



Title	灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱高速解析手法の開発
Author(s)	小原, 伸哉; Obara, Shin'ya
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第5144号
Issue Date	2000-03-24
DOI	https://doi.org/10.11501/3168708
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51651
Type	doctoral thesis
File Information	000000353901.pdf



灰色壁に囲まれた非灰色ガスの
ふく射伝熱高速解析手法の開発

小原伸哉

①
平成 11 年度博士論文

Development of Fast Algorithm for Radiative Heat Transfer

in Non-Gray-Gas Systems Surrounded by Gray Walls

灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱

高速解析手法の開発

Development of Fast Algorithm for Radiative Heat Transfer

in Non-Gray-Gas Systems Surrounded by Gray Walls

Laboratory of Thermophysics for Space Engineering

Research Group of Space Environmental Engineering

Department of Mechanical Science

北海道大学大学院工学研究科 機械科学専攻

宇宙環境工学講座 宇宙熱物理工学分野

小原 伸哉

2000 年 3 月

Development of Fast Algorithm for Radiative Heat Transfer
in Non-Gray-Gas Systems Surrounded by Gray Walls

Laboratory of Thermophysics for Space Engineering
Research Group of Space Environmental Engineering
Division of Mechanical Science
Graduate School of Engineering, Hokkaido University

Shin'ya Obara

March, 2000

目 次

Abstract	iii
主な記号	iv
第1章 序 論	
1.1 非灰色ガスを対象としたふく射伝熱解析の背景	1
1.2 本研究の目的	2
1.3 本論文の構成	2
第2章 従来のふく射伝熱解析手法	
2.1 ゾーン法による解析手法	4
2.1.1 灰色ガスから放射されるふく射エネルギー	5
2.1.2 灰色壁から放射されるふく射エネルギー	5
2.1.3 直接交換面積	5
2.1.4 単色吸収係数	10
2.1.5 射度と全交換面積	12
2.1.6 非灰色ガス系におけるエネルギー式	14
2.1.7 収束計算	15
2.1.8 ゾーン法による非灰色ガスふく射伝熱解析の計算手順	15
2.2 モンテカルロ法による解析手法	19
2.2.1 ふく射伝熱とモンテカルロ法	19
2.2.2 READ法の導入	24
2.2.3 決定論的計算方法の導入	25
2.2.4 非灰色ガス系におけるエネルギー式	26
2.2.5 モンテカルロ法による非灰色ガスふく射伝熱解析の計算手順	27
2.3 第2章のまとめ	31
第3章 黒体壁に囲まれた非灰色ガス系における高速 READ アルゴリズム	
3.1 高速 READ 法の演算手順	33
3.2 非灰色ガス中におけるふく射エネルギーの吸収と減衰	34
3.3 ガス要素の重み付き平均通過距離	34
3.4 記憶すべき平均通過距離の数の削減	36
3.5 高速 READ 法によるふく射交換量	37
3.6 放射元要素における近似式の導入	38

3.7 エネルギー式	40
3.8 収束計算	41
3.9 繰り返し計算の加速化と演算手順	42
3.10 第3章のまとめ	45
第4章 灰色壁に囲まれた非灰色ガス系における高速 READ アルゴリズム	
4.1 高速 READ アルゴリズムによる直接交換面積の計算	48
4.2 全交換面積の計算	49
4.3 エネルギー式と収束計算	50
4.4 第4章のまとめ	55
第5章 解析結果と考察	
5.1 解析系と解析条件	56
5.2 決定論的計算方法の精度の検討	64
5.3 高速 READ 法の評価	66
5.3.1 収束時間と解析精度の評価	66
5.3.2 壁面放射率の影響	68
5.3.3 要素数の影響	70
5.3.4 解析に要するコンピュータメモリ量の評価	83
5.3.5 波数ステップ繰り返し計算の加速化	85
5.4 第5章のまとめ	87
第6章 結 言	88
参考文献	89
謝 辞	91

ABSTRACT

A fast algorithm is developed to solve radiative heat transfer problems in non-gray gas system surrounded by gray walls. In the problem, the distributions of the gas temperature and the wall heat flux in non-gray-gas system are estimated. In the present study, the time consuming Monte Carlo procedure used for radiative transfer calculation is successfully pushed out of iterational loop of the temperature convergence. For the purpose, the calculational procedure of *READ* values, the ratio of the radiative energy absorbed by an element to the energy emitted from a source element, are separated into two parts, the absorption-coefficient-dependent part and independent part. And by using the present procedure, the former absorption-coefficient-dependent part of the calculation of *READ* values, which should be in the temperature convergence loop, can easily be calculated using the absorption-coefficient independent part, which require the Monte Carlo procedure to be calculated but the Monte Carlo procedure to can be situated outside the loop. The calculated values of *READ* are used to calculated direct exchange areas for the zone method to obtain total exchange areas in systems surrounded by gray walls. The new method, the fast *READ* method combined with the zone method, reduces the computation time by one-sixth compared to the conventional non-gray radiation heat transfer calculation using the *READ* method. Comparison between the results of the present method and exact solution shows the validity of the present method.

主な記号

$C_{(i \rightarrow j)}$	要素 i から要素 j への全交換面積	$[m^2]$
$D_{(i \rightarrow j)}$	要素 i から要素 j への直接交換面積	$[m^2]$
E_b	その温度における黒体放射エネルギー	$[W/m^2]$
I	放射強度	$[W/m^2sr]$
k	吸収係数	$[m^{-1}]$
N_{gm}	ガス要素数	[個]
N_{sm}	壁要素数	[個]
N_{ray}	全放射エネルギー束数	[-]
$n(i, j, h)$	要素 i から放射され、ガス要素 h を通過した後、要素 j に到達するエネルギー束数	[-]
Q_{abs}	吸収エネルギーと要素からの発熱の和 (エネルギー式(2.35)(2.36)などの右辺)	$[W]$
Q_{emi}	放射されたふく射エネルギー (エネルギー式(2.35)(2.36)などの左辺)	$[W]$
q_g	ガス要素の発熱密度	$[W/m^3]$
q_s	壁要素の熱流束	$[W/m^2]$
$Rd(i \rightarrow j)$	要素 i から要素 j への READ 値	[-]
T	温 度	$[K]$
A	壁要素の面積	$[m^2]$
V	ガス要素の体積	$[m^3]$
W_j	無次元射度	[-]
$x_p(i, j, h)$	要素 i から放射されてガス要素 h を通過した後に要素 j に到達するエネルギー束のうち、 p 番目に放射されて要素 h を通過する長さ	$[m]$
$\overline{x(i, j, h)}$	重み付き算術平均長さ (式(3.4)で定義)	$[m]$
ε	放射率	[-]
μ	屈折率	[-]
ν	波 数	$[cm^{-1}]$
ρ	反射率	[-]

σ ステファン・ボルツマン定数 $[W/m^2K^4]$

添 字

abs 吸 収

b 黒 体

emi 放 射

g ガス要素

in 流 入

out 流 出

s 壁要素

v $v+dv$ の間の波数に対応した値 $[cm^{-1}]$

第1章 序 論

1.1 非灰色ガスを対象としたふく射伝熱解析の背景

燃焼加熱炉、ガスタービン、ジェットエンジンの燃焼器等、ふく射性ガスが重要な役割を果たす機器の設計を行う際には、これらのガスの非灰色性を適切に取り扱う必要がある。

非灰色ガスを対象とするふく射伝熱解析では、従来 weighted-sum-of-gray-gases モデル^[1]、K-distribution 法^[2]、ゾーン法^[3]、モンテカルロ法^[4]等が用いられてきた。前の2法は計算時間が短いものの系内での非灰色ガスの吸収スペクトルは一様であるという条件を必要とすることから、これらの手法による非灰色ガスふく射伝熱解析には限界がある。したがって、より適切に実際の非灰色ガスを扱う解析手法が望まれており、有力な手段としてモンテカルロ法による非灰色ガスへの拡張や光線放射モデルによるふく射要素法^[6]などが挙げられる。これらのうち非灰色媒体に適用したモンテカルロ法の解析手法では、解析系の幾何学的形状や熱物性に対して柔軟な対応ができるものの、解析精度を向上させるためにはふく射エネルギーを模擬する粒子数を増加させる必要があることから、計算時間が長くなる。特に非灰色ガスに適用する場合には、多くの単色波長域に分割し、それぞれについて灰色ガスと同様な計算を行うことから、長い解析時間を要することになる。

この問題に対して、当研究室のグループでは、READ 法を取り入れた非灰色ガスのモンテカルロ計算について、放射する各エネルギー粒子に波数割り当てする際に乱数を用いない決定論的計算法を導入すること、加えて、反復計算を伴うガス温度分布の収束計算に過緩和を導入することなどによって、従来のモンテカルロ法に比べて38~49倍の高速化を図っている^[7]。

近年、パーソナルコンピュータの処理速度やメモリ容量が大幅に向上しており、モンテカルロ法を取り入れたふく射伝熱解析手法にとっても追い風となっているが、非灰色系での複雑な三次元系での問題について実用的な解析を行おうとすると、一層の時間短縮が必要である。このような背景の下、本研究ではモンテカルロ法による非灰色ガスのふく射伝熱解析について、モンテカルロ法の特長である幾何学的形状や熱物性に対する柔軟性を損なうこと無しに、これらを高速で演算することが可能なアルゴリズムの提案を行う。

1.2 本研究の目的

本研究は、非灰色ふく射伝熱問題について容易に取り扱うことができ、しかも短時間でその解を得ることができるような高速解析手法の開発に関するものである。ふく射伝熱が支配的である焼却炉や燃焼炉では、燃焼ガスや火炎といった熱源と炉構造の間に適切な伝熱設計を要し、数値シミュレーションによる事前検討が容易に行えると設計の効率は飛躍的に向上する。

非灰色ガスのふく射伝熱解析コードを設計実務に適用させるための主な条件としては、

- ①系の幾何学的形状の取り扱いに柔軟性がある
- ②解析時間が短く、精度が良い
- ③解析に要するコンピュータメモリの量が少ない

などが挙げられる。勿論、このほかにも化学反応や対流による熱的な影響を容易に追加できることや、系の要素分割が最適にしかも効率的にできることなども挙げられるが、上記の3条件が達成されるなら比較的容易に拡張され得る。したがって、本研究では常に上記の基本的な3条件を満たすような非灰色ガス系におけるふく射伝熱の高速解析手法を開発するものである。

1.3 本論文の構成

第1章は序論であり、非灰色ガスを対象としたふく射伝熱解析の背景、本研究の目的、そして本論文の構成を述べている。

第2章では、従来の代表的な解析手法として特にゾーン法とモンテカルロ法について取り上げ、その概要について述べている。この2つの方法は、次章以降に述べる非灰色ガスのふく射伝熱高速解析手法の開発に取り入れられている。

第3章では、黒体壁に囲まれた非灰色ガス系のふく射伝熱解析に適用する高速アルゴリズム（以下、高速 READ 法と称することとする）について述べている。この方法では、あらかじめモンテカルロ計算を用いて系の幾何学的情報を計算しておき、この情報と系内のガス温度分布に依存する吸収係数分布から、系内を格子分割した各要素間のふく射エネルギー交換係数（READ 値）を求め、これを用いてエネルギーバランス式を解き、ガスの温度分布と壁面熱流束分布を求めており、分割したガス要素それぞれの温度に対応した単色吸収係数分布を温度分布の収束計算の過程で毎回更新しながら収束するまで繰り返し計算を行う。

第4章では、ゾーン法の考え方を利用して、上記の黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。

第5章では、高速 READ 法によっていくつかの系や条件について実際に解析を行い、演算時間、解析精度、さらにコンピュータメモリ量などについての結果と評価を論じている。

ゾーン法とモンテカルモ

ゾーン法は、黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。この手法は、ゾーン法とモンテカルモ法を組み合わせたものである。ゾーン法は、黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。この手法は、ゾーン法とモンテカルモ法を組み合わせたものである。

ゾーン法は、黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。この手法は、ゾーン法とモンテカルモ法を組み合わせたものである。

ゾーン法は、黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。この手法は、ゾーン法とモンテカルモ法を組み合わせたものである。

2.1 ゾーン法による解析手法

ゾーン法による解析手法は、黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。この手法は、ゾーン法とモンテカルモ法を組み合わせたものである。

ゾーン法による解析手法は、黒体壁に囲まれた系に限定される高速 READ 法を、灰色壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱問題に拡張する手法について述べている。この手法は、ゾーン法とモンテカルモ法を組み合わせたものである。

第2章 従来のふく射伝熱解析手法

ゾーン法とモンテカルロ法

ゾーン法やモンテカルロ法では、最初にガス中の温度分布を仮定して温度の関数である単色吸収係数を新たな温度分布を用いて求めることができれば、そしてこれらの単色がガス領域を分割した各要素のそれぞれについて得ることができれば、エネルギー式を解くことで吸収係数を更新しつつ収束するまで繰り返し温度分布の修正計算を行うことが可能である。ただし現実の設計を考慮すると解析系に柔軟性を要することから、ゾーン法では、エネルギー式中に含まれるふく射エネルギー交換量を表す全交換面積を求めるのに用いられる直接交換面積を計算する際に複雑な多重積分を解かなければならず、適用が難しい場合が多い。(ただし、Hottel 等によって円筒形状や直方体形状などの例についてその値が求められている^[3])。この反面、黒体壁系におけるふく射交換量を表す直接交換面積を得てしまえば、行列式の導入によって短時間で灰色壁系の演算が行えるという特長を持つ。

一方、モンテカルロ法による伝熱解析では、非灰色ガスのスペクトルを計算時間の許す限り正確に取り扱うことができ、また系の幾何学的形状に広く柔軟性を持つことが知られている。しかし高い解析精度を実現するためには多数のエネルギー粒子(通常、 $10^4 \sim 10^5$ オーダ)の軌跡を追跡することが必要となることから、演算時間の増加が問題になる。

本章では、非灰色ガスを対象としたふく射伝熱解析手法の代表とも言えるゾーン法とモンテカルロ法の概要について述べる。この2つの解析手法は後章で述べられる高速 READ アルゴリズムに取り入れられている。

2.1 ゾーン法による解析手法

Hottel のゾーン法^[3]は、これまで工業燃焼炉の伝熱解析などに多く利用されている。この解析手法では、各要素内の温度や熱物性値などが一定であるものと仮定して、2要素間のふく射エネルギー交換量を表わすために直接交換面積と全交換面積という2つの概念を用いる。また、複雑な二重積分を解くことで得られる直接交換面積を求めるに当たり、従来からモンテカルロ法を組み込むことが行われている^[8,9]。

最初に、各要素間で授受されるふく射エネルギーについてガスを囲む壁要素は反射の

生じない黒体であると仮定した上で直接交換面積を求める。次に、黒体と仮定した壁を灰色に置き換えた系において、ある壁要素から放射される全ふく射エネルギーに相当する射度を用いて先の直接交換面積から壁面での乱反射を考慮した全交換面積を求める。このようにして得られた全交換面積を、ガス要素および壁要素について表わされるエネルギー式に与えることでガスの温度分布と壁の熱流束分布を求めることができる。

以下に述べるゾーン法の説明では、最初に灰色ガスの雰囲気中であるものと仮定しており、後に非灰色ガスの雰囲気への拡張を行う。

2.1.1 灰色ガスから放射されるふく射エネルギー

灰色ガスの雰囲気中で微小容積 dV のガス要素から放射されるふく射エネルギー dE_g は次式で表される。

$$dE_g = 4k\mu^2 dV \cdot \sigma T_g^4 \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

ここで、 k は各ガス要素の吸収係数、 μ は各ガス要素の屈折率、そして σ はステファン・ボルツマン定数である。

ガス要素の形状は2次元解析では一辺の長さが B の正方形を、3次元解析では一辺の長さが B の立方体を用いるものとする。体積 B^3 の灰色ガス塊からその外部に放射されるふく射エネルギーは次式で表される。

$$E_g = 4(k \cdot B)(B^2) \cdot \phi \cdot \mu^2 \sigma T_g^4 \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

ここで escape factor ϕ は、ガス要素の吸収係数および一辺の長さとの積(= $k \times B$)の関数で、多重積分を解くことによって得ることができる。参考として、図 2-1 に Hottel らによって求められた escape factor ϕ と $k \cdot B$ との関係を示す^[3]。式(2.2)の屈折率 μ の値は、解析対象のガス要素中に固体粒子や液滴が存在しない場合、ほぼ1となる。

2.1.2 灰色壁から放射されるふく射エネルギー

温度 T_s で放射率 ϵ_s の灰色の壁要素から放射される単位時間当りのふく射エネルギーは、壁要素が一辺の長さが B の正方形であるとして、

$$E_s = \epsilon_s(B^2) \cdot \mu^2 \sigma T_s^4 \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

で表される。ガスの場合と同様に屈折が無いような系では μ の値は1となる。

2.1.3 直接交換面積

直接交換面積とは、ある要素から放射されたふく射エネルギーが、経路上の他の気体要素を透過して、壁に一度も当たらずに直接目的の要素に到達する割合(目的の要素

が壁要素

の場合)、若しくは目的の要素に吸収される割合(目的の要素がガス要素の場合)を表わす。灰色壁の場合ではふく射エネルギーが壁に到達すると吸収と反射を生じるが、この和である到達エネルギーを考える。これは、壁による多重反射の影響を除くために同一の系で全ての壁要素の放射率が1、すなわち反射の生じない黒体であると仮定したときの各要素間で授受されるふく射エネルギーを考えることに相当する。

ガス要素*i*から放射されたふく射エネルギーが、ガス要素*j*に到達するときの直接交換面積を $\overline{g_i g_j}$ と表記する。同様にガス要素*i*から放射されたふく射エネルギーが壁要素*j*に到達するときの直接交換面積を $\overline{g_i s_j}$ 、壁要素*i*から放射されたふく射エネルギーがガス要素*j*に到達するときの直接交換面積を $\overline{s_i g_j}$ 、壁要素*i*から放射されたふく射エネルギーが壁要素*j*に到達するときの直接交換面積を $\overline{s_i s_j}$ と表記することとする。このとき、ある要素*i*から放射されたふく射エネルギーが、ガス要素に吸収されながら進行して他の壁要素*j*に到達あるいはガス要素*j*に吸収される量は、以下の式で定義される。

$$q_{g_i, g_j} = \overline{g_i g_j} E_{g_i} = \overline{g_i g_j} \sigma T_{g_i}^4 \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

$$q_{g_i, s_j} = \overline{g_i s_j} E_{g_i} = \overline{g_i s_j} \sigma T_{g_i}^4 \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

$$q_{s_i, g_j} = \overline{s_i g_j} E_{s_i} = \overline{s_i g_j} \sigma T_{s_i}^4 \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

$$q_{s_i, s_j} = \overline{s_i s_j} E_{s_i} = \overline{s_i s_j} \sigma T_{s_i}^4 \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

直接交換面積は面積[m²]の次元を持っており、これらの値は、要素間の幾何学的な関係が直方体形状や円筒形状のような簡単な場合ではグラフを用いることで求められるが、一般には数値積分あるいはモンテカルロ法で求める必要がある。

いま、図2-2に示すような温度の異なる無限平行壁面*S*₁および*S*₂が距離*L*だけ離れており、この間に非発熱の非灰色ガスが存在しているものとする。壁面*S*₁の微小面積*dA*₁からふく射エネルギーが放射されて他壁面*S*₂に到達するものとする、直接交換面積 $\overline{s_1 s_2}$ は、次式で表される。

$$\overline{s_1 s_2} = dA_1 \cos \theta_1 \int_{A_2} \frac{r d\theta}{\pi r^2} \frac{2\pi r \sin \theta \cdot \cos \theta}{\cos \theta} e^{-kr} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

これを整理して、

$$\frac{\overline{s_1 s_2}}{dA_1} = \int_0^{\pi/2} 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot e^{-kL \cos \theta} d\theta \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

sec θ = *t* とおくと次式を得る。

$$\overline{\frac{s_1 s_2}{dA_1}} = 2 \int_1^\infty 2 \frac{e^{-kLt}}{t^3} dt d\theta \dots\dots\dots(2 \cdot 10)$$

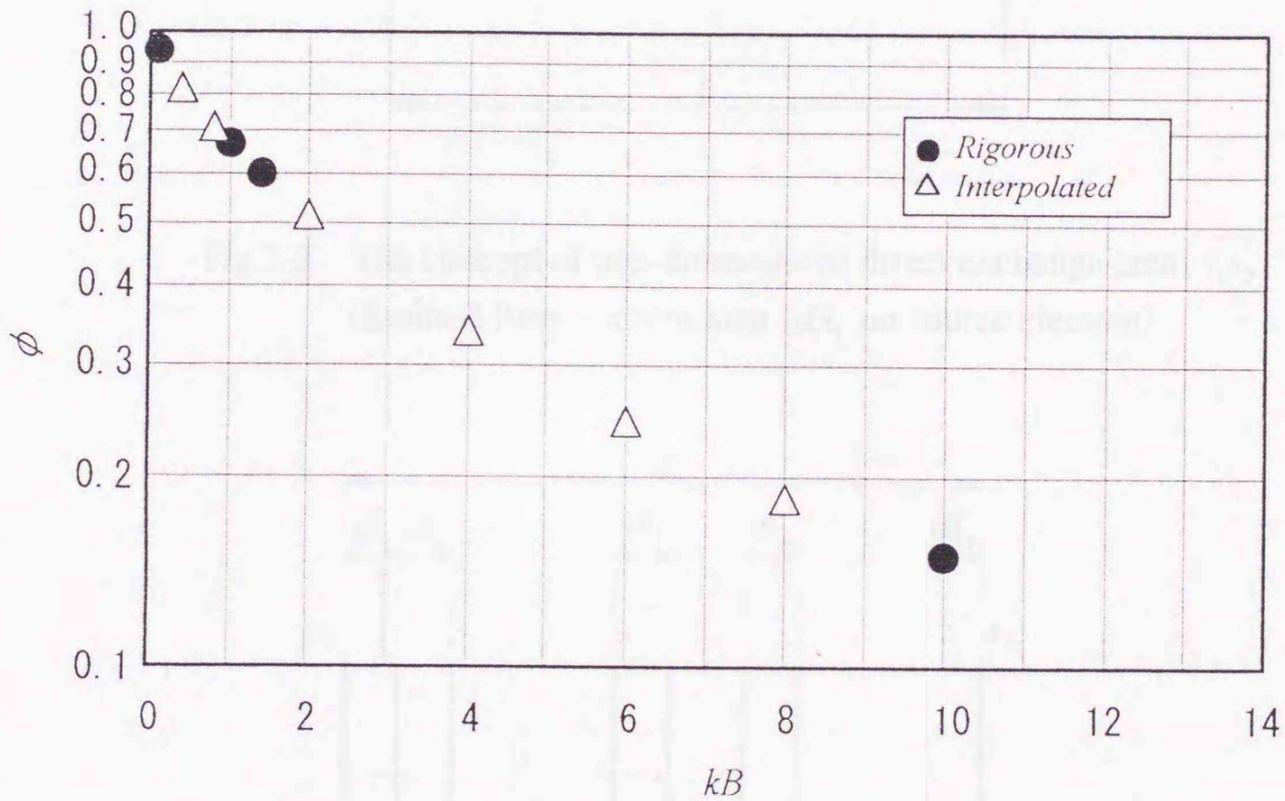


Fig.2-1 Escape factor ϕ for emission from a cube of edge B filled with gas of absorption coefficient k.

Hottel, H.C. and Cohen, E.S., *Radiant Heat Exchange in a Gas-filled Enclosure: Allowance for Nonuniformity of Gas Temperature*, E.S. *A.I.Ch.E. Journal.*, vol. 4, No. 1, 3-14 (1958)

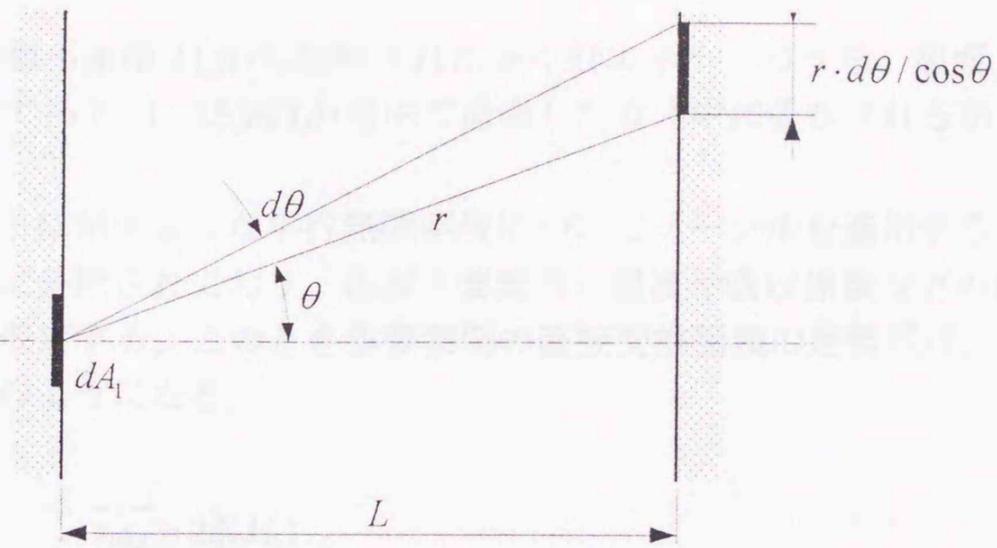


Fig.2-2 The concept of one-dimensional direct exchange area $\overline{s_1 s_2}$
 (Emitted from a micro-area dA_1 on source element)

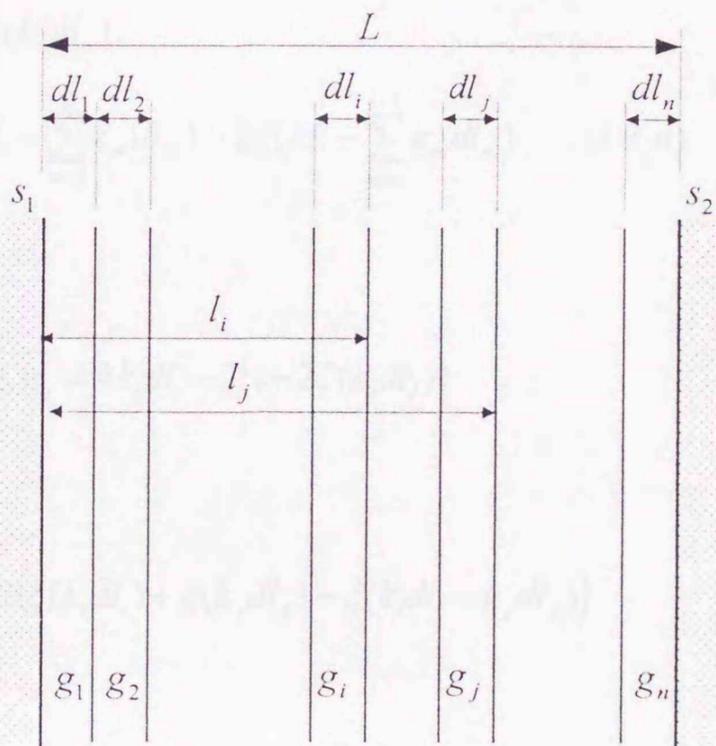


Fig.2-3 Analytical system

ここで、

$$2\xi(kL) = \int_1^\infty 2 \frac{e^{-kl}}{l^3} dl \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 11)$$

とおくと、端面 S_1 の微小面積 dA_1 から放射されたふく射エネルギーのうち、他面 S_2 に到達する割合は $2\xi(kL)$ であり、 $1-2\xi(kL)$ が途中で通過したガス中に吸収される割合となる。

簡単のために図 2-3 に示すような平行無限平板についてゾーン法を適用する。平板間のガス媒体は n 個に分割されており、各ガス要素内の温度や吸収係数などの熱物性は均一であるものと仮定する。このとき各要素間の直接交換面積の定義式は、式(2・8)~(2・11)から以下のようになる。

● 壁面-壁面

$$\overline{s_1 s_2} = 2\xi(kL) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 12)$$

● 壁面-ガス

$$\overline{s_1 g_1} = 1 - 2\xi(k_1 dl_1) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 13)$$

$$\overline{s_1 g_i} = 2\xi\left(\sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m\right) - 2\xi\left(\sum_{m=1}^i k_m dl_m\right) \quad (i \neq 1) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 14)$$

$$\overline{s_2 g_n} = 1 - 2\xi(k_n dl_n) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 15)$$

$$\overline{s_2 g_i} = 2\xi\left(kL - \sum_{m=1}^i k_m dl_m\right) - 2\xi\left(kL - \sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m\right) \quad (i \neq n) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 16)$$

● ガス-ガス

($i=j$) のとき

$$\overline{g_i g_j} = 4k_i dl_i - 2(1 - 2\xi(k_i dl_i)) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 17)$$

($|i-j|=1$) のとき

$$\overline{g_i g_j} = 1 - 2(\xi(k_i dl_i) + \xi(k_j dl_j) - \xi(k_i dl_i + k_j dl_j)) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 18)$$

その他のとき

$$\begin{aligned} \overline{g_i g_j} = 2 & \left[\left(\xi\left(\sum_{m=1}^j k_m dl_m - \sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m\right) + \xi\left(\sum_{m=1}^{j-1} k_m dl_m - \sum_{m=1}^i k_m dl_m\right) \right) \right. \\ & \left. - \left(\xi\left(\sum_{m=1}^j k_m dl_m - \sum_{m=1}^i k_m dl_m\right) + \xi\left(\sum_{m=1}^{j-1} k_m dl_m - \sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m\right) \right) \right] \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 19) \end{aligned}$$

2.1.4 単色吸収係数

燃焼によって生成される水蒸気や炭酸ガスなどは強い吸収特性を持ち、ふく射熱伝達を扱う上で重要な媒体となる。このような媒体を含むふく射伝熱解析手法について工藤らは、Elsasserの狭域バンドモデル^[19]にEdwardsら^[20]の提唱する指数形広域バンドモデルのモデル係数の適用を行っている^[7]。ゾーン法の直接交換面積を求める計算や、従来のモンテカルロ法でのふく射エネルギー粒子の軌跡を求める計算では、ある要素から放射されたふく射エネルギーが吸収性ガスを通過するときに吸収される量を求める必要がある。そこで先に記した単色吸収係数を求める計算に工藤らの方法を用いることとする。この手法では、非灰色ガスの単色吸収係数を媒体の温度、圧力および媒体を構成するモル濃度の関数として扱うことができる。以下に手法について概説する。

非灰色ガスの各吸収バンド N_b における単色吸収係数は、次式のElsasserの狭域バンドモデルを用いる。

$$k_{\nu, N_b} = \rho \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \exp \left(-\frac{\nu^*}{\omega} \right) \cdot \frac{\sinh(2\beta P_e)}{\cosh(2\beta P_e) - \cos(2\pi(\nu - \nu_0)/d_{N_b})} \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 20)$$

式(2・20)で、 α 、 β 、 ω 、 P_e は吸収バンド強度、線スペクトル広がりパラメータ、吸収バンド幅パラメータ、圧力パラメータを表し、温度若しくは圧力の関数である。また、これらと吸収バンドの代表波数 ν_0 は、Edwardsらの提唱する指数形広域バンドモデルのモデル係数として与えられる。

本解析では、 $0 \sim 8000 \text{ cm}^{-1}$ の波数範囲を対象とし、これを800個の波数ステップに分割する。 d_{N_b} は線間隔を表わしており、ガスの組成と波長の関数であるが、 $0.01 \sim 0.1 \text{ cm}^{-1}$ 程度まで変化させてもガスの放射率に影響がほとんど生じないことから、 0.1 cm^{-1} として与える。このとき式(3・20)の \cos 項を零とすることで、次式に書き換えられる。

$$k_{\nu, N_b} = \rho \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \exp \left(-\frac{\nu^*}{\omega} \right) \cdot \tanh(2\beta P_e) \quad \dots\dots\dots(2 \cdot 21)$$

表2-1^[18]に示すように、Edwardsらは水蒸気に対して回転バンドを含む吸収バンド(6.3、2.7、1.87、1.38 μm)を、二酸化炭素に対しては6つの吸収バンド(15、10.4、9.4、4.3、2.7、2.0 μm)を温度(= T_g)と圧力(全圧(= P_g)と分圧(= P_e))による関係を加味して与えており、これらの単色吸収バンドを加算することで任意波数の非灰色ガスの単色吸収係数を求めることができる。

Table.2-1 The correlation parameters in Edward's exponential wide-band model^[18]

gas	Vibrations ν_i [cm^{-1}]	Bands $\delta_1, \delta_2, \delta_3$	Pressure parameters		Spectral location			Band absorption parameters			
			n	b ($T_0 = 100 K$)	ν_1	ν_2	ν_3	α_0 [$cm^{-1} / gm m^{-2}$]	β_0	ω_0 [cm^{-1}]	
H_2O	$m=3$	(1) Rotational	1	$8.6(T_0/T)^{1/2} + 0.5$	0			5200.0	0.14311	28.4	
	$\nu_1 = 3652$	(2) $6.3 \mu m$	1	$8.6(T_0/T)^{1/2} + 0.5$		1600		41.2	0.009427	56.4	
	$\nu_2 = 1595$	(3) $2.7 \mu m$	1	$8.6(T_0/T)^{1/2} + 0.5$		3760		0.19			
	$\nu_3 = 3756$	(4) $1.87 \mu m$	1	$8.6(T_0/T)^{1/2} + 0.5$		5350		2.30	0.13219	60.0	
	$g_1 = 1$	(5) $1.38 \mu m$	1	$8.6(T_0/T)^{1/2} + 0.5$		7250		22.40	0.08169	43.1	
	$g_2 = 1$							3.0	0.00628	32.0	
	$g_3 = 1$										
	CO_2	$m=3$	(1) $15 \mu m$	0.7	1.3		667		19.0	0.06157	12.7
		$\nu_1 = 3652$	(2) $10.4 \mu m$	0.8	1.3		960		2.47×10^{-9}	0.04017	13.4
		$\nu_2 = 1595$	(3) $9.4 \mu m$	0.8	1.3		1060		2.48×10^{-9}	0.11888	10.1
$\nu_3 = 3756$		(4) $4.3 \mu m$	0.8	1.3		2410		110.0	0.24723	11.2	
$g_1 = 1$		(5) $2.7 \mu m$	0.65	1.3		3660		4.0	0.13341	23.5	
$g_2 = 1$		(6) $2.0 \mu m$	0.65	1.3		5200		0.066	0.39305	34.5	
$g_3 = 1$											

$$k_{v, g} (T_g, P_s, P_c) = \sum_{i=1}^{11} k_v (N_b) \dots\dots\dots(2\cdot22)$$

