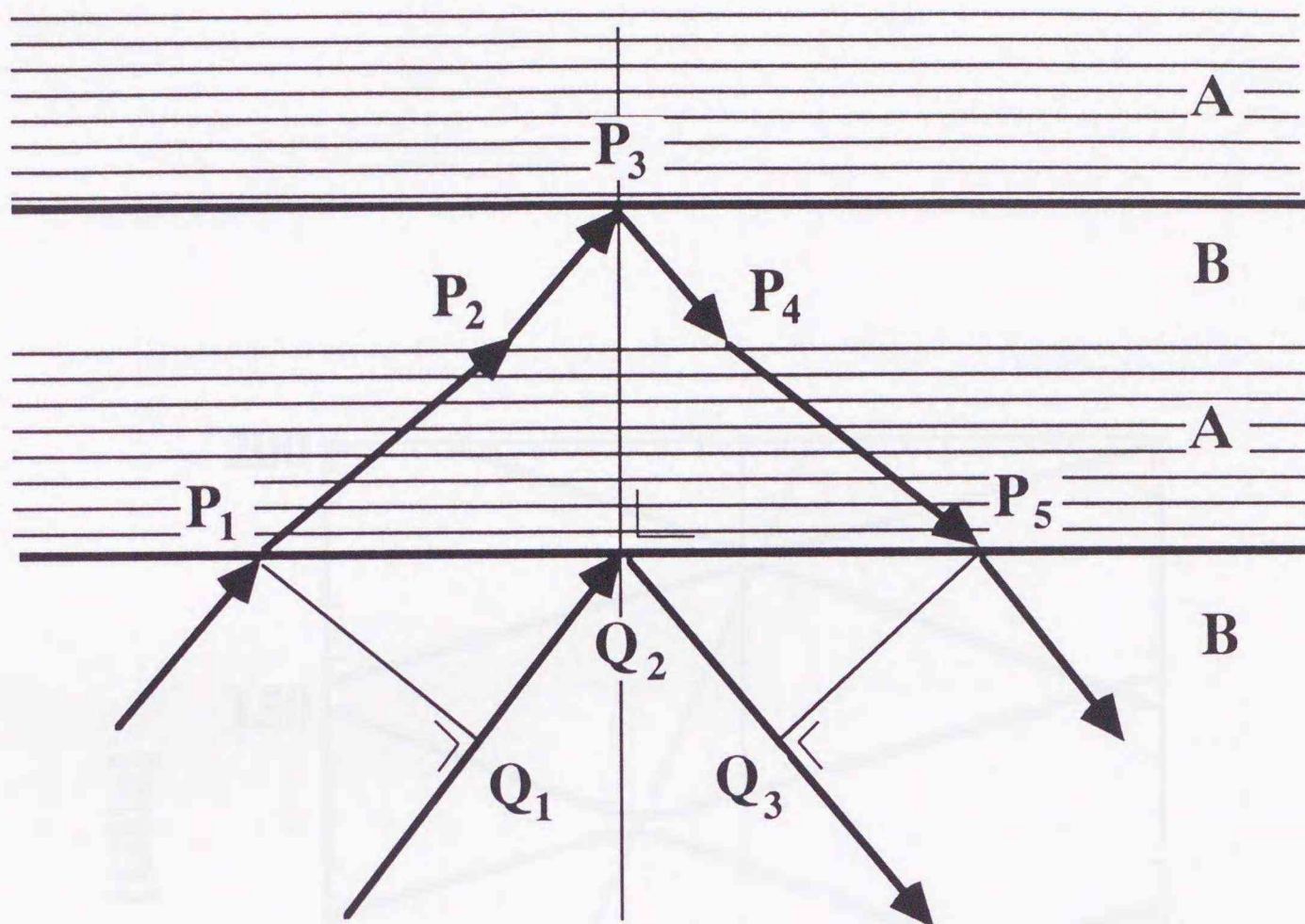


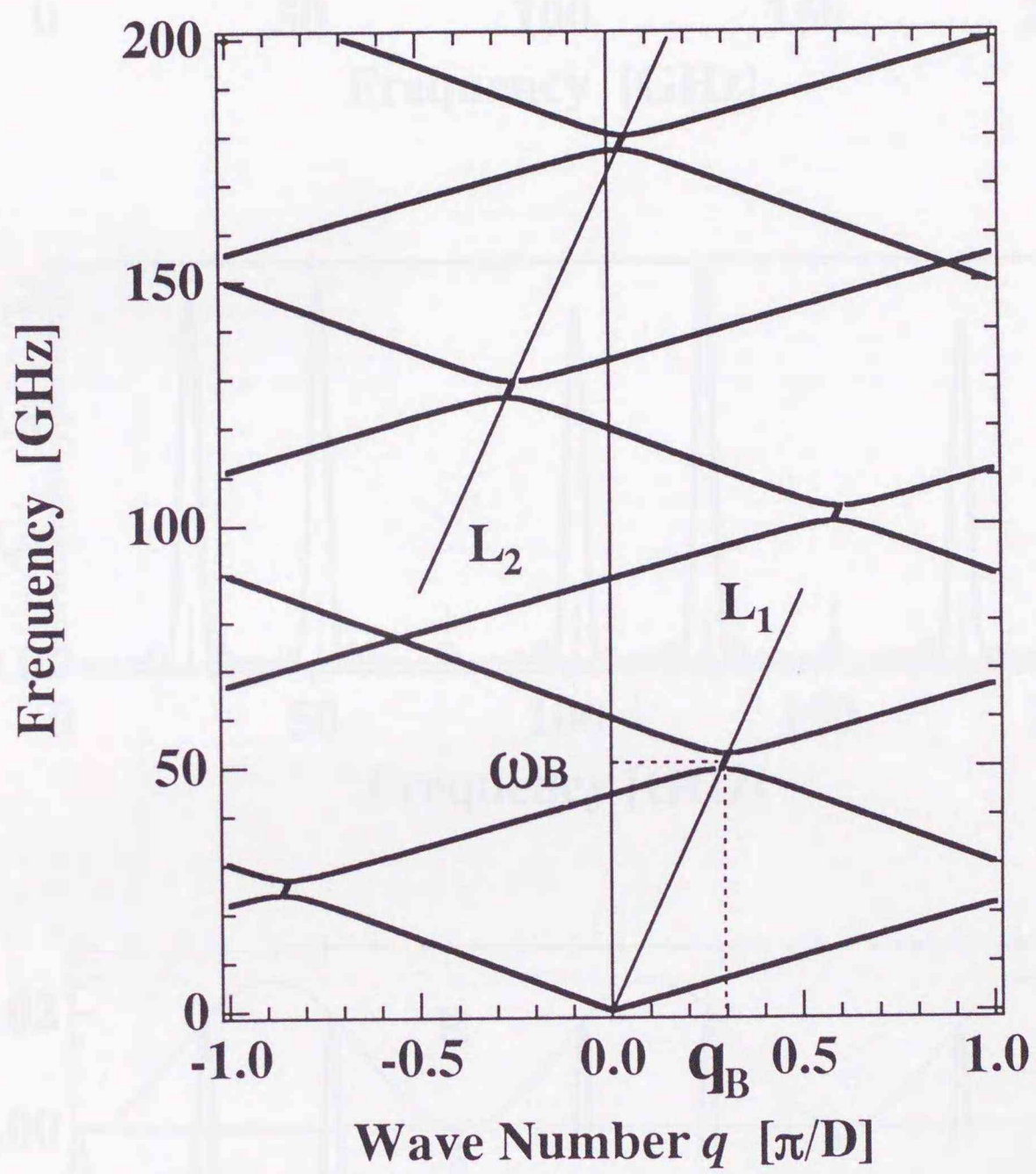
Fig.3.5





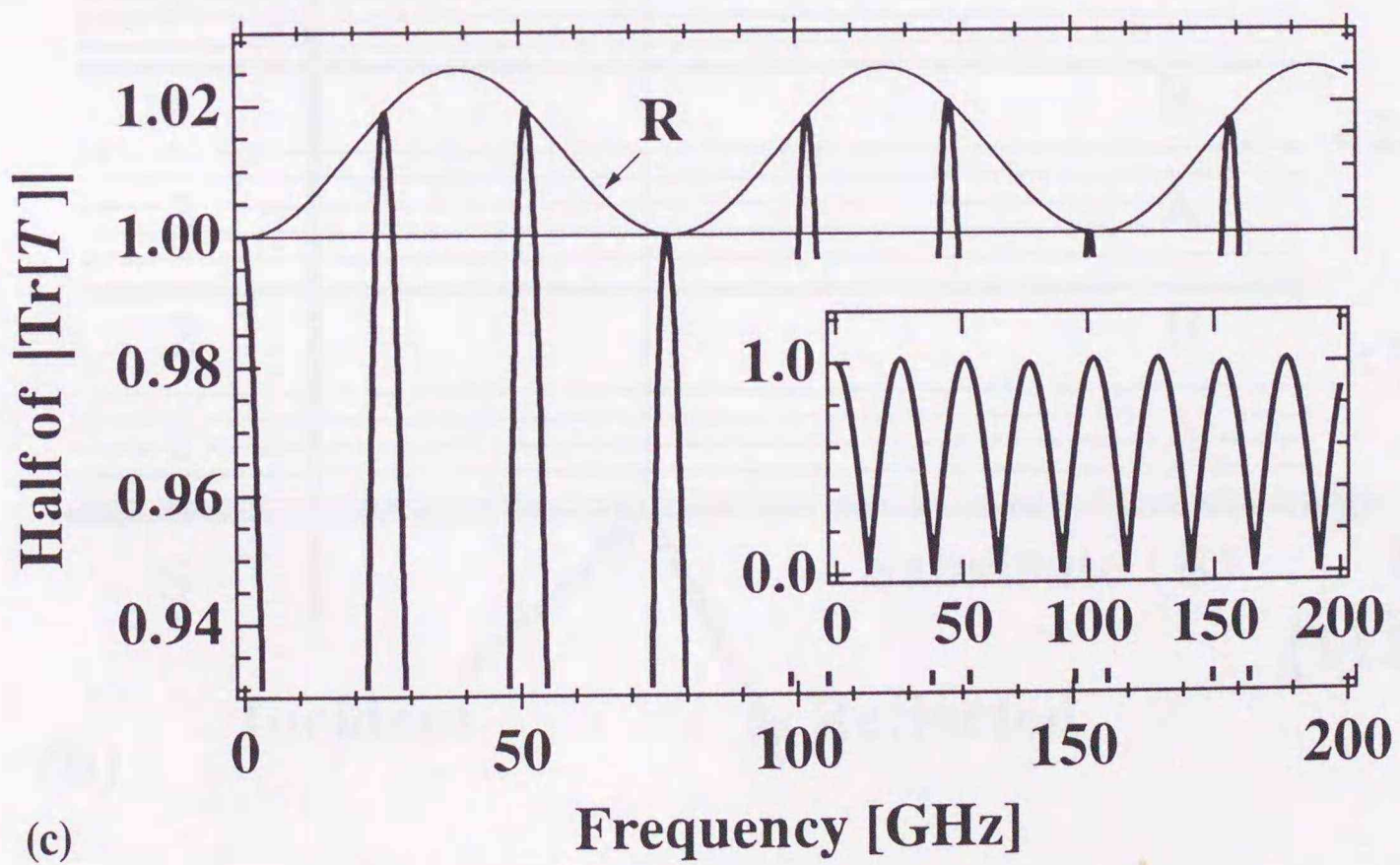
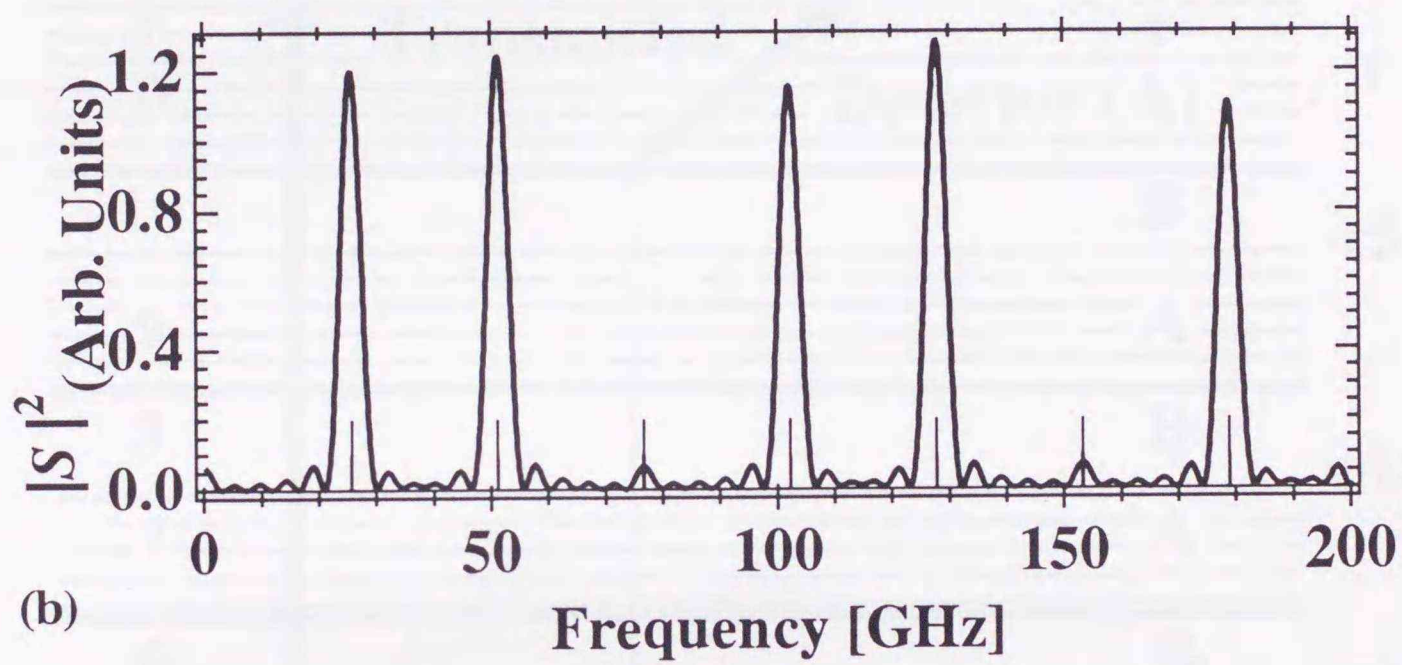
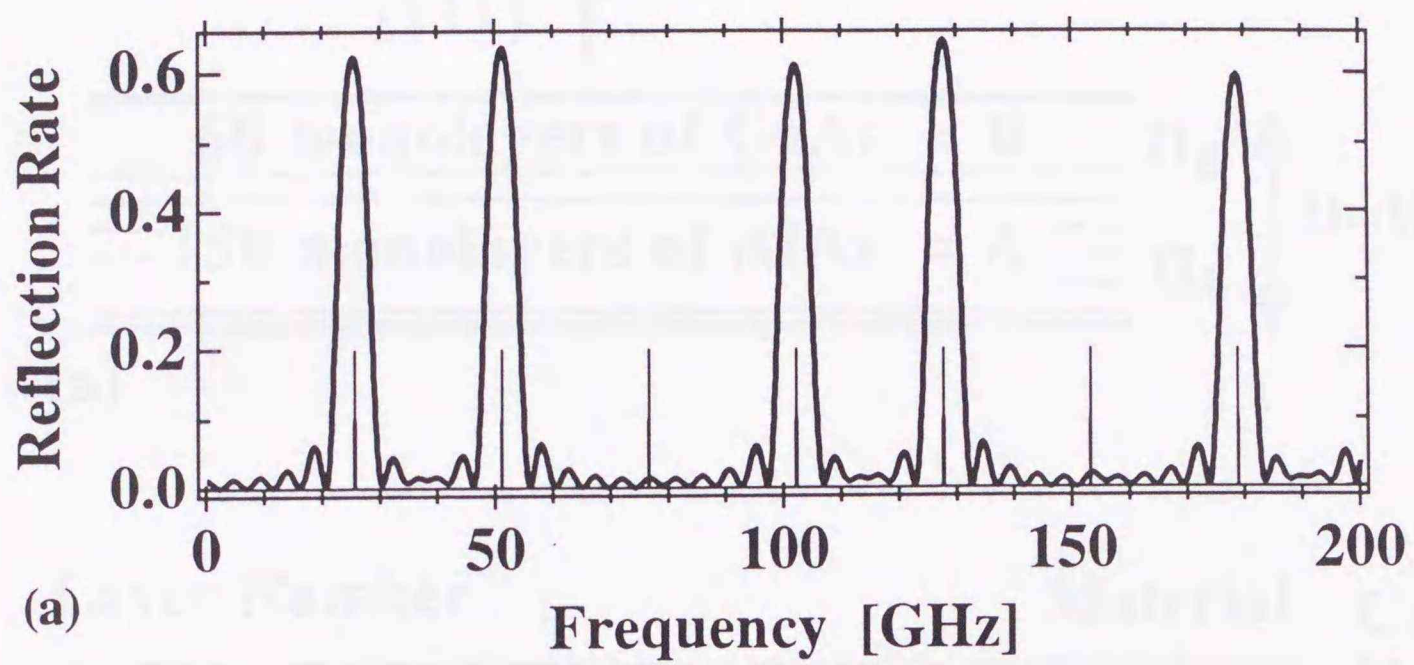
**Fig.3.6**





