HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	信号適応性を有する統計的画像復元法に関する研究
Author(s)	田中, 章
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第5273号
Issue Date	2000-09-29
DOI	https://doi.org/10.11501/3175334
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51674
Type	doctoral thesis
File Information	000000390836.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

信号適応性を有する統計的画像復元法に関する研究

田中　章

信号適応性を有する統計的画像復元法に関する研究

田中　章

目 次

1 序論 **5**

1.1 本研究の背景 5

1.2 本研究の目的 7

1.3 本論文の構成 8

2 画像の観測過程と復元過程 **10**

2.1 線形の画像観測復元過程の定式化 10

2.2 その他の画像観測復元 12

2.2.1 観測画像のみに基づく復元 12

2.2.2 非線形な復元 14

3 古典的画像復元法とその発展形概括 **15**

3.1 はじめに 15

3.2 一般逆行列と復元問題 16

3.3 一般逆フィルタ 19

3.4 パラメトリック一般逆フィルタ 20

3.5 拘束条件付最小二乗フィルタ 22

3.6 適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ 24

3.7 非等方拡散フィルタ 26

3.8 総括 28

4 統計的画像復元法 **29**

4.1 はじめに 29

4.2 ウィーナーフィルタ 30

4.3 射影フィルタ族 31

4.3.1 はじめに 31

4.3.2 射影フィルタ 31

4.3.3 部分射影フィルタ 33

4.3.4 平均射影フィルタ 35

4.3.5 射影フィルタ族の統一理論 36

4.3.6 射影フィルタ族の分離核表現 37

4.3.7 総括 42

4.4 パラメトリック射影フィルタ族 43

4.4.1 はじめに 43

4.4.2 パラメトリック射影フィルタ 43

4.4.3 パラメトリック部分射影フィルタ 45

4.4.4 パラメトリックウィーナーフィルタ 45

4.4.5 パラメトリック射影フィルタ族の統一理論 46

4.4.6 総括 50

4.5 正則化パラメトリック射影フィルタ族 51

4.5.1 はじめに 51

4.5.2 正則化パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体的な形式 52

4.5.3 正則化パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係 . . . 52

4.5.4 総括 54

4.6 ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族 55

4.6.1 はじめに 55

4.6.2 ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体形 55
4.6.3 ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係 59
4.6.4 総括 69

5 信号適応性を有する統計的画像復元法 71

5.1 はじめに 71
5.2 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 72
5.2.1 はじめに 72
5.2.2 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体形 72
5.2.3 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の数値解法 77
5.2.4 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係 79
5.2.5 総括 86
5.3 ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 87
5.3.1 はじめに 87
5.3.2 ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体形 88
5.3.3 ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係 92
5.3.4 総括 104

6 ウェーブレット理論 106

6.1 はじめに 106
6.2 準備 106
6.3 ウェーブレット変換 107
6.4 ウェーブレット級数展開 109
6.5 多重解像度解析 111
6.6 ウェーブレット分解とウェーブレット再構成 113
6.7 ディジタルフィルターによるウェーブレット分解・再構成 115

6.8 直交スケール関数と直交ウェーブレットの例 118
6.8.1 Haar のウェーブレット 118
6.8.2 Daubechies のウェーブレット 120

7 ウェーブレット理論に基づく画像信号の特徴記述と復元問題への応用 124

7.1 はじめに 124
7.2 画像信号のウェーブレット変換 125
7.3 多重解像度表現における階層間の相関とその復元問題への応用 126
7.3.1 多重解像度表現における階層間相関 126
7.3.2 多重解像度表現の性質を用いた復元アルゴリズムの構成 130
7.4 多重解像度表現における階層間のエネルギー分布とその復元問題への応用 . 131
7.4.1 変換係数のエネルギー分布 132
7.4.2 凸射影法を用いた復元後処理への応用 135
7.4.3 パラメトリックフィルタにおけるパラメータ選択支援への応用 . . . 139
7.5 その他の画像信号処理への応用 (ディジタル画像の拡大) 143

8 数値例 149

8.1 はじめに 149
8.2 多重解像度解析における相関関係を適用した復元例 149
8.3 ノルム拘束に基づく正則化法の正則化効果の検証 157

9 結論 161

9.1 本論文の成果 161
9.2 課題と今後の展望 163

謝辞 165

参考文献 166

第 1 章

序論

1.1 本研究の背景

画像復元問題は，何らかの観測系や伝送系等のシステムの出力として観測された画像をもとに，未知である真の画像を推定する問題である．この枠組に属する工学的問題としては，大気の擾乱により劣化を受けた天体画像の復元をはじめとし，撮像時の物体及び撮像装置自体の物理的移動による流れ画像の復元，撮像装置の焦点ずれにより生じたボケ画像の復元，医療現場で用いられる CT(Computer Tomography) や MRI(Magnetic Resonance Imaging) といった画像診断装置における画像再構成等が挙げられる．また，画像のみならず，通信システムにおける伝送系の同定や等化器の構成，ニューラル・ネットワークの学習等に対しても同様の数学的枠組を適用可能であることから，復元は多岐に渡る分野で必要不可欠な要素技術であると言える．

画像復元手法として，これまで様々な手法が提案されているが，大きく以下の二つの系統に分類することが可能である．

- 観測された画像以外 (の多くのもの) は未知であるという前提に基づく復元手法
- 観測された画像の他，観測系や雑音に関する知識等も利用する復元手法

前者に属する復元手法は，その適用範囲が広範であるという利点を持つ反面，利用できる情報が極端に乏しいため，一般的に高精度の復元は困難であると言わざるを得ない．一方，

後者に属する復元手法は，利用できる情報を最大限に反映させることが可能であるため，前者に属する復元法と比較し高精度の復元が可能であると言えるが，観測系や雑音に関する正確な情報の獲得は困難であると言わざるを得ず，何らかの経験的知識等によりこれらの情報を推定する必要がある．以下，本論文では後者の立場に立脚し議論を進める．

後者に属する手法も，線形な観測系を対象とするものと，非線形な観測系までを対象とするものに大別することができる．後者については，適用可能な領域が広範であるが，利用できる数学的枠組が限られるため，前者と比較して一般的に高精度の復元は望めない．また，本節冒頭で述べたような現実に扱う問題の多くは，その観測系が線形であるか，厳密には線形でない場合でも線形であると仮定しても問題がない場合が多いと言える．そこで本論文では線形な観測系のみを対象とする．

線形な観測系を対象とする手法としては，最も古典的な復元法である一般逆フィルタやウィーナーフィルタをはじめとし，拘束条件付最小二乗フィルタ等に代表される，画像に関する情報等を効果的に利用するもの，射影フィルタ族及びパラメトリック射影フィルタ族等に代表される，雑音による影響を効果的に抑制できるもの等，様々な手法が提案されている．復元フィルタが持つべき性質としては，

(1) 未知の原画像が属する空間上で，最良の画像を推定できる．

(2) その際，観測過程で混入する雑音等の対処も，未知の原画像が属する空間上で行なうことができる．

(3) 画像に関する情報等が利用可能である場合には，それを有効に活用することができる．

等が挙げられる．既存の復元手法の多くは，上記性質のうち (1) についてはある程度の考慮がなされているものの，拘束条件付最小二乗フィルタや，それを改良した復元手法においては，性質 (3) に特化し，性質 (2) に関する考慮がなされておらず，逆に，統計的な情報を積極的に利用する射影フィルタ族やパラメトリック射影フィルタ族等においては，性質 (2) に対する保証はあるものの，性質 (3) に関しては，画像の存在範囲を線形部分空間に限

定したり，原画像空間の計量を画像の分散構造から決定する等の，画像が属する空間に関する大域的な情報以外は活用できない．従って，前述した性質全てを考慮できるような復元法の枠組は与えられていないというのが現状である．

1.2　本研究の目的

本論文では，前節で述べたような現状に照らし，性質 (2) を適切に考慮することが可能なパラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準の改良に基づき，

- 未知の原画像が属する空間上で，最良の画像を推定できる．

という性質を有するのはもちろんのこと，

- 雑音に適切に対処でき，
- 画像に関する情報等も統一的に扱うことが可能な

復元手法を構成することを目的とする．また，同様の方法論を用いることで正則化効果を有する復元法を構成できることを示し，更にこの二つの考え方を同時に適用した新しい復元法を提案することも併せて目的とする．

前節で述べた，性質 (3) を考慮する既存の復元手法の多くは，「画像は大域的に滑らかなものである」という仮定に基づく復元手法である拘束条件付最小二乗フィルタを基本とし，画像の局所的な情報を用いて上記滑らかさを適応的に制御できるよう改良した手法が主流となっている．しかし，適応的に情報を構成する際の道具立てとしては，観測画像そのものや何らかの復元法により事前に復元した画像を用いている．前者においては原画像と観測画像が比較的近い場合しか意味をなさず，後者においても雑音の影響等により効果的な情報の獲得は困難であると言わざるを得ない．そこで本論文では，近年，主に信号処理の分野で注目されているウェーブレット理論を用いて画像信号の特徴を記述する枠組を与え，前述の復元過程が持つべき性質 (3) として利用することも併せて目的とする．