2.1.5 射度と全交換面積

射度の概念

次に 2.1.3 項で仮定した黒体壁を灰色壁に置き換えた系において、直接交換面積から射度の概念を利用して、壁面での乱反射を考慮したふく射エネルギー交換（全交換面積）について考える。射度とは外来照射の反射分と自己放射分の和であり、この概念を用いると、ランベルトの余弦則を適用することで灰色壁面での乱反射の扱いが可能となる。一方、放射されるエネルギーの強度が方向性を持つ鏡面反射については射度の概念を用いることはできない。

ガス要素 g_i 以外の温度を絶対零度（すなわち放射されるエネルギーが零）とし、また、このガス要素からの微小波数域 ν での放射エネルギーを 1 としたとき、波数域 ν で面積が A_{sj} の壁要素 sj で反射されるふく射エネルギーは、 $W_{\nu, j} \cdot A_{sj}$ で表わされる。ここで $W_{\nu, j}$ は、ガス要素 g_i から放射された波数域 ν のふく射エネルギーが、途中で通過するガス要素内で吸収されて減衰されながら直接に、あるいは他の壁要素で反射されて壁要素 sj に到達して、ここで反射されるものを表わす。ここでは壁の温度を絶対零度としていることから、この射度には壁要素からの自己放射分は含まれていない。この壁の波数域 ν での放射率を $\epsilon_{\nu, j}$ とすると、壁要素 sj に入射するふく射エネルギーのうちで $\epsilon_{\nu, j}$ の割合が吸収され、また $(1 - \epsilon_{\nu, j})$ の割合が反射される。それゆえ、この壁要素で吸収されるふく射エネルギーは、 $W_{\nu, j} \cdot A_{sj} / (1 - \epsilon_{\nu, j})$ で表わされる。

全交換面積の導入

全交換面積とは、ある要素から放射されたふく射エネルギーのうち、直接目的の要素で吸収されたものと、壁で反射された後に目的の要素に到達して吸収された割合を表わす。これは放射元要素以外の全要素の温度を絶対零度としたときに、目的の要素で吸収されるふく射エネルギーを調べることで求めることができる。ある要素から放射されたふく射エネルギーのうち、壁面反射分も含めて目的の要素で吸収された量を q とすると、これは全交換面積を導入して以下のように表わされる。

$$q_{g_i, g_j} = \overline{G_i G_j} E_{g_i} = \overline{G_i G_j} \sigma T_{g_i}^4 \dots\dots\dots(2\cdot23)$$

$$q_{g_i, s_j} = \overline{G_i S_j} E_{g_i} = \overline{G_i S_j} \sigma T_{g_i}^4 \dots\dots\dots(2\cdot24)$$

$$q_{s_i, s_j} = \overline{S_i G_j} E_{s_i} = \overline{S_i G_j} \sigma T_{s_i}^4 \dots\dots\dots(2\cdot25)$$

$$q_{si,sj} = \overline{S_i S_j E_{si}} = \overline{S_i S_j \sigma T_{si}^4} \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

ガス要素 gi から放射されたふく射エネルギーが直接、あるいは他の壁要素で反射されて目的要素である壁要素 s_j に到達して吸収される場合、全交換面積は射度を用いて次式のように表わされる。

$$\overline{G_i S_j} = {}_i W_{v,j} \cdot \varepsilon_{v,j} / ((1 - \varepsilon_{v,j}) \sigma T_{gi}^4) \quad \dots\dots\dots(2.27)$$

同様にして、壁要素 si から放射されたふく射エネルギーが直接、あるいは他の壁要素で反射されて目的要素である壁要素 s_j に到達して吸収される場合は、

$$\overline{S_i S_j} = ({}_i W_{v,j} - \delta_{i,j} \cdot \varepsilon_{v,j}) \cdot A_{sj} \cdot v_{v,j} / ((1 - \varepsilon_{v,j}) \sigma T_{si}^4) \quad \dots\dots\dots(2.28)$$

と表わされる。

いま、壁要素とガス要素の数がそれぞれ n 個、 m 個の合計 N 個の要素からなる系を考えて、壁要素には通し番号 $1 \sim n$ を、ガス要素には $n+1 \sim N$ を与えておく。壁要素 j における射度を $W_{v,j}$ [W/m^2]、反射率を $\rho_{v,j} (= 1 - \varepsilon_{v,j})$ とし、ふく射エネルギーバランス式を導くと次式となる。

$$A_{sj} \cdot W_{v,j} = A_{sj} \cdot \rho_{v,j} \cdot E_{bv,sj} + \rho_{v,j} \left(\sum_{i=1}^n D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot W_{v,i} + \sum_{i=n+1}^N D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot E_{bv,gi} \right) \quad \dots\dots\dots(2.29)$$

上式を次式のように書き直す。

$$\sum_{i=1}^n (D_{v,(i \rightarrow j)} - \delta_{i,j} \frac{A_{sj}}{\rho_{v,j}}) \cdot W_{v,i} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} E_{bv,sj} - \sum_{i=n+1}^N D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot E_{bv,gi} \quad \dots\dots\dots(2.30)$$

いま、ふく射エネルギーの放射元を壁要素 i のみに限定して考える ($E_{bv,sj} = 0 (j=1 \sim N, j \neq i)$) と、上式の両辺を $E_{bv,gi}$ で除した n 元の連立方程式の解を無次元射度 ${}_i W_{v,j}$ とすると、全交換面積 $C_{v,(i \rightarrow j)}$ は次式で与えられる。

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} ({}_i W_{v,j} - \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{v,j}) \quad \dots\dots\dots(2.31)$$

同様にして、ガス要素 i が単独に放射する場合を考え、壁要素 j あるいはガス要素 j との間の全交換面積は、それぞれ以下の式で与えられる。

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} {}_i W_{v,j} \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = D_{v,(i \rightarrow j)} + \sum_{k=1}^n D_{v,(k \rightarrow j)} \cdot {}_i W_{v,j} \quad \dots\dots\dots(2.33)$$

ここで図 2-3 の無限平行平板系について適用を行ってみると、平板 S_1 と平板 S_2 から

放射されるふく射エネルギーバランスとして式(2・30)を用いてこれを行列表示すると次式で表わされる。

$$\begin{vmatrix} -\frac{A_{s1}}{\rho_{v,1}} & \frac{1}{s_1 s_2} \\ \frac{1}{s_1 s_2} & -\frac{A_{s2}}{\rho_{v,2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W_{v,1} \\ W_{v,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{A_{s1} \cdot \varepsilon_{v,1} \cdot E_{bv,s1}}{\rho_1} - s_1 g_1 \cdot E_{bv,g1} - \dots - s_1 g_n \cdot E_{bv,gn} \\ -\frac{A_{s2} \cdot \varepsilon_{v,2} \cdot E_{bv,s2}}{\rho_2} - s_2 g_1 \cdot E_{bv,g1} - \dots - s_2 g_n \cdot E_{bv,gn} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2\cdot34)$$

この行列式を解くことで各壁要素についての無次元射度 $W_{v,j}$ が求められ、これらを式(2・31)~(2・33)に適用することで全交換面積 $C_{v,(i \rightarrow j)}$ を得ることができる。

2.1.6 非灰色ガス系におけるエネルギー式

全ての波数領域におけるエネルギー式は、壁要素数(図 2-3 の場合=2)と m 個のガス要素について全交換面積を導入すると以下のように書ける。

(ガス要素)

$$\int_0^\infty 4V_{gi} \cdot k_{v,gi} \cdot E_{bv,gi} dv = \int_0^\infty \sum_{j=1}^2 C_{v,(sj \rightarrow gi)} \cdot E_{bv,sj} dv + \int_0^\infty \sum_{j=3}^{2+m} C_{v,(gj \rightarrow gi)} \cdot E_{bv,gj} dv + q_{gi} \cdot V_{gi} \dots\dots\dots(2\cdot35)$$

(壁要素)

$$\int_0^\infty \varepsilon_{v,i} \cdot A_{si} \cdot E_{bv,si} dv = \int_0^\infty \sum_{j=1}^2 C_{v,(sj \rightarrow si)} \cdot E_{bv,sj} dv + \int_0^\infty \sum_{j=3}^{2+m} C_{v,(gj \rightarrow si)} \cdot E_{bv,gj} dv - q_{si} \cdot A_{si} \dots\dots\dots(2\cdot36)$$

式(2・35),(2・36)の左辺は放射されるエネルギー(= Q_{emi})、右辺はふく射エネルギーの吸収項、および発熱項(両者の和を Q_{abs} とする)を表している。これらの式は E_{bv} が温度の関数であることから、ふく射性ガスの温度分布について解くことができる。このためには最初にガス中の温度分布を仮定し、式(2・31)~(2・33)を利用して全交換面積を求める。単色吸収係数は温度の関数であるから、これを更新しつつ式(2・35),(2・36)に代入することで $E_{bv,gj}$ に含まれている温度の4乗項について解くことができ、新しい非灰色ガスの温度分布が求められる。これを収束するまで繰り返して温度分布の修正計算を行う。さらに非灰色ガスの温度分布が収束したならば、それらの値を式(2・36)に代入することで壁面熱流束 q_{si} を得ることができる。

2.1.7 収束計算

ガス温度分布の修正繰り返し計算

前項の非灰色ガスの温度分布を求める計算では、収束するまで単色吸収係数を修正しつつ繰り返して式(2・35)を解いて $E_{b\nu}$ に含まれている非灰色ガスの温度分布を求める。このとき、あるガス要素の修正後の温度分布 $T_{g,new}$ は、修正前の温度分布 $T_{g,old}$ から、

$$Q_{g,emi}(T_{g,new}) = Q_{g,abs}(T_{g,old}) \quad \dots\dots\dots(2\cdot37)$$

が成立するように決定する。 $Q_{g,emi}(T_{g,new})$ は適当な平均吸収係数 k を用いると $4V_g \cdot k(T_{g,new}) \cdot \sigma T_{g,new}^4$ と書けるので、式(2・37)は式(2・38)に書きかえられる。

$$4V_g \cdot k(T_{g,new}) \cdot \sigma T_{g,new}^4 = Q_{g,abs}(T_{g,old}) \quad \dots\dots\dots(2\cdot38)$$

ここで、収束点近傍では $T_{g,old} \cong T_{g,new}$ であるので、 $k(T_{g,new}) \cong k(T_{g,old})$ を利用して式(2・38)は次式のように変形される。

$$T_{g,new} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{4V_g \cdot k(T_{g,old}) \cdot \sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{Q_{g,emi}(T_{g,old})} \right]^{1/4} \cdot T_{g,old} \quad \dots\dots\dots(2\cdot39)$$

上式から各繰り返し計算での修正後の温度分布 $T_{g,new}$ を求めることができる。

ガスの温度分布を求める繰り返し収束計算の度に、全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g,old}$ と修正後の温度分布 $T_{g,new}$ との差を式(2・40)で求めて、このときの最大値を err と定義して収束の判定値とする。

$$err = \max \left| (T_{g,old} - T_{g,new}) / T_{g,new} \right| \quad \dots\dots\dots(2\cdot40)$$

2.1.8 ゾーン法による非灰色ガスふく射伝熱解析の計算手順

(図2-3に示すような温度の異なる無限平行壁面 S_1 および S_2 が距離 L だけ離れており、この間に非発熱の非灰色ガスが存在している系)

- ①初期値 (非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧) および境界条件 (壁面放射率の分布(= $\epsilon_{v,i}$)、壁面の温度分布(= T_{s_i})) を与える。
- ②非灰色ガスの温度分布(= T_{g_i})を仮定して与える。
- ③初期値で与えられた非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧条件の下で、非灰色ガスの温度分布で当該波数に対応した各ガス要素の単色吸収係数を求める。

この計算では式(2・20)に示す Elsasser の狭域バンドモデルを用いることとする。

$$k_{v, N_b} = \rho \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \exp \left(- \frac{v^*}{\omega} \right) \cdot \frac{\sinh(2\beta P_c)}{\cosh(2\beta P_c) - \cos(2\pi(v - v_0)/d_{N_b})} \quad (2 \cdot 20)$$

上式に、表 2-1 に示した Edwards らによる指数形広域バンドモデルのモデル係数を適用して温度 ($=T_g$) と圧力 (全圧 ($=P_s$) と分圧 ($=P_c$)) による関係を与えて式(2・22)に示すような単色吸収バンドの加算によって任意波数の単色吸収係数分布を求める。

$$k_{v, g_i}(T_g, P_s, P_c) = \sum_{i=1}^{11} k_{v, N_b} \quad (2 \cdot 22)$$

④直接交換面積を求める。

壁面 S_1 の微小面積 dA_1 からふく射エネルギーが放射されて他壁面 S_2 に到達するものとする、直接交換面積 $\overline{s_1 s_2}$ は、式(2・8)で表される。これを整理して、 $\sec \theta = t$ とおくと式(2・10)が得られ、式(2・11)に示すように $2\xi(kL)$ を定義する。

$$\overline{s_1 s_2} = dA_1 \cos \theta_1 \int_{A_2} \frac{r d\theta}{\cos \theta} \frac{2\pi r \sin \theta \cdot \cos \theta}{\pi r^2} e^{-kr} \quad (2 \cdot 8)$$

$$\frac{\overline{s_1 s_2}}{dA_1} = 2 \int_1^\infty 2 \frac{e^{-kLt}}{t^3} dt d\theta \quad (2 \cdot 10)$$

$$2\xi(kL) = \int_1^\infty 2 \frac{e^{-kLt}}{t^3} dt \quad (2 \cdot 11)$$

平板間の非灰色ガスは n 個に分割されており、このときに各ガス要素内の温度や吸収係数などの熱物性は均一であるものと仮定すると、壁面要素間、壁面要素とガス要素間、ガス要素間の直接交換面積は式(2・12)～(2・19)を計算して求めることができる。

壁面要素間

$$\overline{s_1 s_2} = 2\xi(kL) \quad (2 \cdot 12)$$

壁面要素とガス要素間

$$\overline{s_1 g_1} = 1 - 2\xi(k_1 dl_1) \quad (2 \cdot 13)$$

$$\overline{s_1 g_i} = 2\xi \left(\sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m \right) - 2\xi \left(\sum_{m=1}^i k_m dl_m \right) \quad (i \neq 1) \quad (2 \cdot 14)$$

$$\overline{s_2 g_n} = 1 - 2\xi(k_n dl_n) \quad (2 \cdot 15)$$

$$\overline{s_2 g_i} = 2\xi(kL - \sum_{m=1}^i k_m dl_m) - 2\xi(kL - \sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m) \quad (i \neq n) \quad (2 \cdot 16)$$

ガス要素間

$$(i=j) \text{ のとき} \quad \overline{g_i g_j} = 4k_i dl_i - 2(1 - 2\xi(k_i dl_i)) \quad (2 \cdot 17)$$

$$(|i-j|=1) \text{ のとき} \quad \overline{g_i g_j} = 1 - 2(\xi(k_i dl_i) + \xi(k_j dl_j) - \xi(k_i dl_i + k_j dl_j)) \quad (2 \cdot 18)$$

その他のとき

$$\begin{aligned} \overline{g_i g_j} = 2 & \left[\left(\xi \left(\sum_{m=1}^j k_m dl_m - \sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m \right) + \xi \left(\sum_{m=1}^{j-1} k_m dl_m - \sum_{m=1}^i k_m dl_m \right) \right) \right. \\ & \left. - \left(\xi \left(\sum_{m=1}^j k_m dl_m - \sum_{m=1}^i k_m dl_m \right) + \xi \left(\sum_{m=1}^{j-1} k_m dl_m - \sum_{m=1}^{i-1} k_m dl_m \right) \right) \right] \quad (2 \cdot 19) \end{aligned}$$

⑤非灰色ガスの温度分布で当該波数に対応した単色吸収係数での射度を求める。

壁要素とガス要素の数がそれぞれ n 個 (この場合は $n=2$)、 m 個の合計 N 個の要素からなる系について、壁要素には通し番号 $1 \sim n$ を、ガス要素には $n+1 \sim N$ を与えておく。壁要素 j における射度を $W_{v,j}$ [W/m^2]、反射率を $\rho_{v,j} (=1 - \varepsilon_{v,j})$ としてふく射エネルギー式を導くと式(2・29)となることから、平板 S_1 と平板 S_2 から放射されるふく射エネルギー式を用いて行列表示すると式(2・34)で表わされる。この行列式を解くことで、与えられた非灰色ガスでの組成、全圧ならびに分圧条件の下での温度分布に対応した各単色吸収係数における射度を求めることができる。

$$A_{s_j} \cdot W_{v,j} = A_{s_j} \cdot \rho_{v,j} \cdot E_{bv,s_j} + \rho_{v,j} \left(\sum_{i=1}^n D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot W_{v,i} + \sum_{i=n+1}^N D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot E_{bv,gi} \right) \quad (2 \cdot 29)$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{A_{s1}}{\rho_{v,1}} & \frac{1}{s_1 s_2} \\ \frac{1}{s_1 s_2} & -\frac{A_{s2}}{\rho_{v,2}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W_{v,1} \\ W_{v,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{A_{s1} \cdot \varepsilon_{v,1} \cdot E_{bv,s1}}{\rho_1} - s_1 g_1 \cdot E_{bv,g1} & \cdots & -s_1 g_n \cdot E_{bv,gn} \\ -\frac{A_{s2} \cdot \varepsilon_{v,2} \cdot E_{bv,s2}}{\rho_2} - s_2 g_1 \cdot E_{bv,g1} & \cdots & -s_2 g_n \cdot E_{bv,gn} \end{vmatrix} \quad (2 \cdot 34)$$

⑥非灰色ガスの温度分布で当該波数に対応した単色吸収係数での全交換面積を求める。

ふく射エネルギーの放射元を壁要素 i のみに限定して考える ($E_{bv,s_j} = 0 (j=1 \sim N, j \neq i)$) と、上式の両辺を $E_{bv,gi}$ で除した n 元の連立方程式の解を無次元射度 $W_{v,j}$ とし、壁要素間の全交換面積 $C_{v,(i \rightarrow j)}$ ($= \overline{S_i S_j}$) は式(2・31)で与えられる。同様にし

て、ガス要素 i が単独に放射する場合を考えると、壁要素 j あるいはガス要素 j との間の全交換面積 ($\overline{G_i S_j}$ 、 $\overline{G_i G_j}$) は、それぞれ式(2・32)、(2・33)で与えられる。

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \epsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} ({}_i W_{v,j} - \delta_{ij} \cdot \epsilon_{v,j}) \quad (2 \cdot 31)$$

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \epsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} \cdot {}_i W_{v,j} \quad (2 \cdot 32)$$

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = D_{v,(i \rightarrow j)} + \sum_{k=1}^n D_{v,(k \rightarrow j)} \cdot {}_i W_{v,j} \quad (2 \cdot 33)$$

⑦ 「③～⑥」の計算を全波数領域について計算してエネルギー式を解き、非灰色ガス要素の新たな温度分布を求める。

全ての波数領域におけるガス要素のエネルギー式は、壁要素数(この場合は=2)と m 個のガス要素について全交換面積を導入すると式(2・35)のように表わされる。式中、 $E_{bv,gj} = \sigma T_{gj}^4$ であることから単色吸収係数を用いて得られた $E_{bv,gj}$ を全ての波数領域について積分することで非灰色ガスの温度分布を求めることができる。

$$\begin{aligned} \text{(ガス要素)} \quad \int_0^{\infty} 4V_{gi} \cdot k_{v,gi} \cdot E_{bv,gi} dv &= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 C_{v,(sj \rightarrow gi)} \cdot E_{bv,sj} dv \\ &+ \int_0^{\infty} \sum_{j=3}^{2+m} C_{v,(gj \rightarrow gi)} \cdot E_{bv,gj} dv + q_{gi} \cdot V_{gi} \end{aligned} \quad (2 \cdot 35)$$

⑧ 非灰色ガスの温度分布が収束したか否かを判定する。

収束点近傍では $T_{g,old} \cong T_{g,new}$ であるので、 $k(T_{g,new}) \cong k(T_{g,old})$ を利用して式(2・39)から各繰り返し計算での修正後の温度分布 $T_{g,new}$ を求めることができる。全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g,old}$ と修正後の温度分布 $T_{g,new}$ との差を式(2・40)で求めて、このときの最大値を err と定義して収束の判定値とする。

$$T_{g,new} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{4V_g \cdot k(T_{g,old}) \cdot \sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{Q_{g,emi}(T_{g,old})} \right]^{1/4} \cdot T_{g,old} \quad (2 \cdot 39)$$

$$err = \max |(T_{g,old} - T_{g,new}) / T_{g,new}| \quad (2 \cdot 40)$$

⑨ 非灰色ガスの温度分布が収束するまでの繰り返し計算。

非灰色ガスの温度分布が⑧によって収束されていないと判定された場合には、修正後の温度分布 $T_{g,new}$ を用いて再度これらに対応した単色吸収係数 $k_{v,gj}$ を求める計算(③)に戻り、以下、収束判定を満たすまで繰り返し③～⑧までの計算を行う。

⑩壁要素の熱流束分布の計算。

非灰色ガスの温度分布が収束したならば、このときの温度分布と全交換面積を壁要素に関するエネルギー式である式(2・36)に代入することで壁面熱流束分布 q_{si} を得ることができる。

$$\begin{aligned}
 \text{(壁要素)} \quad \int_0^\infty \varepsilon_{v,i} \cdot A_{si} \cdot E_{b v, si} dv &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^2 C_{v, (sj \rightarrow si)} \cdot E_{b v, sj} dv \\
 &+ \int_0^\infty \sum_{j=3}^{2+m} C_{v, (gj \rightarrow si)} \cdot E_{b v, gj} dv - q_{si} \cdot A_{si}
 \end{aligned} \tag{2・36}$$

2.2 モンテカルロ法による解析手法

モンテカルロ法は、計算機によって発生させた乱数を繰り返し用いることで様々な現象を模擬することができる。モンテカルロ法が対象とする現象は、確率的なものでも確定的なものでもかまわず、解析対象の複雑さにも関係なく、さらに線形・非線形現象であっても同様な取り扱いが可能である。こうした柔軟性を持つことから、例えば、疲労寿命のき裂伝ば^[10,11]、構造システムの強度特性^[12,13,14,15,16]と言った工学的な問題の実用面に広く用いられている。このようにモンテカルロ法は、計算機の発達と共にミクロ・マクロの現象を問わずに広く利用されつつある手法である。

ふく射伝熱の分野において最初にモンテカルロ法の適用を行ったのは Howell^[24] らである。ここではふく射エネルギー輸送を、ガス分子あるいは固体壁原子から放射される多数の独立な光子の散乱と吸収の挙動を集積した現象として取り扱う。モンテカルロ法を適用する場合、この光子に相当する多数の独立なふく射エネルギー粒子を系内の各要素中から放射し、個々の散乱・吸収挙動を追跡した後にその量を集積することでふく射エネルギー輸送の物理的な現象を模擬することができる。

2.2.1 ふく射伝熱とモンテカルロ法

乱数の発生 (逆変換法)

本研究ではモンテカルロ法による確率的な事象をシミュレーションするのに、算術乱数の発生によって任意の統計分布をもつ乱数列を発生させる。この任意の統計分布をもつ乱数列の発生方法については種々あるが、ここでは逆変換法について解説する^[23]。

範囲 $[-\infty \sim b]$ で定義される関数 $f(x)$ において確率密度 $p(x)$ は式(2・41)で定義される。

$$p(x) = \frac{f(x)}{\int_{-\infty}^b f(x) dx} \tag{2・41}$$

$-\infty \leq \eta \leq b$ の間で定義される確率変数 η が確率密度 $p(\eta)$ をもつとき、式(2・42)の関係で定義される確率変数 ξ は区間 $[0,1]$ について一様分布することが知られている。したがって一様乱数 $\{\xi_i\}$ を発生して式(2・42)を満たす数列 $\{\eta_i\}$ を求めると、 $\{\eta_i\}$ は与えられた確率密度 $f(\eta)$ を満たす乱数列となる (式(2・43))。

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} p(x) dx \quad \dots\dots\dots(2\cdot42)$$

$$\int_{-\infty}^{\eta_i} p(x) dx = \xi_i \quad \dots\dots\dots(2\cdot43)$$

ここで式(2・42)に式(2・41)を代入すると式(2・44)となり、 ξ は関数 $f(x)$ の累積分布関数となる。

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} \left(\frac{f(x)}{\int_{-\infty}^b f(x) dx} \right) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\eta} f(x) dx}{\int_{-\infty}^b f(x) dx} \equiv F(\eta) \quad \dots\dots\dots(2\cdot44)$$

式(2・44)の逆関数 F^{-1} を考えると、式(2・45)の関係が得られることから、関数 $f(x)$ の確率密度 $p(x)$ に従った乱数列 $\{\eta_i\}$ が、関数 $f(x)$ の累積分布関数の逆関数 F^{-1} で得られることとなる。

$$\eta_i = F^{-1}(\xi_i) \quad \dots\dots\dots(2\cdot45)$$

固体からのふく射

先ず、灰色固体と仮定した壁要素から放射されるふく射エネルギーについてモンテカルロ法の適用を行う。壁要素の上に図 2-4 のような球面座標系を考えて、各々の壁要素からある個数のエネルギー粒子を均等に放射するときの放射方向を (θ, ϕ) で表すこととする。放射強度 I を用いて微小面積 dA から放射されるふく射エネルギーを考えると、ランベルトの余弦法則からふく射伝熱量 dq は次式で与えられる。

$$dq = I dA d\Omega \cos\theta \quad \dots\dots\dots(2\cdot46)$$

放射強度 I は、黒体および灰色体では放射方向 (θ, ϕ) に対して一定となる。式(2・46)の両辺を dA で除して、 $dq/dA=dE$ と表せば、

$$dE = I d\Omega \cos\theta \quad \dots\dots\dots(2\cdot47)$$

となり、これを全半球面について積分することで、

$$E = \int_{\Omega} I d\Omega \cos\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} I \cos\theta \sin\theta d\theta \quad \dots\dots\dots(2\cdot48)$$

と表わされる。

放射強度 I が放射方向によらず一定と仮定する灰色体では、

$$E = I \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = 2\pi I \left(\frac{1}{2} \sin^2\theta \right)_0^{\pi/2} = \pi I \quad \dots\dots\dots(2\cdot49)$$

となる。

また、灰色ガス中を通過するふく射エネルギー粒子の透過距離については、次式のビアの法則に従うように与えられる。

$$I = I_0 \exp(-ks) \quad \dots\dots\dots(2\cdot50)$$

全てのふく射エネルギー粒子は $\phi = 0 \sim 2\pi$ の間で一様に放射されるので、 ϕ 方向の放射角度を決定するには $0 \sim 1$ の間で発生する一様乱数 R_ϕ を用いて次のように置き換えることができる。

$$R_\phi = \phi / 2\pi \quad \dots\dots\dots(2\cdot51)$$

θ 方向の微小立体角 $d\Omega$ 内に面積 dA から放射されるふく射エネルギーはランベルトの余弦法則に従うので式(2・46)より $dq = I dA d\Omega \cos\theta$ と表されて、

$$d\Omega = r d\theta (r \sin\theta) \frac{d\phi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \quad \dots\dots\dots(2\cdot52)$$

となり、 dA から $\theta \sim \theta + d\theta$ の間に放射されるふく射エネルギーは、 $\phi = 0 \sim 2\pi$ まで積分すればよいので、

$$I dA \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi I dA \cos\theta \sin\theta d\theta \quad \dots\dots\dots(2\cdot53)$$

となる。

ここで、面積 dA から上半球方向に放射される全ふく射エネルギーは式(2・49)より、

$$E dA = \pi I dA \quad \dots\dots\dots(2\cdot54)$$

と与えられるので、式(2・53)を式(2・54)で除して放射角度が $\theta \sim \theta + d\theta$ の間に入る確率 $f(\theta)d\theta$ は次のように表すことができる。

$$f(\theta)d\theta = \frac{2\pi I dA \cos\theta \sin\theta}{\pi I dA} = 2 \cos\theta \sin\theta d\theta \quad \dots\dots\dots(2\cdot55)$$

式(2・55)を $0 \sim \theta$ まで積分したものは逆変換法によって式(2・56)に示すように $0 \sim 1$ の間の一様乱数 R_θ に置き換えることができる。

$$R_\theta = \int_0^\theta 2 \cos\theta \sin\theta d\theta = 1 - \cos^2\theta \quad \dots\dots\dots(2\cdot56)$$

式(2・56)、(2・51) より壁要素からのふく射エネルギー粒子の放射方向 (θ, ϕ) は次の式で表すことができる。

$$\theta = \cos^{-1}(1 - R_\theta)^{1/2} \quad \dots\dots\dots(2\cdot57)$$

$$\phi = 2\pi R_\phi \quad \dots\dots\dots(2.58)$$

このように、各エネルギー粒子の放射方向は、一様乱数 R_θ 、 R_ϕ を用いて決めることができる。

ガス要素あるいは壁要素から放射されたふく射エネルギー粒子が壁面に到達すると、そこで反射あるいは吸収が行われる。ふく射エネルギーは壁面に到達したとき、壁面の吸収率 α に相当する量が吸収され、 $(1-\alpha)$ に相当する量が反射される。ここで、吸収率 α は $0\sim 1$ の間の値であり、壁面が灰色の場合は吸収率 α と放射率 ε は等しくなる。ここで $0\sim 1$ の間の一様乱数 R_ε を用いて、壁面に到達した各エネルギー粒子の反射または吸収を以下のように判定することとする。

$$R_\varepsilon \leq \varepsilon \text{ のときは吸収} \quad \dots\dots\dots(2.59)$$

$$R_\varepsilon > \varepsilon \text{ のときは反射} \quad \dots\dots\dots(2.60)$$

この判定によって、壁面に到達したエネルギー粒子は ($\varepsilon = \alpha$) の割合で吸収され、 $(1-\varepsilon = 1-\alpha)$ の割合で反射される。また、反射エネルギーの放射角度は式(2.57)、式(2.58)を用いて再度決定される。

ガスからのふく射

灰色ガス体から放射されるふく射エネルギーにモンテカルロ法を適用する。前節の固体ふく射と同様に、放射元のガス要素から多数のふく射エネルギー粒子を放射させて、この軌跡を追跡する。図 2-5 はガスからの放射を表すモデルである。この図において ϕ 方向の放射は、エネルギー粒子が一様に ($\phi = 0\sim 2\pi$) の間に放射されるので、放射角度は壁面の場合と同様に $0\sim 1$ の間の一様乱数 R_ϕ を用いて次のように表すことができる。

$$R_\phi = \phi / 2\pi \quad \dots\dots\dots(2.61)$$

次に、 θ 方向の放射角度を決定しなくてはならないが、放射されるエネルギー粒子が $\theta \sim \theta + d\theta$ の間に入る確率 $f(\theta)d\theta$ は、

$$f(\theta)d\theta = \frac{1}{4\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta \quad \dots\dots\dots(2.62)$$

となる。したがって、式(2.62)を $0 \sim \theta$ まで積分し、この累積分布関数に対して前述のように逆変換法^[23]を適用すると、 $0\sim 1$ の間の一様乱数 R_θ を用いて次のように置き換えることができる。

$$R_\theta = \int_0^\theta \frac{1}{2} \sin\theta d\theta = \frac{1 - \cos\theta}{2} \quad \dots\dots\dots(2.63)$$

式(2.61)、(2.63)を用いることによって、ガス要素からのエネルギー粒子の放射方向 (θ, ϕ) は次式で表される。

$$\theta = \cos^{-1}(1 - 2R_\theta) \quad \dots\dots\dots(2.64)$$

$$\phi = 2\pi R_\phi \quad \dots\dots\dots(2.65)$$

このように、ガス要素から放射されるふく射エネルギー粒子の放射方向についても一様乱数 R_θ 、 R_ϕ で表される。さらにガス要素の形状が直方体の場合には、ふく射エネルギーの放射位置 (x_0, y_0, z_0) は各辺の長さを Δx 、 Δy 、 Δz とすると、一様乱数 R_1 、 R_2 、 R_3 を使うことで決定される。