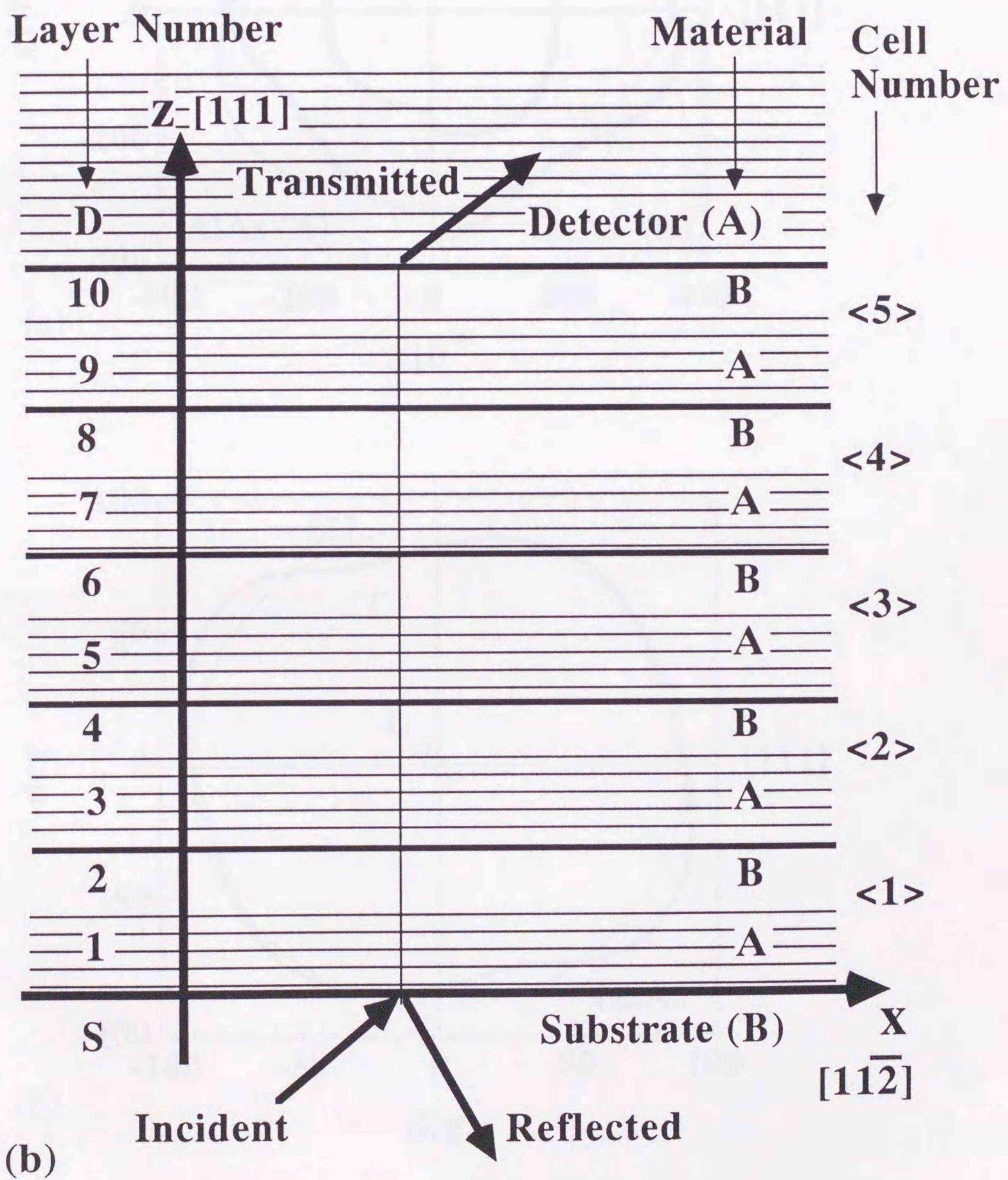
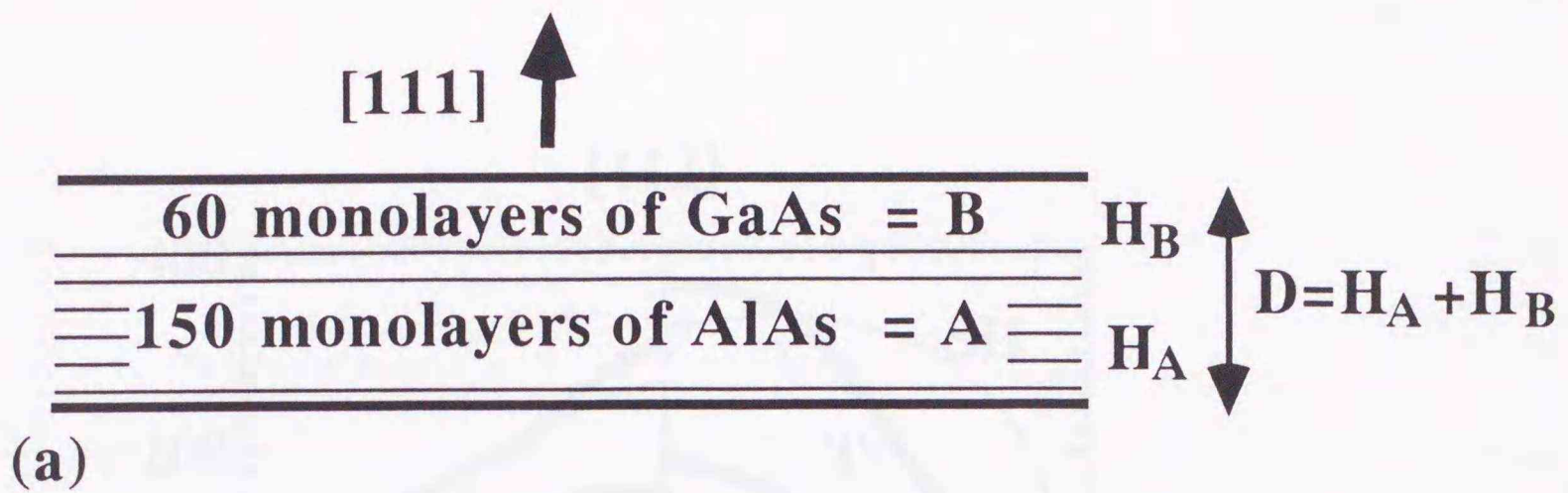
**Fig.3.7**





**Fig.3.8**





**Fig. 4.1**



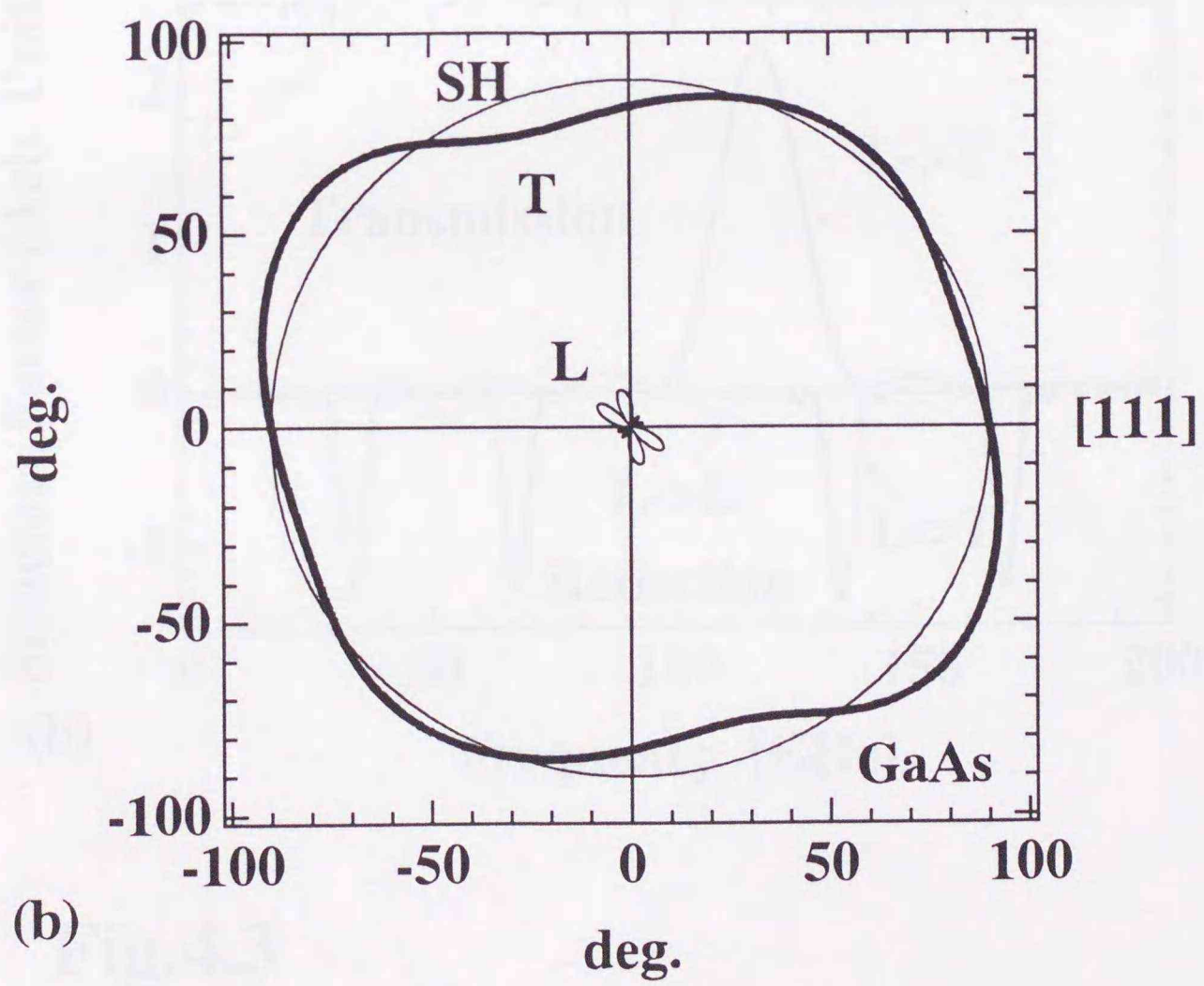
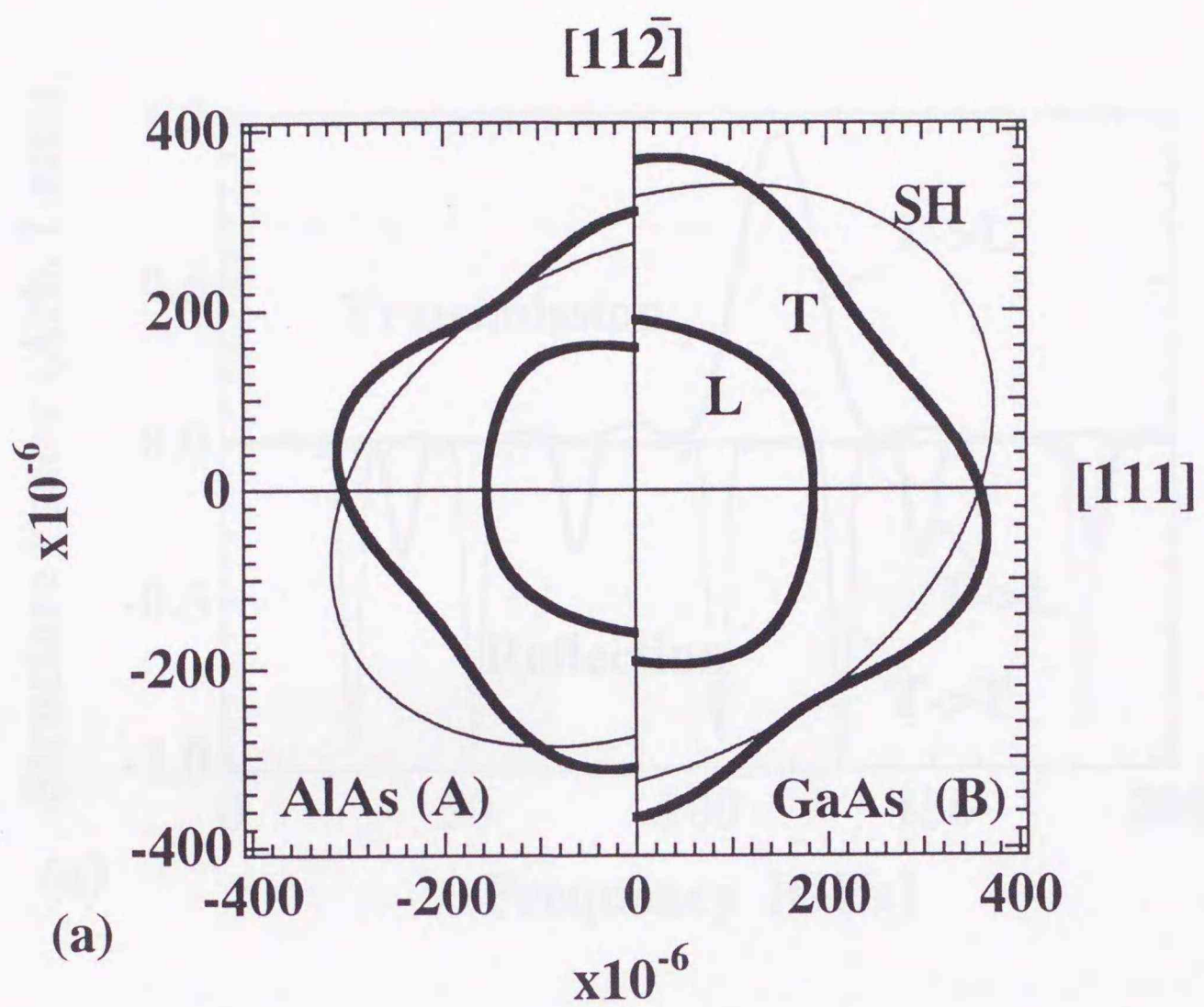


