様相論理および可能性理論に基づく知識ベース管理の定式化に関する研究

工 藤 康 生

様相論理および可能性理論に基づく知識ベース管理の定式化に関する研究

北海道大学大学院 工学研究科 システム情報工学専攻
数理情報工学講座 知能情報工学分野
工藤 康生

目次

第1章

序論

1.1　本論文の目的

情報処理技術の高速化に伴って，大量の情報を蓄積，処理する技術の必要性が高まっている．蓄積された情報を知識ベースとして扱うためには，知識ベースを管理する機能が必要となり，知識ベースおよびその管理システムに関する研究は理論的定式化と実用的応用の両面から行われている．知識ベース管理に関する問題の一つとして，知識ベースに対して情報の追加，削除などの操作を施した場合に，いかにして知識ベースの整合性を保つかが挙げられる．所有する情報の整合性に関する議論は論理学，哲学および人工知能などの分野で行われており，この問題を論理，確率およびファジィ測度などに基づいて定式化しその性質を扱う研究は信念変更の理論と呼ばれている．

論理的枠組での信念変更は，信念修正および信念更新に大別される．信念修正は，知識ベースに対して情報の追加または削除を行った場合に知識ベースの論理的整合性を保つ操作である．これに対して信念更新は，現実世界の動的な変化を知識ベースに反映させる操作である．信念変更に関する従来の研究では，信念修正および信念更新は本質的に異なる操作とみなされており，これらの操作の関係は明らかにされていない．

数値的な枠組での信念変更には可能性理論に基づく信念変更がある．可能性理論の枠組では，知識ベースを可能な状況 (可能世界) の集合から閉区間 $[0,1]$ への可能性分布と呼ばれる関数で数値的に表現する．従来の研究では，信念修正の操作および信念更新の操作の一部が定式化されている．しかし，その定式化には不十分な点が多く，信念更新の他の操作についてはまだ定式化がなされていない．

本論文の目的は，信念修正および信念更新の相互関係を明らかにし，これらを統一的に扱う枠組を構築することである．まず，信念更新の操作の一つである消去の操作について，この操作を特徴づけるメタ論理的な公準の不十分な点を指摘し解消すると共に，消去の公準を再定式化する．信念更新のもう一つの操作である更新の操作，および再定式化した公準に基づく消去の操作は相互に定義することができ，また，信念修正の操作である修正および縮小の操作から構成できるこ

とを証明する．更に，これらの構成法に基づいて，信念変更の操作の相互関係を明らかにする．

次に，信念変更をそれぞれ様相論理および可能性理論に基づいて定式化し，その性質について考察する．様相論理に基づく定式化では，まず，有向グラフで表現される対象の論理的な性質を記述する矢印の様相論理を，矢印の間の順序関係を扱うために拡張した，順序を持つ矢印の様相論理を提案する．また，信念変更のそれぞれの操作および公準は順序を持つ矢印の様相論理の論理文として表現できることを証明する．これは，順序を持つ矢印の様相論理は信念変更を統一的に扱う一つの枠組を与えることを意味する．可能性理論に基づく定式化では，従来の定式化での不備を解消すると共に，可能性理論に基づく信念変更の相互関係を明らかにする．また，不確実な情報に基づく信念更新を提案し，これは可能性理論に基づく信念変更のより包括的な枠組であることを示す．

1.2 本論文の構成

本論文を 6 章で構成する．

第 1 章では，序論として本論文の背景，目的および構成について述べる．

第 2 章では，本論文の準備として，様相論理および可能性理論の概要をまとめる．また，信念変更に関する従来の研究について概要を説明する．

第 3 章では，Alchourrón, Gärdenfors and Makinson [1, 13, 14] が提案した信念修正，および Katsuno and Mendelzon [19] が提案した信念更新の相互関係を明らかにする．まず，Katsuno and Mendelzon が提案した消去の公準の不十分な点を指摘し解消すると共に，消去の公準を再定式化する．次に，更新の操作から消去の操作を構成する同一性，および消去の操作から更新の操作を構成する同一性をそれぞれ提案し，更新の操作および再定式化した公準に基づく消去の操作は相互に定義することができることを証明する．更に，信念修正の操作の一つである修正の操作から消去の操作を構成する同一性，信念修正のもう一つの操作である縮小の操作から消去の操作を構成する同一性，および縮小の操作から更新の操作を構成する同一性をそれぞれ提案し，これらの同一性および従来提案されている同一性に基づいて信念変更の相互関係を明らかにする．

第 4 章では，信念変更の操作を順序を持つ矢印の様相論理（modal logics of ordered arrows）に基づいて定式化する．順序を持つ矢印の様相論理は，Vakarelov [36] が提案した矢印の様相論理を矢印の間の順序関係について扱うために拡張した様相論理である．まず，有向グラフの構造的な性質および矢印の間の順序関係を表現する，順序を持つ矢印の様相論理のフレーム（以下，OA フレーム）およびモデル（以下，OA モデル）を提案する．また，順序を持つ矢印の様相論理体系 OAL（ordered arrow logic）を構成し，OAL はすべての OA モデルのクラスに対して健全かつ完全であることを証明する．次に，OAL に基づいて状態遷移およびその起こりやすさを表す信念変更モデルを提案し，修正および縮小の操作を，信念変更モデルにおいて最も起こりやすい状態遷移を選択する操作として定式化する．また，更新および消去の操作を，信念集合のそれぞれの状態において最も起こりやすい状態遷移を選択する操作として定式化する．更に，このように

定式化した信念変更のそれぞれの操作および公準は，OAL の論理文として表現できることを証明する．これは，信念変更の操作は OAL に基づく論理演算として表現でき，順序を持つ矢印の様相論理は信念変更を統一的に扱う一つの枠組を与えることを意味する．

第 5 章では，可能性理論に基づく信念変更を厳密に定式化する．まず，Dubois and Prade [12] による可能性理論に基づく更新の定式化では，更新の結果が常に構成できるとは限らないことを指摘し，可能性理論に基づく更新の操作を厳密に再定式化することで，この問題を解決する．また，論理的枠組での消去の操作および対称的消去の操作を可能性理論に基づいて新たに定式化し，その性質について考察する．更に，不確実な情報に基づく信念更新を提案し，可能性理論に基づく信念変更のそれぞれの操作は，不確実な情報に基づく信念更新の特殊例であることを示す．

第 6 章では，結論として，本論文で得られた成果について考察し，今後の研究の方向および課題について論じる．また，本論文での主な定理および補題について，証明を付録として添付する．

第2章

準備

本章では，様相論理および可能性理論の概要をまとめる．また，信念変更に関する従来の研究について概要を説明する．

2.1　様相論理

本節では，様相論理の証明論および可能世界意味論，特にクリプキ・モデルについて説明する．様相論理の諸体系およびモデルの性質等については，文献 [7, 28, 29, 31] を参考にした．

2.1.1　様相論理の言語

可算無限個の原子文の集合 $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$，論理演算子 $\neg$(否定)，$\vee$(選言)，$\wedge$(連言)，$\rightarrow$ (質量含意)，$\top$(恒真) および $\Box$(様相演算子) から，以下の形成規則によって様相論理の言語 $\mathcal{L}_M$ を構成する．

$$p \in \mathbf{P} \;\; \Rightarrow \;\; p \in \mathcal{L}_M. \tag{2.1}$$

$$\top \in \mathcal{L}_M. \tag{2.2}$$

$$\alpha \in \mathcal{L}_M \;\; \Rightarrow \;\; (\neg\alpha) \in \mathcal{L}_M. \tag{2.3}$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_M \;\; \Rightarrow \;\; (\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{L}_M. \tag{2.4}$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_M \;\; \Rightarrow \;\; (\alpha \vee \beta) \in \mathcal{L}_M. \tag{2.5}$$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_M \;\; \Rightarrow \;\; (\alpha \rightarrow \beta) \in \mathcal{L}_M. \tag{2.6}$$

$$\alpha \in \mathcal{L}_M \;\; \Rightarrow \;\; (\Box\alpha) \in \mathcal{L}_M. \tag{2.7}$$

ここで，式 (2.1) から式 (2.6) だけで得られる言語は古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ に相当する．よって，様相論理の言語 $\mathcal{L}_M$ は古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ を含む．以下，括弧は誤解を招かない程度に適宜省

略する．ここで，その他の演算子 $\perp$，$\equiv$ および $\Diamond$ をそれぞれ

$$\perp \stackrel{\text{df}}{=} \neg\top, \tag{2.8}$$

$$\alpha \equiv \beta \stackrel{\text{df}}{=} (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha), \tag{2.9}$$

$$\Diamond\alpha \stackrel{\text{df}}{=} \neg\Box\neg\alpha \tag{2.10}$$

の略記とする．本節では以下，$\Box\alpha$ を「α は必然である」と読むことにする．これに対応して，$\Diamond\alpha$ は「α は可能である」と読む．更に，メタ言語における連言，選言，含意，同値，全称および存在をそれぞれ and，or，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$，$\forall$ および $\exists$ と表す．

2.1.2 様相論理の証明論

ここでは，正規 (normal) な様相論理の体系だけを扱う．最小の正規様相論理体系 K は，古典命題論理の公理系に，以下の公理型 **K** および推論規則 **RN** を追加したものである．

K. $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$.

RN. α から $\Box\alpha$ を推論する．

ここで，α および β は任意の論理文である．体系 K では，**K** の形で表される論理文をすべて公理として扱う．そのため，上記の **K** は公理型 (axiom scheme) と呼ばれる．

体系 K に対して以下の公理型を追加することで，正規様相論理の様々な体系が得られる．

D. $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$.

T. $\Box\alpha \to \alpha$.

B. $\alpha \to \Box\Diamond\alpha$.

4. $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$.

5. $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$.

体系 K に公理型 $\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}$ を追加して得られる様相論理体系を $KX_1 \ldots X_n$ と表す．例えば，体系 K に公理型 **T** および **B** を追加した体系を KTB と表す．また，体系 $KT4$ および $KT5$ は伝統的にそれぞれ $S4$ および $S5$ と呼ばれる．

正規様相論理体系 L で論理文 α が証明可能であるとは，有限個の論理文の列 $\beta_1, \ldots \beta_n (= \alpha)$ が存在して，各 $\beta_i (i = 1 \ldots n)$ が以下の三条件のいずれかを満たす場合である．

1. 体系 L の公理．

2. $\beta_j, \beta_k (j, k < i)$ から推論規則 **MP** に基づいて導かれた論理文．

3. $\beta_l (l < i)$ から推論規則 **RN** に基づいて導かれた論理文．

論理文 α に対して，α が体系 L で証明可能であることを $L \vdash \alpha$ と表す．

2.1.3 様相論理の意味論

ここでは，様相論理の可能世界意味論，特にクリプキ・モデルについて説明する．

クリプキ・モデル

空でない集合 W および W 上の二項関係 R の対 (W,R) を (様相論理に対する) クリプキ・フレームという．W および R をそれぞれこのクリプキ・フレームの可能世界の集合および到達可能関係という．また，v を原子文の集合 $\mathbf{P}$ および可能世界の集合 W との対から $\{t,f\}$ への関数 $v : \mathbf{P} \times W \to \{t,f\}$ とする．t および f はそれぞれ真および偽を表す．関数 v は W のそれぞれの要素 x における原子文の真理値を与える．このとき，3 つ組 (W,R,v) をクリプキ・モデルという．

クリプキ・モデル $M = (W,R,v)$ の可能世界 $x \in W$ で論理文 α が真であることを $M,x \models \alpha$ と表す．また，$M,x \models \alpha$ でないことを $M,x \not\models \alpha$ と表す．様相演算子を含まない論理文の真理値は，命題論理の場合と同様に，以下のように定義される．

$$M,x \models p \quad \Leftrightarrow \quad v(p,x) = t,\ \forall p \in \mathbf{P}. \tag{2.11}$$

$$M,x \models \top \qquad (\forall x \in W). \tag{2.12}$$

$$M,x \models \neg\alpha \quad \Leftrightarrow \quad M,x \not\models \alpha. \tag{2.13}$$

$$M,x \models \alpha \wedge \beta \quad \Leftrightarrow \quad M,x \models \alpha \text{ and } M,x \models \beta. \tag{2.14}$$

$$M,x \models \alpha \vee \beta \quad \Leftrightarrow \quad M,x \models \alpha \text{ or } M,x \models \beta. \tag{2.15}$$

$$M,x \models \alpha \to \beta \quad \Leftrightarrow \quad M,x \not\models \alpha \text{ or } M,x \models \beta. \tag{2.16}$$

様相演算子を含む論理文の真理値は，到達可能関係 R で到達可能な可能世界に依存して定義される．すなわち，二つの可能世界 $x,y \in W$ に対して xRy であるとき，x から y へ到達できるとみなし，

可能世界 x で論理文αは必然的に真 $\Leftrightarrow$ αは x から到達できるすべての可能世界で真

として捉えることである．この考え方に基づいて，様相演算子を含む論理文の真理値は次式で定義される．

$$M,x \models \Box\alpha \Leftrightarrow \forall y[xRy \Rightarrow M,y \models \alpha]. \tag{2.17}$$

クリプキ・モデルにおける論理文の正しさは，以下の三段階に分けて定義できる．

- あるクリプキ・モデル $M = (W,R,v)$ のある可能世界 $x \in W$ で論理文 α が真:
  $M,x \models \alpha$ と表す．

- あるクリプキ・モデル M のすべての可能世界 x で論理文 α が真:
  このとき，論理文 α は M で妥当であるといい，$M \models \alpha$ と表す．
- クリプキ・モデルのあるクラス C について，C に含まれるすべてのクリプキ・モデル M のすべての可能世界 x で論理文 α が真:
  このとき，論理文 α はクラス C で妥当であるといい，$C \models \alpha$ と表す．

到達可能関係の条件と公理との対応

到達可能関係が満たす性質と主な公理との対応関係を以下に挙げる．

K: 無条件．

D: 継続的　$\forall x \exists y[xRy]$.

T: 反射的　$\forall x[xRx]$.

B: 対称的　$\forall x, y[xRy \Rightarrow yRx]$.

4: 推移的　$\forall x, y, z[xRy \text{ and } yRz \Rightarrow xRz]$.

5: Euclid 的　$\forall x, y, z[xRy \text{ and } xRz \Rightarrow yRz]$.

2.1.4 健全性および完全性

様相論理に限らず，論理の体系に関する重要な性質として，与えられた意味論に対する健全性および完全性がある．任意の正規様相論理体系 L およびクリプキ・モデルのクラス C に対して，健全性および完全性は以下のように表される．

健全性 L が C に関して健全 $\Leftrightarrow$ L で証明可能な論理文はすべて C で妥当 $\Leftrightarrow$ $(L \vdash \alpha \Rightarrow C \models \alpha)$.

完全性 L が C に関して完全 $\Leftrightarrow$ C で妥当な論理文はすべて L で証明可能 $\Leftrightarrow$ $(C \models \alpha \Rightarrow L \vdash \alpha)$.

よって，C に関して健全かつ完全な体系 L では，

$$\text{論理文}\alpha\text{が体系 } L \text{ で証明可能} \Leftrightarrow \text{論理文}\alpha\text{がクラス } C \text{ で妥当}$$

が成り立つ．

主な正規様相論理体系について，クリプキ・モデルのクラスに対する健全かつ完全な関係を表 2.1 に示す．

2.2 可能性理論

本節では，数値的枠組の一つであるファジィ測度について述べ，その特殊な場合である可能性測度および必然性測度について説明する．本節の内容については文献 [34] を参考にした．

表 2.1: 主な正規様相論理体系とモデルのクラスとの対応

体系	到達可能関係 R が満たす性質
K	無条件
KD	継続的
$KD4$	継続的かつ推移的
$KD45$	継続的かつ推移的，Euclid 的
KT	反射的
KTB	反射的かつ対称的
$KT4(S4)$	反射的かつ推移的
$KT5(S5)$	反射的かつ Euclid 的 ($\Leftrightarrow$ 同値関係)

2.2.1 ファジィ測度およびファジィ集合

ファジィ理論は人間の主観に基づくあいまいさを数値的に扱う理論である．ファジィ理論では，以下の二種類のあいまいさを扱う．

- ぼやけた境界をもつ概念のあいまいさ
- 多くの可能性のうちのどれであるかを特定できないあいまいさ

前者のあいまいさは vagueness と呼ばれ，ファジィ集合で表現されるあいまいさである．これに対して，後者のあいまいさは ambiguity と呼ばれ，ファジィ測度で表現されるあいまいさである．

2.2.2 ファジィ測度

本節では，空でない全体集合 Ω を可能な状況 (可能世界) の有限集合とみなす．定式化の前に，Ω について以下の仮定を置く．

排反性 複数の状況が同時に成り立つことはない

網羅性 Ω はすべての状況を含んでいる

また，Ω の中に現実世界の状況と一致する可能世界が存在すると仮定する．この可能世界を他の可能世界と区別して真の可能世界と呼び，w_0 と表す．

ファジィ測度が扱うあいまいさは ambiguity であることから，我々にとって関心があるのは $w_0 \in X (X \subseteq \Omega)$ という形の命題である．この命題の主観的な「確からしさ」を実数値 $\mu(w_0 \in X)$ で表す．以下，簡単のため，$\mu(w_0 \in X)$ を単に $\mu(X)$ と表す．数学的には，ファジィ測度は以下の三条件を満たす集合関数 $\mu : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ である．

$$\mu(\Omega) = 1. \tag{2.18}$$

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{2.19}$$

$$\forall X, Y[X \subseteq Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)]. \text{ (単調性)} \tag{2.20}$$

また，ファジィ測度 μ に対して，

$$\mu^*(X) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1 - \mu(\bar{X}) \tag{2.21}$$

で定義される集合関数 $\mu^* : 2^\Omega \to [0,1]$ もまたファジィ測度となる．ここで，$\bar{X}$ は X の補集合を表す．μ と μ^* は互いに双対であるという．

2.2.3 可能性理論

集合関数 $\Pi : 2^\Omega \to [0,1]$ が Ω 上の可能性測度であるとは，

$$\sup\{\pi(w) \mid w \in \Omega\} = 1 \tag{2.22}$$

となる関数 $\pi : \Omega \to [0,1]$ が存在して，

$$\Pi(A) = \max_{w \in A} \pi(w), \quad \forall A \subseteq \Omega \tag{2.23}$$

となることである．直感的には，可能性測度の値 $\Pi(A)$ は，$w_0 \in A$ であることの「もっともらしさ」の度合いを表す．このように構成された可能性測度 Π は以下の性質を満たす．

$$\Pi(\Omega) = 1. \tag{2.24}$$

$$\Pi(\emptyset) = 0. \tag{2.25}$$

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)), \quad \forall A, B \subseteq \Omega. \tag{2.26}$$

式 (2.26) より明らかに単調性を満たすので，可能性測度 Π はファジィ測度である．可能性測度 Π を構成する関数 π を可能性分布という．可能世界 w の値 $\pi(w)$ は w が真の可能世界 w_0 であることの「もっともらしさ」を表す．$\pi(w) = 0$ は w は真の可能世界 w_0 ではありえないことを表す．これに対して，$\pi(w) = 1$ は w が真の可能世界 w_0 の候補であることを表すだけであり，$\pi(w) = 1$ でも w が真の可能世界 w_0 であるとは限らない．

必然性測度は以下の性質を満たす集合関数 $N : 2^\Omega \to [0,1]$ である．

$$N(\Omega) = 1. \tag{2.27}$$

$$N(\emptyset) = 0. \tag{2.28}$$

$$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)), \quad \forall A, B \subseteq \Omega. \tag{2.29}$$

式 (2.29) より明らかに単調性を満たすので，必然性測度 N はファジィ測度である．直感的には，必然性測度の値 $N(A)$ は，$w_0 \in A$ であることの「確実さ」の度合いを表す．

与えられた可能性測度 Π から，以下の式 (2.30) を用いて Π に双対的な必然性測度を構成することができる．同様に，与えられた必然性測度 N から N に双対的な可能性測度を構成することができる．

$$N(A) = 1 - \Pi(\bar{A}). \tag{2.30}$$

$$\Pi(A) = 1 - N(\bar{A}). \tag{2.31}$$

2.3 信念変更

本節では，信念変更に関する従来の研究について概要を説明する．

2.3.1 信念集合

信念変更の理論では，知識ベースに対して情報の追加または削除を行った場合に，いかにして知識ベースの整合性を保つかという問題を論理，確率およびファジィ測度などに基づいて定式化し，その性質を扱う．論理的枠組で知識ベースを表現する簡潔な方法として，知識ベースを文の集合として表現することが挙げられる．これらの文は，ある対象となる論理体系の言語 $\mathcal{L}$ の論理文として記述され，知識ベースに含まれる情報を表している．本論文では簡単のために古典命題論理を利用する．

信念変更では，知識ベースを以下の性質を満たす信念集合 (belief set) と呼ばれる論理文の集合で表現する場合が多い．

定義 2.1 無矛盾な信念集合 T とは以下の条件:

1. $\perp$ は T から導かれない．
2. $T \vdash p$ ならば，$p \in T$.

を満たす論理文の集合 T である．

すなわち，信念集合は推論規則に関して閉じている集合である．

論理文の集合 Γ に対して，Γ のすべての論理的帰結の集合を $Cn(\Gamma)$ と表す．すなわち，$Cn(\Gamma) = \{q \in \mathcal{L} \mid \Gamma \vdash q\}$ である．$Cn(\Gamma)$ の基本的で有用な性質として，$q \in Cn(\Gamma \cup \{p\})$ であることの必要十分条件は $p \to q \in Cn(\Gamma)$ であることが成り立つ．また，論理文 p の論理的帰結の集合 $Cn(\{p\})$ を省略して $Cn(p)$ と表す．信念集合 T が矛盾するとは，ある論理文 $p \in \mathcal{L}$ が存在して，$p \in T$ および $\neg p \in T$ が共に成り立つことである．また，信念集合 T が完全であるとは，任意の $p \in \mathcal{L}$ に対

して $p \in T$ または $\neg p \in T$ のどちらか一方のみが成り立つことである．$\mathcal{L}$ の無矛盾で完全な信念集合は，$\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合である．ここまでの定義および記法は Gärdenfors[13] に準じている．

ここから以下の記法は Peppas and Williams [33] に準じる．$\mathcal{L}$ のすべての無矛盾で完全な信念集合の集合族を $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$，$\mathcal{L}$ のすべての信念集合の集合族を $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ と表す．また，論理文の集合 Γ に対して，Γ を含むすべての無矛盾で完全な信念集合の集合族を $[\Gamma]$ と表す．すなわち，$[\Gamma] = \{K \in \mathcal{K}_{\mathcal{L}} \mid \Gamma \subseteq K\}$ である．Γ が矛盾する場合は $[\Gamma] = \emptyset$，$\Gamma = \emptyset$ の場合は $[\Gamma] = \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ と定義する．

2.3.2 信念修正

本節では，Alchourrón, Gärdenfors and Makinson [1, 13, 14] が提案した信念修正について説明する．本論文では，それを以下，AGM の信念修正と呼ぶ．本節の内容については文献 [13, 15] を参考にした．

信念修正の三種類の操作

AGM の信念修正では，知識ベースを信念集合で表現する．T が無矛盾な信念集合ならば，任意の論理文 p に関して，以下の三種類の状態が考えられる．

1. $p \in T$: p は受理されている．

2. $\neg p \in T$: p は却下されている．

3. $p \notin T$ かつ $\neg p \notin T$: p は未決定である．

よって，論理文 p に関する信念修正の操作は，上記のどれか一つの状態から残りのどちらか一つの状態へ変更する操作として表される．そのような操作は六種類存在するが，これらは以下の三種類に大別される．

最初の変更の種類は,「p は未決定」の状態から「p は受理されている」または「p は却下されている（$\neg p$ は受理されている）」状態への変更である．この変更は，元の信念集合 T に新たな論理文およびその論理的帰結を追加することで表現されるので，拡大 (expansion) と呼ばれている．

二番目の変更の種類は,「p は受理されている」または「p は却下されている」状態から,「p は未決定である」状態への変更である．この変更は，変更後の信念集合には論理文 p および $\neg p$ がどちらも含まれなくなるように T から論理文を取り除くことで表現されるので，縮小 (contraction) と呼ばれている．

三番目の変更の種類は,「p は受理されている」状態から「p は却下されている」状態，または「p は却下されている」状態から「p は受理されている」状態への変更である．この変更は，元の信念集合 T と矛盾する論理文 p を取り入れるために，T を「できるだけ少なく」変化させることで表現されるので，修正 (revision) と呼ばれている．この変更の結果，元の信念集合に含まれて

いた論理文が修正した後の信念集合にも含まれるとは限らないので，修正は信念集合の非単調な変化を表現している．

AGM の信念修正では，これらの操作は元の信念集合および論理文の対から新たな信念集合への関数であると仮定し，それぞれの操作が満たすべき性質をメタ論理的な公準として表現している．これらの操作は極小変化の原則 (the principle of minimal change) に基づいて行われる．極小変化の原則とは，元の信念集合に含まれる論理文は「可能な限り」信念修正の操作を行って得られる新たな信念集合にも含まれる，という考え方である．

拡大の公準

定義 2.2 信念集合 T を論理文 p に関して拡大した結果を T_p^+ と表す．任意の信念集合 $T \in \mathcal{T_L}$ および任意の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，拡大の操作は以下の公準 $(^+1)$～$(^+6)$ を満たす関数 $^+ : \mathcal{T_L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{T_L}$ である．

$(^+1)$ T_p^+ は信念集合．

$(^+2)$ $p \in T_p^+$.

$(^+3)$ $T \subseteq T_p^+$.

$(^+4)$ $p \in T$ ならば， $T_p^+ = T$.

$(^+5)$ $T \subseteq U$ ならば，$T_p^+ \subseteq U_p^+$.

$(^+6)$ すべての信念集合 T およびすべての論理文 p に対して，T_p^+ は公準 $(^+1)$ から $(^+5)$ を満たす最小の信念集合である．

本論文では，以下，公準 $(^+1)$ から $(^+6)$ を AGM の拡大の公準と呼ぶ．公準 $(^+1)$ から $(^+6)$ はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 $(^+1)$ は，信念集合 T を論理文 p で拡大した結果がまた信念集合となることを要請する．

公準 $(^+2)$ は，T を拡大した論理文 p が必ず T_p^+ に含まれることを要請する．

公準 $(^+3)$ は，T に含まれる論理文はすべて T_p^+ にも含まれることを要請する．

公準 $(^+4)$ は，p が T に既に含まれるならば，T を p に関して拡大しても何も変化しないことを要請する．

公準 $(^+5)$ は，拡大の操作に関して単調性が成り立つことを要請する．

公準 $(^+1)$ から $(^+5)$ を満たす関数は，以下の性質を満たすことが容易に示される．

$$q \in T_p^+ \text{ならば}, T_q^+ \subseteq T_p^+. \tag{2.32}$$

$$q \in T_p^+ \text{かつ} p \in T_q^+ \text{であるとき，かつそのときに限り} T_p^+ = T_q^+. \tag{2.33}$$

$$\vdash p \equiv q \text{ならば,} T_p^+ = T_q^+. \tag{2.34}$$

$$(T_p^+)_q^+ = T_{p\wedge q}^+. \tag{2.35}$$

$$(T_p^+)_q^+ = (T_q^+)_p^+. \tag{2.36}$$

$$\neg p \in T \text{ならば,} T_p^+ \text{は矛盾する.} \tag{2.37}$$

$$Cn(T \cup \{p\}) \subseteq T_p^+. \tag{2.38}$$

また，公準 $(^+6)$ は $T_p^+ \subseteq Cn(T \cup \{p\})$ を満たすことを要請する．よって，上記の性質から，以下の定理を得る．

定理 2.1 (Gärdenfors [13]) 関数 $^+$ が公準 $(^+1)$～$(^+6)$ を満たすことの必要十分条件は $T_p^+ = Cn(T \cup \{p\})$ である．

よって，拡大の操作は AGM の拡大の公準 $(^+1)$～$(^+6)$ によって唯一に定まる．本論文では，これ以降は拡大の操作を $T_p^+ = Cn(T \cup \{p\})$ と定義する．この定義から，以下の有用な性質が得られる．

$$(T \cap U)_p^+ = T_p^+ \cap U_p^+. \tag{2.39}$$

$$T_{p\vee q}^+ \subseteq T_p^+. \tag{2.40}$$

修正の公準

定義 2.3 信念集合 T を論理文 p に関して修正した結果を T_p^* と表す．任意の信念集合 $T \in \mathcal{T_L}$ および任意の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，修正の操作は以下の公準 $(^*1)$～$(^*8)$ を満たす関数 $^* : \mathcal{T_L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{T_L}$ である．

$(^*1)$ T_p^* は信念集合．

$(^*2)$ $p \in T_p^*$.

$(^*3)$ $T_p^* \subseteq T_p^+$.

$(^*4)$ $\neg p \notin T$ ならば，$T_p^+ \subseteq T_p^*$.

$(^*5)$ $\vdash \neg p$ であるとき，かつそのときに限り，T_p^* は矛盾する．

$(^*6)$ $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^* = T_q^*$.

$(^*7)$ $T_{p\wedge q}^* \subseteq (T_p^*)_q^+$.

(*8) $\neg q \notin T^*_p$ ならば，$(T^*_p)^+_q \subseteq T^*_{p\wedge q}$.

本論文では，以下，公準 (*1) から (*8) を AGM の修正の公準と呼ぶ．公準 (*1) から (*8) はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 (*1) は，信念集合 T を論理文 p で修正した結果 T^*_p が再び信念集合となることを要請する．

公準 (*2) は，T を修正した論理文 p が必ず T^*_p に含まれることを要請する．

公準 (*3) および (*4) は，論理文 p が信念集合 T と矛盾しない場合は，拡大および修正は同じ結果をもたらすことを要請する．よって，拡大の操作は論理文 p が信念集合 T と矛盾しない場合の修正の操作である．

公準 (*5) は，T を修正した論理文 p が矛盾していない限り，T^*_p が無矛盾であることを要請する．

公準 (*6) は，論理的に同値である論理文は修正によって同じ結果をもたらすことを要請する．

以上の公準 (*1) から (*6) は修正の基本的な性質を規程する公準である．公準 (*7) および (*8) は論理文 p および q の連言 $p \wedge q$ に関する修正の性質を規定する公準であり，極小変化の原則から，T を $p \wedge q$ に関して修正して得られる信念集合 $T^*_{p\wedge q}$ は，q が T^*_p と矛盾しない限り，T^*_p を q に関して拡大して得られる信念集合 $(T^*_p)^+_q$ と等しくなることを要請する．

AGM の修正の公準 (*1) から (*8) を満たす修正の操作は以下の性質を満たす．

$$q \in T^*_p \text{かつ} \ p \in T^*_q \text{であるとき，かつそのときに限り} \ T^*_p = T^*_q. \tag{2.41}$$

$$T^*_p \cap T^*_q \subseteq T^*_{p\vee q}. \tag{2.42}$$

$$\neg q \notin T^*_{p\vee q} \text{ならば}, T^*_{p\vee q} \subseteq T^*_q. \tag{2.43}$$

$$T^*_{p\vee q} = T^*_p \text{または} \ T^*_{p\vee q} = T^*_q \text{または} \ T^*_{p\vee q} = T^*_p \cap T^*_q. \tag{2.44}$$

縮小の公準

定義 2.4 信念集合 T を論理文 p に関して縮小した結果を T^-_p と表す．任意の信念集合 $T \in \mathcal{T_L}$ および任意の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，縮小の操作は以下の公準 ($^-$1)〜($^-$8) を満たす関数 $^- : \mathcal{T_L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{T_L}$ である．

($^-$1) T^-_p は信念集合．

($^-$2) $T^-_p \subseteq T$.

($^-$3) $p \notin T$ ならば，$T^-_p = T$.

($^-$4) $\nvdash p$ ならば，$p \notin T^-_p$.

($^-$5) $p \in T$ ならば，$T \subseteq (T^-_p)^+_p$.

$(^{-}6)$ $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^- = T_q^-$.

$(^{-}7)$ $T_p^- \cap T_q^- \subseteq T_{p\wedge q}^-$.

$(^{-}8)$ $p \notin T_{p\wedge q}^-$ ならば，$T_{p\wedge q}^- \subseteq T_p^-$.

本論文では，以下，公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}8)$ を AGM の縮小の公準と呼ぶ．公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}8)$ はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 $(^{-}1)$ は，信念集合 T を論理文 p で縮小した結果 T_p^- が再び信念集合となることを要請する．

公準 $(^{-}2)$ は，T に含まれていなかった論理文は T_p^- にも含まれないことを要請する．つまり，縮小によって新たに得られる情報は存在しない．

公準 $(^{-}3)$ は，論理文 p が信念集合 T に含まれない時は T を p で縮小しても何も変化しないことを要請する．

公準 $(^{-}4)$ は縮小が正常に行われる条件を表す．

公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}4)$ より，以下の性質が得られる．

$$p \in T \text{ ならば}, (T_p^-)_p^+ \subseteq T. \tag{2.45}$$

この性質は，まず最初に信念集合 T を論理文 p に関して縮小し，次に p で拡大して得られた信念集合は，元の信念集合 T に含まれることを表す．

公準 $(^{-}5)$ はこの性質の逆であり，極小変化の原則から，まず最初に信念集合 T を論理文 p に関して縮小し，次に p で拡大して得られた信念集合は，元の信念集合 T を含むことを要請する．

$(^{-}6)$ は，論理的に同値である論理文は縮小によって同じ結果をもたらすことを要請する．

以上の公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}6)$ は縮小の基本的な性質を規程する公準である．公準 $(^{-}7)$ および $(^{-}8)$ は信念集合 T の連言 $p \wedge q$ に関する縮小の性質を規定する公準であり，$T_{p\wedge q}^-$ および T_p^- の関係を示している．

公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}8)$ を満たす縮小の操作は，以下の性質を満たす．

$$T_{p\wedge q}^- = T_p^- \text{ または } T_{p\wedge q}^- = T_q^- \text{ または } T_{p\wedge q}^- = T_p^- \cap T_q^-. \tag{2.46}$$

$$q \to p \in T_p^- \text{ かつ } p \to q \in T_q^- \text{ ならば}, T_p^- = T_q^-. \tag{2.47}$$

拡大の操作が AGM の拡大の公準 $(^{+}1)$ から $(^{+}6)$ によって一意に決定されるのに対して，修正および縮小はそれぞれ AGM の修正の公準 $(^{*}1)$ から $(^{*}8)$ および AGM の縮小の公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}8)$ だけでは一意に決定できない [13]．与えられた信念集合 T および任意の論理文 p に対して，修正の操作および縮小の操作を構成する方法は，様々な選好関係 (preference relation) に基づいて定

義される．主な選好関係として，epistemic entrenchment [9, 13, 14]，systems of spheres [16, 32] および ordinal conditional functions [35, 37] などが知られている．

修正および縮小の相互関係

修正の操作および縮小の操作の関係として，以下の Levi 同一性および Harper 同一性が知られている．

$$\text{Levi 同一性} \quad T_p^* \;=\; (T_{\neg p}^-)_p^+. \tag{2.48}$$

$$\text{Harper 同一性} \quad T_p^- \;=\; T \cap T_{\neg p}^*. \tag{2.49}$$

以下の定理 2.2 および定理 2.3 は，Levi 同一性は縮小関数のクラスから修正関数のクラスへの写像であることを示す．

定理 2.2 (Gärdenfors [13]) 縮小関数 $^-$ が AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$4) および ($^-$6) を満たすとする．このとき，Levi 同一性に基づいて $^-$ から構成した関数 * は AGM の修正の公準 (*1) から (*4) および (*6) を満たす．

この定理では，($^-$5) は使用されていない．

定理 2.3 (Gärdenfors [13]) 縮小関数 $^-$ が AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$6) を満たすとする．このとき，$^-$ がそれぞれ公準 ($^-$7) および ($^-$8) を満たすならば，Levi 同一性に基づいて $^-$ から構成した関数 * はそれぞれ AGM の修正の公準 (*7) および (*8) を満たす．

また，定理 2.4 は，Harper 同一性は修正関数のクラスから縮小関数のクラスへの写像であることを示す．

定理 2.4 (Gärdenfors [13]) 修正関数 * が AGM の修正の公準 (*1) から (*6) を満たすとする．このとき，Harper 同一性に基づいて * から構成した関数 $^-$ は AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$6) を満たす．更に，* がそれぞれ公準 (*7) および (*8) を満たすならば，上で構成した $^-$ はそれぞれ AGM の縮小の公準 ($^-$7) および ($^-$8) を満たす．

更に，命題 2.1 は，Levi 同一性および Harper 同一性を合成して得られる写像は恒等写像であることを示す．

命題 2.1 (Gärdenfors [13]) 修正関数 ^{*_1} が AGM の修正の公準 (*1) から (*8) を満たすとする．このとき，Harper 同一性に基づいて ^{*_1} から構成した縮小関数を $^-$，Levi 同一性に基づいて $^-$ から構成した修正関数を ^{*_2} とすると，^{*_2} は ^{*_1} と等しい．

逆に，縮小関数 $^{-_1}$ が AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$8) を満たすとする．このとき，Levi 同一性に基づいて $^{-_1}$ から構成した修正関数を *，Harper 同一性に基づいて * から構成した縮小関数を $^{-_2}$ とすると，$^{-_2}$ は $^{-_1}$ と等しい．

定理 2.2 から定理 2.4 および命題 2.1 から，AGM の修正の公準 (*1) から (*8) を満たす修正関数，および AGM の縮小の公準 (⁻1) から (⁻8) を満たす縮小関数は，Levi 同一性および Harper 同一性に基づいて相互に定義することができる．

2.3.3 信念更新

Katsuno and Mendelzon [19] は信念修正および信念更新の相違点について論じ，それぞれ更新 (update) の操作および消去 (erasure) の操作を特徴づける公準を提案し，更に意味論的な特徴づけを行った．Katsuno and Mendelzon によると，修正は新たに得た情報が知識ベースと矛盾する場合に，これを解消する操作であるのに対して，更新は世界の動的な変化を知識ベースに反映させる操作である．

Katsuno and Mendelzon の更新の公準

Katsuno and Mendelzon の定式化では，知識ベースは有限な命題論理の言語 $\mathcal{L}$ の論理文として表される．また，更新および消去の操作は $\mathcal{L}$ 上の演算子として表される．

ここで，Katsuno and Mendelzon の公準で使用されるいくつかの用語および記号を定義する．解釈とは，論理文に真または偽の真理値を与える関数である．論理文 p のモデルとは，p を真とする解釈である．p が充足可能とは，p のモデルが存在することである．p のモデルの集合を $\|p\|$ と表す．p がすべての解釈で真であるとき，p は恒真文であるといい，$\models p$ と表す．また，p のモデルで論理文 q が真となることを $p \models q$ と表す．

Katsuno and Mendelzon の更新演算子 $\diamond_{KM}$ は以下のように定義される．

定義 2.5 知識ベースを表す論理文 ψ を論理文 p に関して更新した結果を $\psi\diamond_{KM}p$ と表す．任意の論理文 $\psi, p, q \in \mathcal{L}$ に対して，更新演算子 $\diamond_{KM}$ は以下の公準に基づいて特徴づけられる．

$(U1)$ $\psi\diamond_{KM}p \models p$.

$(U2)$ $\psi \models p$ ならば，$\psi\diamond_{KM}p \equiv \psi$.

$(U3)$ ψ および p が共に充足可能ならば，$\psi\diamond_{KM}p$ も充足可能である．

$(U4)$ $\psi_1 \equiv \psi_2$ かつ $p \equiv q$ ならば，$\psi_1\diamond_{KM}p \equiv \psi_2\diamond_{KM}q$.

$(U5)$ $(\psi\diamond_{KM}p) \wedge q \models \psi\diamond_{KM}(p \wedge q)$.

$(U6)$ $\psi\diamond_{KM}p \models q$ かつ $\psi\diamond_{KM}q \models p$ ならば，$\psi\diamond_{KM}p \equiv \psi\diamond_{KM}q$.

$(U7)$ ψ が完全ならば，$(\psi\diamond_{KM}p) \wedge (\psi\diamond_{KM}q) \models \psi\diamond_{KM}(p \vee q)$.

$(U8)$ $(\psi_1 \vee \psi_2)\diamond_{KM}p \equiv (\psi_1\diamond_{KM}p) \vee (\psi_2\diamond_{KM}p)$.

本論文では，以下，公準 $(U1)$ から $(U8)$ を Katsuno and Mendelzon の更新の公準と呼ぶ．公準 $(U1)$ から $(U8)$ はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 $(U1)$ は，知識ベース ψ を更新した論理文 p が必ず $\psi \diamond_{KM} p$ のモデルで真となることを要請する．

公準 $(U2)$ は，ψ のモデルで p が真である場合は，ψ の p に関する更新は何も変化をもたらさないことを要請する．

公準 $(U3)$ は更新が正常に行われる条件を表す．

公準 $(U4)$ は，更新の結果は知識ベースおよび得られた情報の構文的な形式には依存しないことを要請する．

公準 $(U5)$ は，ψ の p に関する更新のモデルであり，かつ q のモデルでもある解釈は，ψ の $p \wedge q$ に関する更新のモデルになることを要請する．

公準 $(U6)$ は，ψ の p に関する更新のモデルが q のモデルであり，かつ ψ の q に関する更新のモデルが p のモデルであるならば，p に関する更新および q に関する更新は同じ結果をもたらすことを要請する．

公準 $(U7)$ は，ψ のモデルとなる解釈がただ一つ存在するならば，ψ の p に関する更新のモデルであり，かつ ψ の q に関する更新のモデルでもある解釈が，ψ の $p \vee q$ に関する更新のモデルとなることを要請する．

公準 $(U8)$ は，ψ に対して更新を行う場合に，ψ のモデルとなる解釈はそれぞれ個別に扱われることを要請する．

Katsuno and Mendelzon の更新の意味論的特徴づけ

本節では，Katsuno and Mendelzon [19] による更新演算子の意味論的特徴づけについて述べる．この特徴づけは Possible Models Approach [39, 40] の一般化である．

言語 $\mathcal{L}$ のすべての解釈の集合を $\mathcal{I}$ と表す．$\mathcal{I}$ 上の半擬順序 (partial pre-order)$\preceq$ とは，$\mathcal{I}$ 上の反射的かつ推移的な二項関係である．解釈 $I, J \in \mathcal{I}$ に対して，$I \preceq J$ かつ $J \not\preceq I$ であるとき，かつそのときに限り $I \prec J$ と表す．faithful assignment とは，それぞれの解釈 I に対して半擬順序 $\preceq_I$ を割り当てる関数で，以下の条件を満たすものである．

$$\text{任意の解釈 } J \text{ に対して}, I \neq J \text{ ならば } I \prec_I J. \tag{2.50}$$

すなわち，faithful assignment は，それぞれの解釈 I に対して I が最小となる半擬順序 $\preceq_I$ を割り当てる関数である．

任意の解釈の集合 $\mathcal{M}$ に対して，解釈 I が $\mathcal{M}$ において半擬順序 $\preceq$ に関して極小であるとは，$I \in \mathcal{M}$ であり，かつ $J \prec I$ となる $J \in \mathcal{M}$ が存在しないことである．$\mathcal{M}$ において半擬順序 $\preceq$ に関して極小となるすべての解釈の集合を $\min(\mathcal{M}, \preceq)$ と表す．

以下の定理 2.5 は，Katsuno and Mendelzon の更新の公準を満たす演算子は $\mathcal{I}$ 上の半擬順序のクラスに基づいて特徴づけられることを示す．

定理 2.5 (Katsuno and Mendelzon[19]) $\Diamond_{KM}$ を更新演算子とする．このとき，以下の条件は同値である．

1. $\Diamond_{KM}$ が Katsuno and Mendelzon の更新の公準 $(U1)$ から $(U8)$ を満たす．

2. それぞれの解釈 I に半擬順序 $\preceq_I$ を割り当てる faithful assignment が存在して，

$$\|\psi\Diamond_{KM}p\| = \bigcup_{I\in\|\psi\|} \min(\|p\|, \preceq_I) \tag{2.51}$$

が成り立つ．

Katsuno and Mendelzon [19] は以下の公準 $(U9)$ も提案している．

$(U9)$ ψ が完全であり，かつ $(\psi\Diamond_{KM}p)\wedge q$ が充足可能ならば，$\psi\Diamond_{KM}(p\wedge q)\models(\psi\Diamond_{KM}p)\wedge q$.