1.3　本論文の構成

本論文は，本章を含め全9章から構成される．

第2章では，本来2次元的な広がりを持つ画像信号をベクトルとして扱うための枠組を与え，それに基づいた観測過程及び復元過程について数学的な定式化を行なう．また，復元フィルタの構成に用いる統計的な情報として，画像や雑音に関する相関作用素等についても定義を与える．本論文では，観測過程は既知であり，かつ，線形性を有するものと仮定するが，観測過程が未知である復元問題や非線形な観測過程に対する復元問題も存在する．この章では，そのような復元法等についても概括する．

第3章では，古典的な復元法とその発展形の中でも，画像や雑音に関する統計的な性質，とりわけ信号の相関構造等を利用しない復元法について概括する．具体的には，一般逆フィルタや，拘束条件付最小二乗フィルタ，及びその改良手法を取り上げ，その定義，特徴，問題点等について述べる．

第4章では，画像や雑音に関する統計的な性質を利用する統計的画像復元法について論ずる．具体的には，古典的な手法であるウィーナーフィルタや，比較的新しい手法である射影フィルタ族，パラメトリック射影フィルタ族を取り上げ，その定義，特徴，問題点等について述べる．また，本論文の目的の一つである復元フィルタの正則化を別なアプローチで実現している正則化パラメトリック射影フィルタ族についても述べ，正則化パラメトリック射影フィルタ族が有する，正則化操作がフィルタの最適性に及ぼす影響が明確でないという問題点を解決した「ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族」を提案するとともに，その性質について定量的な解析を行ない，このフィルタ族が正則化パラメトリック射影フィルタ族と同等以上の性能を有することを示す．

第5章では，信号適応性を有する統計的画像復元法について論ずる．第4章で述べる統計的画像復元法では，個々の画像の特徴を有効に利用する枠組が与えられていないという問題がある．この章では，当該問題に対処すべく，統計的画像復元法の中でも比較的有効な手法であるパラメトリック射影フィルタ族の最適化基準に個々の画像の特徴を記述する

項を付加することにより，この情報を有効に活用できるよう改良した「信号適応型パラメトリック射影フィルタ族」を導出し，フィルタの具体形，数値解法を与えることによって，個々の画像の特徴を有効利用可能な統計的画像復元法を構成できることを示す．また，このフィルタ族と第4章で提案する「ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族」双方の考え方を同時に適用した「ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族」を導出し，具体形等を与えることによって，個々の画像の特徴を有効利用可能であり，かつ正則化効果を有する第二の統計的画像復元法を構成できることを示す．また，これらの提案フィルタ族と既存手法の関係について定量的な解析を行ない，上記提案フィルタ族が既存手法の多くを包括していることを示す．

第6章では，第7章において画像の特徴を記述する際に用いるウェーブレット理論と，フィルタバンクを用いたディジタル信号に対する多重解像度解析について概括するとともに，いくつかのウェーブレットの例を示す．

第7章では，ウェーブレット変換画像の性質について考察し，画像復元問題への適用可能性について述べる．具体的には，変換成分間に存在するある種の相関構造を用いて画像に関する情報を逐次的に構成し，第5章で提案した「ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族」等に適用することにより，高精度に復元を行なうアルゴリズムや，ウェーブレット変換成分係数のエネルギー分布を用いて画像が存在し得る領域を記述し，復元に利用する方法等について述べる．最後に，その他の画像処理に対するウェーブレット理論の応用例として，画像拡大手法について述べる．

第8章では，前章までで述べた提案手法及びアルゴリズムについて，その有効性を数値実験によって検証する．具体的には，画像の特徴を効果的に利用し得ることの検証，提案フィルタ族の正則化効果の検証等を行ない，提案法の有効性を確認する．

最後に第9章で，本論文の総括を行なうとともに，課題及び今後の展望について述べる．

第 2 章

画像の観測過程と復元過程

2.1 線形の画像観測復元過程の定式化

未知の原画像及び復元画像が属する空間を原画像空間と呼び，観測画像が属する空間を観測画像空間と呼ぶ．一般的な定式化においては，各々の空間として可分なヒルベルト空間 [2] が採用され，扱う問題の設定に応じて無限次元空間を用いる場合と有限次元空間を用いる場合がある．原画像空間及び観測画像空間それぞれに対し無限次元空間と有限次元空間を採用する組合せがあり，各々，連続-連続モデル，連続-離散モデル，離散-連続モデル，離散- 離散モデルと呼ばれる [33]．現実に復元問題を扱う場合には主に計算機を用いることから，本論文では離散-離散モデルを考察の対象とする．

画像信号は 2 次元的な広がりを持つ信号であり，その離散的な表現として，以下のような行列で記述される．

$$F \in \mathbf{R}^{m_r \times m_c}. \tag{2.1}$$

但し，$\mathbf{R}^{m_r \times m_c}$ は，m_r 行 m_c 列の実行列全体からなる集合とし，m_r は画像の縦方向の画素数，m_c は画像の横方向の画素数を表す．ここで，以下に示す vec 作用素を定義する．

定義 1 (vec 作用素 [26])

$$\mathrm{vec}(F) = [\boldsymbol{f}_1{}' \ \boldsymbol{f}_2{}' \cdots \boldsymbol{f}_{m_c}{}']', \quad F = [\boldsymbol{f}_1 \ \boldsymbol{f}_2 \cdots \boldsymbol{f}_{m_c}], \ \boldsymbol{f}_i \in \mathbf{R}^{m_r}, \ (i = 1, \ldots, m_c). \tag{2.2}$$

ここで，$\mathbf{R}^{m_r}$ は，m_r 次元実ベクトル全体からなる集合とし，$\boldsymbol{f}_i{}'$ は，$\boldsymbol{f}_i$ の転置を表すもの

とする．行列表現で記述された画像に対して，vec 作用素を適用し，

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{vec}(F), \quad \boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^{m_r m_c} \tag{2.3}$$

というベクトル表現に変形することにより，画像信号はベクトルとして扱うことが可能となる．以下，原画像空間を m 次元実列ベクトル全体からなる集合 $\mathbf{R}^m$ とし，同様に，観測画像空間を n 次元実列ベクトル全体からなる集合 $\mathbf{R}^n$ とする．

一般に，画像観測過程は，

$$\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f} + \boldsymbol{n} \tag{2.4}$$

と定式化される [33, 46, 47]．ここで，$\boldsymbol{f} \in \mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{g} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{n} \in \mathbf{R}^n$ は，各々未知の原画像，観測画像，雑音を表す．A は観測系を表す線形作用素であり，以下，観測作用素と呼ぶ．A は，$\mathbf{R}^{n\times m}$ の元となる．雑音 $\boldsymbol{n}$ は，何らかの分布に従う確率変数とする．これは，雑音の存在により，原画像や観測作用素が同一であったとしても，毎回異なった観測画像が得られることを意味する．雑音に関する統計的知識の一つとして，その相関作用素を，

$$Q = E_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}'] \tag{2.5}$$

と定義する [44]．ここで，$E_{\boldsymbol{n}}$ は雑音の分布に関する期待値を表すものとする．雑音 $\boldsymbol{n}$ が，平均 0 の分布に従う場合，Q は雑音 $\boldsymbol{n}$ の分散共分散行列と等しい．また，原画像 $\boldsymbol{f}$ に関しても，雑音と同様何らかの分布に従う確率変数とみなした場合，その相関作用素は以下のように定義される [44]．

$$R_{\boldsymbol{f}} = E_{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}']. \tag{2.6}$$

本論文が対象とする画像復元問題は，式 (2.4) で得られる観測画像及び観測作用素，雑音や画像に関する統計的知識等をもとに，原画像空間 $\mathbf{R}^m$ において，原画像になるべく近い画像を推定することである．復元過程は，$\hat{\boldsymbol{f}}$ を復元画像，B を復元作用素として，

$$\hat{\boldsymbol{f}} = B\boldsymbol{g} \tag{2.7}$$

と定式化される [33, 47]. ここで, $\hat{\boldsymbol{f}}$ は原画像空間 $\mathbf{R}^m$ の元, B は $\mathbf{R}^{m\times n}$ の元である. 復元作用素 B として何らかの最適化基準を満たすものを最適画像復元フィルタと呼ぶ.

図 2.1に, 画像の観測復元過程の概念図を示す.