Fig.4.2



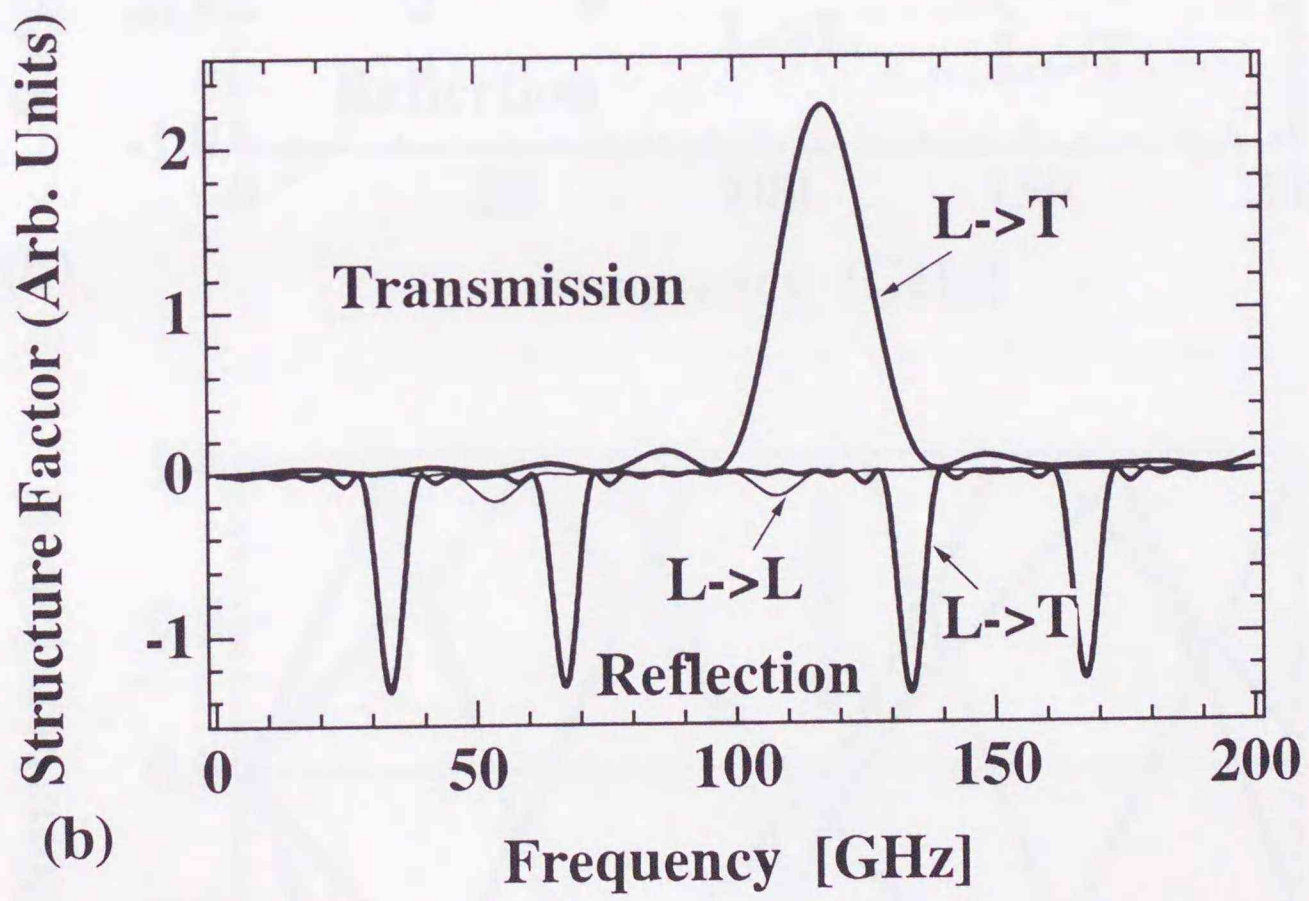
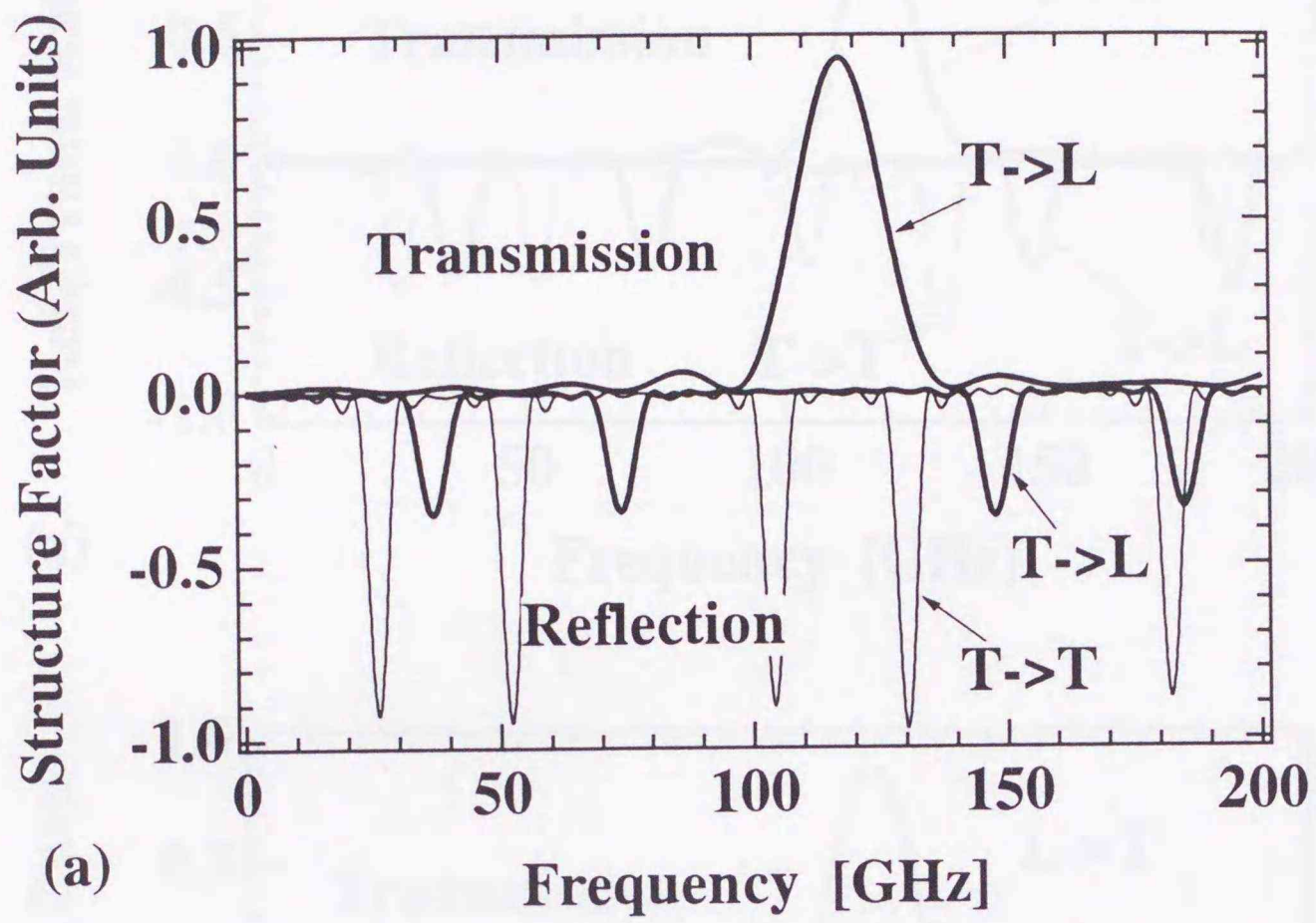
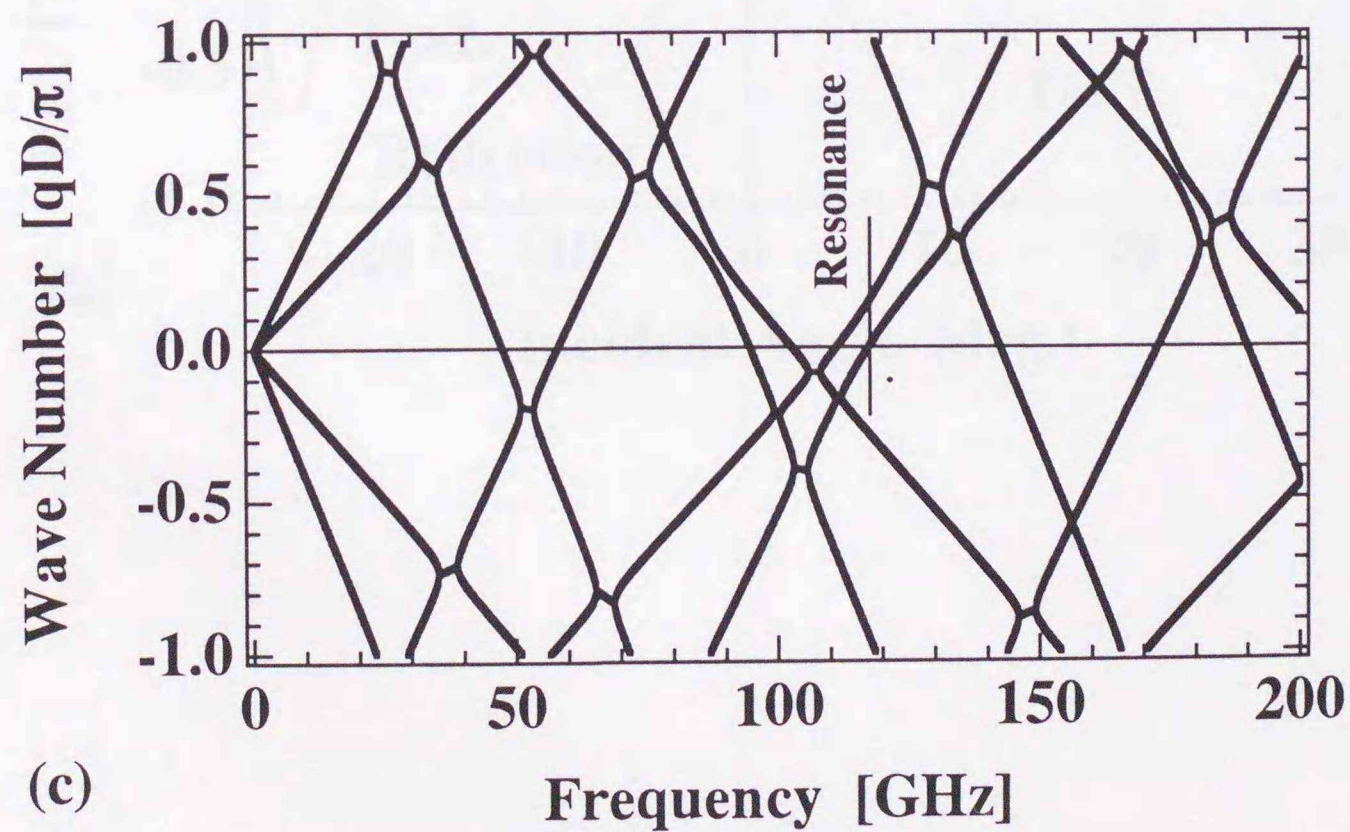
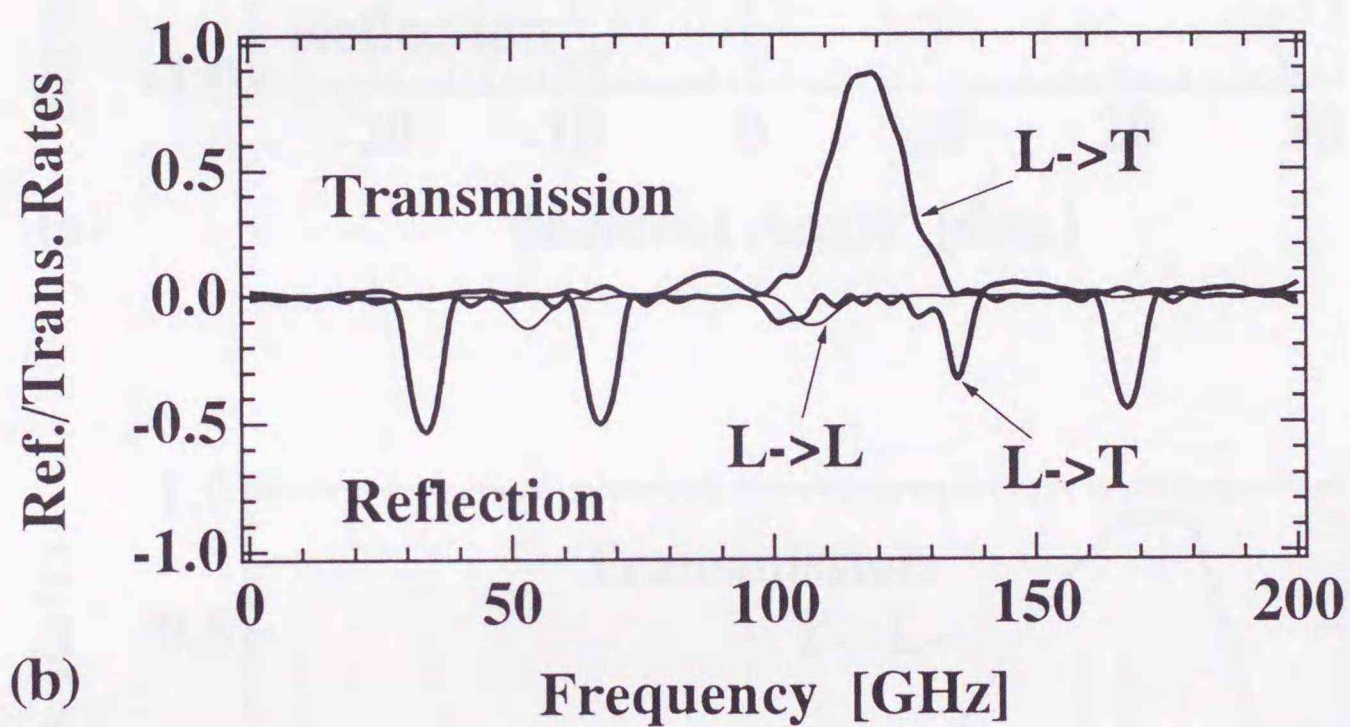
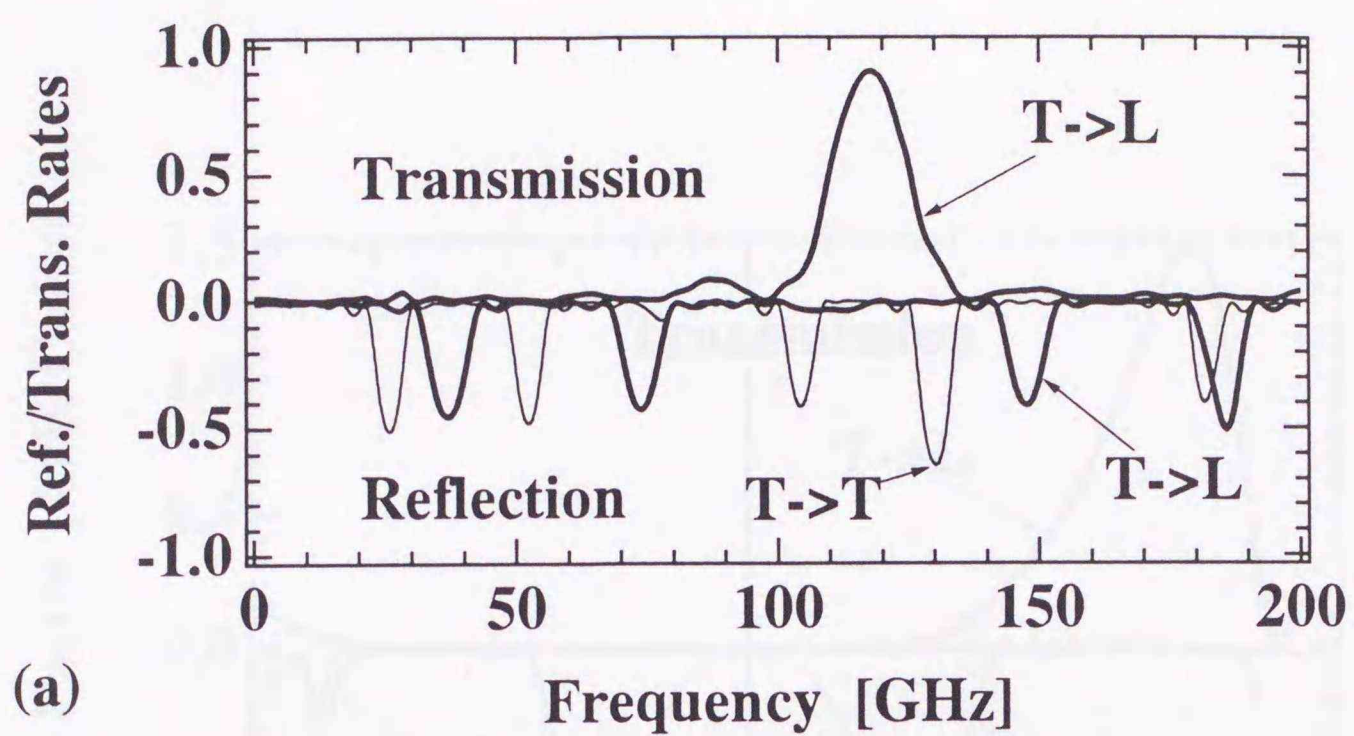