Katsuno and Mendelzon の更新の公準 $(U6)$ および $(U7)$ を公準 $(U9)$ で置き換えると，公準 $(U1)$ から $(U5)$，$(U8)$ および $(U9)$ を満たす更新演算子は，$\mathcal{I}$ 上の全擬順序 (total pre-order) のクラスに基づいて特徴づけられることが示されている [19]．ここで，$\mathcal{I}$ 上の全擬順序 $\preceq$ とは，任意の解釈 $I, J\in\mathcal{I}$ に対して，$I\preceq J$ または $J\preceq I$ の少なくとも一方が成り立つ半擬順序である．

Katsuno and Mendelzon の消去の公準

Katsuno and Mendelzon [19] は，更新の操作に対応する消去の操作を提案している．Katsuno and Mendelzon によると，消去の操作は縮小の操作の類推であり，世界の動的な変化を反映して知識ベースに含まれる情報の一部を失う操作である．

知識ベースを表す論理文 ψ を論理文 p に関して消去した結果を $\psi\blacklozenge_{KM}p$ と表す．消去演算子 $\blacklozenge_{KM}$ は以下の $(U\to E)$ 同一性に基づいて更新演算子 $\Diamond_{KM}$ から定義される．

$$(U\to E)\text{ 同一性}\quad \psi\blacklozenge_{KM}p\equiv\psi\vee(\psi\Diamond_{KM}\neg p). \tag{2.52}$$

更新演算子 $\Diamond_{KM}$ が Katsuno and Mendelzon の更新の公準 $(U1)$ から $(U4)$ および $(U8)$ を満たすならば，$(U\to E)$ 同一性に基づいて $\Diamond_{KM}$ から定義された消去演算子 $\blacklozenge_{KM}$ は任意の $\psi, p, q\in\mathcal{L}$ に対して以下の公準を満たす．

$(E1)$ $\psi\models\psi\blacklozenge_{KM}p$.

$(E2)$ $\psi\models\neg p$ ならば，$\psi\blacklozenge_{KM}p\equiv\psi$.

$(E3)$ ψ が充足可能であり，かつ $\not\models p$ ならば，$\psi\blacklozenge_{KM}p\not\models p$.

$(E4)$ $\psi_1\equiv\psi_2$ かつ $p_1\equiv p_2$ ならば，$\psi_1\blacklozenge_{KM}p_1\equiv\psi_2\blacklozenge_{KM}p_2$.

$(E5)$ $(\psi\blacklozenge_{KM}p)\wedge p\models\psi$.

$(E8)$ $(\psi_1 \vee \psi_2) \blacklozenge_{KM} p \equiv (\psi_1 \blacklozenge_{KM} p) \vee (\psi_2 \blacklozenge_{KM} p)$.

本論文では，以下，公準 $(E1)$ から $(E5)$ および $(E8)$ を Katsuno and Mendelzon の消去の公準と呼ぶ．公準 $(E1)$ から $(E8)$ および $(E8)$ はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 $(E1)$ は，知識ベース ψ のモデルは必ず $\psi \blacklozenge_{KM} p$ のモデルとなることを要請する．すなわち，消去によって新たに得られる情報は存在しない．

公準 $(E2)$ は，ψ のモデルで $\neg p$ が真である場合は，ψ の p に関する消去は何も変化をもたらさないことを要請する．

公準 $(E3)$ は消去が正常に行われる条件を表す．

公準 $(E4)$ は，消去の結果は知識ベースおよび失われる情報の構文的な形式には依存しないことを要請する．

公準 $(E5)$ は，まず ψ を p に関して消去し，次に p に関して拡大して得られる論理文のモデルは，ψ のモデルとなることを要請する．

公準 $(E8)$ は，ψ に対して消去を行う場合に，ψ のモデルとなる解釈はそれぞれ個別に扱われることを要請する．

Katsuno and Mendelzon は，更新演算子および消去演算子の関係として，以下の定理を示している．

定理 2.6 (Katsuno and Mendelzon [19])

1. 消去演算子 $\blacklozenge_{KM}$ が公準 $(E1)$ から $(E4)$ および $(E8)$ を満たすならば，以下の同一性:

$$(E \to U) \text{ 同一性} \quad \psi \Diamond_{KM} p \equiv (\psi \blacklozenge_{KM} \neg p) \wedge p \tag{2.53}$$

   に基づいて $\blacklozenge_{KM}$ から定義された演算子 $\Diamond_{KM}$ は公準 $(U1)$ から $(U4)$ および $(U8)$ を満たす．

2. 更新演算子 $\Diamond_{KM}$ が公準 $(U1)$ から $(U4)$ および $(U8)$ を満たすとする．また，$\blacklozenge_{KM}$ を $(U \to E)$ 同一性に基づいて $\Diamond_{KM}$ から定義された消去演算子とする．このとき，$(E \to U)$ 同一性に基づいて $\blacklozenge_{KM}$ から定義された演算子は $\Diamond_{KM}$ と等しい．

3. 消去演算子 $\blacklozenge_{KM}$ が公準 $(E1)$ から $(E4)$ および $(E8)$ を満たすとする．また，$\Diamond_{KM}$ を $(E \to U)$ 同一性に基づいて $\blacklozenge_{KM}$ から定義された演算子とする．このとき，$(U \to E)$ 同一性に基づいて $\Diamond_{KM}$ から定義された消去演算子は $\blacklozenge_{KM}$ と等しい．

定理 2.6 は，Katsuno and Mendelzon の消去の公準 $(E1)$ から $(E4)$ および $(E8)$ を満たす消去演算子 $\blacklozenge_{KM}$ に対して，$(E \to U)$ 同一性に基づいて $\blacklozenge_{KM}$ から定義された演算子 $\Diamond_{KM}$ が，Katsuno and Mendelzon の更新の公準の一部である公準 $(U1)$ から $(U4)$ および $(U8)$ を満たすことを保証している．しかし，$\Diamond_{KM}$ が公準 $(U5)$ から $(U7)$ を満たすことは保証していない．そのため，定理 2.6 は，更新演算子および消去演算子の相互定義可能性を保証しない．

2.3.4 修正および更新の関係

Peppas and Williams [33] は，Katsuno and Mendelzon [19] の更新の公準を再定式化し，修正の操作および更新の操作の関係を示した．Peppas and Williams の定式化では知識ベースは信念集合で表現されており，更新の操作は以下のように定義される．

定義 2.6 信念集合 T を論理文 p に関して更新した結果を $T_p^{\diamond}$ と表す．任意の信念集合 $T \in \mathcal{T_L}$ および任意の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，更新の操作は以下の公準 $(^{\diamond}1)$〜$(^{\diamond}8)$ を満たす関数 $^{\diamond} : \mathcal{T_L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{T_L}$ である．

$(^{\diamond}1)$ $T_p^{\diamond}$ は信念集合．

$(^{\diamond}2)$ $p \in T_p^{\diamond}$.

$(^{\diamond}3)$ $p \in T$ ならば，$T_p^{\diamond} = T$.

$(^{\diamond}4)$ T が矛盾するか，または $\vdash \neg p$ であるとき，かつそのときに限り，$T_p^{\diamond}$ が矛盾する．

$(^{\diamond}5)$ $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^{\diamond} = T_q^{\diamond}$.

$(^{\diamond}6)$ $T_{p \wedge q}^{\diamond} \subseteq (T_p^{\diamond})_q^+$.

$(^{\diamond}7)$ T が完全であり，かつ $\neg q \notin T_p^{\diamond}$ ならば，$(T_p^{\diamond})_q^+ \subseteq T_{p \wedge q}^{\diamond}$.

$(^{\diamond}8)$ T が無矛盾ならば，$T_p^{\diamond} = \bigcap_{K \in [T]} K_p^{\diamond}$.

本論文では，以下，公準 $(^{\diamond}1)$ から $(^{\diamond}8)$ を単に，更新の公準と呼ぶ．公準 $(^{\diamond}1)$ から $(^{\diamond}8)$ はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 $(^{\diamond}1)$ は，信念集合 T を論理文 p で更新した結果 $T_p^{\diamond}$ が再び信念集合となることを要請する．

公準 $(^{\diamond}2)$ は Katsuno and Mendelzon の更新の公準 $(U1)$ に対応しており，T を更新した論理文 p が必ず $T_p^{\diamond}$ に含まれることを要請する．

公準 $(^{\diamond}3)$ は公準 $(U2)$ に対応しており，論理文 p が信念集合 T に既に含まれる場合は，T の p に関する更新は何も変化をもたらさないことを要請する．

公準 $(^{\diamond}4)$ は公準 $(U3)$ に対応しており，更新した結果が矛盾する条件を表す．

公準 $(^{\diamond}5)$ は公準 $(U4)$ に対応しており，論理的に同値である論理文は更新によって同じ結果をもたらすことを要請する．

公準 $(^{\diamond}6)$ は公準 $(U5)$ に対応しており，信念集合 T を連言 $p \wedge q$ に関して更新した結果は，$T_p^{\diamond}$ を q に関して拡大して得られる信念集合に含まれることを要請する．

公準 $(^{\diamond}7)$ は公準 $(U9)$ に対応しており，T が完全である場合に限り，q が $T_p^{\diamond}$ と矛盾しないならば，T を $p \wedge q$ に関して更新した結果は，$T_p^{\diamond}$ を q に関して拡大して得られる信念集合を含むことを要請する．

公準 ($\diamond$8) は公準 (U8) に対応しており，T が無矛盾な信念集合ならば，T を含むすべての無矛盾で完全な信念集合の集合族 $[T]$ に対して，$K \in [T]$ となる無矛盾で完全な信念集合 K はそれぞれ個別に扱われることを要請する．

Peppas and Williams は，修正の操作および更新の操作の関係として以下の Winslett 同一性を提案している．

$$\text{Winslett 同一性} \quad T_p^{\diamond} = \begin{cases} \bigcap_{K \in [T]} K_p^*, & T \text{ が無矛盾の場合,} \\ \mathcal{L}, & \text{その他.} \end{cases} \tag{2.54}$$

以下の定理 2.7 は，Winslett 同一性は修正関数のクラスから更新関数のクラスへの写像であることを示す．

定理 2.7 (Peppas and Williams[33]) 修正関数 $*$ が AGM の修正の公準 ($*$1) から ($*$8) を満たすならば，Winslett 同一性に基づいて $*$ から構成した関数 $\diamond$ は更新の公準 ($\diamond$1) から ($\diamond$8) を満たす．

また，定理 2.8 は，Winslett 同一性は修正関数のクラスから更新関数のクラスへの全射であることを示す．

定理 2.8 (Peppas and Williams [33]) 更新の公準 ($\diamond$1) から ($\diamond$8) を満たすすべての更新関数 $\diamond$ に対して，Winslett 同一性に基づいて $\diamond$ を定義する修正関数 $*$ が存在する．

第3章

信念変更の相互関係

本章では，AGM の信念修正 [1, 13, 14] および Katsuno and Mendelzon [19] の信念更新の相互関係を明らかにする．まず，Katsuno and Mendelzon が提案した消去の公準の不十分な点を指摘し解消すると共に，消去の公準を再定式化する．次に，更新の操作から消去の操作を構成する同一性，および消去の操作から更新の操作を構成する同一性をそれぞれ提案し，更新の操作および再定式化した公準に基づく消去の操作は相互に定義することができることを証明する．更に，信念修正を行う操作および信念更新を行う操作の関係を表す新たな同一性を提案し，信念変更の操作の相互関係を明らかにする．

3.1 信念更新の問題点

Katsuno and Mendelzon [19] が提案した信念更新には，二つの問題点がある．

1. 更新演算子および消去演算子の相互定義が保証されていない．

2. 極小変化の原則を規定する公準が不足している．

Katsuno and Mendelzon [19] が提案した更新演算子および消去演算子は相互定義が保証されていない．これは，Katsuno and Mendelzon の更新の公準 $(U5)$ から $(U7)$ に対応する消去の公準が存在しないためである．特に，公準 $(U5)$ は二つの論理文 p および q の連言 $p \wedge q$ に関して更新する場合の性質を規定しており，更新の操作に関する極小変化の原則を表現する．そのため，Katsuno and Mendelzon [19] が提案した消去の公準は，極小変化の原則を表現する公準が不足していると考えられる．

知識ベースから二つの論理文 p および q の連言 $p \wedge q$ を消去する場合には，極小変化の原則より，可能な限り p か q のどちらか一方だけを取り除くことが望ましい．ところが，Katsuno and Mendelzon の消去の公準では，$p \wedge q$ を消去する場合についてはまったく規程されていない．AGM の縮小の公準では，信念集合 T を $p \wedge q$ に関して縮小する場合の動作は公準 $(^{-}7)$ および $(^{-}8)$ で

規程されている．そこで，AGM の縮小の公準 $(^{-}7)$ および $(^{-}8)$ の類推として，$p \wedge q$ を消去する場合の性質を規程する公準を追加する．

また，Peppas and Williams [33] は修正の操作および更新の操作の関係を示したが，消去の操作については扱っていないので，Peppas and Williams の定式化では信念修正および信念更新を統一的に扱っているとは言い難い．そのため，次節以降では，Katsuno and Mendelzon の消去の公準を再定式化し，修正，縮小および Peppas and Williams が再定式化した更新との関係を明らかにする．

3.2 消去の公準の再定式化

本節では，Katsuno and Mendelzon が提案した消去の公準の不十分な点を解消すると共に，消去の公準を再定式化し，その性質について考察する．

3.2.1 消去の公準

Katsuno and Mendelzon の消去の公準を再定式化する．再定式化した消去の公準では，知識ベースを信念集合 T で表す．また，消去の操作を元の信念集合および論理文の対から新たな信念集合への関数として表現する．

定義 3.1 信念集合 T を論理文 p に関して消去した結果を $T_p^{\blacklozenge}$ と表す．任意の信念集合 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ および任意の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，消去の操作は以下の公準 $(^{\blacklozenge}1)$~$(^{\blacklozenge}9)$ を満たす関数 $^{\blacklozenge} : \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{L} \to \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ である．

$(^{\blacklozenge}1)$ $T_p^{\blacklozenge}$ は信念集合．

$(^{\blacklozenge}2)$ $T_p^{\blacklozenge} \subseteq T$.

$(^{\blacklozenge}3)$ $\neg p \in T$ ならば，$T_p^{\blacklozenge} = T$.

$(^{\blacklozenge}4)$ T が無矛盾であり，かつ $\not\vdash p$ ならば，$p \notin T_p^{\blacklozenge}$.

$(^{\blacklozenge}5)$ $T \subseteq (T_p^{\blacklozenge})_p^{+}$.

$(^{\blacklozenge}6)$ $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^{\blacklozenge} = T_q^{\blacklozenge}$.

$(^{\blacklozenge}7)$ $T_p^{\blacklozenge} \cap T_q^{\blacklozenge} \subseteq T_{p\wedge q}^{\blacklozenge}$.

$(^{\blacklozenge}8)$ T が完全であり，かつ $p \notin T_{p\wedge q}^{\blacklozenge}$ ならば，$T_{p\wedge q}^{\blacklozenge} \subseteq T_p^{\blacklozenge}$.

$(^{\blacklozenge}9)$ T が無矛盾ならば，$T_p^{\blacklozenge} = \bigcap_{K\in[T]} K_p^{\blacklozenge}$.

本論文では，以下，公準 $(^{\blacklozenge}1)$ から $(^{\blacklozenge}9)$ を単に，消去の公準と呼ぶ．

3.2.2 消去の公準の意味および性質

本節では，消去の公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}9$) の意味を説明し，これらの公準から導かれる性質について論じる．

消去の公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}9$) はそれぞれ以下の意味を持つ．

公準 ($^{\blacklozenge}1$) は信念集合 T を論理文 p で消去した結果 $T_p^{\blacklozenge}$ が再び信念集合となることを要請する．

公準 ($^{\blacklozenge}2$) は Katsuno and Mendelzon の消去の公準 ($E1$) に対応しており，T に含まれていなかった論理文は $T_p^{\blacklozenge}$ にも含まれないことを要請する．つまり，消去によって新たに得られる情報は存在しない．

公準 ($^{\blacklozenge}3$) は公準 ($E2$) に対応しており，論理文 $\neg p$ が信念集合 T に含まれる時は T を論理文 p で消去しても何も変化しないことを要請する．ここで，公準 ($^{\blacklozenge}3$) は AGM の縮小の公準 ($^{-}3$) より弱い公準である．公準 ($^{-}3$) は，$p \notin T$ ならば T を p で縮小しても信念集合は変化しないことを要請する．これに対し，公準 ($^{\blacklozenge}3$) は $\neg p \in T$ を前提としており，たとえ $p \notin T$ であっても $\neg p \notin T$ ならば，消去した結果の信念集合 $T_p^{\blacklozenge}$ は T と異なる場合がある．

公準 ($^{\blacklozenge}4$) は公準 ($E3$) に対応しており，消去が正常に行われる条件を表す．

公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}4$) に基づいて，消去が正常に行われなくなる条件が導かれる．

命題 3.1 消去関数 $^{\blacklozenge}$ が公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}4$) を満たすとする．このとき，$p \in T_p^{\blacklozenge}$ であることの必要十分条件は，T が矛盾するか，または $\vdash p$ が成り立つことである．

また，公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}4$) および拡大関数の性質から，以下の命題 3.2 が得られる．

命題 3.2 消去関数 $^{\blacklozenge}$ が公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}4$) を満たすとする．このとき，$p \in T$ ならば，$(T_p^{\blacklozenge})_p^{+} \subseteq T$．

命題 3.2 は，まず最初に信念集合 T を論理文 p で消去し，次に p で拡大して得られた信念集合は，元の信念集合 T に含まれることを表す．極小変化の原則から，$T_p^{\blacklozenge}$ は「できるだけ大きい」T の部分集合であるべきである．また，拡大関数の公準 ($^{+}6$) から，$(T_p^{\blacklozenge})_p^{+}$ は「できるだけ小さい」集合となる．よって，最初に T を p で消去し，次に p で拡大して得られた信念集合は元の理論 T と等しくなるべきである．

公準 ($^{\blacklozenge}5$) は公準 ($E5$) に対応しており，上記の性質の逆，すなわち最初に T を p で消去し，次に p で拡大して得られた信念集合は，元の信念集合 T を含むことを要請する．

よって，命題 3.2 および公準 ($^{\blacklozenge}5$) からの自明な帰結として，以下の消去関数の復元性が得られる．

命題 3.3 消去関数 $^{\blacklozenge}$ が公準 ($^{\blacklozenge}1$) から ($^{\blacklozenge}5$) を満たすとする．このとき，$p \in T$ ならば $T = (T_p^{\blacklozenge})_p^{+}$．

公準 ($^{\blacklozenge}6$) は公準 ($E4$) に対応しており，論理的に同値である論理文は消去によって同じ結果をもたらすことを要請する．

公準 $(^\blacklozenge 9)$ は公準 $(E8)$ に対応しており，T が無矛盾な信念集合ならば，T を含むすべての無矛盾で完全な信念集合の集合族 $[T]$ に対して，$K \in [T]$ となる無矛盾で完全な信念集合 K はそれぞれ個別に扱われることを要請する．

公準 $(^\blacklozenge 9)$ から導かれる興味深い性質として，消去関数の単調性が挙げられる．

命題 3.4 (消去の単調性) 消去関数 $^\blacklozenge$ が公準 $(^\blacklozenge 9)$ を満たすとする．このとき，任意の信念集合 $T, U \in \mathcal{T}_\mathcal{L}$ に対して，$T \subseteq U$ ならば $T^\blacklozenge_p \subseteq U^\blacklozenge_p$．

単調性は AGM の縮小の公準 $(^-1)$ から $(^-8)$ と矛盾することが示されている [13].

知識ベースから二つの論理文 p および q の連言 $p \wedge q$ を消去する場合には，極小変化の原則より，可能な限り p か q のどちらか一方だけを取り除くことが望ましい．ところが，Katsuno and Mendelzon の消去の公準では，$p \wedge q$ を消去する場合についてはまったく規程されていない．AGM の縮小の公準では，信念集合 T を $p \wedge q$ に関して縮小する場合の動作は公準 $(^-7)$ および $(^-8)$ で規程されている．そこで，AGM の縮小の公準 $(^-7)$ および $(^-8)$ の類推として，$p \wedge q$ を消去する場合の性質を規程する公準を追加する．

二つの公準 $(^\blacklozenge 7)$ および $(^\blacklozenge 8)$ は新たに追加された公準であり，Katsuno and Mendelzon の消去の公準の不備を補うものである．公準 $(^\blacklozenge 7)$ は，信念集合 T を論理文 p に関して消去した結果 $T^\blacklozenge_p$ に含まれ，かつ T を論理文 q に関して消去した結果 $T^\blacklozenge_q$ にも含まれる論理文は，T を連言 $p \wedge q$ に関して消去した結果 $T^\blacklozenge_{p\wedge q}$ にも含まれることを要請する．また，公準 $(^\blacklozenge 8)$ は無矛盾で完全な信念集合 T を論理文 $p \wedge q$ に関して消去した結果，論理文 p が取り除かれるならば，$T^\blacklozenge_{p\wedge q}$ に含まれる論理文は必ず $T^\blacklozenge_p$ に含まれることを要請する．

3.3 更新および消去の関係

本節では，消去の操作および更新の操作の関係を表現する二つの同一性を提案し，前節で定式化した消去の公準 $(^\blacklozenge 1)$ から $(^\blacklozenge 9)$ を満たす消去の操作，および Peppas and Williams が定式化した更新の操作は，これらの同一性に基づいて相互に定義可能であることを証明する．

定義 3.2 消去の操作から更新の操作への同一性を

$$\text{(EtoU) 同一性} \quad T^\diamond_p = (T^\blacklozenge_{\neg p})^+_p \tag{3.1}$$

で，更新の操作から消去の操作への同一性を

$$\text{(UtoE) 同一性} \quad T^\blacklozenge_p = T \cap T^\diamond_{\neg p} \tag{3.2}$$

で定義する．

(EtoU) 同一性は修正関数および縮小関数の関係における Levi 同一性に相当する同一性である．同様に，(UtoE) 同一性は Harper 同一性に相当する同一性である．

以下の定理 3.1 および定理 3.2 は，(EtoU) 同一性は消去の公準 $(\blacklozenge 1)$ から $(\blacklozenge 9)$ を満たす消去関数のクラスから更新の公準 $(\lozenge 1)$ から $(\lozenge 8)$ を満たす更新関数のクラスへの写像であることを示す．

定理 3.1 消去関数 $\blacklozenge$ が消去の公準 $(\blacklozenge 1)$ から $(\blacklozenge 4)$，$(\blacklozenge 6)$ および $(\blacklozenge 9)$ を満たすとする．このとき，(EtoU) 同一性に基づいて $\blacklozenge$ から構成した関数 $\lozenge$ は更新の公準 $(\lozenge 1)$ から $(\lozenge 5)$ および $(\lozenge 8)$ を満たす．

この証明の中で，公準 $(\blacklozenge 5)$ は使用されていない．

定理 3.2 消去関数 $\blacklozenge$ が消去の公準 $(\blacklozenge 1)$ から $(\blacklozenge 6)$ および $(\blacklozenge 9)$ を満たすとする．このとき，(EtoU) 同一性に基づいて $\blacklozenge$ から構成した関数 $\lozenge$ に対して，

1. $\blacklozenge$ が消去の公準 $(\blacklozenge 7)$ を満たすならば，$\lozenge$ は更新の公準 $(\lozenge 6)$ を満たす．

2. $\blacklozenge$ が消去の公準 $(\blacklozenge 8)$ を満たすならば，$\lozenge$ は更新の公準 $(\lozenge 7)$ を満たす．

定理 3.1 とは異なり，この定理では公準 $(\blacklozenge 5)$ が使用されている．

定理 3.1 および定理 3.2 から，(EtoU) 同一性は消去の操作から更新の操作を構成する一つの方法を表す．

また，以下の定理 3.3 および定理 3.4 は，(UtoE) 同一性は更新の公準 $(\lozenge 1)$ から $(\lozenge 8)$ を満たす更新関数のクラスから消去の公準 $(\blacklozenge 1)$ から $(\blacklozenge 9)$ を満たす消去関数のクラスへの写像であることを示す．

定理 3.3 更新関数 $\lozenge$ が更新の公準 $(\lozenge 1)$ から $(\lozenge 5)$ および $(\lozenge 8)$ を満たすとする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて $\lozenge$ から構成した関数 $\blacklozenge$ は消去の公準 $(\blacklozenge 1)$ から $(\blacklozenge 6)$ および $(\blacklozenge 9)$ を満たす．

定理 3.4 更新関数 $\lozenge$ が更新の公準 $(\lozenge 1)$ から $(\lozenge 5)$ および $(\lozenge 8)$ を満たすとする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて $\lozenge$ から構成した関数 $\blacklozenge$ に対して，

1. $\lozenge$ が更新の公準 $(\lozenge 6)$ を満たすならば，$\blacklozenge$ は消去の公準 $(\blacklozenge 7)$ を満たす．

2. $\lozenge$ が更新の公準 $(\lozenge 7)$ を満たすならば，$\blacklozenge$ は消去の公準 $(\blacklozenge 8)$ を満たす．

定理 3.3 および定理 3.4 から，(UtoE) 同一性は更新の操作から消去の操作を構成する一つの方法を表す．

命題 3.5 $\blacklozenge_1$ をある消去関数，$\lozenge$ を (EtoU) 同一性に基づいて $\blacklozenge_1$ から構成した更新関数とする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて $\lozenge$ から構成した消去関数 $\blacklozenge_2$ は $\blacklozenge_1$ と等しい．

定理 3.1 とは異なり，この証明の中では公準 $(\blacklozenge 5)$ が使用されている．

命題 3.6 $\diamond_1$ をある更新関数，$\blacklozenge$ を (UtoE) 同一性に基づいて $\diamond_1$ から構成した消去関数とする．このとき，(EtoU) 同一性に基づいて $\blacklozenge$ から構成した更新関数 $\diamond_2$ は $\diamond_1$ と等しい．

命題3.5および命題3.6から，(UtoE) 同一性および (EtoU) 同一性を合成して得られる写像は恒等写像となる．よって，消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす消去関数のクラス，および更新の公準 ($\diamond$1) から ($\diamond$8) を満たす更新関数のクラスは一対一対応を持つことが証明された．故に，(EtoU) 同一性および (UtoE) 同一性に基づいて，消去関数および更新関数は相互に定義することができる．

3.4 信念変更の相互関係

前節では消去関数および更新関数の関係を表す同一性として (EtoU) 同一性および (UtoE) 同一性を提案し，これらの同一性に基づいて消去関数および更新関数は相互に定義することができることを証明した．

本節では，信念修正を行う操作から信念更新を行う操作への関係を表す同一性を提案し，信念変更の相互関係を明らかにする．

定義 3.3 縮小関数から消去関数への同一性を

$$\text{(CtoE) 同一性}\quad T_p^{\blacklozenge} = \begin{cases} \bigcap_{K\in[T]} K_p^{-}, & T\text{ が無矛盾の場合,} \\ \mathcal{L}, & \text{その他} \end{cases} \tag{3.3}$$

で定義する．

以下の定理 3.5 および定理 3.6 は，(CtoE) 同一性が AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$8) を満たす縮小関数のクラスから，消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす消去関数のクラスへの全射であることを示す．

定理 3.5 縮小関数 $^-$ が AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$8) を満たすとする．このとき，(CtoE) 同一性に基づいて $^-$ から構成した関数 $\blacklozenge$ は，消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす．

定理 3.6 消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たすすべての消去関数 $\blacklozenge$ に対して，(CtoE) 同一性に基づいてその消去関数を構成する縮小関数 $^-$ が存在する．

定理 3.5 および定理 3.6 から，(CtoE) 同一性は縮小関数から消去関数を構成する一つの方法を表す．

定義 3.4 修正関数から消去関数への同一性を

$$\text{(RtoE) 同一性}\quad T_p^{\blacklozenge} = \begin{cases} \bigcap_{K\in[T]} (K \cap K^{*}_{\neg p}), & T\text{ が無矛盾の場合,} \\ \mathcal{L}, & \text{その他} \end{cases} \tag{3.4}$$

で定義する．

以下の補題 3.1 は，(RtoE) 同一性が Winslett 同一性および (UtoE) 同一性の合成写像であることを示す．

補題 3.1 修正関数 $*$ が AGM の修正の公準 ($*$1) から ($*$8) を満たすとする．また，$\diamond$ を Winslett 同一性に基づいて $*$ から構成した更新関数とする．更に，$\blacklozenge_1$ を (RtoE) 同一性に基づいて $*$ から構成した関数，$\blacklozenge_2$ を (UtoE) 同一性に基づいて $\diamond$ から構成した消去関数とする．このとき，$\blacklozenge_1$ は $\blacklozenge_2$ と等しい．

以下の定理 3.7 は，補題 3.1 から容易に示される．

定理 3.7 修正関数 $*$ が AGM の修正の公準 ($*$1) から ($*$8) を満たすとする．このとき，(RtoE) 同一性に基づいて $*$ から構成した関数 $\blacklozenge$ は消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす．また，消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たすすべての消去関数 $\blacklozenge$ に対して，(RtoE) 同一性に基づいてその消去関数を構成する修正関数 $*$ が存在する

定理 3.7 は，(RtoE) 同一性が AGM の修正の公準 ($*$1) から ($*$8) を満たす修正関数のクラスから，消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす消去関数のクラスへの全射であることを示す．よって，(RtoE) 同一性は修正関数から消去関数を構成する一つの方法を表す．

定義 3.5 縮小関数から更新関数への同一性を

$$\text{(CtoU) 同一性} \quad T_p^{\diamond} = \begin{cases} \bigcap_{K\in[T]}(K^-_{\neg p})^+_p, & T \text{ が無矛盾の場合}, \\ \mathcal{L}, & \text{その他} \end{cases} \tag{3.5}$$

で定義する．

以下の補題 3.2 は，(CtoU) 同一性が (CtoE) 同一性および (EtoU) 同一性の合成写像であることを示す．

補題 3.2 縮小関数 $-$ が AGM の縮小の公準 ($-$1) から ($-$8) を満たすとする．また，$\blacklozenge$ を (CtoU) 同一性に基づいて $-$ から構成した消去関数とする．更に，$\diamond_1$ を (CtoU) 同一性に基づいて $-$ から構成した関数，$\diamond_2$ を (EtoU) 同一性に基づいて $\blacklozenge$ から構成した更新関数とする．このとき，$\diamond_1$ は $\diamond_2$ と等しい．

よって，(RtoE) 同一性の場合と同様に，次の定理 3.8 が得られる．

定理 3.8 縮小関数 $-$ が AGM の縮小の公準 ($-$1) から ($-$8) を満たすとする．このとき，(CtoU) 同一性に基づいて $-$ から構成した関数 $\diamond$ は更新の公準 ($\diamond$1) から ($\diamond$8) を満たす．また，更新の公準 ($\diamond$1) から ($\diamond$8) を満たすすべての更新関数 $\diamond$ に対して，(CtoU) 同一性に基づいてその更新関数を構成する縮小関数 $-$ が存在する．

定理 3.8 は，(CtoU) 同一性が AGM の縮小の公準 $(^{-}1)$ から $(^{-}8)$ を満たす縮小関数のクラスから，更新の公準 $(^{\diamond}1)$ から $(^{\diamond}8)$ を満たす更新関数のクラスへの全射であることを示す．よって，(CtoU) 同一性は縮小関数から更新関数を構成する一つの方法を表す．

信念変更の相互関係を図 3.1 に示す．点線の矢印は従来知られている同一性，実線の矢印は本論文で提案した同一性である．

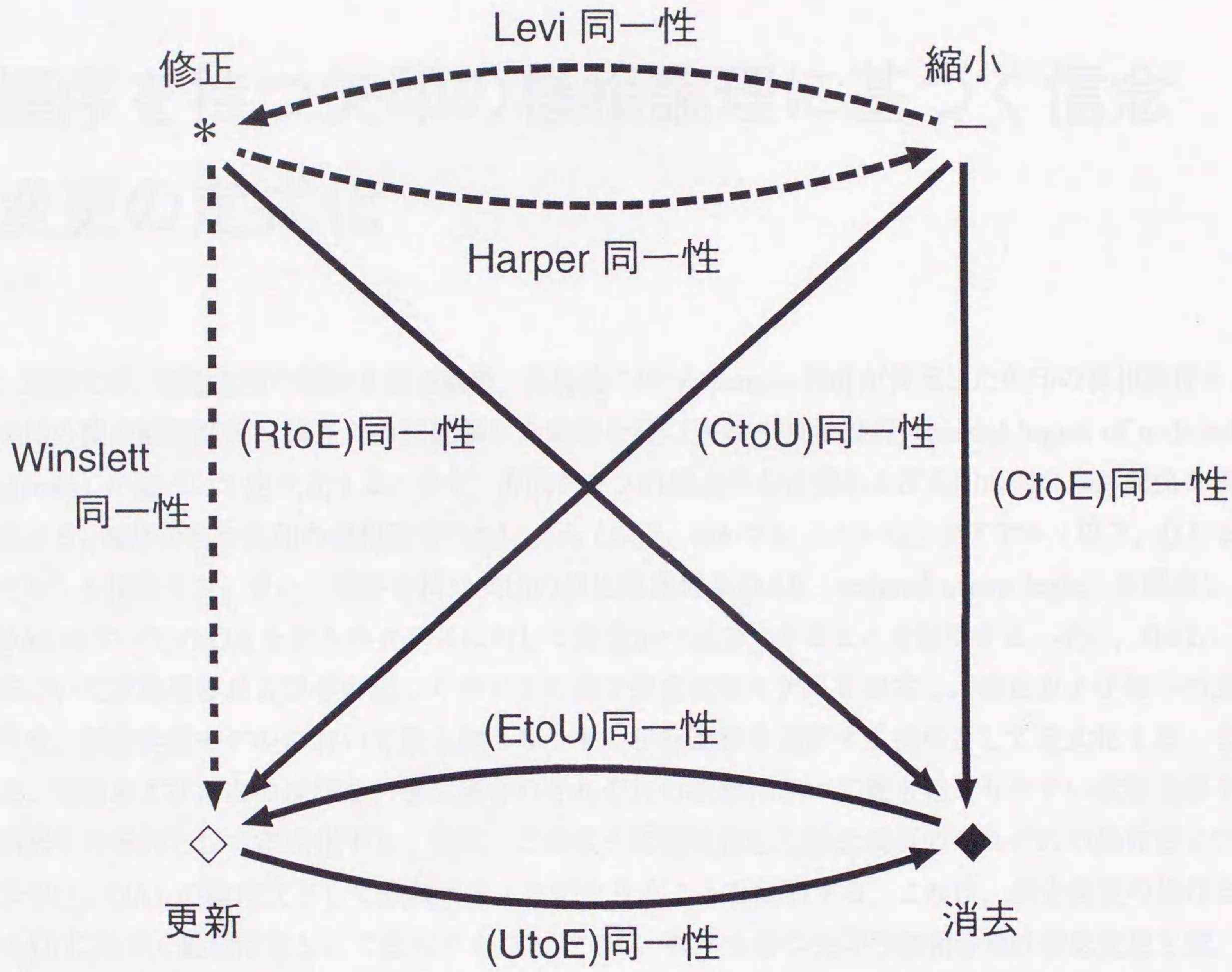


図 3.1: 信念変更の相互関係

第4章

順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念変更の定式化

本章では，信念変更の操作を様相論理，具体的には Vakarelov [36] が提案した矢印の様相論理を，矢印の間の順序関係も扱うために拡張した順序を持つ矢印の様相論理（modal logics of ordered arrows）に基づいて定式化する．まず，有向グラフの構造的な性質および矢印の間の順序関係を表現する，順序を持つ矢印の様相論理のフレーム（以下，OA フレーム）およびモデル（以下，OA モデル）を提案する．また，順序を持つ矢印の様相論理体系 OAL（ordered arrow logic）を構成し，OAL はすべての OA モデルのクラスに対して健全かつ完全であることを証明する．次に，OAL に基づいて状態遷移およびその起こりやすさを表す信念変更モデルを提案し，修正および縮小の操作を，信念変更モデルにおいて最も起こりやすい状態遷移を選択する操作として定式化する．また，更新および消去の操作を，信念集合のそれぞれの状態において最も起こりやすい状態遷移を選択する操作として定式化する．更に，このように定式化した信念変更のそれぞれの操作および公準は，OAL の論理文として表現することができることを証明する．これは，信念変更の操作は OAL に基づく論理演算として表現することができ，順序を持つ矢印の様相論理は信念変更を統一的に扱う一つの枠組を与えることを意味する．

4.1　矢印の様相論理および条件付き論理

本節では，Vakarelov が提案した矢印の様相論理（modal logic of arrows）[36] および Boutilier が提案した条件付き論理（conditional logics of normality）[5] について概観する．

矢印の様相論理は有向グラフで表現される対象の論理的な性質を記述する様相論理である．矢印の様相論理は有向グラフが何を表すかに応じて，様々な概念を表現することが可能である．例えば，有向グラフが状態遷移図を表す場合は，矢印の様相論理は，状態遷移に関する論理的な性質を表現することができる．また，有向グラフの構造およびその性質について，論理に基づいて厳密な推論を行うことができるので，矢印の様相論理は，有向グラフで表現される対象の厳密な

表現や理論的な分析に適している．矢印の様相論理では，クリプキ・スタイルの意味論を与える場合に，点と点を結ぶ矢印を関係として表現するのではなく，矢印そのものを可能世界として扱う．更に，矢印のつながり方を関係として表現することで，有向グラフの構造的な性質を反映する．Vakarelov が提案した矢印の様相論理 [36] では，矢印の始点および終点に着目して，それぞれ「矢印 $\boldsymbol{x}$ および矢印 $\boldsymbol{y}$ の始点が同じ」,「$\boldsymbol{x}$ の始点および $\boldsymbol{y}$ の終点が同じ」,「$\boldsymbol{x}$ の終点および $\boldsymbol{y}$ の始点が同じ」,「$\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{y}$ の終点が同じ」を意味する四種類の二項関係を用いて有向グラフの構造を表現する．

矢印の様相論理の主な体系として，他に van Benthem が提案した矢印の様相論理 [2] が知られている．van Benthem の定式化では，矢印のつながり方に関する部分的な構造についてのみ扱っており，矢印の始点や終点に関する性質は扱われていない．そのため，有向グラフのそれぞれの点に関する性質および点と矢印との関連を表現するには，van Benthem の矢印の様相論理は不十分である．よって，本論文では Vakarelov が提案した矢印の様相論理 [36] を用いる．

4.1.1 矢印の様相論理

矢印の様相論理 [36] について概観する．なお，本節の定義はすべて文献 [36] に従う．

定義 4.1 矢印の様相論理の言語は，古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ に矢印の局所的なつながり方に関する四種類の様相演算子 $[ij](\forall i,j \in \{1,2\})$ を追加することで得られる．また，それぞれの $[ij]$ に対して，双対な様相演算子 $\langle ij\rangle$ は次式で通常通りに定義される．

$$\langle ij\rangle\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \neg[ij]\neg\alpha. \tag{4.1}$$

矢印の様相論理では，有向グラフを矢印構造（arrow structure）と呼ばれる代数的な構造で表現する．

定義 4.2 矢印構造とは $S=(A,N,\mathbf{1},\mathbf{2})$ である．ここで，A は矢印の空でない集合，N は点の空でない集合であり，$A\cap N=\emptyset$ と仮定する．$\mathbf{1}$ および $\mathbf{2}$ はどちらも A から N への関数で，$\mathbf{1}(\boldsymbol{x})$ は矢印 $\boldsymbol{x}$ の始点を，$\mathbf{2}(\boldsymbol{x})$ は矢印 $\boldsymbol{x}$ の終点を表す．ここで，すべての点は必ず矢印の始点または終点であると仮定する．すなわち，すべての点 $n\in N$ に対してある矢印 $\boldsymbol{x}\in A$ が存在し，$\mathbf{1}(\boldsymbol{x})=n$ または $\mathbf{2}(\boldsymbol{x})=n$ が成り立つ．

矢印構造 S で与えられた関数 $\mathbf{1}$ および $\mathbf{2}$ を用いて，点の集合 N 上の関係 ρ を次式で構成することができる．

$$m\rho n \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\in A[\mathbf{1}(\boldsymbol{x})=m \text{ and } \mathbf{2}(\boldsymbol{x})=n]. \tag{4.2}$$

関係 ρ は矢印構造 S が表現する有向グラフの構造的な性質を表す．ρ が継続的（反射的，対称的，推移的）であるとき，矢印構造 S は継続的（反射的，対称的，推移的）であるという．

同様に，関数 **1** および **2** から，矢印の集合 A 上での四種類の関係 $R_{ij}(\forall i, j \in \{1,2\})$ を次式で構成できる．

$$xR_{ij}y \Leftrightarrow i(x) = j(y). \tag{4.3}$$

例えば，$x, y \in A$ に対して，$xR_{21}y$ は矢印 x の終点および矢印 y の始点が等しいことを表す．このように構成された関係 $R_{ij}(i, j \in \{1,2\})$ は以下の性質を満たす．

$$(\rho ii) \qquad \forall x[xR_{ii}x]. \tag{4.4}$$

$$(\sigma ij) \qquad \forall x, y[xR_{ij}y \Rightarrow yR_{ji}x]. \tag{4.5}$$

$$(\tau ijk) \qquad \forall x, y, z[xR_{ij}y \text{ and } yR_{jk}z \Rightarrow xR_{ik}z]. \tag{4.6}$$

$R_{ij}(i, j \in \{1,2\})$ は以上の性質を満たすので，矢印のつながり方を表す．

N 上の関係 ρ および A 上の四種類の関係 $R_{ij}(i, j \in \{1,2\})$ に対して以下の性質が成り立つ．

$$\rho\text{が継続的} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \exists y[xR_{21}y]. \tag{4.7}$$

$$\rho\text{が反射的} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \exists y[xR_{11}y \text{ and } xR_{12}y] \text{ and } \forall x \exists z[xR_{21}z \text{ and } xR_{22}z]. \tag{4.8}$$

$$\rho\text{が対称的} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \exists y[xR_{12}y \text{ and } yR_{12}x]. \tag{4.9}$$

$$\rho\text{が推移的} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \exists z[xR_{21}y \Rightarrow xR_{11}z \text{ and } yR_{22}z]. \tag{4.10}$$

以上の性質に基づいて，矢印の様相論理のフレームを定義する．

定義 4.3 矢印の様相論理のフレーム（以下，矢印フレーム）とは $F = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22})$ である．ここで，A は矢印の空でない集合，$R_{ij}(i, j \in \{1,2\})$ は A 上の四種類の関係であり，(ρii)，(σij) および (τijk) を満たす．更に，$R_{ij}(i, j \in \{1,2\})$ がそれぞれ式 (4.7)，式 (4.8)，式 (4.9) および式 (4.10) を満たすとき，F をそれぞれ継続的（反射的，対称的，推移的）な矢印フレームという．

与えられた矢印構造 S から，式 (4.3) に基づいて矢印フレーム F を構成することができる．逆に，任意の矢印フレーム F に対して，F を構成する矢印構造 S が存在することが示されている [36]．

矢印の様相論理の意味論は，以下の矢印モデルで与えられる．矢印モデルは，四種類の到達可能関係を持つクリプキ・モデルである．

定義 4.4 矢印モデルとは，矢印フレーム F および付値関数 v の対 $M = (F, v)$ である．ここで，付値関数 v はそれぞれの矢印における原子文の真偽を与える関数で，$v : \mathbf{P} \times A \to \{t, f\}$ とする．

t は真，f は偽の真理値を表す．また，F が継続的（反射的，対称的，推移的）ならば，M を継続的（反射的，対称的，推移的）な矢印モデルという．矢印モデル M において，矢印 x で論理文 α が真であることを $M, x \models \alpha$ と表す．様相演算子 $[ij](i, j \in \{1, 2\})$ を含む論理文 $[ij]\alpha$ の真偽は，$[ij]$ に対応する関係 R_{ij} に基づいて次式で定義される．

$$M, x \models [ij]\alpha \Leftrightarrow \forall y[xR_{ij}y \Rightarrow M, y \models \alpha]. \tag{4.11}$$

定義 4.5 矢印の様相論理の体系 BAL(basic arrow logic) は古典命題論理を含み，かつ以下の公理型および推論規則に関して閉じた最小の論理文の集合である．

$\mathbf{K}_{ij}$. $[ij](\alpha \to \beta) \to ([ij]\alpha \to [ij]\beta)$.