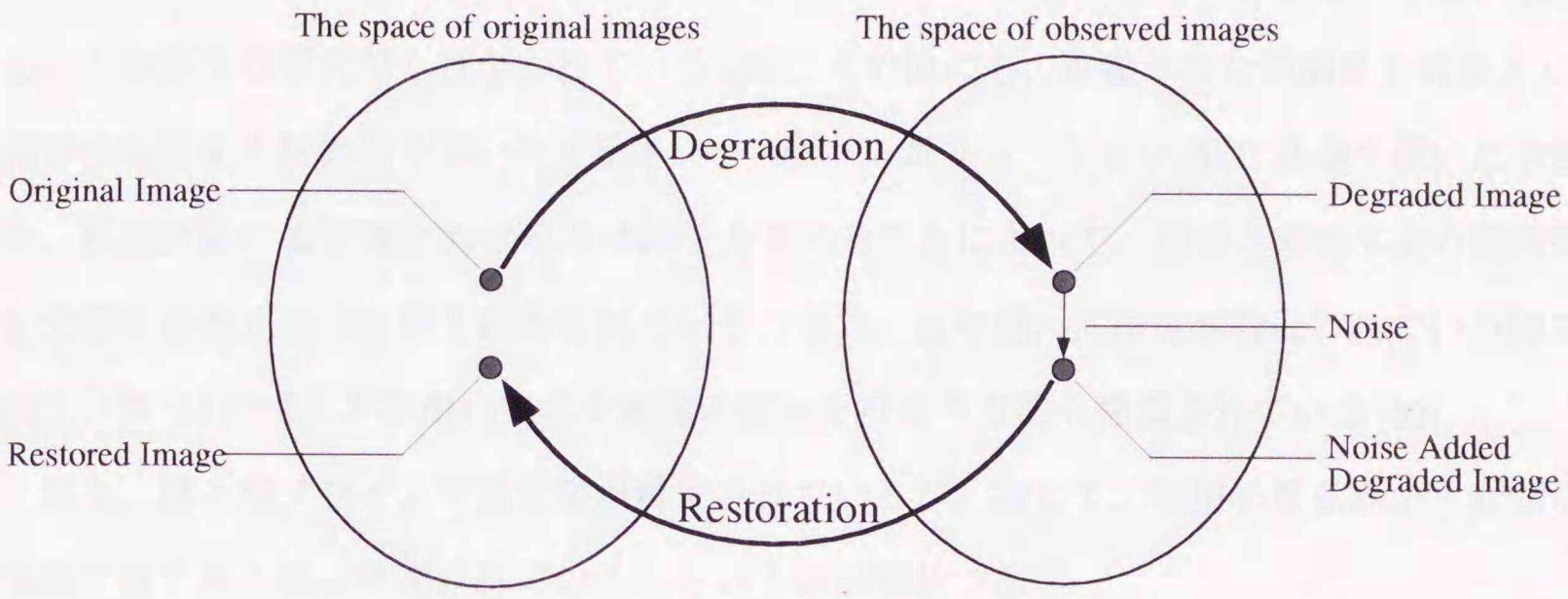


図 2.1: 画像の観測復元過程の概念図

2.2　その他の画像観測復元

2.2.1　観測画像のみに基づく復元

復元過程を構成するに際し, 観測画像以外の情報をほとんどを用いないものを, 一般的にブラインド推定と呼ぶ. ブラインド推定を行なう手法もこれまで多数提案されている. 最も一般的なものとしては, 原画像及び観測作用素とも未知のものとして, 何らかの最適化基準を満たす復元画像及び観測作用素を同時に推定するというものである [28, 70, 72]. しかしながら, これらの手法では, 当該最適化基準を満たす集合について十分な数理的解析がされているとはいい難く, 結果, 当該復元過程が何をしたことになっているかが明確とは言えないという問題点が残されている. 一方, 観測作用素については考慮せず, 画像の画素値の非負性や, 画像中の物体のおおよその形等の情報を元に復元を行なう手法も提案されている [17, 23]. これらの事前知識を満たす集合が凸集合を形成する場合には, 当該

集合への凸射影を行なうことによって，ある程度原画像を推定することができる．この考え方は，Youla による文献 [74, 75] で明らかにされたものである．凸射影法の概念図を図2.2に示す．原画像空間として無限次元のヒルベルト空間を採用した場合，凸射影による収束は一般的には弱収束しか保証されないが，Browder の強収束定理 [50] を用いて強収束するよう改良する研究等も行なわれている [29]．その他にも，移動不変な観測系を対象とし，確率分布の高次統計量を用いたブラインド・デコンボリューション [5] に基礎を置いた手法や，観測画像の Z 変換における共通因子を求めることによって，画像と移動不変の観測系を分離する復元法 [41] 等も提案されている．また，近年盛んに研究が行なわれている独立成分分析 [1] の考え方を用いてボケ画像の復元を行なう方法も提案されている [63]．

以上，様々なブラインド推定法が提案されているが，総じて，実用的な見地から有効な手法と言えるものは提案されていないというのが現状である．

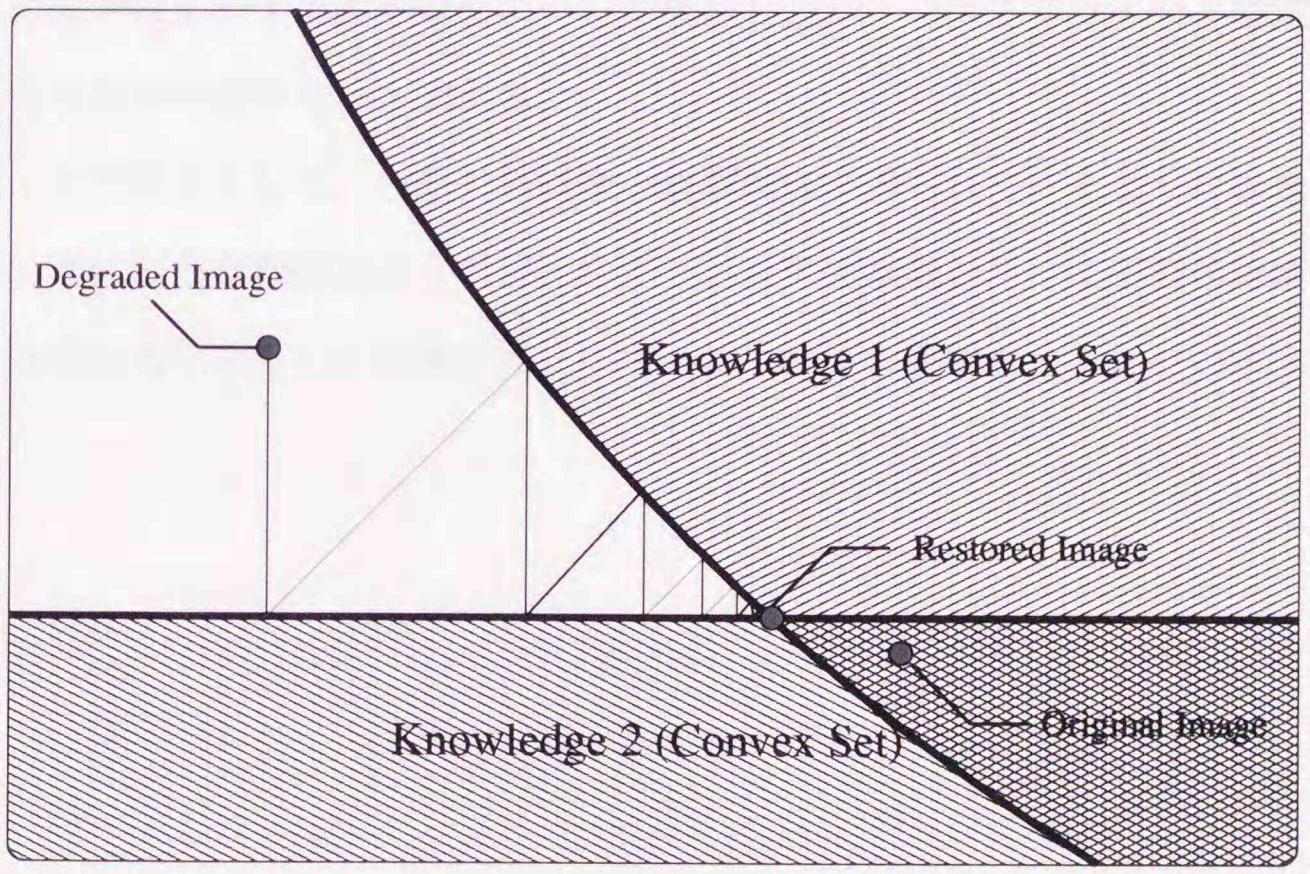


図 2.2: 凸射影法の概念図

2.2.2　非線形な復元

観測過程が既知であるが，その特性が非線形であるような問題や，観測過程が線形であっても，画像に関する制約等が非線形であるような復元問題も存在する [36]．このような問題設定を対象とした復元手法も多数提案されている．非線形作用素を扱う場合には，復元過程を構成する際に利用できる数学的な枠組は非常に限られ，一般的な議論を行なう際には不動点定理 [50] 以外に有効な手段はないというのが現状である．しかしこの定理を用いる際にも，作用素に対し Non-Expansive 性 [50] が要求され，全ての問題を対象とすることができるとは言えない．その他の方法論としては，上述の作用素の非線形性の取り扱いの困難さから，ブラインド推定同様原画像に関する知識のみを用いて，凸射影法により復元を行なう手法も提案されている [29]．また，観測過程が線形である場合でも，画像に関する制約が非線形なものである場合には，凸射影が用いられる [25]．

以上，非線形性を有する復元過程について概括したが，やはりブラインド推定同様，総じて高精度の復元は望めないと言える．

その他，問題設定として，一組の原画像と観測画像が得られているような場合も考察されている．このような問題を扱う手法として，ボルテラ級数を用いて観測作用素の情報を推定し，同様の劣化を受けた画像の復元に用いる手法等の研究もなされている [60]．

第 3 章

古典的画像復元法とその発展形概括

3.1 はじめに

線形な観測過程に対する復元手法として，これまで様々な手法が提案されている．それぞれの手法は，復元過程の最適性を測る指標として多種多様なものを用いているが，その多くは第 1 章で述べたように，

- 画像の特徴の利用に主眼を置いたもの
- 雑音の影響を最小限にすることに主眼を置いたもの

という二つの系統に大別できる．拘束条件付最小二乗フィルタや，その発展系である復元法等は前者に属し，射影フィルタ族及びパラメトリック射影フィルタ族等は後者に属する手法である．