Fig.4.3





**Fig.4.4**



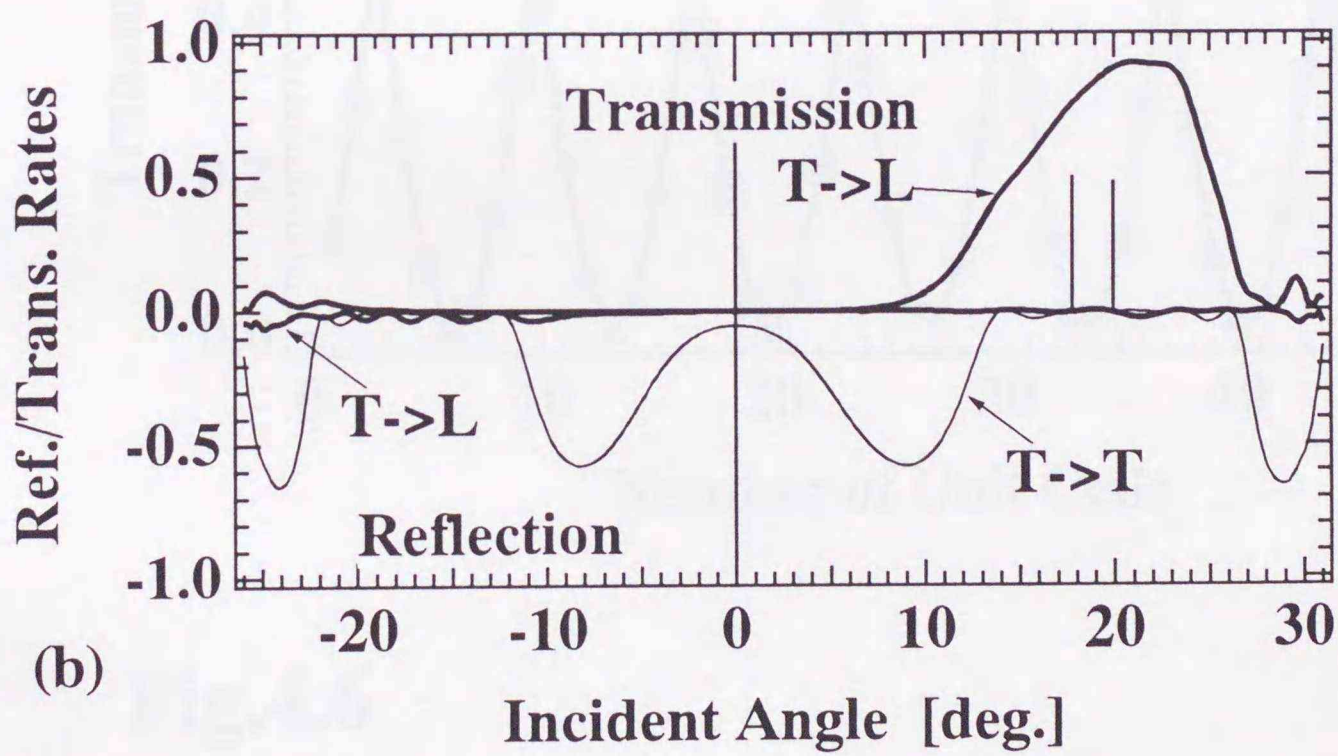
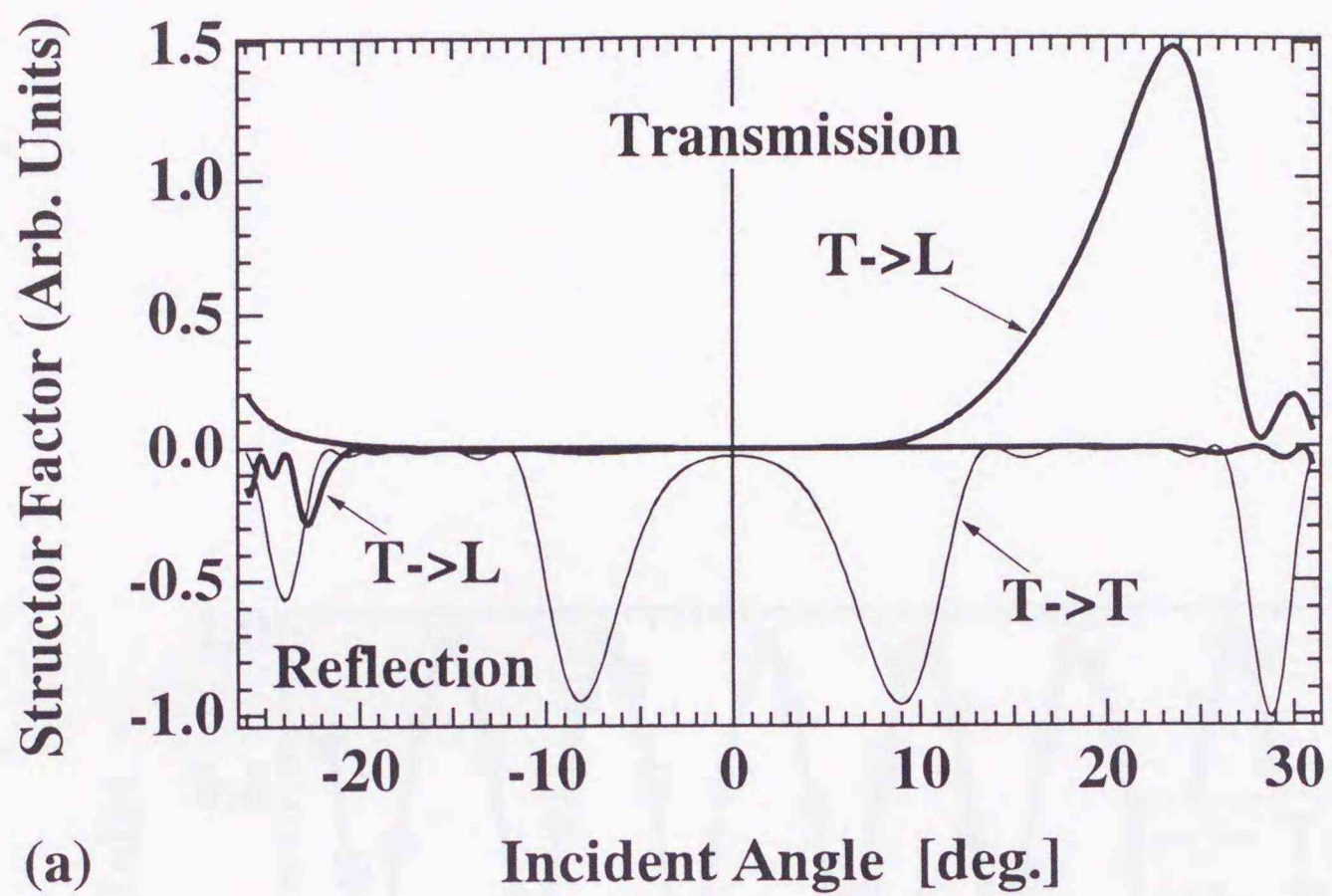


Fig.4.5



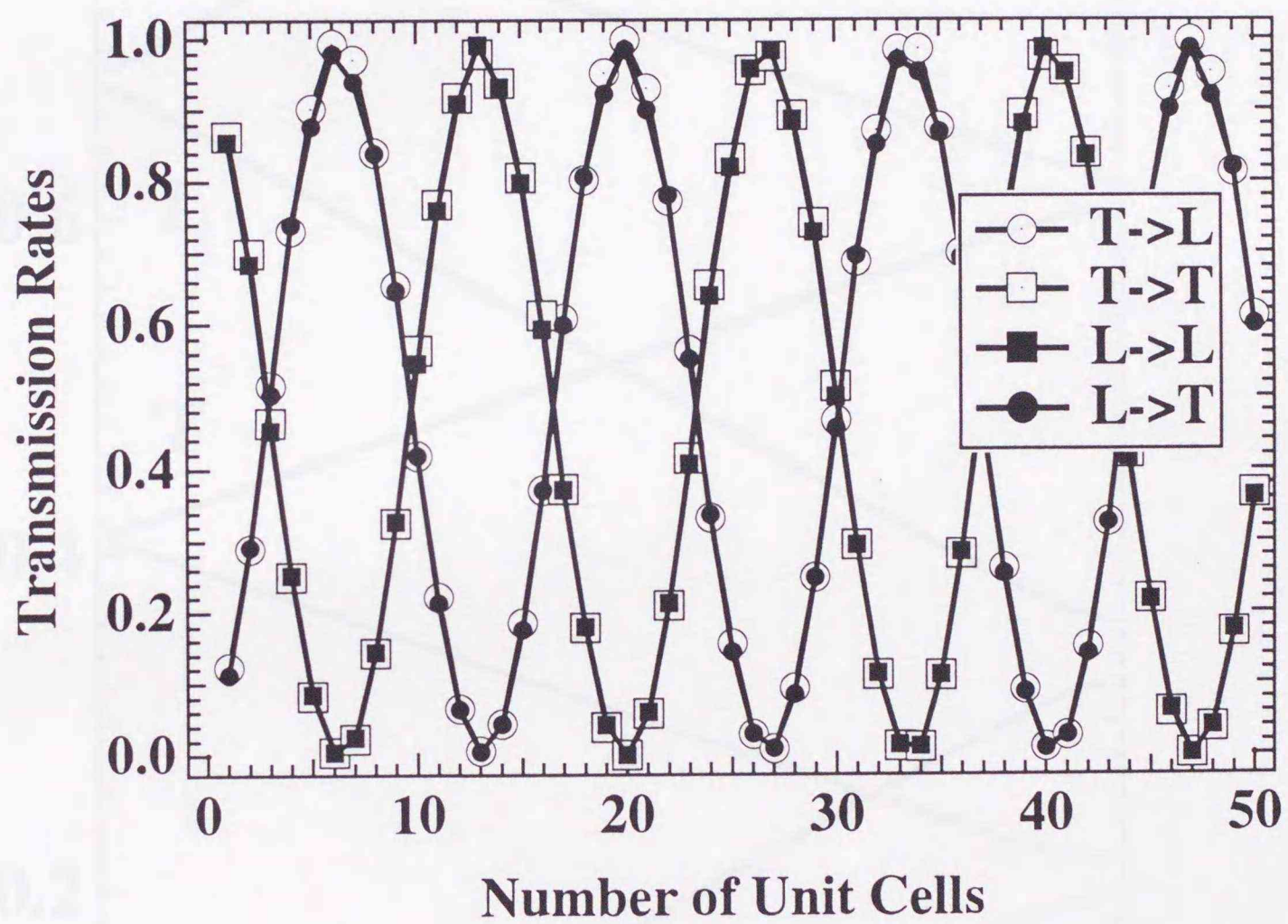


Fig.4.6



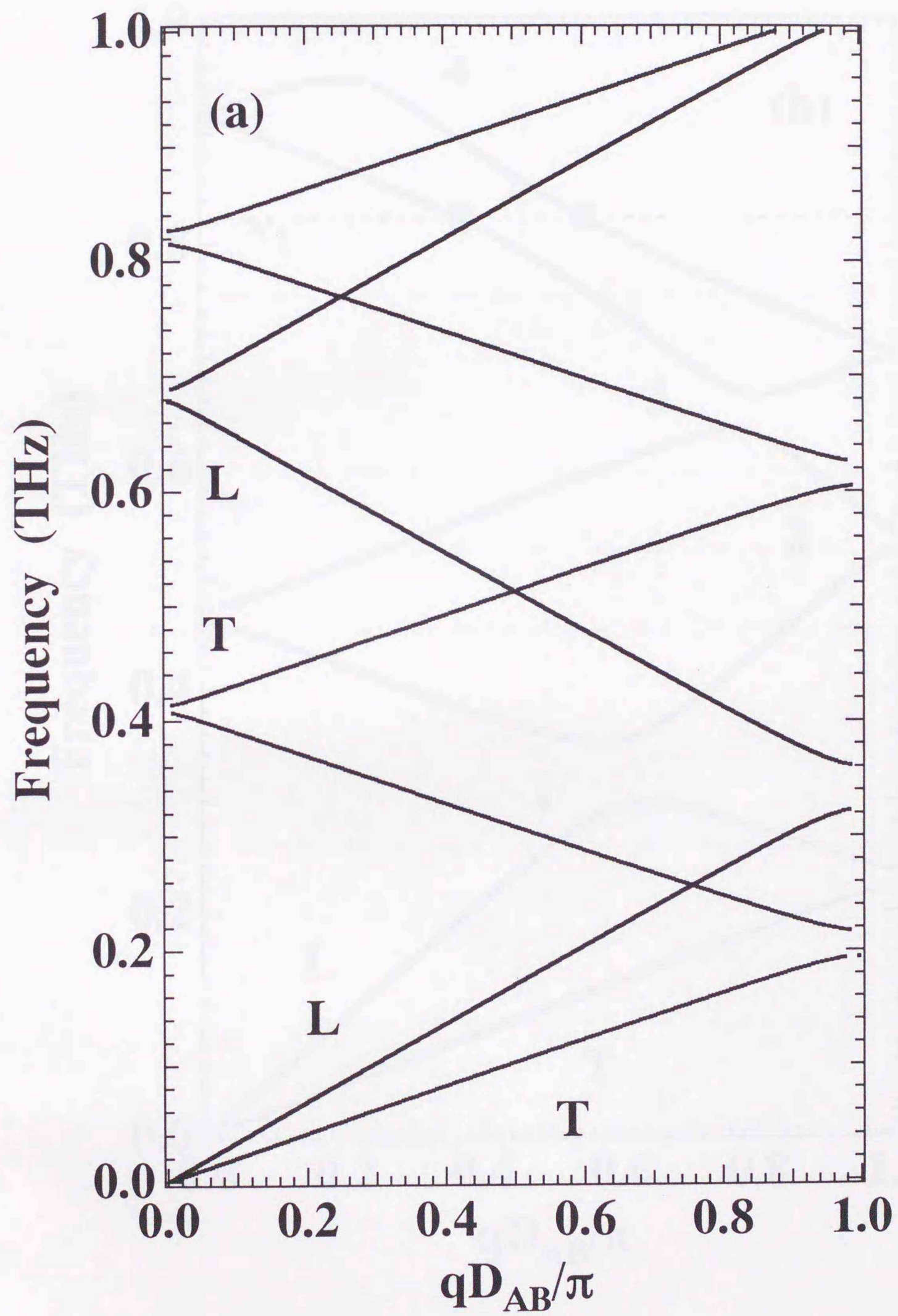


Fig.5.1(a)