$\mathbf{R}_{ii}$. $[ii]\alpha \to \alpha$.

$\mathbf{\Sigma}_{ij}$. $\alpha \to [ij]\langle ji\rangle\alpha$.

$\mathbf{T}_{ijk}$. $[ik]\alpha \to [ij][jk]\alpha$.

MP. α および $\alpha \to \beta$ から β を導いてよい．

Nec$[ij]$. α から $[ij]\alpha$ を導いてよい．

BAL はすべての矢印モデルのクラスに対して健全かつ完全であることが示されている [36]．更に，継続的（反射的，対称的，推移的）な矢印モデルに対応する公理として以下の公理 **(Ser)**，**(Ref)**，**(Sym)** および **(Tr)** が提案されている．

(Ser) $\langle 21\rangle\top$.

(Ref) $([11][21]\alpha \to \alpha) \wedge([21][22]\alpha \to \alpha)$.

(Sym) $[12][12]\alpha \to \alpha$.

(Tr) $[11][22]\alpha \to [21]\alpha$.

BAL に **(Ser)**（**(Ref)**，**(Sym)**，**(Tr)**）を追加した体系は継続的（反射的，対称的，推移的）な矢印モデルのクラスに対して健全かつ完全であることが示されている [36]．

4.1.2 条件付き論理

本節では，条件付き論理 [5] の体系 CO および CO^* について概説する．条件付き論理は可能世界の相対的な「もっともらしさ」に関する概念を扱う様相論理である．なお，本節の定義はすべて文献 [5] に従う．

定義 4.6 条件付き論理の言語は古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ に，それぞれ到達可能なすべての世界での真を表す様相演算子 $\Box_l$，および到達不能なすべての世界での真を表す様相演算子 $\Box_m$ を追加することで得られる．その他の様相演算子はそれぞれ

$$\Diamond_l \alpha \stackrel{\mathrm{df}}{=} \neg \Box_l \neg \alpha, \tag{4.12}$$

$$\Diamond_m \alpha \stackrel{\mathrm{df}}{=} \neg \Box_m \neg \alpha, \tag{4.13}$$

$$\Box \alpha \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Box_l \alpha \wedge \Box_m \alpha, \tag{4.14}$$

$$\Diamond \alpha \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Diamond_l \alpha \vee \Diamond_m \alpha \tag{4.15}$$

で定義される．

条件付き論理の体系 CO に対する意味論は，以下の CO モデルで与えられる．CO モデルは反射的かつ推移的であり，かつすべての世界が比較可能な到達可能関係を持つクリプキ・モデルである．

定義 4.7 CO モデルとは $M = (W, \geq, v)$ である．ここで，W は空でない可能世界の集合，$\geq$ は W 上の全擬順序，v は付値関数である．CO モデル M において，世界 w で論理文 α が真であることを $M, w \models \alpha$ と表す．様相演算子 $\Box_l$ および $\Box_m$ を含む論理文の真偽は，$\geq$ に基づいて次式で定義される．

$$M, x \models \Box_l \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \forall y [x \geq y \Rightarrow M, y \models \alpha]. \tag{4.16}$$

$$M, x \models \Box_m \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \forall y [x \not\geq y \Rightarrow M, y \models \alpha]. \tag{4.17}$$

また，CO^* モデルは，古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合をすべて可能世界として含む CO モデルである．

定義 4.8 体系 CO は古典命題論理を含み，かつ以下の公理型および推論規則に関して閉じた最小の論理文の集合である．

K$\Box_l$. $\Box_l(\alpha \to \beta) \to (\Box_l \alpha \to \Box_l \beta)$.

K$\Box_m$. $\Box_m(\alpha \to \beta) \to (\Box_m \alpha \to \Box_m \beta)$.

T$\Box_l$. $\Box_l \alpha \to \alpha$.

4$\Box_l$. $\Box_l \alpha \to \Box_l \Box_l \alpha$.

S. $\alpha \to \Box_m \Diamond_l \alpha$.

H. $\Diamond(\Box_l \alpha \wedge \Box_m \beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$.

MP. α および $\alpha \to \beta$ から β を導いてよい．

Nec$\Box$. α から $\Box \alpha$ を導いてよい．

また，CO^* は CO に以下の公理型を追加して得られる体系である．

LP. 古典命題論理のすべての充足可能な論理文 p について，$\Diamond p$.

CO はすべての CO モデルのクラスに対して健全かつ完全であることが示されている．同様に，CO^* はすべての CO^* モデルのクラスに対して健全かつ完全であることが示されている [5].

また，Boutilier [4] は，修正の操作は体系 CO^* で以下のように特徴づけられることを示している．すなわち，式 (4.19) で定義された信念集合 T_p^* は AGM の修正の公準 (*1) から (*8) を満たす．

$$p \Rightarrow q \overset{\text{df}}{=} \Box\neg p \vee \Diamond(p \wedge \Box_l(p \rightarrow q)). \tag{4.18}$$

$$T_p^* \overset{\text{df}}{=} \{q \in \mathcal{L} \mid M \models p \overset{\text{re}}{\Rightarrow} q\}. \tag{4.19}$$

4.2 順序を持つ矢印の様相論理

本節では，矢印の間の順序関係を扱うために矢印の様相論理を拡張した，順序を持つ矢印の様相論理を提案する．

4.2.1 順序を持つ矢印の様相論理の言語

順序を持つ矢印の様相論理の言語 $\mathcal{L}_{OA}$ を構成する．

定義 4.9 順序を持つ矢印の様相の言語 $\mathcal{L}_{OA}$ を，古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ に対して矢印の間の順序関係に関する様相演算子 $\Box_l$ および $\Box_m$，矢印の間の局所的なつながり方および順序関係に関する八種類の様相演算子 $[ij]_l$ および $[ij]_m$ $(i, j \in \{1, 2\})$ を追加して構成する．ここで，様相演算子の添字 l, m はそれぞれ less および more の略であり，矢印の間の順序に関する大小関係を表す．それぞれの様相演算子 $\Box_l$，$\Box_m$，$[ij]_l$ および $[ij]_m$ に対して，双対な演算子 $\Diamond_l$，$\Diamond_m$，$\langle ij\rangle_l$ および $\langle ij\rangle_m$ を

$$\Diamond_l\alpha \overset{\text{df}}{=} \neg\Box_l\neg\alpha, \tag{4.20}$$

$$\Diamond_m\alpha \overset{\text{df}}{=} \neg\Box_m\neg\alpha, \tag{4.21}$$

$$\langle ij\rangle_l\alpha \overset{\text{df}}{=} \neg[ij]_l\neg\alpha, \tag{4.22}$$

$$\langle ij\rangle_m\alpha \overset{\text{df}}{=} \neg[ij]_m\neg\alpha \tag{4.23}$$

で定義する．また，その他の様相演算子をそれぞれ

$$\Box\alpha \overset{\text{df}}{=} \Box_l\alpha \wedge \Box_m\alpha, \tag{4.24}$$

$$\Diamond\alpha \overset{\text{df}}{=} \Diamond_l\alpha \vee \Diamond_m\alpha, \tag{4.25}$$

$$[ij]\alpha \overset{\text{df}}{=} [ij]_l\alpha \wedge [ij]_m\alpha, \tag{4.26}$$

$$\langle ij\rangle\alpha \overset{\text{df}}{=} \langle ij\rangle_l\alpha \vee \langle ij\rangle_m\alpha \tag{4.27}$$

で定義する．

4.2.2 順序を持つ矢印の様相論理の意味論

順序を持つ矢印の様相論理のフレーム (以下，OA フレーム) を次のように定義する．

定義 4.10 OA フレームとは，矢印の集合 A 上の全擬順序 $\succeq$ を矢印フレームに追加して得られる $F = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, \succeq)$ である．$x \succeq y$ でないことを $x \not\succeq y$ と表す．矢印フレームの場合と同様に，$R_{ij}(i, j \in \{1, 2\})$ がそれぞれ式 (4.7)，式 (4.8)，式 (4.9) および式 (4.10) を満たすとき，F をそれぞれ継続的（反射的，対称的，推移的）な OA フレームという．更に，$R_{ij}(i, j \in \{1, 2\})$ および $\succeq$ が次式を満たすとき，F を強反射的な OA フレームという．

$$\forall x \exists y[x \succeq y \text{ and } xR_{11}y \text{ and } xR_{12}y] \text{ and } \forall x \exists z[x \succeq z \text{ and } xR_{21}z \text{ and } xR_{22}z]. \tag{4.28}$$

順序を持つ矢印の様相論理のモデル (以下，OA モデル) を OA フレームから構成し，順序を持つ矢印の様相論理の意味論を与える．

定義 4.11 F を OA フレーム，$v : \mathbf{P} \times A \to \{t, f\}$ を付値関数とする．このとき，$M = (F, v)$ を OA モデルという．また，F が継続的（反射的，対称的，推移的，強反射的）な OA フレームであるとき，M をそれぞれ継続的（反射的，対称的，推移的，強反射的）な OA モデルという．OA モデル M において，矢印 x で論理文 α が真であることを $M, x \models \alpha$ と表す．また，$M, x \models \alpha$ でないことを $M, x \not\models \alpha$ と表す．関係 $\models$ は論理文 α の構造に関して以下のように帰納的に定義される．ここで，$i, j \in \{1, 2\}$ である．

$$M, x \models p \iff v(p, x) = t \ \ (p \in \mathbf{P}), \tag{4.29}$$

$$M, x \models \neg\alpha \iff M, x \not\models \alpha, \tag{4.30}$$

$$M, x \models \alpha \wedge \beta \iff M, x \models \alpha \text{ and } M, x \models \beta, \tag{4.31}$$

$$M, x \models \alpha \vee \beta \iff M, x \models \alpha \text{ or } M, x \models \beta, \tag{4.32}$$

$$M, x \models \alpha \to \beta \iff M, x \not\models \alpha \text{ or } M, x \models \beta, \tag{4.33}$$

$$M, x \models [ij]_l\alpha \iff \forall y[xR_{ij}y \text{ and } x \succeq y \Rightarrow M, y \models \alpha], \tag{4.34}$$

$$M, x \models [ij]_m\alpha \iff \forall y[xR_{ij}y \text{ and } x \not\succeq y \Rightarrow M, y \models \alpha], \tag{4.35}$$

$$M, x \models \Box_l\alpha \iff \forall y[x \succeq y \Rightarrow M, y \models \alpha], \tag{4.36}$$

$$M, x \models \Box_m\alpha \iff \forall y[x \not\succeq y \Rightarrow M, y \models \alpha]. \tag{4.37}$$

また，論理文 α に対して，M で α が真となる矢印の集合を次式で定義する．

$$\|\alpha\| \stackrel{\text{df}}{=} \{x \in A \mid M, x \models \alpha\}. \tag{4.38}$$

例えば，$M, x \models [21]_l\alpha$ は「矢印 x の終点が始点となり，かつ x 以下であるすべての矢印 y で α が真」と読む．また，$M, x \models \Box_l\alpha$ は「x 以下のすべての y で α が真」，$M, x \models \Box_m\alpha$ は「x より大きいすべての y で α が真」と読む．他の様相演算子について以下が成り立つことは容易に確かめられる．

$$M, x \models [ij]\alpha \;\Leftrightarrow\; \forall y[xR_{ij}y \Rightarrow M, y \models \alpha]. \tag{4.39}$$

$$M, x \models \langle ij\rangle\alpha \;\Leftrightarrow\; \exists y[xR_{ij}y \text{ and } M, y \models \alpha]. \tag{4.40}$$

$$M, x \models \Box\alpha \;\Leftrightarrow\; \forall y[M, y \models \alpha]. \tag{4.41}$$

$$M, x \models \Diamond\alpha \;\Leftrightarrow\; \exists y[M, y \models \alpha]. \tag{4.42}$$

定義 4.12 あるOAモデル M に対して，任意の $x \in A$ で $M, x \models \alpha$ であるとき，論理文 α は M で妥当といい，$M \models \alpha$ と表す．また，OAモデルのあるクラス C について，C に含まれるすべてのOAモデル M に対して $M \models \alpha$ であるとき，論理文 α はクラス C で妥当といい，$C \models \alpha$ と表す．

以下，すべてのOAモデルのクラスを C_{OA} と表す．また，すべての継続的（反射的，対称的，推移的および強反射的）なOAモデルのクラスをそれぞれ C_{ser}，C_{ref}，C_{sym}，C_{tr} および C_{sr} と表す．

4.2.3 順序を持つ矢印の様相論理の証明論

順序を持つ矢印の様相論理体系（以下，OAL）を構成する．

定義 4.13 OALは古典命題論理を含み，かつ以下の公理型および推論規則に関して閉じた最小の論理文の集合 $L \subseteq \mathcal{L}_{OA}$ である．ここで，$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{OA}$，$i, j, k \in \{1, 2\}$ である．

$\mathbf{K}_{ij_l}$. $[ij]_l(\alpha \to \beta) \to ([ij]_l\alpha \to [ij]_l\beta)$.

$\mathbf{K}_{ij_m}$. $[ij]_m(\alpha \to \beta) \to ([ij]_m\alpha \to [ij]_m\beta)$.

$\mathbf{R}_{ii_l}$. $[ii]_l\alpha \to \alpha$.

$\mathbf{\Sigma}_{ij}$. $\alpha \to [ij]\langle ji\rangle\alpha$.

$\mathbf{T}_{ijk}$. $[ik]\alpha \to [ij][jk]\alpha$.

$\mathbf{K}\Box_l$. $\Box_l(\alpha \to \beta) \to (\Box_l\alpha \to \Box_l\beta)$.

$\mathbf{K}\Box_m$. $\Box_m(\alpha \to \beta) \to (\Box_m\alpha \to \Box_m\beta)$.

$\mathbf{4}\Box_l$. $\Box_l\alpha \to \Box_l\Box_l\alpha$.

S. $\alpha \to \Box_m\Diamond_l\alpha$.

H. $\Diamond(\Box_l\alpha \wedge \Box_m\beta) \to \Box(\alpha \vee \beta)$.

$\mathbf{I_l}$. $\Box_l\alpha \to [ij]_l\alpha$.

$\mathbf{I_m}$. $\Box_m\alpha \to [ij]_m\alpha$.

MP. α および $\alpha \to \beta$ から β を導いてよい．

Nec□. α から $\Box\alpha$ を導いてよい．

Nec$[ij]$. α から $[ij]\alpha$ を導いてよい．

公理 $\mathbf{K}_{ij_l}$ および $\mathbf{K}_{ij_m}$ は BAL の公理 $\mathbf{K}_{ij}$ をそれぞれ様相演算子 $[ij]_l$ および $[ij]_m$ に関して分割したものである．また，公理 $\mathbf{R}_{ii_l}$ は BAL の公理 $\mathbf{R}_{ii}$ の性質を様相演算子 $[ij]_l$ に限定したものである．公理 $\mathbf{I_l}$ および $\mathbf{I_m}$ は，それぞれ $\Box_l$ および $[ij]_l$，$\Box_m$ および $[ij]_m$ の関連を表す．その他の公理および推論規則は BAL および CO に従う．OAL で論理文 α が証明可能であることを OAL $\vdash \alpha$ と表す．

OAL に対して以下の性質が成り立つ．

命題 4.1 $\mathbf{T}\Box_l$ および $\mathbf{K}_{ij}$，$\mathbf{R}_{ii}$ の形式の論理文はすべて OAL で証明可能である．

この命題より，OAL は BAL および CO のすべての公理および推論規則を含む．このことから，BAL または CO で証明可能な論理文はすべて OAL でも証明可能である．

4.2.4 順序を持つ矢印の様相論理の健全性および完全性

OAL はすべての OA モデルのクラス C_{OA} に対して健全かつ完全である．

定理 4.1

$$C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Leftrightarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha. \tag{4.43}$$

証明は付録で示す．

体系 BAL と同様に，体系 OAL においても，公理 **(Ser)**，**(Ref)**，**(Sym)** および **(Tr)** はそれぞれ継続的（反射的，対称的および推移的）な OA モデルに対応する．また，以下の公理 **(Sr)** は強反射的な OA モデルに対応する．

(Sr) $([11]_l[21]\alpha \to \alpha) \wedge([21]_l[22]\alpha \to \alpha)$.

OAL に公理 **(Ser)** を追加して得られる体系を OAL + **(Ser)** と表す．**(Ref)**，**(Sym)**，**(Tr)** および **(Sr)** についても同様に表記する．すべての継続的（反射的，対称的，推移的および強反射的）な OA モデルのクラス C_{ser}（C_{ref}，C_{sym}，C_{tr} および C_{sr}）に対しても，それぞれ同様に完全性定理を示すことができる．

系 4.1 以下の性質が成り立つ．

$$C_{\mathrm{ser}} \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OAL} + \mathbf{(Ser)} \vdash \alpha. \tag{4.44}$$

$$C_{\mathrm{ref}} \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OAL} + \mathbf{(Ref)} \vdash \alpha. \tag{4.45}$$

$$C_{\mathrm{sym}} \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OAL} + \mathbf{(Sym)} \vdash \alpha. \tag{4.46}$$

$$C_{\mathrm{tr}} \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OAL} + \mathbf{(Tr)} \vdash \alpha. \tag{4.47}$$

$$C_{\mathrm{sr}} \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{OAL} + \mathbf{(Sr)} \vdash \alpha. \tag{4.48}$$

証明は文献 [36] と同様である．

4.3 順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念変更の定式化

本節では，OAL に基づいて信念変更の操作を定式化し，信念変更のそれぞれの操作および公準は OAL の論理文として表現することができることを証明する．これは，信念変更の操作は OAL に基づく論理演算として表現することができ，順序を持つ矢印の様相論理は信念変更を統一的に扱う一つの枠組を与えることを意味する．

4.3.1 順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念演算子

定義 4.14 様相演算子 B を文献 [3] と同様に次式で定義する．

$$\mathsf{B}\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \Diamond\Box_l\alpha. \tag{4.49}$$

$\mathsf{B}\alpha$ は「α を信じている」と読む．式 (4.49) で定義した様相演算子 B について，以下が成り立つ．

命題 4.2 以下の形式の論理文は，すべての OA モデルのクラスで妥当である．ここで，$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{OA}$ である．

K. $\mathsf{B}(\alpha \to \beta) \to (\mathsf{B}\alpha \to \mathsf{B}\beta)$.

D. $\mathsf{B}\alpha \to \neg\mathsf{B}\neg\alpha$.

4. $\mathsf{B}\alpha \to \mathsf{B}\mathsf{B}\alpha$.

5. $\neg\mathsf{B}\alpha \to \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\alpha$.

よって，式 (4.49) で定義した様相演算子 B は合理的信念の様相論理体系 [17] として知られる $KD45$ に従う．

定義 4.15 任意の矢印の空でない集合 $B(\subseteq A)$ に対して，B の中で $\succeq$ に関して極小となる矢印の集合を $\min(B, \succeq)$ と表し，次式で定義する．

$$\min(B, \succeq) \overset{\mathrm{df}}{=} \{\boldsymbol{x} \in B \mid \forall y \in B, y \succeq \boldsymbol{x}\}. \tag{4.50}$$

命題 4.3 は，式 (4.49) で定義した様相演算子 B の意味論的特徴づけを与える．

命題 4.3 任意の OA モデル M および任意の矢印 $a \in A$，任意の論理文 $\alpha \in \mathcal{L}_{OA}$ に対して，$M, a \models \mathsf{B}\alpha$ であることの必要十分条件はすべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ で $M, \boldsymbol{x} \models \alpha$ である．

証明は付録で示す．式 (4.49) で定義した様相演算子 B について，次の性質が成り立つ．

命題 4.4 任意の OA モデル M および任意の論理文 $\alpha \in \mathcal{L}_{OA}$ に対して，$M \models \mathsf{B}\alpha$ または $M \models \neg\mathsf{B}\alpha$ のどちらか一方が成り立つ．

証明は付録で示す．

4.3.2 順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念変更モデル

定義 4.16 有限個の原子文の集合 $\mathbf{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ で構成される古典命題論理の言語 $\mathcal{L}$ から，矢印構造 $S = (A, N, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ を構成する．まず，点の集合 N および矢印の集合 A を構成する．

$$N \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{n \mid n \text{ は } \mathcal{L} \text{ の極大無矛盾集合}\}. \tag{4.51}$$

$$A \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(n_1, n_2) \mid n_i \in N, i = 1, 2\}. \tag{4.52}$$

また，すべての矢印 $\boldsymbol{x} = (n_1, n_2)$ に対して，関数 $\mathbf{1}$ および $\mathbf{2}$ をそれぞれ $\mathbf{1}(\boldsymbol{x}) = n_1$，$\mathbf{2}(\boldsymbol{x}) = n_2$ と定義する．すなわち，$\mathbf{1}(\boldsymbol{x})$ は矢印 $\boldsymbol{x}$ の第一成分への射影，$\mathbf{2}(\boldsymbol{x})$ は矢印 $\boldsymbol{x}$ の第二成分への射影である．

このように構成した矢印構造 S のそれぞれの点は $\mathcal{L}$ の極大無矛盾集合なので，これは古典命題論理の一つのモデル（状態）を表す．また，矢印 $\boldsymbol{x} = (n_1, n_2)$ は状態 n_1 から状態 n_2 への状態遷移とみなせる．

OAL に基づく信念変更モデルを構成する．

定義 4.17 OAL に基づく信念変更モデルとは，それぞれ以下で定義する OA フレーム F と付値関数 v からなる OA モデル $M_b = (F, v)$ である．

ここで，OA フレーム F は，定義 4.16 の矢印構造 S から式 (4.3) に基づいて構成した矢印フレームに，矢印（状態遷移）の相対的な「起こりやすさ」を表す A 上の全擬順序 $\succeq$ を追加した $F = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, \succeq)$ である．$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ は「状態遷移 $\boldsymbol{y}$ は少なくとも状態遷移 $\boldsymbol{x}$ と同程度に起こりやすい」と読む．更に，F は強反射的であると仮定する．

付値関数 v を次式で定義する．

$$v(p, \boldsymbol{x}) = t \Leftrightarrow p \in \mathbf{2}(\boldsymbol{x}),\ \forall p \in \mathbf{P}. \tag{4.53}$$

すなわち，それぞれの矢印において真となる原子文は，遷移した後の状態に含まれる原子文である．仮定より F は強反射的なので，このように構成した信念変更モデル M_b は強反射的な OA モデルである．

論理的枠組に基づく信念変更では，知識ベースを主に論理文の集合で表現し，信念集合と呼ぶ．ここでは，信念集合を信念変更モデルの全擬順序 $\succeq$ に基づいて構成する．

定義 4.18 $\succeq$ で表現される信念集合 T および T のモデルの集合 $\|T\|$，可能な状態の候補の集合 $[T]$ を次のように定義する．

$$T \stackrel{\mathrm{df}}{=} \bigcap_{\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)} \mathbf{2}(\boldsymbol{x}). \tag{4.54}$$

$$\|T\| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min(A, \succeq). \tag{4.55}$$

$$[T] \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\mathbf{2}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)\}. \tag{4.56}$$

T が完全であるとき，すなわち，$n \in [T]$ となる n がただ一つ存在するとき，信念変更モデル M_b は完全であるという．

すなわち，$\succeq$ は状態遷移の相対的な「起こりやすさ」の他に，現在の可能な状態の候補も表すとみなす．信念集合 T は，可能な状態のすべての候補に含まれる論理文の集合である．

これらの定義から $T = \bigcap_{n \in [T]} n$ が成り立つ．また，様相演算子 B を用いると，式 (4.57) で定義した信念集合 T は次式で表現できることが容易に示される．

$$T = \{p \in \mathcal{L} \mid M_b \models \mathsf{B}p\}. \tag{4.57}$$

このことから，信念集合 T は，信念変更モデル M_b において「信じている」論理文の集合とみなすことができる．

4.3.3 信念変更モデルに基づく修正

信念集合 T の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関する修正の操作を，信念変更モデル M_b において，$M_b, y \models p$ となる最も「起こりやすい」状態遷移 $y = (n, n')$ の終点 n' から新たな信念集合を構成する操作として定義する．

定義 4.19 信念集合 T を論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関して修正した結果として得られる新たな信念集合を T^*_p と表し，次式で定義する．

$$T^*_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} \bigcap_{y \in \min(\|p\|, \succeq)} \mathbf{2}(y) \tag{4.58}$$

集合 $\|p\|$ は論理文 p が成り立つ矢印の集合なので，集合 $\min(\|p\|, \succeq)$ は $M_b, y \models p$ となる最も「起こりやすい」状態遷移 $y = (n, n')$ の集合となる．

文献 [4] と同様に，この操作は以下の論理文で表現することができる．ここで，$p, q \in \mathcal{L}$ である．

$$p \stackrel{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Box\neg p \lor \Diamond(p \land \Box_l(p \to q)). \tag{4.59}$$

この操作が式 (4.59) で定義された論理文 $p \stackrel{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ で表現することができることは，以下の命題が保証する．

命題 4.5 論理文 $p, q \in \mathcal{L}$ に対して，$y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y = (n, n')$ で $M_b, y \models q$ が成り立つことの必要十分条件は，$M_b \models p \stackrel{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ が成り立つことである．

証明は付録で示す．命題 4.5 より，T^*_p は次式で表現することができる．

$$T^*_p = \{q \in \mathcal{L} \mid M_b \models p \stackrel{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q\}. \tag{4.60}$$

よって，修正の操作はOALの論理文として表現することができる．更に，修正の操作が満たすべき性質もOALの論理文として表現することができ，式(4.58)で定義した信念集合T_p^*はそれらの性質をすべて満たす．

補題 4.1 以下の論理文はすべて信念変更モデルM_bで妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$である．

$$((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r). \tag{4.61}$$

$$p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p. \tag{4.62}$$

$$(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}(p \to q). \tag{4.63}$$

$$\neg\mathsf{B}\neg p \to (\mathsf{B}(p \to q) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)). \tag{4.64}$$

$$\Diamond p \equiv \neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \bot). \tag{4.65}$$

$$\Box(p \equiv q) \to ((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)). \tag{4.66}$$

$$((p \wedge q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r)). \tag{4.67}$$

$$\neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q) \to ((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r)) \to ((p \wedge q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)). \tag{4.68}$$

証明は付録で示す．

定理 4.2 式(4.58)で定義した修正は以下の性質を満たす．これらの性質はAGMの修正の公準に対応する．

(*1) T_p^*は信念集合．

(*2) $p \in T_p^*$.

(*3) $T_p^* \subseteq T_p^+$.

(*4) $\neg p \notin T$ ならば，$T_p^+ \subseteq T_p^*$.

(*5) $\vdash \neg p$であるとき，かつそのときに限りT_p^*は矛盾する．

(*6) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^* = T_q^*$.

(*7) $T_{p\wedge q}^* \subseteq (T_p^*)_q^+$.

(*8) $\neg q \notin T_p^*$ ならば，$(T_p^*)_q^+ \subseteq T_{p\wedge q}^*$.

証明は付録で示す．

補題4.1および定理4.2より，修正の操作および公準はOALの論理文で記述できることが示された．これは，修正の操作はOALにおける論理演算として表現できることを意味する．

更に，AGMの修正の公準(*1)から(*8)を満たす修正の性質もOALで表現することができる．

命題 4.6 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$((p \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} q) \wedge (q \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} p)) \to ((p \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r) \equiv (q \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r)). \tag{4.69}$$

$$((p \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r) \wedge (q \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r)) \to ((p \vee q) \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r). \tag{4.70}$$

$$\neg((p \vee q) \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} \neg q) \to (((p \vee q) \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r) \to (q \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} r)). \tag{4.71}$$

証明は付録で示す．これらの性質がそれぞれ式 (2.41) から式 (2.43) に対応することは容易に示される．

4.3.4 信念変更モデルに基づく縮小

修正の場合と同様に，信念集合 T の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関する縮小の操作を，信念変更モデル M_b において $M_b, y \not\models p$ となる，最も「起こりやすい」状態遷移 $y = (n, n')$ の終点 n'，および T から新たな信念集合を構成する操作として定義する．

定義 4.20 信念集合 T を論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関して縮小した結果として得られる新たな信念集合を T_p^- と表し，次式で定義する．

$$T_p^- \overset{\text{df}}{\equiv} \left\{ \bigcap_{x \in \min(A, \succeq)} \mathbf{2}(x) \right\} \cap \left\{ \bigcap_{y \in \min(\|\neg p\|, \succeq)} \mathbf{2}(y) \right\}. \tag{4.72}$$

式 (4.57) および式 (4.59) を用いると，この操作は以下の論理文で表現することができる．

$$p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} q \overset{\text{df}}{\equiv} \mathsf{B}q \wedge (\neg p \overset{\text{re}}{\rightrightarrows} q). \tag{4.73}$$

よって，修正の場合と同様に，T_p^- は次式で表現することができる．

$$T_p^- = \{q \in \mathcal{L} \mid M_b \models p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} q\}. \tag{4.74}$$

このことから，縮小の操作は OAL の論理文として表現することができる．更に，縮小の操作が満たすべき性質も OAL の論理文として表現することができ，式 (4.72) で定義した信念集合 T_p^- はそれらの性質をすべて満たす．

補題 4.2 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$((p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} q) \wedge (p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} (q \to r))) \to (p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} r). \tag{4.75}$$

$$(p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} q) \to \mathsf{B}q. \tag{4.76}$$

$$\neg \mathsf{B}p \to ((p \overset{\text{co}}{\rightrightarrows} q) \equiv \mathsf{B}q). \tag{4.77}$$

$$\Diamond\neg p \to \neg(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} \bot). \tag{4.78}$$

$$\mathsf{B}p \to (\mathsf{B}q \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (p \to q))). \tag{4.79}$$

$$\Box(p \equiv q) \to ((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)). \tag{4.80}$$

$$((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \land (q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)) \to ((p \land q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r). \tag{4.81}$$

$$\neg((p \land q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p) \to (((p \land q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)). \tag{4.82}$$

証明は付録で示す．

定理 4.3 式 (4.72) で定義した縮小は以下の性質を満たす．これらの性質は AGM の縮小の公準に対応する．

($^-$1) T_p^- は信念集合．

($^-$2) $T_p^- \subseteq T$.

($^-$3) $p \notin T$ ならば，$T_p^- = T$.

($^-$4) $\not\vdash p$ ならば，$p \notin T_p^-$.

($^-$5) $p \in T$ ならば，$T \subseteq (T_p^-)_p^+$.

($^-$6) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^- = T_q^-$.

($^-$7) $T_p^- \cap T_q^- \subseteq T_{p \land q}^-$.

($^-$8) $p \notin T_{p \land q}^-$ ならば，$T_{p \land q}^- \subseteq T_p^-$.

証明は付録で示す．

補題 4.2 および定理 4.3 より，縮小の操作および公準は OAL の論理文で記述できることが示された．これは，縮小の操作は OAL における論理演算として表現できることを意味する．

4.3.5 信念変更モデルに基づく更新

信念集合 T の論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関する更新の操作を，それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ に対して，n が始点となり，かつ $M_b, y \models p$ となる最も「起こりやすい」状態遷移 $y = (n, n')$ を選択し，それぞれの y の終点 n' から新たな信念集合を構成する操作として定義する．

定義 4.21 信念集合 T を論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関して更新した結果として得られる新たな信念集合を $T_p^\Diamond$ と表し，次式で定義する．

$$\begin{array}{l} T_p^\Diamond \overset{\mathrm{df}}{=} \bigcap_{x \in \|T\|} \bigcap_{y \in B} \mathbf{2}(y) \\ \text{ここで}, B = \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq). \end{array} \tag{4.83}$$

式 (4.56) より，それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ に対して，矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$ が存在するので，集合 $R_{21}(x)$ は x の終点を始点とする矢印の集合，すなわち状態 n を始点とする矢印の集合である．また，集合 $\|p\|$ は論理文 p が成り立つ矢印の集合である．よって，集合 $\min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ は状態 n が始点となり，$M_b, y \models p$ となる最も「起こりやすい」状態遷移 $y = (n, n')$ の集合となる．

この操作は以下の論理文で表現することができる．ここで，$p, q \in \mathcal{L}$ である．

$$p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q \overset{\text{df}}{=} \Box\neg p \vee \langle 21\rangle(p \wedge [11]_l(p \to q)). \tag{4.84}$$

この操作が式 (4.84) で定義された論理文 $p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q$ で表現することができることは，以下の命題が保証する．

命題 4.7 それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ および矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$，論理文 $p, q \in \mathcal{L}$ に対して，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y = (n, n')$ で $M_b, y \models q$ が成り立つことの必要十分条件は，$M_b, x \models p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q$ が成り立つことである．

証明は付録で示す．

定義 4.22 それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ および矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$，論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，$M_b, x \models p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q$ となる論理文 $q \in \mathcal{L}$ の集合を $n_p^\diamond$ と表す．すなわち，

$$n_p^\diamond \overset{\text{df}}{=} \{q \in \mathcal{L} \mid M_b, x \models p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q\}. \tag{4.85}$$

このように定義した論理文の集合 $n_p^\diamond$ を用いると，式 (4.83) で定義した信念集合 $T_p^\diamond$ は次式で表現することができる．

$$T_p^\diamond = \bigcap_{n \in [T]} n_p^\diamond. \tag{4.86}$$

また，様相演算子 B を用いると，$T_p^\diamond$ は次式で表現することができる．

$$T_p^\diamond = \{q \in \mathcal{L} \mid M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q)\}. \tag{4.87}$$

このことから，更新の操作は OAL の論理文として表現することができる．更に，更新の操作が満たすべき性質も OAL の論理文として表現することができ，式 (4.83) で定義した信念集合 $T_p^\diamond$ はそれらの性質をすべて満たす．

補題 4.3 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \to r))) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r). \tag{4.88}$$

$$\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} p). \tag{4.89}$$

$$\mathsf{B}p \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q). \tag{4.90}$$

$$\neg\mathsf{B}\bot \wedge \Diamond p \to \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} \bot). \tag{4.91}$$

$$\Box(p \equiv q) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)). \tag{4.92}$$

$$\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \to r)). \tag{4.93}$$

$$M_b\text{が完全ならば}, \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} \neg q) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \to r)) \to \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)). \tag{4.94}$$

証明は付録で示す．

定理 4.4 式 (4.83) で定義した更新は以下の性質を満たす．これらの性質は，Peppas and Williams [33] が再定式化した更新の公準に対応する．

($^\Diamond$1) $T_p^\Diamond$ は信念集合．

($^\Diamond$2) $p \in T_p^\Diamond$.

($^\Diamond$3) $p \in T$ ならば，$T_p^\Diamond = T$.

($^\Diamond$4) T が矛盾するか，または $\vdash \neg p$ であるとき，かつそのときに限り，$T_p^\Diamond$ が矛盾する．

($^\Diamond$5) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^\Diamond = T_q^\Diamond$.

($^\Diamond$6) $T_{p \wedge q}^\Diamond \subseteq (T_p^\Diamond)_q^+$.

($^\Diamond$7) T が完全であり，かつ $\neg q \notin T_p^\Diamond$ ならば，$(T_p^\Diamond)_q^+ \subseteq T_{p \wedge q}^\Diamond$.

($^\Diamond$8) T が無矛盾ならば，$T_p^\Diamond = \bigcap_{K \in [T]} K_p^\Diamond$.

証明は付録で示す．

補題 4.3 および定理 4.4 より，更新の操作は OAL の論理文で記述できることが示された．このことは，更新の操作は OAL における論理演算として表現することができることを意味する．

更に，式 (4.83) で定義した更新は以下の性質も満たす．

命題 4.8 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} p)) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)). \tag{4.95}$$

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)) \to \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r). \tag{4.96}$$

$$M_b\text{が完全ならば}, \neg\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} \neg q) \to (\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \to \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)). \tag{4.97}$$

証明は付録で示す．式 (4.95) および (4.96) は，Katsuno and Mendelzon [19] が提案した更新の公準 ($U6$) および ($U7$) にそれぞれ対応する．また，式 (4.97) は選言 $p \vee q$ に関して更新する場合の性質を表現する．

4.3.6 信念変更モデルに基づく消去

更新の場合と同様に，T の $p \in \mathcal{L}$ に関する消去の操作を，それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ に対して，n が始点となり，かつ $M_b, y \not\models p$ となる最も「起こりやすい」状態遷移 $y = (n, n')$ を選択し，それぞれの y の終点 n' およびすべての $n \in [T]$ から新たな信念集合を構成する操作として定義する．

定義 4.23 信念集合 T を論理文 $p \in \mathcal{L}$ に関して消去した結果として得られる新たな信念集合を $T_p^\blacklozenge$ と表し，次式で定義する．

$$\begin{aligned}&T_p^\blacklozenge \stackrel{\mathrm{df}}{=} \textstyle\bigcap_{x \in \|T\|} \bigcap_{y \in C} (\mathbf{2}(x) \cap \mathbf{2}(y)) \\ &\text{ここで}, C = \min(\|\neg p\| \cap R_{21}(x), \succeq).\end{aligned} \tag{4.98}$$

式 (4.84) を用いると，この操作は以下の論理文で表現することができる．

$$p \stackrel{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q \stackrel{\mathrm{df}}{=} q \wedge (\neg p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q). \tag{4.99}$$

定義 4.24 それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ および矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$，論理文 $p \in \mathcal{L}$ に対して，$M_b, x \models p \stackrel{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q$ となる論理文 $q \in \mathcal{L}$ の集合を $n_p^\blacklozenge$ と表す．すなわち，

$$n_p^\blacklozenge \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{q \in \mathcal{L} \mid M_b, x \models p \stackrel{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q\}. \tag{4.100}$$

更新の場合と同様に，このように定義した論理文の集合 $n_p^\blacklozenge$ を用いると，式 (4.98) で定義した信念集合 $T_p^\blacklozenge$ は次式で表現することができる．

$$T_p^\blacklozenge = \bigcap_{n \in [T]} n_p^\blacklozenge. \tag{4.101}$$

また，様相演算子 B を用いると，$T_p^\blacklozenge$ は次式で表現することができる．

$$T_p^\blacklozenge = \{q \in \mathcal{L} \mid M_b \models \mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q)\}. \tag{4.102}$$

補題 4.4 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} q) \wedge \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} (q \to r))) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r). \tag{4.103}$$

$$\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} q) \to \mathsf{B}q. \tag{4.104}$$

$$\mathsf{B}\neg p \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} q) \equiv \mathsf{B}q). \tag{4.105}$$

$$\neg\mathsf{B}\bot \wedge \Diamond\neg p \to \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} \bot). \tag{4.106}$$

$$\mathsf{B}q \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} (p \to q)). \tag{4.107}$$

$$\Box(p \equiv q) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r)). \tag{4.108}$$

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r)) \to \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r). \tag{4.109}$$

$$M_b\text{が完全ならば}, \neg\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} p) \to (\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r)). \tag{4.110}$$

証明は付録で示す．

定理 4.5 式 (4.98) で定義した消去は以下の性質を満たす．これらの性質は，第 3 章で再定式化した消去の公準に対応する．

($^{\blacklozenge}$1) $T_p^{\blacklozenge}$ は信念集合．

($^{\blacklozenge}$2) $T_p^{\blacklozenge} \subseteq T$.

($^{\blacklozenge}$3) $\neg p \in T$ ならば，$T_p^{\blacklozenge} = T$.

($^{\blacklozenge}$4) T が無矛盾であり，かつ $\nvdash p$ ならば，$p \notin T_p^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$5) $T \subseteq (T_p^{\blacklozenge})_p^{+}$.

($^{\blacklozenge}$6) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^{\blacklozenge} = T_q^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$7) $T_p^{\blacklozenge} \cap T_q^{\blacklozenge} \subseteq T_{p \wedge q}^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$8) T が完全であり，かつ $p \notin T_{p \wedge q}^{\blacklozenge}$ ならば，$T_{p \wedge q}^{\blacklozenge} \subseteq T_p^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$9) T が無矛盾ならば，$T_p^{\blacklozenge} = \bigcap_{K \in [T]} K_p^{\blacklozenge}$.