本章では，多くの画像復元フィルタの基礎を担う一般逆行列について述べるとともに，上述の復元フィルタの中でも，画像や雑音に関する統計的な性質，とりわけ信号の相関構造等を用いずに構成される画像復元フィルタについて概括する．具体的には，最も古典的な復元法である一般逆フィルタや，拘束条件付最小二乗フィルタ，及びそれらの改良手法を取り上げ，その定義，具体的な形式，特徴，問題点等について述べる．

3.2 一般逆行列と復元問題

文献 [68] でも述べられているように，復元問題と一般逆行列 [3, 42, 43, 69] には密接な関係がある．ここでは，一般逆行列の定義や性質について概括する．

行列 A が正則である場合には，I を単位行列として，

$$A^{-1}A = I, \quad AA^{-1} = I \tag{3.1}$$

となる逆行列 A^{-1} が定義できる．行列 A が正方行列でない場合でも，その零空間

$$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}\} \tag{3.2}$$

が零ベクトルのみであるような場合には，

$$A_l^{-1}A = I \tag{3.3}$$

を満たす左逆行列 A_l^{-1} が定義できる [43]．画像の観測過程において雑音が存在しない場合で，かつ，逆行列 (もしくは左逆行列) が定義できる場合には，これらを用いて原画像を完全に再現することが可能である．しかし，逆行列 (もしくは左逆行列) が定義できない場合には，雑音が存在しないような場合であっても，一般に原画像を完全に復元することはできない．そこで，逆行列を一般化した一般逆行列というものが考えられている．一般逆行列は，以下のように定義される．

定義 2 (一般逆行列 [42, 43, 69])

条件

$$AA^{-}A = A \tag{3.4}$$

を満たす A^{-} を，行列 A の一般逆行列という．

行列 A を 1 行 1 列の行列，すなわち実数とした場合には，実数体上において 0 の逆数を任意の実数と定義することを意味し，定義式 (3.4) は，この考え方を行列へ拡張したものと言える．逆行列や左逆行列についても式 (3.4) を満たすことから，一般逆行列の特殊な場

合と考えることができる．また，条件式 (3.4) を満たす行列は必ず存在するが，一般にただ一つには定まらず無限個存在する．

一般逆行列の中にも，ある特定の条件を満たす族がいくつか考えられている．以下にその代表的なものについて述べる．

定義 3 (反射型一般逆行列 [42, 43, 69])

行列 A の一般逆行列の中で，条件

$$A^- AA^- = A^- \tag{3.5}$$

を満たすものを，反射型一般逆行列という．

条件式 (3.5) は，行列 A^- が行列 A の一般逆行列であるならば，行列 A が，行列 A^- の一般逆行列となることを要請する．

定義 4 (ノルム最小型一般逆行列 [42, 43, 69])

行列 A の一般逆行列の中で，条件

$$(A^- A)' = A^- A \tag{3.6}$$

を満たすものを，ノルム最小型一般逆行列という．

条件式 (3.6) は，解を持つ線形方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y} \tag{3.7}$$

の解 $\hat{\boldsymbol{x}} = A^- \boldsymbol{y}$ のユークリッドノルム $||\hat{\boldsymbol{x}}||$ が最小となることを要請する．

定義 5 (最小二乗型一般逆行列 [42, 43, 69])

行列 A の一般逆行列の中で，条件

$$(AA^-)' = AA^- \tag{3.8}$$

を満たすものを，最小二乗型一般逆行列という．

条件式 (3.8) は，必ずしも解を持たない線形方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{3.9}$$

に対し，$\hat{\boldsymbol{x}} = A^-\boldsymbol{y}$ とおいたときに，

$$||A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}||^2 \tag{3.10}$$

が最小となることを要請する．

これら三つの一般逆行列についても，定義を満たすものの存在は保証されるが，一般に一意には定まらず無限個存在する．

以上に述べた三つの一般逆行列の全ての性質，すなわち反射性，ノルム最小性，最小二乗性の全てを有する一般逆行列も考えることができる．このような一般逆行列を Moore-Penrose 一般逆行列と呼ぶ．Moore-Penrose 一般逆行列は以下のように定義される．

定義 6 (Moore-Penrose 一般逆行列 [42, 43, 69])

以下の 4 つの条件

$$\begin{aligned} AA^-A &= A, \\ A^-AA^- &= A^-, \\ (A^-A)' &= A^-A, \\ (AA^-)' &= AA^- \end{aligned}$$

を満たす A^- を，行列 A の Moore-Penrose 一般逆行列と呼ぶ．

Moore-Penrose 一般逆行列は必ず存在し，一意に定まる [42, 43, 69]．以下，行列 A の Moore-Penrose 一般逆行列を A^+ と表記する．

3.3 一般逆フィルタ

定義 7 (一般逆フィルタ (Generalized Inverse Filter)[34, 49])

最適化基準

$$J_{GIF1} = ||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2 \tag{3.11}$$

を最小とする $\hat{\boldsymbol{f}}$ の中で，最適化基準

$$J_{GIF2} = ||\hat{\boldsymbol{f}}||^2 \tag{3.12}$$

が最小となるものを復元画像とするフィルタを一般逆フィルタ (GIF) と呼ぶ．

最適化基準式 (3.11) 及び式 (3.12) は，復元画像に対し再度観測過程を適用したものが，観測画像に最も近くなるものの中でノルム (すなわちエネルギー) が最も小さいものを復元画像として採用するという手法である．

上記条件を満たす復元作用素を得るべく，以下の定理を与える．

定理 1 $||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2$ を最小にする $\hat{\boldsymbol{f}} = B\boldsymbol{g}$ の中で，$||\hat{\boldsymbol{f}}||^2$ を最小とするものは，

$$B = A^+ \tag{3.13}$$

に限る [42, 69].

従って，一般逆フィルタ B_{GIF} は Moore-Penrose 一般逆行列そのものである．

一般逆フィルタは，具体的な形式が単純であるという利点を持つ反面，

- 画像の最適性の評価を，本来原画像や復元画像が属する原画像空間ではなく，観測画像空間上で間接的に行なっている．これは文献 [35] でも指摘されているように，必ず

しも原画像空間上での画像の最適性に寄与しない.

- ノルムの最小性という，画像の本質とは何ら関係のない性質を最適化基準に用いている.

という二つの問題点を有する.

3.4　パラメトリック一般逆フィルタ

画像信号は低域成分が支配的であり，かつ多くの観測過程がある種低域通過特性を持つものと考えられることから，復元過程によって雑音成分が支配的である空間成分が増幅され復元画像に致命的な影響を与えることは良く知られている．このような問題は悪条件問題 [40] と呼ばれる．前節で述べた一般逆フィルタは，復元画像における画像成分の再現性を拘束条件として，その中でノルムが最小になるものを復元画像として採用しているが，当該拘束条件の要請は悪条件性の原因となり，雑音環境下での高精度の復元は期待できない．そこで，拘束条件を緩和することによりこの問題を回避するパラメトリック一般逆フィルタという手法も提案されている．パラメトリック一般逆フィルタは，以下のように定義される.

定義 8 (パラメトリック一般逆フィルタ (Parametric Generalized Inverse Filter)[49, 67])

最適化基準

$$J_{PGIF} = ||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2 + \gamma||\hat{\boldsymbol{f}}||^2 \tag{3.14}$$

を最小とする $\hat{\boldsymbol{f}}$ を復元画像とするフィルタをパラメトリック一般逆フィルタ (PGIF) と呼ぶ．ここで，γ は，$0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータとする.

最適化基準式 (3.14) は，一般逆フィルタの最適化基準 J_{GIF1} と J_{GIF2} の荷重和であり，その優先度をパラメータ γ によって制御していると言える.

この最適化基準を満たす作用素 $B_{PGIF}(\gamma)$ は,

$$B_{PGIF}(\gamma) = (A'A + \gamma I_m)^{-1} A' \tag{3.15}$$

と書ける [49, 67]. ここで, I_m は m 次の単位行列とする.

悪条件問題に対処する手法の一つとして, 正則化と呼ばれる方法が古くから研究され用いられている [9, 62]. 式 (3.15) からもわかるように, パラメトリック一般逆フィルタは正則化一般逆行列 [40, 62] そのものである. 従って, 当該手法は一般逆フィルタに正則化効果を持たせた手法と言える. ここで, 正則化一般逆行列と Moore-Penrose 一般逆行列の関係を考察すべく, 以下に示す作用素ノルムを定義する.

定義 9 (作用素ノルム [45])

行列 A の作用素ノルムを

$$||A|| = \max_{||\boldsymbol{x}||\neq 0} \frac{||A\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||} \tag{3.16}$$

と定義する.

この定義から明らかなように, 行列 A の作用素ノルムは行列 A の最大特異値に等しい. 以下, 作用素間の定量評価には作用素ノルムを用いるが, 本論文が対象としている有限次元空間においては, どのようなノルムを用いても収束性に関して同じ結果が成り立つことを付記しておく.

作用素ノルムを用いて, 正則化一般逆行列と Moore-Penrose 一般逆行列に関して以下の補題及び系が成り立つ.

補題 1

$$||(A'A + \gamma I_m)^{-1} A' - A^+|| \leq 2\gamma ||(AA')^+|| ||A^+|| \tag{3.17}$$

が成立する [13].

系 1

$$||A'(AA'+\gamma I_n)^{-1}-A^+|| \leq 2\gamma||(A'A)^+||||A^+|| \tag{3.18}$$

が成立する.

補題1より，以下の定理が成り立つ.