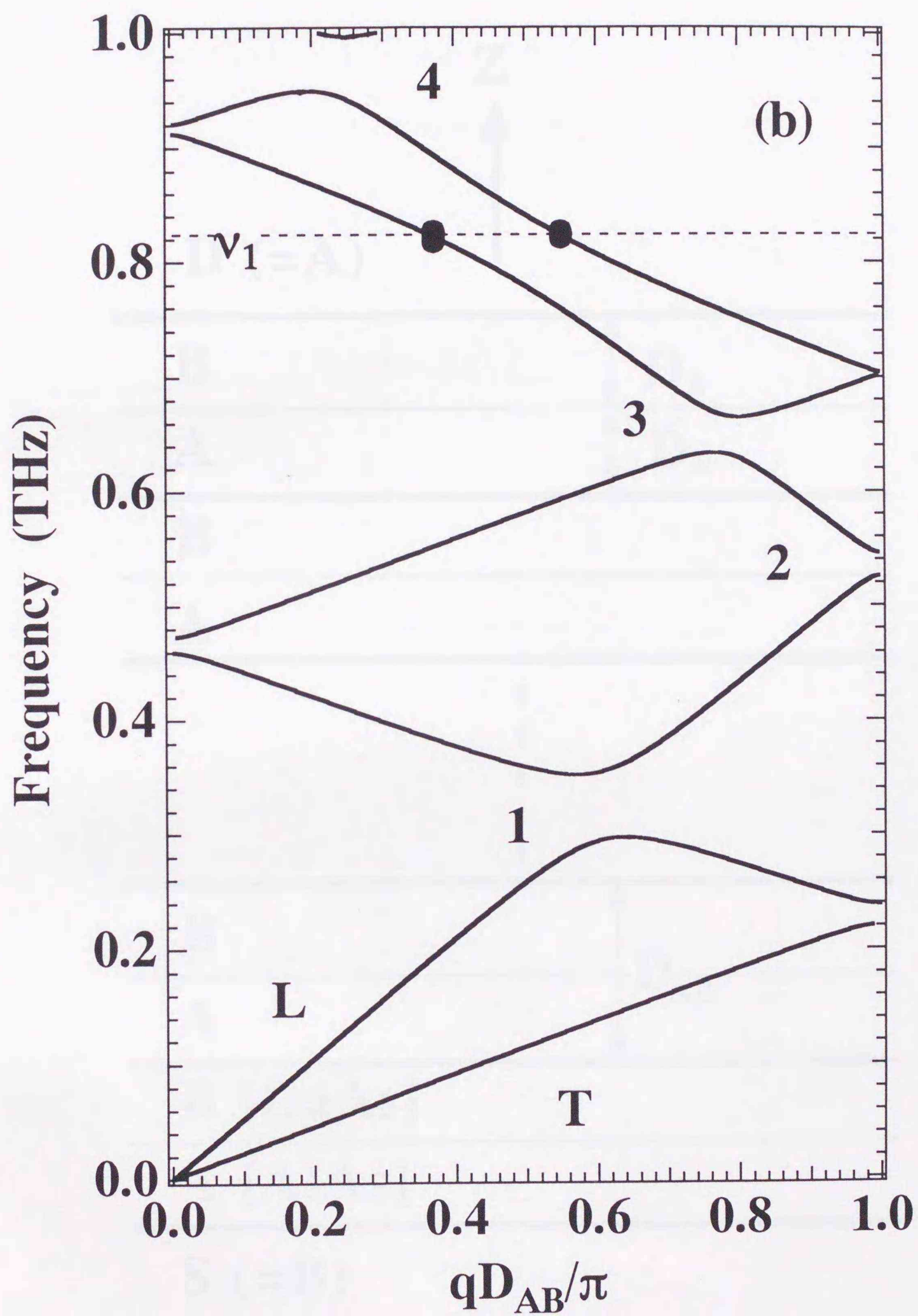
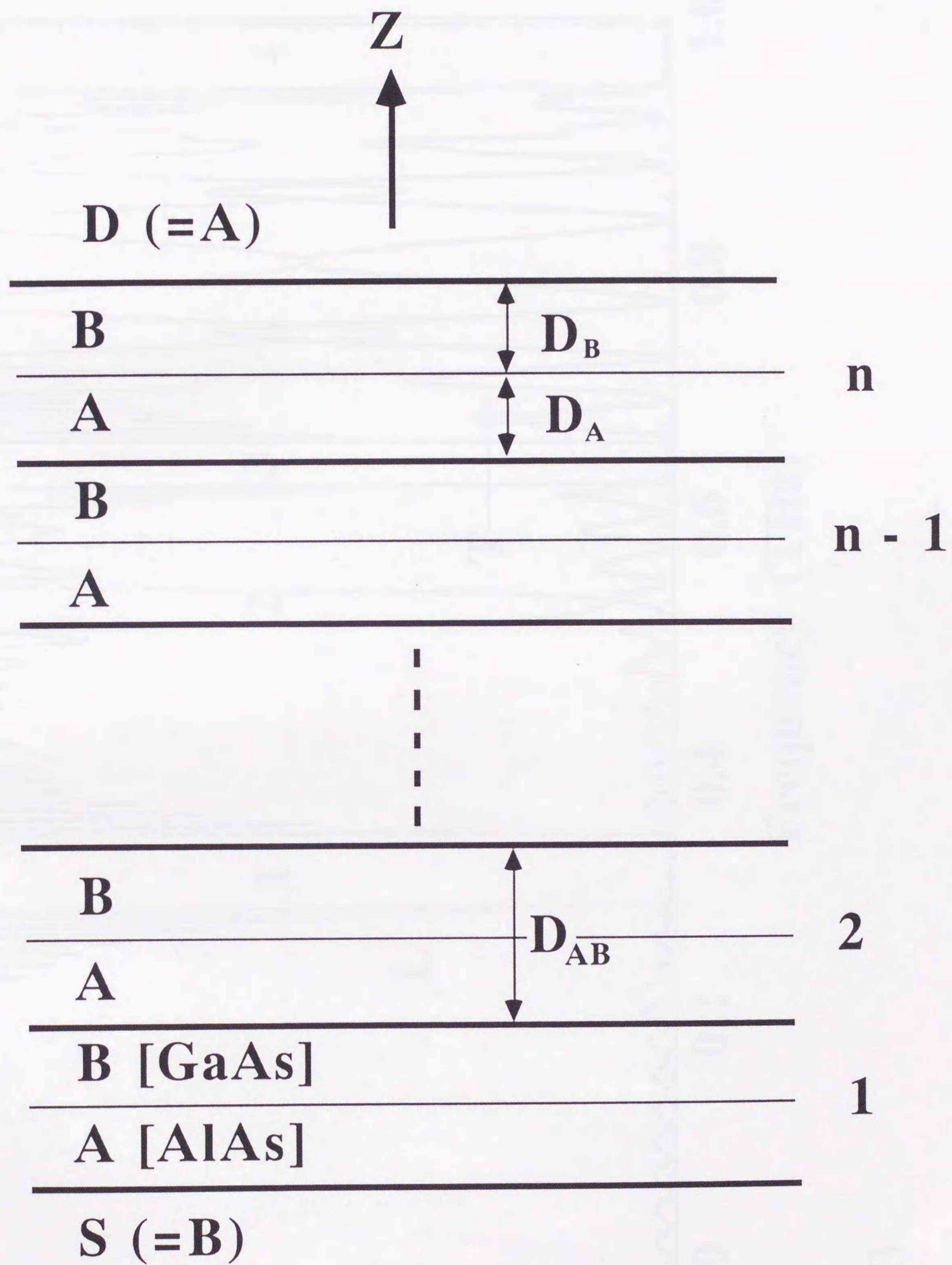


Fig.5.1(b)





**Fig.5.2**



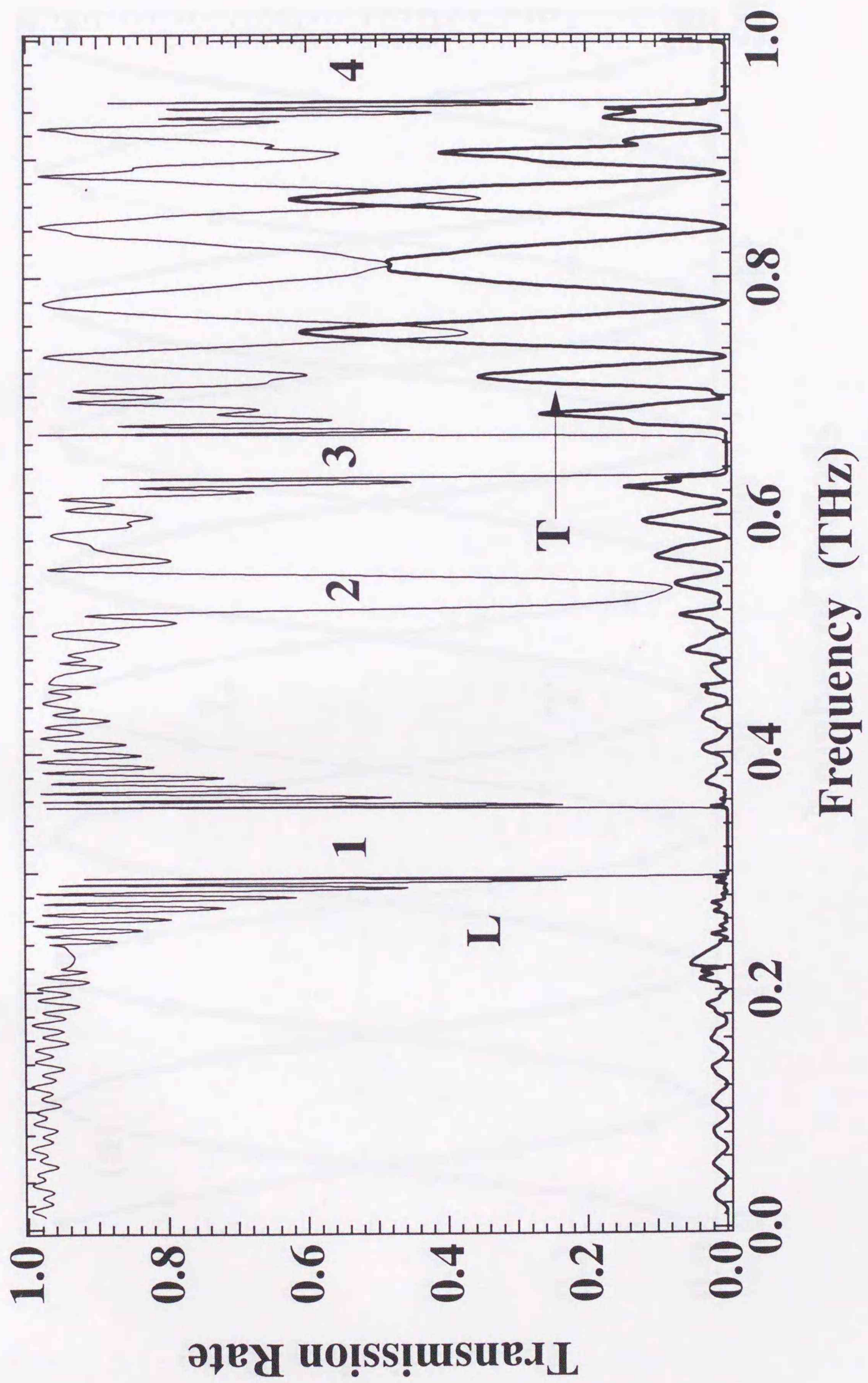


Fig.5.3



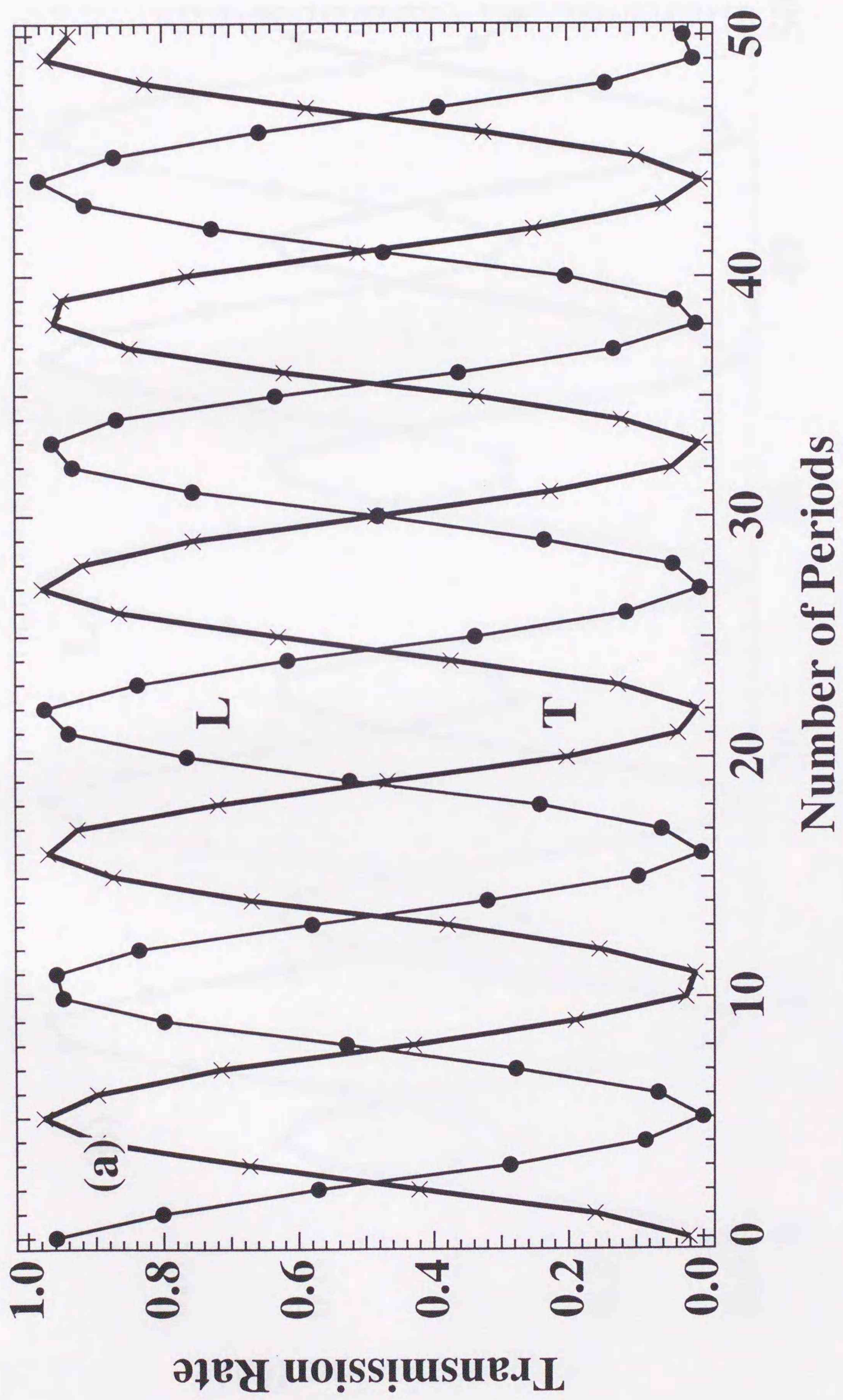


Fig.5.4(a)