証明は付録で示す．

補題 4.4 および定理 4.5 より，消去の操作と公準は OAL の論理文で記述できることが示された．これは，消去の操作は OAL における論理演算として表現することができることを意味する．

4.3.7 考察

前節までの結果は，信念変更を行う操作およびそれぞれの操作が満たす公準はOALの論理文として表現できることを示すので，順序を持つ矢印の様相論理は信念変更を統一的に扱うための枠組を与えているといえる．

信念変更の意味論的性質に関する従来の研究では，モデルの集合上の順序関係に基づく特徴づけが行われてきた．修正は信念集合Tに対して割り当てられた一つの順序$\preceq_T$で特徴づけられる[18, 20, 33]のに対して，更新は信念集合Tのそれぞれのモデルwに対して割り当てられた順序$\preceq_w$を用いるため一般には複数の順序で特徴づけられる[19, 20]．そのため，一つの順序関係に基づいて修正と更新を両方特徴づけることはできないので，修正と更新は本質的に異なる操作とみなされてきた．

これに対して，OALに基づく更新と修正の相異点は，現在の可能な状態の候補を個別に扱うか，まとめて扱うかの一点に集約される．OALに基づく更新と修正は，共に状態遷移の集合A上の全擬順序$\succeq$に基づいて定義されている．よって，OALに基づく更新と修正は，共に「最も起こりやすい」状態遷移を選択する操作であり，状態の候補を個別に扱うか，まとめて扱うかに基づいて全擬順序が適用される範囲が異なる．このように，一つの順序関係に基づいて修正と更新を両方特徴づけられることに，順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念変更の意義があると思われる．

更に，この相異点は，信念集合Tを含む極大無矛盾集合(状態)を用いて，修正の操作から更新の操作を定義するWinslett同一性とも合致する．

本論文も含めて，信念変更に関する研究では，得られた新情報に対して修正を行うか更新を行うかはあらかじめ決められているという前提に立っている．しかし，実際に信念変更を行うような知識ベース管理システムを構築する場合には，得られた新情報に基づいて，修正するか更新するかを判別する機能が必要となる．このような機能の理論的定式化は今後の課題とする．

第5章

可能性理論に基づく信念変更の定式化

本章では，可能性理論に基づく信念変更を厳密に定式化する．まず，Dubois and Prade [12] による可能性理論に基づく更新の定式化では，更新の結果が常に構成できるとは限らないことを指摘し，可能性理論に基づく更新の操作を厳密に再定式化することで，この問題を解決する．また，論理的枠組での消去の操作および対称的消去の操作を可能性理論に基づいて新たに定式化し，その性質について考察する．更に，不確実な情報に基づく信念更新を提案し，可能性理論に基づく信念変更のそれぞれの操作は，不確実な情報に基づく信念更新の特殊例であることを示す．

5.1 可能性理論に基づく信念変更

本節では，可能性理論に基づく信念修正 [10] および更新 [12] について述べる．本節での定義は Dubois and Prade [10, 12] に従う．

5.1.1 可能性理論に基づく信念修正

可能性理論の枠組では，信念変更を以下のように定式化する．

- 知識ベース：可能性分布 π で数値的に表現．
- 新たに得た情報および失われる情報：全体集合 Ω の部分集合で表現．
- 信念変更の操作：
  新たに得た情報あるいは所有する情報が部分的に失われたことを反映して，知識ベースを表現する可能性分布 π から新たな可能性分布を構成する規則．

可能性分布について以下の用語を定義する．

- 可能性分布 π は無矛盾である：$\pi(w) = 1$ となる可能世界 $w \in \Omega$ が少なくとも一つ存在する．
- π は完全である：$\pi(w) = 1$ となる $w \in \Omega$ がただ一つ存在し，かつ $w' \neq w$ ならば $\pi(w') = 0$.

- π は π' より特定的である：π および π' に対して，すべての $w \in \Omega$ について $\pi(w) \leq \pi'(w)$ が成り立つ．

π は π' より特定的であることを $\pi \leq \pi'$ と表す．$\pi \leq \pi'$ かつ $\pi' \leq \pi$ であるとき，$\pi = \pi'$ と表す．本章では，Dubois and Prade [10, 12] と同様に，知識ベースを表す可能性分布は無矛盾な可能性分布であるか，または矛盾を表す可能性分布 $\pi_\perp$ であると仮定する．ここで，$\pi_\perp$ はすべての $w \in \Omega$ に対して $\pi_\perp(w) = 0$ と定義する．

可能性分布 π の $A \subseteq \Omega$ に関する拡大は,「真の世界 w_0 は A に含まれる」という情報 $w_0 \in A$ に基づいて，真の可能世界の候補を A に含まれる可能世界に限定する操作である．π を A に関して拡大して得られる新たな可能性分布を π^+_A と表す．可能性理論に基づく拡大の操作は以下の構成規則として表現される．

$$\pi^+_A(w) = \begin{cases} \min\{\mu_A(w), \pi(w)\}, & \Pi(A) = 1, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで，μ_A は A の特性関数であり，$w \in A$ ならば $\mu_A(w) = 1$，$w \notin A$ ならば $\mu_A(w) = 0$ である．

可能性分布 π の $A \subseteq \Omega$ に関する修正は，π と矛盾する可能性のある情報 $w_0 \in A$ に従って，真の可能世界の候補を A に含まれる可能世界に限定する操作である．π を A に関して修正した結果を π^*_A と表す．可能性理論に基づく修正の操作は以下の条件付可能性測度 $\Pi(\cdot|A)$ で特徴づけられる．

$$\forall B, \Pi(A \cap B) = \Pi(B|A) * \Pi(A), \tag{5.2}$$

ここで，演算 $*$ は min または積である．演算 $*$ が min の場合は，π^*_A は以下のように定義される条件付き可能性分布 $\pi(\cdot|A)$ と等しいことが示される [10].

$$\pi(w|A) = \begin{cases} 1, & w \in A \text{ かつ} \pi(w) = \Pi(A), \\ \pi(w), & w \in A \text{ かつ} \pi(w) < \Pi(A), \\ 0, & w \notin A. \end{cases} \tag{5.3}$$

可能性理論の枠組では，AGM の修正の公準は以下の公準 (Π*1) から (Π*8) に翻訳され，$\pi^*_A = \pi(\cdot|A)$ はこれらの公準を満たす．これらの公準は，可能性理論に基づく修正の操作に関する極小変化の原則を表現する．

(Π*1) 任意の $A \subseteq \Omega$ に対して，π^*_A は可能性分布である．

(Π*2) $N^*_A(A) = 1$.

(Π*3) $\pi^+_A \leq \pi^*_A$.

(Π*4) $\Pi(A) = 1$ ならば，$\pi^*_A \leq \pi^+_A$.

(Π*5) $A = \emptyset$ であり，かつその時に限り，$\pi^*_A = \pi_\perp$.

(Π^*6) $A = B$ ならば，$\pi^*_A = \pi^*_B$.

(Π^*7) $(\pi^*_A)^+_B \leq \pi^*_{A\cap B}$.

(Π^*8) $\Pi^*_A(B) = 1$ ならば，$\pi^*_{A\cap B} \leq (\pi^*_A)^+_B$.

ここで，Π^*_A および N^*_A はそれぞれ π^*_A から構成された可能性測度および必然性測度である．公準 (Π^*3) および (Π^*4) から，$\Pi(A) = 1$ ならば修正の結果および拡大の結果は一致する．

可能性分布 π の $A \subseteq \Omega$ に関する縮小は，$w_0 \in A$ という情報を失うことを表している．π を A に関して縮小した結果を π^-_A と表す．可能性理論に基づく縮小は次の構成規則で得られる．

$$\pi^-_A(w) = \begin{cases} 1, & w \notin A \text{ かつ } \pi(w) = \Pi(\bar{A}), \\ \pi(w), & \text{その他}. \end{cases} \tag{5.4}$$

この規則は，$w_0 \in A$ という情報を失う場合の極小変化を表現する．

可能性理論の枠組では，AGM の縮小の公準は以下の公準 (Π^-1) から (Π^-8) に翻訳され，式 (5.4) で定義した縮小はこれらの公準を満たす．これらの公準は，可能性理論に基づく縮小の操作に対する極小変化の原則を表現する．

(Π^-1) 任意の $A \subseteq \Omega$ に対して，π^-_A は可能性分布である．

(Π^-2) $\pi \leq \pi^-_A$.

(Π^-3) $N(A) = 0$ ならば，$\pi^-_A = \pi$.

(Π^-4) $A = \Omega$ でない限り，$N^-_A(A) = 0$.

(Π^-5) $N(A) > 0$ ならば，$(\pi^-_A)^+_A \leq \pi$.

(Π^-6) $A = B$ ならば，$\pi^-_A = \pi^-_B$.

(Π^-7) $\pi^-_{A\cap B} \leq \max(\pi^-_A, \pi^-_B)$.

(Π^-8) $N^-_{A\cap B}(A) = 0$ ならば，$\pi^-_A \leq \pi^-_{A\cap B}$.

ここで，N^-_A は π^-_A から構成した可能性測度に対して双対的な必然性測度である．

論理的枠組の場合と同様に，可能性理論に基づく修正および縮小に対して以下の関係が成り立つ．

$$\pi^*_A = (\pi^-_{\bar{A}})^+_A. \tag{5.5}$$

$$\pi^-_A = \max(\pi, \pi^*_{\bar{A}}). \tag{5.6}$$

5.1.2 不確実な情報に基づく信念修正

可能性理論に基づく信念修正は，$N(A) = \alpha$ となる重みを伴う不確実な情報 (A, α) に対して拡張できる [10]．不確実な情報 (A, α) に関して修正する場合は，π を修正して得られた新たな可能性分布を π' とすると，π' から構成される必然性測度 N' は $N'(A) = \alpha$ かつ $N'(\bar{A}) = 0$ を満たすこと (すなわち，$\Pi'(A) = 1$ かつ $\Pi'(\bar{A}) = 1 - \alpha$) が要求される．この場合，修正後の可能性分布は以下の式で得られる．

$$\pi(w|(A, \alpha)) = \max\{\pi(w|A), (1 - \alpha) * \pi(w|\bar{A})\}. \tag{5.7}$$

ここで，演算 $*$ は min または積である．$\alpha = 1$ の場合は，$\pi(w|(A, \alpha)) = \pi(w|A)$ となる．これに対して $\alpha = 0$ の場合は π より特定的でなく，かつ $N(A) = N(\bar{A}) = 0$ を満たす可能性分布が得られる．

5.1.3 可能性理論に基づく更新

Dubois and Prade [12] は，Katsuno and Mendelzon [19] が提案した更新の操作も可能性理論に基づいて表現することを試みた．第 2 章で論じた通り，論理的枠組での更新の操作は，世界の動的な変化に基づいて得られた情報を知識ベースに反映させる操作である．論理文 ψ(知識ベース) の論理文 p(得られた新情報) に関する更新の結果を $\psi \Diamond_{KM} p$ と表す．意味論的には，ψ の p に関する更新は，ψ のそれぞれのモデル I について，I に割り当てられたモデルの集合上の半順序に基づいて，I に「最も近い」p のモデルを $\psi \Diamond_{KM} p$ のモデルとする操作として表される．

これに対して，可能性分布 π の $A \subseteq \Omega$ に関する更新は，世界の変化に基づいて得られた情報 $w_0 \in A$ に基づいて，真の可能世界の候補を A に含まれる可能世界に限定する操作である．π を A に関して更新した結果を $\pi_A^{\Diamond}$ と表す．π の A に関する更新は，すべての可能世界 $w' \in \Omega$ について，値 $\pi(w')$ を A の中で w' に「最も近い」可能世界 $w \in A$ に「移す」操作として表される．

ここで，任意の可能世界 $w \in \Omega$ および任意の空でない集合 $A \subseteq \Omega$ に対して，以下の性質を満たす A の空でない部分集合 $A(w)$ が存在すると仮定する．

1. $w \in A$ ならば，$A(w) = \{w\}$.
2. 任意の $B \subseteq \Omega$ に対して，$A(w) \cap B \subseteq \{A \cap B\}(w)$.

直感的には，$A(w)$ は A に含まれる可能世界の中で，w に「最も近い」可能世界の集合である．集合 $A(w)$ を構成するために，Dubois and Prade [12] はすべての可能世界 $w \in \Omega$ に対して，それぞれ w への「近さ」を表す Ω 上の半順序 $\leq_w$ を割り当てることができると仮定している．それぞれの w に割り当てられた半順序 $\leq_w$ において，$w' \leq_w w''$ は「w' は少なくとも w'' と同程度に w へ近い」ことを意味する．更に，$\leq_w$ において w に「最も近い」可能世界は w 自身であると仮定する．この半順序に基づいて，Dubois and Prade [12] は $A(w)$ を次式で定義している．

$$A(w) = \{w' \in A | \forall w'' \in A, w' \leq_w w''\}. \tag{5.8}$$

可能性理論に基づく更新は以下の構成規則で表現される．

$$\pi_A^{\Diamond}(w) = \begin{cases} \max_{\{w' | w \in A(w')\}} \pi(w'), & w \in A, \\ 0, & w \notin A. \end{cases} \tag{5.9}$$

式 (5.9) で定義した更新は，可能性理論の枠組で表現された更新の公準 ($\Pi^{\Diamond}1$) から ($\Pi^{\Diamond}8$) を満たす [12].

($\Pi^{\Diamond}1$) $\pi_A^{\Diamond} \leq \mu_A$.

($\Pi^{\Diamond}2$) $\pi \leq \mu_A$ ならば，$\pi_A^{\Diamond} = \pi$.

($\Pi^{\Diamond}3$) $A \neq \emptyset$ かつ π が無矛盾ならば，$\pi_A^{\Diamond}$ も無矛盾.

($\Pi^{\Diamond}4$) $A = B$ ならば，$\pi_A^{\Diamond} = \pi_B^{\Diamond}$.

($\Pi^{\Diamond}5$) $(\pi_A^{\Diamond})_B^{+} \leq \pi_{A \cap B}^{\Diamond}$.

($\Pi^{\Diamond}6$) $\pi_A^{\Diamond} \leq \mu_B$ かつ $\pi_B^{\Diamond} \leq \mu_A$ ならば，$\pi_A^{\Diamond} = \pi_B^{\Diamond}$.

($\Pi^{\Diamond}7$) π が完全ならば，$\min(\pi_A^{\Diamond}, \pi_B^{\Diamond}) \leq \pi_{A \cup B}^{\Diamond}$.

($\Pi^{\Diamond}8$) $\{\max(\pi, \pi')\}_A^{\Diamond} = \max(\pi_A^{\Diamond}, \pi_A'^{\Diamond})$.

更に，Dubois and Prade [12] は任意の $w \in \Omega$ に対して，$A(w)$ を各可能世界 w に対して割り当てられた半順序 $\leq_w$ を用いずに $A(w) = \{w' | \pi(w') = \Pi(A)\}$ と定義すると，$\pi_A^{\Diamond} = \pi_A^{*}$ となるので，可能性理論の枠組では信念修正は信念更新に含まれると述べている．

5.2 可能性理論に基づく更新の再定式化

本節では，Dubois and Prade [12] による可能性理論に基づく更新の定式化では，更新の結果が常に構成できるとは限らないことを指摘し，可能性理論に基づく更新の操作を厳密に再定式化することでこの問題を解決する．定理および命題はすべて付録で証明する．

5.2.1 従来の定式化における問題点

Dubois and Prade [12] は任意の空でない集合 $A \subseteq \Omega$ および任意の可能世界 $w \in \Omega$ に対して，A に含まれる可能世界の中で w に「最も近い」可能世界から成る空でない部分集合 $A(w) \subseteq A$ を，w に対して割り当てられた Ω 上の半順序 $\leq_w$ に基づいて式 (5.8) で定義している．式 (5.8) で定義された $A(w)$ は，A に含まれる可能世界の中で，半順序 $\leq_w$ に関して A に含まれるすべての可能世界と比較可能であり，かつ最小となる可能世界の集合となる．しかし，$\leq_w$ は半順序なので，上

述の性質を満たす可能世界が常に存在するとは限らず，式 (5.8) で定義された $A(w)$ は空集合になる場合がある．この原因は式 (5.8) による $A(w)$ の定義に問題があると考えられる．

更に，Dubois and Prade [12] は任意の $w \in \Omega$ に対して，$A(w)$ を各可能世界 w に対して割り当てられた半順序 $\leq_w$ を用いずに $A(w) = \{w' | \pi(w') = \Pi(A)\}$ と定義すると，更新の結果 $\pi_A^\diamond$ および修正の結果 π_A^* が一致すると述べている．しかし，$A(w)$ を上述の方法で定義すると，$\pi(w) < \Pi(A)$ となる $w \in A$ に対しては，$w \in A(w')$ が成り立つ w' が存在しないので，$\pi_A^\diamond(w)$ は更新の構成規則 (5.9) で定義できない．よって，Dubois and Prade [12] による定式化では，知識ベースを表す任意の可能性分布 π および $w \in \Omega$，$A \subseteq \Omega$ に対して，$\pi_A^\diamond(w)$ が更新の構成規則 (5.9) で常に構成できるとは限らない．

5.2.2 可能性理論に基づく更新の再定式化

ここでは，前節で指摘した問題点をふまえ，可能性理論に基づく更新を再定式化する．

Dubois and Prade [12] と同様に，すべての可能世界 $w \in \Omega$ に対して，それぞれ w への「近さ」を表す Ω 上の半順序 $\preceq_w$ が割り当てられると仮定する．$w' \preceq_w w''$ は「w' は少なくとも w'' と同程度に w へ近い」ことを意味する．$w' \preceq_w w''$ かつ $w'' \not\preceq_w w'$ であり，かつそのときに限り $w' \prec_w w''$ と表す．また，それぞれの w に割り当てられる半順序 $\preceq_w$ は以下の性質を満たすと仮定する．

$$\text{すべての } w' \in \Omega \text{に対して } w \preceq_w w' \text{であり，かつ } w \neq w' \text{ならば } w \prec_w w'. \tag{5.10}$$

この仮定は，それぞれの w に対して割り当てられた半順序 $\preceq_w$ について，w は $\preceq_w$ に基づいてすべての可能世界と比較可能であり，かつ $\preceq_w$ で最小となる唯一の可能世界であることを要請する．$\preceq_w$ は w への「近さ」を表すので，すべての可能世界について w への「近さ」が定義されており，かつ w に「最も近い」可能世界は w 自身である必要がある．

ここで，式 (5.8) を改良し，任意の可能世界 w および任意の空でない集合 $A \subseteq \Omega$ に対して，$A(w)$ を次式で定義する．

$$A(w) = \{w' \in A | \forall w'' \in A, w'' \not\prec_w w'\}. \tag{5.11}$$

また，$A = \emptyset$ ならば，任意の w に対して $A(w) = \emptyset$ と定義する．式 (5.10) を満たす半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11) から構成した $A(w)$ は，A の中で $\preceq_w$ に関して極小となる可能世界の集合となる．また，この $A(w)$ は，Dubois and Prade [12] が仮定する性質をすべて満たす．

命題 5.1 任意の空でない集合 $A \subseteq \Omega$ および任意の可能世界 $w \in \Omega$ に対して，式 (5.10) を満たす半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11) に基づいて構成した集合 $A(w)$ は常に $A(w) \neq \emptyset$ であり，かつ以下の性質を満たす．

1. $w \in A$ ならば，$A(w) = \{w\}$．

2. 任意の $B \subseteq \Omega$ に対して，$A(w) \cap B \subseteq \{A \cap B\}(w)$．

証明は付録で示す．式 (5.11) で定義した $A(w)$ を用いて，可能性理論に基づく更新の操作を再定式化する．

定理 5.1 知識ベースを表す任意の可能性分布 π および可能世界 $w \in \Omega$，集合 $A \subseteq \Omega$ (空集合でもよい) に対して，更新の結果 $\pi_A^{\diamond}$ は式 (5.10) を満たす半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11)，更新の構成規則 (5.9) から常に構成することができ，かつ可能性理論に基づく更新の公準 $(\Pi^{\diamond}1)$ から $(\Pi^{\diamond}8)$ を満たす．

証明は付録で示す．定理 5.1 は，更新の結果は式 (5.10) を満たす任意の半順序 $\preceq_w$ および任意の半順序の割り当て方から常に構成できることを表している．これは，可能性理論に基づく更新の性質は各可能世界 w への「近さ」の「測り方」には依存しないことを意味する．

可能性理論に基づく更新および修正が同じ結果をもたらす条件は 5.3.3 節で示す．

5.3 可能性理論に基づく消去および対称的消去

本節では，Katsuno and Mendelzon [19] が提案した論理的枠組での消去の操作，および対称的消去の操作を可能性理論に基づいて新たに定式化し，その性質について考察する．前節と同様に，定理および命題はすべて付録で証明する．

5.3.1 可能性理論に基づく消去

Katsuno and Mendelzon[19] によると，論理的枠組での消去の操作は世界の動的な変化を反映して知識ベースに含まれる情報の一部を失う操作である．論理文 ψ(知識ベース) の論理文 p(失われる情報) に関する消去の結果を $\psi \blacklozenge_{KM} p$ と表す．意味論的には，ψ の p に関する消去は，ψ のそれぞれのモデル I について，I に割り当てられたモデルの集合上の半順序に基づいて，I に「最も近い」$\neg p$ のモデルを ψ のモデルの集合に追加する操作として表される．

知識ベースを表す可能性分布 π の $A \subseteq \Omega$ に関する消去は，世界の変化を反映して $w_0 \in A$ という情報を失うことを表している．π の A に関する消去の結果を $\pi_A^{\blacklozenge}$ と表す．可能性理論の枠組で表現した Katsuno and Mendelzon の消去の公準を以下に示す．

$(\Pi^{\blacklozenge}1)$ $\pi \leq \pi_A^{\blacklozenge}$.

$(\Pi^{\blacklozenge}2)$ $N(\bar{A}) = 1$ ならば，$\pi_A^{\blacklozenge} = \pi$.

$(\Pi^{\blacklozenge}3)$ π が無矛盾であり，かつ $A \neq \Omega$ ならば，$N_A^{\blacklozenge}(A) = 0$.

$(\Pi^{\blacklozenge}4)$ $A = B$ ならば，$\pi_A^{\blacklozenge} = \pi_B^{\blacklozenge}$.

$(\Pi^{\blacklozenge}5)$ $(\pi_A^{\blacklozenge})_A^{+} \leq \pi$.

$(\Pi^{\blacklozenge}8)$ $\{\max(\pi, \pi')\}_A^{\blacklozenge} = \max(\pi_A^{\blacklozenge}, \pi'^{\blacklozenge}_A)$.

ここで，$N_A^\blacklozenge$ は $\pi_A^\blacklozenge$ から構成した可能性測度に対して双対的な必然性測度である．

論理的枠組での消去および可能性理論に基づく更新の規則 (5.9) から，π の A に関する消去は $\bar{A}$ に含まれる各可能世界 w について，w に「最も近い」可能世界 w' の値 $\pi(w')$ に依存して $\pi(w)$ の値を増加させる操作とみなすことができる．よって，5.2.2 節で再定式化した可能性理論に基づく更新と同様に，すべての可能世界 $w \in \Omega$ に対して，それぞれ式 (5.10) を満たす Ω 上の半順序 $\preceq_w$ が割り当てられると仮定し，A の中で $\preceq_w$ に関して極小となる可能世界の集合 $A(w)$ を式 (5.11) で定義する．この仮定に基づいて，可能性理論に基づく消去の構成規則を次式で定義する．

$$\pi_A^\blacklozenge(w) = \begin{cases} \max_{\{w' \mid w \in \bar{A}(w')\}} \pi(w'), & w \notin A, \\ \pi(w), & w \in A. \end{cases} \tag{5.12}$$

再定式化した更新と同様に，消去の結果 $\pi_A^\blacklozenge$ は消去の構成規則 (5.12) で常に構成できる．可能性理論に基づく消去について，以下の性質が成り立つ．

定理 5.2 知識ベースを表す任意の可能性分布 π に対して，式 (5.12) に基づいて構成した $\pi_A^\blacklozenge$ は，可能性理論に基づく消去の公準 ($\Pi^\blacklozenge 1$) から ($\Pi^\blacklozenge 5$) および ($\Pi^\blacklozenge 8$) を満たす．更に，$\pi_A^\blacklozenge$ は以下の性質も満たす．

($\Pi^\blacklozenge 6$) $\pi_A^\blacklozenge \leq \mu_{A\cup\bar{B}}$ かつ $\pi_B^\blacklozenge \leq \mu_{\bar{A}\cup B}$ ならば，$\pi_A^\blacklozenge = \pi_B^\blacklozenge$.

($\Pi^\blacklozenge 7$) $\pi_{A\cap B}^\blacklozenge \leq \max(\pi_A^\blacklozenge, \pi_B^\blacklozenge)$.

証明は付録で示す．再定式化した更新と同様に，可能性理論に基づく消去の性質は各 w への「近さ」の「測り方」には依存しない．また，公準 ($\Pi^\blacklozenge 6$) および ($\Pi^\blacklozenge 7$) は可能性理論に基づく消去の公準に新たに追加された公準である．公準 ($\Pi^\blacklozenge 6$) は A と B が同値であると信じている場合に，A に関する消去と B に関する消去が同じ結果をもたらす条件を示している．公準 ($\Pi^\blacklozenge 7$) は可能性分布 π を $A \cap B$ に関して消去した場合，失われる情報は π を A に関して消去した場合または π を B に関して消去した場合より少ないことを意味する．これは，$A \cap B$ に関して消去するには，A または B のどちらか一方に関して消去すれば十分であるためである．可能性理論に基づく縮小の操作も同様の性質を満たす．以上の性質は，世界の変化を反映して知識ベースに含まれる情報の一部を失う場合の極小変化の原則を表現する．

また，可能性理論に基づく修正および縮小の関係と同様に，更新および消去に以下の関係が成り立つ．

命題 5.2 以下の式 (5.13) および式 (5.14) が成り立つ．

$$\pi_A^\lozenge = (\pi_{\bar{A}}^\blacklozenge)_A^+. \tag{5.13}$$

$$\pi_A^\blacklozenge = \max(\pi, \pi_{\bar{A}}^\lozenge). \tag{5.14}$$

証明は付録で示す．

5.3.2 可能性理論に基づく対称的消去

Katsuno and Mendelzon [19] は消去より自然な操作として対称的消去の操作を提案している．論理文 ψ(知識ベース) の論理文 p(得られた新情報) に関する更新 $\psi\Diamond_{KM}p$ に基づいて，ψ の p に関する対称的消去は以下の式で定義される．

$$(\psi\Diamond_{KM}p) \vee (\psi\Diamond_{KM}\neg p). \tag{5.15}$$

ψ の p に関する対称的消去は，世界が変化した結果，p についてまったくわからなくなったことを表現する．

可能性分布 π の $A \subseteq \Omega$ に関する対称的消去を $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ と表す．論理的枠組に基づく対称的消去の定義の類推から，可能性理論に基づく対称的消去を次式で定義する．

$$\pi^{\blacktriangle}_{A} = \max(\pi^{\Diamond}_{A}, \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}). \tag{5.16}$$

可能性理論に基づく消去および対称的消去の主な相異点は，無矛盾な可能性分布 π の A に関する消去は A に含まれる可能世界の値を変化させないのに対して，無矛盾な可能性分布 π の A に関する対称的消去は A に含まれる可能世界の値も変化させる点である．また，$A \neq \Omega$ かつ $A \neq \emptyset$ である A に対して，無矛盾な可能性分布 π の A に関する対称的消去 $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ は A に関する完全な無知を表現している．すなわち，$\pi^{\blacktriangle}_{A}$ から構成した可能性測度を $\Pi^{\blacktriangle}_{A}$ とすると，$\Pi^{\blacktriangle}_{A}(A) = \Pi^{\blacktriangle}_{A}(\bar{A}) = 1$ となる．

可能性理論に基づく更新の構成規則 (5.9) および対称的消去の定義 (5.16) から，可能性理論に基づく対称的消去の構成規則を得る．

$$\pi^{\blacktriangle}_{A}(w) = \begin{cases} \max_{\{w' \mid w \in A(w')\}} \pi(w'), & w \in A, \\ \max_{\{w' \mid w \in \bar{A}(w')\}} \pi(w'), & w \in \bar{A}. \end{cases} \tag{5.17}$$

対称的消去の結果 $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ は式 (5.17) で常に構成することができ，かつ以下の性質を満たす．

定理 5.3 知識ベースを表す任意の可能性分布 π に対して，式 (5.17) に基づいて構成した $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ は可能性理論に基づく消去の公準 ($\Pi^{\blacklozenge}1$) および ($\Pi^{\blacklozenge}3$)，($\Pi^{\blacklozenge}4$)，($\Pi^{\blacklozenge}8$) を満たす．

($\Pi^{\blacklozenge}1$) $\pi \leq \pi^{\blacktriangle}_{A}$.

($\Pi^{\blacklozenge}3$) π が無矛盾であり，かつ $A \neq \Omega$ ならば，$N^{\blacktriangle}_{A}(A) = 0$.

($\Pi^{\blacklozenge}4$) $A = B$ ならば，$\pi^{\blacktriangle}_{A} = \pi^{\blacktriangle}_{B}$.

($\Pi^{\blacklozenge}8$) $\{\max(\pi, \pi)'\}^{\blacktriangle}_{A} = \max(\pi^{\blacktriangle}_{A}, \pi'^{\blacktriangle}_{A})$.

更に，可能性理論に基づく消去の公準を弱めた以下の性質を満たす．

($\Pi^{\blacklozenge}5w$) $N(A) = 1$ ならば，$(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A} \leq \pi$.

$(\Pi^{\blacklozenge}7a)$ 任意の $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ に対して，$\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) \leq \max\{\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)\}$.

$(\Pi^{\blacklozenge}7b)$ 任意の $w \in A \cap B$ に対して，$\max\{\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)\} \leq \pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w)$.

ここで，$N^{\blacktriangle}_{A}$ は $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ から構成した可能性測度に対して双対的な必然性測度である．

証明は付録で示す．更新および消去と同様に，可能性理論に基づく対称的消去の性質も各 w への「近さ」の「測り方」には依存しない．消去から更新を定義する式 (5.13) は，対称的消去および更新の間でも成り立つ．

命題 5.3 以下の式 (5.18) が成り立つ．

$$\pi^{\lozenge}_{A} = (\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}. \tag{5.18}$$

証明は付録で示す．

5.3.3 可能性理論に基づく信念修正および信念更新の関係

本節では，π が無矛盾ならば，修正および縮小はそれぞれ更新および消去の特殊例であることを示す．まず，各可能世界 w に対して割り当てられる，式 (5.10) の条件を満たす半順序 $\preceq_w$ を，可能性分布 π に基づいて以下のように構成する．

任意の $w', w'' \in \Omega$ に対して，以下の条件のいずれか一つを満たすとき，かつそのときに限り，$w' \preceq_w w''$ である．

$$w' \preceq_w w'' \iff \begin{cases} 1.\ w' = w \text{ または } w' = w''. \\ 2.\ w' \neq w \text{ かつ } w'' \neq w \text{ かつ } \pi(w'') < \pi(w'). \end{cases} \tag{5.19}$$

式 (5.19) に基づいて構成した $\preceq_w$ が Ω 上の半順序となり，式 (5.10) の性質を満たすことは容易に確かめられる．直感的には，各可能世界 w' は，$\pi(w')$ の値が大きければ大きいほど，w に「近い」とみなされる．式 (5.19) に基づいて構成した半順序 $\preceq_w$ を用いると，任意の空でない $A \subseteq \Omega$ に対して消去 (更新) の結果が縮小 (修正) の結果と一致する集合 $A(w)$ を構成できる．

命題 5.4 可能性分布 π は無矛盾であるとする．このとき，任意の可能世界 $w \in \Omega$ および任意の空でない集合 $A \subseteq \Omega$ に対して，式 (5.19) に基づく半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11) を用いて A の空でない部分集合 $A(w)$ を構成すると，式 (5.12) に基づいて構成した π の A に関する消去の結果 $\pi^{\blacklozenge}_{A}$ は，式 (5.4) に基づいて構成した π の A に関する縮小の結果 $\pi^{-}_{\bar{A}}$ に等しい．また，式 (5.9) に基づいて構成した π の A に関する更新の結果 $\pi^{\lozenge}_{A}$ は，式 (5.3) に基づいて構成した π の A に関する修正の結果 π^{*}_{A} に等しい．

証明は付録で示す．更新の構成規則 (5.9) および消去の構成規則 (5.12) は，各可能世界への半順序の割り当て方，すなわち，可能世界 w への「近さ」の「測り方」には依存しない．よって命題 5.4 より，π が無矛盾ならば修正および縮小は，各可能世界 w' について可能世界 w への「近さ」を値 $\pi(w')$ の大きさで測った特殊な更新および消去である．

5.4 不確実な情報に基づく信念更新

本節では，可能性理論に基づく信念更新の規則を $N(A) = \alpha$ となる重みが付加された不確実な情報 (A, α) に対して拡張する．不確実な情報に基づく信念修正の場合と同様に，不確実な情報に基づいて更新を行う場合は，知識ベースを表す可能性分布 π を変更して得られる新たな可能性分布を π' とすると，π' から導かれる必然性測度 N' は $N'(A) = \alpha$ かつ $N'(\bar{A}) = 0$ を満たすこと (すなわち，$\Pi'(A) = 1$ かつ $\Pi'(\bar{A}) = 1 - \alpha$) が要求される．よって，不確実な情報に基づく信念更新の規則は，不確実な情報に基づく信念修正の規則 (5.7) の類推から次式で得られる．

$$\pi^{\diamond}(A, \alpha)(w) = \max\{\pi_A^{\diamond}(w), (1 - \alpha) * \pi_{\bar{A}}^{\diamond}(w)\}. \tag{5.20}$$

ここで，演算 $*$ は min または積である．更新の構成規則 (5.9) を用いると，式 (5.20) は次式で表現できる．

$$\pi^{\diamond}(A, \alpha)(w) = \begin{cases} \max_{\{w' | w \in A(w')\}} \pi(w'), & w \in A, \\ (1 - \alpha) * \max_{\{w' | w \in \bar{A}(w')\}} \pi(w'), & w \in \bar{A}. \end{cases} \tag{5.21}$$

式 (5.20) において $\alpha = 1$ の場合は，$\pi^{\diamond}(A, 1)(w) = \pi_A^{\diamond}(w)$ となる．これに対して，$\alpha = 0$ の場合は $\pi^{\diamond}(A, 0)(w) = \max\{\pi_A^{\diamond}(w), \pi_{\bar{A}}^{\diamond}(w)\}$ となり，π の A に関する対称的消去 $\pi_A^{\blacktriangle}$ となる．これは，対称的消去は不確実な情報に基づく信念更新の本質的な操作であることを表している．

また，命題 5.4 より π が無矛盾ならば，それぞれの可能世界に対して，更新の結果が修正の結果と一致する半順序を割り当てることができるので，不確実な情報に基づく信念修正の規則 (5.7) および重みのない入力に基づく修正の規則 (5.3)，更新の規則 (5.9)，対称的消去の規則 (5.17) は，不確実な情報に基づく信念更新の規則 (5.20) を用いて表現することができる．よって，不確実な情報に基づく信念更新の規則 (5.20) は信念変更の規則のより包括的な表現である．

第6章

結論

本論文では，信念修正および信念更新の相互関係を明らかにし，これらを統一的に扱う枠組をそれぞれ順序を持つ矢印の様相論理，および可能性理論に基づいて構築した．本論文で得られた成果およびその意義を挙げる．

1. 論理的枠組での消去の公準を再定式化し，修正および縮小，更新，再定式化した消去の相互関係を明らかにした．この結果は，信念変更の操作を統一的に扱うための理論的基礎を与える．

2. 順序を持つ矢印の様相論理体系 OAL を提案した．また，OAL に基づく信念変更モデルを提案し，修正および縮小の操作を，信念変更モデルにおいて最も「起こりやすい」状態遷移を選択する操作として定式化した．同様に，更新および消去の操作を，それぞれの状態の候補に対して最も「起こりやすい」状態遷移を選択する操作として定式化した．従来の研究では，修正および更新は本質的に異なる操作とみなされてきた．これに対して，信念変更モデルに基づく更新および修正の相異点は，現在の可能な状態の候補を個別に扱うか，まとめて扱うかの一点に集約される．信念変更モデルに基づく更新および修正は，共に全擬順序とに基づいて定義されており，状態の候補を個別に扱うか，まとめて扱うかによって全擬順序が適用される範囲が異なる．このように，一つの順序関係に基づいて修正および更新を両方特徴づけられることに，順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念変更の意義がある．

3. 可能性理論における信念更新を厳密に定式化した．また，可能性理論の枠組で定式化した消去の操作は可能性理論における縮小の操作と同様の性質を満たし，世界の変化によって所有する情報が失われる場合の極小変化に対応することを示した．また，可能性理論における修正と縮小はそれぞれ「近さ」を可能性分布の値の大きさで測った特殊な更新と消去であることを示した．本論文の定式化では，変更の操作は可能性分布の構成規則として表現されており，これは重みづけされた情報から構成される知識ベースにおいて，重みの変更にある種の妥当性を与えるものと考えられる．

最後に，今後の課題を挙げる．

1. 継続的な信念変更への拡張

   本論文で定式化した信念変更の操作は，元の知識ベースから変更後の知識ベースへの関数または構成規則として表現されており，これは一回の信念変更の操作を定式化したものである．信念変更の操作を継続的に行う場合については，継続的な信念修正（**iterated belief revision**）に関する研究が多数行われている [6, 8, 27, 30, 38]．しかし，信念修正および信念更新の操作を組み合わせた継続的な信念変更はまだ扱われていない．本論文で提案した信念変更を統一的に扱う枠組は，これらの問題に対しても有効であると考えられる．

2. 信念修正および信念更新の判別

   本論文も含めて，信念変更に関する研究では，新たに得た情報に対して修正を行うか更新を行うかはあらかじめ決められているという前提に立っている．しかし，実際に信念変更を行う知識ベース管理システムを構築する場合には，新たに得た情報に基づいて，修正を行うかまたは更新を行うかについて判別する機能が必要となる．同様に，知識ベースから情報を削除する場合にも，縮小を行うかまたは消去を行うかについて判別する必要がある．この機能に関する理論的定式化には，本論文で展開した状態遷移に基づく定式化の方法が有効であると考えられる．

3. データベース管理システムへの応用

   本論文では，知識ベースを論理文の集合や可能性分布として抽象的に表現した．そのため，知識ベース自身の構造や扱う情報の構造については特に制約を設けていない．これに対して，実際に運用されているデータベースでは，データベース自身の構造や扱うデータの構造が厳密に定義されている．これらの構造的な制約を考慮に入れることで，本論文で得られた知見は，データベース管理システムの理論的基礎として位置付けることができると思われる．

謝辞

本論文を閉じるにあたりまして，北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻 伊達 惇 教授に厚く御礼申し上げます．同大学大学院工学研究科入学以来，大変親切な御指導，御助言をいただき，私が本研究を完成させることができました．

本論文の作成に際し，大変貴重な御指摘，御助言をいただきました同大学大学院工学研究科システム情報工学専攻 新保 勝 教授，宮腰 政明 教授に深く感謝させていただきます．

また，時間を問わず相談に乗っていただきました同大学大学院工学研究科システム情報工学専攻 村井 哲也 助教授に深く感謝いたします．

更に，入学以来いろいろお世話になりました同大学大学院工学研究科 システム情報工学専攻 野中 秀俊 助教授に感謝します．塩谷 浩之 助手はじめ知能情報工学分野の皆様にもいろいろお世話になりました．

最後に，父 工藤 博信と母 工藤 美智に対して深く謝意を表します．

付録 A.

証明

A.1 第 3 章の定理・補題の証明

命題 3.1 消去関数$^\blacklozenge$が公準 ($^\blacklozenge1$) から ($^\blacklozenge4$) を満たすとする．このとき，$p \in T_p^\blacklozenge$ であることの必要十分条件は，T が矛盾するか，または$\vdash p$が成り立つことである．

(証明)

必要条件は ($^\blacklozenge4$) の対偶より明らか．十分条件について示す．$\vdash p$ の場合は明らかなので，T が矛盾すると仮定する．仮定より任意の p に対して，$p \in T$ かつ $\neg p \in T$ となる．このとき，($^\blacklozenge3$) より $T_p^\blacklozenge = T$ となるので，$p \in T_p^\blacklozenge$ を得る．

(*Q.E.D*)

命題 3.2 消去関数$^\blacklozenge$が公準 ($^\blacklozenge1$) から ($^\blacklozenge4$) を満たすとする．このとき，もし $p \in T$ ならば，$(T_p^\blacklozenge)_p^+ \subseteq T$．

(証明)

消去関数$^\blacklozenge$が ($^\blacklozenge1$) から ($^\blacklozenge4$) を満たすとする．また，$p \in T$ と仮定する．($^\blacklozenge2$) および ($^+5$) より，$(T_p^\blacklozenge)_p \subseteq T_p^+$ となる．ここで，$p \in T$ なので，($^+4$) より $T_p^+ = T$．よって $(T_p^\blacklozenge)_p^+ \subseteq T$ が得られる．

(*Q.E.D*)

命題 3.4 消去関数$^\blacklozenge$が ($^\blacklozenge9$) を満たすとする．このとき，任意の信念集合 $T, U \in \mathcal{T_L}$ に対して，もし $T \subseteq U$ ならば，$T_p^\blacklozenge \subseteq U_p^\blacklozenge$．

(証明)

信念集合 T および U に対して，$T \subseteq U$ と仮定する．ここで，無矛盾で完全な信念集合の集合族の性質より，$[T]$ および $[U]$ について $[U] \subseteq [T]$ が成り立つ．よって，$[T] = [U] \cup ([U] - [T])$ と表すことができる．ここで，$[U] - [T]$ は $[U]$ と $[T]$ の差集合である．($^\blacklozenge$9) より，$T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K \in [T]} K_p^\blacklozenge = \bigcap_{K \in \{[U] \cup ([U]-[T])\}} K_p^\blacklozenge = \{\bigcap_{K \in [U]} K_p^\blacklozenge\} \cap \{\bigcap_{K \in ([U]-[T])\}} K_p^\blacklozenge\}$ $\subseteq \bigcap_{K \in [U]} K_p^\blacklozenge$ である．よって，($^\blacklozenge$9) より $U_p^\blacklozenge = \bigcap_{K \in [U]} K_p^\blacklozenge$ となり，$T_p^\blacklozenge \subseteq U_p^\blacklozenge$ を得る．

$(Q.E.D)$

定理 3.1 消去関数 $^\blacklozenge$ が消去の公準 ($^\blacklozenge$1) から ($^\blacklozenge$4)，($^\blacklozenge$6) および ($^\blacklozenge$9) を満たすとする．このとき，(EtoU) 同一性に基づいて $^\blacklozenge$ から構成した関数 $^\Diamond$ は更新の公準 ($^\Diamond$1) から ($^\Diamond$5) および ($^\Diamond$8) を満たす．

(証明)

消去関数 $^\blacklozenge$ が消去の公準 ($^\blacklozenge$1) から ($^\blacklozenge$4) および ($^\blacklozenge$6) を満たすとする．このとき，(EtoU) 同一性に基づいて $^\blacklozenge$ から構成した関数 $^\Diamond$ が更新の公準 ($^\Diamond$1) から ($^\Diamond$5) および ($^\Diamond$8) を満たすことを示す．($^\Diamond$1)，($^\Diamond$2) は拡大関数の定義より明らか．

($^\Diamond$3): $p \in T$ と仮定する．ここで $\vdash \neg\neg p \equiv p$ なので，($^\blacklozenge$6) および ($^\blacklozenge$3) より $T_{\neg p}^\blacklozenge = T$ となる．よって，$T_p^\Diamond = (T_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+ = T_p^+ = T$.