定理 2 $\gamma \to 0$ のとき,

$$||B_{PGIF}(\gamma)-B_{GIF}|| \to 0 \tag{3.19}$$

が成立する [67].

この定理により，パラメトリック一般逆フィルタの一般逆フィルタへの収束性が保証される.

パラメトリック一般逆フィルタの他にも，一般逆フィルタのノイマン級数展開形において雑音成分が支配的となる項を省略することによって雑音の抑制を図る手法等も提案されている [22].

3.5　拘束条件付最小二乗フィルタ

前述の一般逆フィルタでは，$||A\hat{\boldsymbol{f}}-\boldsymbol{g}||^2$ が最小となるという条件を拘束条件として用いたが，観測画像空間上で付加される雑音 $\boldsymbol{n}$ のエネルギーが $\mathbf{0}$ でない限り，原画像がこの条件を満たすことが必ずしも意味を持つとは限らない．この点を考慮したのが拘束条件付最小二乗フィルタである.

拘束条件付最小二乗フィルタは，以下のように定義される.

定義 10 (拘束条件付最小二乗フィルタ (Constrained Least-Squares Filter)[10, 49])

観測画像空間上で付加される雑音 $\boldsymbol{n}$ のエネルギーの期待値をρ^2 とし，拘束条件

$$||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2 = \rho^2 \tag{3.20}$$

を満たす $\hat{\boldsymbol{f}}$ の中で，最適化基準

$$J_{CLSF} = ||L\hat{\boldsymbol{f}}||^2 \tag{3.21}$$

を最小とするものを復元画像とするフィルタを，拘束条件付最小二乗フィルタ (CLSF) と呼ぶ．ここで，L は何らかの線形作用素とする．

上記拘束条件式 (3.20) 及び最適化基準式 (3.21) は，観測画像空間上で付加される雑音のエネルギーを考慮することによって，平均的な意味で原画像を含む集合を構成し，その中から画像に対し線形作用素 L を作用させたもののノルムが最小となるものを復元画像として採用することを意味する．また，一般に線形作用素 L として，Laplacian が採用されることが多く，この場合，最適化基準式 (3.21) は，画像の滑らかさを要請することに対応する．

拘束条件付最小二乗フィルタの具体的な形式は，

$$B_{CLSF} = (A'A + \gamma^{-1}L'L)^{+}A' \tag{3.22}$$

で与えられる．ここで，γ は Lagrange の未定定数である．

拘束条件付最小二乗フィルタは正則化手法の一種であり，フィルタの具体的な形式に照らして Philips の正則化 [61] そのものである．

しかし，この手法においても，一般逆フィルタと同様画像の近さを本来原画像や復元画像が属する原画像空間ではなく，観測画像空間上で間接的に行なうということに変わりはなく，必ずしも原画像空間上での画像の最適性を保証するものではない．また，作用素 L として Laplacian を用いることは，画像に対し大域的に滑らかなものであるという性質を

仮定していると言えるが，これが画像にとって本質的な意味を有するとは限らない．

また，作用素 L として Laplacian そのものではなく，恒等作用素と Laplacian を組み合わせたものを用いることにより，画像の滑らかさの制御を行なう手法等も提案されている [21]．

3.6 適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ

画像信号には輝度値の変化が比較的緩やかな領域と，輝度値が急峻に変化する領域が存在する．前節で述べた拘束条件付最小二乗フィルタにおいては，原画像に対して大域的に滑らかなものであるという性質を仮定して復元を行なっているため，領域による輝度値の変化に対しては何ら考慮を行なっておらず，結果として，画像において急峻な輝度変化を持つ領域の情報を破壊してしまう可能性を否定できない．そこで，Lagendijk らは画像の局所的な性質によって適応的にノルムを構成し，当該ノルムを用いて画像の近さを測ることにより上記問題を解決する復元法を提案している [25]．

文献 [25] では，この復元フィルタに対する呼称を明言していないため，本論文ではこの方法を適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ (Adaptive Norm Constrained Least Squares Filter) と呼ぶことにする．

フィルタの定義に先立ち，以下で N-ノルムを定義する．

定義 11 (N-ノルム [43])

N を正定値行列とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，

$$||\boldsymbol{x}||_N = (\boldsymbol{x}' N \boldsymbol{x})^{1/2} \tag{3.23}$$

で定義されるノルムを N-ノルムと呼ぶ．

以下で，適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタを定義する．

定義 12 (適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ (Adaptive Norm Constrained Least Squares Filter)[25])

L_1 と L_2 を正定値行列とし，最適化基準

$$J_{ANCLSF} = ||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2_{L_1} + \alpha||L\hat{\boldsymbol{f}}||^2_{L_2} \tag{3.24}$$

を最小とする $\hat{\boldsymbol{f}}$ を復元画像とするフィルタを，適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ (ANCLSF) と呼ぶ.

この定義において，α は正実数のパラメータであり，何らかの事前知識によって，式 (3.24) の第 1 項の値と第 2 項の値が等しくなるように選ぶものとする．また，正定値行列 L_1 及び L_2 は，0 から 1 までの実数からなる対角行列であり，

$$\begin{aligned} L_1 &= (l_1(i,j)) \\ L_2 &= (l_2(i,j)) \end{aligned}$$

と記述することにする.

画像の比較的平坦な領域においては，$l_1(i,i)$ として 0 に近い値を，$l_2(i,i)$ として 1 に近い値を採用し，逆に急峻な変化を持つ領域に対しては，$l_1(i,i)$ として 1 に近い値を，$l_2(i,i)$ として 0 に近い値を採用することによって，比較的平坦な領域に関しては，観測画像空間上での雑音成分の抑制に重きを置き，急峻な領域に関しては相対的に雑音を許容するとともに，過度の平滑化効果が生じるのを回避することを実現している.

この復元フィルタの具体的な形式は,

$$B_{ANCLSF} = (A'L_1A + \alpha L'L_2L)^+A'L_1 \tag{3.25}$$

と書ける.

Lagendijk はまた，上記フィルタを得るアルゴリズムを反復法によって記述し，その過程に，画像が満たすべき既知の凸集合への凸射影を加えることにより，与えられた情報をより有効に利用する方法も示している [25].

しかしながら，この手法においても，一般逆フィルタや拘束条件付最小二乗フィルタ同様，画像の近さの評価を本来原画像や復元画像が属する原画像空間ではなく，観測画像空間上で間接的に行なっているという問題を有する．

3.7　非等方拡散フィルタ

画像の局所的な情報をできる限り利用しようとする復元法として，前述の適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタの他にも，作用素 L 自体を改良する方法も考案されている．

You は，文献 [71, 73] の中で，拘束条件付最小二乗フィルタ等による復元が過度の平滑化効果を招く原因として，当該手法が，画像の輝度値の勾配方向と，それに直交する方向の双方に対し滑らかさを要請していることを指摘し，勾配方向に直交する方向のみ選択的に滑らかさの要請を行なう手法を提案している．以下，その詳細について述べるが，文献 [71, 73] では画像を連続関数とみなして議論を行なっているので，ここでもそれに倣うことにする．また，文献 [71, 73] でも，この復元フィルタに対する呼称を特に明言していないため，本論文では，この方法を非等方拡散フィルタ (Anisotropic Diffusion Filter) と呼ぶことにする．

本節においては，原画像，復元画像，雑音，観測画像，観測作用素を，各々，

$f(x,y)$　：　原画像

$\hat{f}(x,y)$　：　復元画像

$n(x,y)$　：　雑音

$g(x,y)$　：　観測画像

$A(x,y)$　：　観測作用素 (移動不変)

とし，観測過程は

$$g(x,y) = \int\int A(s,t) f(x-s, y-t) ds dt + n(x,y) \tag{3.26}$$

と表す．また，観測画像空間上で間接的に測った画像の近さを

$$e(x,y) = g(x,y) - \int\int A(s,t)\hat{f}(x-s,y-t)dsdt \tag{3.27}$$

と定義する．

定義 13 (非等方拡散フィルタ (Anisotropic Diffusion Filter)[71, 73])

最適化基準

$$J_{ADF} = \frac{1}{2}\int\int e^2(x,y)dxdy + \lambda\int\int D(|\nabla\hat{f}(x,y)|)dxdy, \tag{3.28}$$

を最小化する $\hat{\boldsymbol{f}}$ を復元画像とするフィルタを，非等方拡散フィルタ (ADF) と呼ぶ．

上記定義において，D は何らかの関数，λ は正実数のパラメータとする．

You は，上記最適化基準を最小化する際に勾配法 [18] を用いている．最適化基準 J_{ADF} の勾配は，関数 D_d を関数 D の一階の導関数として，

$$\nabla J_{ADF} = -\int\int e(u,v)A(u-x,v-y)dudv - \lambda\mathbf{div}\left(D_d(|\nabla\hat{f}|)\frac{\nabla\hat{f}}{|\nabla\hat{f}|}\right) \tag{3.29}$$

と書けることを示すとともに，その第 2 項が画像 f の勾配方向と，それに直交する方向の成分に分けて記述できることを示した．すなわち，関数 D を適切に選択することによって，復元画像において画像の勾配方向に直交する方向のみ選択的に雑音を抑制することが可能となる．

しかし，最適化基準式 (3.28) の第 1 項からも明らかなように，前述の一般逆フィルタ，拘束条件付最小二乗フィルタ，適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ同様，画像の最適性を，本来原画像や復元画像が属している原画像空間上ではなく，観測画像空間上で間接的に測っているという問題点がある．