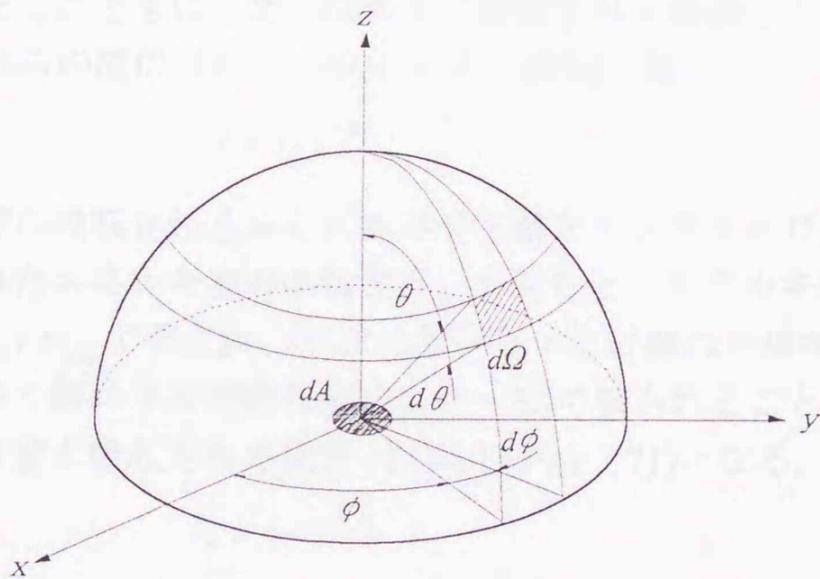


Fig.2-4 Radiation from wall

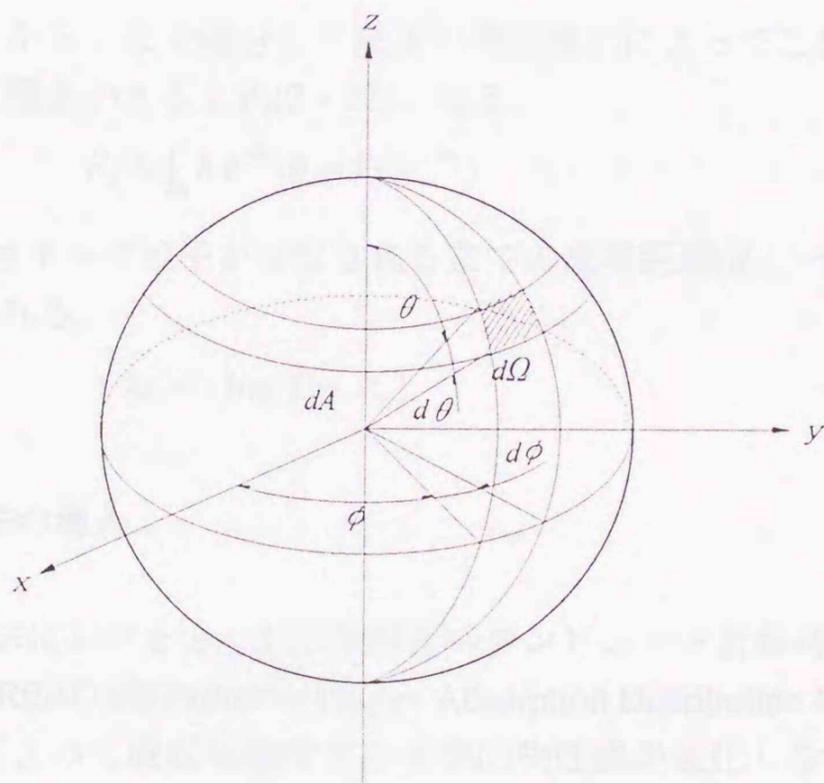


Fig.2-5 Radiation from gas

$$x_0 = x_c + \Delta x(0.5 - R_2) \quad \dots\dots\dots(2.66)$$

$$y_0 = y_c + \Delta y(0.5 - R_2) \quad \dots\dots\dots(2.67)$$

$$z_0 = z_c + \Delta z(0.5 - R_3) \quad \dots\dots\dots(2.68)$$

放射されたふく射エネルギーの放射強度を I_0 として、光学厚さを ks (k は吸収係数、 s は透過距離) としたときに、ガス媒体中に吸収されて減衰した後の放射強度を I とするならば、これらの関係は式(2.69)のビアの法則に従う。

$$I = I_0 e^{-ks} \quad \dots\dots\dots(2.69)$$

いま、ガス中に吸収されるふく射エネルギー量をモンテカルロ法に導入することを考える。放射されたエネルギー束の本数を N_{ray} とすると、エネルギー束 1 本あたりのふく射エネルギー量は I_0 / N_{ray} で表され、放射位置から s だけ離れた場所の微小距離 ds でのガス媒体中へのふく射エネルギー吸収量は式(2.70)で表されることから、微小距離 ds においてエネルギー束が吸収される確率 $f(s)ds$ は式(2.71)となる。

$$I_0 = k e^{-ks} ds \quad \dots\dots\dots(2.70)$$

$$f(s)ds = \frac{N_{ray} k e^{-ks}}{N_{ray}} ds = k e^{-ks} ds \quad \dots\dots\dots(2.71)$$

式(2.71)を 0 から s まで積分して前述の逆変換法によってこれを 0~1 の間の一様乱数 R_s を用いて置きかえると式(2.72)となる。

$$R_s = \int_0^s k e^{-ks} ds = 1 - e^{-ks} \quad \dots\dots\dots(2.72)$$

したがって、エネルギー粒子が吸収されるまでの光学距離は、一様乱数 R_s を用いると式(2.72)で表される。

$$ks = -\log_e(1 - R_s) \quad \dots\dots\dots(2.73)$$

2.2.2 READ 法の導入

READ 法の概要

モンテカルロ法におけるふく射伝熱解析のコンピュータ計算時間の短縮を行うのに谷口らによって READ 法(Radiative Energy Absorption Distribution Method)が提案されている^[17]。温度によって吸収係数などの光学的物性値が変化しないと言う解析条件の下に READ 法を適用させると、要素や系の幾何学的条件に則ったモンテカルロ計算を予め 1 度行えば温度分布の繰り返し収束計算の中にモンテカルロ計算を必要としないことから、大幅な演算時間の短縮化が可能となる。

READ 値の定義

ガス・壁の各要素でのふく射エネルギーの吸収量は、系内の他の全ての要素から放射されるふく射エネルギーについて合計したものである。そこで、系の壁要素またはガス要素のうち、ある要素 i に吸収されるふく射エネルギー量を $q_{emi,in,i}$ とし、各ガス要素と壁要素から放射されるふく射エネルギー量をそれぞれ $q_{emi,out,g}$ 、 $q_{emi,out,s}$ とすると、READ 値(=Rd)は考えている要素以外の $q_{emi,out}$ のうち、その要素に到達して吸収された割合を表す。READ 値は、モンテカルロ計算によって多数のふく射エネルギー粒子の軌跡を追跡することで、放射された粒子の総数に対応する各要素に伝達された割合をカウントすることで求められる。このようにして得られた READ 値を用いてエネルギー式を解くことでガスの温度分布と壁面熱流束を求めることができる。

2.2.3 決定論的計算方法の導入

モンテカルロ法による非灰色ガス系を対象としたふく射伝熱解析では、非灰色ガスが放射するふく射エネルギーを多数のエネルギー粒子に均等に分配し、それぞれの軌跡を追跡する。各粒子の軌跡を決定するためにはふく射エネルギー粒子の放射位置、放射方向、吸収されるまでに通過する光学距離および粒子の保有する波数を指定するために全波数領域を多数の微小な波数領域に分割したときの波数ステップ数の決定を 2.2.1 節と同様に乱数を用いて行う必要がある。これらの独立変数のうちで粒子の波数ステップを乱数を用いて全波数領域に渡って決定することにすると、各波数ステップについて灰色ガスと同様な計算を行う必要があることから解析時間が非常に長くなる。そこで波数ステップの取り扱いについては乱数によらずに規則的な決定を行うこととし、各々の波数ステップごとにふく射性ガス要素の放射する単色ふく射エネルギー量に対応させた数のエネルギー粒子を放射させるという決定論的計算方法を導入する^[7]。このように各波数ステップにおいて放射するふく射エネルギー粒子数を決定論的計算方法で扱う場合でも、ふく射エネルギー粒子の放射位置、放射方向そして光学距離といった確率変数とこの粒子の波数ステップの関係は互いに独立である。

非灰色ガスの波数ステップに上記のような決定論的計算方法が導入された場合、各単位波数幅あたりの波数 ν における非灰色ガスの微小体積 ΔV_i からのふく射エネルギー放射粒子数の決定は次式で表される。

$$N_{\nu,i} = (4k_i(\nu) \cdot E_{b\nu}(T_i) \cdot \Delta V_i) / dq \quad \dots\dots\dots(2.74)$$

ここで、 dq はふく射エネルギー粒子 1 個当たりの持つエネルギー量([W/個])を意味する。 dq の値の大きさは適度に設定する必要がある、過剰に大きくすると系内で放射されるエネルギー粒子数が過少となり解析精度の低下を招く。決定論的計算方法の導入は解析時間の短縮化に大きく貢献するが、個々のふく射伝熱解析系のケースに最適な dq の値を試算を繰り返すなどして、経験的に決める必要がある。

2.2.4 非灰色ガス系におけるエネルギー式

非灰色ガス系のエネルギー式は、ふく射平衡が成り立っている場合、ある波数ステップ ν におけるガス要素と壁要素のエネルギー式を全波数について積分することで次式で得ることができる。これらの式は各ガス要素、壁要素の全波数にわたるふく射エネルギーの流入・流出と、READ 値から表されるエネルギー式である。

$$\int_0^\infty q_{\nu,emi,i} d\nu = \int_0^\infty \sum_{gas} Rd_\nu \cdot q_{\nu,emi,g} d\nu + \int_0^\infty \sum_{wall} Rd_\nu \cdot q_{\nu,emi,s} d\nu + q_{gen} \quad \dots\dots\dots(2.75)$$

式(2.75)の左辺第1項は対象としている要素 i から放射されるふく射エネルギーを示し、右辺第1項は全てのガス要素から要素 i へのふく射伝熱を、また、右辺第2項は全ての壁要素から要素 i へのふく射伝熱を表す。また、右辺第3項はこの要素内での発熱項である。

要素 i から放射されたふく射エネルギーのうち、要素 j で吸収される割合を READ 値 ($Rd(i \rightarrow j)$) で表記し、ガス要素数を n 、壁要素数を m とすると、式(2.75)はガス要素、壁要素それぞれについて下式のように表わされる。

(ガス要素)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty 4V_{gi} \cdot k_{\nu,i} \cdot E_{b\nu,gi} d\nu \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_\nu(gj \rightarrow gi) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{\nu,gj} \cdot E_{b\nu,gj} d\nu \\ &+ \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_\nu(sj \rightarrow gi) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu,sj} \cdot E_{b\nu,sj} d\nu + q_{gi} \cdot V_{gi} \quad \dots\dots\dots(2.76) \end{aligned}$$

(壁要素)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty A_{si} \cdot \varepsilon_\nu \cdot E_{b\nu,si} d\nu + q_{si} \cdot A_{si} \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_\nu(gj \rightarrow si) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{\nu,gj} \cdot E_{b\nu,gj} d\nu \\ &+ \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_\nu(sj \rightarrow si) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu,sj} \cdot E_{b\nu,sj} d\nu \quad \dots\dots\dots(2.77) \end{aligned}$$

式(2.76)の左辺は、ガス要素 gi から放射されるふく射エネルギーを示し、右辺第1項は全てのガス要素から放射されたもののうち、ガス要素 gi で吸収されたふく射エネルギーを、第2項は全ての壁要素から放射されてガス要素 gi で吸収されたふく射エネルギーを示す。また、第3項はガス要素 gi 中の発熱を表す。

同様にして、式(2.77)の左辺第1項は壁要素 si から放射されるふく射エネルギーを表

し、第2項は壁要素 si への正味熱流束を示し、右辺第1項は全てのガス要素から放射されたもののうち、壁要素 si で吸収されたふく射エネルギーを、第2項は全ての壁要素から放射されて壁要素 si で吸収されたふく射エネルギーを示す。

これらのエネルギー式における $E_{b,v}$ が温度の関数であることから、これらの式を解くことでガスの温度分布を求めることができる。また、 q_{si} について解くことで壁要素の熱流束分布を求めることができる。

2.2.5 モンテカルロ法による非灰色ガスふく射伝熱解析の計算手順

- ① 初期値（非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧）および境界条件（壁面放射率の分布(= $\epsilon_{v,i}$)、壁面の温度分布(= T_{si})) を与える。
- ② 非灰色ガスの温度分布(= T_g)を仮定して与える。
- ③ 初期値で与えられた非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧条件の下で、非灰色ガスの温度分布で当該波数に対応した各ガス要素の単色吸収係数を求める。

この計算では式(2・20)に示す Elsasser の狭域バンドモデルを用いることとする。

$$k_{v,N_b} = \rho \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \exp \left(-\frac{v^*}{\omega} \right) \cdot \frac{\sinh(2\beta P_c)}{\cosh(2\beta P_c) - \cos(2\pi(v-v_0)/d_{N_b})} \quad (2\cdot20)$$

上式に、表 2-1 に示した Edwards らによる指数形広域バンドモデルのモデル係数を適用して温度(= T_g)と圧力(全圧(= P_s)と分圧(= P_c))による関係を与えて式(2・22)に示すような単色吸収バンドの加算によって任意波数の単色吸収係数分布を求める。

$$k_{v,g}(T_g, P_s, P_c) = \sum_{i=1}^{11} k_v(N_b) \quad (2\cdot22)$$

- ④ 各要素 i における当該波数での放射粒子数 $N_{v,i}$ を求める。

非灰色ガスの波数ステップに決定論的計算方法を導入し、式(2・74)によって各単位波数幅あたりの波数 v における非灰色ガスの微小体積 ΔV_i からのふく射エネルギーの放射粒子数を決定する。

$$N_{v,i} = (4k_i(v) \cdot E_{b,v}(T_i) \cdot \Delta V_i) / dq \quad (2\cdot74)$$

- ⑤ モンテカルロ法により、波数 v で放射元要素 i から $N_{v,i}$ 個のふく射エネルギー粒子を放射して、吸収されるガス要素の番号 j を求める。

エネルギー粒子が吸収される光学距離は一様乱数 R_s を用いると式(2・73)で表され、放射されたふく射エネルギー粒子がガス要素を通過するときに吸収されるガス要素番号 j を求める。

$$ks = -\log_e(1 - R_s) \quad (2.73)$$

- ⑥ モンテカルロ法により、波数 ν で放射元要素 i と他の要素 j との間の READ 値を求める。

放射元要素 i から放射されたふく射エネルギー粒子の軌跡を追跡して、他の要素 j に到達あるいは他の要素 j で吸収された個数をカウントして総数 $N_{\nu,i}$ 個との割合を計算することで READ 値を求める。

- ⑦ 「③～⑥」の計算を全波数領域について計算してエネルギー式を解き、非灰色ガス要素の新たな温度分布を求める。

ガス要素に関するエネルギー式(式(2.76))から、単色吸収係数を用いて得られた $E_{b\nu,gj}$ を全ての波数領域について積分することで非灰色ガスの全ての波数領域についての非灰色ガスの温度分布を求めることができる。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty 4V_{gi} \cdot k_{\nu,i} \cdot E_{b\nu,gi} d\nu \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_\nu(gj \rightarrow gi) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{\nu,gj} \cdot E_{b\nu,gj} d\nu \\ &+ \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_\nu(sj \rightarrow gi) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu,sj} \cdot E_{b\nu,sj} d\nu + q_{gi} \cdot V_{gi} \end{aligned} \quad (2.76)$$

- ⑧ 非灰色ガスの温度分布が収束したか否かを判定する。

$E_{b\nu,gj} = \sigma T_{gj}^4$ の関係から収束点近傍では $T_{g,old} \cong T_{g,new}$ であるので、 $k(T_{g,new}) \cong k(T_{g,old})$ を利用して式(2.39)から各繰り返し計算での修正後の温度分布 $T_{g,new}$ を求める。全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g,old}$ と修正後の温度分布 $T_{g,new}$ との差を式(2.40)で求めて、このときの最大値を err と定義して収束の判定値とする。

$$T_{g,new} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{4V_g \cdot k(T_{g,old}) \cdot \sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{Q_{g,emi}(T_{g,old})} \right]^{1/4} \cdot T_{g,old} \quad (2.39)$$

$$err = \max |(T_{g,old} - T_{g,new}) / T_{g,new}| \quad (2.40)$$

- ⑨ 非灰色ガスの温度分布が収束するまでの繰り返し計算。

非灰色ガスの温度分布が⑧によって収束されていないと判定された場合には、修正後の温度分布 $T_{g,new}$ を用いて再度これらに対応した単色吸収係数 $k_{\nu,gj}$ を求める計算(③)に戻り、以下、収束判定を満たすまで繰り返し③～⑧までの計算を行う。

⑩ 壁要素の熱流束分布の計算。

非灰色ガスの温度分布が収束したならば、このときの温度分布と全交換面積を式(2・77)に代入することで壁面熱流束分布 q_{si} を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty A_{si} \cdot \varepsilon_v \cdot E_{bv,si} dv + q_{si} \cdot A_{si} \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_v(gj \rightarrow si) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{v,gj} \cdot E_{bv,gj} dv \\ &+ \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_v(sj \rightarrow si) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,sj} \cdot E_{bv,sj} dv \end{aligned} \quad (2\cdot77)$$

図2-6に、READ法を導入した非灰色ガスふく射伝熱解析のフローチャートを示す。

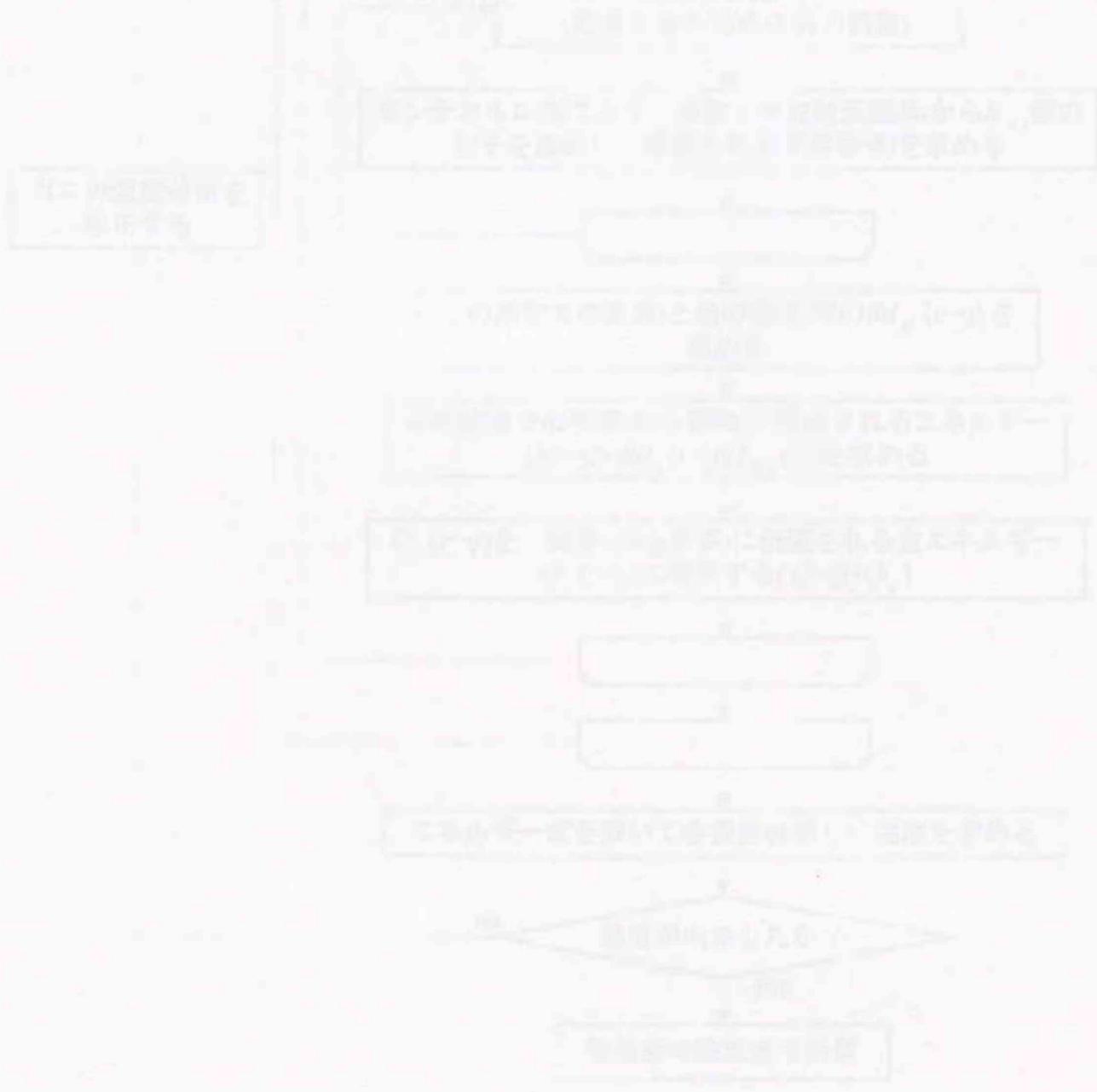


Fig. 2-6 Calculation flow (computer program using READ algorithm)

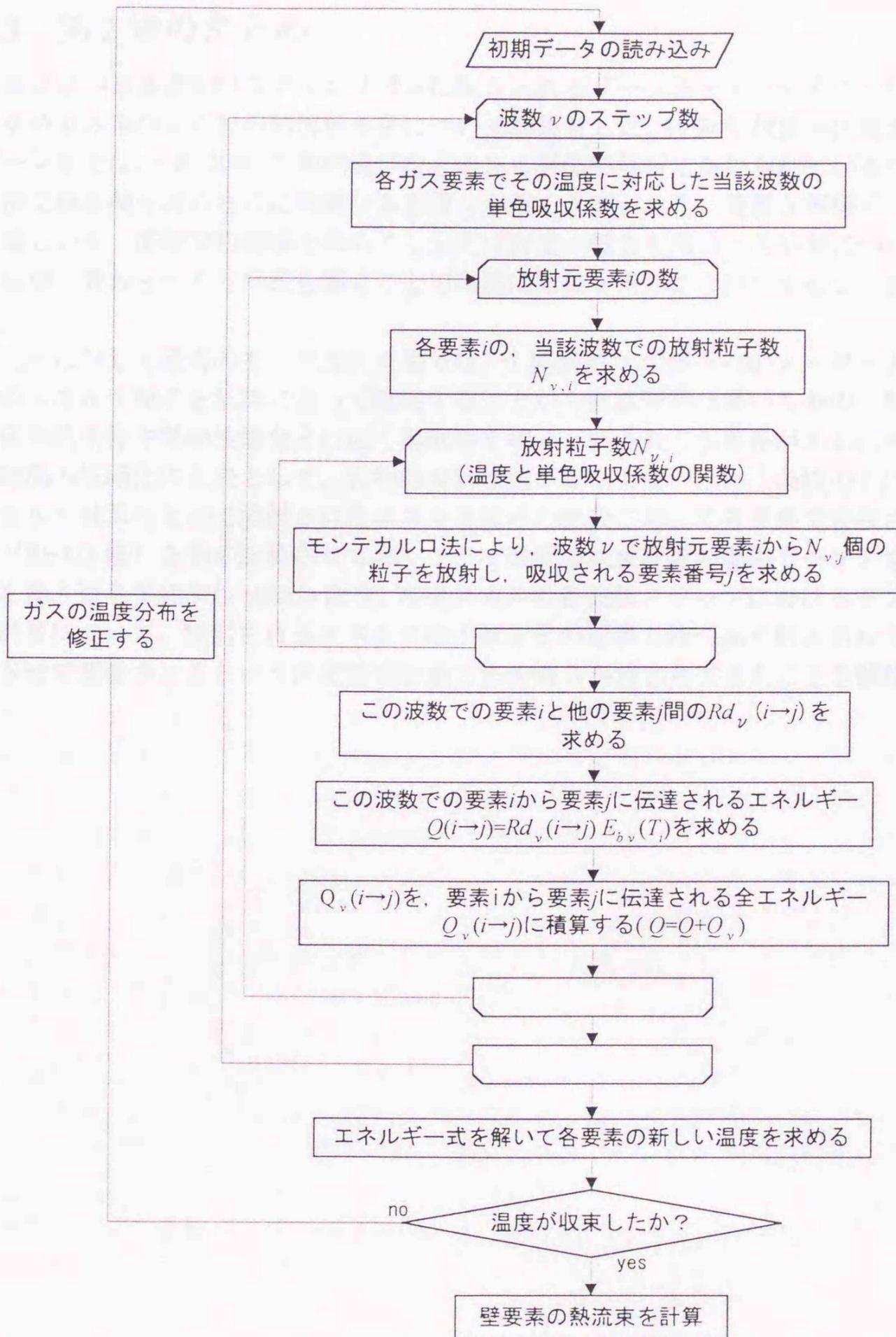


Fig.2-6 Calculation flow (nongray gas system using READ algorithm)

2.3 第2章のまとめ

後に述べる高速READアルゴリズムに取り入れるゾーン法とモンテカルロ法による非灰色ガス系のふく射伝熱解析手法について解説をした。1950年代後半に発表されたゾーン法では、それ以来、工業燃焼炉などのふく射伝熱解析に用いられているものの、直接交換面積を求めるのに複雑な多重積分を解く必要があり、複雑な解析系への適用は難しいが、直接交換面積を求めてしまえば射度の概念を用いて各要素について全交換面積で表わされる行列式を解くことで高速に結果を得ることができることを解説した。

これに対して通常のモンテカルロ法では、1要素当たり $10^4 \sim 10^5$ オーダーという多数のエネルギー粒子を乱数によって模擬することから計算時間は長いものの、解析系の幾何学的条件や熱物性値などに広く柔軟性を持つという大きな特長がある。そこで計算時間の短縮化の工夫として、光学的な物性値が変化しないという条件の下に、モンテカルロ計算によって放射されたエネルギー粒子の総数に対して各要素で吸収される割合 (READ 値) を予め計算しておくことで温度の収束計算の過程でモンテカルロ計算を繰り返さずにすむREAD法や、非灰色ガスの各波数ステップにおけるモンテカルロ計算について、放射されるエネルギー粒子数をその要素の持つふく射エネルギー量に対応させて変化させるという決定論的計算方法の導入が行われてきたことを解説した。

第3章 黒体壁に囲まれた非灰色ガス系における 高速 READ アルゴリズム

非灰色ガスを対象としたモンテカルロ法では、非灰色ガスを多くの単色吸収波数に分割して各々の波数ステップについて灰色ガスの場合と同じように計算を行い、この値を全波数領域について積分することで扱う。READ 値をモンテカルロ計算で求める従来の READ 法では、非灰色ガスの各波数ステップごとにガス要素の温度に対応させた単色吸収係数を求めた後に、系内の各要素間の READ 値を得、これをエネルギー式に代入して新たなガスの温度分布を求める。以上の計算をガスの温度分布が収束するまで各ガス要素の温度を修正させながら繰り返し行う。このアルゴリズムでは、多くのエネルギー粒子を放射するために計算時間のかかるモンテカルロ計算を各波数ステップごとに行うとともに、ガスの温度分布の繰り返し修正計算毎にこれを繰り返す必要があることから計算時間が非常に長くなる。また、前章で述べた READ 法では、それぞれの要素間のふく射エネルギー交換量を READ 値としてコンピュータメモリに記憶する必要があることから、メモリの実装量によって解析系（特に要素数）の制限が生じる。

本章では、黒体壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱解析において、上記のように非灰色ガスの各波数ステップ毎、および、ガスの温度分布の修正計算毎にモンテカルロ計算を行わないようなアルゴリズムを開発することで演算時間の短縮化を図る。開発したアルゴリズムは、事前に解析系の幾何学的情報をモンテカルロ計算で取得しておくことで、各波数ステップ毎の計算およびガスの温度分布の修正繰り返し計算にはモンテカルロ計算が含まれないことを特徴としている。これは、READ 値の計算を吸収係数に独立な部分と依存する部分とに分けて考えることで可能となる。

本章では、黒体壁に囲まれた非灰色ガス系のふく射伝熱解析について、従来のモンテカルロ法の課題であった多数回のモンテカルロ計算に起因する演算時間の長期化に対し、上記のような独特なアルゴリズムを構築することで演算時間の高速化を行うという新しい解析手法（以下、高速 READ 法と称す）について説明する。

3.1 高速 READ 法の演算手順

アルゴリズムの特徴

2.2.3 節で述べた決定論的計算方法を用いた従来の READ 法による非灰色ガスのふく射伝熱解析では、各エネルギー粒子の波数決定についても乱数を用いて行うという純粋なモンテカルロ法による解析に比べて 38~45 倍の高速化が達成されている^[18]。この手法では、上記のように演算時間の要するモンテカルロ計算を、(波数分割数) × (ガスの温度分布に対する収束計算の回数) 回行う必要がある。

図 3-1 は、黒体壁に囲まれた非灰色ガス系の 1 本のふく射エネルギー束の軌跡を表わしたものである。放射元要素 i 内の任意位置を出発点とするふく射エネルギー束は、任意方向へ直線的に進行し、その途中でガス要素 h を通過するとビアの法則にしたがって吸収され減衰していく。この場合放射元要素 i と離れた要素 j との間の READ 値は、

$$Rd_v(i \rightarrow j) = \left(\begin{array}{c} \text{要素 } i \text{ から放射された全ふく射エネルギー} \\ \text{のうち、要素 } j \text{ に到達する割合} \\ \text{(途中のガス要素で吸収がない場合に相当)} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{放射元要素 } i \text{ から} \\ \text{外部に出て行く割合} \end{array} \right) \\ \times \left(\begin{array}{c} \text{通過要素 } h \text{ での} \\ \text{透過率} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{要素 } j \text{ での} \\ \text{吸収率} \end{array} \right)$$

と表わすことができ、右辺の第 1 () 内はモンテカルロ計算から得られる系の幾何学的な情報のみで構成されているが、他の全ての () 内の計算には、幾何学的な情報と吸収係数を含む情報で構成されている。そこで各項の幾何学的な情報に関する部分については予めモンテカルロ計算を行って求めておき、吸収係数に関わる部分と独立にすることで、波数バンド毎やガスの温度分布の収束計算毎に行われていたモンテカルロ計算を省けるようになり、演算時間の短縮化が図れる。

演算手順の概要

高速 READ 法の演算は、以下の手順で行われる。

- ①モンテカルロ計算を黒体壁に囲まれたガス系に適用して多数のふく射エネルギー束の追跡を行い、この幾何学的な情報 (各要素中のエネルギー束の平均通過距離) をコンピュータメモリに記憶しておく。
- ②波数ステップとガス要素の温度から、各ガス要素の単色吸収係数を求める。(1 度目はガス温度分布の初期値を使用する)
- ③幾何学的情報と系内のガス温度分布に対応する吸収係数分布から、系内の各要素間のふく射エネルギー交換係数 (READ 値) を求める。
- ④エネルギー式を解き、新たなガス要素の温度分布を求める。

⑤以上の計算についてガスの温度分布が収束するまで、各ガス要素の温度を修正しながら繰り返し収束計算を行う。

⑥ガスの温度分布が収束した後に壁要素のエネルギー式を解き、壁面熱流束分布を求める。

3.2 非灰色ガス中におけるふく射エネルギーの吸収と減衰

ここでは、簡単のために図 3-1 に示すような黒体壁に囲まれた非灰色ガス系を対象として高速 READ 法によるふく射伝熱解析手法の説明をする。

モンテカルロ計算を用いた多数のふく射エネルギー束の追跡を行うにあたり、ここでは1本のふく射エネルギー束に着目して述べることにする。非灰色ガスのある波数ステップ ν において放射元要素 i 内の任意位置を出発点とするふく射エネルギー束は、任意方向へ直線的に進行し、その途中でガス要素 h (⑬,⑨,⑩,⑥,②,③)を通過するとビアの法則にしたがって吸収され減衰していく。いま、ガス要素⑬を放射元要素として、各々のガス要素 h の通過距離を $x_{13}, x_9, x_{10}, x_6, x_2, x_3$ で表わすことにする。