($^\Diamond$4): $T_p^\Diamond$ が矛盾すると仮定する．$(EtoU)$ 同一性より $(T_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+$ が矛盾するので，特に $\neg p \in T_{\neg p}^\blacklozenge$．よって，命題 3.1 より T が矛盾するか，または $\vdash \neg p$ である．逆に，T が矛盾するか，または $\vdash \neg p$ であるとする．命題 3.1 より $\neg p \in T_{\neg p}^\blacklozenge$ であるので，$(EtoU)$ 同一性より $T_p^\Diamond = (T_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+$ が矛盾する．

($^\Diamond$5): $\vdash p \equiv q$ とする．このとき，$\vdash \neg p \equiv \neg q$ も成り立つので，($^\blacklozenge$6) より $T_{\neg p}^\blacklozenge = T_{\neg q}^\blacklozenge$ である．よって $(T_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+ = (T_{\neg q}^\blacklozenge)_q^+$ なので，$(EtoU)$ 同一性より $T_p^\Diamond = T_q^\Diamond$ が成り立つ．

($^\Diamond$8): T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．($^\blacklozenge$9) より $T_{\neg p}^\blacklozenge = \bigcap_{K \in [T]} K_{\neg p}^\blacklozenge$ である．$(EtoU)$ 同一性より $T_p^\Diamond = (\bigcap_{K \in [T]} K_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+$．更に，拡大関数の性質より，$(\bigcap_{K \in [T]} K_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+ = \bigcap_{K \in [T]} (K_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+$ である．ここで，$(EtoU)$ 同一性よりすべての $K \in [T]$ に対して $K_p^\Diamond = (K_{\neg p}^\blacklozenge)_p^+$ が成り立つので，故に $T_p^\Diamond = \bigcap_{K \in [T]} K_p^\Diamond$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

定理 3.2 消去関数 $^\blacklozenge$ が消去の公準 ($^\blacklozenge$1) から ($^\blacklozenge$6) および ($^\blacklozenge$9) を満たすとする．このとき，(EtoU) 同一性に基づいて $^\blacklozenge$ から構成した関数 $^\Diamond$ に対して，

1. $^\blacklozenge$ が消去の公準 ($^\blacklozenge$7) を満たすならば，$^\Diamond$ は更新の公準 ($^\Diamond$6) を満たす．
2. $^\blacklozenge$ が消去の公準 ($^\blacklozenge$8) を満たすならば，$^\Diamond$ は更新の公準 ($^\Diamond$7) を満たす．

(証明)

T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．消去関数 $^\blacklozenge$ が消去の公準 $(^\blacklozenge 1)$ から $(^\blacklozenge 6)$ および $(^\blacklozenge 9)$ を満たすとする．よって，定理 3.1 より，$(EtoU)$ 同一性に基づいて $^\blacklozenge$ から構成した関数 $^\lozenge$ は，更新の公準 $(^\lozenge 1)$ から $(^\lozenge 5)$ および $(^\lozenge 8)$ を満たす．

まず，$^\blacklozenge$ が $(^\blacklozenge 7)$ を満たすならば，$^\lozenge$ が $(^\lozenge 6)$ を満たすことを示す．任意の論理文 $r \in \mathcal{L}$ に対して，$r \in T^\lozenge_{p\wedge q}$ ならば $r \in (T^\lozenge_p)^+_q$ であることを示せばよい．ここで，$r \in T^\lozenge_{p\wedge q}$ と仮定する．$(EtoU)$ 同一性および拡大関数の性質より，$(T^\lozenge_p)^+_q = ((T^\blacklozenge_{\neg p})^+_p)^+_q = (T^\blacklozenge_{\neg p})^+_{p\wedge q}$ である．ここで，$\neg p$ は $\neg(p \wedge q) \wedge (p \to q)$ と論理的に同値な論理文なので，$(^\blacklozenge 6)$ より $T^\blacklozenge_{\neg p} = T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)\wedge(p\to q)}$ である．また，$(^\blacklozenge 7)$ より $T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)} \cap T^\blacklozenge_{p\to q} \subseteq T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)\wedge(p\to q)}$ であるので，$r \in (T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)})^+_{p\wedge q}$ かつ $r \in (T^\blacklozenge_{p\to q})^+_{p\wedge q}$ であることを示せば十分である．ところが，仮定より $r \in T^\lozenge_{p\wedge q} = (T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)})^+_{p\wedge q}$ であるので，前者は明らか．よって，後者についてのみ示す．

仮定より T は無矛盾で，かつ $r \in T^\lozenge_{p\wedge q}$ なので，$(^\blacklozenge 9)$ および拡大関数の性質より $r \in T^\lozenge_{p\wedge q} = (T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)})^+_{p\wedge q} = \bigcap_{K\in[T]}(K^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)})^+_{p\wedge q}$ である．よって，すべての $K \in [T]$ に対して $(p\wedge q) \to r \in K^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)}$ となり，$(^\blacklozenge 2)$ より $K^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)} \subseteq K$ であるので，コンパクト性から $(p\wedge q) \to r \in T = \bigcap_{K\in[T]} K$ が成り立つ．故に，$(^\blacklozenge 5)$ より $(p \to q) \to ((p\wedge q) \to r) \in T^\blacklozenge_{p\to q}$ となる．しかし，$(p \to q) \to ((p \wedge q) \to r)$ は $(p \wedge q) \to r$ と論理的に同値な論理文なので，$r \in (T^\blacklozenge_{p\to q})^+_{p\wedge q}$ が成り立つ．

次に，$^\blacklozenge$ が $(^\blacklozenge 8)$ を満たすならば，$^\lozenge$ が $(^\lozenge 7)$ を満たすことを示す．ここで，T は完全な信念集合で，かつ $\neg q \notin T^\lozenge_p$ であると仮定する．$\neg p$ は $(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p$ と論理的に同値な論理文なので，$(^\blacklozenge 6)$ より $T^\blacklozenge_{\neg p} = T^\blacklozenge_{(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg p}$ である．更に，仮定より $\neg q \notin T^\lozenge_p = (T^\blacklozenge_{\neg p})^+_p$ なので，$\neg p \vee \neg q \notin T^\blacklozenge_{\neg p}$ である．故に，$(^\blacklozenge 8)$ より $T^\blacklozenge_{\neg p} = T^\blacklozenge_{(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg p} \subseteq T^\blacklozenge_{\neg p\vee\neg q} = T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)}$ となり，$(T^\lozenge_p)^+_q = ((T^\blacklozenge_{\neg p})^+_p)^+_q = (T^\blacklozenge_{\neg p})^+_{p\wedge q} \subseteq (T^\blacklozenge_{\neg(p\wedge q)})^+_{p\wedge q} = T^\lozenge_{p\wedge q}$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

定理 3.3 更新関数 $^\lozenge$ が更新の公準 $(^\lozenge 1)$ から $(^\lozenge 5)$ および $(^\lozenge 8)$ を満たすとする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて $^\lozenge$ から構成した関数 $^\blacklozenge$ は消去の公準 $(^\blacklozenge 1)$ から $(^\blacklozenge 6)$ および $(^\blacklozenge 9)$ を満たす．

(証明)

更新関数 $^\lozenge$ が更新の公準 $(^\lozenge 1)$ から $(^\lozenge 5)$ および $(^\lozenge 8)$ を満たすとする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて $^\lozenge$ から構成した関数 $^\blacklozenge$ は，消去の公準 $(^\blacklozenge 1)$ から $(^\blacklozenge 6)$ および $(^\blacklozenge 9)$ を満たすことを示す．$(^\blacklozenge 1)$ から $(^\blacklozenge 3)$ はそれぞれ $(^\lozenge 1)$ から $(^\lozenge 3)$ より明らか．

$(^\blacklozenge 4)$: T は無矛盾かつ $\not\vdash p$ と仮定する．$\vdash \neg\neg p \equiv p$ なので，$(^\lozenge 4)$ および $(^\lozenge 5)$ より $T^\lozenge_{\neg p}$ は無矛盾．仮定より T は無矛盾なので，$(UtoE)$ 同一性より $T \cap T^\lozenge_{\neg p}$ は無矛盾となり，$p \notin T^\blacklozenge_p$ が成り立つ．

($^\blacklozenge 5$): $(UtoE)$ 同一性および拡大関数の性質より，$(T_p^\blacklozenge)_p^+ = (T \cap T_{\neg p}^\lozenge)_p^+ = T_p^+ \cap (T_{\neg p}^\lozenge)_p^+$ である．ここで，($^\lozenge 2$) より $\neg p \in T_{\neg p}^\lozenge$ なので，$(T_{\neg p}^\lozenge)_p^+$ は矛盾する．よって $T_p^+ \cap (T_{\neg p}^\lozenge)_p^+ = T_p^+$ である．また，$T \subseteq T_p^+$ であるので，故に $T \subseteq T_p^+ \cap (T_{\neg p}^\lozenge)_p^+ = (T_p^\blacklozenge)_p^+$.

($^\blacklozenge 6$): $\vdash p \equiv q$ とする．このとき，$\vdash \neg p \equiv \neg q$ も成り立つので，($^\lozenge 5$) より $T_{\neg p}^\lozenge = T_{\neg q}^\lozenge$ である．よって $T \cap T_{\neg p}^\lozenge = T \cap T_{\neg q}^\lozenge$ なので，$(UtoE)$ 同一性より $T_p^\blacklozenge = T_q^\blacklozenge$ が成り立つ．

($^\blacklozenge 9$): T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．($^\lozenge 8$) より $T_{\neg p}^\lozenge = \bigcap_{K \in [T]} K_{\neg p}^\lozenge$ である．$(UtoE)$ 同一性およびコンパクト性より，$T_p^\blacklozenge = T \cap (\bigcap_{K \in [T]} K_{\neg p}^\lozenge) = \bigcap_{K \in [T]} (K \cap K_{\neg p}^\lozenge)$ となる．ここで，再び $(UtoE)$ 同一性より，すべての $K \in [T]$ に対して $K_p^\blacklozenge = K \cap K_{\neg p}^\lozenge$ が成り立つので，故に $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K \in [T]} K_p^\blacklozenge$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

定理 3.4 更新関数 $^\lozenge$ が更新の公準 ($^\lozenge 1$) から ($^\lozenge 5$) および ($^\lozenge 8$) を満たすとする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて $^\lozenge$ から構成した関数 $^\blacklozenge$ に対して，

1. $^\lozenge$ が更新の公準 ($^\lozenge 6$) を満たすならば，$^\blacklozenge$ は消去の公準 ($^\blacklozenge 7$) を満たす．
2. $^\lozenge$ が更新の公準 ($^\lozenge 7$) を満たすならば，$^\blacklozenge$ は消去の公準 ($^\blacklozenge 8$) を満たす．

(証明)

更新関数 $^\lozenge$ が更新の公準 ($^\lozenge 1$) から ($^\lozenge 5$) および ($^\lozenge 8$) を満たすとする．よって，定理 **3.3** より，上で構成した関数 $^\blacklozenge$ は消去の公準 ($^\blacklozenge 1$) から ($^\blacklozenge 6$) および ($^\blacklozenge 9$) を満たす．

まず，$^\lozenge$ が ($^\lozenge 6$) を満たすとする．このとき，$^\blacklozenge$ が ($^\blacklozenge 7$) を満たすことを示す．任意の論理文 $r \in \mathcal{L}$ に対して，$r \in T_p^\blacklozenge \cap T_q^\blacklozenge$ ならば $r \in T_{p\wedge q}^\blacklozenge$ であることを示せばよい．ここで，$r \in T_p^\blacklozenge \cap T_q^\blacklozenge$ と仮定する．p は $\neg((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg p)$ と論理的に同値な論理文なので，($^\lozenge 5$) より $T_p^\lozenge = T_{\neg((\neg p \vee \neg q)\wedge \neg p)}^\lozenge$ である．また，($^\lozenge 5$)，($^\lozenge 6$) および $(EtoU)$ より，$r \in T_{\neg((\neg p \vee \neg q)\wedge \neg p)}^\blacklozenge = T \cap T_{(\neg p \vee \neg q)\wedge \neg p}^\lozenge \subseteq T_{(\neg p \vee \neg q)\wedge \neg p}^\lozenge \subseteq (T_{\neg p \vee \neg q}^\lozenge)_{\neg p}^+$ となるので，$\neg p \to r \in T_{\neg p \vee \neg q}^\lozenge$ である．また，p は $\neg((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg q)$ とも同値なので，上と同様の議論によって $r \in (T_{\neg p \vee \neg q}^\lozenge)_{\neg q}^+$ を得て，$\neg q \to r \in T_{\neg p \vee \neg q}^\lozenge$ となる．これらを組み合わせることで $(\neg p \vee \neg q) \to r \in T_{\neg p \vee \neg q}^\lozenge$ となり，$r \in T_{\neg p \vee \neg q}^\lozenge = (T_{p\wedge q}^\blacklozenge)_{\neg(p\wedge q)}^+$ が成り立つ．また，仮定および ($^\blacklozenge 2$) から $r \in T$ が成り立つので，($^\blacklozenge 5$) より $r \in (T_{p\wedge q}^\blacklozenge)_{p\wedge q}^+$. よって，上と同様の議論によって $r \in T_{p\wedge q}^\blacklozenge$ を得る．

次に，$^\lozenge$ が ($^\lozenge 7$) を満たすとする．このとき，$^\blacklozenge$ が ($^\blacklozenge 8$) を満たすことを示す．ここで，T は完全な信念集合で，かつ $p \notin T_{p\wedge q}^\blacklozenge$ と仮定する．よって，明らかに $p \notin (T_{p\wedge q}^\blacklozenge)_{\neg(p\wedge q)}^+ = T_{\neg(p\wedge q)}^\lozenge$. ($^\lozenge 7$) より $(T_{\neg(p\wedge q)}^\lozenge)_{\neg p}^+ \subseteq T_{\neg(p\wedge q)\wedge \neg p}^\lozenge$ である．ここで，$\neg p$ は $\neg(p \wedge q) \wedge \neg p$ と論理的に同値な論理文なので，$T_{\neg(p\wedge q)\wedge\neg p}^\lozenge = T_{\neg p}^\lozenge = (T_p^\blacklozenge)_{\neg p}^+$ が成り立つ．これよ

り，$T^{\blacklozenge}_{p\wedge q} \subseteq (T^{\blacklozenge}_p)^+_{\neg p}$ を得る．また，(${}^{\blacklozenge}2$) および (${}^{\blacklozenge}5$) より $T^{\blacklozenge}_{p\wedge q} \subseteq T \subseteq (T^{\blacklozenge}_p)^+_p$．故に，$T^{\blacklozenge}_{p\wedge q} \subseteq T^{\blacklozenge}_p$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

命題 3.5 ${\blacklozenge_1}$ をある消去関数，${\lozenge}$ を (EtoU) 同一性に基づいて ${\blacklozenge_1}$ から構成した更新関数とする．このとき，(UtoE) 同一性に基づいて ${\lozenge}$ から構成した消去関数 ${\blacklozenge_2}$ は ${\blacklozenge_1}$ と等しい．

(証明)

任意の信念集合 T および任意の論理文 p に対して，$T^{\blacklozenge_1}_p = T^{\blacklozenge_2}_p$ が成り立つことを示す．T が矛盾する場合は，$T^{\blacklozenge_1}_p$ および $T^{\blacklozenge_2}_p$ が共に矛盾するので明らか．以下，T は無矛盾と仮定する．(${}^{\blacklozenge}6$) より $T^{\blacklozenge_1}_{\neg\neg p} = T^{\blacklozenge_1}_p$ なので，($EtoU$) 同一性および ($UtoE$) 同一性から $T^{\blacklozenge_2}_p = T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p}$ となる．

まず $T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p} \subseteq T^{\blacklozenge_1}_p$ を示す．(${}^{\blacklozenge}5$) より $T \subseteq (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_p$ なので，よって $T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p}$ $\subseteq (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_p \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p} = Cn(T^{\blacklozenge_1}_p \cup \{p\}) \cap Cn(T^{\blacklozenge_1}_p \cup \{\neg p\}) = Cn(T^{\blacklozenge_1}_p) = T^{\blacklozenge_1}_p$ が成り立つ．

次に $T^{\blacklozenge_1}_p \subseteq T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p}$ を示す．(${}^{\blacklozenge}2$) より $T^{\blacklozenge_1}_p \subseteq T$ なので，すべての $q \in T^{\blacklozenge_1}_p$ に対して $q \in T$ である．また，$q \in (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p}$ なので，$q \in T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p}$ となり，$T^{\blacklozenge_1}_p \subseteq T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p}$ が成り立つ．よって，$T^{\blacklozenge_2}_p = T \cap (T^{\blacklozenge_1}_p)^+_{\neg p} = T^{\blacklozenge_1}_p$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

命題 3.6 ${\lozenge_1}$ をある更新関数，${\blacklozenge}$ を ($UtoE$) 同一性に基づいて ${\lozenge_1}$ から構成した消去関数とする．このとき，($EtoU$) 同一性に基づいて ${\blacklozenge}$ から構成した更新関数 ${\lozenge_2}$ は ${\lozenge_1}$ と等しい．

(証明)

任意の信念集合 T および任意の論理文 p に対して，$T^{\lozenge_1}_p = T^{\lozenge_2}_p$ が成り立つことを示す．T が矛盾する場合は明らかに $T^{\lozenge_1}_p$ と $T^{\lozenge_2}_p$ が共に矛盾するので，以下 T は無矛盾とする．($UtoE$) 同一性および (${}^{\lozenge}5$) より $T^{\blacklozenge}_{\neg p} = T \cap T^{\lozenge_1}_p$ なので，$T^{\lozenge_2}_p = (T \cap T^{\lozenge_1}_p)^+_p$ $= T^+_p \cap (T^{\lozenge_1}_p)^+_p$ となる．ここで，(${}^{\lozenge}2$) より $p \in T^{\lozenge_1}_p$ なので，$T^{\lozenge_2}_p = T^+_p \cap T^{\lozenge_1}_p$ となる．よって，$T^{\lozenge_1}_p \subseteq T^+_p$ を示せば十分である．

コンパクト性および拡大関数の性質より $T^+_p = (\bigcap_{K\in[T]} K)^+_p = \bigcap_{K\in[T]} K^+_p = \bigcap_{K\in[T]}$ $Cn(K \cup \{p\})$ である．ここで，すべての $K \in [T]$ に対して $p \in K$ か $\neg p \in K$ のいずれか一方のみが成り立つので，$T^+_p = \bigcap\{K \in [T] \mid p \in K\}$ となる．同様に，(${}^{\lozenge}8$) より $T^{\lozenge_1}_p = \bigcap_{K\in[T]} K^{\lozenge_1}_p = \bigcap\{K^{\lozenge_1}_p \mid K \in [T], p \in K\} \cap \bigcap\{K^{\lozenge_1}_p \mid K \in [T], \neg p \in K\}$．(${}^{\lozenge}3$) より，$p \in K$ ならば $K^{\lozenge_1}_p = K$ なので，$T^{\lozenge_1}_p = \bigcap\{K \in [T] \mid p \in K\} \cap \bigcap\{K^{\lozenge_1}_p \mid K \in$ $[T], \neg p \in K\} \subseteq \bigcap\{K \in [T] \mid p \in K\} = T^+_p$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

定理 3.5 縮小関数 $^-$ が AGM の縮小の公準 ($^-1$) から ($^-8$) を満たすとする．このとき，(CtoE) 同一性に基づいて $^-$ から構成した関数 $^\blacklozenge$ は，消去の公準 ($^\blacklozenge 1$) から ($^\blacklozenge 9$) を満たす．

(証明)

$^-$ が ($^-1$) から ($^-8$) を満たすとする．このとき，(CtoE) 同一性に基づいて $^-$ から構成した関数 $^\blacklozenge$ が，消去の公準 ($^\blacklozenge 1$) から ($^\blacklozenge 9$) を満たすことを示す．($^\blacklozenge 1$) は ($^-1$) より明らか．

($^\blacklozenge 2$): T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．$(CtoE)$ 同一性より $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^-$．ここで，($^-2$) より $K_p^- \subseteq K$ なので，コンパクト性より $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^- \subseteq \bigcap_{K\in[T]} K = T$．

($^\blacklozenge 3$): T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．また，$\neg p \in T$ と仮定する．このとき，$T_p^\blacklozenge = T$ であることを示す．仮定およびコンパクト性より $\neg p \in T = \bigcap_{K\in[T]} K$．よって，すべての $K \in [T]$ に対して $\neg p \in K$ であるが，それぞれの K は無矛盾で完全な信念集合なので，すべての $K \in [T]$ に対して $p \notin K$．よって，($^-3$) より $K_p^- = K$ なので，$T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^- = \bigcap_{K\in[T]} K = T$ が成り立つ．

($^\blacklozenge 4$): T は無矛盾かつ $\nvdash p$ と仮定する．T は無矛盾なので $(CtoE)$ 同一性より $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^-$．仮定より $\nvdash p$ なので，($^-4$) よりそれぞれの $K \in [T]$ に対して $p \notin K_p^-$．よって $p \notin T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^-$ が成り立つ．

($^\blacklozenge 5$): T が矛盾する場合は $(CtoE)$ 同一性より $T = (T_p^\blacklozenge)_p^+ = \mathcal{L}$ となり明らかなので，T は無矛盾と仮定する．コンパクト性より $T = \bigcap_{K\in[T]} K$．それぞれの $K \in [T]$ は無矛盾で完全な信念集合なので，$p \in K$ か $\neg p \in K$ のどちらか一方のみが成り立つが，$p \in K$ ならば，($^-5$) より $K \subseteq (K_p^-)_p^+$．また，$\neg p \in K$ ならば $p \notin K$ であるので，($^-3$) より $(K_p^-)_p^+ = K_p^+ = \mathcal{L}$ となり，いずれの場合でも $K \subseteq (K_p^-)_p^+$ が成り立つ．よって，$T = \bigcap_{K\in[T]} K \subseteq \bigcap_{K\in[T]}(K_p^-)_p^+ = (\bigcap_{K\in[T]} K_p^-)_p^+ = (T_p^\blacklozenge)_p^+$．

($^\blacklozenge 6$): T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．また，$\vdash p \equiv q$ とする．T は無矛盾なので $(CtoE)$ 同一性より $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^-$．仮定より $\vdash p \equiv q$ なので，($^-6$) よりそれぞれの $K \in [T]$ に対して $K_p^- = K_q^-$．よって $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^- = \bigcap_{K\in[T]} K_q^- = T_q^\blacklozenge$．

($^\blacklozenge 7$): T が矛盾する場合は明らかなので，T は無矛盾と仮定する．$(CtoE)$ 同一性より $T_p^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_p^-$．同様に $T_q^\blacklozenge = \bigcap_{K\in[T]} K_q^-$．($^-7$) より，それぞれの $K \in [T]$ に対して $K_p^- \cap K_q^- \subseteq K_{p\wedge q}^-$．よって，$T_p^\blacklozenge \cap T_q^\blacklozenge = (\bigcap_{K\in[T]} K_p^-) \cap (\bigcap_{K\in[T]} K_q^-) = \bigcap_{K\in[T]}(K_p^- \cap K_q^-) \subseteq \bigcap_{K\in[T]} K_{p\wedge q}^- = T_{p\wedge q}^\blacklozenge$ が成り立つ．

($^\blacklozenge$8): T は完全であり，かつ $p \notin T^\blacklozenge_{p\wedge q}$ と仮定する．T が完全であることから，$(CtoE)$ 同一性より $T^\blacklozenge_p = T^-_p$．よって仮定より $p \notin T^-_{p\wedge q}$ となり，($^-$8) より $T^-_{p\wedge q} \subseteq T^-_p$ すなわち $T^\blacklozenge_{p\wedge q} \subseteq T^\blacklozenge_p$ が成り立つ．

($^\blacklozenge$9): T は無矛盾と仮定する．$(CtoE)$ 同一性より，すべての無矛盾で完全な信念集合 K に対して $K^\blacklozenge_p = K^-_p$．よって，再び $(CtoE)$ 同一性より $T^\blacklozenge_p = \bigcap_{K\in[T]} K^\blacklozenge_p$ を得る．

$(Q.E.D)$

定理 3.6 消去の公準 ($^\blacklozenge$1) から ($^\blacklozenge$9) を満たすすべての消去関数 $^\blacklozenge$ に対して，(CtoE) 同一性に基づいてその消去関数を構成する縮小関数 $^-$ が存在する．

(証明)

まず，($^\blacklozenge$1) から ($^\blacklozenge$9) を満たす任意の消去関数 $^\blacklozenge$ は，任意の無矛盾で完全な信念集合 K に対して，縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$8) を満たすことを示す．ここでは，($^-$3) についてのみ示す．他の公準については明らか．

($^-$3): $p \notin K$ と仮定する．K は無矛盾で完全な信念集合なので，$\neg p \in K$ となる．($^\blacklozenge$3) より $K^\blacklozenge_p = K$ となるので，$^\blacklozenge$ は ($^-$3) を満たす．

よって，$^\blacklozenge$ は，任意の無矛盾で完全な信念集合 K に対して，($^-$1) から ($^-$8) を満たすことが示された．このことから，ある縮小関数 $^-$ が存在して，任意の無矛盾で完全な信念集合 K に対して $K^\blacklozenge_p = K^-_p$．

次に，このような縮小関数 $^-$ から $(CtoE)$ 同一性に基づいて構成した消去関数 $^{\blacklozenge\prime}$ が $^\blacklozenge$ と等しいことを示す．すわなち，任意の信念集合 T に対して $T^\blacklozenge_p = T^{\blacklozenge\prime}_p$ を示す．T が矛盾する場合は明らか．T が無矛盾ならば，($^\blacklozenge$9) および $(CtoE)$ 同一性より，$T^\blacklozenge_p = \bigcap_{K\in[T]} K^\blacklozenge_p$ $= \bigcap_{K\in[T]} K^-_p = T^{\blacklozenge\prime}_p$ となる．よって定理が示された．

$(Q.E.D)$

補題 3.1 修正関数 * が AGM の修正の公準 (*1) から (*8) を満たすとする．また，$^\diamond$ を Winslett 同一性に基づいて * から構成した更新関数とする．更に，$^{\blacklozenge_1}$ を (RtoE) 同一性に基づいて * から構成した関数，$^{\blacklozenge_2}$ を (UtoE) 同一性に基づいて $^\diamond$ から構成した消去関数とする．このとき，$^{\blacklozenge_1}$ は $^{\blacklozenge_2}$ と等しい．

(証明)

任意の信念集合 T および任意の論理文 p に対して，$T^{\blacklozenge_1}_p = T^{\blacklozenge_2}_p$ となることを示す．T が矛盾する場合は $T^{\blacklozenge_1}_p$ および $T^{\blacklozenge_2}_p$ が共に矛盾するので明らか．以下 T は無矛盾とす

る．$(RtoE)$ 同一性より，$T_p^{\blacklozenge_1} = \bigcap_{K\in[T]}(K \cap K^*_{\neg p})$ である．また，Winslett 同一性より $T^{\lozenge}_{\neg p} = \bigcap_{K\in[T]} K^*_{\neg p}$ なので，$(UtoE)$ 同一性より，$T_p^{\blacklozenge_2} = T \cap T^{\lozenge}_{\neg p} = T \cap (\bigcap_{K\in[T]} K^*_{\neg p})$ である．ここで，コンパクト性より $T = \bigcap_{K\in[T]} K$ と表せるので，$T_p^{\blacklozenge_2} = (\bigcap_{K\in[T]} K)\cap (\bigcap_{K\in[T]} K^*_{\neg p}) = \bigcap_{K\in[T]}(K \cap K^*_{\neg p})$ となる．これは $(RtoE)$ 同一性に等しいので，$T_p^{\blacklozenge_1} = T_p^{\blacklozenge_2}$ が成り立つ．よって $\blacklozenge_1$ は $\blacklozenge_2$ と等しい．

$(Q.E.D)$

定理 3.7 修正関数 $*$ が AGM の修正の公準 ($*$1) から ($*$8) を満たすとする．このとき，(RtoE) 同一性に基づいて $*$ から構成した関数 $\blacklozenge$ は消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす．また，消去の公準 ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たすすべての消去関数 $\blacklozenge$ に対して，(RtoE) 同一性に基づいてその消去関数を構成する修正関数 $*$ が存在する

(証明)

上で構成した $\blacklozenge$ が ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たすことは補題 3.1 より明らか．($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たすすべての消去関数 $\blacklozenge$ に対して，$(RtoE)$ 同一性に基づいてその消去関数を構成する修正関数 $*$ が存在することを示す．定理 3.2 および命題 3.5 より，($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たす任意の消去関数 $\blacklozenge$ に対して，$(UtoE)$ 同一性に基づいて $\blacklozenge$ を構成するある更新関数 $\lozenge$ が存在し，($\lozenge$1) から ($\lozenge$8) を満たす．更に，定理 2.8 より，($\lozenge$1) から ($\lozenge$8) を満たすすべての更新関数 $\lozenge$ に対して，Winslett 同一性に基づいて $\lozenge$ を構成する修正関数 $*$ が存在し，($*$1) から ($*$8) を満たす．ここで，補題 3.1 より $(RtoE)$ 同一性に基づいて $*$ から構成した関数と Wilslett 同一性および $(UtoE)$ 同一性に基づいて $*$ から構成した消去関数は等しくなるので，よって ($\blacklozenge$1) から ($\blacklozenge$9) を満たすすべての消去関数に対して，$(RtoE)$ 同一性に基づいてその消去関数を構成する修正関数が存在する．

$(Q.E.D)$

補題 3.2 縮小関数 $^-$ が AGM の縮小の公準 ($^-$1) から ($^-$8) を満たすとする．また，$\blacklozenge$ を (CtoU) 同一性に基づいて $^-$ から構成した消去関数とする．更に，$\lozenge_1$ を (CtoU) 同一性に基づいて $^-$ から構成した関数，$\lozenge_2$ を (EtoU) 同一性に基づいて $\blacklozenge$ から構成した更新関数とする．このとき，$\lozenge_1$ は $\lozenge_2$ と等しい．

(証明)

任意の信念集合 T および任意の論理文 p に対して，$T_p^{\lozenge_1} = T_p^{\lozenge_2}$ となることを示す．T が矛盾する場合は $T_p^{\lozenge_1}$ および $T_p^{\lozenge_2}$ が共に矛盾するので明らか．以下 T は無矛盾とする．$(CtoU)$ 同一性より，$T_p^{\lozenge_1} = \bigcap_{K\in[T]}(K^-_{\neg p})^+_p$ である．また，$(CtoE)$ 同一性より

$T^{\blacklozenge}_{\neg p} = \bigcap_{K \in [T]} K^{-}_{\neg p}$ なので，$(EtoU)$ 同一性より，$T^{\Diamond_2}_p = (T^{\blacklozenge}_{\neg p})^{+}_p = (\bigcap_{K \in [T]} K^{-}_{\neg p})^{+}_p$ である．拡大の性質より $T^{\Diamond_2}_p = \bigcap_{K \in [T]} (K^{-}_{\neg p})^{+}_p$．これは $(RtoE)$ 同一性に等しいので，$T^{\blacklozenge_1}_p = T^{\blacklozenge_2}_p$ が成り立つ．よって $^{\blacklozenge_1}$ は $^{\blacklozenge_2}$ と等しい．

$(Q.E.D)$

定理 3.8 縮小関数 $^{-}$ が AGM の縮小の公準 ($^{-}$1) から ($^{-}$8) を満たすとする．このとき，(CtoU) 同一性に基づいて $^{-}$ から構成した関数 $^{\Diamond}$ は更新の公準 ($^{\Diamond}$1) から ($^{\Diamond}$8) を満たす．また，更新の公準 ($^{\Diamond}$1) から ($^{\Diamond}$8) を満たすすべての更新関数 $^{\Diamond}$ に対して，(CtoU) 同一性に基づいてその更新関数を構成する縮小関数 $^{-}$ が存在する．

(証明)

上で構成した $^{\Diamond}$ が ($^{\Diamond}$1) から ($^{\Diamond}$8) を満たすことは補題 3.2 より明らか．($^{\Diamond}$1) から ($^{\Diamond}$8) を満たすすべての更新関数 $^{\Diamond}$ に対して，$(CtoU)$ 同一性に基づいてその更新関数を構成する縮小関数 $^{-}$ が存在することを示す．定理 3.4 および命題 3.6 より，($^{\Diamond}$1) から ($^{\Diamond}$8) を満たす任意の消去関数 $^{\Diamond}$ に対して，$(EtoU)$ 同一性に基づいて $^{\Diamond}$ を構成するある消去関数 $^{\blacklozenge}$ が存在し，($^{\blacklozenge}$1) から ($^{\blacklozenge}$9) を満たす．更に，定理 3.6 より，($^{\blacklozenge}$1) から ($^{\blacklozenge}$9) を満たすすべての消去関数 $^{\blacklozenge}$ に対して，$(CtoE)$ 同一性に基づいて $^{\blacklozenge}$ を構成するある * が存在し，($^{-}$1) から ($^{-}$8) を満たす．

ここで，補題 3.2 より，$(CtoU)$ 同一性に基づいて $^{-}$ から構成した関数と $(CtoE)$ 同一性および $(EtoU)$ 同一性に基づいて $^{-}$ から構成した更新関数は等しくなるので，よって ($^{\Diamond}$1) から ($^{\Diamond}$8) を満たすすべての更新関数に対して，$(CtoU)$ 同一性に基づいてその更新関数を構成する縮小関数が存在する．

$(Q.E.D)$

A.2 第 4 章の定理・補題の証明

命題 4.1 $\mathbf{T}\Box_l$ および $\mathbf{K}_{ij}$，$\mathbf{R}_{ii}$ の形式の論理文はすべて OAL で証明可能である．

(証明)

$\mathbf{T}\Box_l$ が OAL で証明可能であることは $\mathbf{I_l}$ および $\mathbf{R}_{ii_l}$ から明らか．$\mathbf{K}_{ij}$ について示す．$(A \to B) \wedge (C \to D) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge D))$ の型の論理文は古典命題論理で証明可能なので，OAL でも証明可能．よって，$\mathbf{K}_{ij_l}$ および $\mathbf{K}_{ij_m}$ より $[ij]_l(\alpha \to \beta)$ $\wedge [ij]_m(\alpha \to \beta) \to (([ij]_l\alpha \to [ij]_l\beta) \wedge ([ij]_m\alpha \to [ij]_m\beta))$ が証明可能．$[ij]$ の定義より，含意の前件部は $[ij](\alpha \to \beta)$ となる．同様の議論を後件部にも適用すると，$\mathbf{K}_{ij}$

を得る．最後に $\mathbf{R}_{ii}$ について示す．$A \wedge B \to A$ の型の論理文は古典命題論理で証明可能なので，OAL でも証明可能．よって論理文 $[ii]_l\alpha \wedge [ii]_m\alpha \to [ii]_l\alpha$ は OAL で証明可能なので，この論理文と $\mathbf{R}_{ii_l}$ より $\mathbf{R}_{ii}$ を得る．

$(Q.E.D)$

定理 4.1 $C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Leftrightarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha$.

(証明)

健全性と完全性に分けて証明する．

補題 4.5 (OAL の健全性) $C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Leftarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha$.

(証明)

OAL のすべての公理型はすべての OA モデルのクラスに対して妥当であり，かつ，すべての推論規則は妥当な論理文から妥当な論理文を導くことを示せば十分である．$F = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, \succeq)$ を任意の OA フレーム，v を任意の付値関数とし，$M = (F, v)$ とする．

$\mathbf{K}_{ij_l}$. 任意の矢印 $x \in A$ に対して，$M, x \models [ij]_l(\alpha \to \beta)$ かつ $M, x \models [ij]_l\alpha$ ならば $M, x \models [ij]_l\beta$ であることを示せばよい．$M, x \models [ij]_l(\alpha \to \beta)$ かつ $M, x \models [ij]_l\alpha$ とする．よって，$xR_{ij}y$ かつ $x \succeq y$ であるどの $y \in A$ でも $M, y \models \alpha \to \beta$ かつ $M, y \models \alpha$．古典命題論理で妥当な論理文はどの矢印でも真なので，このことから $M, y \models \beta$．よって $M, x \models [ij]_l\beta$.

$\mathbf{K}_{ij_l}$. $\mathbf{K}_{ij_l}$ と同様.

$\mathbf{R}_{ii_l}$. $M, x \models [ii]_l\alpha$ とする．$xR_{ii}y$ かつ $x \succeq y$ であるすべての y で $M, y \models \alpha$ であるが，(ρii) より $xR_{ii}x$ なので，$M, x \models \alpha$.

$\mathbf{\Sigma}_{ij}$. $M, x \models \alpha$ とする．(σij) より $xR_{ij}y$ ならば $yR_{ji}x$ であり，仮定より $M, x \models \alpha$ であるので，$xR_{ij}y$ であるすべての y で $M, y \models \langle ji\rangle\alpha$．よって $M, x \models [ij]_l\langle ji\rangle\alpha$.

$\mathbf{T}_{ijk}$. $M, x \models [ik]\alpha$ かつ $xR_{ij}y$ かつ $yR_{jk}z$ とする．(τijk) より $xR_{ij}y$ かつ $yR_{jk}z$ ならば $xR_{ik}z$ であり，仮定より $xR_{ik}z$ ならば $M, z \models \alpha$ なので,, このことから $xR_{ij}y$ ならば $M, y \models [jk]\alpha$ となり，よって $M, x \models [ij][jk]\alpha$.

$\mathbf{K}\Box_l$. $\mathbf{K}_{ij_l}$ と同様.

$\mathbf{K}\Box_m$. $\mathbf{K}_{ij_l}$ と同様.

4$\Box_l$. $M,x \models \Box_l\alpha$かつ$x \succeq y$かつ$y \succeq z$とする．$\succeq$は推移的なので，$x \succeq y$かつ$y \succeq z$ならば$x \succeq z$であり，仮定より$x \succeq z$ならば$M,z \models \alpha$である．このことから$x \succeq y$ならば$M,y \models \Box_l\alpha$となり，よって$M,x \models \Box_l\Box_l\alpha$.

S. $M,x \models \alpha$とする．ここで，任意の$y,z \in A$に対して$y \succeq z$または$z \succeq y$なので，任意の$y \in A$に対して$x \not\succeq y$ならば$y \succeq x$である．仮定より$M,x \models \alpha$なので，$x \not\succeq y$であるすべてのyに対して$M,y \models \Diamond_l\alpha$となり，よって$M,x \models \Box_m\Diamond_l\alpha$.

H. $M,x \models \Diamond(\Box_l\alpha \wedge \Box_m\beta)$とする．仮定よりある$y \in A$で$M,y \models \Box_l\alpha \wedge \Box_m\beta$である．よって，すべての$z \in A$に対して，$y \succeq z$ならば$M,z \models \alpha$，$y \not\succeq z$ならば$M,z \models \beta$となる．よって，すべての$z$で$M,z \models \alpha \vee \beta$となり，$M,x \models \Box(\alpha \vee \beta)$が成り立つ.

$\mathbf{I_l}$. $M,x \models \Box_l\alpha$とする．よって，$x \succeq y$であるすべての$y \in A$で$M,y \models \alpha$なので，$x \succeq y$かつ$xR_{ij}y$となるすべてのyでも$M,y \models \alpha$である．そのようなyが存在しない場合は明らか．よって，$M,x \models [ij]_l\alpha$.

$\mathbf{I_m}$. $\mathbf{I_l}$と同様.

MP. αおよび$\alpha \to \beta$はOALで妥当とする．よって，すべての$x \in A$で$M,x \models \alpha$かつ$M,x \models \alpha \to \beta$．古典命題論理で妥当な論理文はどの矢印でも真なので，$M,x \models \beta$．これは任意のモデルおよび任意の矢印で成り立つので，よってβはOALで妥当.

Nec$\Box$. αはOALで妥当とする．よって，すべての$x \in A$で$M,x \models \alpha$なので，$x \succeq y$であるすべてのyで$M,y \models \Box_l\alpha$．同様に，$x \not\succeq z$であるすべてのzで$M,z \models \Box_m\alpha$．これらをまとめると，すべてのxで$M,x \models \Box_l\alpha \wedge \Box_m\alpha$となり，$M,x \models \Box\alpha$を得る．これは任意のモデルおよび任意の矢印$x$で成り立つので，よって$\Box\alpha$はOALで妥当.

Nec$[ij]$. **Nec$\Box$**と同様.

以上によって，OALのすべての公理型はすべてのOAモデルのクラスに対して妥当であり，かつ，すべての推論規則は妥当な論理文から妥当な論理文を導く．これでOALの健全性が示された.