3.8　総括

本章で述べた復元手法は，その全てが，最適化基準の中に $||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2$ もしくは，それに類する項，すなわち復元画像に再度観測作用素を適用したものと観測画像の，観測画像空間上での近さを用いており，この項の最小性を復元画像における画像成分の再現性の拠り所にしている．しかしながら，文献 [35] において指摘されているように，画像の近さを，本来原画像や復元画像が属する原画像空間ではなく，観測画像空間上で間接的に評価することは，必ずしも原画像空間上での画像の近さに対応するとは限らない．一般に，$||A\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}||^2$ の値が 0 であったとしても，$||\boldsymbol{f} - \hat{\boldsymbol{f}}||$ がいくらでも大きくなるような $\hat{\boldsymbol{f}}$ が存在し得る．また，これらの手法では，雑音に関する情報を有効に利用しているとは言えないという問題があることも付記しておく．しかしながら，これらの手法は，定式化からもわかるように，画像に関する情報，とりわけ画像の局所的な情報を反映させやすいという利点を持っていることにも注目する必要がある．

第 4 章

統計的画像復元法

4.1 はじめに

第 3 章で述べた手法は，復元画像における画像成分の再現性や画像の局所的な情報の利用に主眼をおいた手法であり，特にその発展形の復元法では効果的な復元が可能である．しかし，これら復元フィルタの構成に際し，雑音や画像に関する統計的な情報が利用可能であったとしても，それらを有効に活用することができないという問題がある．一方で，当該情報を有効利用する復元法も多数提案されている．本章では，そのような統計的画像復元法として，最も古典的と言えるウィーナーフィルタや比較的新しい手法である射影フィルタ族，パラメトリック射影フィルタ族等を取り上げ，その定義，具体的な形式，特徴，問題点等について述べる．

また，第 3 章で述べた復元法を含むこれら復元法では，その構成要素となる作用素等の情報は正確なものであるという前提に基づき構成されるが，一般にそれらの正確な情報を入手するのは不可能であり，何らかの経験的知識等を用いて推定せざるを得ない．しかし，そのような方法により推定した構成要素が真の構成要素と十分近い場合でも，推定した構成要素に基づく復元フィルタと真の構成要素に基づく復元フィルタが近いものとなる保証はなく，その結果，復元画像に致命的な影響を及ぼし得る [15]．本章では，この問題に対処すべく提案された正則化パラメトリック射影フィルタ族 [13] についても概括するとともに，この手法が有する，正則化操作がフィルタの最適性に及ぼす影響が明確でないという

問題点を解決したノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族を提案する．また，当該提案フィルタ族と既存手法との関係について定量的な解析を行ない，このフィルタ族が正則化パラメトリック射影フィルタ族と同等以上の性能を有することを示す．

4.2 ウィーナーフィルタ

定義 14 (ウィーナーフィルタ (Wiener Filter)[49])

最適化基準

$$J_{WF} = E_{\boldsymbol{f}} E_{\boldsymbol{n}} ||\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{f}||^2 = E_{\boldsymbol{f}} E_{\boldsymbol{n}} ||B\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}||^2 \tag{4.1}$$

を最小とする B をウィーナーフィルタ (WF) と呼ぶ．

最適化基準式 (4.1) を最小とすることは，原画像空間上において，原画像及び雑音の分布に関する平均という意味で復元画像が原画像に最も近くなるように復元作用素 B を選ぶということを意味する．

上記最適化基準を最小化する作用素 B_{WF} は，

$$B_{WF} = R_{\boldsymbol{f}} A'(AR_{\boldsymbol{f}} A' + Q)^{+} \tag{4.2}$$

と書くことができる [49]．但し，この定式化において，原画像 $\boldsymbol{f}$ と雑音 $\boldsymbol{n}$ は無相関であることが仮定されている．

ウィーナーフィルタは，第 1 章で述べた復元フィルタが持つべき三つの性質について，ある意味その全てを満たす復元フィルタと言えるが，その最適化基準に原画像の分布に関する平均を用いているため，出現頻度が高い画像に関してはある程度高精度な復元が可能であるが，それ故必ずしも個々の画像に対して最良なものが得られるとは限らない [35]．

4.3 射影フィルタ族

4.3.1 はじめに

第3章で述べた手法には共通して

- 復元画像と原画像の近さの評価を，それらが属する原画像空間上ではなく観測画像空間上で間接的に行なっている．

- 確率変数である雑音に関する統計的な情報を有効に利用していない．

という問題がある．また，前節で述べたウィーナーフィルタに関しては，上記のような問題に対しては考慮されていると言えるが，

- 定式化において，原画像の分布に関する平均を用いているため，必ずしも個々の画像に対しての最適性は保証されない．

という問題がある．これらの問題に対処すべく提案されたのが，以下で述べる射影フィルタ族である．射影フィルタ族は，射影フィルタ，部分射影フィルタ，平均射影フィルタの三つの最適画像復元フィルタの総称であり，画像に関する情報として利用可能なものの違いによって各々のフィルタが構成される．

以下で，個々のフィルタについて，その定義，具体的な形式，特徴等について述べるとともに，その統一理論及び観測作用素が分離核であるような特殊な場合の記述について述べる．

4.3.2 射影フィルタ

射影フィルタの基本的な考えは，原画像空間に属するある線形部分空間 S_1 への直交射影子を P_{S_1} として，任意の原画像 $\boldsymbol{f}$ に対して，条件

$$BA\boldsymbol{f} = P_{S_1}\boldsymbol{f} \tag{4.3}$$

が成り立つものの中で雑音の影響が最も少ないものを復元フィルタとして採用しようというものである．式 (4.3) は，

$$BA = P_{S_1} \tag{4.4}$$

という作用素方程式として表現することもできる．解の探索空間である線形部分空間 S_1 は，原画像の再現性に関わるものであるため，できる限り広いものを採用する方が望ましい．作用素方程式 (4.4) が解を持ち，かつ線形部分空間 S_1 が最大となるのは，$\mathcal{R}(A')$ を行列 A' の列ベクトルが張る線形部分空間として，

$$S_1 = \mathcal{R}(A') \tag{4.5}$$

が成り立つときである [35]．以上をまとめて，射影フィルタは以下のように定義される．

定義 15 (射影フィルタ (Projection Filter)[31, 32, 35])

拘束条件

$$BA = P_{\mathcal{R}(A')} \tag{4.6}$$

を満たす作用素 B の中で，最適化基準

$$J_{PF} = E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 \tag{4.7}$$

を最小とするものを射影フィルタ (PF) と呼ぶ．

拘束条件式 (4.6) は，原画像のうち，観測作用素の零空間 $\mathcal{N}(A)$ 以外の成分に関しては完全に復元されることを要請しており，最適化基準式 (4.7) は，観測画像空間上で付加された雑音成分のエネルギーが原画像空間上で最小となることを意味している．よって，射影フィルタは，雑音の影響を原画像空間上で適切に評価し，個々の画像に対しての最適性を保証する復元手法と言える．

射影フィルタ B_{PF} は，

$$\begin{cases} U &= AA' + Q \\ V &= A'U^{+}A \end{cases}$$

として,

$$B_{PF} = V^{+} A' U^{+} \tag{4.8}$$

という形で表すことができる [31, 32, 35].

上の定式化においては，1 枚の観測画像に対する復元のみ扱っているが，複数の観測画像が利用可能な問題設定も存在する．このような場合に複数の観測画像の情報を利用して，更に雑音の抑制効果を高めることが可能である手法として，マルチフレーム射影フィルタ [19] 等も提案されている．

4.3.3 部分射影フィルタ

復元問題においては，原画像がある線形部分空間に属していることを既知の情報として利用できる場合も存在する．そのような場合でも当該情報を有効に利用できるように射影フィルタを改良したものが部分射影フィルタである．

原画像が，線形部分空間 S に属していることがわかっている場合，射影フィルタで考えた式 (4.3) は

$$BAP_S \boldsymbol{f} = P_{S_1} P_S \boldsymbol{f} \tag{4.9}$$

と書き換えることができる．この式は,

$$BAP_S = P_{S_1} P_S \tag{4.10}$$

という作用素方程式として表現することもできる．射影フィルタ同様，解の探索空間である線形部分空間 S_1 は，できる限り広いものを採用する方が望ましい．作用素方程式 (4.10) が解を持ち，かつ線形部分空間 S_1 が最大となるのは，S_1 が線形部分空間 S と観測作用素 A の零空間の共通部分の直交補空間であるとき，つまり

$$S_1 = (S \cap \mathcal{N}(A))^{\perp} \tag{4.11}$$

が成り立つときである [35, 38]. 以上をまとめて，部分射影フィルタは以下のように定義される.

定義 16 (部分射影フィルタ (Partial Projection Filter)[35, 37, 38])

原画像が属している既知の線形部分空間を S として，線形部分空間 S_1 を，S と観測作用素 A の零空間 $\mathcal{N}(A)$ の共通部分の直交補空間

$$S_1 = (S \cap \mathcal{N}(A))^{\perp} \tag{4.12}$$

としたとき，拘束条件

$$BAP_S = P_{S_1} P_S \tag{4.13}$$

を満たす B の中で，最適化基準

$$J_{PTPF} = E_{\boldsymbol{n}} ||B\boldsymbol{n}||^2 \tag{4.14}$$

を最小とする作用素を部分射影フィルタ (PTPF) と呼ぶ.