このとき放射元要素⑬から外に出てくるふく射エネルギー束の割合は、

$$\exp(-k_{\nu,13} \cdot x_{13}) \dots\dots\dots(3.1)$$

と表わされる。

同様にしてガス要素 h を通過するときの透過率は、

$$\exp(-k_{\nu,h} \cdot x_h) \dots\dots\dots(3.2)$$

で表される。ガス要素に吸収されずに残ったふく射エネルギーは、黒体壁で吸収される。

3.3 ガス要素の重み付き平均通過距離

解析系の幾何学的な情報を得るためにモンテカルロ法によって多数のふく射エネルギー束を追跡するが、この際にエネルギー束が各ガス要素を通過するときの「通過長さ」に着目する。これらは、ガス領域の幾何学的な形状に依存するものの、吸収係数に対して独立な情報である。いま、図 3-1 の系で要素 i 中の任意の点から任意の方向に放射されたエネルギー束のうち、ガス要素 h を通過した後、要素 j に到達するふく射エネルギー束の全本数を $n(i,j,h)$ 、これらのうち p 番目に放射されたエネルギー束が要素 h を通過する長さを $x_p(i,j,h)$ で表わすと、これらを平均した「平均通過距離」は式(3.3)で定義される。

$$\sum_{p=1}^{n(i,j,h)} x_p(i,j,h) / n(i,j,h) \dots\dots\dots(3.3)$$

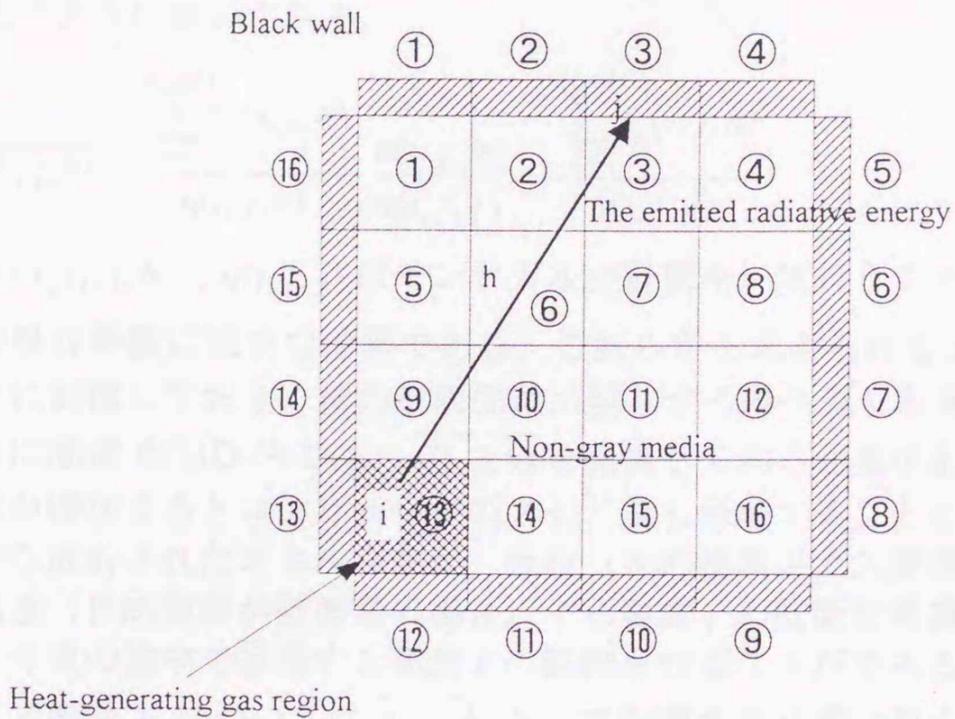


Fig.3-1 Trace the radiative energy bundles

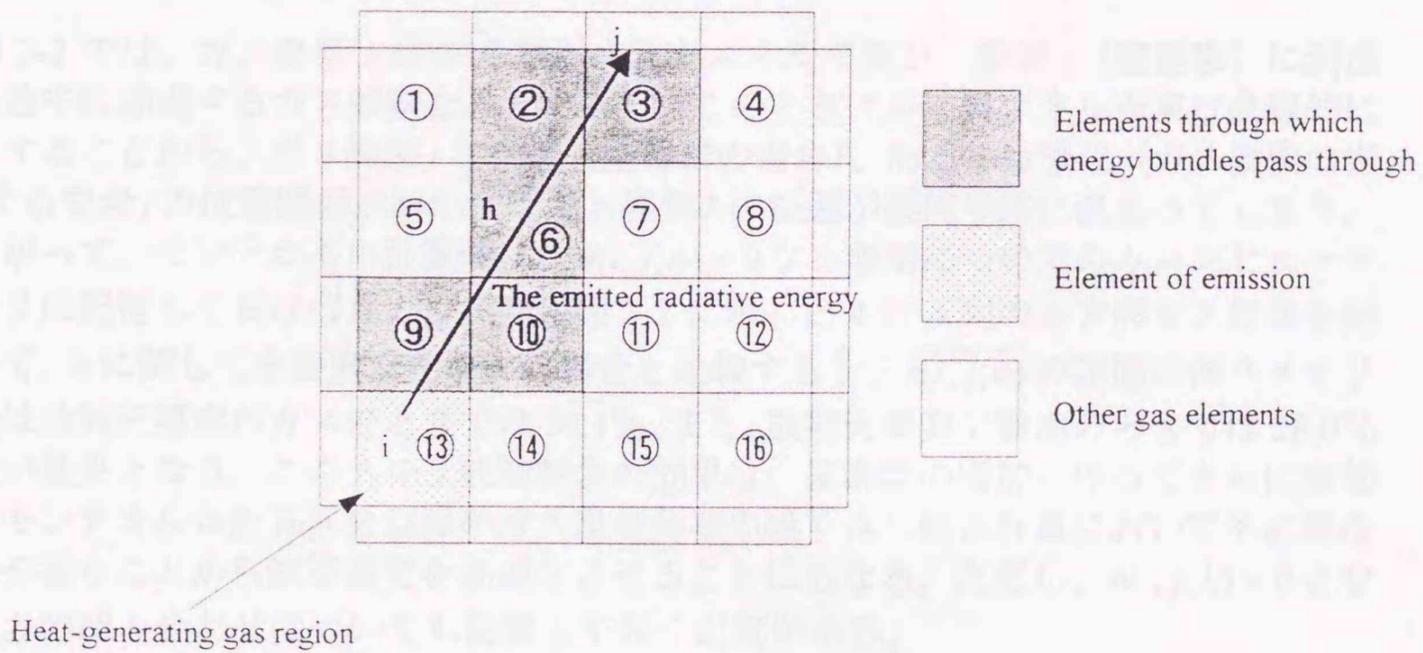


Fig.3-2 Radiative energy bundles passing through gas elements

次に要素 i から放射されて要素 j に到達する全てのふく射エネルギー束数 ($=n(i, j, j)$) と、このうちでガス要素 h を途中で通過するものとの割合 ($n(i, j, h)/n(i, j, j)$) を式(3・3)に乗じたものを、「重み付き算術平均長さ」と称するものとして、 $\overline{x(i, j, h)}$ で定義すると、次式のように表わされる。

$$\overline{x(i, j, h)} = \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, h)} \cdot \frac{n(i, j, h)}{n(i, j, j)} = \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, j)} \quad \dots\dots\dots(3\cdot4)$$

式(3・4)の $x_p(i, j, h)$ と $n(i, j, j)$ はモンテカルロ計算を一度行うことで求められるもので、ガスの吸収係数に独立な情報である。これらから求められる $\overline{x(i, j, h)}$ をコンピュータメモリに記憶しておき、後の吸収係数が関与する繰り返し収束計算に利用する。

このように高速 READ 法では、 $\overline{x(i, j, h)}$ を記憶しておく必要があることから、解析系の要素数が増加するとコンピュータのメモリ量も急増することになる。ただし放射元要素 i から放射されたエネルギー束が、吸収（目的要素がガス要素の場合）される、あるいは到達（目的要素が壁要素の場合）する要素 j の位置を考慮すると、直線的に進むエネルギー束の途中で通過する要素 h の範囲を知ることができる。そこで途中で通過しないガス要素 h については $\overline{x(i, j, h)}$ として記憶する必要は無く、このことによつて所要メモリ数の増加が抑えられると共に、以降の READ 値を計算するのの際して無駄な要素間の演算を省略することができる。

3.4 記憶すべき平均通過距離の数の削減

図 3-2 では、ガス要素 i (13) から放射されたエネルギー束が、要素 j (壁要素) に到達する途中で通過するガス要素を h とすると、このときにふく射エネルギー束は直線的に進行することから、ガス要素 i と到達（壁要素の場合）、あるいは吸収（ガス要素の場合）する要素 j の位置関係がわかればガス要素 h の範囲が幾何学的に決まってしまう。したがって、モンテカルロ計算時に、 $n(i, j, h) \neq 0$ なる要素についてのみコンピュータメモリに記憶しておけば良い。実際に図 3-2 に示した 4 行 4 列の正方形ガス要素を例として、 h に関して全要素を記憶する場合と比較すると、 $\overline{x(i, j, h)}$ の記憶に伴うメモリ容量は放射元要素がガスのときでは 30.1%、また、放射元要素が壁面のときでは 28.0% で良い結果となる。このメモリ低減割合の効果は、要素数の増加に伴ってさらに増加し、モンテカルロ計算部分以降のガス温度分布の繰り返し修正計算において不必要な計算を省くことから演算速度を高速化させることにもなる。ただし、 $n(i, j, h) = 0$ となる i, j, h の組み合わせについても記憶しておく必要がある。

3.5 高速 READ 法によるふく射交換量

ふく射伝熱解析で、各要素間のふく射エネルギー交換量を求める際に使用する READ 値は、前述したように要素 i から放射された全ふく射エネルギー束のうち、要素 j に到達し、吸収される割合を示すものとして定義される。ガス要素 i から放射されてガス要素 j を通過するふく射エネルギー束が途中に通過する要素 h 内で受ける減衰については、3.1.1 節で述べたビアの法則を適用することとすると、黒体壁系での READ 値は式 (3・5) のように書ける。

$$Rd_v(i \rightarrow j) = \frac{n(i, j, j)}{N_{ray}} \left[1 - \exp(-k_{v,j} \cdot \overline{x(i, j, j)}) \right] \cdot \sum_{p=1}^{n(i, j, h)} \exp(-k_{v,j} \cdot x_p(i, j, h)) \quad \dots\dots(3 \cdot 5)$$

ここで、上式の右辺 $n(i, j, j)/N_{ray}$ の項は、要素 i から放射された全ふく射エネルギー束数 N_{ray} のうち、要素 j に到達する本数の割合である。右辺 $[1 - \exp(-k_{v,j} \cdot \overline{x(i, j, j)})]$ の項は、要素 j に入ってきたふく射エネルギー粒子が要素 j で吸収される割合を表し、右辺 $\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} \exp(-k_{v,j} \cdot x_p(i, j, h))$ の項は、要素 i と要素 j の間のガス要素 h を通過するときの透過率を表す。

いま、ビアの法則を表す $\exp(-k_{v,h} \cdot x_h)$ をテイラー展開すると、式(3・6)のように書ける

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{n(i, j, h)} \exp(-k_{v,h} \cdot x_p(i, j, h)) \\ &= \sum_{p=1}^{n(i, j, h)} \left[1 - k_{v,h} \cdot x_p(i, j, h) + \frac{(k_{v,h} \cdot x_p(i, j, h))^2}{2} - \dots \right] \\ &= n(i, j, h) - k_{v,h} \cdot \sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h) + \frac{\left(k_{v,h}^2 \cdot \sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p^2(i, j, h) \right)}{2} - \dots \quad \dots\dots(3 \cdot 6) \end{aligned}$$

さらに上式の2次の項から先を切り捨てると、次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n(i, j, h)} \exp(-k_{v,h} \cdot x_p(i, j, h)) &\approx n(i, j, h) \cdot \left[1 - k_{v,h} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, h)} \right] \\ &= n(i, j, h) \left(1 - k_{v,h} \cdot \overline{x(i, j, h)} \right) \quad \dots\dots(3 \cdot 7) \end{aligned}$$

同様にして $\exp(-k_{v,h} \cdot \overline{x(i, j, h)})$ をテイラー展開して、2次以降の項を切り捨てると、

$\exp(-k_{v,h} \cdot \overline{x(i,j,h)}) \approx (1 - k_{v,h} \cdot \overline{x(i,j,h)})$ という関係にあるから、式(3・7)との比較より、次の近似式が成り立つ。

$$\sum_{p=1}^{n(i,j,h)} \exp(-k_{v,h} \cdot x_p(i,j,h)) \approx n(i,j,h) \cdot \exp(-k_{v,h} \cdot \overline{x(i,j,h)}) \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 8)$$

従って、m を全ガス要素数として、式(3・7)、(3・8)を用いて式(3・5)を書きかえると、黒体壁系での READ 値は次式で表される。

$$\begin{aligned} Rd_v(i \rightarrow j) &= \frac{n(i,j,j)}{N_{ray}} \left[1 - \exp(-k_{v,j} \cdot \overline{x(i,j,j)}) \right] \cdot \sum_{p=1}^{n(i,j,h)} \exp(-k_{v,j} \cdot x_p(i,j,h)) \\ &\approx \frac{n(i,j,j)}{N_{ray}} \left[1 - \exp(-k_{v,j} \cdot \overline{x(i,j,j)}) \right] \cdot \prod_{h=1(\neq j)}^m \exp(-k_{v,h} \cdot \overline{x(i,j,h)}) \quad \dots\dots(3 \cdot 9) \end{aligned}$$

式(3・9)の右辺第2式では、式(3・6)において2次の項から先を切り捨てたテイラー展開を導入したことから READ 値の精度に影響が生じる。特に放射元要素内での吸収量はそれ以外の要素で吸収される量に比べて大きいことから、READ 値の精度に大きな影響を与えることになる。したがって、放射元要素のふく射エネルギーの吸収・放射について次項で述べるような近似式を導入することとする。

3.6 放射元要素における近似式の導入

放射元要素 i から吸収されずにその外部に出てくるふく射エネルギーの割合は、テイラー展開の2次以降の項を切り捨てて近似させると $[1 - \exp(-k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})]$ で表される。これについては次の近似式 $F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})$ で置き換えて、精度を高めることを検討する [23]。

$$F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) \equiv \frac{1}{n(i,j,i)} \sum_{p=1}^{n(i,j,i)} \left[\exp(-k_{v,i} \cdot x_p(i,j,i)) \right] \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 10)$$

近似式 $F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})$ は、ふく射エネルギー束の平均通過長さ \bar{x} と吸収係数の積で定義した平均光学厚さの関数である。ここでは図 3-1 に示すような4行4列に正方形のガス要素が並ぶ系について、表 5-1 に示すような水蒸気、二酸化炭素、および窒素から成る混合ガスの単色吸収係数を $0.001 \sim 2000 \text{ m}^{-1}$ まで変化させて、モンテカルロ計算により、 $F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})$ と $(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})$ との関係調べる。 $i=1, j=2 \sim 16$ としたときのこの結果を図 3-3 に示す。ここで、この図から、放射されたエネルギー束の行き先であるガス要素番号 j が変わっても F と $k \cdot \bar{x}$ の関係はほぼ一本の曲線上に乗ることがわかる。したがって、図 3-3 より、 $F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})$ を次式の最小二乗法による3次の多項式近似で表すこととする。

$$F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) \cong a_0 + a_1(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) + a_2(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})^2 + a_3(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})^3 \dots\dots\dots(3 \cdot 11)$$

$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < -2.5$	$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$-2.5 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 0.0$	$a_0 = 0.486, a_1 = -0.711$ $a_2 = -0.343, a_3 = -0.057$
$0.0 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 2.5$	$a_0 = 0.498, a_1 = -0.744$ $a_2 = 0.384, a_3 = -0.067$
$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) > 2.5$	$a_0 = 1,$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

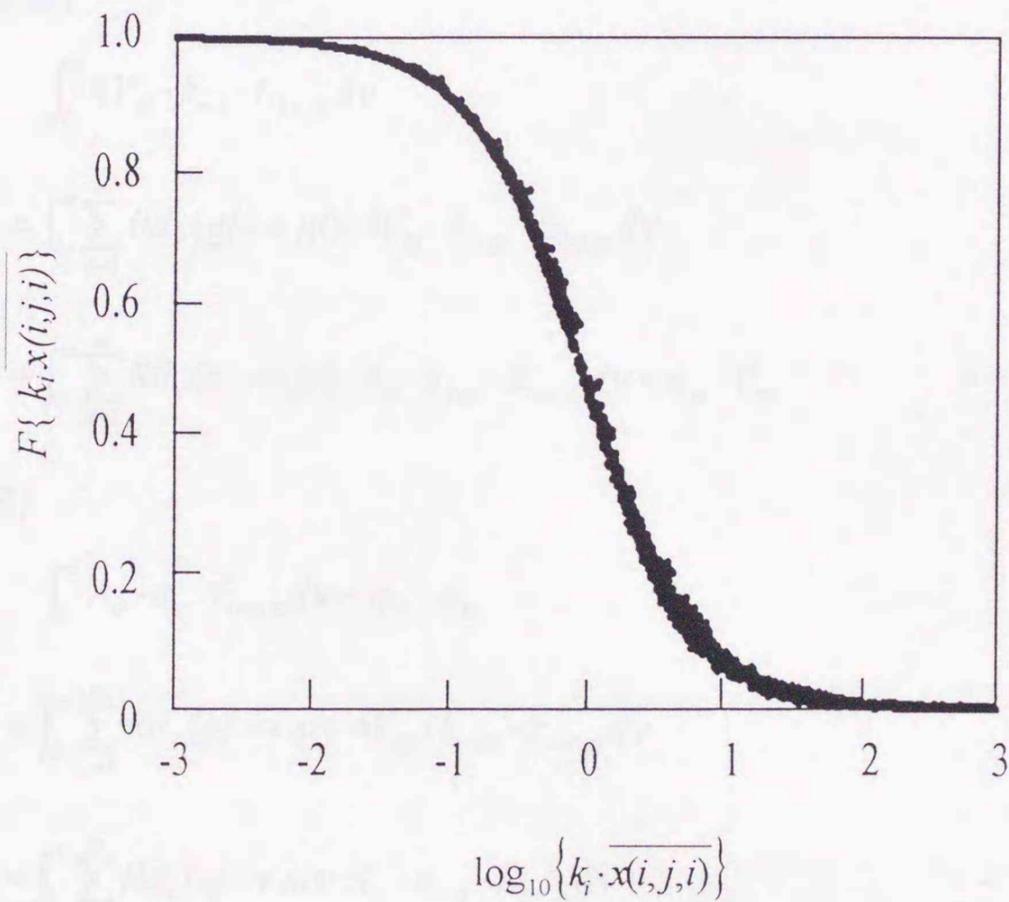


Fig.3-3 Fraction of radiative energy escaping from source element

以上から、式(3・9)中の放射元要素内での吸収項を式(3・11)で置き換えることにより、黒体壁系における READ 値に関して式(3・12)が得られる。

$$\begin{aligned}
 Rd_v(i \rightarrow j) = & \frac{n(i, j, j)}{N_{ray}} \left[1 - \exp(-k_{v,j} \cdot \overline{x(i, j, j)}) \right] \\
 & \cdot F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i, j, i)}) \cdot \prod_{h=1(\neq i, j)}^m \exp(-k_{v,h} \cdot \overline{x(i, j, h)}) \quad \dots\dots(3 \cdot 12)
 \end{aligned}$$

3.7 エネルギー式

高速 READ 法のエネルギー式は、第2章 2.2.4 節の READ 法を導入したモンテカルロ法と同様に、ガス要素の数を n 個、壁要素の数を m 個とすると、ある波数領域 ν におけるガス要素 gi 、壁要素 si の各エネルギー式は、全波数について積分することで得ることができる。要素 i からふく射エネルギーが放射されて要素 j で吸収されるとき、これを READ 値 $Rd_v(i \rightarrow j)$ で表記すると、エネルギー式は以下で表わされる。

(ガス要素)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty 4V_{gi} \cdot k_{v,i} \cdot E_{b\nu,gi} d\nu \\
 = & \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_v(gj \rightarrow gi) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{v,gj} \cdot E_{b\nu,gj} d\nu \\
 & + \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_v(sj \rightarrow gi) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu,sj} \cdot E_{b\nu,sj} d\nu + q_{gi} \cdot V_{gi} \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 13)
 \end{aligned}$$

(壁要素)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty A_{si} \cdot \varepsilon_\nu \cdot E_{b\nu,si} d\nu + q_{si} \cdot A_{si} \\
 = & \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_v(gj \rightarrow si) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{v,gj} \cdot E_{b\nu,gj} d\nu \\
 & + \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_v(sj \rightarrow si) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu,sj} \cdot E_{b\nu,sj} d\nu \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 14)
 \end{aligned}$$

3.8 収束計算

ガス温度分布の修正繰り返し計算

高速 READ 法における非灰色ガスの温度分布を求める計算では、第 2 章 2.1.7 節で解説したゾーン法やモンテカルロ法の場合と同様に、ガス要素に関するエネルギー式(式(2・13))の E_{b_v} に含まれる非灰色ガスの温度分布について単色吸収係数を修正しつつ収束するまで繰り返し計算を行う。このとき、あるガス要素の修正後の温度分布 $T_{g,new}$ は、修正前の温度分布 $T_{g,old}$ から、

$$Q_{g,emi}(T_{g,new}) = Q_{g,abs}(T_{g,old}) \quad \dots\dots\dots(3\cdot15)$$

が成立するように決定する。 $Q_{g,emi}(T_{g,new})$ は適当な平均吸収係数 k を用いると $4V_g \cdot k(T_{g,new}) \cdot \sigma T_{g,new}^4$ と書けるので、式(3・15)は式(3・16)に書きかえられる。

$$4V_g \cdot k(T_{g,new}) \cdot \sigma T_{g,new}^4 = Q_{g,abs}(T_{g,old}) \quad \dots\dots\dots(3\cdot16)$$

ここで、収束点近傍では $T_{g,old} \cong T_{g,new}$ であるので、 $k(T_{g,new}) \cong k(T_{g,old})$ を利用して式(3・16)は次式のように変形される。

$$T_{g,new} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{4V_g \cdot k(T_{g,old}) \cdot \sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{Q_{g,emi}(T_{g,old})} \right]^{1/4} \cdot T_{g,old} \quad \dots\dots\dots(3\cdot19)$$

上式から各繰り返し計算での修正後の温度分布 $T_{g,new}$ を求めることができる。

ガスの温度分布を求める繰り返し収束計算の度に、全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g,old}$ と修正後の温度分布 $T_{g,new}$ との差を式(3・20)で求め、このときの最大値を err と定義して収束の判定値とする。

$$err = \max |(T_{g,old} - T_{g,new}) / T_{g,new}| \quad \dots\dots\dots(3\cdot20)$$

過緩和の導入

ガスの温度分布を修正しつつ収束するまで繰り返す反復計算について過緩和^[21]を取り入れて、解析時間の短縮化を図ることができる。工藤らは、反復計算ごとに計算される各ガス要素の修正温度について過緩和を導入しており、この場合、式(3・19)を次式のように書き換える。

$$T_{g,new} = \left[\frac{Q_{g,abs}(T_{g,old})}{Q_{g,emi}(T_{g,old})} \right]^{a/4} \cdot T_{g,old} \quad \dots\dots\dots(3\cdot21)$$

上式の a は加速係数を表わしており、過緩和を行う際には 1 よりも大きな値を用いる。一般的に過緩和で使用される加速係数は、解析系や解析条件などの問題の性質に依存することから、最適値を決める方法は無いものとされている。そこで計算の試行を繰り返すことで加速係数の最適値を見つける方法を取ることが多い。工藤らは媒体要素の光学厚さ(=Planck の平均吸収係数×媒体の厚さ)と加速係数 a の値について整理しており、光学厚さが大きい場合では自己吸収量が増加することから、式(3・21)の右辺の括弧内の値が 1 に近くなり加速係数 a を大きくとっても反復計算の発散はし難くなるという報告をしている¹⁷⁾。

3.9 繰り返し計算の加速化と演算手順

ステップ繰り返し計算の加速化

本解析では全波数を多数の波数ステップに分割しており、個々のステップの吸収係数を求めて交換エネルギー量を計算し、これを積算して全波数域の結果を得ている。また、吸収係数は温度の関数であるので、相互に温度が異なる全てのガス要素について波数ステップ数の繰り返し計算を行っていることから、時間のかかる要因となっている。そこでこの部分の計算時間を短縮化するために吸収係数の値が零の場合、および求めるガスの温度分布にそれほど影響しない程度に小さな場合について吸収バンド外の波数におけるステップをあらかじめ特定し、この部分の繰り返し計算を省略することにする。

図 3-4 は、温度が 800、1000、1600(K)の場合に対する吸収係数の値を $0 \sim \nu$ まで積分したものである。したがって、図中、水平の線状部分は吸収係数が零、若しくは零に近い値をとる波数領域に対応している。図に示す楕円で囲んだ領域は吸収係数バンドのピークを含む部分に対応し、この図では傾きの変化として表される。そこで、吸収係数の値を更新するとき、その値が零、若しくは、図 3-4 中の傾きが下記の式(3・22)で表されるしきい値より小さな場合を特定し、波数ステップの繰り返し計算から除くこととした。このときのしきい値 S' は、ガスの温度分布を求める繰り返し収束計算の反復回数を $LOOP$ として次式で定義する。

$$S' = A \times err / LOOP \quad \dots\dots\dots(3 \cdot 22)$$

式(3・22)中の err はガスの温度分布を求める繰り返し収束計算の度に、全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g,old}$ と修正後の温度分布 $T_{g,new}$ との差は式(3・19)で求められ、このときの最大値を式(3・20)で示したように $err = \max |(T_{g,old} - T_{g,new}) / T_{g,new}|$ と定義している。

しきい値 S' は、ガスの温度分布を求める収束計算の回数を重ねるにしたがって、また、ガス要素の修正前と修正後の温度の差が 0 に収束するにしたがって小さな値とな

ることから、計算する波数ステップの数が増加し、精度も上がる。

高速 READ 法による黒体壁に囲まれた非灰色ガスふく射伝熱解析の計算手順

- ① 初期値（非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧）および境界条件（壁面放射率の分布(= $\varepsilon_{v,i}$)、壁面の温度分布(= T_{si})) を与える。
- ② 非灰色ガスの温度分布(= T_{gi})を仮定して与える。
- ③ 各要素から N_{ray} 個のふく射エネルギー粒子を放射して、モンテカルロ法により吸収係数には依存しない READ 値の形状依存部分を計算する。

このとき、要素 i から放射されて要素 j に到達する全てのふく射エネルギー束数(= $n(i, j, h)$) と、このうちでガス要素 h を途中で通過するものとの割合(= $n(i, j, h)/n(i, j, j)$) を式(3・3)に乗じて、式(3・4)で定義される $\overline{x(i, j, h)}$ (「重み付き算術平均長さ」) をコンピュータのメモリに記憶しておく

$$\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h) / n(i, j, h) \quad (3 \cdot 3)$$

$$\overline{x(i, j, h)} = \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, h)} \cdot \frac{n(i, j, h)}{n(i, j, j)} = \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, j)} \quad (3 \cdot 4)$$

- ④ 初期値で与えられた非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧条件の下で、非灰色ガスの温度分布で当該波数に対応した各ガス要素の単色吸収係数を求める。

この計算は 2.1.8 節で述べたように、式(2・20)に示した Elsasser の狭域バンドモデルを用いて行う。

$$k_{v, N_b} = \rho \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \exp \left(- \frac{v^*}{\omega} \right) \cdot \frac{\sinh(2\beta P_c)}{\cosh(2\beta P_c) - \cos(2\pi(v - v_0)/d_{N_b})} \quad (2 \cdot 20)$$

上式に、表 2-1 に示した Edwards らによる指数形広域バンドモデルのモデル係数を適用して温度(= T_g) と圧力(全圧(= P_s) と分圧(= P_c)) による関係を与えて式(2・22)に示すような単色吸収バンドの加算によって任意波数の単色吸収係数分布を求める。

$$k_{v, gj}(T_g, P_s, P_c) = \sum_{i=1}^{11} k_v(N_b) \quad (2 \cdot 22)$$

- ⑤ READ 値の形状依存部分 (③で計算されたもの) と単色吸収係数分布により、当該波数 ν での放射元要素 i と他の要素 j との間の READ 値 ($Rd_\nu(i \rightarrow j)$) を式 (3・12) から求める。

$$Rd_\nu(i \rightarrow j) = \frac{n(i, j, j)}{N_{ray}} \left[1 - \exp\left(-k_{\nu, j} \cdot \overline{x(i, j, j)}\right) \right] \cdot F\left(k_{\nu, i} \cdot \overline{x(i, j, i)}\right) \cdot \prod_{h=1(\neq i, j)} \exp\left(-k_{\nu, h} \cdot \overline{x(i, j, h)}\right) \quad (3 \cdot 12)$$

- ⑥ 「④～⑥」の計算を全波数領域について計算してエネルギー式を解き、非灰色ガス要素の新たな温度分布を求める。

ガス要素に関するエネルギー式 (式(3・13)) から、単色吸収係数を用いて得られた $E_{b\nu, gi}$ を全ての波数領域について積分することで非灰色ガスの全ての波数領域についての非灰色ガスの温度分布を求めることができる。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty 4V_{gi} \cdot k_{\nu, i} \cdot E_{b\nu, gi} d\nu \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^n Rd_\nu(gj \rightarrow gi) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{\nu, gj} \cdot E_{b\nu, gj} d\nu \\ &+ \int_0^\infty \sum_{j=1}^m Rd_\nu(sj \rightarrow gi) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu, sj} \cdot E_{b\nu, sj} d\nu + q_{gi} \cdot V_{gi} \end{aligned} \quad (3 \cdot 13)$$

- ⑦ 非灰色ガスの温度分布が収束したか否かを判定する。

第2章の各解析手法と同様に、 $E_{b\nu, gj} = \sigma T_{gj}^4$ の関係から収束点近傍では $T_{g, old} \cong T_{g, new}$ であるので、 $k(T_{g, new}) \cong k(T_{g, old})$ を利用して式(2・39)から各繰り返し計算での修正後の温度分布 $T_{g, new}$ を求める。全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g, old}$ と修正後の温度分布 $T_{g, new}$ との差を式(2・40)で求めて、このときの最大値を err と定義して収束の判定値とする。

$$T_{g, new} = \left[\frac{Q_{g, abs}(T_{g, old})}{4V_g \cdot k(T_{g, old}) \cdot \sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{Q_{g, abs}(T_{g, old})}{Q_{g, emi}(T_{g, old})} \right]^{1/4} \cdot T_{g, old} \quad (2 \cdot 39)$$

$$err = \max \left| (T_{g, old} - T_{g, new}) / T_{g, new} \right| \quad (2 \cdot 40)$$

- ⑧ 非灰色ガスの温度分布が収束するまでの繰り返し計算。

非灰色ガスの温度分布が⑦によって収束されていないと判定された場合には、修正後の温度 $T_{g,new}$ を用いて再度これらに対応した単色吸収係数 $k_{v,gj}$ を求める計算(④)に戻り、以下、収束判定を満たすまで繰り返し④～⑧までの計算を行う(この繰り返し計算にはモンテカルロ計算は含まれない)。

⑨ 壁要素の熱流束分布の計算。

非灰色ガスの温度分布が収束したならば、このときの温度分布と全交換面積を式(3・14)に代入することで壁面熱流束分布 q_{si} を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} A_{si} \cdot \varepsilon_v \cdot E_{bv,si} dv + q_{si} \cdot A_{si} \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^n Rd_v(gj \rightarrow si) \cdot 4V_{gj} \cdot k_{v,gj} \cdot E_{bv,gj} dv \\ &+ \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^m Rd_v(sj \rightarrow si) \cdot A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,sj} \cdot E_{bv,sj} dv \end{aligned} \quad (3 \cdot 14)$$

図 3-5 に、黒体壁に囲まれた高速 READ 法による非灰色ガスふく射伝熱解析のフローチャートを示す。

3.10 第 3 章のまとめ

第 3 章では、黒体壁に囲まれた非灰色ガス系のふく射伝熱解析を行う高速 READ アルゴリズムについて、そのねらい、演算手順、そして演算方法を中心に解説した。ふく射熱伝達が中心となる高温燃焼炉などの実設計に従来の READ 法を適用すると、演算時間の長さが課題となることから、アルゴリズム中で最も演算時間の要するモンテカルロ計算部分を省くことを特徴とする解析手法を解説した(高速 READ 法)。

本手法では、READ 値を求めるのに吸収係数とは独立な解析系の幾何学的情報部分(通過距離)と吸収係数に依存する部分とを分離し、前部についてはモンテカルロ計算を 1 度行い得られた情報を記憶しておき、後部については各波数ステップについて先に求めた幾何学的情報を用いて Rd_v 値を求め、これを全波数にわたって積分した後にエネルギー式を解いて新しいガスの温度分布を得るものである。

Rd_v 値を求める際に、放射元要素から出て来るふく射エネルギー量についてテイラー展開近似を導入していることから、放射元であるガス要素中に吸収されるエネルギー割

合については、別途、全吸収係数領域についてモンテカルロ計算で得た最小二乗近似式を利用している。

さらに、ガスの温度分布が収束するまで繰り返される温度分布の修正計算については過緩和を導入し、波数ステップの繰り返し計算についてはその加速化を導入することで解析時間の短縮化を図った。

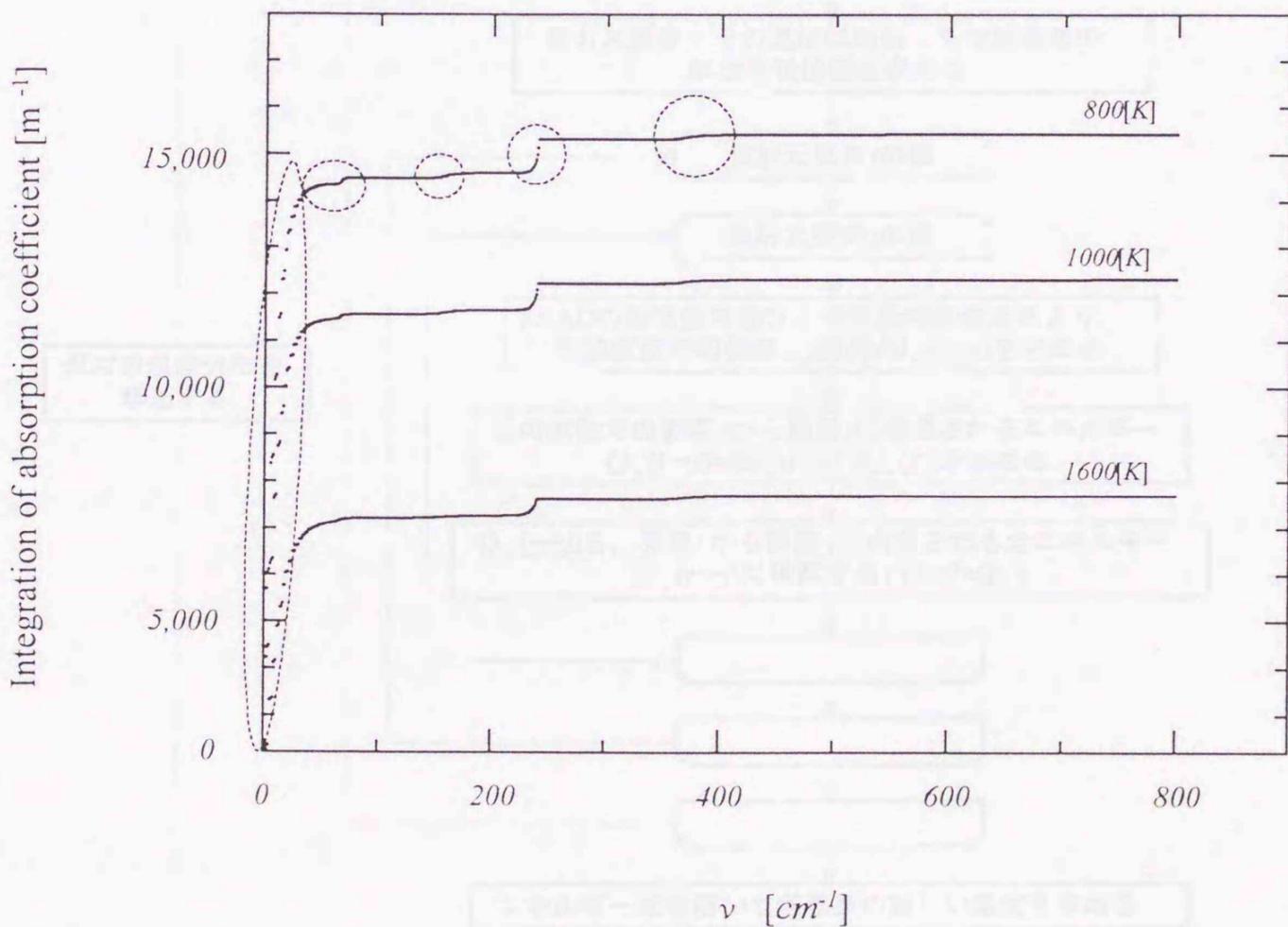


Fig.3-4 Decide to wave-number sub-region ν
(Monochromatic absorption coefficient $> S'$)