(*Q.E.D*)

完全性を証明する準備として，いくつかの補題を示しておく．OALの極大無矛盾集合Γに対して，論理文の集合Γ_lを$\Gamma_l = \{\alpha \mid \Box_l\alpha \in \Gamma\}$と定義する．同様に，$\Gamma_m = \{\beta \mid \Box_m\beta \in \Gamma\}$，すべての$i,j \in \{1,2\}$に対して$\Gamma_{ij_l} = \{\gamma \mid [ij]_l\gamma \in \Gamma\}$，$\Gamma_{ij_m} = \{\gamma \mid [ij]_m\gamma \in \Gamma\}$とする．公理$\mathbf{I}_l$より，$\Box_l\alpha \in \Gamma$ならば$[ij]_l\alpha \in \Gamma$なので，$\Gamma_l \subseteq \Gamma_{ij_l}$

である．同様に，公理 $\mathbf{I}_m$ より $\Gamma_m \subseteq \Gamma_{ij_m}$ である．

これらの論理文の集合に対して，以下の性質が成り立つ．

補題 4.6 Γ_{ij_l} が無矛盾ならば，すべての $\langle ij \rangle_l \alpha \in \Gamma$ に対して $\{\alpha\} \cup \Gamma_{ij_l}$ は無矛盾．

(証明)

ある $\langle ij \rangle_l \alpha \in \Gamma$ に対して $\{\alpha\} \cup \Gamma_{ij_l}$ が矛盾すると仮定する．よって，有限個の論理文 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Gamma_{ij_l}$ が存在して，連言 $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ を B と表すと，$B \to \neg\alpha$ が OAL で証明可能である．$[ij]_l B \in \Gamma$ であることと公理 $\mathbf{K}[ij]_l$ から，$[ij]_l \neg\alpha \in \Gamma$ すなわち $\neg\langle ij \rangle_l \alpha \in \Gamma$．これは Γ の極大無矛盾性と反する．

$(Q.E.D)$

同様の性質が Γ_{ij_m} および Γ_l，Γ_m に対しても成り立つ．また，集合 Γ_{ij} を $\Gamma_{ij} = \{\gamma \mid [ij]\gamma \in \Gamma\}$ と定義すると，$[ij]\alpha \equiv [ij]_l\alpha \wedge [ij]_m\alpha$ なので $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij_l} \cap \Gamma_{ij_m}$ となる．

補題 4.7 $\langle ij \rangle_l \alpha \notin \Gamma$ であるようなすべての $\Diamond_l \alpha \in \Gamma$ に対して，$\{\alpha\} \cup \Gamma_{ij_l}$ は矛盾するが $\{\alpha\} \cup \Gamma_l$ は無矛盾である．同様に，$\langle ij \rangle_m \alpha \notin \Gamma$ であるようなすべての $\Diamond_m \alpha \in \Gamma$ に対して，$\{\alpha\} \cup \Gamma_{ij_m}$ は矛盾するが $\{\alpha\} \cup \Gamma_m$ は無矛盾である．

(証明)

ここでは $\langle ij \rangle_l \alpha \notin \Gamma$ であるようなすべての $\Diamond_l \alpha \in \Gamma$ についてのみ示す．$\langle ij \rangle_l \alpha \notin \Gamma$ より，$[ij]_l \neg\alpha \in \Gamma$ である．よって $\neg\alpha \in \Gamma_{ij_l}$ となり，このことから，$\Diamond_l \alpha \in \Gamma$ に対して $\{\alpha\} \cup \Gamma_{ij_l}$ は矛盾するが，補題 4.6 より $\{\alpha\} \cup \Gamma_l$ は無矛盾．

$(Q.E.D)$

補題 4.8 (OAL の完全性) $C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Rightarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha$.

(証明)

対偶について示す．すなわち，証明可能でないある論理文 α に対して，α が偽となる OA モデルが存在することを示す．そのために，$\neg\alpha$ を含むある極大無矛盾集合 Γ_0 から，α を偽とするカノニカルな OA モデル $M_L = (F_L, v_L)$

を構成する．ここで，$F_L = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, \succeq)$ である．A は OAL の極大無矛盾集合のクラス，R_{ij} および $\succeq$，$\overline{\succeq}$ を $A \times A$ の部分集合とする．ここで，$\overline{\succeq}$ は $\Box_m$ に対応する二項関係であり，$\succeq$ の補集合となるように構成する．

カノニカルな OA モデル M_L を以下のように帰納的に構成する．この構成法は文献 [5] で用いられた構成法を，OAL の各様相演算子に対して適用するために改良したものである．

Step 0 $A = R_{ij} = \succeq = \overline{\succeq} = \emptyset$ とし，A に Γ_0 を追加する．すなわち，$A = \{\Gamma_0\}$，$R_{ij} = \succeq = \overline{\succeq} = \emptyset$ となる．

Step i Step i-1 で A に追加されたすべての極大無矛盾集合 Λ に対して，以下の操作を行う．

Λ からそれぞれ Λ_l および Λ_m，すべての $i, j \in \{1, 2\}$ に対して Λ_{ij_l}，Λ_{ij_m} を構成し，以下の操作を行なう．

1. Λ_{ij_m} が矛盾する場合．
   Λ_m が無矛盾ならば，すべての $\Diamond_m\alpha \in \Lambda$ についてそれぞれ $\{\alpha\} \cup \Lambda_m \subseteq \Lambda'$ となるすべての極大無矛盾集合 Λ' を A に追加する．また，順序対 (Λ, Λ') を $\overline{\succeq}$ に追加する．補題 **4.6** より，$\Diamond_m\alpha \in \Lambda$ に対して $\{\alpha\} \cup \Lambda_m$ は無矛盾なので，極大無矛盾集合 Λ' が存在することはリンデンバウムの補題が保証する．Λ_m が矛盾する場合は何も行わない．
   Λ_{ij_l} が矛盾する場合は，Λ_l に対して同様の操作を行ない，得られた極大無矛盾集合 Λ'' を A に，順序対 (Λ, Λ'') を $\succeq$ に追加する．

2. Λ_{ij_m} が無矛盾の場合．
   すべての $\langle ij\rangle_m\alpha \in \Lambda$ に対して，それぞれ $\{\alpha\} \cup \Lambda_{ij_m} \subseteq \Lambda'$ となるすべての極大無矛盾集合 Λ' を A に追加する．また，順序対 (Λ, Λ') を R_{ij} および $\overline{\succeq}$ に追加する．
   また，$\langle ij\rangle_m\beta \notin \Lambda$ が成り立つすべての $\Diamond_m\beta \in \Lambda$ に対して，それぞれ $\{\beta\} \cup \Lambda_m \subseteq \Lambda''$ となるすべての極大無矛盾集合 Λ'' を A に，順序対 (Λ, Λ'') を $\overline{\succeq}$ に追加する．補題 **4.7** より，$\Diamond_m\beta \in \Lambda$ に対して $\{\beta\} \cup \Lambda_m$ は無矛盾なので，極大無矛盾集合 Λ' が存在することはリンデンバウムの補題が保証する．
   Λ_{ij_l} に対しても同様の操作を行なう．

A および $R_{ij} (\forall i, j \in \{1, 2\})$，$\succeq$，$\overline{\succeq}$ を上記の構成法を (無限に) 繰り返して得られた集まりとする．また，カノニカルな付値関数 v_L を，すべての原子文 $p \in \mathbf{P}$ とすべての極大無矛盾集合 $x \in A$ に対して $v_L(p, x) = t \Leftrightarrow p \in x$

と定義し，$F_L = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, \succeq)$，$M_L = (F_L, v_L)$ とする．

以下，任意の極大無矛盾集合 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \succeq$ であることを $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \notin \succeq$ であることを $\boldsymbol{x} \not\succeq \boldsymbol{y}$ と表す．$\bar{\succeq}$ および $R_{ij}(\forall i, j \in \{1, 2\})$ についても同様の表記を用いる．また，上記の構成法から，それぞれの様相演算子 $[ij]_m$ に関して，$\boldsymbol{x}_{ij_m} \subseteq \boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x} R_{ij} \boldsymbol{y}$ かつ $\boldsymbol{x} \bar{\succeq} \boldsymbol{y}$ を同一視できる．$[ij]_l$ および $\Box_l$，$\Box_m$ についても同様．

次に，$R_{ij}(\forall i, j \in \{1, 2\})$ が (ρii) および (σij)，(τijk) を満たすことと，$\succeq$ が全擬順序であることを示す．そのために，以下の補題を用いる．

補題 4.9 (Boutilier[5]) 以下の形式の論理文はすべて CO で証明可能である．

H* $\mathcal{D}(\Box_l \alpha \wedge \Box_m \beta) \rightarrow \mathcal{B}(\alpha \vee \beta)$.

ここで，$\mathcal{D}$ は様相演算子 $\Diamond_l$ と $\Diamond_m$ の任意の列，$\mathcal{B}$ は様相演算子 $\Box_l$ と $\Box_m$ の任意の列である．

CO で証明可能な論理文はすべて OAL で証明可能なので，**H*** の形式の論理文はすべて OAL で証明可能である．

補題 4.10 任意の極大無矛盾集合 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して，$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x} \bar{\succeq} \boldsymbol{y}$ の少なくとも一方が成り立つ．

(証明)

$\boldsymbol{x} \not\succeq \boldsymbol{y}$ かつ $\boldsymbol{x}\ \not\bar{\succeq} \boldsymbol{y}$ とする．よって，ある論理文 $\Box_l \alpha \in \boldsymbol{x}$ が存在して $\alpha \notin \boldsymbol{y}$ である．同様に，ある論理文 $\Box_m \beta \in \boldsymbol{x}$ が存在して $\beta \notin \boldsymbol{y}$．また，すべての極大無矛盾集合はいずれかのステップで A に追加されているので，$\boldsymbol{x}$ は Step m で，$\boldsymbol{y}$ は Step n で追加されたと仮定する．このことから，M_L の構成法より，Step m-1 で A に追加された極大無矛盾集合 z が存在して，$\Diamond_l(\Box_l \alpha \wedge \Box_m \beta) \in z$ または $\Diamond_m(\Box_l \alpha \wedge \Box_m \beta) \in z$ が成り立つ．この議論を繰り返すと，Γ_0 に対して，様相演算子 $\Diamond_l$ と $\Diamond_m$ の長さ m の列 $\mathcal{D}_1$ が存在して，$\mathcal{D}_1(\Box_l \alpha \wedge \Box_m \beta) \in \Gamma_0$ が成り立つ．同様に，$\Diamond_l$ と $\Diamond_m$ の長さ n の列 $\mathcal{D}_2$ が存在して，$\mathcal{D}_2(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \in \Gamma_0$．しかし，$\mathcal{D}_2$ に現れる $\Diamond_l$ を $\Box_l$ に，$\Diamond_m$ を $\Box_m$ にそれぞれ置き換えて得られる列を $\mathcal{B}_1$ とすると，$\mathcal{D}_1(\Box_l \alpha \wedge \Box_m \beta) \in \Gamma_0$ かつ $\neg \mathcal{B}_1(\alpha \vee \beta) \in \Gamma_0$ となるが，CO で証明可能な論理文はすべて OAL でも証明可能なので，補題 4.9 よりこれは矛盾である．よって題意が示された．

$(Q.E.D)$

この補題から，特に $\boldsymbol{x} \not\succeq \boldsymbol{y}$ ならば $\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ である．更に以下の性質が成り立つ

補題 4.11 任意の極大無矛盾集合 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して，$\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ ならば $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$.

(証明)

$\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ かつ $\boldsymbol{y} \not\succeq \boldsymbol{x}$ と仮定する．このとき，ある論理文 $\Box_l \alpha \in \boldsymbol{y}$ が存在して，$\alpha \notin \boldsymbol{x}$．よって $\neg\alpha \in \boldsymbol{x}$ なので，公理型 **S** より $\Box_m \Diamond_l \neg\alpha \in \boldsymbol{x}$. 仮定より $\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ なので，M_L の構成法から $\Diamond_l \neg\alpha \in \boldsymbol{y}$ すなわち $\Box_l \alpha \notin \boldsymbol{y}$ となり，これは仮定と矛盾する．

$(Q.E.D)$

補題 4.10 および補題 4.11 を用いると，$\succeq$ は全擬順序であることが容易に示される．

補題 4.12 $\succeq$ は反射的かつ推移的であり，任意の極大無矛盾集合 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$ である．

(証明)

まず，$\succeq$ は反射的であることを示す．ここで，ある $\boldsymbol{x} \in A$ が存在して $\boldsymbol{x} \not\succeq \boldsymbol{x}$ すなわち $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \notin \succeq$ と仮定する．このとき，ある論理文 $\Box_l \alpha \in \boldsymbol{x}$ が存在して，$\alpha \notin \boldsymbol{x}$ となるが，公理型 $\mathbf{T}\Box_l$ より $\Box_l \alpha \in \boldsymbol{x}$ ならば $\alpha \in w$ なので，これは仮定と矛盾する．よって $\succeq$ は反射的．
次に，$\succeq$ は反射的であることを示す．ここで，ある $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in A$ が存在して，$\boldsymbol{x} \not\succeq \boldsymbol{x}$ すなわち
最後に，$\succeq$ が反射的かつ推移的であることは，公理型 $\mathbf{T}\Box_l$ および $\mathbf{4}\Box_l$ より明らか．また，補題 4.10 より，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ であり，しかも補題 4.11 より $\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ ならば $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$ なので，よって任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ に対して $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$ である．

$(Q.E.D)$

また，$\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ かつ $\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ であるような順序対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ については，$\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ であるという性質は $\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$ として既に $\succeq$ に反映されているので，順序対 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を $\overline{\succeq}$ から取り除いても影響はない．よって，$\overline{\succeq}$ が $\succeq$ の補集合となるように構成することができ，$\boldsymbol{x} \not\succeq \boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{x}\overline{\succeq}\boldsymbol{y}$ とを同一視できる．
更に，$R_{ij} (\forall i, j \in \{1, 2\})$ について以下の補題が成り立つ．

補題 4.13 M_L の構成法で得られた $R_{ij}(\forall i, j \in \{1,2\})$ は (ρii) および (σij), (τijk) を満たす.

(証明)

R_{ii} が (ρii) を満たすことは $\mathbf{R}_{ii}$ が OAL で証明可能であることより明らか. (σij) について示す. ここで, ある $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{x} R_{ij} \boldsymbol{y}$ であり, かつ $\boldsymbol{y} R_{ji} \boldsymbol{x}$ でないと仮定する. よって, ある $[ji]_l\beta \in \boldsymbol{y}$ と $[ji]_m\gamma \in \boldsymbol{y}$ が存在して $\beta \notin \boldsymbol{x}$ かつ $\gamma \notin \boldsymbol{x}$ である. ここで, $([ji]_l\beta \wedge [ji]_m\gamma) \to [ji](\beta \vee \gamma)$ が OAL で証明可能であることから, $[ji](\beta \vee \gamma) \in \boldsymbol{y}$ である. また, $\beta \notin \boldsymbol{x}$ かつ $\gamma \notin \boldsymbol{x}$ より $\neg\beta \wedge \neg\gamma \in \boldsymbol{x}$ となるので, Σ_{ij} より, $[ij]\langle ji\rangle(\neg\beta \wedge \neg\gamma) \in \boldsymbol{x}$. 仮定より $\boldsymbol{x} R_{ij} \boldsymbol{y}$ なので, $\langle ji\rangle(\neg\beta \wedge \neg\gamma) \in \boldsymbol{y}$ すなわち $\neg[ji](\beta \vee \gamma) \in \boldsymbol{y}$ となり, これは $\boldsymbol{y}$ の無矛盾性と反する. よって (σij) を満たす.

最後に, (τijk) について示す. ここで, ある $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, z \in \boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{x} R_{ij} \boldsymbol{y}$ かつ $\boldsymbol{y} R_{jk} z$ であるが, $\boldsymbol{x} R_{ik} z$ でないと仮定する. この仮定から, ある論理文 $[ik]_l\beta \in \boldsymbol{x}$ と $[ik]_l\gamma \in \boldsymbol{x}$ が存在して, $\beta \notin z$ かつ $\gamma \notin z$ すなわち $\neg\beta \wedge \neg\gamma \in z$ である. ここで, $([ik]_l\beta \wedge [ik]_m\gamma) \to [ik](\beta \vee \gamma)$ が OAL で証明可能であることから, $[ik](\beta \vee \gamma) \in \boldsymbol{x}$ である. また, 公理 $\mathbf{T}_{ijk}$ より, $[ij][jk](\beta \vee \gamma) \in \boldsymbol{x}$ である. 仮定より $\boldsymbol{x} R_{ij} \boldsymbol{y}$ かつ $\boldsymbol{y} R_{jk} z$ なので, M_L の構成法より, $\beta \vee \gamma \in z$ となるが, これは z の無矛盾性と反する. よって (τijk) を満たす.

$(Q.E.D)$

最後に, カノニカルな付値関数は任意の論理文に対して拡張できることを示す.

補題 4.14 $M_L, \boldsymbol{x} \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \boldsymbol{x}$.

(証明)

論理文 α の構造に関する帰納法で示す. 原子文 p については定義より明らか. また, 論理文 β と γ について補題が成り立つと仮定すると, 極大無矛盾集合の性質から, $\neg\beta$ および $\beta\wedge\gamma$, $\beta\vee\gamma$ についても明らかに成り立つ. $\Box_l\beta$ については, $\Box_l\beta \in \boldsymbol{x}$ ならば, M_L の構成法から $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ であるすべての $\boldsymbol{y}$ に対して $\beta \in \boldsymbol{y}$ すなわち $M, \boldsymbol{y} \models \beta$ となる. 逆に, $\Box_l\beta \notin \boldsymbol{x}$ ならば $\Diamond_l\neg\beta \in \boldsymbol{x}$ なので, M_L の構成法からある極大無矛盾集合 $\boldsymbol{y}$ が存在して, $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ かつ $M, \boldsymbol{y} \models \neg\beta$ となる. よって $\Box_l\beta$ についても補題が成り立つ. $\Box_m\beta$ についても,

$x \not\succeq y$ と $x \overline{\succeq} y$ を同一視できるので，$\Box_l \beta$ の場合と同様．それぞれの $[ij]_l \beta$ については，$[ij]_l \beta \in x$ ならば，M_L の構成法から $x \succeq y$ かつ $xR_{ij}y$ であるすべての y に対して $\beta \in y$ すなわち $M, y \models \beta$ となる．逆に，$[ij]_l \beta \notin x$ ならば $\langle ij \rangle_l \neg\beta \in x$ なので，M_L の構成法からある極大無矛盾集合 y が存在して，$x \succeq y$ かつ $xR_{ij}y$ かつ $M, y \models \neg\beta$ となる．よって $[ij]_l \beta$ についても補題が成り立つ．$[ij]_m \beta$ についても同様．よって，任意の論理文 α に対して補題が成り立つ．

$(Q.E.D)$

以上で，極大無矛盾集合 Γ_0 から構成した M_L が OAL モデルになることが示された．$\neg\alpha \in \Gamma_0$ なので，補題 4.14 より $M_L, \Gamma_0 \not\models \alpha$ である．よって，証明可能でないある論理文 α に対して，α が偽となる OAL モデルが存在する．

$(Q.E.D)$

補題4.5より $C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Leftarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha$ であり，逆に，補題4.8より $C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Rightarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha$ であることが示された．これらをまとめると $C_{\mathrm{OA}} \models \alpha \Leftrightarrow \mathrm{OAL} \vdash \alpha$ を得る．

$(Q.E.D)$

命題 4.2 以下の形式の論理文は，すべての OA モデルのクラスで妥当である．ここで，$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{OA}$ である．

K. $\mathsf{B}(\alpha \to \beta) \to (\mathsf{B}\alpha \to \mathsf{B}\beta)$

D. $\mathsf{B}\alpha \to \neg\mathsf{B}\neg\alpha$

4. $\mathsf{B}\alpha \to \mathsf{BB}\alpha$

5. $\neg\mathsf{B}\alpha \to \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\alpha$

(証明)

K：任意の OA モデル $M = (F, v)$ の任意の矢印 $x \in A$ に対して，$M, x \models \mathsf{B}(\alpha \to \beta)$ かつ $M, x \models \mathsf{B}\alpha$ ならば $M, x \models \mathsf{B}\beta$ であることを示せばよい．ここで，$F = (A, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, \succeq)$ は任意の OA フレーム，v は任意の付値関数である．

$M, x \models \mathsf{B}(\alpha \to \beta)$ かつ $M, x \models \mathsf{B}\alpha$ と仮定する．信念演算子 B の定義から，$M, x \models \Diamond\Box_l(\alpha \to \beta)$ かつ $M, x \models \Diamond\Box_l \alpha$．よって，ある矢印 y が存在して，$y \succeq z$ となるすべての z で $M, z \models \alpha \to \beta$．同様に，ある矢印 u が存在して，$u \succeq w$ となるすべての w

で $M, w \models \alpha$．ここで，$\succeq$ は全擬順序なので $u \succeq y$ と仮定しても一般性は失わない．よって，$y \succeq z$ ならば $u \succeq z$ なので，$y \succeq z$ となるすべての z で $M, z \models \alpha \to \beta$ かつ $M, z \models \alpha$．このような z では $M, z \models \beta$ が成り立つので，$M, y \models \Box_l \beta$ も成り立つ．よって，$M \models \Diamond\Box_l \beta$ すなわち $M \models \mathsf{B}\beta$ が成り立つ．

D：任意の矢印 $\boldsymbol{x} \in A$ に対して，$M, \boldsymbol{x} \models \mathsf{B}\alpha$ ならば $M, \boldsymbol{x} \models \neg\mathsf{B}\neg\alpha$ であることを示せばよい．$M, \boldsymbol{x} \models \mathsf{B}\alpha$ と仮定すると，信念演算子 B の定義から，ある矢印 $\boldsymbol{y}$ が存在して，$\boldsymbol{y} \succeq z$ となるすべての z で $M, z \models \alpha$．よって，どのような矢印 $\boldsymbol{u}$ についても，u 以下のすべての矢印で $\neg\alpha$ が真となることはありえないので，$M.u \not\models \Box_l \neg\alpha$ となる u は存在しない．特に $M, \boldsymbol{x} \models \neg\Diamond\Box_l \neg\alpha$ すなわち $M, \boldsymbol{x} \models \neg\mathsf{B}\neg\alpha$．

4：$M, \boldsymbol{x} \models \mathsf{B}\alpha$ と仮定すると，信念演算子 B の定義から，ある矢印 $\boldsymbol{y}$ が存在して，$\boldsymbol{y} \succeq z$ となるすべての z で $M, z \models \alpha$．よって特に，それぞれの z に対して，$z \succeq u$ かつ $M, \boldsymbol{u} \models \Box_l \alpha$ となる矢印 $\boldsymbol{u}$ が存在するので，$M, \boldsymbol{y} \models \Box_l \Diamond\Box_l \alpha$．故に $M, \boldsymbol{x} \models \Diamond\Box_l \Diamond\Box_l \alpha$ となり，B の定義から $M, \boldsymbol{x} \models \mathsf{BB}\alpha$ が成り立つ．

5：$M, \boldsymbol{x} \models \neg\mathsf{B}\alpha$ と仮定すると，信念演算子 B の定義から，すべての矢印 $\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{y} \succeq z$ かつ $M, z \models \neg\alpha$ となる矢印 z が存在する．この議論は $\boldsymbol{x} \succeq u$ となるすべての u に対しても成り立つので，よって $M, \boldsymbol{x} \models \mathsf{B}\neg\mathsf{B}\alpha$ を得る．

$(Q.E.D)$

命題 4.3 任意の OA モデル M および任意の矢印 $\boldsymbol{a} \in A$，任意の論理文 $\alpha \in \mathcal{L}_{OA}$ に対して，$M, \boldsymbol{a} \models \mathsf{B}\alpha$ であることの必要十分条件はすべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ で $M, \boldsymbol{x} \models \alpha$ である．

(証明)

任意の OA モデル M と任意の矢印 $\boldsymbol{a} \in A$ に対して，$M, \boldsymbol{a} \models \mathsf{B}\alpha$ と仮定する．信念演算子 B の定義から，$M, \boldsymbol{a} \models \Diamond\Box_l \alpha$．よって，ある矢印 $\boldsymbol{y}$ が存在して，$\boldsymbol{y} \succeq z$ となるすべての z で $M, z \models \alpha$ が成り立つので，特にすべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ で $M, \boldsymbol{x} \models \alpha$ である．

逆に，すべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ で $M, \boldsymbol{x} \models \alpha$ と仮定すると，ある $\boldsymbol{y} \in \min(A, \succeq)$ に対して，$\boldsymbol{y} \succeq \boldsymbol{x}$ ならば $M, \boldsymbol{x} \models \alpha$ が成り立つので，$M, \boldsymbol{y} \models \Box_l \alpha$．よって，任意の矢印 $\boldsymbol{a} \in A$ に対して，$M, \boldsymbol{a} \models \Diamond\Box_l \alpha$ すなわち $M, \boldsymbol{a} \models \mathsf{B}\alpha$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

命題 4.4 任意の OA モデル M および任意の論理文 $\alpha \in \mathcal{L}_{OA}$ に対して，$M \models \mathsf{B}\alpha$ または $M \models \neg\mathsf{B}\alpha$ のどちらか一方が成り立つ．

(証明)

$M \not\models \mathsf{B}\alpha$ かつ $M \not\models \neg\mathsf{B}\alpha$ と仮定する．$M \not\models \neg\mathsf{B}\alpha$ より，$\mathsf{B}\alpha$ が真となる矢印が存在する．よって，B の定義より，ある矢印 $\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{y}$ となるすべての矢印 $\boldsymbol{y}$ で $M, \boldsymbol{y} \models \alpha$．ところが，$M \not\models \mathsf{B}\alpha$ より，$\neg\mathsf{B}\alpha$ が真となる矢印が存在するので，すべての矢印 z に対して $z \succeq u$ かつ $M, u \models \neg\alpha$ となる矢印 u が存在する．このことから，特に上記の $\boldsymbol{x}$ に対してもこのような矢印 u が存在するので，$M, u \models \alpha$ かつ $M, u \models \neg\alpha$ となり矛盾する．

$(Q.E.D)$

命題 4.5 論理文 $p, q \in \mathcal{L}$ に対して，$y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y = (n, n')$ で $M_b, y \models q$ が成り立つことの必要十分条件は，$M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ が成り立つことである．

(証明)

$y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y = (n, n')$ で $M_b, y \models q$ と仮定する．このとき $M_b, x \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ となることを示す．$\|p\|$ が空の場合は $M_b, x \models \Box\neg p$ となるので明らか．$\|p\|$ は空でない場合は，仮定より $y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ なので，そのような y に対して $M_b, y \models p \wedge q$ が成り立つ．このことから，$x \in \min(\|p\|, \succeq)$ となる x を一つ選ぶと，$M_b, x \models p$ であり，しかも $x \succeq z$ となるすべての $z \in A$ で $M_b, z \models p \to q$ が成り立つ．よって，$M_b \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to q))$ となるので $M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ が成り立つ．

逆に，$M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ であると仮定する．このとき，$y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ であることを示す．$M_b \models \Box\neg p$ の場合は $\|p\|$ が空となるので自明．$M_b \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to q))$ の場合は，ある $x \in A$ が存在して $M_b, x \models p$ であり，更に $x \succeq z$ となるすべての $z \in A$ に対して $M_b, z \models p \to q$ が成り立つ．ここで，$M_b, x \models p$ であることから，$y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y \in A$ に対して $x \succeq y$ が成り立つので，そのような y で $M_b, y \models p$ かつ $M_b, y \models p \to q$．よって，$y \in \min(\|p\|, \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

補題 4.1 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r).$$

$$p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p.$$

$(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}(p \to q)$.

$\neg\mathsf{B}\neg p \to (\mathsf{B}(p \to q) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q))$.

$\Diamond p \equiv \neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \bot)$.

$\Box(p \equiv q) \to ((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r))$.

$((p \wedge q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))$.

$\neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q) \to ((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r)) \to ((p \wedge q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r))$.

(証明)

(4.61) $((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))$ ならば $M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ であることを示す．$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))$ と仮定する．$M_b, a \models \Box\neg p$ の場合は明らかなので，$M_b, a \not\models \Box\neg p$ とする．よって p が真となる矢印が存在する．仮定より $M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ なので，ある矢印 x が存在して $M_b, x \models p$ であり，かつ $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to q$．同様に，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))$ なので，ある矢印 z が存在して $M_b, z \models p$ であり，かつ $z \succeq u$ となるすべての u で $M_b, u \models p \to (q \to r)$．ここで，$z \succeq x$ と仮定しても一般性は失わない．よって，$M_b, x \models p$ であり，$x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to q$ かつ $M_b, y \models p \to (q \to r)$．このことから，$x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to r$ が成り立つ．よって，$M_b, a \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to r))$ となり，$M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ を得る．

(4.62) $p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p$ を示す．$M_b, a \models \Box\neg p$ の場合は明らかなので，$M_b \not\models \Box\neg p$ とする．よってある矢印 x が存在し，$M_b, x \models p$．ここで，$p \to p$ は恒真文なので，特に $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to p$．よって $M_b, a \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to p))$ となり，$M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p$ が成り立つ．

(4.63) $(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}(p \to q)$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \to q)$ であることを示す．$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ と仮定する．$M_b, a \models \Box\neg p$ の場合は明らかなので，$M_b, a \not\models \Box\neg p$ とする．仮定より $M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ なので，ある矢印 x が存在して $M_b, x \models p$ であり，かつ $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to q$．特にすべての $z \in \min(A, \succeq)$ で $M_b, z \models p \to q$ となるので，補題 4.3 より $M_b \models \mathsf{B}(p \to q)$．

(4.64) $\neg\mathsf{B}\neg p \to (\mathsf{B}(p \to q) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q))$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}\neg p$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \to q)$ ならば $M_b, a \models p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} q$ であることを示す．$M_b, a \models \neg\mathsf{B}\neg p$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \to q)$ と仮定する．B の定義より $M_b, a \models \Box\Diamond_l p$ となるので，すべての矢印 x に対して $x \succeq y$ となる矢印 y が存在し，$M_b, y \models p$．特にすべての $z \in \min(A, \succeq)$ に対してもこの性質が成り立つので，ある $u \in \min(A, \succeq)$ が存在し $M_b, u \models p$．また，仮定より $M_b, a \models \mathsf{B}(p \to q)$ なので，ある矢印 b が存在して $b \succeq c$ となるすべての矢印 c で $M_b, c \models p \to q$．よって，特にすべての $z \in \min(A, \succeq)$ で $M_b, z \models p \to q$．$\min(A, \succeq)$ の定義から，上記の $u \in \min(A, \succeq)$ とすべての $z \in \min(A, \succeq)$ に対して $u \succeq z$ であることに注意すると，上記の $u \in \min(A, \succeq)$ について $M_b, u \models p \wedge \Box_l(p \to q)$ が成り立つので，$M_b, a \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to q))$ すなわち $M_b, a \models p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} q$ を得る．

(4.65) $\Diamond p \equiv \neg(p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} \bot)$

$\overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow}$ の定義より，$\neg(p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} \bot)$ は $\Diamond p \wedge \Box(p \to \Diamond_l p)$ と書き直すことができるので $M_b \models \neg(p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} \bot) \to \Diamond p$ は明らか．M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \Diamond p \to \neg(p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} \bot)$ を示す．ここで，$M_b, a \models \Diamond p$ と仮定する．$M_b, a \models \Box(p \to \Diamond_l p)$ を示せば十分である．論理文 $p \to \Diamond_l p$ は $\mathbf{T}\Box_l$ の対偶であり，命題 4.1 より $\mathbf{T}\Box_l$ は OAL で証明可能なので，OAL の完全性より $p \to \Diamond_l p$ はすべての OA モデルで妥当．よって特に M_b でも妥当なので，明らかに $M_b, a \models \Box(p \to \Diamond_l p)$.

(4.66) $\Box(p \equiv q) \to ((p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r))$

自明なので省略.

(4.67) $((p \wedge q) \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} (q \to r))$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models (p \wedge q) \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r$ ならば $M_b, a \models p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ であることを示す．$M_b, a \models (p \wedge q) \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r$ と仮定する．$M_b, a \models \Box\neg p$ の場合は明らかに $M_b, a \models p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ なので，$M_b, a \not\models \Box\neg p$ とする．よって p が真となる矢印が存在する．ここで，もし $M_b, a \models \Box\neg q$ ならば，任意の論理文 r に対して $M_b, a \models \Box(q \to r)$ でもあるので，$\Box$ の定義より特に $M_b, a \models \Box_l(q \to r)$ であり，$M_b, a \models p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ となる．よって，以下 $M_b, a \not\models \Box\neg q$ とする．仮定より $M_b, a \models (p \wedge q) \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r$ なので，ある矢印 x が存在して $M_b, x \models p \wedge q$ であり，かつ $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models (p \wedge q) \to r$．特に $M_b, x \models p$ であり，かつ上記の性質を満たすすべての y で $M_b, y \models p \to (q \to r)$ が成り立つので，よって $M_b, x \models p \wedge \Box_l(p \to (q \to r))$ すなわち $M_b, a \models p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ が成り立つ.

(4.68) $\neg(p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} \neg q) \to ((p \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} (q \to r)) \to (p \wedge q \overset{\mathbf{re}}{\Rightarrow} r))$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ ならば $M_b, a \models (p \wedge q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ であることを示す．$M_b, a \models \neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ と仮定する．仮定より $M_b, a \models \neg(p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q)$ すなわち $M_b, a \models \Diamond p \wedge \Box(p \to \Diamond_l(p \wedge q))$ であるので，p が真となる矢印が存在し，かつすべての矢印 z に対して，$M_b, z \models p$ ならば，$z \succeq u$ かつ $M_b, u \models p \wedge q$ となる矢印 u が存在する．また，$M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r)$ より，ある矢印 x が存在して $M_b, x \models p$ であり，かつ $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to (q \to r)$．ここで，$x$ に対しても上記の性質を満たす u が存在するので，ある u が存在して $M_b, u \models p \wedge q$ であり，かつ $u \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to (q \to r)$ すなわち $M_b, y \models (p \wedge q) \to r$．このことから $M_b, u \models (p \wedge q) \wedge \Box_l((p \wedge q) \to r)$ となり，よって $M_b, a \models (p \wedge q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ を得る．

$(Q.E.D)$

定理 4.2 式 (4.58) で定義した修正は以下の性質を満たす．これらの性質は AGM の修正の公準に対応する．

(*1) T^*_p は信念集合．

(*2) $p \in T^*_p$.

(*3) $T^*_p \subseteq T^+_p$.

(*4) $\neg p \notin T$ ならば，$T^+_p \subseteq T^*_p$.

(*5) $\vdash \neg p$ であるとき，かつそのときに限り，T^*_p は矛盾する．

(*6) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T^*_p = T^*_q$.

(*7) $T^*_{p \wedge q} \subseteq (T^*_p)^+_q$.

(*8) $\neg q \notin T^*_p$ ならば，$(T^*_p)^+_q \subseteq T^*_{p \wedge q}$.

(証明)

命題 4.5 より，式 (4.58) で定義された T^*_p は式 (4.60) で表現できるので，式 (4.60) に基く T^*_p が (*1) から (*8) を満たすことを示せばよい．

(*1)：$q \in T^*_p$ かつ $q \to r \in T^*_p$ と仮定する．式 (4.60) より $M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$ かつ $M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q \to r$ となるが，式 (4.61) が M_b で妥当であることから $M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$．よって，$T^*_p$ は推論規則について閉じているので信念集合である．

(*2)：式 (4.62) が M_b で妥当であることから明らか．

(*3)：$q \in T_p^*$ と仮定する．式 (4.60) より $M_b \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q$ であるが，式 (4.63) が M_b で妥当であることから $M_b \models \mathsf{B}(p \to q)$．よって，式 (4.57) より $q \in T$．

(*4)：$\neg p \notin T$ と仮定する．式 (4.57) より $M_b \not\models \mathsf{B}\neg p$．命題 4.4 より $M_b \models \neg\mathsf{B}\neg p$ となるので，式 (4.64) が M_b で妥当であることから $M_b \models \mathsf{B}(p \to q) \to p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q$．よって，任意の論理文 $q \in \mathcal{L}$ に対して，$p \to q \in T$ すなわち $q \in T_p^+$ ならば $q \in T_p^*$．

(*5)：式 (4.65) が M_b で妥当であることから明らか．

(*6)：式 (4.66) が M_b で妥当であることから明らか．

(*7)：式 (4.67) が M_b で妥当であることから，任意の論理文 $r \in \mathcal{L}$ に対して，$r \in T_{p\wedge q}^*$ ならば $q \to r \in T_p^*$．よって，$r \in (T_p^*)_q^+$．

(*8)：式 (4.68) が M_b で妥当であることから，(*4) と同様に証明できる．

$(Q.E.D)$

命題 4.6 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$((p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} p)) \to ((p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r)).$$
$$((p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r)) \to ((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r).$$
$$\neg((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} \neg q) \to (((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r) \to (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r)).$$

(証明)

(4.69) $((p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} p)) \to ((p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r))$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} p)$ ならば $M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} p)$ と仮定する．もし $M_b, a \models \Box\neg p$ ならば，仮定より $M_b, a \models q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} p$ なので，$M_b, a \models \Box\neg q$ でなければならない．同様に $M_b, a \models \Box\neg q$ ならば $M_b, a \models \Box\neg p$．$M_b, a \models \Box\neg q$ かつ $M_b, a \models \Box\neg p$ の場合は明らかに題意が成り立つので，以下，$M_b, a \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to q))$ かつ $M_b, a \models \Diamond(q \wedge \Box_l(q \to p))$ と仮定する．

まず，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r) \to (q \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r)$ を示す．$M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} r$ と仮定すると，$M_b, a \models p \overset{\mathrm{re}}{\Rrightarrow} q$ でもあることから，ある矢印 $x \in A$ が存在して $M_b, x \models p$ であり，更に，$x \succeq y$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models p \to q \wedge r$ が成り立つ．また，$M_b, a \models \Diamond(q \wedge \Box_l(q \to p))$ より，ある $z \in A$ が存在して $M_b, z \models q$ であり，更に，$z \succeq w$ となるすべての $w \in A$ で $M_b, w \models q \to p$ が成り立つ．ここで，$z \succeq x$ と仮定しても一般性を失わない．すると，q および $q \to p$，$p \to q \wedge r$ が x ですべて真となるので，よって $M_b, x \models q \wedge r$．更

に，$x \succeq y$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q \to p$ かつ $M_b, y \models p \to q \wedge r$ なので，よって，そのようなすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q \to r$ が成り立つ．これらをまとめると，$M_b, a \models \Diamond(q \wedge \Box_l(q \to r))$ となり，$M_b, a \models q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ を得る．

$M_b, a \models (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ も同様に示すことができるので，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ が成り立つ．

(4.70) $((p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)) \to ((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \wedge (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ ならば $M_b, a \models (p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ であることを示す．$M_b, a \models \Box\neg p$ または $M_b, a \models \Box\neg q$ の場合は明らかなので，$M_b, a \models \Diamond(p \wedge \Box_l(p \to r))$ かつ $M_b, a \models \Diamond(q \wedge \Box_l(q \to r))$ と仮定する．よって，ある矢印 $x \in A$ が存在して $M_b, x \models p$ であり，更に，$x \succeq y$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models p \to r$．同様に，ある矢印 $z \in A$ が存在して $M_b, z \models q$ であり，更に，$z \succeq u$ となるすべての $u \in A$ で $M_b, u \models q \to r$．ここで，$z \succeq x$ と仮定しても一般性を失わない．このことから，$M_b, x \models p \vee q$ であり，更に $x \succeq y$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models p \to r$ かつ $M_b, y \models q \to r$ すなわち $M_b, y \models (p \vee q) \to r$ が成り立つ．よって，$M_b, a \models \Diamond((p \vee q) \wedge \Box_l((p \vee q) \to r))$ が成り立つので，$M_b, a \models (p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ を得る．

(4.71) $\neg((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q) \to (((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r) \to (q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r))$

M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models (p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ ならば $M_b, a \models q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ であることを示す．$M_b, a \models \neg((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models (p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ と仮定する．

$M_b, a \models \neg((p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg q)$ すなわち $M_b, a \models \Diamond(p \vee q) \wedge \Box((p \vee q) \to \Diamond_l q)$ であるので，$p \vee q$ が真となる矢印が存在し，かつすべての矢印 z に対して，$M_b, z \models p \vee q$ ならば，$z \succeq u$ かつ $M_b, u \models q$ となる矢印 u が存在する．また，$M_b, a \models (p \vee q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ より，ある矢印 x が存在して $M_b, x \models p \vee q$ であり，かつ $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models (p \vee q) \to r$．ここで，$x$ に対しても上記の性質を満たす u が存在するので，ある u が存在して $M_b, u \models q$ であり，かつ $u \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models (p \vee q) \to r$．$q \to (p \vee q)$ は恒真文なので，このようなすべての y で $M_b, y \models q \to r$．このことから $M_b, u \models q \wedge \Box_l(q \to r)$ となり，$M_b, a \models q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ を得る．

(*Q.E.D*)

補題 4.2 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (q \to r))) \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r).$$

$$(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}q.$$

$$\neg\mathsf{B}p \to ((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q).$$

$$\Diamond\neg p \to \neg(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} \bot).$$

$$\mathsf{B}p \to (\mathsf{B}q \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (p \to q))).$$

$$\Box(p \equiv q) \to ((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)).$$

$$((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \wedge (q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)) \to ((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r).$$

$$\neg((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p) \to (((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)).$$

(証明)

(4.75) $((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (q \to r))) \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b \models (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (q \to r))$ ならば $M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ であることを示す．$M_b, a \models (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \wedge (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (q \to r))$ と仮定する．$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) より $M_b, a \models \mathsf{B}q \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(q \to r) \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (q \to r))$．補題 4.2 より信念演算子 B に関して，**K** の形の論理文は任意の OA モデルで妥当なので，特に $M_b, a \models \mathsf{B}r$ が成り立つ．また，式 (4.61) は M_b で妥当なので，$M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$．よって，$M_b, a \models \mathsf{B}r \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ すなわち $M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ を得る．

(4.76) $(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}q$

$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) に基いて式 (4.76) を書き直すと，$\mathsf{B}q \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}q$ となるので明らか．

(4.77) $\neg\mathsf{B}p \to ((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}p$ ならば $M_b, a \models (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q$ であることを示す．$M_b, a \models \neg\mathsf{B}p$ と仮定する．$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) より $(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q$ は $\mathsf{B}q \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q$ となるので，$M_b, a \models \mathsf{B}q \to (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ を示せば十分である．ここで，$M_b, a \models \mathsf{B}q$ と仮定する．$M_b, a \models \neg\mathsf{B}p$ を既に仮定しているので，式 (4.64) が M_b で妥当であることから，特に $M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q$．よって $M_b, a \models \mathsf{B}q \to (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} q)$ が示された．

(4.78) $\Diamond\neg p \to \neg(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} \bot)$

$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) より $\neg(p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} \bot)$ は $\neg(\mathsf{B}\top \wedge \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \bot)$ すなわち $\neg\mathsf{B}\top \vee \neg(\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \bot)$ と表現できるので，式 (4.66) より明らか．

(4.79) $\mathsf{B}p \to (\mathsf{B}q \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (p \to q)))$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}p$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}q$ ならば $M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (p \to q)$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}p$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}q$ と仮定する．この仮定より $M_b, a \models \mathsf{B}(p \to q)$ が成り立つ．$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) より $p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} (p \to q)$ は $\mathsf{B}(p \to q) \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (p \to q))$ と表現できるので，$M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (p \to q)$ を示せば十分である．式 (4.62) が M_b で妥当であることから，$M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} \neg p$．更に，論理文 $\neg p \to (p \to q)$ は恒真文であることから，$M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (\neg p \to (p \to q))$ も成り立つ．よって，式 (4.61) が M_b で妥当であることから，$M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} (p \to q)$ を得る．

(4.80) $\Box(p \equiv q) \to ((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \equiv (q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r))$

自明なので省略.

(4.81) $((p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \wedge (q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)) \to ((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ かつ $M_b, a \models q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ ならば $M_b, a \models (p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ であることを示す．$M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ かつ $M_b, a \models q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ と仮定する．$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) より，$M_b, a \models \mathsf{B}r \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}r \wedge (\neg q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$．同様に，$(p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ は $\mathsf{B}r \wedge ((\neg p \vee \neg q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ と表現できるので，$M_b, a \models (\neg p \vee \neg q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ を示せば十分であるが，式 (4.70) が M_b で妥当であることからこれは明らか.