拘束条件式 (4.13) は，射影フィルタで用いた式 (4.6) による拘束条件を，更に既知の線形部分空間 S に限定していることを意味する．最適化基準式 (4.14) については，射影フィルタと同様原画像空間上での雑音のエネルギーが最小となることを要請している．以下，特に断らない限り，前述のように原画像が線形部分空間 S に属していることを事前知識として利用可能な場合，線形部分空間 S_1 として式 (4.12) で定義されるものを採用するものとする.

これらの条件を満たす作用素 B_{PTPF} は,

$$\begin{cases} U &= AP_S A' + Q \\ V &= P_S A' U^+ A P_S \end{cases}$$

として,

$$B_{PTPF} = V^+ A' U^+ \tag{4.15}$$

という形で表すことができる [35, 38].

今井らは，複数の画像が与えられるような状況下において，その画像間に重なりがある場合には当該重なりを線形制約として記述することによって部分射影フィルタに適用できることを示し，観測画像が 1 枚である場合よりも高精度な復元が可能であることを示している [11].

4.3.4　平均射影フィルタ

射影フィルタや部分射影フィルタに共通して言えることは，復元画像における画像成分の再現性を拘束条件とし，その中で雑音成分のエネルギーを最小としていることである．この枠組にのっとり，かつ，ウィーナーフィルタのように原画像の分布に関する平均という意味での画像の最適性を用いる復元法を考えることもできる．この考え方に基づく復元法が平均射影フィルタである．以下にその定義を与える．

定義 17 (平均射影フィルタ (Averaged Projection Filter)[65, 66])

最適化基準

$$J_{APF1} = E_{\boldsymbol{f}}||BA\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}||^2 \tag{4.16}$$

を最小とする作用素 B の中で，最適化基準

$$J_{APF2} = E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 \tag{4.17}$$

を最小とするものを平均射影フィルタ (APF) と呼ぶ.

最適化基準式 (4.16) は，原画像の分布に関して平均的な意味で最も原画像に近いものを復元画像として採用することを意味し，最適化基準式 (4.17) は，射影フィルタ及び部分射影フィルタ同様，原画像空間上での雑音のエネルギーの最小性を意味する.

これらの条件を満たす作用素 B_{APF} は,

$$\begin{cases} U &= AR_{\boldsymbol{f}}A' + Q \\ V &= R_{\boldsymbol{f}}A'U^{+}AR_{\boldsymbol{f}}A' \end{cases}$$

として，

$$B_{APF} = R_{\boldsymbol{f}} A' V^{+} R_{\boldsymbol{f}} A' U^{+} \tag{4.18}$$

という形で表すことができる [65, 66].

ウィーナーフィルタにおいては，原画像の分布に関する平均的な意味での再現性と雑音の影響を同時に最小化するものを復元作用素として採用していたが，平均射影フィルタでは，画像に関する再現性を優先し，残った自由度の中で雑音に関する最小性を要請しているという違いがある.

4.3.5　射影フィルタ族の統一理論

上で述べた射影フィルタ，部分射影フィルタ，平均射影フィルタは，それぞれ個別に議論され提案されてきたが，その導出過程で得られる作用素方程式の形は類似しており，それらを統一的に扱う研究もなされている [20].

小出らの結果によれば，射影フィルタ族 (PFs) は以下のように記述できる.

定理 3 ある作用素 B が射影フィルタ族であるための必要十分条件は，非負定値行列 R を用いて，

$$BAR = RP_{\mathcal{R}(RA')} \tag{4.19}$$
$$BQ = YRA' \tag{4.20}$$

で与えられる．ここで，Y は式 (4.20) が定義可能な行列とする [20].

行列 B は，行列 R によって各々，

$R = I_m$　のとき　：　射影フィルタ

$R = P_S$　のとき　：　部分射影フィルタ

$R = R_{\boldsymbol{f}}^{1/2}$　のとき　：　平均射影フィルタ

となる．以上の定式化により，射影フィルタ族は，

$$\begin{cases} U &= AR^2A' + Q \\ V &= RA'U^+AR \end{cases}$$

として，統一的に，

$$B_{PFs} = RV^+RA'U^+ \tag{4.21}$$

と表現することができる．

この結果より，射影フィルタ族は原画像空間上での画像の最適性の評価を行なう際に，各々別の計量 R を用いていると見なすことができる．以下，作用素 R のことを原画像空間の計量と呼ぶ．

画像空間の計量に関連して，山下らは上記復元に用いる計量と復元フィルタの不変性についても議論を行なっている [64]．

4.3.6　射影フィルタ族の分離核表現

観測作用素として，画像の各列に対して全て同じ作用を与え，かつ各行に対しても全て同じ作用を与えるような族が存在する．このような観測作用素は，分離核 [33] と呼ばれ，画像の行列表現に対する作用は以下のように記述できる．

$$G = A_r F A_c' + N. \tag{4.22}$$

ここで，$G \in \mathbf{R}^{n_r \times n_c}$，$N \in \mathbf{R}^{n_r \times n_c}$ は，各々観測画像及び雑音の行列表現を表し，$A_r \in \mathbf{R}^{n_r \times m_r}$，$A_c \in \mathbf{R}^{n_c \times m_c}$ は，各々画像の列に関する観測作用素と行に関する観測作用素を表す．ここで，行列の Kronecker 積を以下に定義する．

定義 18 (Kronecker 積 [26])

行列 $A(\in \mathbf{R}^{m_a \times n_a})$ と行列 $B(\in \mathbf{R}^{m_b \times n_b})$ に対し,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n_a}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_a1}B & \cdots & a_{m_an_a}B \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

を, 行列 A と 行列 B の Kronecker 積と呼ぶ. ここで, a_{ij}, $(i = 1, \ldots, m_a,\ j = 1, \ldots, n_a)$ は, 行列 A の i 行 j 列成分を表すものとする.

また, Kronecker 積と vec 作用素に関して, 以下の補題が成り立つ.

補題 2 行列の積 ABC が定義可能であるとき,

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C' \otimes A)\mathrm{vec}(B) \tag{4.24}$$

が成立する [26].

式 (4.22) は, vec 作用素及び Kronecker 積, 補題 2 を用いることにより,

$$\mathrm{vec}(G) = (A_c \otimes A_r)\mathrm{vec}(F) + \mathrm{vec}(N) \tag{4.25}$$

という形に変形することができる. これは, 式 (2.4) の形に他ならない. しかし, Kronecker 積を用いて, 画像の縦方向に対する作用素と画像の横方向に対する作用素を一つに統合した場合, 扱わなくてはならない行列の大きさは, 元の問題で記述されていた行列に比べて非常に大きなものとなる. 従って, 観測作用素が分離核であるような場合, その復元作用素も分離核で記述できれば, 計算機上での実装等に際し, 計算量及び記憶領域という観点で大幅に効率が向上することは想像に難くない. 例えば一般逆フィルタ等では, 復元フィルタを分離核で表現できることは容易に検証することが可能であるが, 射影フィルタ族については, そのような枠組は与えられていなかった. そこで本節では, 射影フィルタ族の分離核作用素としての記述可能性について考察し, 結果として, 射影フィルタ族の構成要素となる雑音に関する相関作用素や原画像空間の計量がある条件を満たす場合には, それ

が可能であることを示す.

準備として，いくつかの補題を与える.

補題 3

$$(A \otimes B)^+ = A^+ \otimes B^+ \tag{4.26}$$

が成立する [26].

補題 4 行列の積 AC 及び BD が定義できるならば,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \tag{4.27}$$

が成立する [26].

復元フィルタとして，一般逆フィルタ [34] を用いた場合，復元画像 $\mathrm{vec}(\hat{F})$ は,

$$\mathrm{vec}(\hat{F}) = (A_c \otimes A_r)^+ \mathrm{vec}(G) \tag{4.28}$$

と記述でき，この式に補題3を適用することにより,

$$\mathrm{vec}(\hat{F}) = (A_c^+ \otimes A_r^+)\mathrm{vec}(G) \tag{4.29}$$

と変形することができる．更に補題2を用いて，最終的に

$$\hat{F} = (A_r^+)G(A_c^+)' \tag{4.30}$$

という分離核の形式で復元フィルタを記述することができる．以下で，射影フィルタ族についても，いくつかの条件を満たす場合には一般逆フィルタ同様，復元作用素を分離核で表現することが可能であることを示す.

観測作用素 A，雑音の相関行列 Q，原画像空間の計量 R に対する射影フィルタ族の集合を$\boldsymbol{\beta}(A, Q, R)$ とすると，以下の定理が成立する.

定理 4

$$\begin{cases} B_c \in \boldsymbol{\beta}(A_c, Q_c, R_c), \\ B_r \in \boldsymbol{\beta}(A_r, Q_r, R_r) \end{cases}$$

ならば,

$$B_c \otimes B_r \in \boldsymbol{\beta}(A_c \otimes A_r, Q_c \otimes Q_r, R_c \otimes R_r) \tag{4.31}$$

が成立する [58].