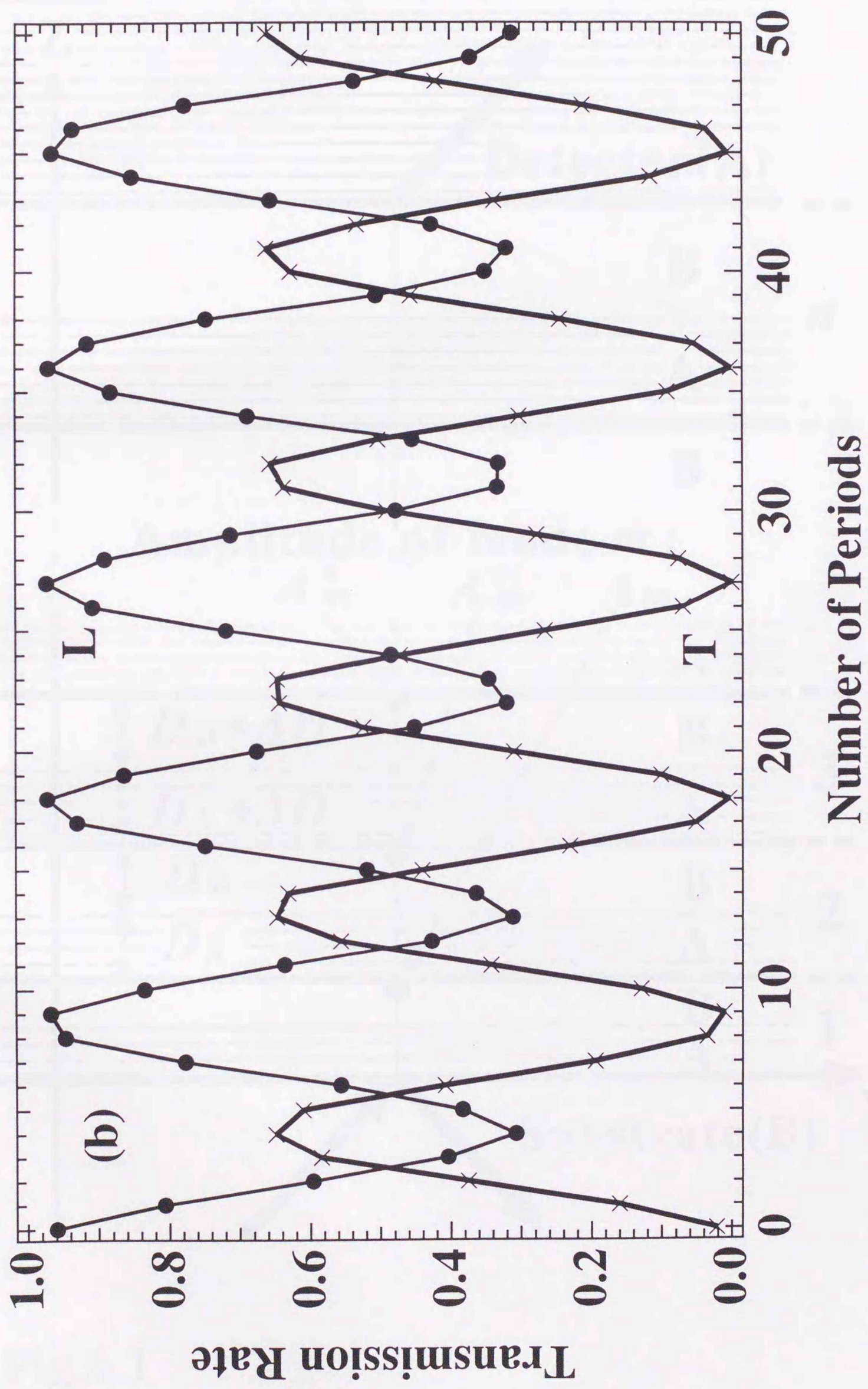


Fig.5.4(b)