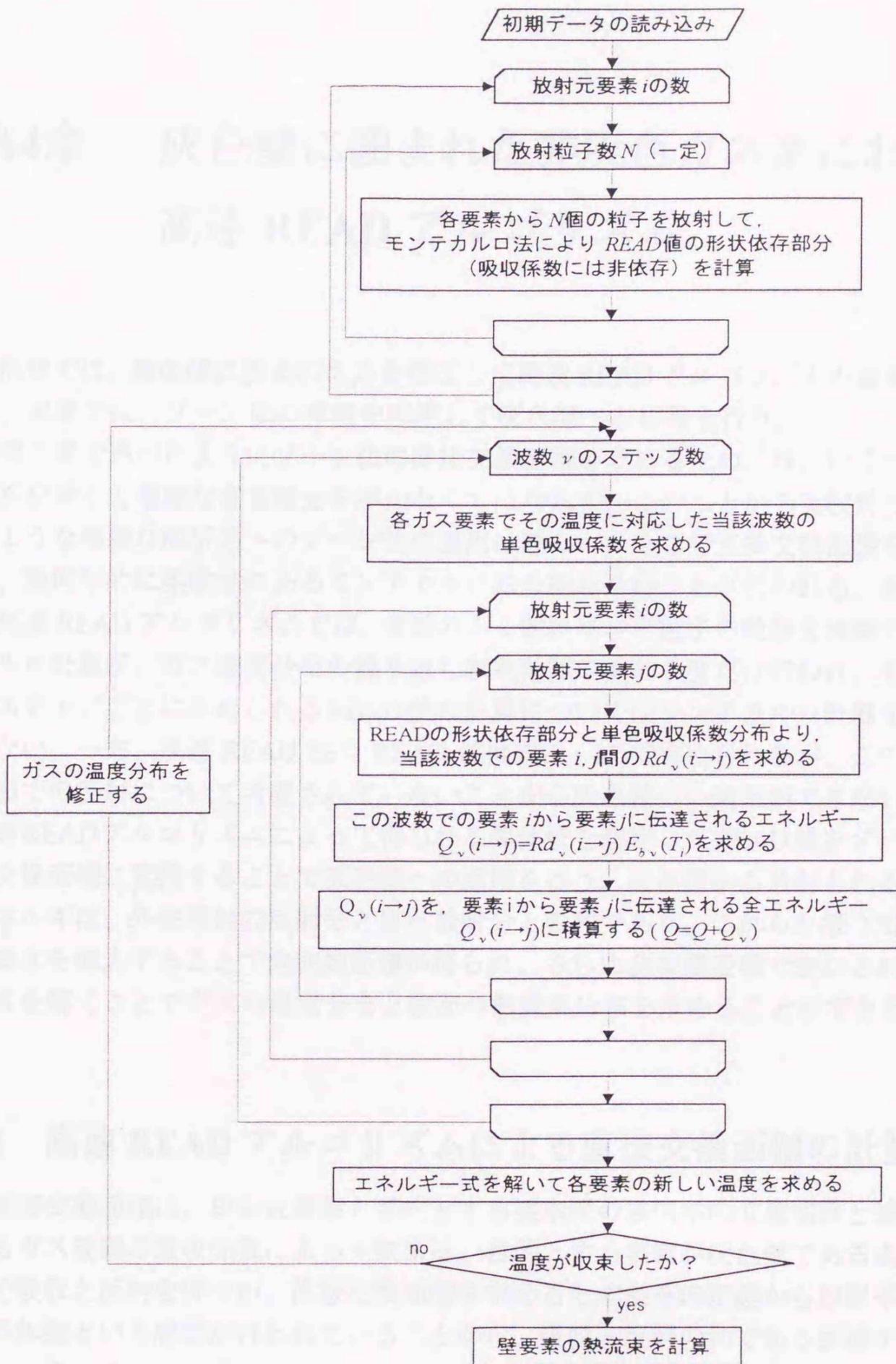


Fig.3-5 Calculation flow for nongray gas system surrounded by black walls using fast READ algorithm

第4章 灰色壁に囲まれた非灰色ガス系における 高速 READ アルゴリズム

前章では、黒体壁に囲まれた系を想定して高速 READ アルゴリズムの適用を行ったが、本章では、ゾーン法の原理を利用して灰色壁への拡張を行う。

第2章で述べたようにゾーン法の直接交換面積を求めるためには、いくつかの簡単な系を除くと複雑な多重積分を解かなくてはならず、このことから実設計で対象とするような複雑な解析系へのゾーン法の適用は難しい。そこで直接交換面積を求める際に、幾何学的に柔軟性のあるモンテカルロ法を組み込むことが行われる。前章で述べた高速 READ アルゴリズムでは、多数のふく射エネルギー粒子の軌跡を模擬するモンテカルロ計算が、ガス温度分布の繰り返し収束計算の前に1度だけ行われ、その後の波数ステップごとに求められる READ 値の計算についてはモンテカルロ計算を行う必要がない。一方、高速 READ 法の READ 値は式(3・12)で求められるが、この式中には壁面での反射について考慮されていないことから灰色壁への適用ができない。そこで、高速 READ アルゴリズムによって得られる黒体壁を想定した READ 値をゾーン法の直接交換面積に変換することで灰色壁への適用を行う。灰色壁から放射される全ふく射エネルギーは、外来照射の反射分と自己放射分との和であり、これらを扱うために射度の概念を導入することで全交換面積が得られ、さらに全交換面積で表わされるエネルギー式を解くことでガスの温度分布と壁面の熱流束分布を求めることができる。

4.1 高速 READ アルゴリズムによる直接交換面積の計算

直接交換面積は、放射元要素と目的とする要素間の幾何学的位置関係と途中に通過するガス要素の吸収係数によって決まる。目的とする要素が灰色壁である場合には壁面で吸収と反射を伴うが、直接交換面積を求めると本来その定義から放射率が1、即ち黒体壁という想定が行われていることから、吸収と反射の和である到達エネルギーについて考えるものとする。一方、高速 READ アルゴリズムで計算される READ 値は、各要素から放射されたエネルギー粒子が黒体壁に到達して吸収されるものと定義していることから、これを利用して直接交換面積を求めることができる。次式により、高速

READ アルゴリズムで与えられる READ 値を直接交換面積に変換する。

(放射元要素 i が壁面の場合)

$$D_{v,(i \rightarrow j)} = A_{si} \cdot Rd_v(i \rightarrow j) \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

(放射元要素 i がガスの場合)

$$D_{v,(i \rightarrow j)} = 4k_{v,i} \cdot V_{gi} \cdot Rd_v(i \rightarrow j) \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

4.2 全交換面積の計算

先の直接交換面積から射度の概念を利用して、壁面での乱反射を考慮した全交換面積を求める。

いま、壁要素を n 個、ガス要素を m 個、合計 M 個の要素からなる灰色壁で囲まれた閉空間を考え、壁要素には通し番号 $1 \sim n$ を、ガス要素には $n+1 \sim M$ を与える。壁要素 j における波数 ν の射度 $W_{\nu,j}$ は、

$$\sum_{i=1}^n \left(D_{v,(i \rightarrow j)} - \delta_{ij} \frac{A_{si}}{\rho_{v,j}} \right) W_{\nu,j} = - \frac{A_{sj} \cdot \epsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} E_{bv,sj} - \sum_{i=n+1}^M D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot E_{bv,gi} \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

となる。

式(4.3)を各々の壁要素に適用し、行列式にて表示すると式(4.4)のようになる。

$$\begin{vmatrix} D_{v,(1 \rightarrow 1)} - \frac{A_{s1}}{\rho_{v,1}} & D_{v,(2 \rightarrow 1)} & \dots & D_{v,(n \rightarrow 1)} \\ D_{v,(1 \rightarrow 2)} & D_{v,(2 \rightarrow 2)} - \frac{A_{s2}}{\rho_{v,2}} & \dots & D_{v,(n \rightarrow 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{v,(1 \rightarrow n)} & D_{v,(2 \rightarrow n)} & \dots & D_{v,(n \rightarrow n)} - \frac{A_{sn}}{\rho_{v,n}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W_{\nu,1} \\ W_{\nu,2} \\ \vdots \\ W_{\nu,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{A_{s1} \cdot \epsilon_{v,1} \cdot E_{bv,s1}}{\rho_1} & -D_{v,(n+1 \rightarrow 1)} \cdot E_{bv,gn+1} & \dots & -D_{v,(N \rightarrow 1)} \cdot E_{bv,gM} \\ -\frac{A_{s2} \cdot \epsilon_{v,2} \cdot E_{bv,s2}}{\rho_2} & -D_{v,(n+1 \rightarrow 2)} \cdot E_{bv,gn+1} & \dots & -D_{v,(N \rightarrow 2)} \cdot E_{bv,gM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{A_{s3} \cdot \epsilon_{v,3} \cdot E_{bv,s3}}{\rho_3} & -D_{v,(n+1 \rightarrow n)} \cdot E_{bv,gn+1} & \dots & -D_{v,(N \rightarrow n)} \cdot E_{bv,gM} \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

壁要素 i が単独に放射する場合を考えて他の要素は絶対零度、即ち $E_{bv,sj} = 0 (j = 1 \sim$

$n, j \neq i$) とすることで、目的の要素で吸収されるふく射エネルギーを調べることができる。

式(4・4)の両辺を $E_{b\nu, si}$ で除した n 元の連立方程式の解を無次元射度 ${}_i W_{\nu, j}$ とし、この行列式の演算については LU 分解を利用する^[10]。このときふく射交換を表す全交換面積 $C_{\nu, (i \rightarrow j)}$ は、第2章の式(2・31)と同様に次式で与えられる。

$$C_{\nu, (i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu, j}}{\rho_{\nu, j}} ({}_i W_{\nu, j} - \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{\nu, j}) \quad \dots\dots\dots(4\cdot5)$$

また、ガス要素 i が単独に放射する場合も式(2・32)、(2・33)と同様に、壁要素 j あるいはガス要素 j との間の全交換面積はそれぞれ式(4・6)、(4・7)で与えられる。

(壁要素)

$$C_{\nu, (i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{\nu, j}}{\rho_{\nu, j}} \cdot {}_i W_{\nu, j} \quad \dots\dots\dots(4\cdot6)$$

(ガス要素)

$$C_{\nu, (i \rightarrow j)} = D_{\nu, (i \rightarrow j)} + \sum_{k=1}^n D_{\nu, (k \rightarrow j)} \cdot {}_i W_{\nu, j} \quad \dots\dots\dots(4\cdot7)$$

4.3 エネルギー式と収束計算

ガス要素、および壁要素から波数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の間で放射されるふく射エネルギーは、それぞれ次式で表される。

(ガス要素)

$$4V_g \cdot k_{\nu} \cdot E_{b\nu, g} d\nu \quad \dots\dots\dots(4\cdot8)$$

(壁要素)

$$A_s \cdot \varepsilon_{\nu} \cdot E_{b\nu, s} d\nu \quad \dots\dots\dots(4\cdot9)$$

式(4・8)と(4・9)から、全ての波数領域におけるエネルギー式は、全交換面積を導入することにより以下のように書ける。

(ガス要素)

$$\int_0^{\infty} 4V_{gi} \cdot k_{\nu, gi} \cdot E_{b\nu, gi} d\nu = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^n C_{\nu, (sj \rightarrow gi)} \cdot E_{b\nu, sj} d\nu + \int_0^{\infty} \sum_{j=n+1}^M C_{\nu, (gj \rightarrow gi)} \cdot E_{b\nu, gj} d\nu + q_{gi} \cdot V_{gi} \quad \dots\dots\dots(4\cdot10)$$

(壁要素)

$$\int_0^\infty \varepsilon_{v,i} \cdot A_{si} \cdot E_{b v, si} dv = \int_0^\infty \sum_{j=1}^n C_{v,(sj \rightarrow si)} \cdot E_{b v, sj} dv \dots\dots\dots(4 \cdot 11)$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{j=n+1}^M C_{v,(gj \rightarrow si)} \cdot E_{b v, gj} dv - q_{si} \cdot A_{si}$$

式(4・10)、(4・11)は壁面が黒体の場合の式(3・13)、(3・14)に対応した式で、これらより3.9節の結果を用いることで、非灰色ガスの温度分布 T_{gi} 及び壁面熱流束分布 q_{si} を求めることができる。

高速 READ 法による灰色壁に囲まれた非灰色ガスふく射伝熱解析の計算手順

- ① 初期値（非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧）および境界条件（壁面放射率の分布(= $\varepsilon_{v,i}$)、壁面の温度分布(= T_{si}))を与える。
- ② 非灰色ガスの温度分布(= T_{gi})を仮定して与える。
- ③ 各要素から N_{ray} 個のふく射エネルギー粒子を放射して、モンテカルロ法により吸収係数には依存しない READ 値の形状依存部分を計算する。

このとき、要素 i から放射されて要素 j に到達する全てのふく射エネルギー束数(= $n(i, j, h)$)と、このうちでガス要素 h を途中で通過するものとの割合(= $n(i, j, h)/n(i, j, j)$)を式(3・3)に乗じて、式(3・4)で定義される $\overline{x(i, j, h)}$ （「重み付き算術平均長さ」）をコンピュータのメモリに記憶しておく

$$\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h) / n(i, j, h) \quad (3 \cdot 3)$$

$$\overline{x(i, j, h)} = \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, h)} \cdot \frac{n(i, j, h)}{n(i, j, j)} = \frac{\sum_{p=1}^{n(i, j, h)} x_p(i, j, h)}{n(i, j, j)} \quad (3 \cdot 4)$$

- ④ 初期値で与えられた非灰色ガスの組成、全圧ならびに分圧条件の下で、非灰色ガスの温度分布で当該波数に対応した各ガス要素の単色吸収係数を求める。

この計算は2.1.8節で述べたように、式(2・20)に示した Elsasser の狭域バンドモデルを用いて行う。

$$k_{v, N_b} = \rho \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \exp \left(-\frac{v \cdot v^*}{\omega} \right) \cdot \frac{\sinh(2\beta P_e)}{\cosh(2\beta P_e) - \cos(2\pi(v - v_0)/d_{N_b})} \quad (2 \cdot 20)$$

上式に、表2-1に示した Edwards らによる指数形広域バンドモデルのモデル係数を

適用して温度 ($=T_g$) と圧力 (全圧 ($=P_s$) と分圧 ($=P_c$)) による関係を与えて式(2・22)に示すような単色吸収バンドの加算によって任意波数の単色吸収係数分布を求める。

$$k_{v,gj}(T_g, P_s, P_c) = \sum_{i=1}^{11} k_v(N_b) \quad (2 \cdot 22)$$

⑤ READ 値の形状依存部分 (③で計算されたもの) と単色吸収係数分布により、当該波数 ν での放射要素 i と他の要素 j との間の READ 値 ($Rd_\nu(i \rightarrow j)$) を式(3・12)から求める。

$$Rd_\nu(i \rightarrow j) = \frac{n(i, j, j)}{N_{ray}} \left[1 - \exp(-k_{v,j} \cdot \overline{x(i, j, j)}) \right] \cdot F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i, j, i)}) \cdot \prod_{h=1(\neq i, j)} \exp(-k_{v,h} \cdot \overline{x(i, j, h)}) \quad (3 \cdot 12)$$

⑥ ゾーン法の直接交換面積 $D_{v,(i \rightarrow j)}$ 、射度 ${}_iW_{v,j}$ および全交換面積 $C_{v,(i \rightarrow j)}$ を求める。

「⑤」で求めた READ 値を用いてゾーン法の直接交換面積 $D_{v,(i \rightarrow j)}$ を式(4・1)および式(4・2)から求めて、これらを用いた式(4・3)による行列式を $E_{bv,si}$ で除すと n 元の連立方程式の解から無次元射度 ${}_iW_{v,j}$ が得られる。全交換面積 $C_{v,(i \rightarrow j)}$ はここで得られた無次元射度 ${}_iW_{v,j}$ を用いて式(4・5)～式(4・7)によって求められる。

$$D_{v,(i \rightarrow j)} = A_{si} \cdot Rd_\nu(i \rightarrow j) \quad (4 \cdot 1)$$

$$D_{v,(i \rightarrow j)} = 4k_{v,i} \cdot V_{gi} \cdot Rd_\nu(i \rightarrow j) \quad (4 \cdot 2)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(D_{v,(i \rightarrow j)} - \delta_{ij} \frac{A_{si}}{\rho_{v,j}} \right) {}_iW_{v,j} = - \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} E_{bv,sj} - \sum_{i=n+1}^M D_{v,(i \rightarrow j)} \cdot E_{bv,gi} \quad (4 \cdot 3)$$

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} ({}_iW_{v,j} - \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{v,j}) \quad (4 \cdot 5)$$

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = \frac{A_{sj} \cdot \varepsilon_{v,j}}{\rho_{v,j}} \cdot {}_iW_{v,j} \quad (\text{壁要素}) \quad (4 \cdot 6)$$

$$C_{v,(i \rightarrow j)} = D_{v,(i \rightarrow j)} + \sum_{k=1}^n D_{v,(k \rightarrow j)} \cdot {}_iW_{v,j} \quad (\text{ガス要素}) \quad (4 \cdot 7)$$

⑦ 「④～⑥」の計算を全波数領域について計算してエネルギー式を解き、非灰色ガス要素の新たな温度分布を求める。

ガス要素に関するエネルギー式 (式(4・10)) から、単色吸収係数を用いて得られた $E_{b\nu, gj}$ を全ての波数領域について積分することで非灰色ガスの全ての波数領域についての非灰色ガスの温度分布を求めることができる。

$$\int_0^{\infty} 4V_{gi} \cdot k_{\nu, gi} \cdot E_{b\nu, gi} d\nu = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^n C_{\nu, (sj \rightarrow gi)} \cdot E_{b\nu, sj} d\nu + \int_0^{\infty} \sum_{j=n+1}^M C_{\nu, (gj \rightarrow gi)} \cdot E_{b\nu, gj} d\nu + q_{gi} \cdot V_{gi} \quad (4 \cdot 10)$$

⑧ 非灰色ガスの温度分布が収束したか否かを判定する。

第2章の各解析手法と同様に、 $E_{b\nu, gj} = \sigma T_{gj}^4$ の関係から収束点近傍では $T_{g, old} \cong T_{g, new}$ であるので、 $k(T_{g, new}) \cong k(T_{g, old})$ を利用して式(2・39)から各繰り返し計算での修正後の温度分布 $T_{g, new}$ を求める。全てのガス要素について修正前の温度分布 $T_{g, old}$ と修正後の温度分布 $T_{g, new}$ との差を式(2・40)で求めて、このときの最大値を err と定義して収束の判定値とする。

$$T_{g, new} = \left[\frac{Q_{g, abs}(T_{g, old})}{4V_g \cdot k(T_{g, old}) \cdot \sigma} \right]^{1/4} = \left[\frac{Q_{g, abs}(T_{g, old})}{Q_{g, emi}(T_{g, old})} \right]^{1/4} \cdot T_{g, old} \quad (2 \cdot 39)$$

$$err = \max |(T_{g, old} - T_{g, new}) / T_{g, new}| \quad (2 \cdot 40)$$

⑨ 非灰色ガスの温度分布が収束するまでの繰り返し計算。

非灰色ガスの温度分布が⑦によって収束されていないと判定された場合には、修正後の温度分布 $T_{g, new}$ を用いて再度これらに対応した単色吸収係数分布 $k_{\nu, gj}$ を求める計算 (④) に戻り、以下、収束判定を満たすまで繰り返し④～⑨までの計算を行う (この繰り返し計算にはモンテカルロ計算は含まれない)。

⑩ 壁要素の熱流束分布の計算。

非灰色ガスの温度分布が収束したならば、このときの温度分布と全交換面積を式(4・11)に代入することで壁面熱流束分布 q_{si} を得ることができる。

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu, i} \cdot A_{si} \cdot E_{b\nu, si} d\nu = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^n C_{\nu, (sj \rightarrow si)} \cdot E_{b\nu, sj} d\nu + \int_0^{\infty} \sum_{j=n+1}^M C_{\nu, (gj \rightarrow si)} \cdot E_{b\nu, gj} d\nu - q_{si} \cdot A_{si} \quad (4 \cdot 11)$$

図4-1に、灰色壁に囲まれた高速 READ 法による非灰色ガスふく射伝熱解析のフローチャートを示す。

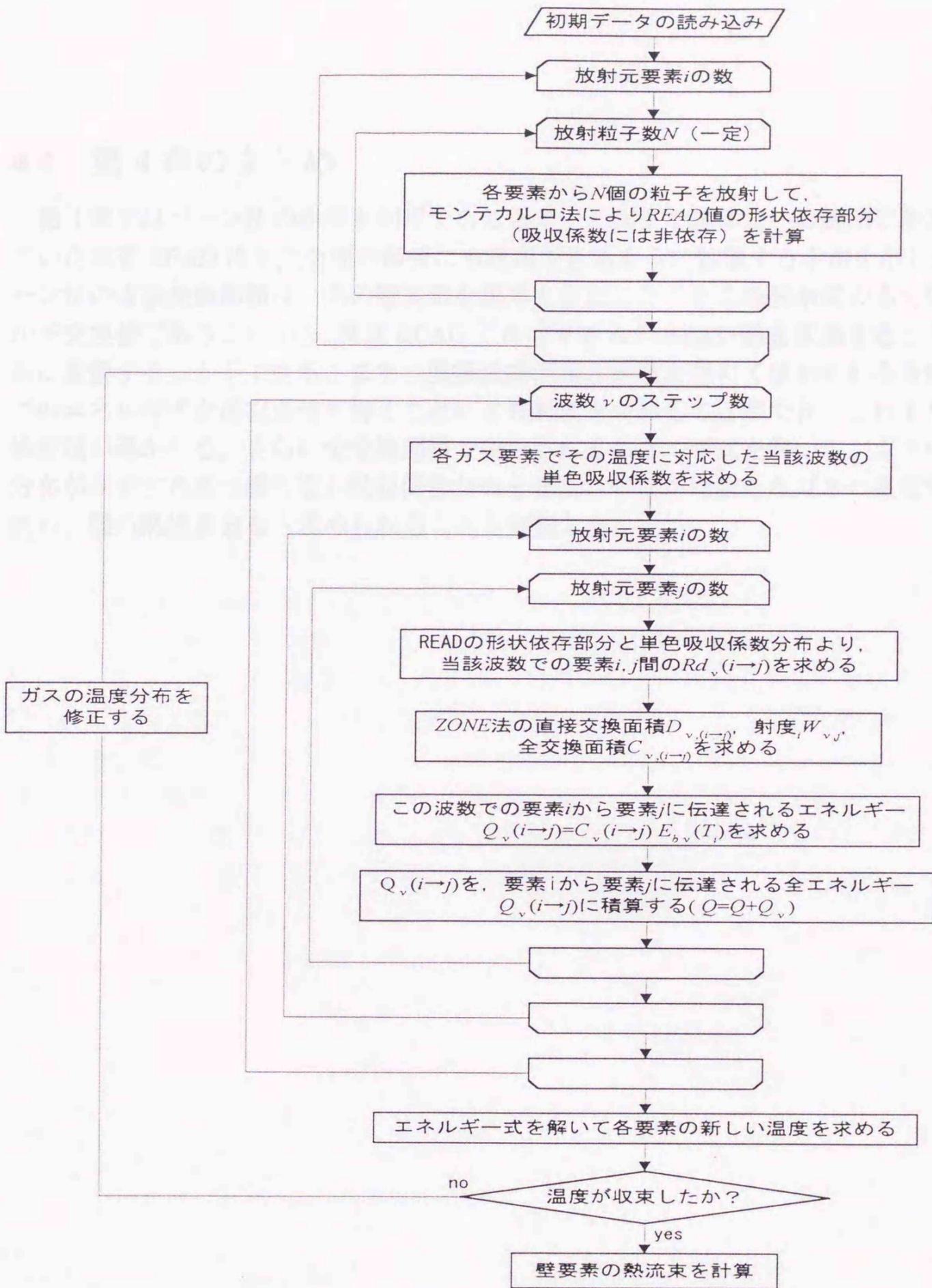


Fig.4-1 Calculation flow for nongray gas system surrounded by gray walls using fast READ algorithm together with ZONE method

4.4 第4章のまとめ

第4章ではゾーン法の原理を利用することで、これまで黒体壁への適用に限定されていた高速 READ 法を灰色壁の解析にも活用できるように拡張する手法を示した。ゾーン法の直接交換面積は、系の壁要素を黒体と仮定したときの各要素間のふく射エネルギー交換量であることから、高速 READ アルゴリズムの READ 値を変換することで直ちに交換面積を求めることができる。また、直接交換面積と射度を用いて表わされる各壁要素でのエネルギー式を連立させて解くことにより射度を求めることができ、これより全交換面積が導かれる。さらに全交換面積で表わされるエネルギー式を解いて、ガスの温度分布が収束するまで繰り返し吸収係数分布を修正させながら新たなガスの温度分布を求め、壁の熱流束分布も求められることを解説した。

第5章 解析結果と考察

これまでに述べた高速解析アルゴリズムについて簡単な解析例を示すと共に、決定論的計算方法を取り入れた従来の READ 法との収束時間の比較、収束値の偏差、およびコンピュータメモリの使用量について考察を行う。

5.1 解析系と解析条件

本章で扱う解析条件を表 5-1 に、解析系を図 5-1(a)~(e)に示す。系は媒体（非灰色ガス）領域と、これを囲む黒体壁あるいは灰色壁で構成されているものとする。また、媒体領域には、水蒸気、二酸化炭素、そして非ふく射性の窒素が均一濃度で満たされており、壁面温度は一定であるものとする（任意の濃度分布、および壁面温度分布が可能であるが、ここでは簡単のために一定としている）。また、本解析では媒体領域の分割（ガス要素）を矩形としているが、容易に任意形状に拡張することができる。解析では非灰色ガス中の発熱密度分布と壁の温度が与えられ、ガス要素ごとの温度と壁要素ごとの熱流束が求められる。

解析系	壁面温度	発熱密度	壁要素
図 5-1(a)	一定	一定	一定
図 5-1(b)	一定	一定	一定
図 5-1(c)	一定	一定	一定
図 5-1(d)	一定	一定	一定
図 5-1(e)	一定	一定	一定

Table.5-1 Analytical condition

Condition(1)

解析系	Fig.5-1(a)		
ガス要素 (16要素)	要素寸法	発熱要素	他要素
	幅×高 =1.0×1.0 [m]	初期温度 800 [K] (発熱量 10^5 [W/m ²])	初期温度 500 [K]
壁要素 (16要素)	長さ =1.0 [m]	(境界条件) 温度 500 [K], (放射率 1.0 [-])	
ガス媒体	非灰色ガスの組成と分圧 水蒸気 0.1 [atm], 二酸化炭素 0.1 [atm], 窒素 0.8 [atm] 全 圧 1.0 [atm]		

Condition(2)

解析系	Fig.5-1(b)		
ガス要素 (9要素)	要素寸法	発熱要素	他要素
	幅×高 =1.0×1.0 [m]	初期温度 800 [K] 発熱量 10^5 [W/m ²]	初期温度 500 [K]
壁要素 (12要素)	長さ =1.0 [m]	(境界条件) 温度 500 [K], 放射率 1.0 [-]	
ガス媒体	非灰色ガスの組成と分圧 水蒸気 0.1 [atm], 二酸化炭素 0.1 [atm], 窒素 0.8 [atm] 全 圧 1.0 [atm]		

Condition(3)

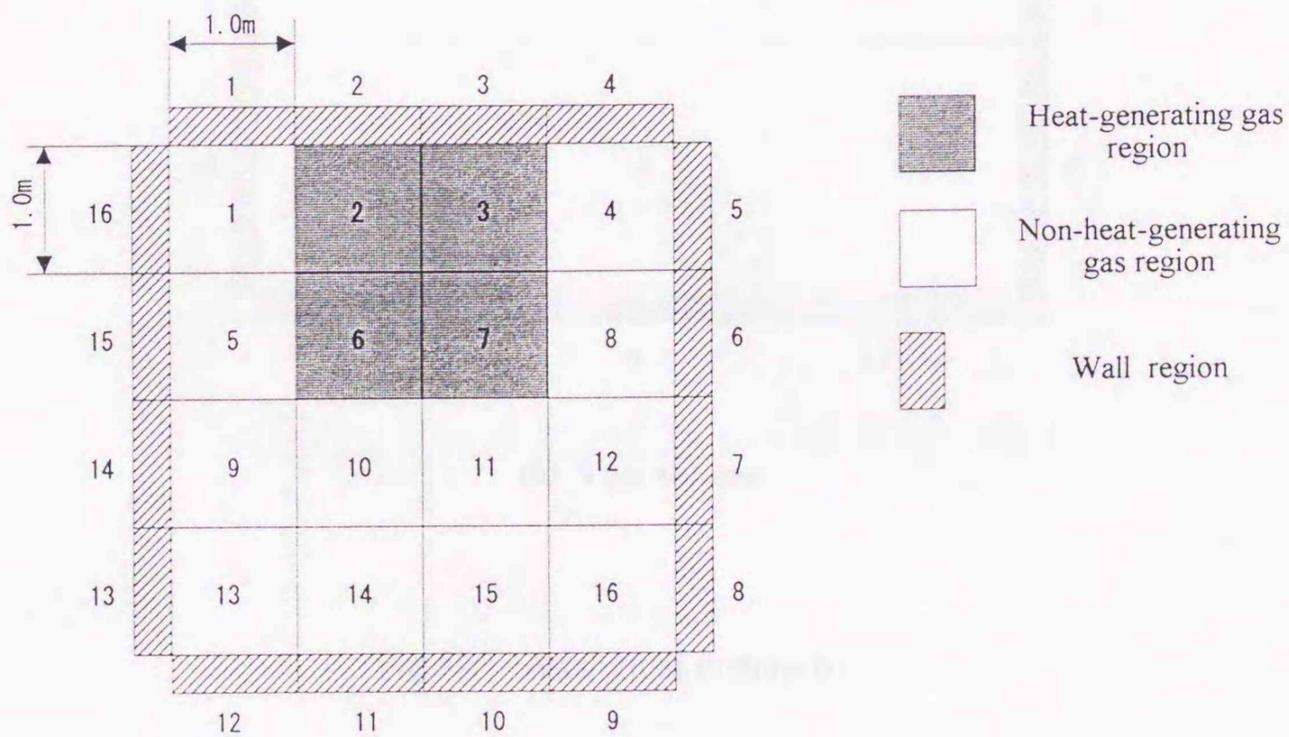
解析系	Fig.5-1(c)		
	要素寸法	発熱要素	他要素
ガス要素 (36要素)	幅×高 =0.5×0.5 [m]	初期温度 800 [K] 発熱量 10^5 [W/m ³]	初期温度 500 [K]
壁要素 (24要素)	長さ =0.5 [m]	(境界条件) 温度 500 [K], 放射率 1.0 [-]	
ガス媒体	非灰色ガスの組成と分圧 水蒸気 0.1 [atm], 二酸化炭素 0.1 [atm], 窒素 0.8 [atm] 全 圧 1.0 [atm]		

Condition(4)

解析系	Fig. 5-1 (d)		
	要素寸法	発熱要素	他要素
ガス要素 (81要素)	幅×高 =0.333×0.333 [m]	初期温度 800 [K] 発熱量 10^5 [W/m ³]	初期温度 500 [K]
壁要素 (36要素)	長さ =0.333 [m]	(境界条件) 温度 500 [K], 放射率 1.0 [-]	
ガス媒体	非灰色ガスの組成と分圧 水蒸気 0.1 [atm], 二酸化炭素 0.1 [atm], 窒素 0.8 [atm] 全 圧 1.0 [atm]		

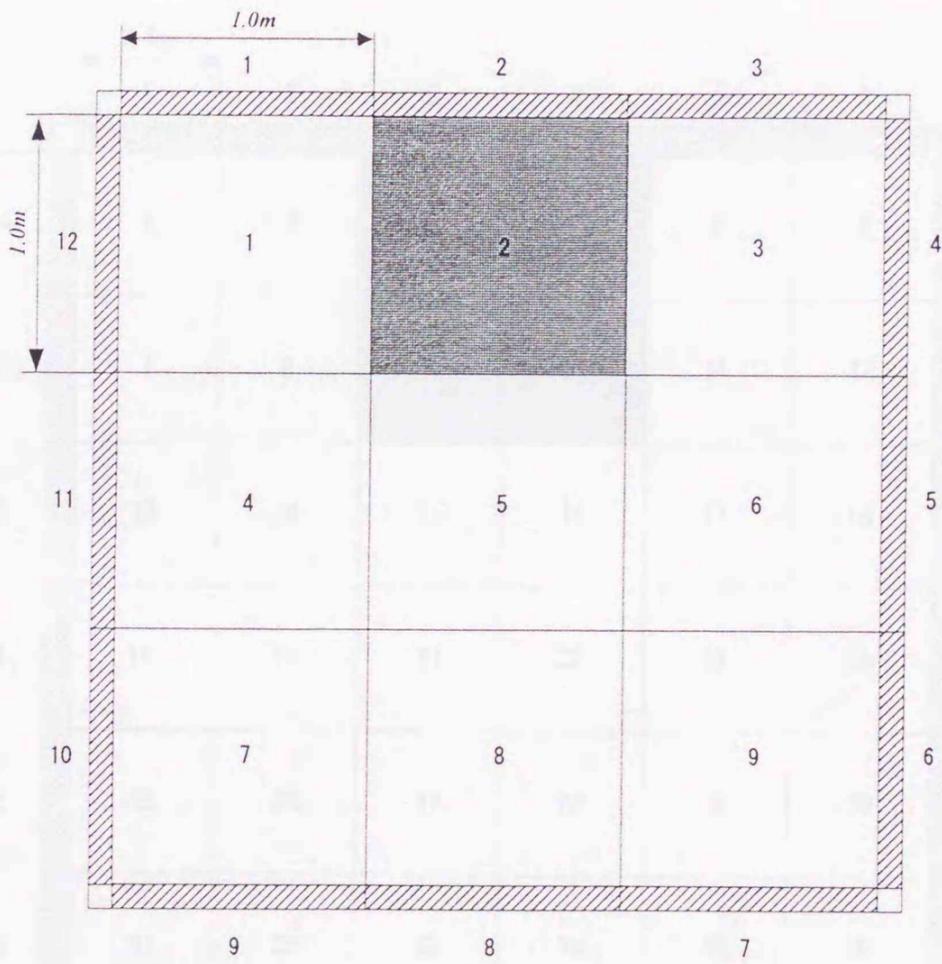
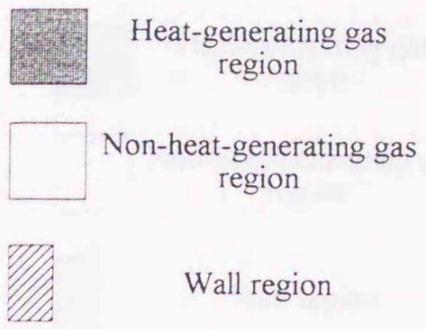
Condition(5)