(4.82) $\neg((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p) \to (((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r))$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p)$ かつ $M_b, a \models ((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)$ ならば $M_b, a \models (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r))$ であることを示す．$M_b, a \models \neg(p \wedge q \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p)$ かつ $M_b, a \models ((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)$ と仮定する．$\overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.73) より，$M_b, a \models ((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r)$ は $M_b, a \models \mathsf{B}r \wedge ((\neg p \vee \neg q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ と表現できるので，$M_b, a \models \mathsf{B}r$ かつ $M_b, a \models (\neg p \vee \neg q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$．同様に，$M_b, a \models \neg((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p)$ は $M_b, a \models \neg \mathsf{B}p \vee \neg((\neg p \vee \neg q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p)$ と表現できる．$M_b, a \models \neg \mathsf{B}p$ の場合は，式 (4.77) が M_b で妥当であることと $M_b, a \models \mathsf{B}r$ から，特に $M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ が成り立つので明らか．よって $M_b, a \models \neg((\neg p \vee \neg q) \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} p)$ と仮定する．式 (4.71) が M_b で妥当であることから，$M_b, a \models \neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r$ が成り立つ．故に，$M_b, a \models \mathsf{B}r \wedge (\neg p \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ すなわち $M_b, a \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$ を得る．

(*Q.E.D*)

定理 4.3 式 (4.72) で定義した縮小は以下の性質を満たす．これらの性質は AGM の縮小の公準に対応する．

($^{-}$1) T_p^- は信念集合.

($^-$2) $T_p^- \subseteq T$.

($^-$3) $p \notin T$ ならば，$T_p^- = T$.

($^-$4) $\not\vdash p$ ならば，$p \notin T_p^-$.

($^-$5) $p \in T$ ならば，$T \subseteq (T_p^-)_p^+$.

($^-$6) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^- = T_q^-$.

($^-$7) $T_p^- \cap T_q^- \subseteq T_{p\wedge q}^-$.

($^-$8) $p \notin T_{p\wedge q}^-$ ならば，$T_{p\wedge q}^- \subseteq T_p^-$.

(証明)

修正の場合と同様に，式 (4.74) に基く T_p^- が ($^-$1) から ($^-$8) を満たすことを示せばよい．

($^-$1)：$q \in T_p^-$ かつ $q \to r \in T_p^-$ と仮定する．式 (4.74) より $M_b \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q$ かつ $M_b \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q \to r$ となるが，式 (4.75) が M_b で妥当であることから $M_b \models p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r$．よって，$T_p^-$ は推論規則について閉じているので信念集合である．

($^-$2)：式 (4.76) が M_b で妥当であることから明らか．

($^-$3)：$q \notin T$ と仮定する．式 (4.57) より $M_b \not\models \mathsf{B}p$．よって，命題 4.4 より $M_b \models \neg\mathsf{B}p$．式 (4.77) が M_b で妥当であることから $M_b \models (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q$ となるので，$T_p^- = T$ を得る．

($^-$4)：式 (4.78) が M_b で妥当であることから明らか．

($^-$5)：式 (4.79) が M_b で妥当であることから明らか．

($^-$6)：式 (4.80) が M_b で妥当であることから明らか．

($^-$7)：式 (4.81) が M_b で妥当であることから明らか．

($^-$8)：$p \notin T_{p\wedge q}^-$ と仮定する．式 (4.74) より $M_b \not\models (p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p$．このことから $M_b \models \neg((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} p)$ が成り立つ．式 (4.82) が M_b で妥当であることから $M_b \models ((p \wedge q) \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r) \to (p \overset{\mathrm{co}}{\Rightarrow} r))$．よって，式 (4.74) より任意の論理文 $r \in \mathcal{L}$ に対して，$r \in T_{p\wedge q}^-$ ならば $r \in T_p^-$ となり，$T_{p\wedge q}^- \subseteq T_p^-$ を得る．

(*Q.E.D*)

命題 4.7 それぞれの可能な状態の候補 $n \in [T]$ および矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$，論理文 $p, q \in \mathcal{L}$ に対して，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y = (n, n')$ で $M_b, y \models q$ が成り立つことの必要十分条件は，$M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q$ が成り立つことである．

(証明)

矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$ に対して，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y = (n, n')$ で $M_b, y \models q$ と仮定する．このとき $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q$ となることを示す．$\|p\|$ が空の場合は $M_b, x \models \Box\neg p$ となるので明らか．$\|p\|$ が空でない場合は，信念変更モデルの構成法から $\|p\| \cap R_{21}(x) = \{(n, n') | n' \in N, p \in n'\}$ となるので，$\|p\| \cap R_{21}$ は空でない．ここで，仮定より $y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ なので，そのような y に対して $M_b, y \models p \wedge q$ が成り立つ．このことから，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となる y を一つ選ぶと，$M_b, y \models p$ であり，しかも $yR_{11}z$ かつ $y \succeq z$ となるすべての $z \in A$ で $M_b, z \models p \rightarrow q$ が成り立つ．よって，$M_b, x \models \langle 21 \rangle (p \wedge [11]_l (p \rightarrow q))$ となるので $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q$ が成り立つ．

逆に，矢印 $x = (n'', n) \in \|T\|$ に対して，$M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q$ であると仮定する．このとき，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ であることを示す．$M_b, x \models \Box\neg p$ の場合は $\|p\|$ が空となるので自明．$M_b, x \models \langle 21 \rangle (p \wedge [11]_l (p \rightarrow q))$ の場合は，ある $y \in A$ が存在して $xR_{21}y$ かつ $M_b, y \models p$ であり，更に $yR_{11}z$ かつ $y \succeq z$ となるすべての $z \in A$ に対して $M_b, z \models p \rightarrow q$ が成り立つ．ここで，$y \in \|p\| \cap R_{21}(x)$ となるので，$u \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $u \in A$ で $M_b, u \models p$ かつ $M_b, u \models p \rightarrow q$ となり，よって，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, u \models q$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

補題 4.3 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \rightarrow r))) \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)$.

$\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} p)$.

$\mathsf{B}p \rightarrow (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q)$.

$\neg\mathsf{B}\bot \wedge \Diamond p \rightarrow \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} \bot)$.

$\Box(p \equiv q) \rightarrow (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r))$.

$\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r) \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \rightarrow r))$.

M_bが完全ならば，$\neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} \neg q) \rightarrow (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \rightarrow r)) \rightarrow \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r))$.

(証明)

(4.88) $(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} (q \rightarrow r))) \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rrightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r))$ と仮定する．命題 4.3 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q$ かつ $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r)$．命題 4.7 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ かつ $M_b, y \models q \to r$ である．よって，上述の性質を満たすすべての y で $M_b, y \models r$ が成り立つので，$M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r$ となる．これはそれぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して成り立つので，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ を得る．

(4.89) $\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} p)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} p)$ を示す．命題 4.3 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} p$ を示せば十分である．$M_b, x \models \Box\neg p$ の場合は明らかなので，$M_b, x \not\models \Box\neg p$ とする．よって，p が真となる矢印が存在する．信念変更モデルの構成法から，それぞれの $x = (n'', n) \in \min(A, \succeq)$ に対して $\|p\| \cap R_{21}(x) = \{(n, n') | n' \in N, p \in n'\}$ となるので，$\|p\| \cap R_{21}(x)$ は空でない．ここで，$p \to p$ は恒真文なので，特に $xR_{21}y$ かつ $x \succeq y$ となるすべての y で $M_b, y \models p \to p$．よって，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models \langle 21 \rangle (p \wedge [11]_l (p \to p))$ となり，$M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} p$ が成り立つ．

(4.90) $\mathsf{B}p \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q)$

$M_b, a \models \mathsf{B}p$ でない矢印 $a \in A$ が存在する場合は明らかに成り立つので，信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}p$ と仮定する．信念変更モデル M_b は強反射的であることから，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対してある $u \in A$ が存在して，$x \succeq u$ かつ $xR_{21}u$ かつ $xR_{22}u$ である．$x \in \min(A, \succeq)$ かつ $x \succeq u$ であることから $u \in \min(A, \succeq)$ であり，また，$xR_{22}u$ より x と u の終点は等しいので，仮定よりすべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models p$ であることと，信念変更モデルの付値の定義から，$p \in \mathcal{L}$ に対して $M_b, u \models p$ が成り立つ．よって，$u \in \min(A, \succeq)$ であり，しかも $xR_{21}u$ かつ $M_b, u \models p$ なので，$u \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となる．

まず $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}q$ が成り立つこと，すなわち $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}q$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ と仮定すると，命題 4.3 よりすべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q$．命題 4.7 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して，$y \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ となるすべての $y \in A$ で $M_b, y \models q$ である．よって，上記の矢印 u に対して $M_b, u \models q$ が成り立つ．x と u の終点が等しいことから，再び信念変更モデルの付値の定義より，$M_b, x \models q$．これはそれぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して成り立つので，よって $M_b, a \models \mathsf{B}q$.

次に，$M_b, a \models \mathsf{B}q \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ が成り立つこと，すなわち $M_b, a \models \mathsf{B}q$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ であることを示す．仮定より $M_b, a \models \mathsf{B}p$ なので，更に $M_b, a \models \mathsf{B}q$ と仮定すると，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models p \wedge q$．よって，特に上記の矢印 $u \in \min(A, \succeq)$ において $M_b, u \models p \wedge q$ である．ここで，$u \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ より，すべての $v \in \min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq)$ に対して $u \succeq v$ が成り立つので，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $\min(\|p\| \cap R_{21}(x), \succeq) \subseteq \min(A, \succeq)$ が成り立つ．よって命題 4.7 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q$ となり，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ が成り立つ．よって，上記の結果と組み合わせて，$M_b, a \models \mathsf{B}p \rightarrow (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q)$ を得る．

(4.91) $\neg\mathsf{B}\bot \wedge \Diamond p \rightarrow \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \bot)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}\bot$ かつ $M_b, a \models \Diamond p$ ならば $M_b, a \models \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \bot)$ であることを示す．$M_b, a \models \neg\mathsf{B}\bot$ かつ $M_b, a \models \Diamond p$ と仮定する．$M_b, a \models \Diamond p$ より p が真となる矢印が存在する．よって，信念変更モデルの構成法から，それぞれの $x = (n'', n) \in \min(A, \succeq)$ に対して $\|p\| \cap R_{21}(x) = \{(n, n') | n' \in N, p \in n'\}$ となるので，$\|p\| \cap R_{21}(x)$ は空でない．しかし，$y \in \|p\| \cap R_{21}(x)$ で $p \rightarrow \bot$ すなわち $\neg p$ が成り立つ矢印 y は存在しないので，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \not\models \langle 21 \rangle (p \wedge [11]_l (p \rightarrow \bot))$ となり，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \bot)$ を得る．

(4.92) $\Box(p \equiv q) \rightarrow (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r))$

自明なので省略．

(4.93) $\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r) \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \rightarrow r))$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \rightarrow r))$ となることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ と仮定する．命題 4.3 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models (p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r$．

ここで，$M_b \models \Box\neg p$ の場合は明らかに $M_b, x \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \rightarrow r)$ なので，$M_b \not\models \Box\neg p$ とする．よって p が真となる矢印が存在する．信念変更モデルの定義から，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $\|p\| \cap R_{21}(x)$ は空ではない．ここで，もし $M_b \models \Box\neg q$ ならば，任意の論理文 r に対して $M_b \models \Box(q \rightarrow r)$ でもあるので，$\Box$ の定義より特に $M_b \models \Box_l (q \rightarrow r)$．このことから明らかに $M_b \models p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \rightarrow r)$ となる．よって，以下 $M_b \not\models \Box\neg q$ とする．

仮定より $M_b, x \models (p \wedge q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r$ なので，$x R_{21} y$ となる矢印 y が存在して $M_b, y \models p \wedge q$ であり，更に $y \succeq z$ かつ $y R_{11} z$ となるすべての z で $M_b, z \models (p \wedge q) \rightarrow r$．特に $M_b, y \models p$ であり，かつ上述の性質を満たすすべての z で $M_b, z \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$ が成り立つので，

$M_b, y \models p \wedge [11]_l(p \to (q \to r))$ となる．よって $M_b, x \models \langle 21\rangle(p \wedge [11]_l(p \to (q \to r)))$ すなわち $M_b, x \models p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r)$ が成り立つ．これはそれぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して成り立つので，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r))$ を得る．

(4.94) M_b が完全ならば，$\neg\mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q) \to (\mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r)) \to \mathsf{B}((p \wedge q) \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r))$

完全な信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r))$ ならば，$M_b, a \models \mathsf{B}((p \wedge q) \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．M_b は完全なので，ある状態 $n \in N$ がただ一つ存在して，すべての $x \in \min(A, \succeq)$ は $x = (n', n)$，$n' \in N$ として表現できる．そのため，すべての $x, x' \in \min(A, \succeq)$ に対して $R_{21}(x) = R_{21}(x')$ が成り立つ．

仮定より $M_b, a \models \neg\mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q)$ なので，ある $x \in \min(A, \succeq)$ が存在し，$M_b, x \not\models p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q$ となる．$\stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.84) より，そのような $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models \Diamond p \wedge [21](p \to \langle 11\rangle_l(p \wedge q))$ であるので，p が真となる矢印が存在する．また，$xR_{21}u$ となるすべての矢印 u に対して，$M_b, u \models p$ ならば $uR_{11}w$ かつ $u \succeq w$ かつ $M_b, w \models p \wedge q$ となる矢印 w が存在する．更に，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r))$ より，すべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して，$xR_{21}y$ となる矢印 y が存在して $M_b, y \models p$ であり，かつすべての矢印 z に対して，$yR_{11}z$ かつ $y \succeq z$ ならば $M_b, z \models p \to (q \to r)$．

ここで，この y に対しても上記の性質を満たす矢印 w が存在するので，$yR_{11}w$ かつ $y \succeq w$ である矢印 w が存在して $M_b, w \models p \wedge q$ であり，かつすべての矢印 z に対して，$wR_{11}z$ かつ $w \succeq z$ ならば $M_b, z \models p \to (q \to r)$．すなわち $M_b, z \models (p \wedge q) \to r$．このことから $M_b, w \models (p \wedge q) \wedge [11]_l((p \wedge q) \to r)$ となり，$M_b, x \models \langle 21\rangle((p \wedge q) \wedge [11]_l((p \wedge q) \to r))$．すべての $x, x' \in \min(A, \succeq)$ に対して $R_{21}(x) = R_{21}(x')$ が成り立つので，よって $M_b, a \models \mathsf{B}((p \wedge q) \stackrel{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ を得る．

$(Q.E.D)$

定理 4.4 式 (4.83) で定義した更新は以下の性質を満たす．これらの性質は，Peppas and Williams [33] が再定式化した更新の公準に対応する．

$(^\diamond 1)$ $T_p^\diamond$ は信念集合．

$(^\diamond 2)$ $p \in T_p^\diamond$．

$(^\diamond 3)$ $p \in T$ ならば，$T_p^\diamond = T$．

$(^\diamond 4)$ T が矛盾するか，または $\vdash \neg p$ であるとき，かつそのときに限り，$T_p^\diamond$ が矛盾する．

$(^\diamond 5)$ $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^\diamond = T_q^\diamond$．

($^\Diamond 6$) $T^\Diamond_{p\wedge q} \subseteq (T^\Diamond_p)^+_q$.

($^\Diamond 7$) T が完全であり，かつ $\neg q \notin T^\Diamond_p$ ならば，$(T^\Diamond_p)^+_q \subseteq T^\Diamond_{p\wedge q}$.

($^\Diamond 8$) T が無矛盾ならば，$T^\Diamond_p = \bigcap_{K\in[T]} K^\Diamond_p$.

(証明)

命題 4.7 より，式 (4.83) で定義された $T^\Diamond_p$ は式 (4.87) で表現できるので，式 (4.87) に基く $T^\Diamond_p$ が ($^\Diamond 1$) から ($^\Diamond 8$) を満たすことを示せばよい．

($^\Diamond 1$)：$q \in T^\Diamond_p$ かつ $q \to r \in T^\Diamond_p$ と仮定する．式 (4.87) より $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} q)$ かつ $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} (q \to r))$ となるが，式 (4.88) が M_b で妥当であることから $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r)$．よって，$T^\Diamond_p$ は推論規則について閉じているので信念集合である．

($^\Diamond 2$)：式 (4.89) が M_b で妥当であることから明らか．

($^\Diamond 3$)：$p \in T$ と仮定する．式 (4.87) より $M_b \models \mathsf{B}p$ であるが，式 (4.90) が M_b で妥当であることから $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} q) \equiv \mathsf{B}q$ が成り立つので，式 (4.57) と式 (4.87) より $T^\Diamond_p = T$.

($^\Diamond 4$)：式 (4.91) が M_b で妥当であることから明らか．

($^\Diamond 5$)：式 (4.92) が M_b で妥当であることから明らか．

($^\Diamond 6$)：式 (4.93) が M_b で妥当であることから明らか．

($^\Diamond 7$)：T は完全であるとする．よって，M_b も完全な信念変更モデルである．また，$\neg q \notin T^\Diamond_p$ と仮定する．式 (4.87) より $M_b \not\models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} \neg q)$ なので，命題 4.4 より $M_b \models \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} \neg q)$．式 (4.94) が M_b で妥当であることから，任意の論理文 $r \in \mathcal{L}$ に対して，$r \in T^\Diamond_{p\wedge q}$ ならば $q \to r \in T^\Diamond_p$．よって，$r \in (T^\Diamond_p)^+_q$.

($^\Diamond 8$)：式 (4.86) より明らか．

$(Q.E.D)$

命題 4.8 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} q) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} p)) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r)).$$
$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r)) \to \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r).$$
$$M_b\text{が完全ならば，}\neg\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} \neg q) \to (\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r) \to \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\rightrightarrows} r)).$$

(証明)

(4.95) $(\mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} p)) \to (\mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r))$.

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} p)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} p)$ と仮定する．命題 4.3 よりすべての $x \in \min(A, \succeq)$ で $M_b, x \models p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q$ かつ $M_b, x \models q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} p$. もし $M_b \models \Box\neg p$ ならば，仮定より $M_b \models \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} p)$ なので，$M_b \models \Box\neg q$ でなければならない．同様に $M_b \models \Box\neg q$ ならば $M_b \models \Box\neg p$. $M_b \models \Box\neg q$ かつ $M_b \models \Box\neg p$ の場合は明らかに題意が成り立つので，以下，すべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models \langle 21\rangle(p \wedge [11]_l(p \to q))$ かつ $M_b, x \models \langle 21\rangle(q \wedge [11]_l(q \to p))$ と仮定する．

まず，$M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \to \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ を示す．$M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ と仮定すると，$M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q)$ でもあることから，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対してある $y \in A$ が存在して，$xR_{21}y$ かつ $M_b, y \models p$ であり，更に，$yR_{11}z$ かつ $y \succeq z$ となるすべての $z \in A$ で $M_b, z \models p \to q \wedge r$ が成り立つ．また，$M_b, x \models \langle 21\rangle(q \wedge [11]_l(q \to p))$ より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対してある $u \in A$ が存在して，$xR_{21}u$ かつ $M_b, u \models q$ であり，更に，$uR_{11}v$ かつ $u \succeq v$ となるすべての $v \in A$ で $M_b, v \models q \to p$ が成り立つ．ここで，$y \succeq u$ と仮定しても一般性を失わない．すると，q および $q \to p$, $p \to q \wedge r$ が u で真となるので，よって $M_b, u \models q \wedge r$. 更に，$uR_{11}v$ かつ $u \succeq v$ となるすべての $v \in A$ で $M_b, v \models q \to p$ かつ $M_b, v \models p \to q \wedge r$ なので，よって，そのようなすべての $v \in A$ で $M_b, v \models q \to r$ が成り立つ．これらをまとめると，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ で $M_b, x \models \langle 21\rangle(q \wedge [11]_l(q \to r))$ となり，$M_b \models \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ を得る．$M_b \models \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \to \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ も同様に示すことができるので，$M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ も成り立ち，よって $M_b \models (\mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} p)) \to (\mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r))$ を得る．

(4.96) $(\mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)) \to \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r)$ と仮定する．命題 4.3 よりすべての $x \in \min(A, \succeq)$ で $M_b, x \models p \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r$ かつ $M_b, x \models q \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r$. ここで，$M_b, x \models \Box\neg p$ または $M_b, x \models \Box\neg q$ の場合は明らかなので，$M_b, x \models \langle 21\rangle(p \wedge [11]_l(p \to r))$ かつ $M_b, x \models \langle 21\rangle(q \wedge [11]_l(q \to r))$ と仮定する．よって，$xR_{21}y$ かつ $M_b, y \models p$ となる矢印 $y \in A$ が存在し，更に $yR_{11}z$ かつ $y \succeq z$ となるすべての $z \in A$ で $M_b, z \models p \to r$. 同様に，$xR_{21}u$ かつ $M_b, u \models q$ となる矢印 $u \in A$ が存在し，更に $uR_{11}w$ かつ $u \succeq w$ となるすべての $w \in A$ で $M_b, w \models q \to r$. ここで，$w \succeq y$ と仮定しても一般性を失わない．このことから，$M_b, y \models p \vee q$ であり，更に $yR_{11}z$ かつ $y \succeq z$ となるすべての $z \in A$ で $M_b, z \models p \to r$ かつ $M_b, z \models q \to r$ すなわち $M_b, z \models (p \vee q) \to r$ が成り立つ．よって，$M_b, x \models \langle 21\rangle((p \vee q) \wedge [11]_l((p \vee q) \to r))$ が成り立つので，$M_b, x \models (p \vee q) \overset{\text{up}}{\Rightarrow} r$. これはそれぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して成

り立つので，よって $M_b, a \models \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ を得る．

(4.97) M_b が完全ならば，$\neg\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q) \rightarrow (\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r) \rightarrow \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r))$.

完全な M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{re}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models \neg\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ と仮定する．M_b は完全なので，ある状態 $n \in N$ がただ一つ存在して，すべての $x \in \min(A, \succeq)$ は $x = (n', n)$，$n' \in N$ として表現できる．そのため，すべての $x, x' \in \min(A, \succeq)$ に対して $R_{21}(x) = R_{21}(x')$ が成り立つ．

B を定義する式 (4.2) および $\overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.84) より，$\neg\mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg q)$ は $\Box\Diamond_l(\Diamond(p \vee q) \wedge [21]((p \vee q) \rightarrow \langle 11 \rangle_l q))$ と表すことができるので，仮定よりすべての矢印 x に対して $x \succeq y$ となる矢印 y が存在し，$M, y \models \Diamond(p \vee q) \wedge [21]((p \vee q) \rightarrow \langle 11 \rangle_l q)$ である．このことから，$p \vee q$ が真となる矢印が存在する．また，$yR_{21}z$ かつ $M_b, z \models p \vee q$ ならば，$zR_{11}u$ かつ $z \succeq u$ かつ $M_b, u \models q$ となる矢印 u が存在する．

更に，仮定より $M_b, a \models \mathsf{B}((p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ なので，命題 4.3 より，すべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models (p \vee q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r$．$p \vee q$ が真となる矢印が存在するので，よってすべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $xR_{21}b$ となる $b \in A$ が存在して $M_b, b \models p \vee q$ であり，更に $bR_{11}c$ かつ $b \succeq c$ となるすべての $c \in A$ で $M_b, c \models (p \vee q) \rightarrow r$．ここで，$M_b$ は完全なので，上述の性質を満たす b はすべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して同一である．

すべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して上述の性質を満たす b が存在することから，x に対しても上記の性質を満たす u が存在するので，$xR_{21}u$ かつ $M_b, u \models q$ となる u が存在して，更に $uR_{11}w$ かつ $u \succeq w$ となるすべての w で $M_b, w \models (p \vee q) \rightarrow r$．$q \rightarrow (p \vee q)$ は恒真文なので，上述の性質を満たすすべての w で $M_b, w \models q \rightarrow r$．このことから $M_b, u \models q \wedge [11]_l(q \rightarrow r)$ となり，よってすべての $x \in \min(A, \succeq)$ に対して $M_b, x \models q \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r$ が成り立つ．よって $M_b, a \models \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ を得る．

$(Q.E.D)$

補題 4.4 以下の論理文はすべて信念変更モデル M_b で妥当である．ここで，$p, q, r \in \mathcal{L}$ である．

$$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (q \rightarrow r))) \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r).$$

$$\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \rightarrow \mathsf{B}q.$$

$$\mathsf{B}\neg p \rightarrow (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q).$$

$$\neg\mathsf{B}\bot \wedge \Diamond\neg p \rightarrow \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} \bot).$$

$$\mathsf{B}q \rightarrow \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (p \rightarrow q)).$$

$\Box(p \equiv q) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r))$.

$(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r) \wedge \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)) \to \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$.

M_bが完全ならば，$\neg\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} p) \to (\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r))$.

(証明)

(4.103) $(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \wedge \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (q \to r))) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (q \to r))$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (q \to r))$ と仮定する．命題 4.3 より，それぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して，$M_b, x \models p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q$ かつ $M_b, x \models p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (q \to r)$．$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) より $M_b, x \models q \wedge (\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ かつ $M_b, x \models (q \to r) \wedge (\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (q \to r))$．よって $M_b, x \models r$ であり，式 (4.88) が M_b で妥当であることから $M_b, x \models \neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r$．これらをまとめて $M_b, x \models r \wedge (\neg p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ すなわち $M_b, x \models p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r$ が成り立つ．これはそれぞれの $x \in \min(A, \succeq)$ に対して成り立つので，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ を得る．

(4.104) $\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}q$

$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) に基づいて式 (4.104) を書き直すと，$\mathsf{B}q \wedge \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q) \to \mathsf{B}q$ となるので明らか．

(4.105) $\mathsf{B}\neg p \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}\neg p$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}\neg p$ と仮定する．$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) より $\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} q) \equiv \mathsf{B}q$ は $(\mathsf{B}q \wedge \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)) \equiv \mathsf{B}q$ となるので，$M_b, a \models \mathsf{B}q \to \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ を示せば十分である．ここで，$M_b, a \models \mathsf{B}q$ と仮定する．$M_b, a \models \mathsf{B}\neg p$ を既に仮定しているので，式 (4.90) が M_b で妥当であることから，特に $M_b, a \models \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$．よって $M_b, a \models \mathsf{B}q \to \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} q)$ が示された．

(4.106) $\neg\mathsf{B}\bot \wedge \Diamond\neg p \to \neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} \bot)$

$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) より $\neg\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} \bot)$ は $\neg(\mathsf{B}\bot \wedge \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \bot))$ すなわち $\neg\mathsf{B}\bot \vee \neg\mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \bot)$ と表現できるので，式 (4.91) より明らか．

(4.107) $\mathsf{B}q \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (p \to q))$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}q$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (p \to q))$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}q$ と仮定する．$q \to (p \to q)$ は恒真文なので，この仮定より $M_b, a \models \mathsf{B}(p \to q)$ が成り立つ．

$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) より $\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} (p \to q))$ は $\mathsf{B}(p \to q) \land \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (p \to q))$ と表現できるので，$M_b, a \models \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (p \to q))$ を示せば十分である．式 (4.89) が M_b で妥当であることから，$M_b, a \models \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} \neg p)$．更に，論理文 $\neg p \to (p \to q)$ は恒真文であることから，$M_b, a \models \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (\neg p \to (p \to q)))$ も成り立つ．よって，式 (4.88) が M_b で妥当であることから，$M_b, a \models \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} (p \to q))$ を得る．

(4.108) $\Box(p \equiv q) \to (\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r) \equiv \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r))$

自明なので省略.

(4.109) $(\mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r) \land \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)) \to \mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$

信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ ならば $M_b, a \models \mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}(q \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ と仮定する．$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) より，$M_b, a \models \mathsf{B}r \land \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}r \land \mathsf{B}(\neg q \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$．同様に，$\mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ は $\mathsf{B}r \land \mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ と表現できるので，$M_b, a \models \mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ を示せば十分であるが，式 (4.96) が M_b で妥当であることからこれは明らか.

(4.110) M_b が完全ならば，$\neg\mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} p) \to (\mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r))$

完全な信念変更モデル M_b の任意の矢印 a に対して，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} p)$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ ならば，$M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ であることを示す．M_b は完全なので，ある状態 $n \in N$ がただ一つ存在して，すべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ は $\boldsymbol{x} = (n', n)$, $n' \in N$ として表現できる．そのため，信念変更モデルの付値を定義する式 (4.53) から，すべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ において古典命題論理の論理文の付値は等しい.

また，$\overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow}$ を定義する式 (4.99) より，$M_b, a \models \mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ は $M_b, a \models \mathsf{B}r \land \mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ と表現できるので，$M_b, a \models \mathsf{B}r$ かつ $M_b, a \models \mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$．同様に，$M_b, a \models \neg\mathsf{B}((p \land q) \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} p)$ は $M_b, a \models \neg\mathsf{B}p \lor \neg\mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} p)$ と表現できる.

$M_b, a \models \neg\mathsf{B}p$ の場合は，ある $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ が存在して $M_b, \boldsymbol{x} \models \neg p$ となるが，M_b は完全なので，すべての $\boldsymbol{x} \in \min(A, \succeq)$ で $M_b, \boldsymbol{x} \models \neg p$．このことから，$M_b \models \mathsf{B}\neg p$ が成り立つ．式 (4.105) が M_b で妥当であることと $M_b, a \models \mathsf{B}r$ から，特に $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ が成り立つので明らか．よって $M_b, a \models \neg\mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} p)$ と仮定する．$M_b, a \models \mathsf{B}((\neg p \lor \neg q) \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ であることと式 (4.97) が M_b で妥当であることから，$M_b, a \models \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ が成り立つ．故に，$M_b, a \models \mathsf{B}r \land \mathsf{B}(\neg p \overset{\mathrm{up}}{\Rightarrow} r)$ すなわち $M_b, a \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\Rightarrow} r)$ を得る.

$(Q.E.D)$

定理 4.5 式 (4.98) で定義した消去は以下の性質を満たす．これらの性質は，第 3 章で再定式化した消去の公準に対応する．

($^{\blacklozenge}$1) $T_p^{\blacklozenge}$ は信念集合．

($^{\blacklozenge}$2) $T_p^{\blacklozenge} \subseteq T$.

($^{\blacklozenge}$3) $\neg p \in T$ ならば，$T_p^{\blacklozenge} = T$.

($^{\blacklozenge}$4) T が無矛盾であり，かつ $\nvdash p$ ならば，$p \notin T_p^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$5) $T \subseteq (T_p^{\blacklozenge})_p^+$.

($^{\blacklozenge}$6) $\vdash p \equiv q$ ならば，$T_p^{\blacklozenge} = T_q^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$7) $T_p^{\blacklozenge} \cap T_q^{\blacklozenge} \subseteq T_{p \wedge q}^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$8) T が完全であり，かつ $p \notin T_{p \wedge q}^{\blacklozenge}$ ならば，$T_{p \wedge q}^{\blacklozenge} \subseteq T_p^{\blacklozenge}$.

($^{\blacklozenge}$9) T が無矛盾ならば，$T_p^{\blacklozenge} = \bigcap_{K \in [T]} K_p^{\blacklozenge}$.

(証明)

更新の場合と同様に，式 (4.102) に基く $T_p^{\blacklozenge}$ が ($^{\blacklozenge}$1) から ($^{\blacklozenge}$9) を満たすことを示せばよい．

($^{\blacklozenge}$1)：$q \in T_p^{\blacklozenge}$ かつ $q \to r \in T_p^{\blacklozenge}$ と仮定する．式 (4.102) より $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} q)$ かつ $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} (q \to r))$．式 (4.103) が M_b で妥当であることから $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r)$．よって，$T_p^{\blacklozenge}$ は推論規則について閉じているので信念集合である．

($^{\blacklozenge}$2)：式 (4.104) が M_b で妥当であることから明らか．

($^{\blacklozenge}$3)：$\neg p \in T$ と仮定する．式 (4.57) より $M_b \models \mathsf{B}\neg p$．式 (4.77) が M_b で妥当であることから $M_b \models \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} q) \equiv \mathsf{B}q$ となるので，$T_p^{\blacklozenge} = T$ を得る．

($^{\blacklozenge}$4)：式 (4.106) が M_b で妥当であることから明らか．

($^{\blacklozenge}$5)：式 (4.107) が M_b で妥当であることから明らか．

($^{\blacklozenge}$6)：式 (4.108) が M_b で妥当であることから明らか．

($^{\blacklozenge}$7)：式 (4.109) が M_b で妥当であることから明らか．

($^{\blacklozenge}$8)：T は完全と仮定する．よって M_b も完全である．$p \notin T_{p \wedge q}^{\blacklozenge}$ と仮定する．式 (4.102) より $M_b \not\models \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} p)$．命題 4.4 より $M_b \models \neg\mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} p)$ なので，式 (4.110) が M_b で妥当であることから，$M_b \models \mathsf{B}((p \wedge q) \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r) \to \mathsf{B}(p \overset{\mathrm{er}}{\rightrightarrows} r))$．よって，式 (4.74) より $r \in T_{p \wedge q}^{\blacklozenge}$ ならば $r \in T_p^{\blacklozenge}$ となり，$T_{p \wedge q}^{\blacklozenge} \subseteq T_p^{\blacklozenge}$ を得る．

($^{\blacklozenge}$9)：式 (4.101) より明らか．

$(Q.E.D)$

A.3 第5章の定理・補題の証明

命題 5.1 任意の空でない集合 $A \subseteq \Omega$ および任意の可能世界 $w \in \Omega$ に対して，式 (5.10) を満たす半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11) に基づいて構成した集合 $A(w)$ は常に $A(w) \neq \emptyset$ であり，かつ以下の性質を満たす．

1. $w \in A$ ならば，$A(w) = \{w\}$.

2. 任意の $B \subseteq \Omega$ に対して，$A(w) \cap B \subseteq \{A \cap B\}(w)$.

(証明)

式 (5.10) を満たす半順序 $\preceq_w$ と式 (5.11) から定義された $A(w)$ が空集合にならないことは，式 (5.10) および全体集合 Ω の有限性より明らか．また，$w \in A$ ならば，式 (5.10) より w は A で最小となる唯一の可能世界なので，$A(w) = \{w\}$．更に，任意の $B \subseteq \Omega$ に対して，$w' \in A(w) \cap B$ ならば (5.11) 式よりすべての $w'' \in A$ に対して $w'' \not\prec_w w'$ なので，特にすべての $w'' \in A \cap B$ に対して $w'' \not\prec_w w'$ が成り立つ．よって $A(w) \cap B \subseteq \{A \cap B\}(w)$.

$(Q.E.D)$

定理 5.1 知識ベースを表す任意の可能性分布 π および可能世界 $w \in \Omega$，集合 $A \subseteq \Omega$ (空集合でもよい) に対して，更新の結果 $\pi_A^\diamond$ は式 (5.10) を満たす半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11)，更新の構成規則 (5.9) から常に構成することができ，かつ可能性理論に基づく更新の公準 $(\Pi^\diamond 1)$ から $(\Pi^\diamond 8)$ を満たす．

(証明)

$A = \emptyset$ の場合は式 (5.9) より $\pi_A^\diamond = \pi_\perp$ となるので，$\pi_A^\diamond$ は式 (5.9) から構成できる．また，$A \neq \emptyset$ ならば，命題 5.1 より，任意の可能世界 $w \in \Omega$ に対して $A(w) \neq \emptyset$ なので，$\pi_A^\diamond$ は式 (5.9) から構成できる．よって，いかなる場合でも，知識ベースを表す任意の可能性分布 π および可能世界 w，集合 A に対して，$\pi_A^\diamond$ は更新の構成規則 (5.9) 式から常に構成できる．

次に，$\pi_A^\diamond$ が $(\Pi^\diamond 1)$ から $(\Pi^\diamond 8)$ を満たすことを示す．

($\Pi^\Diamond 1$) 式 (5.9) よりすべての $w \notin A$ に対して $\pi^\Diamond_A(w) = 0$ なので，明らかに $\pi^\Diamond_A \leq \mu_A$.

($\Pi^\Diamond 2$) $\pi \leq \mu_A$ とする．$\pi = \pi_\perp$ または $A = \emptyset$ の場合は式 (5.9) より明らかに $\pi^\Diamond_A = \pi = \pi_\perp$．知識ベースを表す可能性分布 π は無矛盾であるか，または $\pi_\perp$ なので，π は無矛盾かつ $A \neq \emptyset$ と仮定する．このとき，前提より $\pi(w) > 0$ であるようなすべての w に対して $w \in A$ であり，命題 5.1 よりすべての $w \in A$ に対して $A(w) = \{w\}$ が成り立つので，よって，$w \in A$ ならば $\pi^\Diamond_A(w) = \max_{\{w'|w \in A(w')\}} \pi(w') = \pi(w)$．また，$w \notin A$ ならば $\pi^\Diamond_A(w) = \pi(w) = 0$．よって，いかなる場合でも $\pi^\Diamond_A = \pi$ が成り立つ．

($\Pi^\Diamond 3$) π は無矛盾かつ $A \neq \emptyset$ とする．前提より π は無矛盾なので，$\pi(w_1) = 1$ となるような $w_1 \in \Omega$ が少なくとも一つ存在する．また，$A \neq \emptyset$ なので，命題 5.1 より $A(w_1) \neq \emptyset$ である．よって，式 (5.9) よりすべての $w \in A(w_1)$ に対して $\pi^\Diamond_A(w) = 1$ が成り立つので，$\pi^\Diamond_A$ は無矛盾．

($\Pi^\Diamond 4$) $A = B$ とする．このとき，任意の $w \in \Omega$ に対して明らかに $A(w) = B(w)$ なので，式 (5.9) より $\pi^\Diamond_A = \pi^\Diamond_B$ が成り立つ．

($\Pi^\Diamond 5$) $\pi = \pi_\perp$ の場合は明らかに $(\pi^\Diamond_A)^+_B = \pi^\Diamond_{A \cap B} = \pi_\perp$ なので，π は無矛盾であると仮定する．また，$A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ の場合も式 (5.9) より $(\pi^\Diamond_A)^+_B = \pi^\Diamond_{A \cap B} = \pi_\perp$ なので，$A \neq \emptyset$ かつ $B \neq \emptyset$ と仮定する．式 (5.9) よりすべての $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ に対して，$(\pi^\Diamond_A)^+_B(w) = \pi^\Diamond_{A \cap B}(w) = 0$．また，命題 5.1 より任意の $B \subseteq \Omega$ と任意の $w' \in \Omega$ に対して $A(w') \cap B \subseteq \{A \cap B\}(w')$ なので，任意の $w' \in \Omega$ と任意の $w \in A \cap B$ に対して，$w \in A(w') \cap B$ ならば $w \in \{A \cap B\}(w')$ である．このことから，任意の $w \in A \cap B$ に対して $\{w'|w \in A(w') \cap B\} \subseteq \{w'|w \in \{A \cap B\}(w')\}$ が成り立つ．よって，式 (5.9) よりすべての $w \in A \cap B$ に対して $(\pi^\Diamond_A)^+_B(w) \leq \pi^\Diamond_{A \cap B}(w)$ が成り立つ．これらをまとめると，いかなる場合でも $(\pi^\Diamond_A)^+_B \leq \pi^\Diamond_{A \cap B}$ が成り立つ．

($\Pi^\Diamond 6$) $\pi^\Diamond_A \leq \mu_B$ かつ $\pi^\Diamond_B \leq \mu_A$ とする．知識ベースを表す可能性分布 π は無矛盾であるか，または $\pi_\perp$ であるが，$\pi = \pi_\perp$ の場合は式 (5.9) より明らかに $\pi^\Diamond_A = \pi^\Diamond_B = \pi_\perp$ なので，π は無矛盾であると仮定する．また，$A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ の場合も $\pi^\Diamond_A = \pi^\Diamond_B = \pi_\perp$ となるので，$A \neq \emptyset$ かつ $B \neq \emptyset$ と仮定する．式 (5.9) より，$\pi(w) > 0$ となるすべての $w \in \Omega$ に対して $A(w) = B(w)$ を示せば十分である．ここで，すべての $w \in A \cap B$ に対して $A(w) = B(w) = \{w\}$ である．また，前提より $\pi^\Diamond_A \leq \mu_B$ なので，すべての $w \in A \cap \bar{B}$ に対して $\pi^\Diamond_A(w) = 0$．もし $\pi(w') > 0$ となるような $w' \in A \cap \bar{B}$ が存在すれば，式 (5.9) よりそのような w' について $\pi^\Diamond_A(w') > 0$ となるので，このことからすべての $w \in A \cap \bar{B}$ に対して $\pi(w) = 0$．同様に，すべての $w \in \bar{A} \cap B$ に対して $\pi(w) = 0$ である．よって，$\pi(w) > 0$ となるすべての $w \in \bar{A} \cap \bar{B}$ に対して $A(w) = B(w)$ を示せば

十分である．ここで，$\pi(w) > 0$ を満たすある $w \in \bar{A} \cap \bar{B}$ が存在して，$A(w) \not\subseteq B(w)$ であると仮定する．仮定より $w' \notin B(w)$ となる $w' \in A(w)$ が存在する．式 (5.11) よりある $w'' \in B(w)$ が存在して，w に割り当てられた半順序 $\preceq_w$ について $w'' \prec_w w'$ が成り立つ．$\pi(w) > 0$ なので式 (5.9) より $\pi^{\Diamond}_{B}(w'') > 0$．前提より $\pi^{\Diamond}_{B} \leq \mu_{A\cap B}$ なので $w'' \in A$．しかし，$w'' \prec_w w'$ なので再び式 (5.11) より $w' \notin A(w)$ となり，これは仮定と矛盾する．よって，$\pi(w) > 0$ となるすべての $w \in \bar{A} \cap \bar{B}$ に対して $A(w) \subseteq B(w)$ である．$B(w) \subseteq A(w)$ も同様に示される．これらをまとめて，$\pi(w) > 0$ となるすべての $w \in \bar{A} \cap \bar{B}$ に対して $A(w) = B(w)$ が成り立つ．

($\Pi^{\Diamond}7$) π は完全であるとする．よって，$\pi(w_1) = 1$ となる $w_1 \in \Omega$ がただ一つ存在し，かつ任意の $w \in \Omega$ に対して，$w \neq w_1$ ならば $\pi(w) = 0$ である．$A = \emptyset$ または $B = \emptyset$ ならば，式 (5.9) より $\min(\pi^{\Diamond}_{A}, \pi^{\Diamond}_{B}) = \pi_{\perp}$ なので明らか．よって $A \neq \emptyset$ かつ $B \neq \emptyset$ と仮定する．このとき，$\min(\pi^{\Diamond}_{A}(w), \pi^{\Diamond}_{B}(w)) > 0$ となるのは $w \in A(w_1)$ かつ $w \in B(w_1)$ であるような w だけなので，$A(w_1) \cap B(w_1) \subseteq \{A \cup B\}(w_1)$ が成り立つことを示せば十分である．$w \in A(w_1) \cap B(w_1)$ であるようなすべての w に対して，w_1 に割り当てられた半順序 $\preceq_{w1}$ および式 (5.11) より，すべての $w' \in A$ に対して $w' \not\prec_{w1} w$ である．同様に，すべての $w'' \in B$ に対して $w'' \not\prec_{w1} w$．よって，すべての $w' \in A \cup B$ に対して $w' \not\prec_{w1} w$ であり，式 (5.11) より $w \in \{A \cup B\}(w_1)$ を得る．

($\Pi^{\Diamond}8$) 式 (5.9) よりすべての $w \notin A$ に対して $\{\max(\pi, \pi')\}^{\Diamond}_{A}(w) = \max(\pi^{\Diamond}_{A}(w), \pi'^{\Diamond}_{A}(w))$ $= 0$ なので，$w \in A$ についてのみ示せば十分である．このとき，式 (5.9) より $\{\max(\pi, \pi')$ $\}^{\Diamond}_{A}(w) = \max_{\{w'|w \in A(w')\}}\{\max(\pi(w'), \pi'(w'))\}$ ($= \alpha$ とおく) である．すなわち，集合 $\{w'|w \in A(w')\}$ (これを S とおく) に含まれるすべての w' について $\max(\pi(w'), \pi'(w'))$ を求め，その最大値が α である．一方，式 (5.9) より $\max(\pi^{\Diamond}_{A}, \pi'^{\Diamond}_{A}) = \max\{\max_{w' \in S} \pi(w'),$ $\max_{w' \in S} \pi'(w')\}$ ($= \beta$ とおく) である．すなわち，π に関する $w' \in S$ の最大値と π' に関する $w' \in S$ の最大値で，大きい方を β とする．ここで，どの max 演算についても，比較の対象となるのは $\pi(w')$ および $\pi'(w')$ の値であるので，max 演算の性質から比較する順番を入れ替えても得られる結果は変わらない．よって，$\alpha = \beta$ すなわち $\{\max(\pi, \pi')\}^{\Diamond}_{A}(w) = \max\{\max_{w' \in S} \pi(w'), \max_{w' \in S} \pi'(w')\}$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

定理 5.2 知識ベースを表す任意の可能性分布 π に対して，式 (5.12) に基づいて構成した $\pi^{\blacklozenge}_{A}$ は，可能性理論に基づく消去の公準 ($\Pi^{\blacklozenge}1$) から ($\Pi^{\blacklozenge}5$) および ($\Pi^{\blacklozenge}8$) を満たす．更に，$\pi^{\blacklozenge}_{A}$ は以下の性質も満たす．

($\Pi^{\blacklozenge}6$) $\pi^{\blacklozenge}_{A} \leq \mu_{A\cup\bar{B}}$ かつ $\pi^{\blacklozenge}_{B} \leq \mu_{\bar{A}\cup B}$ ならば，$\pi^{\blacklozenge}_{A} = \pi^{\blacklozenge}_{B}$．

$(\Pi^\blacklozenge 7)$ $\pi^\blacklozenge_{A\cap B} \leq \max(\pi^\blacklozenge_A, \pi^\blacklozenge_B)$.