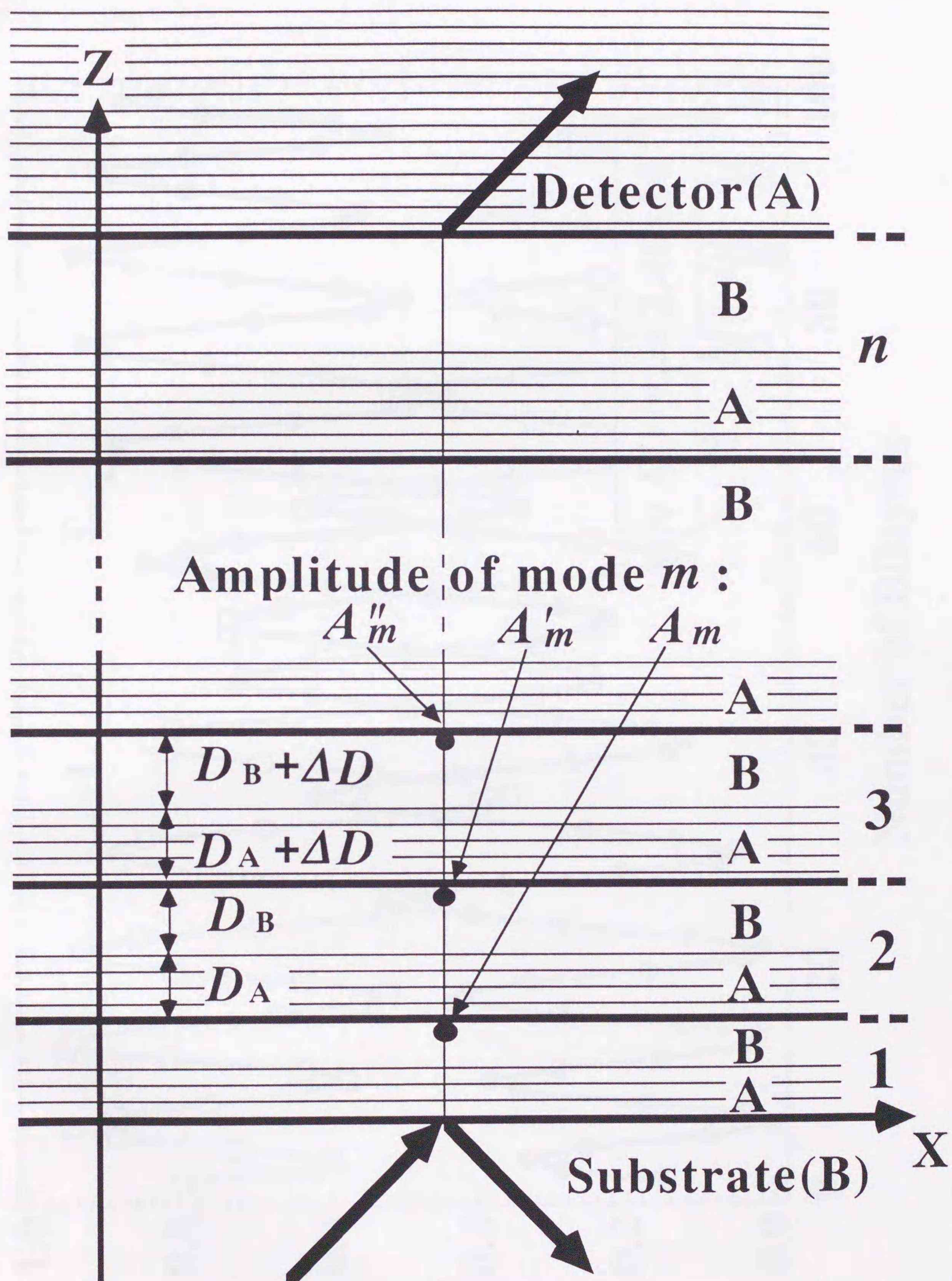


Fig.6.1



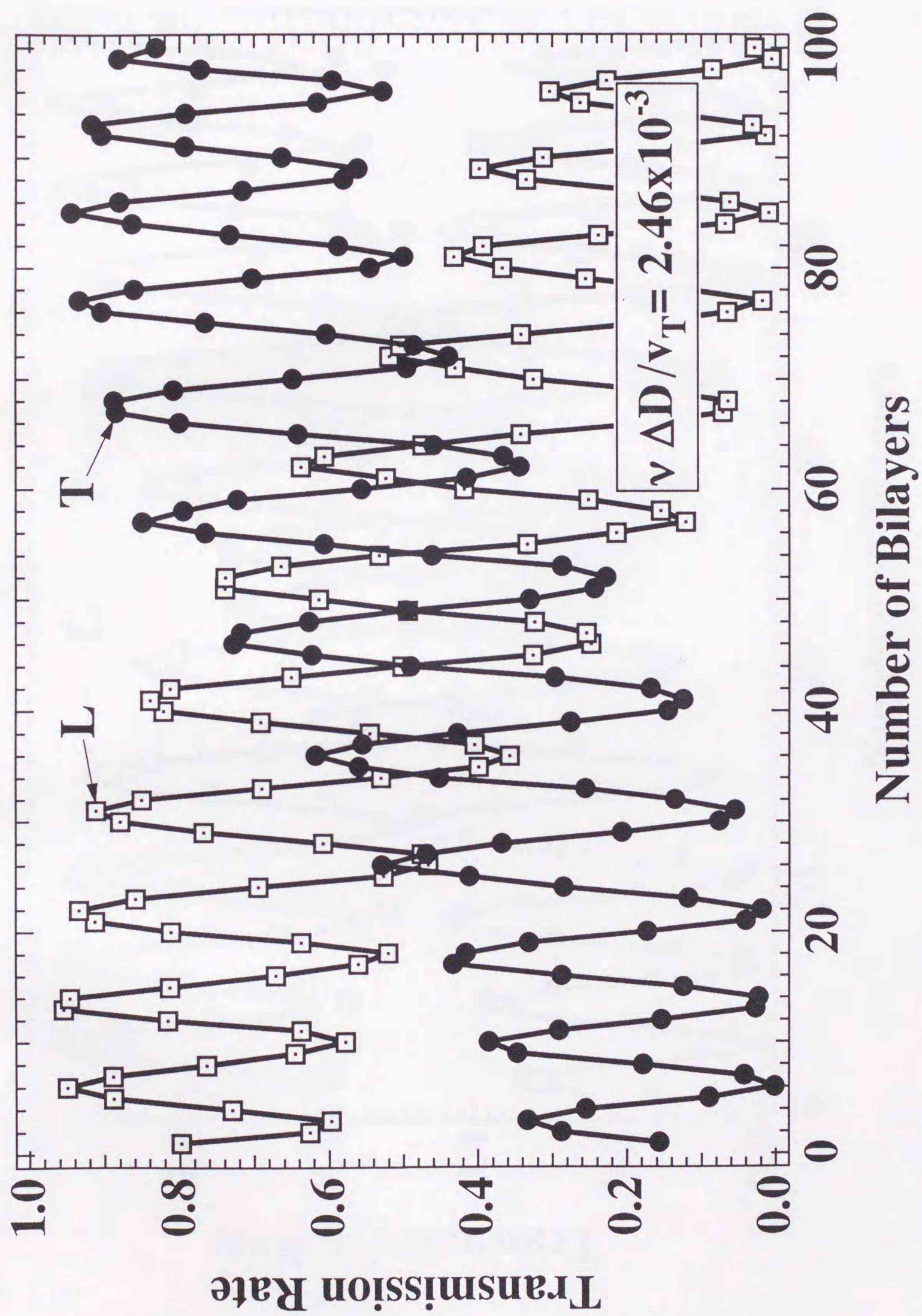


Fig.6.2



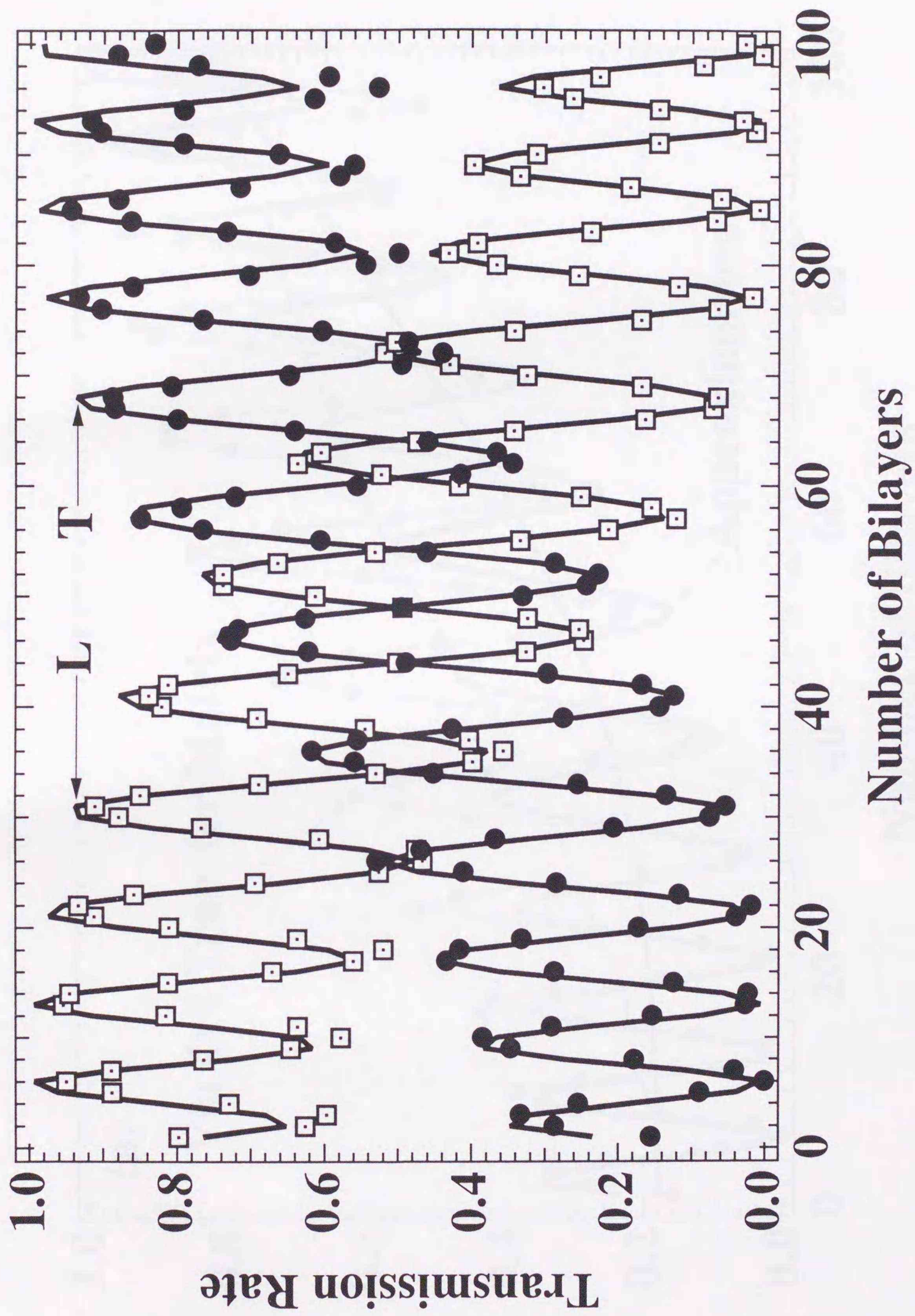


Fig.6.3



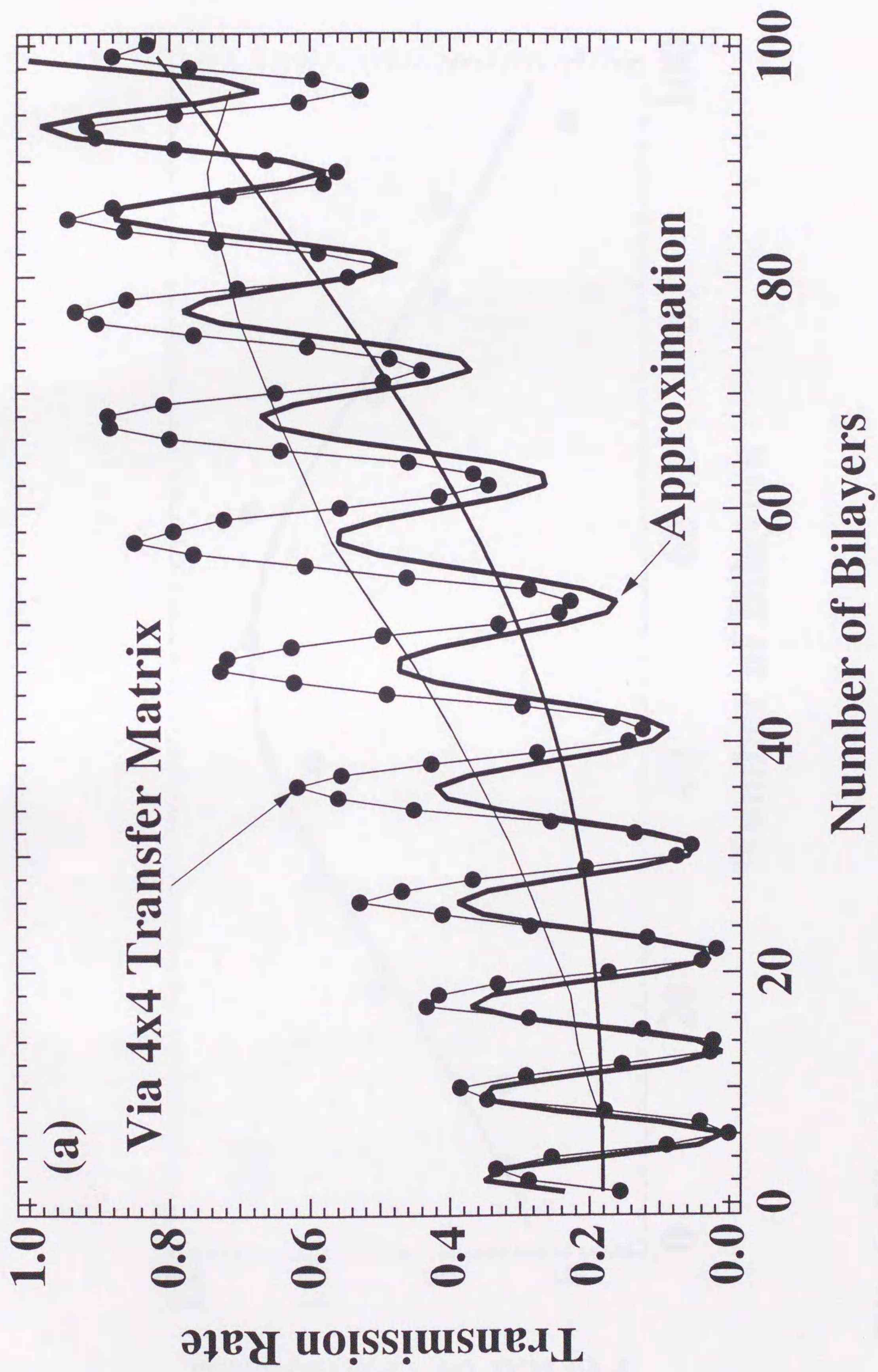


Fig.6.4(a)



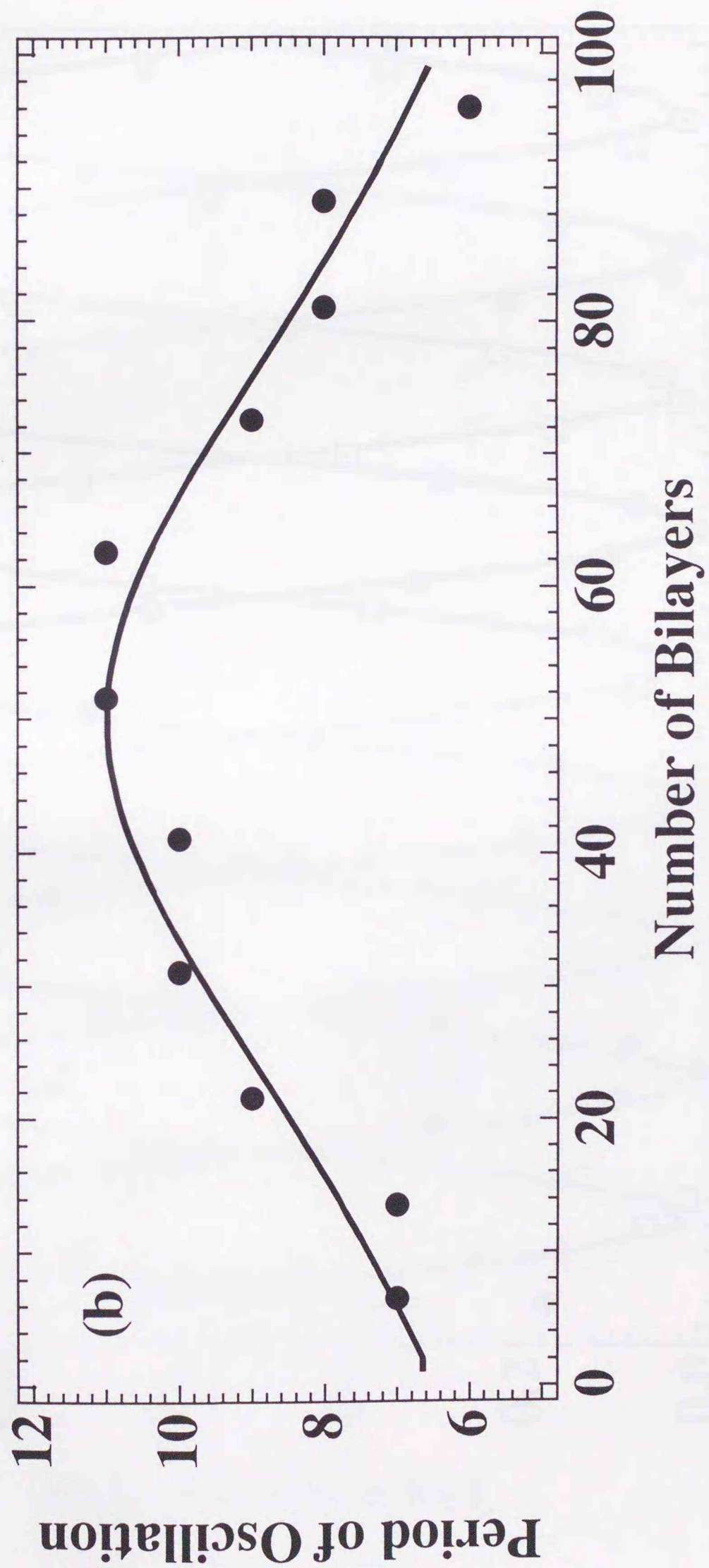
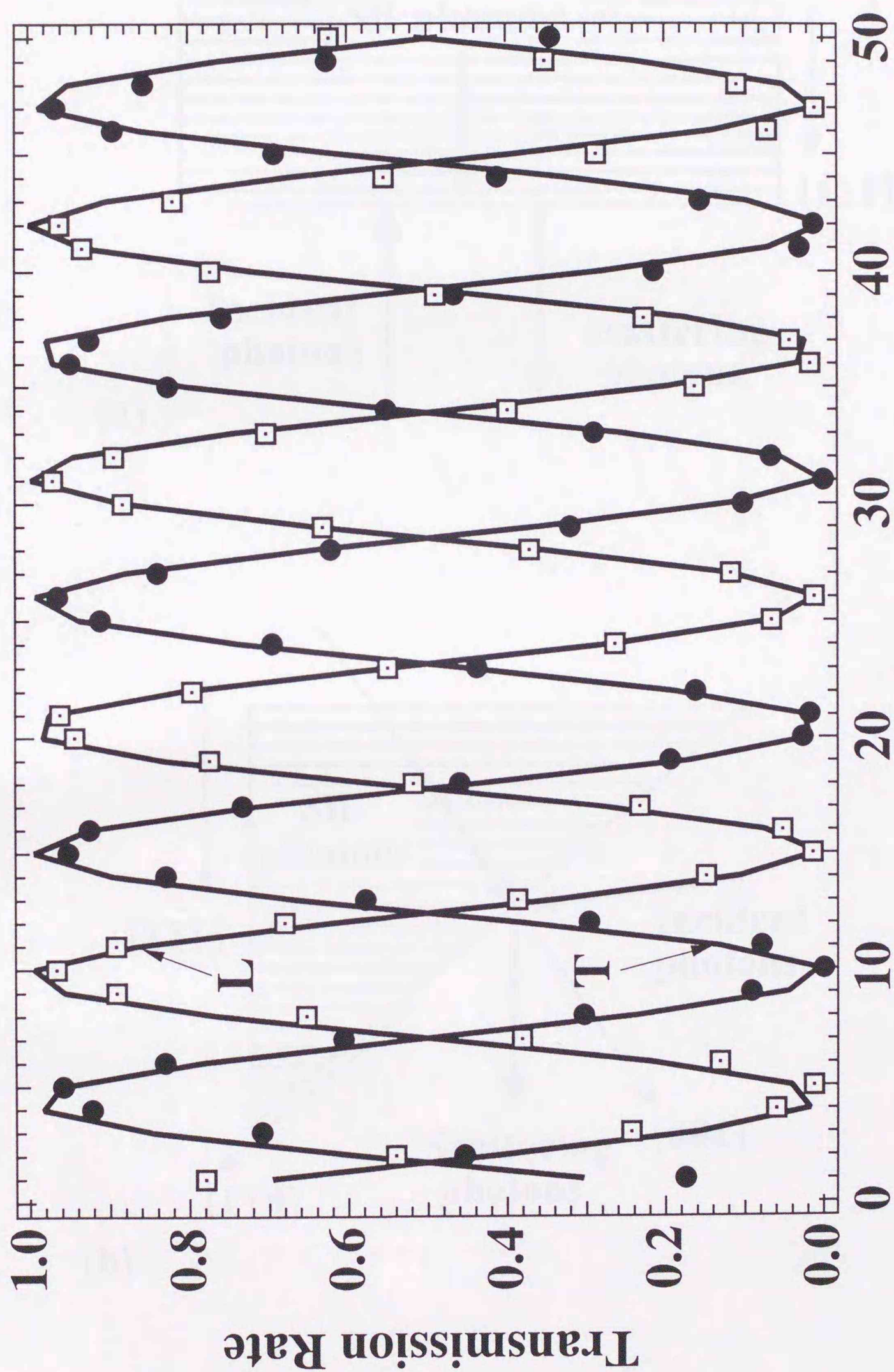


Fig.6.4(b)

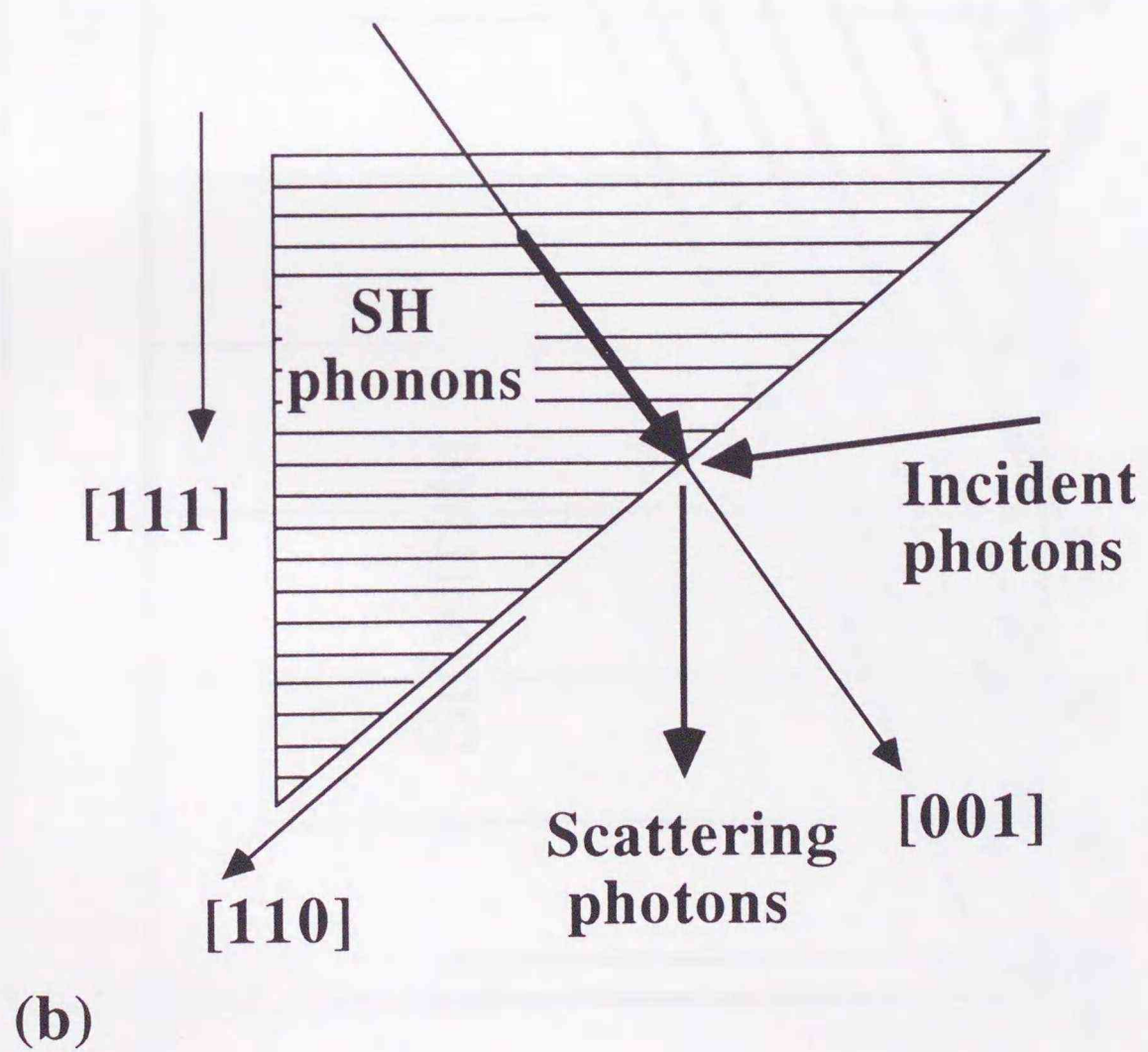
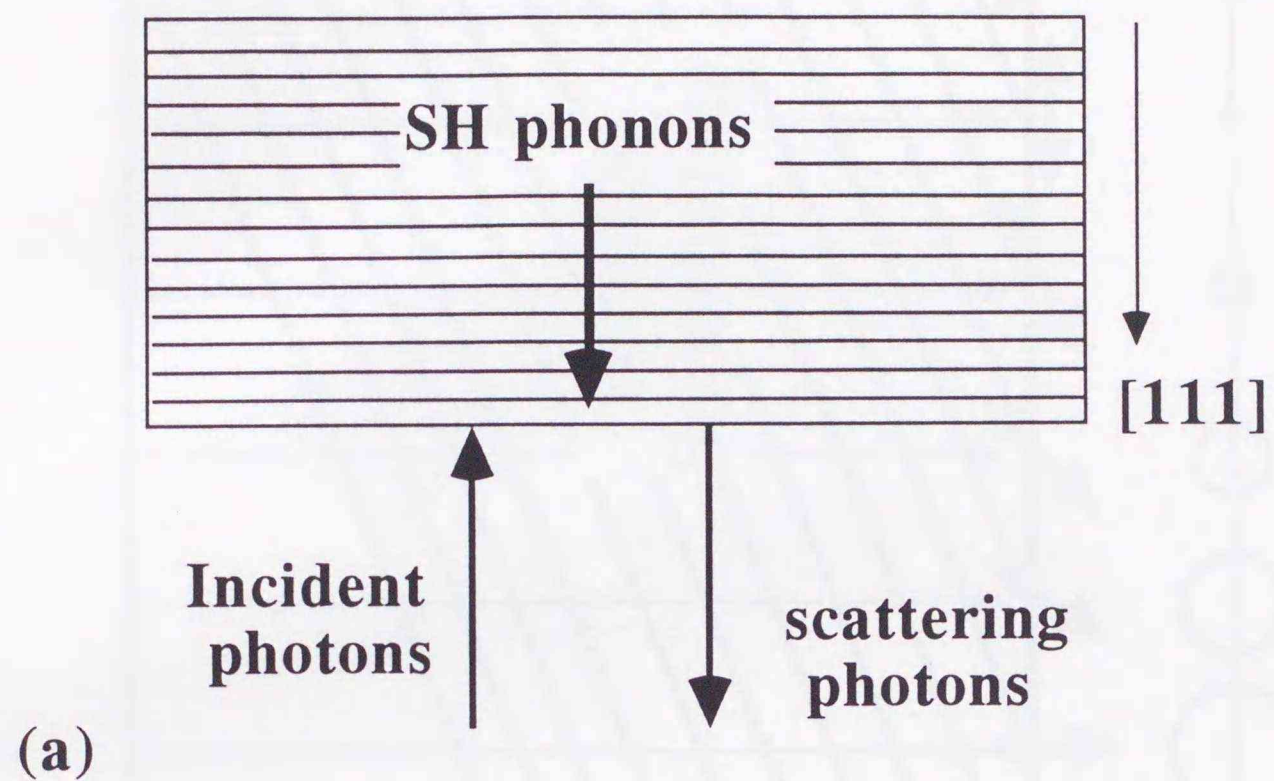