解析系	Fig.5-1(e)		
ガス要素 (144要素)	要素寸法	発熱要素	他要素
	幅×高 =0.25×0.25 [m]	初期温度 800 [K] 発熱量 10^5 [W/m ³]	初期温度 500 [K]
壁要素 (48要素)	長さ =0.25 [m]	(境界条件) 温度 500 [K], 放射率 1.0 [-]	
ガス媒体	非灰色ガスの組成と分圧 水蒸気 0.1 [atm], 二酸化炭素 0.1 [atm], 窒素 0.8 [atm] 全圧 1.0 [atm]		



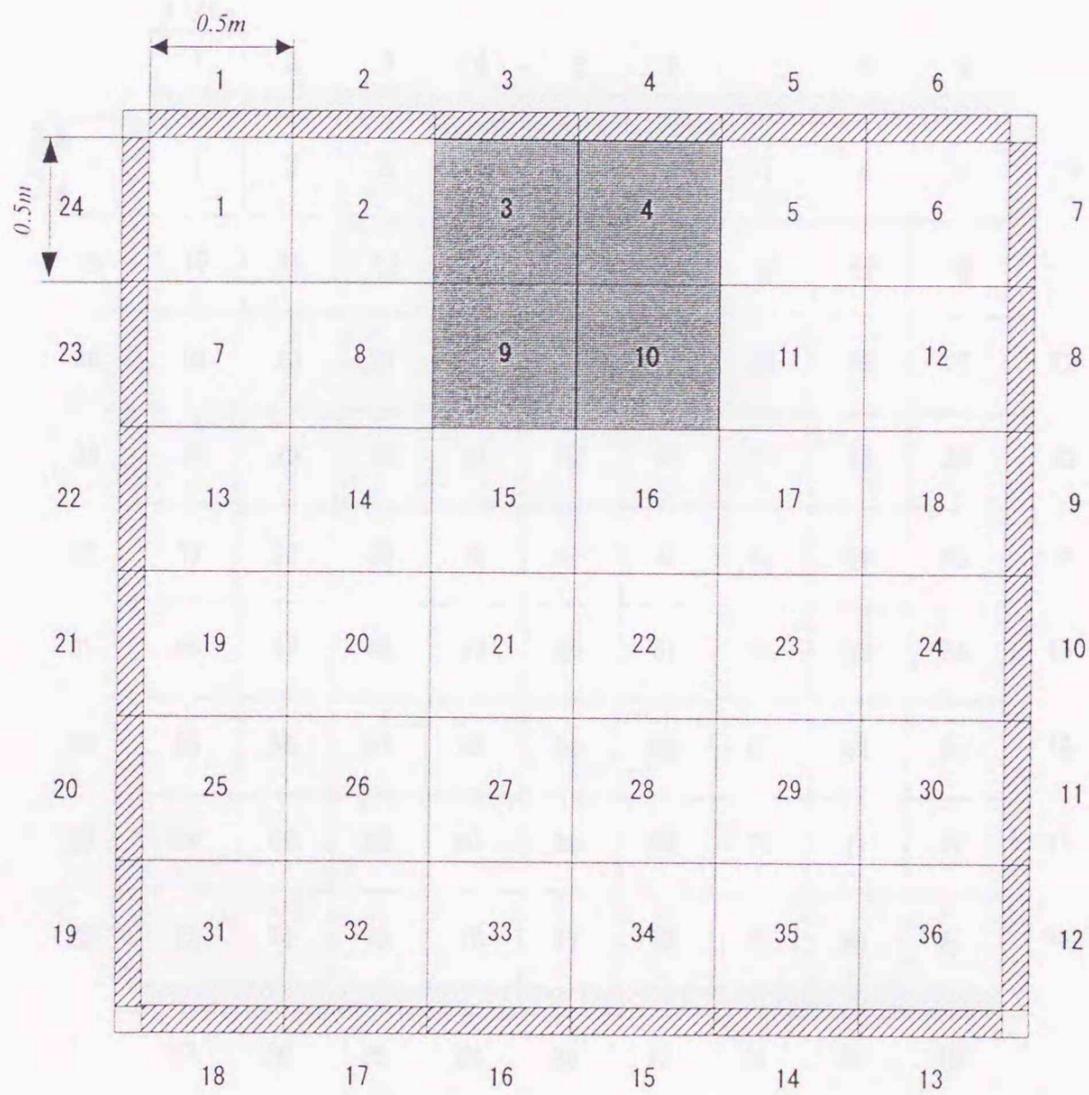
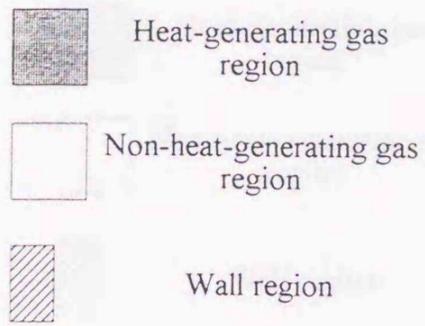
(a) 16 gas elements

Fig.5-1 Analytical system(a)



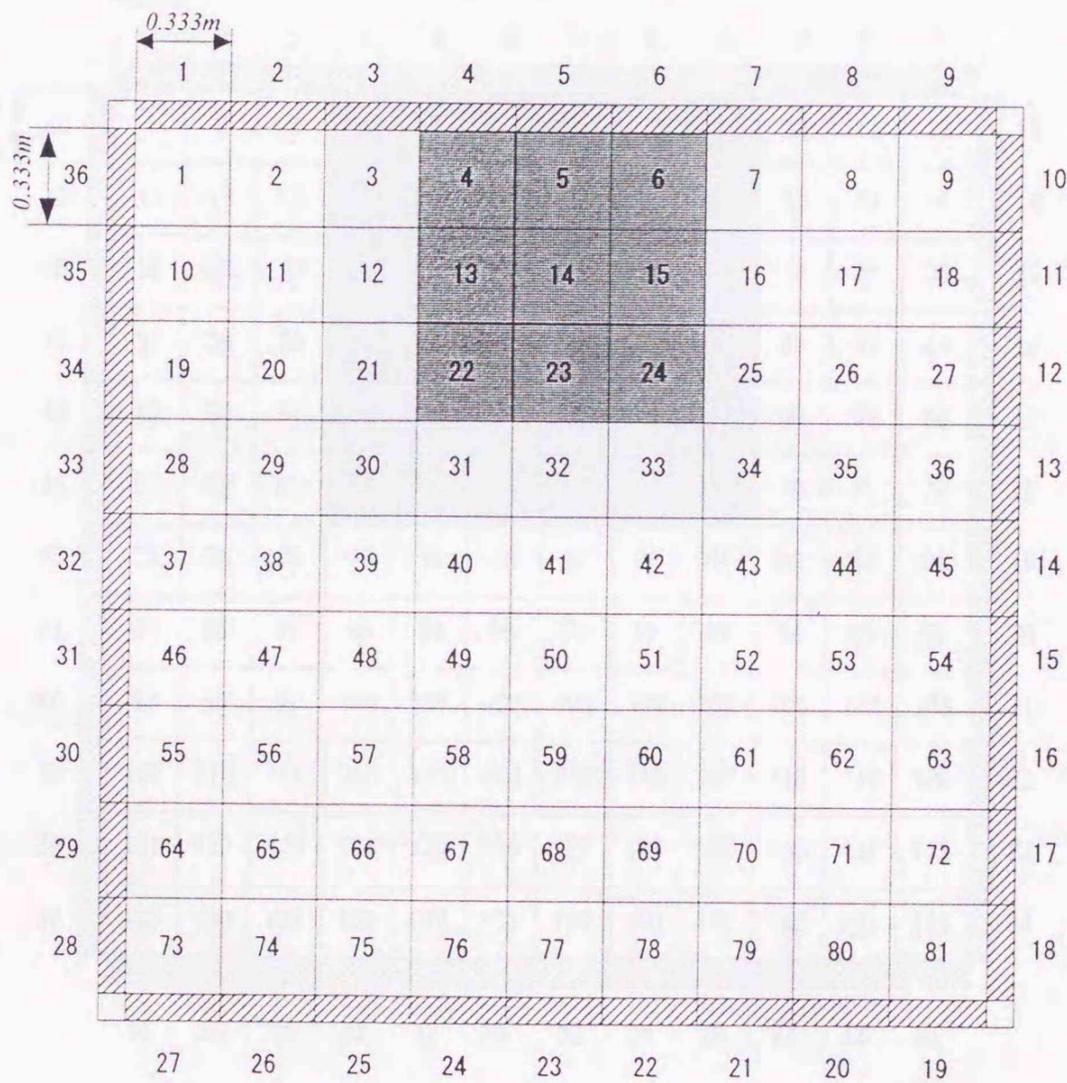
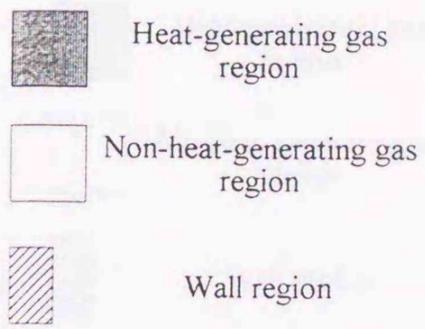
(b) 9 gas elements

Fig.5-1 Analytical system(b)



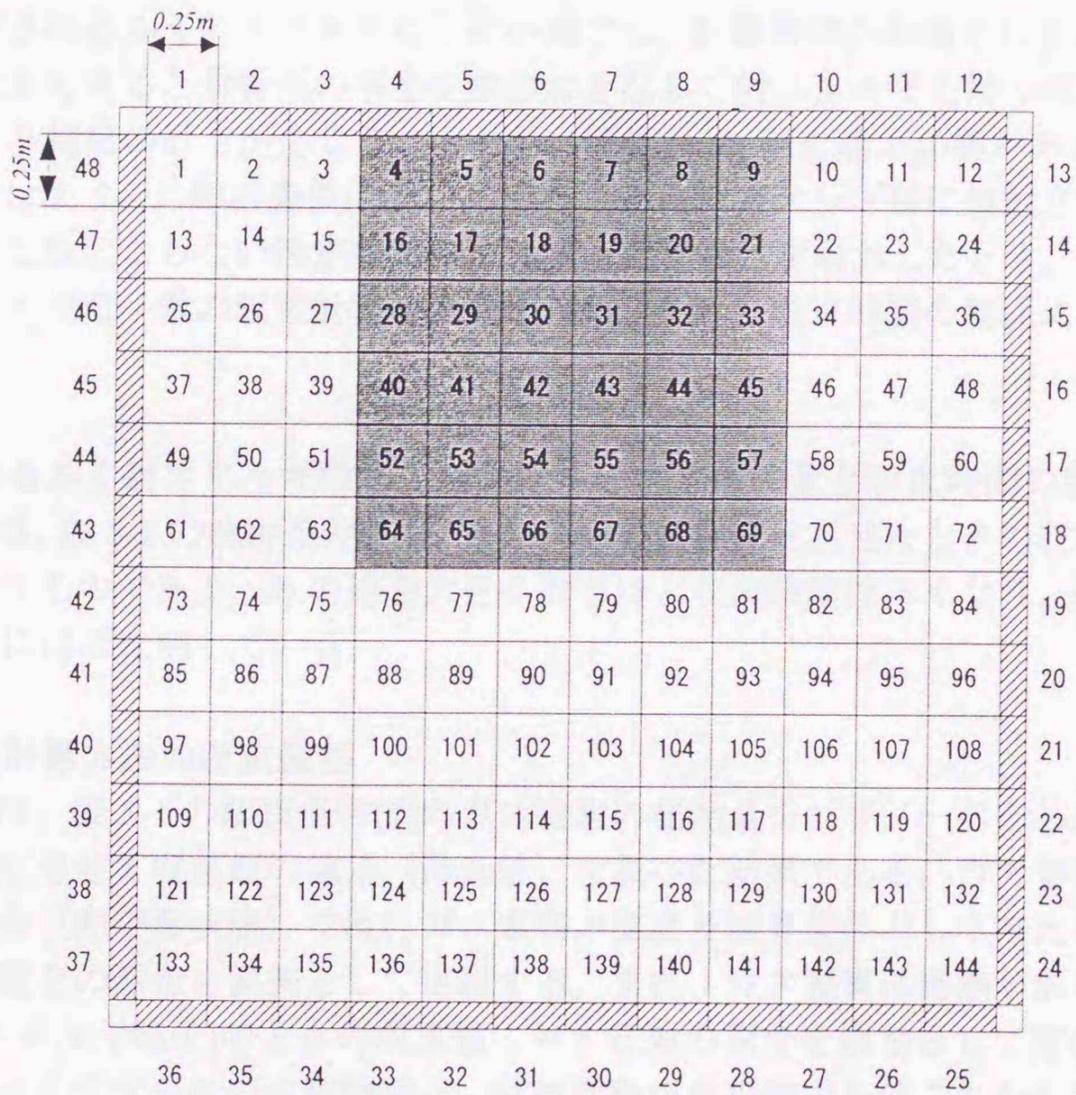
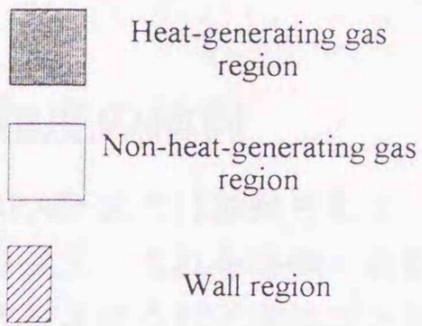
(c) 36 gas elements

Fig.5-1 Analytical system(c)



(d) 81 gas elements

Fig.5-1 Analytical system(d)



(e) 144 gas elements

Fig.5-1 Analytical system(e)

5.2 決定論的計算方法の精度の検討

第2章で述べたように、従来の READ 法では放射されるエネルギー粒子1個あたりのエネルギー量 dq (式(2・74)) を予め与えて、これを各微小波数ステップごとに放射させることから、モンテカルロ計算で放射させる粒子数はガス要素の温度（即ちエネルギー量）が修正されるとこの手順に比例して変化する。 dq の値を大きくするとガス要素から放射されるふく射エネルギー粒子数が減少し、計算時間が短縮されるが、 dq の値を過度に大きくすると解析系の中を少数の大きなふく射エネルギーを持つ粒子が飛び交うこととなり精度の低下が生じることから、適度な dq 値を選ぶ必要がある。

本項では表 5-1 の解析条件(1)を例に取り、各波数ステップ毎に放射されるエネルギー粒子数を乱数によらない決定論的方法（2.2.3 節参照）を導入したとき、放射されるふく射エネルギー粒子数の収束計算毎の変化、および dq と収束時間の関係について検討を行う。

放射されるふく射エネルギー粒子1個あたりのエネルギー量と収束時間の関係

図 5-2 は、表 5-1 の解析条件(1)について dq の値を変化させたときの収束時間の結果を整理したものである。 dq の値を大きく取るほど収束時間は早くなり、その割合は dq の大きさにほぼ比例している。

決定論的計算方法の収束偏差

図 5-3 は、表 5-1 の解析条件(1)のガス要素の発熱量をパラメータとしたときに、 dq の値を変化させて収束値の偏差（最大値）を調べた結果である。ガス要素からの発熱が無い場合（熱平衡状態）では、ガス要素の温度と境界条件として与えた壁温度との差の最大値との割合を偏差として定義する。また、ガス要素に発熱がある場合では、 $dq=1[W/\text{エネルギー粒子}]$ のときの収束値に対する差の割合を偏差として定義する。偏差には、ガスの温度分布の収束誤差と、試行回数が有限数であることから生じるモンテカルロ法特有の誤差が含まれる。後者の誤差については試行回数（全放射エネルギー粒子数）の-1/2 乗に比例して精度が向上することから、 dq の値が小さくなるほど放射される粒子数が増加して収束偏差は小さくなる。

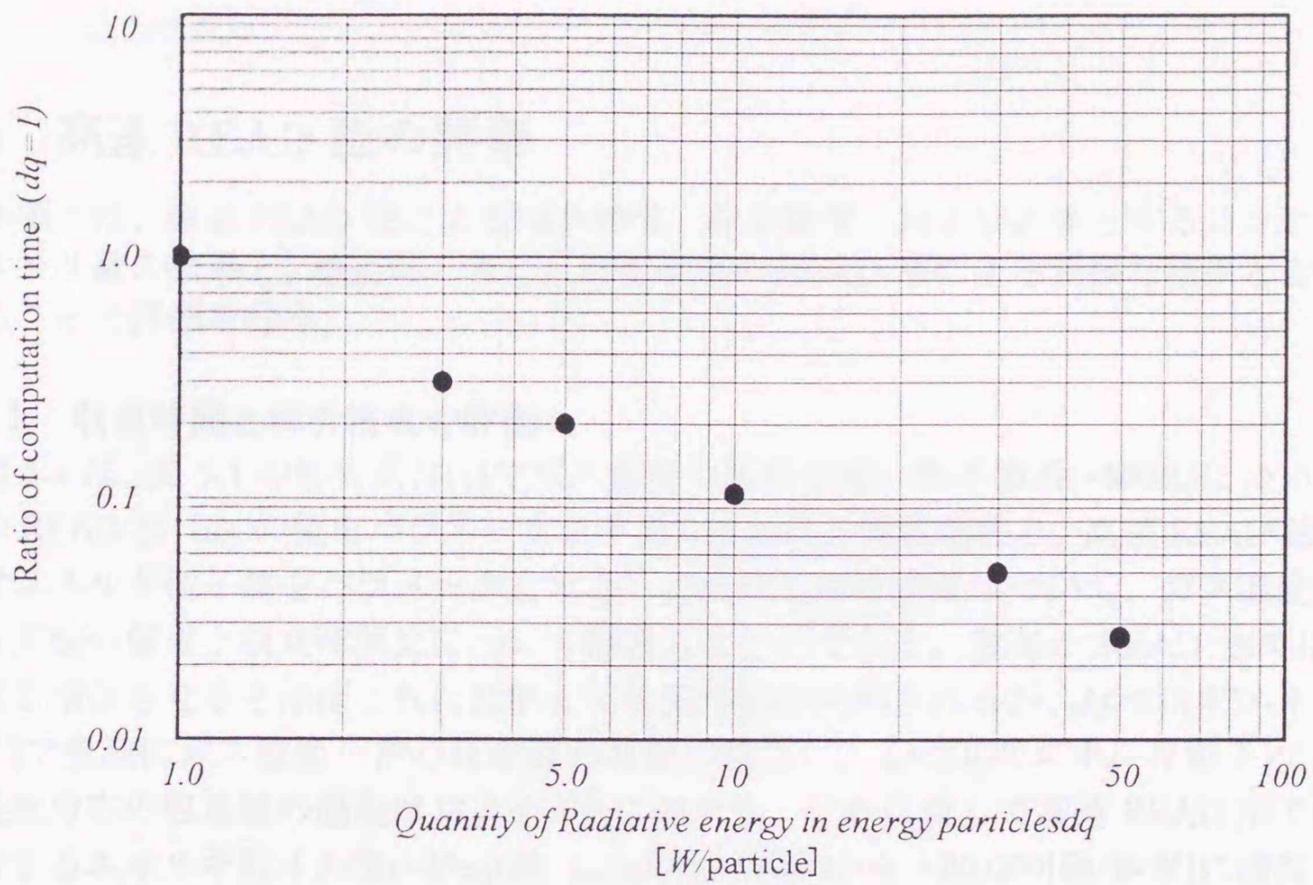


Fig.5-2 Ratio of computation time for conventional READ method

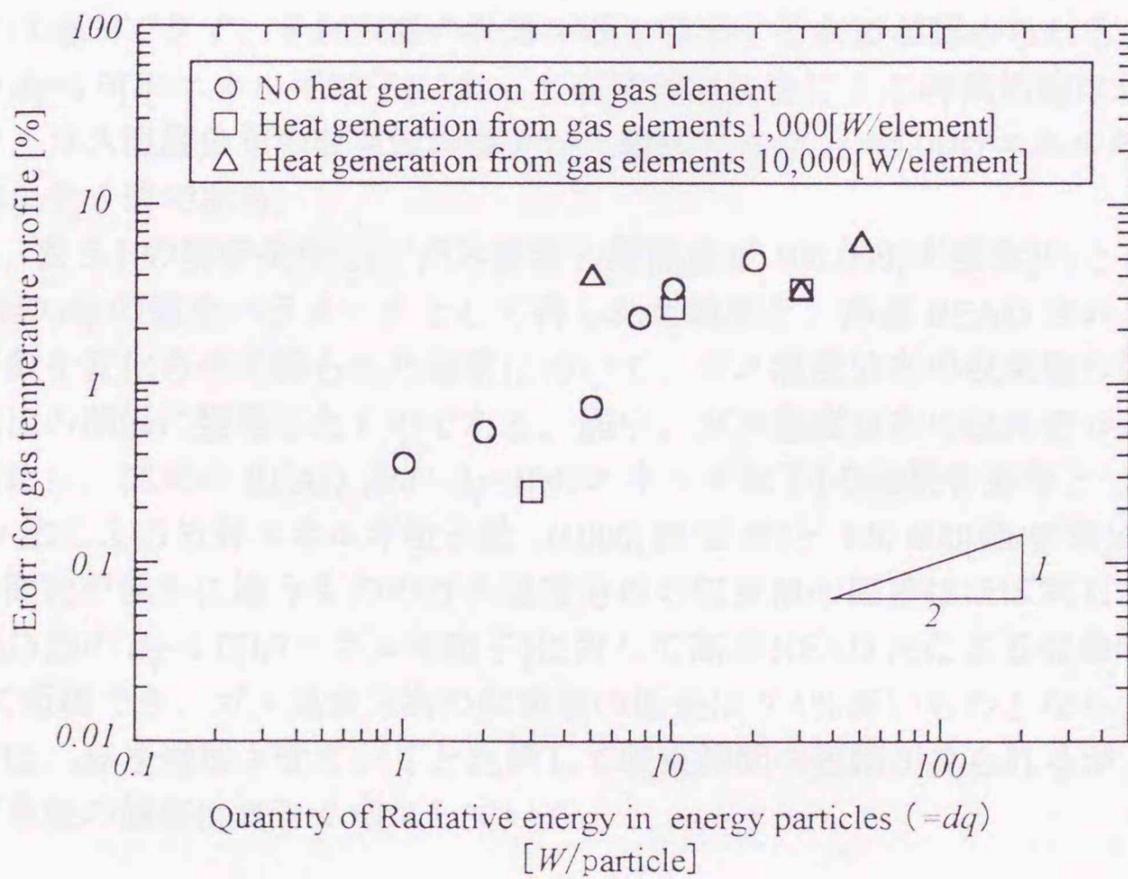


Fig.5-3 Error of conventional READ method

5.3 高速 READ 法の評価

本項では、高速 READ 法による解析時間、収束精度、および必要とするコンピュータメモリ量の結果と、厳密解と考えられる従来の READ 法による同様な結果とを比較することで評価を行う。

5.3.1 収束時間と解析精度の評価

図 5-4 は、表 5-1 の解析条件(1)でガス要素の発熱が無い熱平衡系(=500K)について従来の READ 法 (dq の値をパラメータとする) における解析結果と、高速 READ 法 (ふく射エネルギー粒子数をパラメータとする) における解析結果について、ガス温度分布の収束値の偏差と収束時間比について整理したものである。従来の READ 法では dq の値を増加させるとほぼこれに比例して収束時間は短縮されるが、 $dq > 5.0$ [W/エネルギー粒子] で急激にガス温度分布の収束値の偏差が増加し、 $dq = 20$ [W/エネルギー粒子] ではガス温度分布の収束値の偏差はおよそ 5% に達する。これに対して高速 READ 法では、放射するエネルギー粒子の数(= N_{ray}) を 10,000 [個/要素] から 100,000 [個/要素] に増加させるとおよそ 3 倍の収束時間の違いが生じるが、ガス温度分布の収束値の偏差に対しては僅かな改善しか見られない。したがって、高速 READ 法の収束精度を向上させるには、温度分布の修正繰り返し計算の前に行なわれるモンテカルロ計算部分の精度を上げることで達成できず、それ以降の計算手順を改善する必要があると認められる。従来の READ 法の $dq = 1.0$ [W/エネルギー粒子] に対して高速 READ 法による時間短縮はおよそ 20 倍であるが、ガス温度分布の収束値の偏差が比較的小さな $dq = 5.0$ [W/エネルギー粒子] に対してはおよそ 5 倍である。

図 5-5 は、表 5-1 の解析条件(1)でガス要素の発熱量が 100,000 [W/要素] のときの従来の READ 法の dq の値をパラメータとして得られた結果と、高速 READ 法のふく射エネルギー粒子数を変化させて得られた結果について、ガス温度分布の収束値の偏差および収束時間比の関係に整理したものである。図中、ガス温度分布の収束値の偏差および収束時間比は、従来の READ 法の $dq = 1$ [W/エネルギー粒子] の結果を基準としている。高速 READ 法による放射エネルギー粒子数 10,000 [個/要素] と 100,000 [個/要素] の結果では、収束時間比が僅かに違うもののガス温度分布の収束値の偏差はほぼ同じである。従来の READ 法の $dq = 1.0$ [W/エネルギー粒子] に対して高速 READ 法による収束時間はおよそ 1/20 に短縮でき、ガス温度分布の収束値の偏差は 2.4% 高いものとなる。従来の READ 法では、 dq を増加させていくと比例して収束時間の短縮が見られるが、ガス温度分布の収束値の偏差は大きく増加していく。

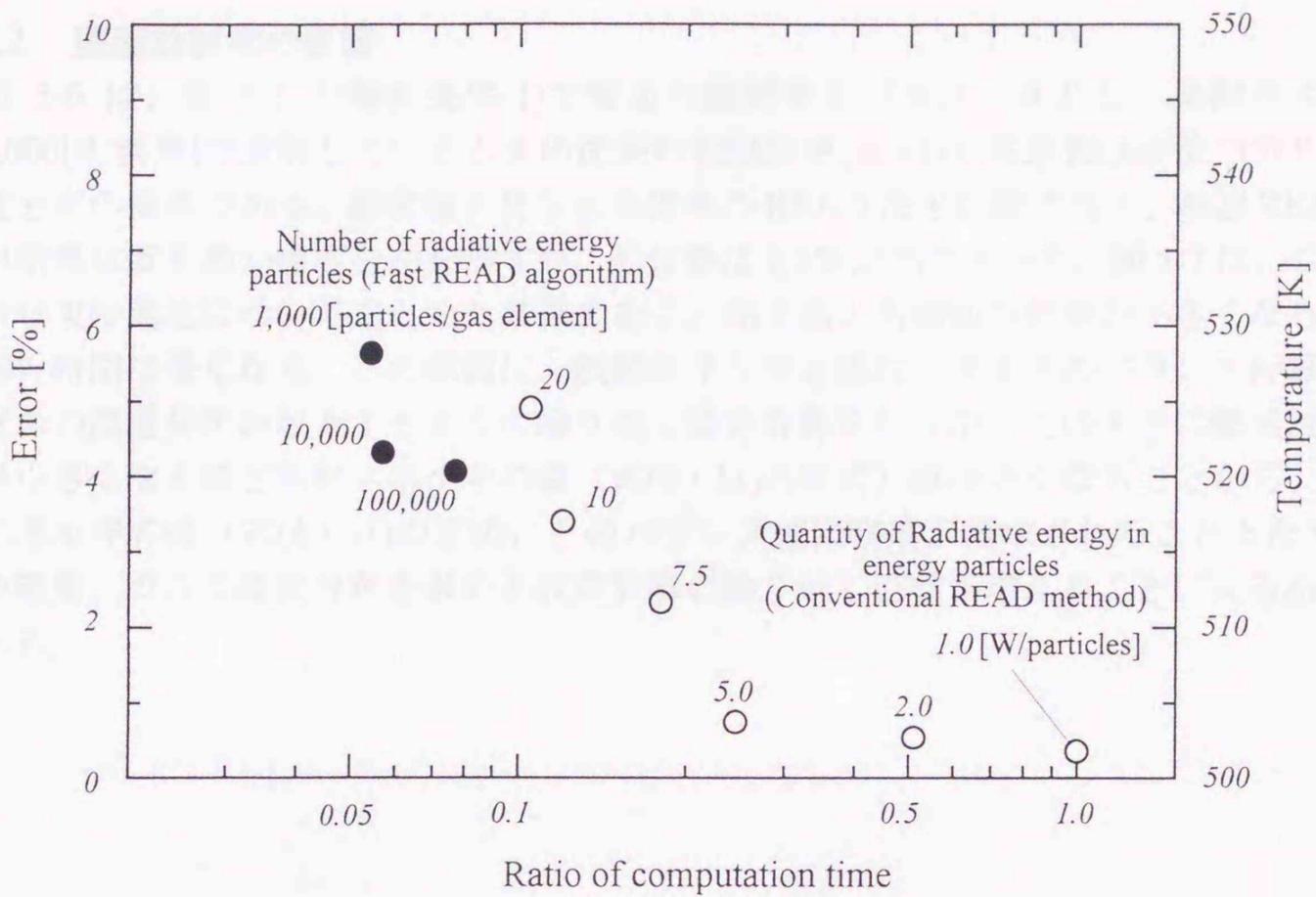


Fig.5-4 Comparison between conventional READ method and fast READ method

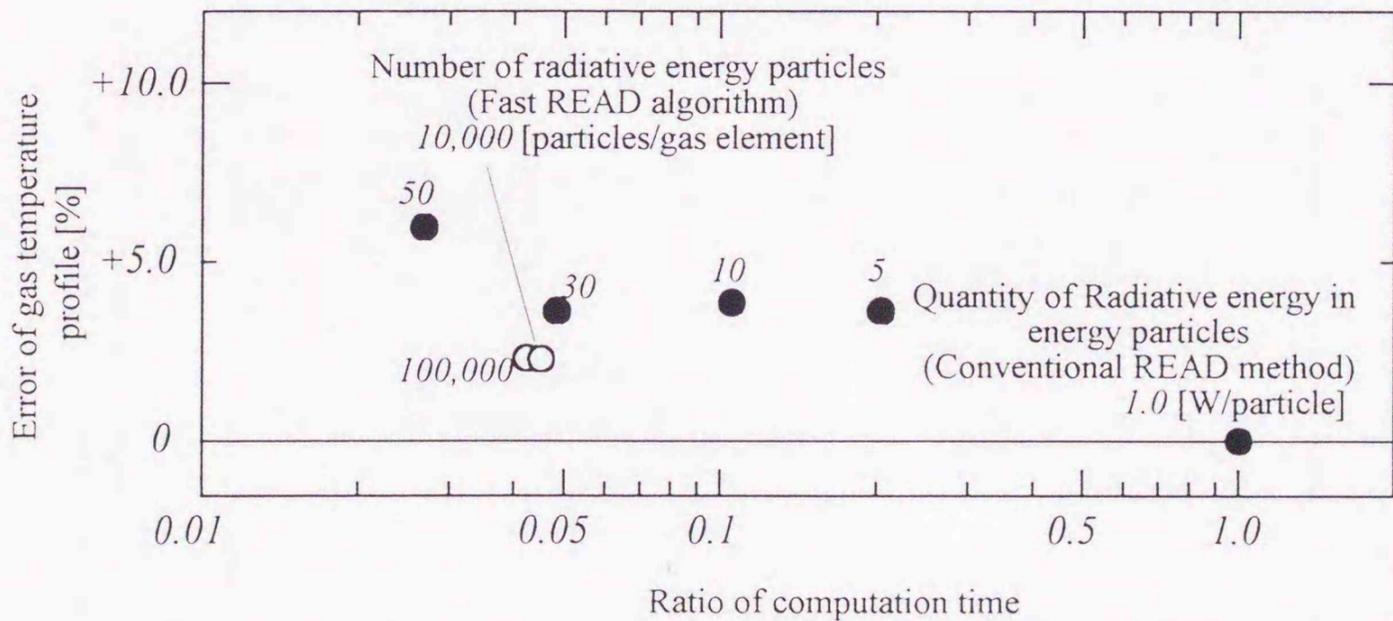


Fig.5-5 Ratio of computation time and error between conventional READ method and fast READ algorithm

5.3.2 壁面放射率の影響

図 5-6 は、表 5-1 の解析条件(1)で壁面の放射率をパラメータとし、発熱ガスが 100,000[W/要素]で放射しているときの従来の READ 法($dq=1$)と高速 READ 法のガスの温度分布の結果である。厳密解と見なせる従来の READ 法と比較すると、高速 READ 法の結果は若干高い温度分布を示すが、その差は 2.5%以内であった。図 5-7 は、この際の収束時間比についてまとめた結果である。両手法とも壁面放射率が小さくなるほど解析時間は長くなる。この原因は、放射エネルギーと吸収エネルギーのバランス計算からガスの温度分布が収束するように繰り返し修正計算を行うが、このときに壁面放射率が小さくなるほど放射エネルギーの値 (式(4・11)の左辺) は小さくなることから、吸収エネルギーの値 (式(4・11)の右辺) とのバランス値に精度が要求されることとなり、この結果、ガスの温度分布を求める収束計算の繰り返し回数が増えることによるものである。