(証明)

式 (5.11) および式 (5.12) で定義された $\pi^\blacklozenge_A$ が $(\Pi^\blacklozenge 1)$ から $(\Pi^\blacklozenge 8)$ を満たすことを示す．

$(\Pi^\blacklozenge 1)$ 式 (5.12) によって各可能世界 $w \in \Omega$ の値が減少することはないので明らか．

$(\Pi^\blacklozenge 2)$ $N(\bar{A}) = 1$ とする．知識ベースを表す可能性分布 π は無矛盾であるか，または $\pi_\perp$ であるが，$\pi = \pi_\perp$ の場合は前提を満たさないので明らか．よって，π は無矛盾であると仮定する．$w \notin A$ の場合だけ示せば十分である．$N(\bar{A}) = 1 - \Pi(A)$ なので，前提より $\Pi(A) = 0$．よって，すべての $w' \in A$ に対して，$\pi(w') = 0$ である．ここで，$\{w' | w \in \bar{A}(w')\} = \{w\} \cup \{w' \in A | w \in \bar{A}(w')\}$ と表せるが，集合 $w' \in \{w' \in A | w \in \bar{A}(w')\}$ に含まれるすべての w' について $\pi(w') = 0$ が成り立つので，式 (5.12) よりすべての $w \notin A$ に対して $\pi^\blacklozenge_A(w) = \pi(w)$ が成り立つ．

$(\Pi^\blacklozenge 3)$ π が無矛盾かつ $A \neq \Omega$ とする．前提より $A \neq \Omega$ なので，$\bar{A} \neq \emptyset$ である．更に，π は無矛盾なので，$\pi(w_1) = 1$ となる $w_1 \in \Omega$ が少なくとも 1 つ存在し，式 (5.12) より $w \in \bar{A}(w_1)$ である $w \in \bar{A}$ に対して $\pi^\blacklozenge_A(w) = 1$ である．よって $\Pi^\blacklozenge_A(\bar{A}) = 1$ となり，$N^\blacklozenge_A(A) = 1 - \Pi^\blacklozenge_A(\bar{A})$ より $N^\blacklozenge_A(A) = 0$ を得る．

$(\Pi^\blacklozenge 4)$ $A = B$ とする．このとき，任意の $w \in \Omega$ に対して明らかに $A(w) = B(w)$ なので，式 (5.12) より $\pi^\blacklozenge_A = \pi^\blacklozenge_B$ が成り立つ．

$(\Pi^\blacklozenge 5)$ 知識ベースを表す可能性分布 π は無矛盾であるか，または $\pi_\perp$ である．$\pi = \pi_\perp$ の場合は明らかなので，π は無矛盾であると仮定する．また，$A = \emptyset$ の場合は $(\pi^\blacklozenge_A)^+_A = \pi_\perp$ なので明らか．よって，$A \neq \emptyset$ と仮定する．このとき，$\Pi^\blacklozenge_A(A) < 1$ ならば式 (5.1) より $(\pi^\blacklozenge_A)^+_A = \pi_\perp$ となるので，明らかに $(\pi^\blacklozenge_A)^+_A \leq \pi$．$\Pi^\blacklozenge_A(A) = 1$ ならば式 (5.1) より $(\pi^\blacklozenge_A)^+_A = \min(\pi^\blacklozenge_A, \mu_A)$ である．ここで，$w \notin A$ ならば $\min(\pi^\blacklozenge_A(w), \mu_A(w)) = 0$ なので，すべての $w \notin A$ に対して $(\pi^\blacklozenge_A)^+_A(w) \leq \pi(w)$ が成り立つ．また，$w \in A$ ならば $\min(\pi^\blacklozenge_A(w), \mu_A(w)) = \pi^\blacklozenge_A(w)$ となり，(5.12) 式より $\pi^\blacklozenge_A(w) = \pi(w)$ なので，$(\pi^\blacklozenge_A)^+_A(w) \leq \pi(w)$ となる．よって，いかなる場合でも $(\pi^\blacklozenge_A)^+_A(w) \leq \pi(w)$ が成り立つ．

$(\Pi^\blacklozenge 6)$ $\pi^\blacklozenge_A \leq \mu_{A\cup\bar{B}}$ かつ $\pi^\blacklozenge_B \leq \mu_{\bar{A}\cup B}$ とする．$\pi = \pi_\perp$ の場合は明らかなので，π は無矛盾であると仮定する．式 (5.12) より，$\pi(w) > 0$ となるすべての $w \in \Omega$ に対して $\bar{A}(w) = \bar{B}(w)$ を示せば十分である．ここで，すべての $w \in \bar{A} \cap \bar{B}$ に対して $\bar{A}(w) = \bar{B}(w) = \{w\}$ である．また，前提より $\pi^\blacklozenge_A \leq \mu_{A\cup\bar{B}}$ で，しかも式 (5.12) によっ

て各可能世界の値が減少することはないので，すべての $w \in \bar{A} \cap B$ に対して $\pi(w) = 0$．同様に，すべての $w \in A \cap \bar{B}$ に対して $\pi(w) = 0$．よって，$\pi(w) > 0$ であるすべての $w \in A \cap B$ に対して，$\bar{A}(w) = \bar{B}(w)$ であることを示せば十分である．ここで，$\pi(w) > 0$ を満たすある $w \in A \cap B$ が存在して，$\bar{A}(w) \not\subseteq \bar{B}(w)$ であると仮定する．仮定より $w' \notin \bar{B}(w)$ となる $w' \in \bar{A}$ が存在する．$\pi(w) > 0$ で，かつ $w' \in \bar{A}(w)$ なので，式 (5.12) より $\pi^{\blacklozenge}_A(w') > 0$．また，前提より $\pi^{\blacklozenge}_A \leq \mu_{A \cup \bar{B}}$ で，しかも $w' \notin A$ なので，$w' \in \bar{B}$ である．仮定より $w' \notin \bar{B}(w)$ なので，式 (5.11) よりある $w'' \in \bar{B}$ が存在して，w に割り当てられた半順序 $\preceq_w$ について $w'' \prec_w w'$ が成り立つ．このことから，再び式 (5.11) より $w' \notin \bar{A}(w)$ となり，これは仮定と矛盾する．よって，$\pi(w) > 0$ を満たすすべての $w \in A \cap B$ に対して，$\bar{A}(w) \subseteq \bar{B}(w)$ である．$\bar{B}(w) \subseteq \bar{A}(w)$ も同様に示される．これらをまとめると，$\pi(w) > 0$ を満たすすべての $w \in A \cap B$ に対して $\bar{A}(w) = \bar{B}(w)$ が成り立つ．

($\Pi^{\blacklozenge}$7) 知識ベースを表す可能性分布 π は無矛盾であるか，または $\pi_\perp$ である．$\pi = \pi_\perp$ または $w \in A \cap B$ ならば，式 (5.12) より $\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B}(w) = \pi^{\blacklozenge}_A(w) = \pi^{\blacklozenge}_B(w) = \pi(w)$ なので，明らかに $\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B} \leq \max(\pi^{\blacklozenge}_A, \pi^{\blacklozenge}_B)$ が成り立つ．よって，π は無矛盾かつ $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ と仮定する．式 (5.12) より $\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B}(w) = \max_{\{w' | w \in \{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w')\}} \pi(w')$．ここで，任意の $w' \in \Omega$ に対して，$\{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w') \cap \bar{A} \subseteq \bar{A}(w')$ が成り立つ．同様に，$\{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w') \cap \bar{B} \subseteq \bar{B}(w')$．よって，$w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ を固定すると任意の $w' \in \Omega$ に対して，$w \in \bar{A}$ ならば $\{w' | w \in \{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w')\} \subseteq \{w' | w \in \bar{A}(w')\}$ が成り立つ．同様に，$w \in \bar{B}$ ならば $\{w' | w \in \{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w')\} \subseteq \{w' | w \in \bar{B}(w')\}$．よって，式 (5.12) より任意の $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ に対して $\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B}(w) \leq \pi^{\blacklozenge}_A(w)$ または $\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B}(w) \leq \pi^{\blacklozenge}_B(w)$ となり，$\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B}(w) \leq \max\{\pi^{\blacklozenge}_A(w), \pi^{\blacklozenge}_B(w)\}$ である．よって，任意の $w \in \Omega$ に対して $\pi^{\blacklozenge}_{A \cap B}(w) \leq \max\{\pi^{\blacklozenge}_A(w), \pi^{\blacklozenge}_B(w)\}$ が成り立つ．

($\Pi^{\blacklozenge}$8) 式 (5.12) よりすべての $w \in A$ に対して $\{\max(\pi, \pi')\}^{\blacklozenge}_A(w) = \max(\pi^{\blacklozenge}_A(w), \pi'^{\blacklozenge}_A(w))$ $= \pi(w)$ なので，$w \in \bar{A}$ についてのみ示せば十分である．このとき，式 (5.12) より $\{\max(\pi, \pi')\}^{\blacklozenge}_A(w) = \max_{\{w' | w \in \bar{A}(w')\}}\{\max(\pi(w'), \pi'(w'))\}$ ($= \alpha$ とおく) である．すなわち，集合 $\{w' | w \in \bar{A}(w')\}$ (これを S とおく) に含まれるすべての w' について $\max(\pi(w'), \pi'(w'))$ を求め，その最大値が α である．

一方，式 (5.12) より $\max(\pi^{\blacklozenge}_A, \pi'^{\blacklozenge}_A) = \max\{\max_{w' \in S} \pi(w'), \max_{w' \in S} \pi'(w')\}$ ($= \beta$ とおく) である．すなわち，π に関する $w' \in S$ の最大値と π' に関する $w' \in S$ の最大値で，大きい方を β とする．ここで，どの max 演算についても，比較の対象となるのは $\pi(w')$ および $\pi'(w')$ の値であるので，max 演算の性質から比較する順番を入れ替えても得られる結果は変わらない．よって，$\alpha = \beta$ すなわち $\{\max(\pi, \pi')\}^{\blacklozenge}_A(w)$ $= \max\{\max_{w' \in S} \pi(w'), \max_{w' \in S} \pi'(w')\}$ が成り立つ．

(*Q.E.D*)

命題 5.2 以下の式 (5.13) および式 (5.14) が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\pi^{\Diamond}_{A} &= (\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}. \\
\pi^{\blacklozenge}_{A} &= \max(\pi, \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}).
\end{aligned}
$$

(証明)

まず式 (5.13) について示す. $\pi = \pi_{\perp}$ ならば, 明らかに $\pi^{\Diamond}_{A} = (\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A} = \pi_{\perp}$ なので, π は無矛盾であると仮定する. $\bar{A} = \Omega$ ならば, $\Pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}}(A) = \Pi^{\blacklozenge}_{\Omega}(\emptyset) = 0$ なので, 式 (5.1) より任意の w について $(\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w) = 0$ すなわち $(\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A} = \pi_{\perp}$ である. 更に式 (5.9) より $\pi^{\Diamond}_{A} = \pi^{\Diamond}_{\emptyset} = \pi_{\perp}$ なので, $\bar{A} = \Omega$ ならば $\pi^{\Diamond}_{A} = (\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}$ が成り立つ. また, $\bar{A} \neq \Omega$ の場合は, $(\Pi^{\blacklozenge}3)$ より $N^{\blacklozenge}_{\bar{A}}(\bar{A}) = 0$ すなわち $\Pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}}(A) = 1$ である. よって, 式 (5.1) より任意の w について $(\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w) = \min\{\mu_A(w), \pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}}(w)\}$ が成り立つので, $w \in A$ ならば $(\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w) = \pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}}(w)$, $w \notin A$ ならば $(\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w) = 0$ となる. 式 (5.12) を用いてこれらをまとめると, 以下の式が得られる.

$$
(\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w) = \begin{cases} \max_{\{w' | w \in A(w')\}} \pi(w'), & w \in A, \\ 0, & w \notin A. \end{cases}
$$

これは可能性理論における更新の構成規則 (5.9) に他ならないので, $\bar{A} \neq \Omega$ ならば $\pi^{\Diamond}_{A} = (\pi^{\blacklozenge}_{\bar{A}})^{+}_{A}$ が成り立つ. よって, いかなる場合でも式 (5.13) が成り立つ.

次に式 (5.14) について示す. $\pi = \pi_{\perp}$ ならば, 明らかに $\pi^{\blacklozenge}_{A} = \max(\pi, \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}) = \pi_{\perp}$ なので, π は無矛盾であると仮定する. 式 (5.9) よりすべての $w \in A$ に対して $\max(\pi(w), \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}(w)) = \pi(w)$ となる. 同様に, すべての $w \notin A$ に対して $\max(\pi(w), \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}(w)) = \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}(w)$. 式 (5.9) を用いてこれらをまとめると, 以下の式が得られる.

$$
\max(\pi(w), \pi^{\Diamond}_{\bar{A}}(w)) = \begin{cases} \max_{\{w' | w \in \bar{A}(w')\}} \pi(w'), & w \notin A, \\ \pi(w), & w \in A. \end{cases}
$$

これは可能性理論における消去の構成規則 (5.12) に他ならないので, π が無矛盾でも $\pi^{\blacklozenge}_{A} = \max(\pi, \pi^{\Diamond}_{\bar{A}})$ が成り立つ. よって, いかなる場合でも式 (5.14) が成り立つ.

$(Q.E.D)$

定理 5.3 式 (5.17) に基づいて構成した $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ は可能性理論に基づく消去の公準 $(\Pi^{\blacklozenge}1)$ および $(\Pi^{\blacklozenge}3)$, $(\Pi^{\blacklozenge}4)$, $(\Pi^{\blacklozenge}8)$ を満たす.

$(\Pi^{\blacklozenge}1)$ $\pi \leq \pi^{\blacktriangle}_{A}$.

$(\Pi^{\blacklozenge}3)$ π が無矛盾かつ $A \neq \Omega$ ならば, $N^{\blacktriangle}_{A}(A) = 0$.

($\Pi^{\blacklozenge}4$) $A = B$ ならば，$\pi^{\blacktriangle}_{A} = \pi^{\blacktriangle}_{B}$.

($\Pi^{\blacklozenge}8$) $\{\max(\pi, \pi)'\}^{\blacktriangle}_{A} = \max(\pi^{\blacktriangle}_{A}, \pi'^{\blacktriangle}_{A})$.

更に，可能性理論に基づく消去の公準を弱めた以下の性質を満たす.

($\Pi^{\blacklozenge}5w$) $N(A) = 1$ ならば，$(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A} \leq \pi$.

($\Pi^{\blacklozenge}7a$) 任意の $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ に対して，$\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) \leq \max\{\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)\}$.

($\Pi^{\blacklozenge}7b$) 任意の $w \in A \cap B$ に対して，$\max\{\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)\} \leq \pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w)$.

ここで，$N^{\blacktriangle}_{A}$ は $\pi^{\blacktriangle}_{A}$ から構成した可能性測度に対して双対的な必然性測度である.

(証明)

式 (5.17) で定義された対称的消去が ($\Pi^{\blacklozenge}1$) および ($\Pi^{\blacklozenge}3$)，($\Pi^{\blacklozenge}4$)，($\Pi^{\blacklozenge}5$)，($\Pi^{\blacklozenge}7a$)，($\Pi^{\blacklozenge}7b$)，($\Pi^{\blacklozenge}8$)，を満たすことを示す.

($\Pi^{\blacklozenge}1$) 式 (5.17) によって各可能世界 $w \in \Omega$ の値が減少することはないので明らか.

($\Pi^{\blacklozenge}3$) π は無矛盾でかつ $A \neq \Omega$ とする．よって，$\pi(w_1) = 1$ となる $w_1 \in \Omega$ が少なくとも一つ存在する．更に，前提より $A \neq \Omega$ なので，$\bar{A} \neq \emptyset$ である．よって，命題 5.1 より $\bar{A}(w_1) \neq \emptyset$ となり，式 (5.17) より $w \in \bar{A}(w_1)$ であるような $w \in \bar{A}$ に対して $\pi^{\blacktriangle}_{A}(w) = \max_{\{w' | w \in \bar{A}(w')\}} \pi(w') = \pi(w_1) = 1$ が成り立つ．よって $\Pi^{\blacktriangle}_{A}(\bar{A}) = 1$ となり，$N^{\blacktriangle}_{A}(A) = 1 - \Pi^{\blacktriangle}_{A}(\bar{A})$ より $N^{\blacktriangle}_{A}(A) = 0$ を得る.

($\Pi^{\blacklozenge}4$) $A = B$ とする．このとき，任意の $w \in \Omega$ に対して明らかに $A(w) = B(w)$ かつ $\bar{A}(w) = \bar{B}(w)$ なので，式 (5.17) より $\pi^{\blacklozenge}_{A} = \pi^{\blacklozenge}_{B}$ が成り立つ.

($\Pi^{\blacklozenge}5w$) $N(A) = 1$ とする．このとき，$N(A) = 1$ より $\Pi(\bar{A}) = 0$ なので，可能性測度の性質から $\Pi(A) = 1$ である．また，すべての $w \notin A$ に対して，$\pi(w) = 0$．よって，式 (5.17) より，すべての $w \in A$ に対して $\pi^{\blacktriangle}_{A}(w) = \pi(w)$ が成り立つので，$\Pi^{\blacktriangle}_{A}(A) = \Pi(A) = 1$ である．このことから，式 (5.1) より，すべての $w \in \Omega$ に対して $(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A}(w) = \min(\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \mu_A(w))$ となる．よって，$w \in A$ ならば $(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A}(w) = \pi^{\blacktriangle}_{A}(w) = \pi(w)$，$w \notin A$ ならば $(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A}(w) = 0$ となるので，$N(A) = 1$ ならば $(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A} \leq \pi$ が成り立つ.

($\Pi^{\blacklozenge}7a$) $\pi = \pi_{\perp}$ の場合は明らかなので，π は無矛盾であると仮定する．式 (5.17) より，任意の $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ に対して $\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) = \max_{\{w' | w \in \{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w')\}} \pi(w')$ である．ここで，命題 5.1 より，$\{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w') \cap \bar{A} \subseteq \bar{A}(w')$ である．同様に，$\{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w') \cap \bar{B} \subseteq \bar{B}(w')$．よって，

$w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ を固定すると任意の $w' \in \Omega$ に対して，$w \in \bar{A}$ ならば $\{w' | w \in \{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w')\}$ $\subseteq \{w' | w \in \bar{A}(w')\}$ が成り立つ．同様に，$w \in \bar{B}$ ならば $\{w' | w \in \{\bar{A} \cup \bar{B}\}(w')\} \subseteq$ $\{w' | w \in \bar{B}(w')\}$．よって，式 (5.17) より任意の $w \in \bar{A} \cup \bar{B}$ に対して $\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) \leq \pi^{\blacktriangle}_{A}(w)$ または $\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) \leq \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)$ となり，$\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) \leq \max\{\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)\}$ が成り立つ．

($\Pi^{\blacklozenge}7b$) $\pi = \pi_{\perp}$ の場合は明らかなので，π は無矛盾であると仮定する．式 (5.17) より，任意の $w \in A \cap B$ に対して $\pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w) = \max_{\{w' | w \in \{A \cap B\}(w')\}} \pi(w')$ である．ここで，命題 5.1 より，$A(w') \cap B \subseteq \{A \cap B\}(w')$ である．よって，$w \in A \cap B$ を固定すると任意の $w' \in \Omega$ に対して，$\{w' | w \in A(w') \cap B\} \subseteq \{w' | w \in \{A \cap B\}(w')\}$ が成り立つ．更に，$w \in A \cap B$ より $\{w' | w \in A(w')\} = \{w' | w \in A(w') \cap B\}$ となる．これらをまとめると，式 (5.17) より，任意の $w \in A \cap B$ に対して $\pi^{\blacktriangle}_{A}(w) \leq \pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w)$ が成り立つ．同様の議論を繰り返すことで，$\pi^{\blacktriangle}_{B}(w) \leq \pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w)$ も成り立つので，よって，任意の $w \in A \cap B$ に対して $\min\{\pi^{\blacktriangle}_{A}(w), \pi^{\blacktriangle}_{B}(w)\} \leq \pi^{\blacktriangle}_{A \cap B}(w)$ が成り立つ．

($\Pi^{\blacklozenge}8$) 式 (5.17) よりすべての $w \in A$ に対して $\{\max(\pi, \pi')\}^{\blacktriangle}_{A}(w) = \max_{\{w' | w \in \bar{A}(w')\}}$ $\{\max(\pi(w'), \pi'(w'))\}$ ($= \alpha$とおく) である．すなわち，集合 $\{w' | w \in A(w')\}$ (これを S とおく) に含まれるすべての w' について $\max(\pi(w'), \pi'(w'))$ を求め，その最大値が α である．一方，式 (5.17) より $\max(\pi^{\blacktriangle}_{A}, \pi'^{\blacktriangle}_{A}) = \max\{\max_{w' \in S} \pi(w'), \max_{w' \in S} \pi'(w')\}$ ($= \beta$とおく) である．すなわち，π に関する $w' \in S$ の最大値と π' に関する $w' \in S$ の最大値で，大きい方を β とする．ここで，どの max 演算についても，比較の対象となるのは $\pi(w')$ および $\pi'(w')$ の値であるので，max 演算の性質から比較する順番を入れ替えても得られる結果は変わらない．よって，$\alpha = \beta$ すなわちすべての $w \in A$ に対して $\{\max(\pi, \pi')\}^{\blacktriangle}_{A}(w) = \max\{\max_{w' \in S} \pi(w'), \max_{w' \in S} \pi'(w')\}$ が成り立つ．

$w \in \bar{A}$ に対しても，$w \in A$ の場合とまったく同様に示すことができる．よって，いかなる場合でも $\{\max(\pi, \pi')\}^{\blacktriangle}_{A}(w) = \max(\pi^{\blacktriangle}_{A}, \pi'^{\blacktriangle}_{A})$ が成り立つ．

$(Q.E.D)$

命題 5.3 以下の式 (5.18) が成り立つ．

$$\pi^{\Diamond}_{A} = (\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A}.$$

(証明)

$\pi = \pi_{\perp}$ ならば，明らかに $\pi^{\Diamond}_{A} = (\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A} = \pi_{\perp}$ なので，π は無矛盾であると仮定する．$\bar{A} = \Omega$ ならば，$\Pi^{\blacktriangle}_{A}(A) = \Pi^{\blacktriangle}_{\Omega}(\emptyset) = 0$ なので，式 (5.1) より任意の w について $(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A}(w) = 0$ すなわち $(\pi^{\blacktriangle}_{A})^{+}_{A} = \pi_{\perp}$ である．更に式 (5.9) より $\pi^{\Diamond}_{A} = \pi^{\Diamond}_{\emptyset} = \pi_{\perp}$ なので，

$\bar{A}=\Omega$ ならば $\pi^{\Diamond}_{A}=(\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}$ が成り立つ．また，知識ベースを表す可能性分布 π については，π が無矛盾であることと $\pi\neq\pi_{\perp}$ とを同一視できるので，$\bar{A}\neq\Omega$ ならば，定理 3 より $\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}}$ は $(\Pi^{\blacklozenge}3)$ を満たすので，$N^{\blacktriangle}_{\bar{A}}(\bar{A})=0$ すなわち $\Pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}}(A)=1$ である．よって，式 (5.1) より任意の w について $(\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w)=\min\{\mu_A(w),\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}}(w)\}$ が成り立つので，$w\in A$ ならば $(\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w)=\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}}(w)$，$w\notin A$ ならば $(\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w)=0$ となる．式 (5.12) を用いてこれらをまとめると，以下の式が得られる．

$$(\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}(w)=\begin{cases}\max_{\{w'|w\in A(w')\}}\pi(w'), & w\in A,\\ 0, & w\notin A.\end{cases}$$

これは可能性理論における更新の構成規則 (5.9) に他ならないので，$\bar{A}\neq\Omega$ ならば $\pi^{\Diamond}_{A}=(\pi^{\blacktriangle}_{\bar{A}})^{+}_{A}$ が成り立つ．よって，いかなる場合でも式 (5.18) が成り立つ．

$(Q.E.D)$

命題 5.4 可能性分布 π は無矛盾であるとする．このとき，任意の可能世界 $w\in\Omega$ および任意の空でない集合 $A\subseteq\Omega$ に対して，式 (5.19) に基づく半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11) を用いて A の空でない部分集合 $A(w)$ を構成すると，式 (5.12) に基づいて構成した π の A に関する消去の結果 $\pi^{\blacklozenge}_{A}$ は，式 (5.4) に基づいて構成した π の A に関する縮小の結果 π^{-}_{A} に等しい．また，式 (5.9) に基づいて構成した π の A に関する更新の結果 $\pi^{\Diamond}_{A}$ は，式 (5.3) に基づいて構成した π の A に関する修正の結果 π^{*}_{A} に等しい．

(証明)

まず $\pi^{\blacklozenge}_{A}$ が π^{-}_{A} と等しくなることを示す．式 (5.12) および式 (5.4) から，すべての $w\in A$ に対して $\pi^{\blacklozenge}_{A}(w)=\pi^{-}_{A}(w)=\pi(w)$ なので，すべての $w\in\bar{A}$ に対して $\pi^{\blacklozenge}_{A}(w)=\pi^{-}_{A}(w)$ となることを示せば十分である．4.3 節で構成した半順序 $\preceq_w$ および式 (5.11) から集合 $\bar{A}(w)$ を構成すると，$\preceq_w$ の性質から，すべての $w\notin\bar{A}$ に対して $\bar{A}(w)=\{w'\in\bar{A}|\Pi(\bar{A})=\pi(w')\}$ である．また，すべての $w\in\bar{A}$ に対して $\bar{A}(w)=\{w\}$ となるのは明らか．仮定より π は無矛盾なので，$\pi(w_1)=1$ となる w_1 が少なくとも 1 つ存在する．よって，もし $w_1\in\bar{A}$ なら，$\Pi(\bar{A})=\pi(w_1)=1$．また，$w_1\notin\bar{A}$ なら，$\bar{A}(w_1)=\{w'\in\bar{A}|\Pi(\bar{A})=\pi(w')\}$ である．このことから，式 (5.12) より $w\in\bar{A}$ かつ $\Pi(\bar{A})=\pi(w)$ ならば，$\pi^{\blacklozenge}_{A}(w)=\max_{\{w'\mid w\in\bar{A}(w')\}}\pi(w')=1$.

また，$w\in\bar{A}$ かつ $\pi(w)<\Pi(\bar{A})$ ならば，$w\in\bar{A}(w')$ となるのは $w'=w$ の場合のみである．よって，式 (5.12) より $\pi^{\blacklozenge}_{A}(w)=\max_{\{w'\mid w\in\bar{A}(w')\}}\pi(w')=\pi(w)$ が成り立つ．

π は無矛盾であると仮定しているので，これらをまとめると，以下の式が得られる．

$$\pi^{\blacklozenge}_{A}(w)=\begin{cases}1, & w\notin A \text{ かつ} \pi(w)=\Pi(\bar{A}),\\ \pi(w), & \text{その他}.\end{cases}$$

これは縮小の構成規則 (5.4) に他ならないので，$\pi_A^{\blacklozenge}$ は π_A^- と等しくなる．

次に $\pi_A^{\Diamond}$ が π_A^* と等しくなることを示す．すべての $w \in \bar{A}$ に対して $\pi_A^{\Diamond}(w) = \pi_A^*(w) = 0$ なので，すべての $w \in A$ に対して $\pi_A^{\Diamond}(w) = \pi_A^*(w)$ となることを示せば十分である．上ですでに示したように，すべての $w \in A$ に対して $A(w) = \{w\}$ となるのは明らか．また，$\preceq_w$ の性質から，すべての $w \notin A$ に対して $A(w) = \{w' \in A | \Pi(A) = \pi(w')\}$ である．仮定より π は無矛盾なので，$\pi(w_1) = 1$ となる w_1 が少なくとも 1 つ存在する．よって，もし $w_1 \in A$ なら，$\Pi(A) = \pi(w_1) = 1$．また，$w_1 \notin A$ なら，$A(w_1) = \{w' \in A | \Pi(A) = \pi(w')\}$ である．このことから，式 (5.9) より $w \in A$ かつ $\Pi(A) = \pi(w)$ ならば，$\pi_A^{\Diamond}(w) = \max_{\{w' \mid w \in A(w')\}} \pi(w') = 1$．また，$w \in A$ かつ $\pi(w) < \Pi(A)$ ならば，$w \in A(w')$ となるのは $w' = w$ の場合のみである．よって，式 (5.9) より $\pi_A^{\Diamond}(w) = \max_{\{w' \mid w \in A(w')\}} \pi(w') = \pi(w)$ が成り立つ．π は無矛盾であると仮定しているので，これらをまとめると，以下の式が得られる．

$$\pi_A^{\Diamond}(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \text{ かつ } \pi(w) = \Pi(A), \\ \pi(w), & w \in A \text{ かつ } \pi(w) < \Pi(A), \\ 0, & w \notin A. \end{cases}$$

これは修正の構成規則 (5.3) に他ならないので，$\pi_A^{\Diamond}$ は π_A^* と等しくなる．

$(Q.E.D)$

参考文献

[1] Alchourrón, C., Gärdenfors, P., and Makinson, D., On the Logic of Theory Change: Partial Meet Contraction and Revision Functions. Journal of Symbolic Logic, Vol.50 (1985), pp.510–530.

[2] van Benthem, J., Language in Action: Categories, Lambdas, and Dynamic Logic. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol.130, North-Holland, 1991.

[3] Boutilier, C., Epistemic Entrenchment in Autoepistemic Logic. Fundamenta Informaticae, Vol.17, No.1,2 (1992), pp.5–29.

[4] Boutilier, C., Unifying Default Reasoning and Belief Revision in a Modal Framework. Artificial Intelligence, Vol.68 (1994), pp.33–85.

[5] Boutilier, C., Conditional Logics of Normality: A Modal Approach. Artificial Intelligence, Vol.68 (1994), pp.87–154.

[6] Boutilier, C., Iterated Revision and Minimal Change of Conditional Beliefs. Journal of Philosophical Logic, Vol. 25 (1996), pp.263–305.

[7] Chellas, B. F., *Modal logic: an Introduction.* Cambridge University Press, 1980.

[8] Darwiche, A. and Pearl, J., On the Logic of Iterated Belief Revision. Artificial Intelligence, Vol. 89 (1997), pp.1–29.

[9] Dubois, D. and Prade, H., Epistemic Entrenchment and Possibilistic Logic. Artificial Intelligence, Vol. 50 (1991), pp.223–239.

[10] Dubois, D. and Prade, H., Belief Change and Possibility Theory. Gärdenfors, P. (ed.), *Belief Revision*, Cambridge University Press, 1992, pp.142–182.

[11] Dubois, D. and Prade, H., Belief Revision and Updates in Numerical Formalisms —An Overview, with New Results for the Possibilistic Framework—. *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1993, pp.620–625.

[12] Dubois, D. and Prade, H., A Survey of Belief Revision and Updating Rules in Various Uncertainty Models. International Journal of Intelligent Systems, Vol.9 (1994), pp.61–100.

[13] Gärdenfors, P., *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States.* MIT Press, 1988.

[14] Gärdenfors, P. and Makinson, D., Revisions of Knowledge Systems Using Epistemic Entrenchment. Vardi, M. (ed.), *Proceedings of the Second Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, Morgan Kaufmann, 1988, pp.83–95.

[15] Gärdenfors, P. and Rott, H., Belief Revision. Gabbay, D. M. and Hogger, C. J. (ed.), *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 4, Clarendon Press, 1995, pp.35–132.

[16] Grove, A., Two Modelings for Theory Change. Journal of Philosophical Logic, Vol.17 (1988), pp.157–170.

[17] Hintikka, J., *Knowledge and Belief.* Cornell University Press, 1962.

[18] Katsuno, H. and Mendelzon, A. O., Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change. Artificial Intelligence, Vol.52 (1991), pp.263–294.

[19] Katsuno, H. and Mendelzon, A. O., On the Difference between Updating a Knowledge Base and Revising It. Gärdenfors, P. (ed.), *Belief Revision*, Cambridge University Press, 1992, pp.183–203.

[20] Katsuno,H. and Satoh, K., A Unified View of Consequence Relation, Belief Revision, and Conditional Logic. Crocco, G., Fariñas Del Cerro, L. and Herzig, A. (ed.), *Conditionals: from Philosophy to Computer Science*, Clarendon Press, 1995, pp.33–65.

[21] Kudo, Y., Murai, T. and Da-te, T., Interdefinability between Extended Erasure and Update. *Poster Session Abstracts of the Fifteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1997, p.61.

[22] Kudo, Y., Murai, T. and Da-te, T., A Possibilistic Interpretation of Extended Erasure. Zimmermann, H. J. (ed.), *Proceedings of the Fifth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, Verlag Mainz, 1997, pp.77–80.

[23] Kudo, Y., Murai, T. and Da-te, T., The Correspondence of Belief Changes in Logical Settings and the Possibilistic Framework. *Proceedings of the Second International Conference on Knowledge-Based Intelligent Electronic Systems*, IEEE, 1998, pp.221–229.

[24] Kudo, Y., Murai, T. and Da-te, T., Iterated Belief Update Based on Ordinal Conditional Functions. *Proceedings of the Third International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information Engineering Systems*, IEEE, 1999, pp.526–529.

[25] 工藤 康生, 村井 哲也, 伊達 惇, 可能性理論における信念更新の定式化. 日本ファジィ学会誌, Vol.11, No.4 (1999), pp.640–649.

[26] 工藤 康生, 村井 哲也, 伊達 惇, 順序を持つ矢印の様相論理に基づく信念変更の論理的表現. 人工知能学会誌, Vol.15, No.2 (2000). (採録決定)

[27] Lehmann, D., Belief Revision, Revised. *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1995, pp.1534–1540.

[28] 村井 哲也, 深海 悟, 様相論理 (1). 日本ファジィ学会誌, Vol.7, No.1 (1995), pp.3–18.

[29] 村井 哲也, 深海 悟, 様相論理 (2). 日本ファジィ学会誌, Vol.7, No.2 (1995), pp.222–238.

[30] Nayak, A. C., Foo, N. Y., Pagnucco, M. and Sattar, A., Changing Conditional Beliefs Unconditionally. *Proceedings of the Sixth Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge*, Morgan Kaufmann, 1996, pp.119–135

[31] 小野 寛晰, 情報科学における論理. 日本評論社, 1994.

[32] Peppas, P., Nayak, A., Pagnucco, M., Foo, N. Y., Kwok, R. and Prokopenko. M., Revision vs. Update: Taking a Closer Look. Wahlster, W. (ed.), *Proceedings of the 12th European Conference on Artificial Intelligence*, John Wiley & Sons, 1996, pp.95–99.

[33] Peppas, P. and Williams, M. A., Constructive Modelings for Theory Change. Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol.36, No.1 (1995), pp.120–133.

[34] 菅野 道夫, 室伏 俊明, ファジィ測度. 講座 ファジィ 第3巻, 日本ファジィ学会 (編), 日本ファジィ学会. 1993.

[35] Spohn, W., Ordinal Conditional Functions: A Dynamic Theory of Epistemic State. Harper, W. L. and Skyrms, B. (eds.), *Causation in Decision, Belief Change, and Statistics*, Vol.2, 1988, pp.105–134.

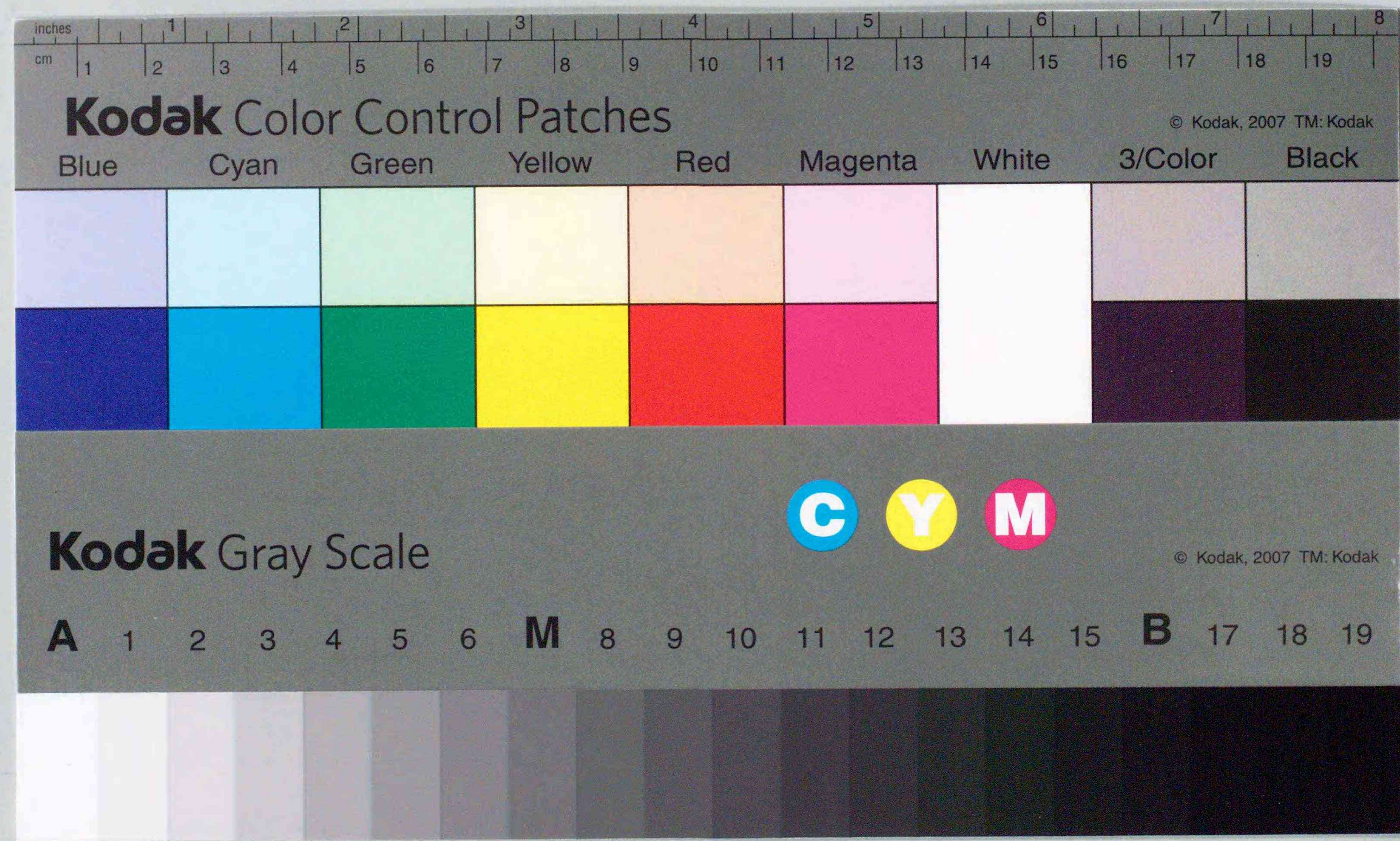
[36] Vakarelov, D., Modal Logics of Arrows. de Rijke, M. (ed.), *Advances in Intensional Logic*, Kluwer Academic Publishers, 1997, pp.137–171.

[37] Williams, M. A., Transmutations of Knowledge Systems. Doyle, J., Sandewall, E. and Torasso, P. (eds.), *Proceedings of the Fourth International Conference on Principle of Knowledge Representation and Reasoning*, Morgan Kaufmann, 1994, pp.619–629.

[38] Williams, M. A., Iterated Theory Base Change: A Computational Model. *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 1995, pp.1541–1547.

[39] Winslett, M., Reasoning about Action Using a Possible Models Approach. *Proceedings of the Seventh National Conference on Artificial Intelligence*, 1988, pp.89–93.

[40] Winslett, M., *Updating Logical Datebases.* Cambridge University Press, 1990.


Kodak Color Control Patches
© Kodak, 2007 TM: Kodak
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black
Kodak Gray Scale
C Y M
© Kodak, 2007 TM: Kodak
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19