Number of Bilayers

Fig.6.5





**Fig.7.1**



# Incident phonons ( L mode plane wave )

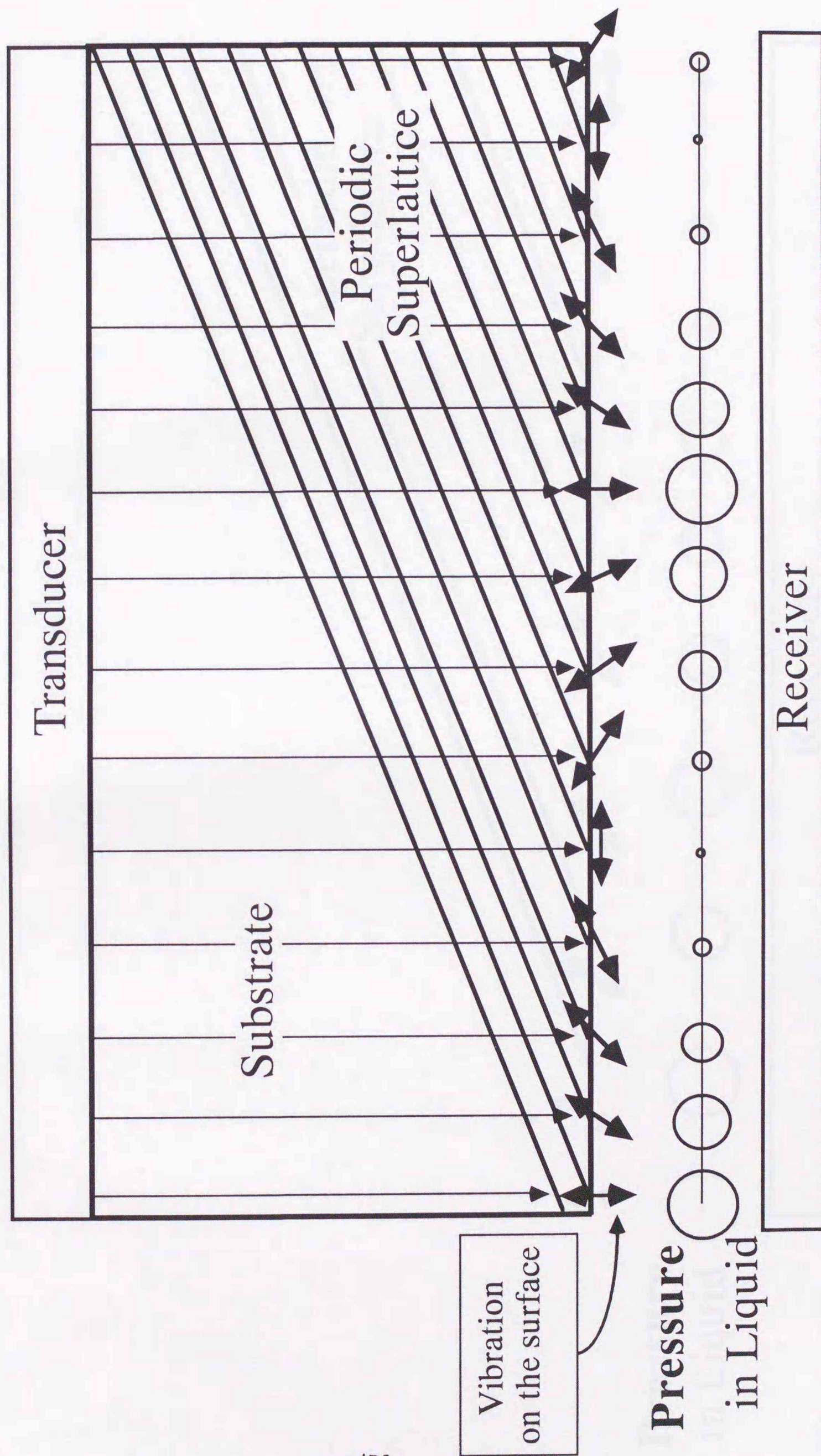


Fig.7.2



# Incident phonons ( L mode plane wave )

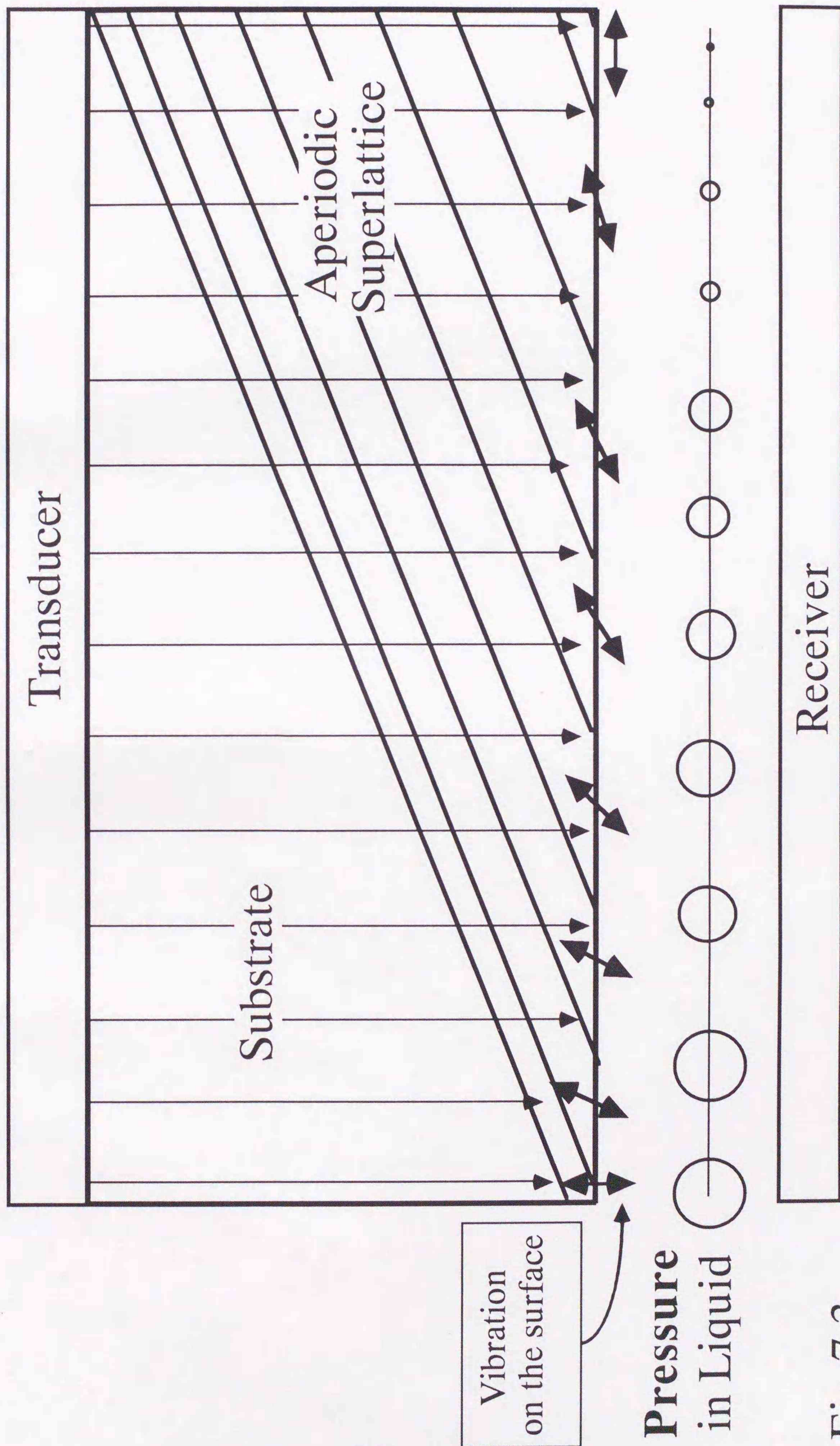
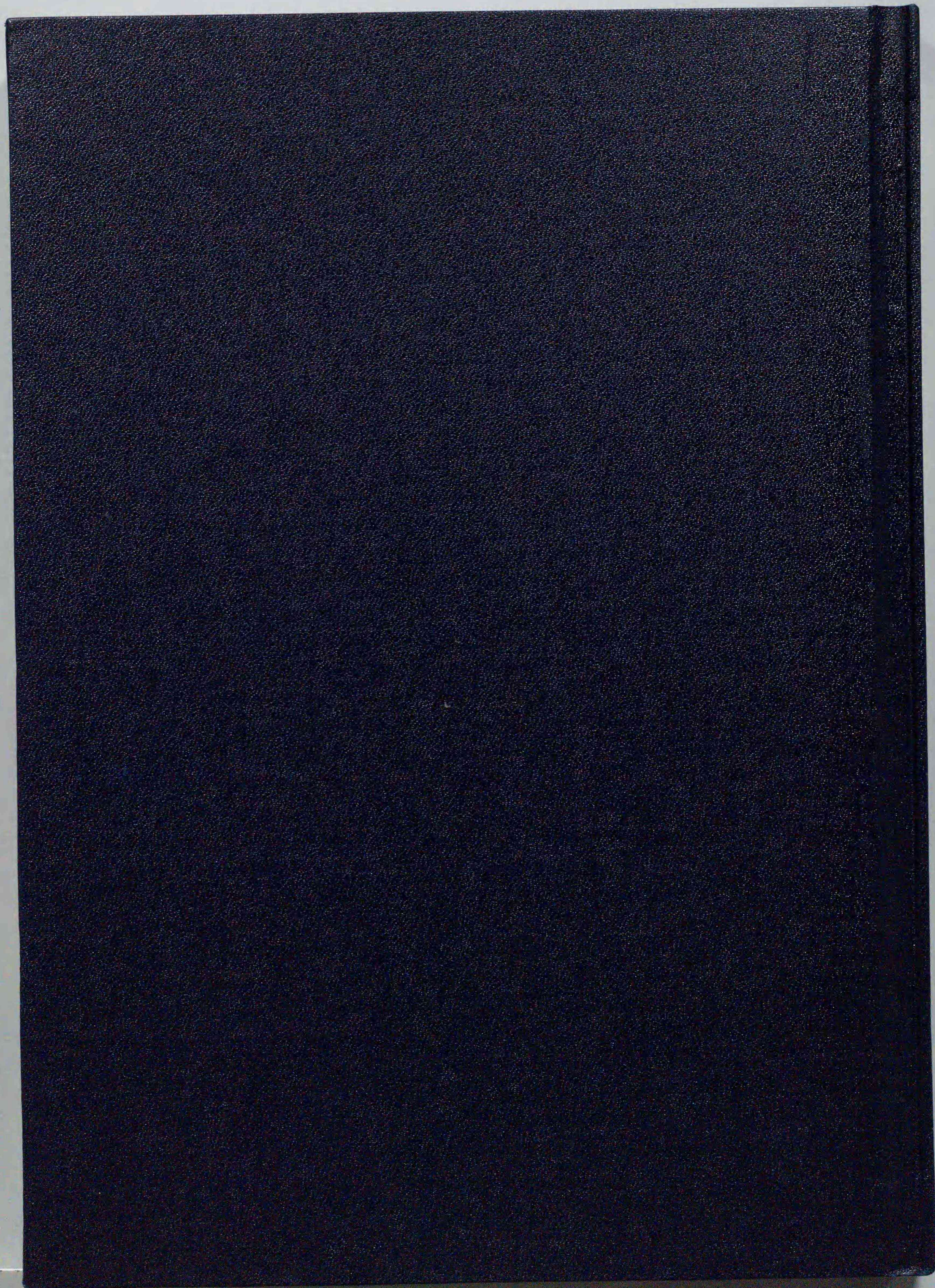
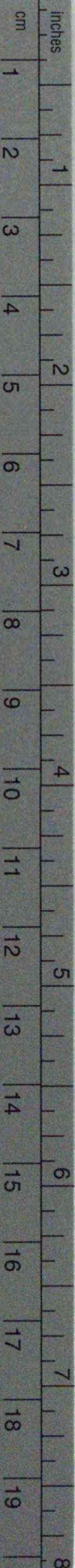


Fig.7.3





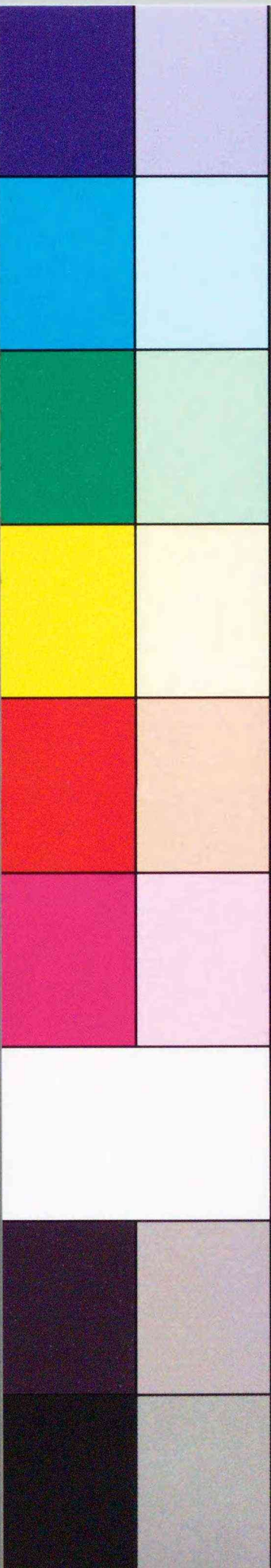




# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



## Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