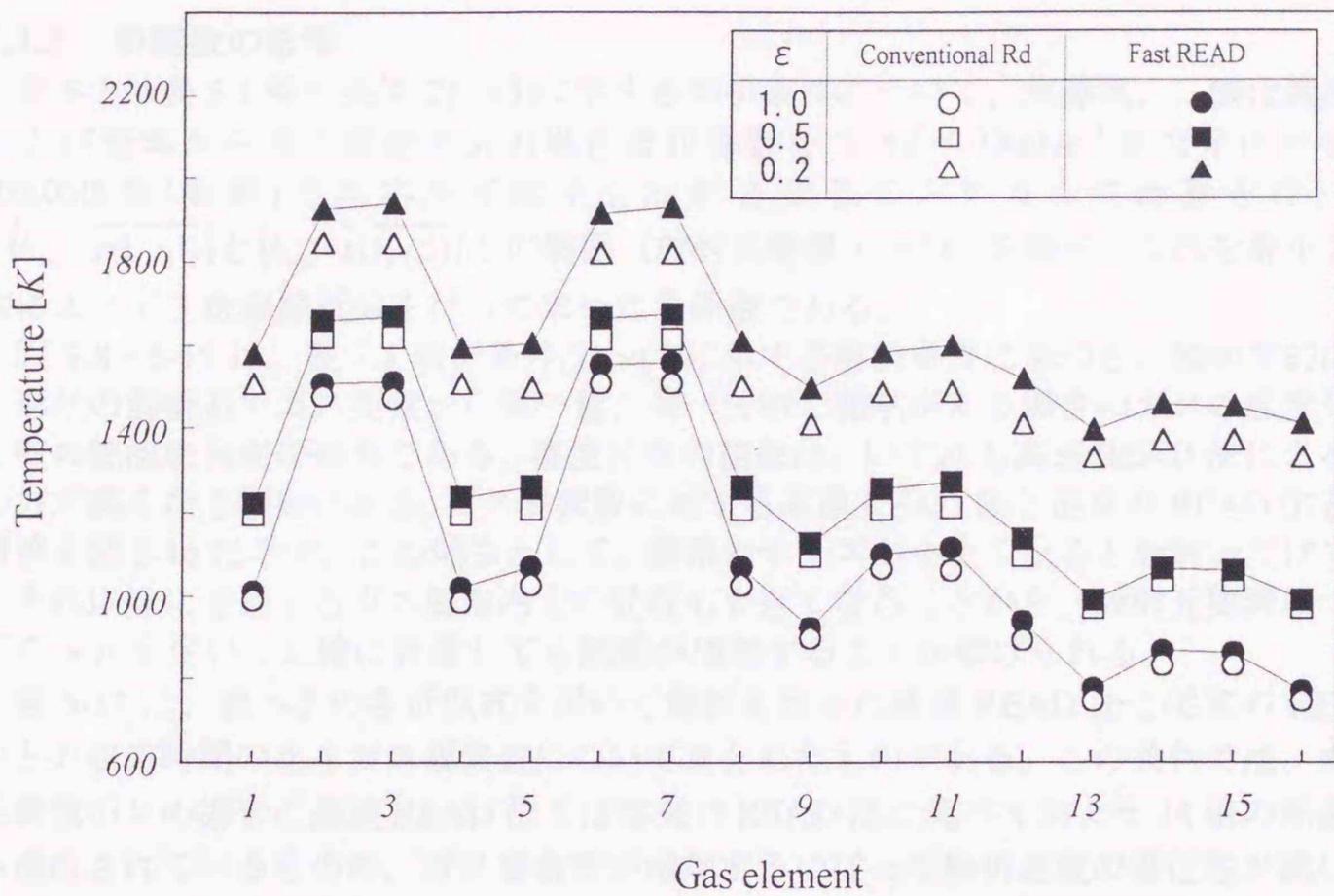


Fig.5-6 Effect of wall emissivity on the results of gas temperature profile

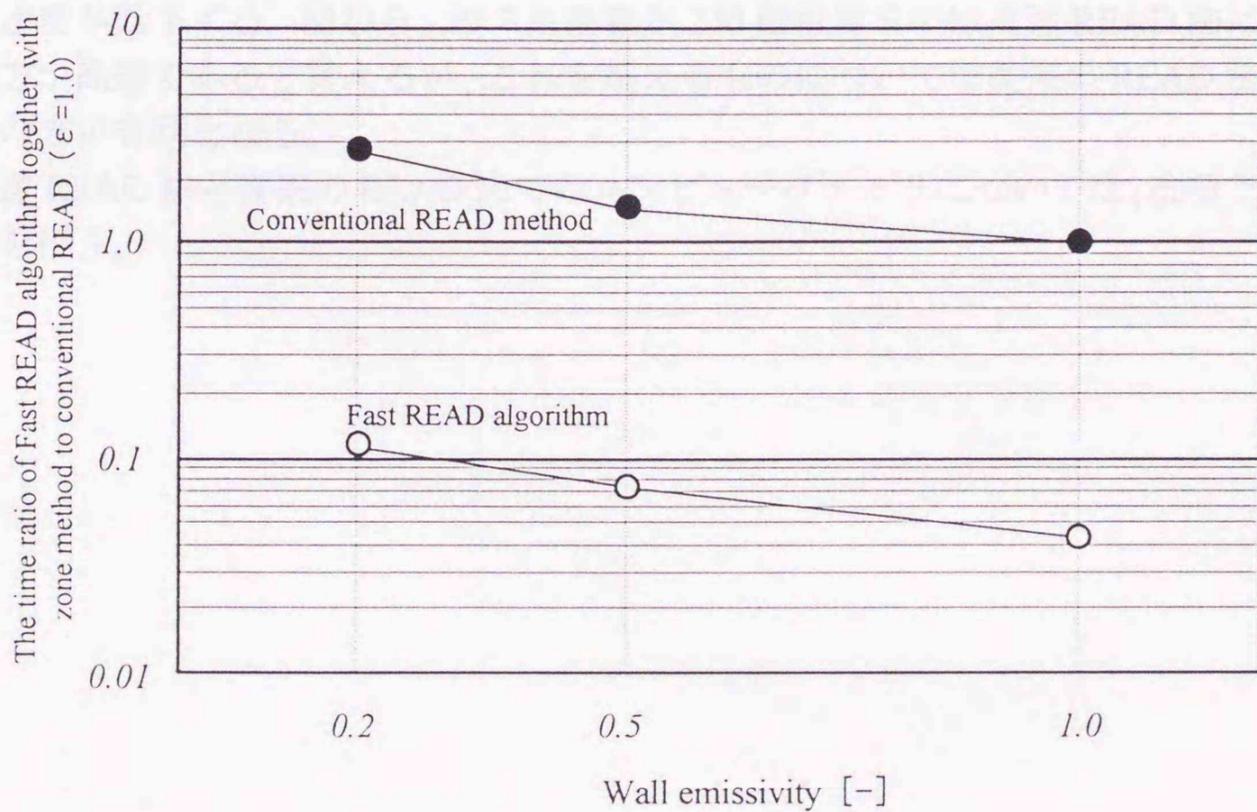


Fig.5-7 Result of convergence time for wall emissivity

5.3.3 要素数の影響

表 5-2 は表 5-1 解析条件(2)~(5)に示す各解析条件について、水蒸気、二酸化炭素、および窒素から成る混合ガスの単色吸収係数を $0.001 \sim 2000 \text{ m}^{-1}$ まで変化させて $100,000$ [個/要素] のエネルギー粒子を放射させるモンテカルロ計算を行い、 $F(k_{v,i} \cdot \overline{x(1,j,1)})$ と $(k_{v,i} \cdot \overline{x(1,j,1)})$ との関係 (放射元要素 $i (=1)$) を調べ、これを最小二乗法によって 3 次曲線近似を行って求めた各係数である。

図 5-8~5-15 は、表 5-1 解析条件(2)~(5)に示す各解析条件に基づき、幾何学的に同一形状の解析系でガス要素から同一量、同一分布で発熱がある場合のガスの温度分布と壁の熱流束分布の結果である。温度分布の結果は、いずれも高速 READ 法による値の方が高くなる傾向にある。ガス要素数に対する高速 READ 法と従来の READ 法との偏差を図 5-16 に示す。この理由として、要素のサイズが小さくなると放射元だけでなくそれ以降に通過するガス要素内での吸収も大きくなることから、放射元要素についてのみ F を用いて正確に計算しても誤差が増加することが挙げられる。

図 5-17 は、表 5-2 の各近似式を用いて解析を行った高速 READ 法と従来の READ 法との収束時間の比をガス要素数についてまとめたものである。この条件では、ガス要素数が 9 の場合に高速 READ 法では従来の READ 法に比べておよそ 14 倍の高速化が達成されているものの、ガス要素数が増加するに従って解析速度の優位性が減少する結果となる。この要因として、ガス要素数の増加とともに必要となるコンピュータメモリ量の増加分が挙げられる。要素数の増加に対して必要なコンピュータメモリ量は、従来の READ 法でも高速 READ 法でも増えるが、高速 READ 法ではその増分が顕著なことから解析中に頻繁にメモリとアクセスすることとなり、この時間によって解析速度が低下する。図から、ガス要素数が 250 個程度までは高速 READ 法による解析の方が高速であると言えるが、これを超えるものについては従来の READ 法による解析の方が有利となる。

高速 READ 法と従来の READ 法でのコンピュータメモリについては、次項で詳細に検討を行う。

Table.5-2 Fncion F

$$F(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) \cong a_0 + a_1(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) + a_2(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})^2 + a_3(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)})^3$$

(1) Gas elements 3×3 (Table.5-1 Condition (2)、 5-1(b))

$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < -2.5$	$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$-2.5 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 0.0$	$a_0 = 0.486, a_1 = -0.711$ $a_2 = -0.343, a_3 = -0.0565$
$0.0 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 2.5$	$a_0 = 0.498, a_1 = -0.744$ $a_2 = 0.384, a_3 = -0.0664$
$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) > 2.5$	$a_0 = 1,$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

(2) Gas elements 6×6 (Table.5-1 Condition (3)、 5-1(c))

$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < -2.5$	$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$-2.5 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 0.0$	$a_0 = 0.488, a_1 = -0.710$ $a_2 = -0.342, a_3 = -0.0562$
$0.0 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 2.5$	$a_0 = 0.497, a_1 = -0.7354$ $a_2 = 0.376, a_3 = -0.0649$
$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) > 2.5$	$a_0 = 1,$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

(3) Gas elements 9×9 (Table.5-1 Condition (4)、 5-1(d))

$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < -2.5$	$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$-2.5 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 0.0$	$a_0 = 0.486, a_1 = -0.7100$ $a_2 = -0.342, a_4 = -0.0563$
$0.0 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 2.5$	$a_0 = 0.498, a_1 = -0.7440$ $a_2 = 0.384, a_4 = -0.0667$
$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) > 2.5$	$a_0 = 1,$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

(4) Gas elements 12×12 (Table.5-1 Condition (5)、 5-1(e))

$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < -2.5$	$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$
$-2.5 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 0.0$	$a_0 = 0.487, a_1 = -0.7112$ $a_2 = -0.343, a_4 = -0.05643$
$0.0 < \log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) < 2.5$	$a_0 = 0.487, a_1 = -0.711$ $a_2 = 0.343, a_4 = -0.0564$
$\log_{10}(k_{v,i} \cdot \overline{x(i,j,i)}) > 2.5$	$a_0 = 1,$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

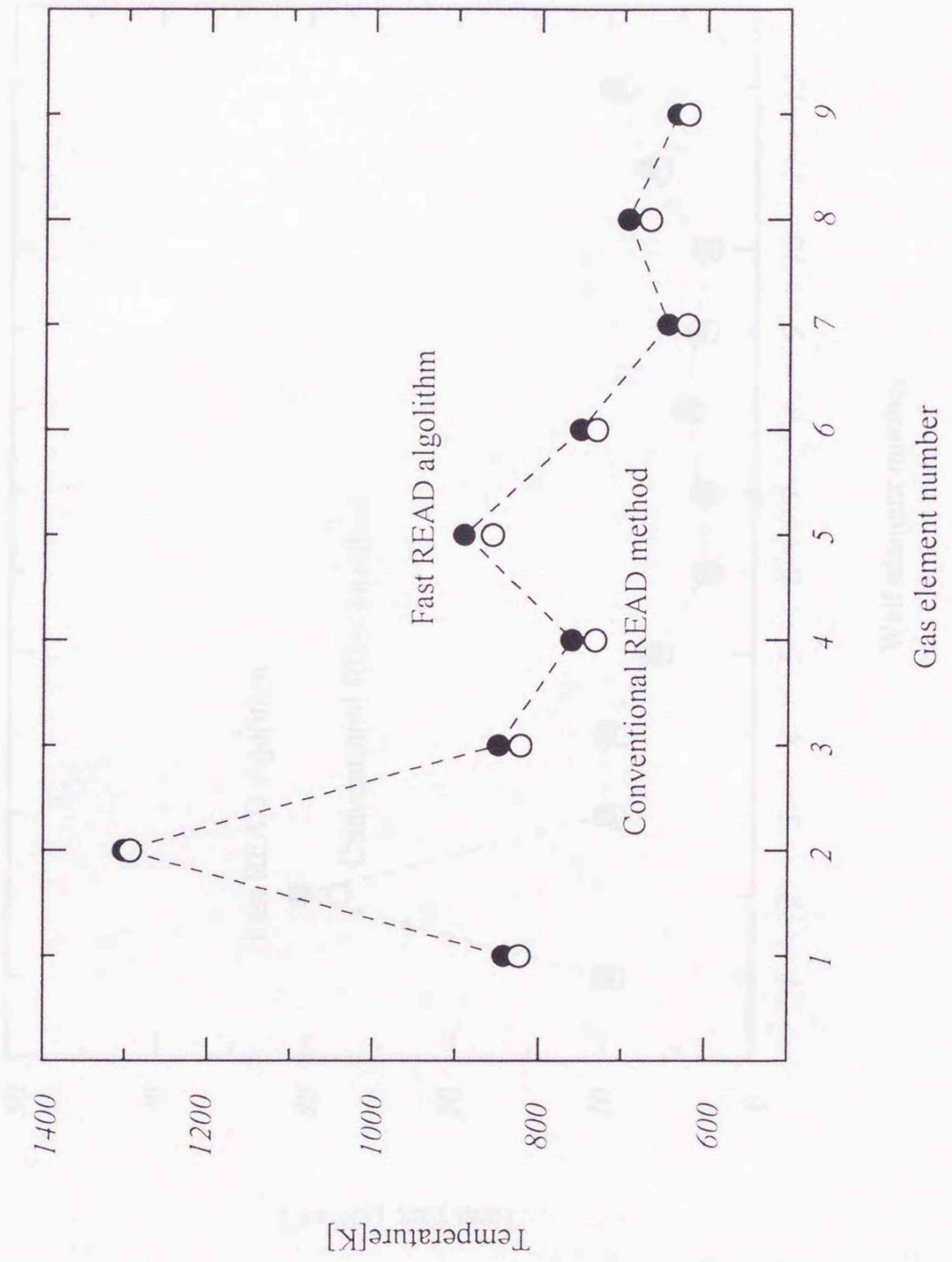


Fig.5-8 Result of gas temperature profile
(Table.5-1 Condition(2),Fig.5-1(b))

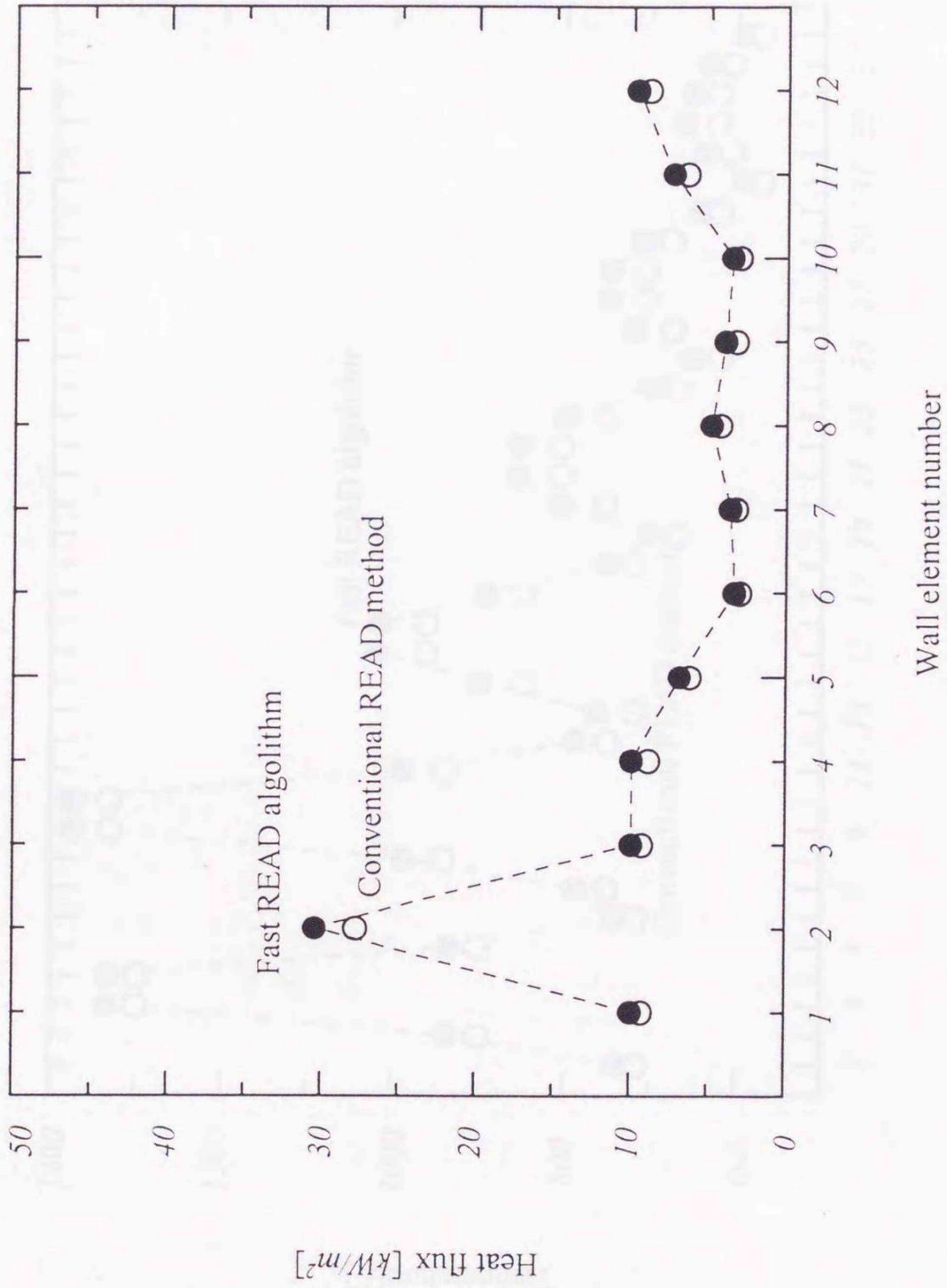


Fig.5-9 Result of gas temperature profile
(Table.5-1 Condition(2), Fig.5-1(b))

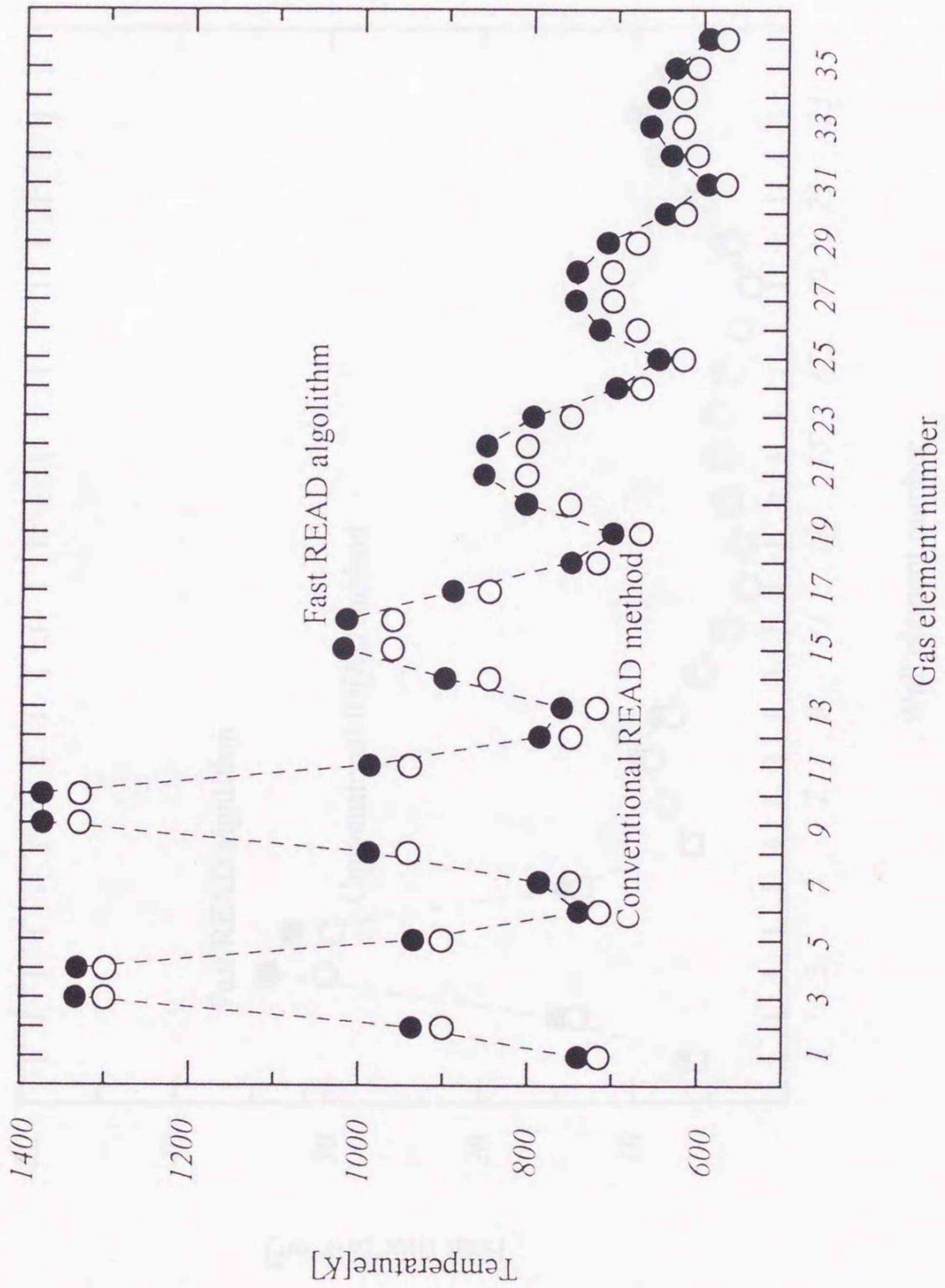


Fig.5-10 Result of gas temperature profile
(Table.5-1 Condition(3),Fig.5-1(c))

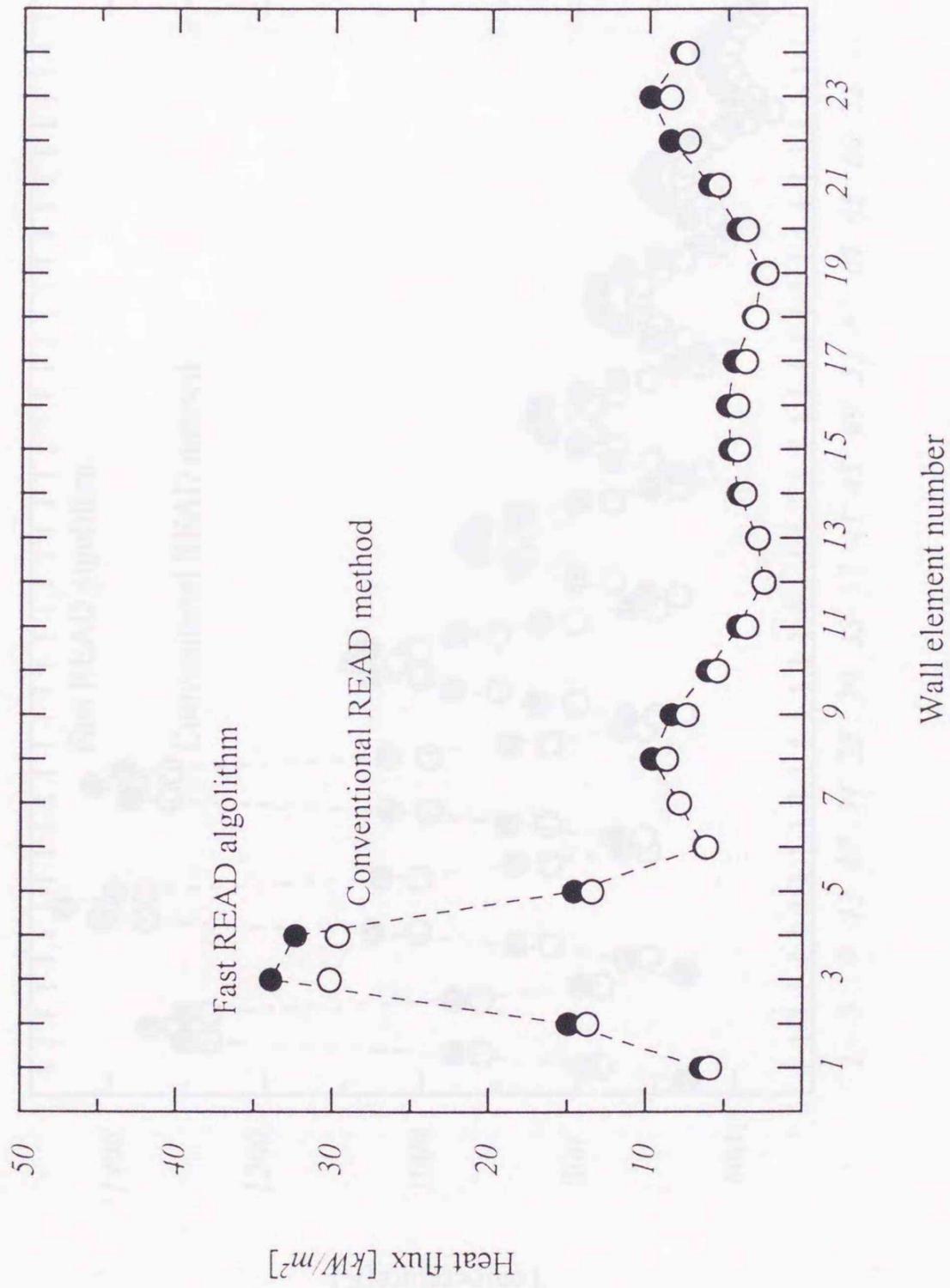
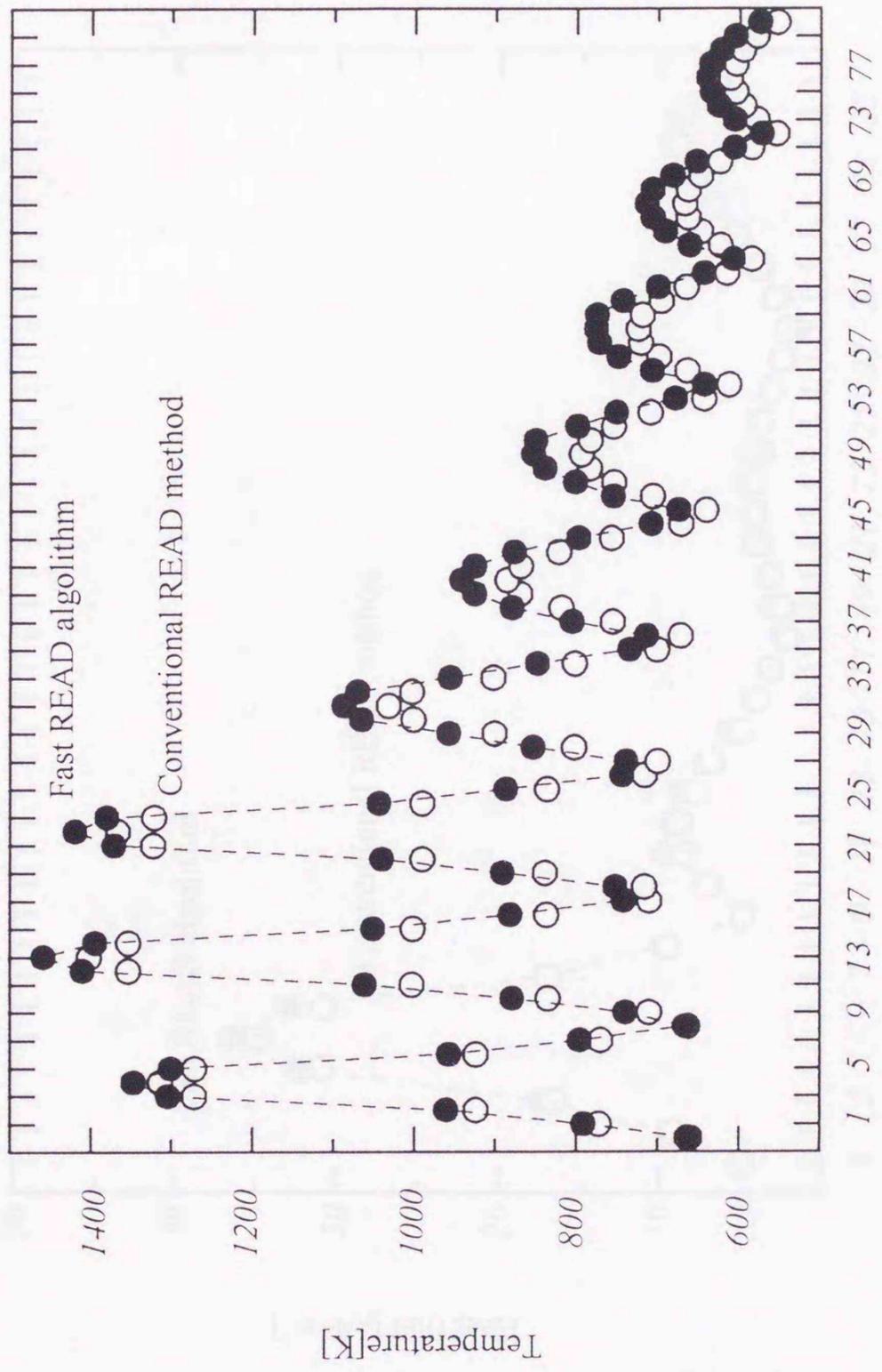


Fig.5-11 Result of wall heat flux profile
(Table.5-1 Condition(3), Fig.5-1(c))



Gas element number

Fig.5-12 Result of gas temperature profile
(Table.5-1-1 Condition(4),Fig.5-1(d))

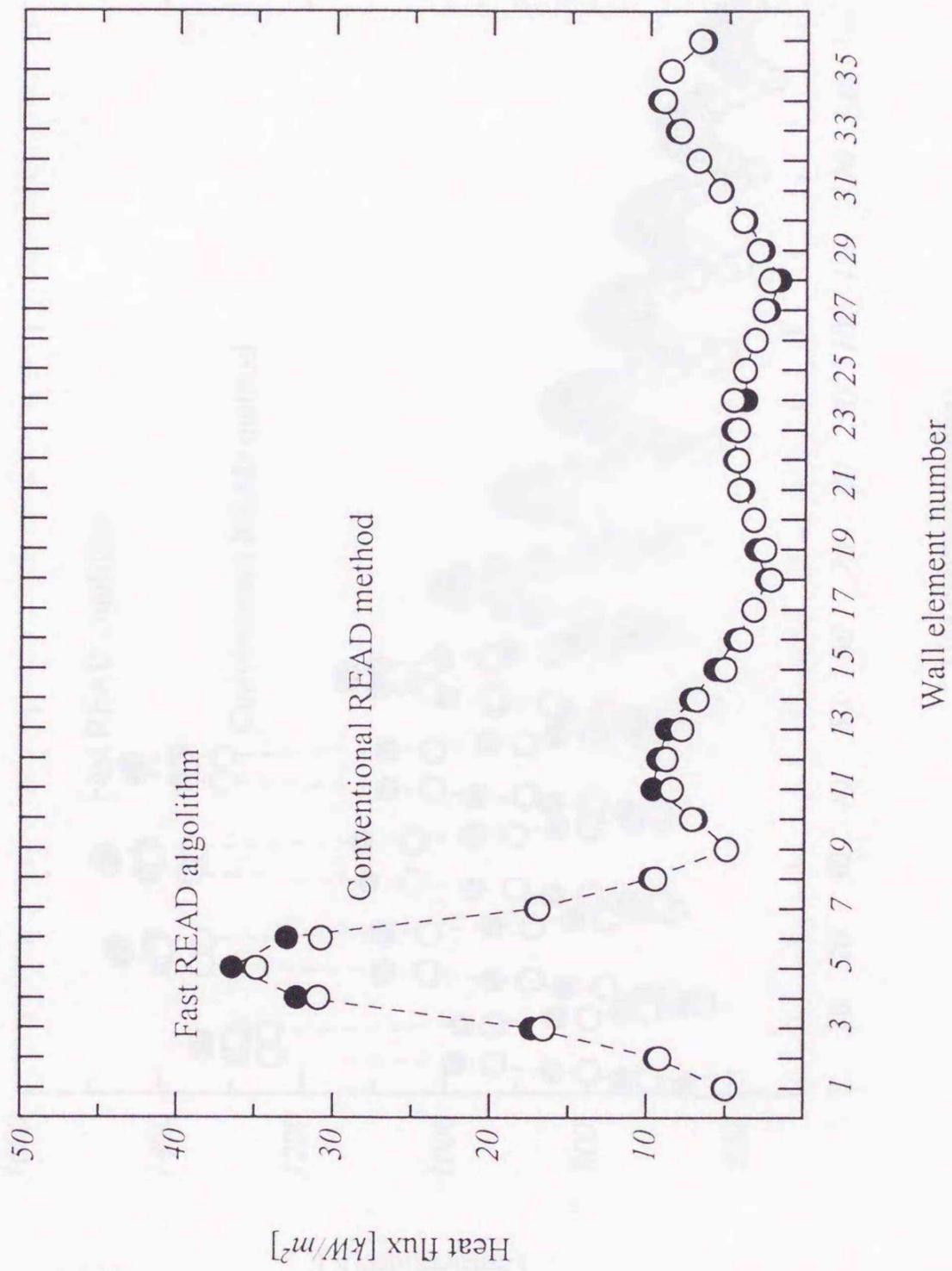


Fig.5-13 Result of wall heat flux profile
(Table.5-1 Condition(4),Fig.5-1(d))

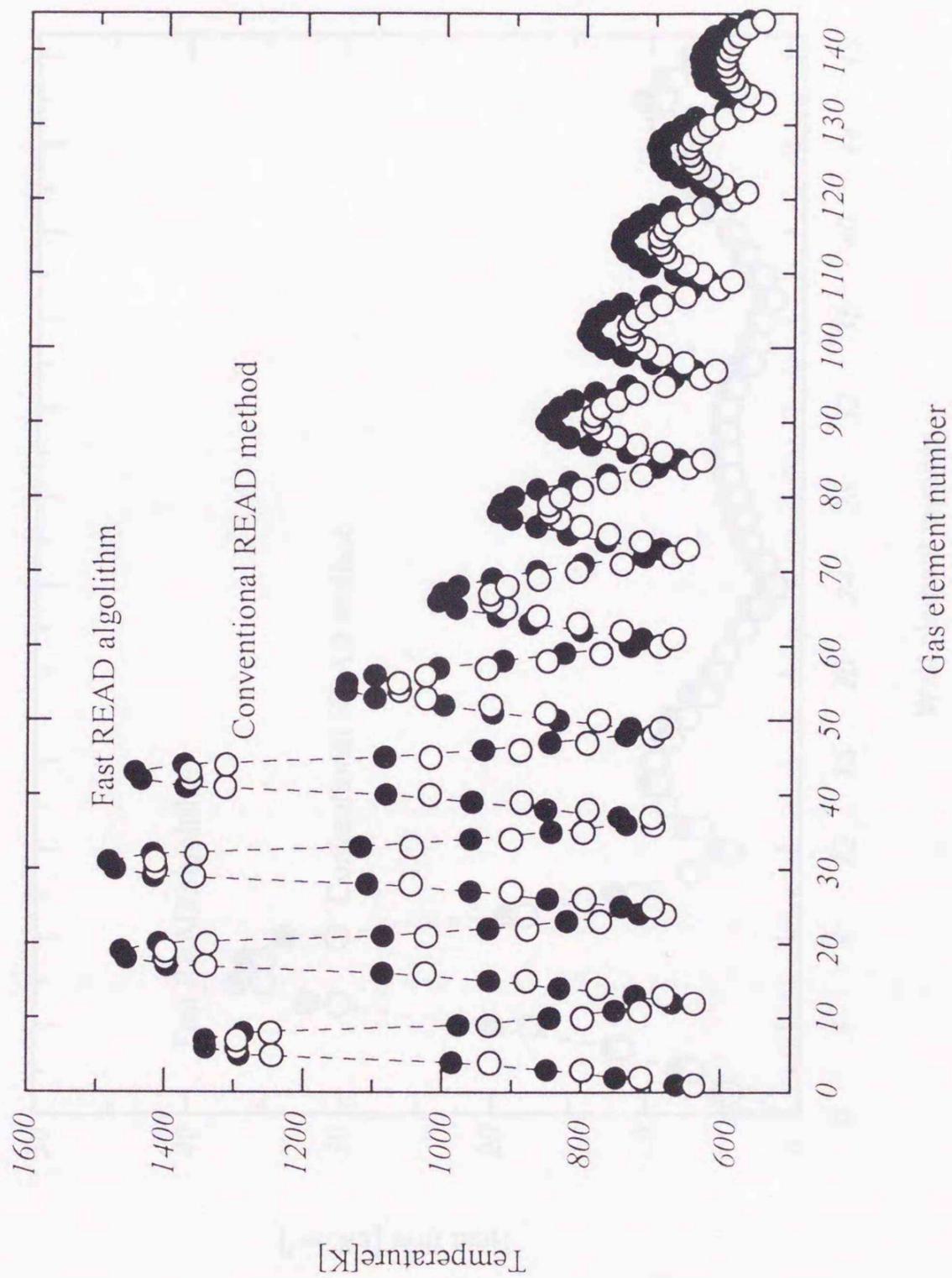


Fig.5-14 Result of gas temperature profile
(Table.5-1 Condition(5),Fig.5-1(e))

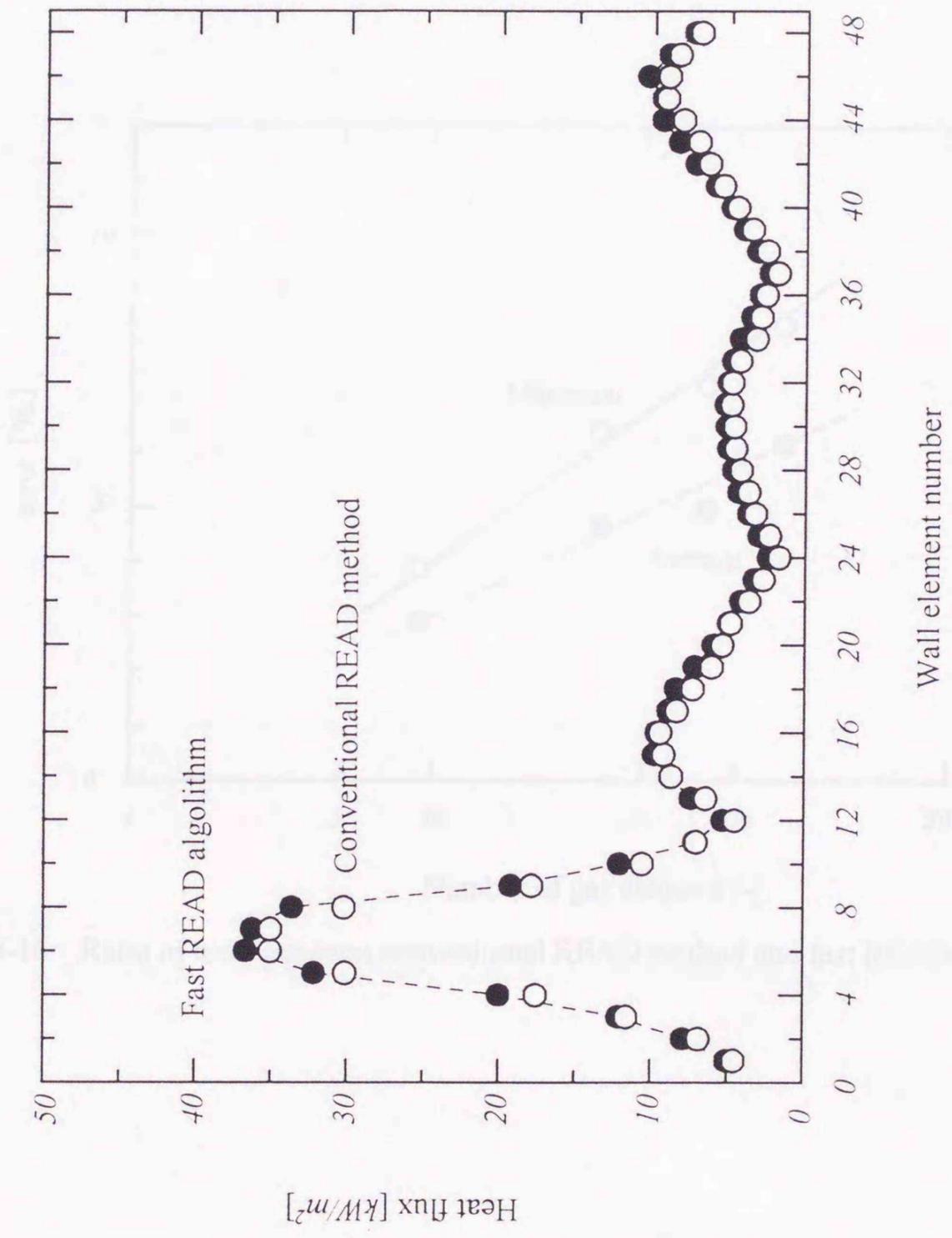


Fig.5-15 Result of wall heat flux profile
(Table.5-1 Condition(5),Fig.5-1(e))

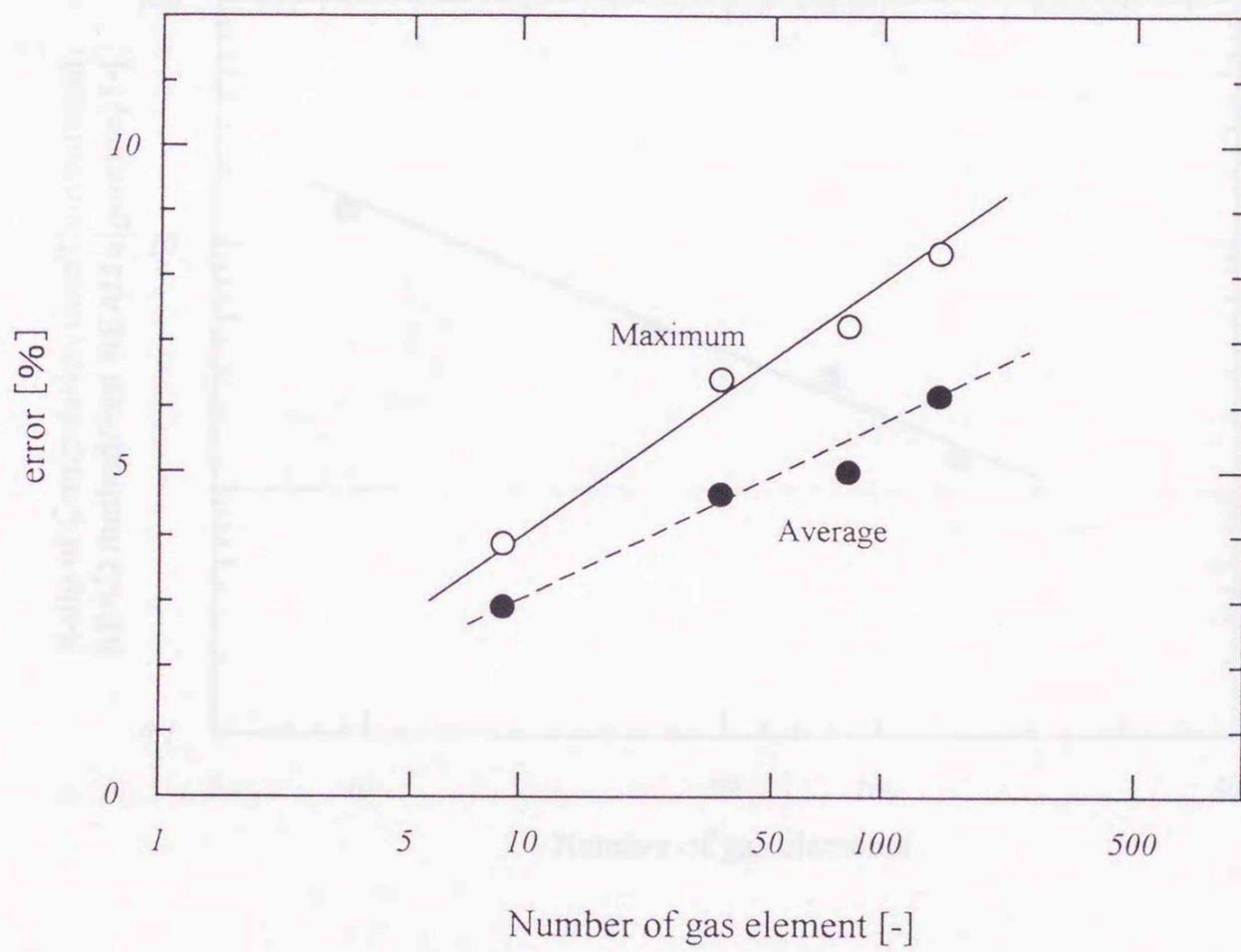


Fig.5-16 Ratio of error between conventional READ method and fast READ algorithm

5.5.4 収束に必要なメモリ量と計算時間の関係

図5-17は、計算機で実行された計算結果の収束に必要なメモリ量と計算時間の関係を示している。図5-17は、計算機で実行された計算結果の収束に必要なメモリ量と計算時間の関係を示している。図5-17は、計算機で実行された計算結果の収束に必要なメモリ量と計算時間の関係を示している。

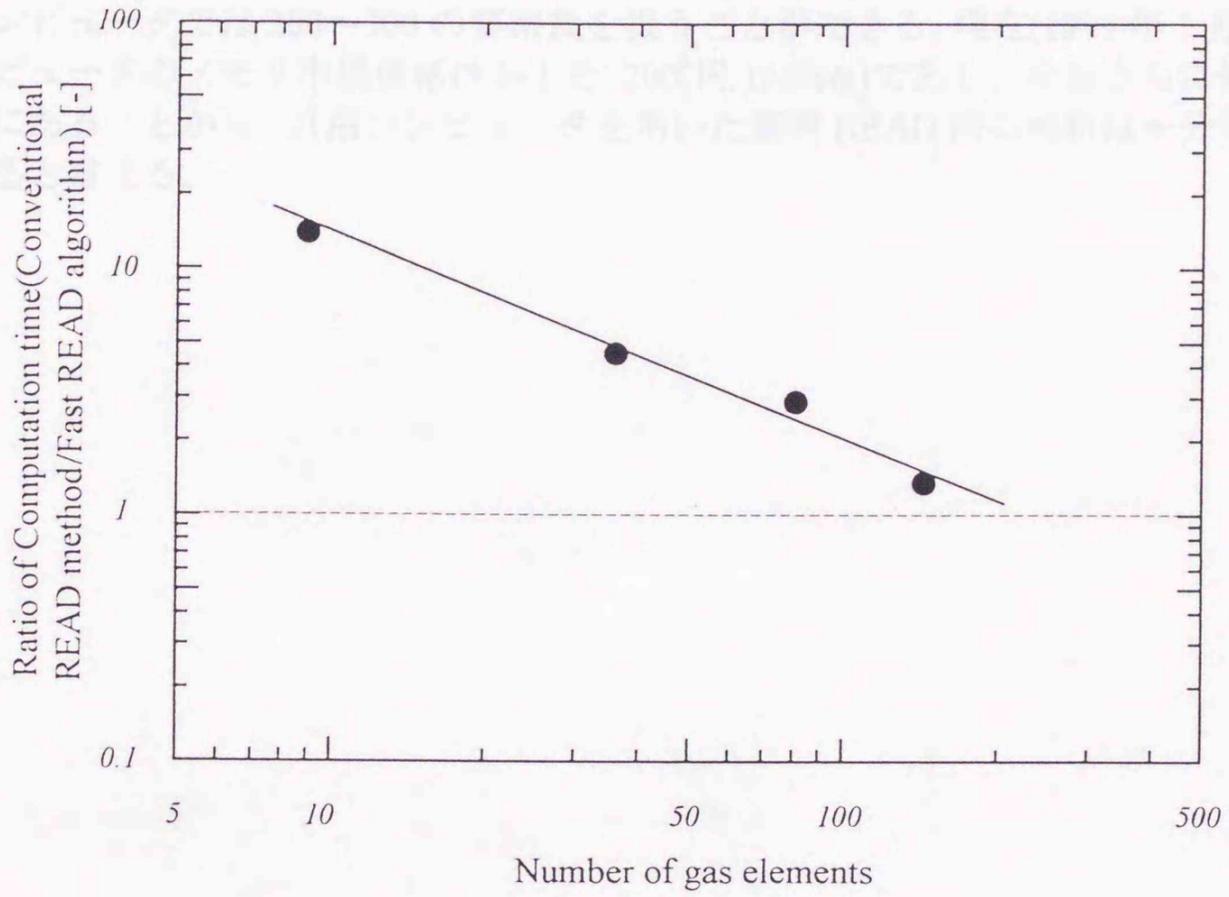


Fig.5-17 Ratio of convergence time for number of gas element

5.3.4 解析に要するコンピュータメモリ量の評価

図 5-18 は、ガス要素数を変化させたときに従来の READ 法と高速 READ 法で必要な解析に要するコンピュータメモリ量の結果を整理したものである。高速 READ 法に必要なメモリ量は、式(3・4)の重み付き算術平均長さ ($= \overline{x(i, j, h)}$) を全て記憶する場合は要素数の 3 乗に比例して増加するが、3.4 節で述べたようにあるガス要素から放射されて直線的に進むエネルギー粒子が幾何学的に途中で通過しえない要素の記憶分を除き、さらに 3 次元配列の取り扱いを 2 次元配列に置き換えたことでコンピュータのメモリアクセス時間の短縮化を組み入れている。これらによる計算時間の短縮効果は、2~3 倍程度である。図 5-18 の結果から、標準的な 200[Mbyte]のメモリを実装している汎用コンピュータでは 200~300 の要素数を扱うことができる。現在(1999 年 1 月)の汎用コンピュータのメモリ市場価格はおよそ 200[円/1Mbyte]であり、今後さらに低下する傾向にあることから、汎用コンピュータを用いた高速 READ 法の解析は十分実用可能であると言える。



5.3.5 直線スケール/対数スケールでの比較

図5-18は、直線スケール/対数スケールでの比較を示している。この図は、コンピュータメモリ（Mb）とガス元素の数を比較している。図には、Fast READ algorithm（黒い丸）とConventional READ method（白い丸）の2つのデータ系列が示されている。Fast READ algorithmは、Conventional READ methodよりもメモリ使用量が大幅に少ないことがわかる。特に、ガス元素の数が100を超えると、Conventional READ methodのメモリ使用量は急激に増加するのに対し、Fast READ algorithmは依然として低いメモリ使用量を維持している。

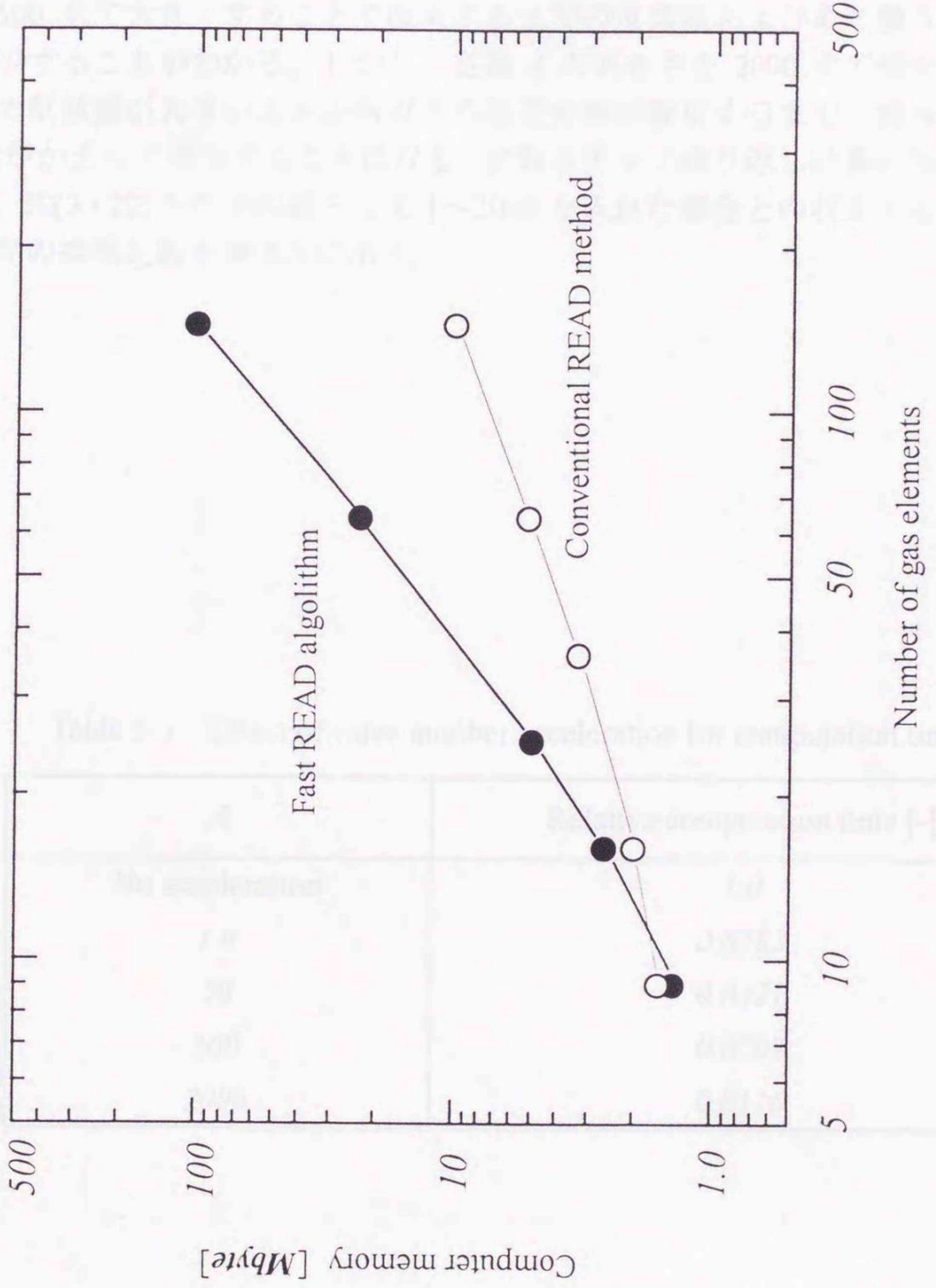


Fig.5-18 Computer memory for fast READ algorithm

5.3.5 波数ステップ繰り返し計算の加速化

壁面の放射率を 0.5 として、3.9 節の波数ステップ繰り返し計算の加速化を行ったときの、反復回数に対する波数繰り返し数の変化を図 5-19 に示す。この図は、式(3・22)中の A の値として 1~2000 を用いてガスの温度分布の繰り返し修正計算を行い、C1~C4 の各ケースがどの時点で収束したかを示している。これにより式(3・22)の定数 A を 1~500 まで大きくすることで収束するまでの反復数および取り扱う波数ステップ数が減少することがわかる。しかし、定数 A の大きさを 2000 まで増やすと、波数ステップの削減数が大きいことからガスの温度分布が収束するまでに繰り返し収束回数 (LOOP) がかえって増加することになる。波数ステップ繰り返し計算の加速を行わない場合と、式(3・22)中の A の値として 1~2000 を入れた場合との収束するまでに要した計算時間の結果比較を表 5-3 に示す。

Table.5-3 Effect of wave number acceleration for computation time

A	Relative computation time [-]
No acceleration	1.0
1.0	0.8783
50	0.8421
500	0.6707
2000	0.8116

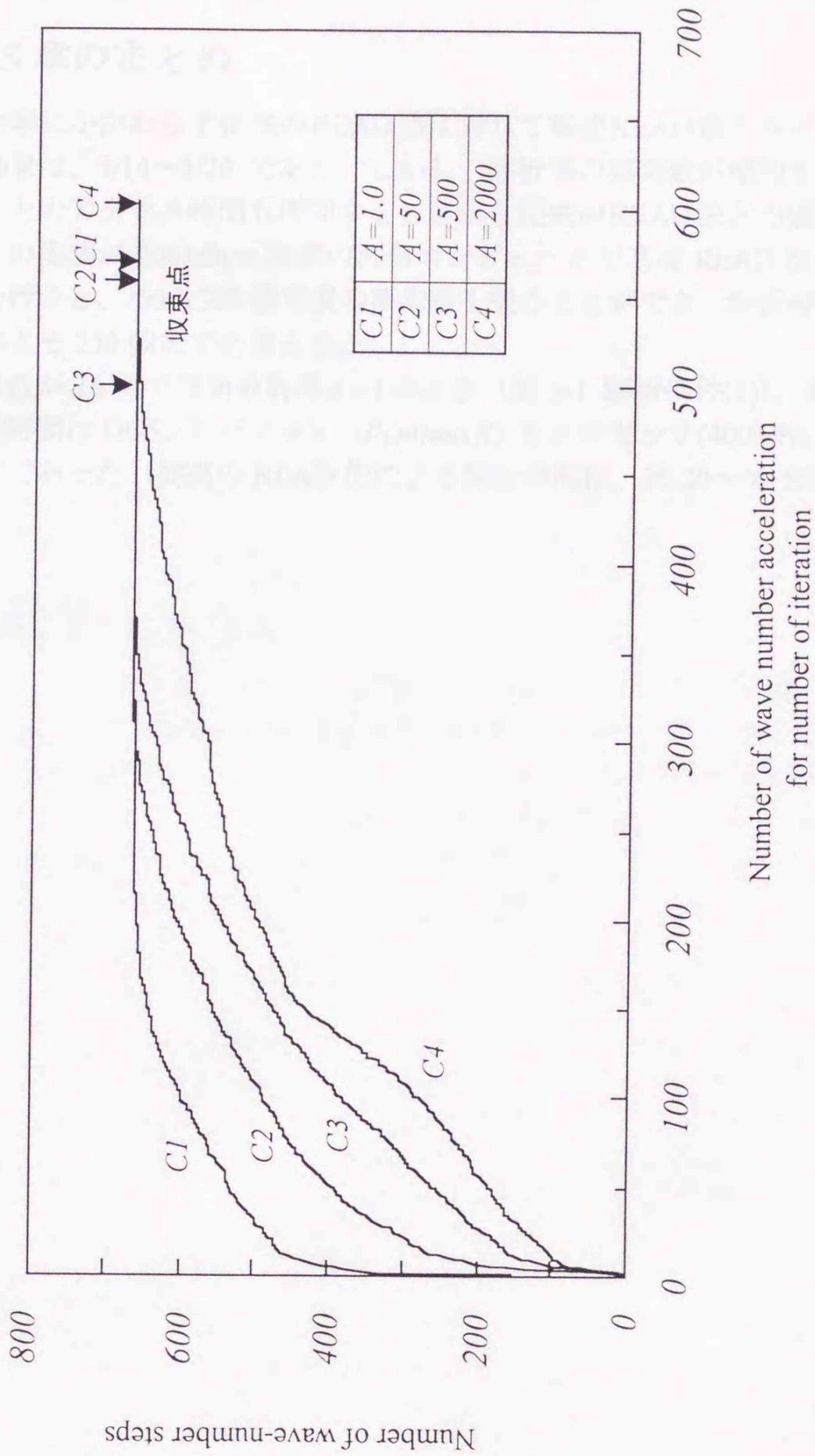


Fig.5-19 Effect of wave number acceleration for number of iteration

5.4 第5章のまとめ

壁面放射率にかかわらず従来のREAD法に対して高速READ法アルゴリズムによる高速化の効果は、1/14~1/20である。しかし、解析系の要素数が増加するとコンピュータメモリとのアクセス時間も増加することから従来のREAD法との優位性が減少する。メモリの実装が200Mbyte程度の汎用コンピュータで高速READ法によるふく射伝熱解析を行うと、200~300個程度の要素数を扱うことができ、解析時間の有利性は要素数がおよそ250個までと言える。

ガス要素数が16個で壁面放射率 $\varepsilon=1$ のとき(表5-1 解析条件(1))、高速READ法による解析時間はDOS/Vパソコン(Pentium(R) IIプロセッサ(400MHz)256MB RAM)で2分程度であった(従来のREAD法による解析時間は、約20~40分)。

第6章 結 言

1. 黒体壁に囲まれた非灰色ガスのふく射伝熱解析について、モンテカルロ計算を繰り返し行う必要がないことで高速解析が実現する高速 READ アルゴリズムを示した。また、灰色壁への拡張については、ゾーン法を組み入れるアルゴリズムを示して可能とした。
2. モンテカルロ計算で求めたふく射エネルギー束の軌跡の記憶に関して、幾何学的に通過し得ない要素については省き、さらにこの記憶では配列の次元を2次元に改めたことでコンピュータのメモリアクセス時間の短縮化を行った。この短縮化効果は、収束時間比で2~3倍である。
3. この効果と波数ステップ繰り返し計算の加速化を導入した高速 READ アルゴリズムにより、従来の READ 法に比べて計算時間は1/14~1/20 となり得るが、解析系の要素数が増加するとコンピュータメモリとのアクセス時間を要することから、この優位性は減少する。本研究で開発した高速 READ 法の適用は、概ね系の要素数が250~300個以下が適当であることを示した。

参考文献

- [1] Hottel, H.C., and Sarofim, A.F., 1967, Radiative Transfer, McGraw-Hill, New York.
- [2] Goody, R.M., and Yung, Y.L., 1989, Atmospheric Radiation Theoretical Basis, 2nd ed., Oxford University Press, Inc., New York.
- [3] Hottel, H.C. and Cohen, E.S., Radiant Heat Exchange in a Gas-filled Enclosure : Allowance for Nonuniformity of Gas Temperature, E.S.A.I.Ch.E. Journal., vol.4, No.1, 3-14 (1958).
- [4] Taniguchi, H., ほか4名, Proc. 7th. Int. Conf. Numer. Meth. Thermal Prob., 7(1991-7), 748-757.
- [5] 谷口博、Wen-Jey Yang、工藤一彦、黒田明慈、持田明野、パソコン活用のモンテカルロ法による放射伝熱解析、(1994)、103-112、コロナ社。
- [6] 円山重直、相原利雄：光線放射モデルによるふく射要素 (REM^2) を用いた任意形状ふく射性媒体と物体面間のふく射伝熱、日本機械学会論文集 (B編)、62巻、595号 (1996)。
- [7] 工藤一彦、谷口博、黒田明慈、小幡正一、大高円、横田洋：モンテカルロ法による非灰色媒体中の放射熱伝達解析手法の改良、日本機械学会論文集 (B編) 59巻 560号(1993)、1265-1270。
- [8] 大森敏明：工業用熱設備の性能予測法の研究、東京ガス株式会社技術研究所、技術研究報告第26号(1982)。
- [9] 大森敏明、永田敬博、谷口博、工藤一彦：工業用燃焼炉の三次元伝熱解析 (モンテカルロ法とゾーン法を併用した解法と鋼材加熱炉への適用)、日本機械学会論文集 (B編) 57巻 542号 (1991-10)。
- [10] 木村雄二、国尾武：材料、32、361 (1983)、1114。
- [11] 木村雄二、山田邦博、清水真佐男、国尾武：日本機械学会論文集、42巻 353号 (1974)。
- [12] J.N. Yang : ASTM STP 617 (1977)、272。
- [13] H. Kitagawa, T. Hisade : Proc. 3rd ICPVT, (1977)
- [14] 北川英夫、久田俊明：日本機械学会論文集 (A編)、45巻 (1979) 1033。

- [15] 中易秀敏、広瀬浩一、森健一、加瀬滋男：材料、29、316 (1980)、44.
- [16] 中島正貴、中易秀敏、北村隆行、西川出：材料強度の確率モデル(10)、
機械の研究 第49巻、第4号 (1997)、493-499.
- [17] H.Taniguchi, W.J. Yang, K.Kudo, H.Hayasaka, M.Oguma, A.Kusama, I.Nakamachi and
N.Okigami : Radiant Transfer in Gas Filled Enclosures by Radiant Energy Absorptions
Distribution Method, Proceedings of 8th International Heat Transfer Conference, San
Francisco(1986),757-762.
- [18] 大高 円：モンテカルロ法による非灰色ガスの放射解析、北海道大学大学院工学
研究科機械工学専攻博士論文(1994).
- [19] Tien, C.L., Thermal Radiation Properties of Gases, Advances in Heat Transfer
5,(1968),253.
- [20] Edwards, D.K. and Balakrishnan, A., Int. J. Heat Mass Transf., 16-1(1973), 25-40.
- [21] Suhas V. Patankar : コンピュータによる熱移動と流れの数値解析、(1985)、森北出
版.
- [22] William H.Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery,
NUMERICAL RECIPES in C, 55-60、技術評論社.
- [23] 津田孝夫：モンテカルロ法とシミュレーション、(1990)、培風館.
- [24] Howell, R.H., and Morris P., Monte Carlo Solution of Radiant Heat Transfer in a Nongray
Nonisothermal Gas with Temperature Dependent Properties, A.I.Ch.E Journal, vol.10,
No.4, (1964),562.

謝 辞

本論文は、著者が北海道大学大学院工学研究科博士後期課程在学中に、宇宙環境工学講座宇宙熱物理工学分野において行った研究成果をまとめたものであります。本研究は、計画、遂行、結果の検討そして論文の作成まで終始北海道大学大学院工学研究科工藤一彦教授のご指導のもとに行われました。

論文を作成するにあたり、論文全体にわたって綿密なご指導ならびに多くの御助言を賜りました北海道大学大学院工学研究科工藤一彦教授、黒田明慈助教授、持田明野助手、須田金文氏に厚く御礼申し上げます。また、本論文をまとめるのにあたり、機械科学専攻の伊藤献一教授、菱沼孝夫教授、そして量子エネルギー工学専攻の熊田俊明教授の各氏から貴重なご意見ご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。また、本論文の審査にあたり機械科学専攻の工藤勲教授、野口徹教授、木谷勝教授、宮本登教授、石川博将教授、井上良紀教授、藤川重雄教授から多くのご意見をいただきました。深く感謝いたします。

修士課程修了後8年間の企業生活を送って来ましたが、工藤一彦教授のご好意・ご支援により改めて研究開発、そして大学院教育の素晴らしさを実感する機会を与えていただきました。この3年間の学究生活は、再度迎える実社会での活動に大きな意義があるものと確信しております。このような機会を与えてくださいましたことに対する感謝の気持ちは、私の貧弱な語彙ではとても言い表すことができません。

また、様々な場面で暖かい援助をしてくださいました宇宙熱物理工学分野の院生と卒業生の方々に心から御礼申し上げます。特に、本研究の基礎を担われた大高円氏（現・電力中央研究所）、石橋伸哉氏（現・日立製作所）には研究を進める上で大変参考となる研究成果を残してくれました。深く謝意を表します。さらに、博士課程で1年間苦楽を共にし励ましていただいた戸谷剛氏（現・北海道大学大学院工学研究科助手）には感謝と同時に今後一層のご活躍を祈念いたします。

社会人を経たからの再度の大学院入学について両親には大変な援助をしていただきました。本稿の完成を見ることはなかった母に対し、面と向かって報告をできないことが残念でなりません。弟夫妻と本稿の執筆中に誕生した姪、工藤一彦教授夫人、黒田明慈助教授には幾度も精神的な支えとなっていただきました。心より感謝申し上げます。

最後に、工藤一彦教授、黒田明慈助教授、持田明野助手、須田金文氏のご健康と益々のご活躍をお祈り申し上げます。3年間、有り難うございました。

大正十三年四月二十日
東京市立図書館蔵
大正十三年四月二十日
東京市立図書館蔵

inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



Blue

Cyan

Green

Yellow

Red

Magenta

White

3/Color

Black

Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A

1

2

3

4

5

6

M

8

9

10

11

12

13

14

15

B

17

18

19