定理 4の証明

B_c, B_rは, 各々, 観測作用素 A_c, 雑音の相関行列 Q_c, 原画像空間の計量 R_cに対する射影フィルタ族, 及び, 観測作用素 A_r, 雑音の相関行列 Q_r, 原画像空間の計量 R_rに対する射影フィルタ族であるので,

$$B_c A_c R_c = R_c P_{\mathcal{R}(R_c A_c')} \tag{4.32}$$

$$B_r A_r R_r = R_r P_{\mathcal{R}(R_r A_r')} \tag{4.33}$$

が成立し, かつ,

$$B_c Q_c = Y_c R_c A_c' \tag{4.34}$$

$$B_r Q_r = Y_r R_r A_r' \tag{4.35}$$

となる Y_c, Y_rが存在する.

式 (4.32) と式 (4.33) の両辺同士の Kronecker 積をとると,

$$(B_c A_c R_c) \otimes (B_r A_r R_r) = (R_c P_{\mathcal{R}(R_c A_c')}) \otimes (R_r P_{\mathcal{R}(R_r A_r')}).$$

ここで, 関係式 $P_{\mathcal{R}(A')} = A^+ A$ と補題 3及び補題 4より,

$$\begin{aligned} &(B_c \otimes B_r)(A_c \otimes A_r)(R_c \otimes R_r) \\ &= (R_c \otimes R_r)(((A_c R_c)^+ (A_c R_c)) \otimes ((A_r R_r)^+ (A_r R_r))) \\ &= (R_c \otimes R_r)((A_c R_c)^+ \otimes (A_r R_r)^+)(A_c R_c \otimes A_r R_r) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (R_c \otimes R_r)((A_c R_c) \otimes (A_r R_r))^{+}(A_c R_c \otimes A_r R_r) \\
&= (R_c \otimes R_r) P_{\mathcal{R}((A_c R_c \otimes A_r R_r)')} \\
&= (R_c \otimes R_r) P_{\mathcal{R}((R_c \otimes R_r)(A_c \otimes A_r)')}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
(B_c \otimes B_r)(A_c \otimes A_r)(R_c \otimes R_r) = (R_c \otimes R_r) P_{\mathcal{R}((R_c \otimes R_r)(A_c \otimes A_r)')}. \tag{4.36}
$$

同様に，式 (4.34) と式 (4.35) の両辺同士の Kronecker 積をとると，補題 4より，

$$
(B_c Q_c) \otimes (B_r Q_r) = (Y_c R_c A_c') \otimes (Y_r R_r A_r').
$$

$$
\begin{aligned}
&(B_c \otimes B_r)(Q_c \otimes Q_r) \\
&= (Y_c \otimes Y_r)(R_c \otimes R_r)(A_c' \otimes A_r') \\
&= (Y_c \otimes Y_r)(R_c \otimes R_r)(A_c \otimes A_r)'.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
(B_c \otimes B_r)(Q_c \otimes Q_r) = (Y_c \otimes Y_r)(R_c \otimes R_r)(A_c \otimes A_r)'. \tag{4.37}
$$

式 (4.36) と式 (4.37) は，$(B_c \otimes B_r)$ が，観測作用素 $(A_c \otimes A_r)$，雑音の相関行列 $(Q_c \otimes Q_r)$，原画像空間の計量 $(R_c \otimes R_r)$ に対する射影フィルタ族であるための必要十分条件を満たす．よって題意が成立する．Q.E.D.

この定理は，観測作用素が分離核である場合，雑音に関する相関行列と原画像空間の計量が，列方向に対するものと行方向に対するものの Kronecker 積で表現できるならば，射影フィルタ族を分離核で表現できるということを意味している．

この定理によれば，雑音 $\mathbf{vec}(N)$ の相関行列 Q が,

$$
Q = Q_c \otimes Q_r, \quad Q_c \in \mathbf{R}^{n_c \times n_c}, Q_r \in \mathbf{R}^{n_r \times n_r} \tag{4.38}
$$

と記述できるならば，例えば射影フィルタによる復元画像は，

$$\begin{cases} B & \in \boldsymbol{\beta}(A_c \otimes A_r, Q_c \otimes Q_r, I_{m_c} \otimes I_{m_r}), \\ B_c & \in \boldsymbol{\beta}(A_c, Q_c, I_{m_c}), \\ B_r & \in \boldsymbol{\beta}(A_r, Q_r, I_{m_r}) \end{cases}$$

とすると，

$$\mathrm{vec}(\hat{F}) = B\mathrm{vec}(G) = (B_c \otimes B_r)\mathrm{vec}(G) \tag{4.39}$$

と記述でき，これに補題 2を適用すると，

$$\hat{F} = (B_r)G(B_c)' \tag{4.40}$$

と書くことができる．

4.3.7　総括

本節では，射影フィルタ族について概括するとともに，観測作用素が分離核であるような場合，雑音に関する相関作用素や原画像空間の計量が分離核で記述できるならば，射影フィルタ族も分離核で記述できることを示した．

射影フィルタ族は，それまでの復元法が有していた，

- 復元画像と原画像の近さの最適性を，原画像空間ではなく観測画像空間上で間接的に測っている．
- 雑音に関する統計的な情報を有効に活用していない．
- 個々の画像に関する最適性を評価できない．

等の問題全てを解決できる有効な手法である．特に，復元画像と原画像の近さの最適性という観点からは，射影フィルタ族は最良線形偏り最小推定子 [16, 42] であるという意味で有効な手法と言える．しかしながら第 1 章で述べたように，射影フィルタ族は，その定式化において画像に関するより詳しい情報，とりわけ画像の局所的な性質を反映させることができないという問題が残されている．また，次節でその詳細について述べるが，雑音の影響に対する考慮が必ずしも有効に作用するとは限らないことも付記しておく．

4.4 パラメトリック射影フィルタ族

4.4.1 はじめに

前節で述べた射影フィルタ族は，その定義からも明らかなように，雑音の評価を原画像空間上で適切に行なっている．しかしながら，観測画像空間上で比較的エネルギーの大きな雑音が付加された場合には必ずしも雑音の影響の抑制が有効に作用するとは言えない．これは，射影フィルタ族の定義における画像の再現性に関する拘束条件 (すなわち偏り最小性) があまりに厳しいことに起因すると言える．そこで，一般逆フィルタからパラメトリック一般逆フィルタを導出した際と同様の方法論を適用することによって，この拘束条件を緩和し雑音の抑制効果を高める手法として提案されたのがパラメトリック射影フィルタ族である．

射影フィルタ族は，ある拘束条件を満たすものの中で何らかの最適化基準を満たす作用素という形で定義されていたが，パラメトリック射影フィルタ族は，前者の拘束条件と後者の最適化基準の優先度をパラメーターを用いて制御するという考え方に基づくフィルタである．本節では，これらのフィルタの定義や具体的な形式，特徴，問題点等について述べる．

4.4.2 パラメトリック射影フィルタ

射影フィルタに対し，拘束条件式 (4.6) と最適化基準式 (4.7) の優先度をパラメータを用いて制御するよう改良した手法がパラメトリック射影フィルタである．但し，拘束条件式 (4.6) に関しては，その条件が成り立つ度合を何らかの形で数値化しなくてはならない．先に定義した作用素ノルムを用いて，

$$||BA - P_{\mathcal{R}(A')}|| \tag{4.41}$$

という形で数値化する方法も考えられるが，復元フィルタを構成する際，その取り扱いが複雑になるため，以下では，

$$\{\mathrm{tr}[(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})']\}^{1/2} \tag{4.42}$$

を用いて評価する．作用素ノルムが作用素の最大特異値を表していたのに対し，式 (4.42) では，作用素の全特異値の二乗和の平方根を表している．

パラメトリック射影フィルタは以下のように定義される．

定義 19 (パラメトリック射影フィルタ (Parametric Projection Filter)[39])

最適化基準

$$J_{PPF} = \mathrm{tr}[(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})'] + \gamma E\boldsymbol{n}||B\boldsymbol{n}||^2 \tag{4.43}$$

を最小とする作用素 B をパラメトリック射影フィルタ (PPF) と呼ぶ．ここで，γ は $0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータである．

最適化基準式 (4.43) の第 1 項は，前述のように作用素 BA と 作用素 $P_{\mathcal{R}(A')}$ の距離の二乗を，第 2 項は射影フィルタの最適化基準同様，原画像空間上での雑音のエネルギーを意味する．これら二つの最適化基準をパラメータ γ を用いた荷重和にすることにより，射影フィルタで要請されていた復元画像における画像成分の再現性 (すなわち偏り最小性) を緩和し，雑音の抑制効果を高めたものと言える．

パラメトリック射影フィルタ $B_{PPF}(\gamma)$ は

$$B_{PPF}(\gamma) = A'(AA' + \gamma Q)^{+} \tag{4.44}$$

と書くことができる [39].

4.4.3　パラメトリック部分射影フィルタ

パラメトリック部分射影フィルタは，部分射影フィルタ同様，原画像がある既知の線形部分空間に属していることがわかっている場合に，その情報を利用して復元を行なうという考え方と，偏り最小性が緩和されるようパラメータを用いて最適化基準の優先度を制御するという二つの考え方を組み合わせて得られる復元フィルタである．

定義 20 (パラメトリック部分射影フィルタ (Parametric Partial Projection Filter)[48])

最適化基準

$$J_{PPTPF} = \mathrm{tr}[(BAP_S - P_{S_1}P_S)(BAP_S - P_{S_1}P_S)'] + \gamma E\boldsymbol{n}||B\boldsymbol{n}||^2 \tag{4.45}$$

を最小とする作用素 B をパラメトリック部分射影フィルタ (PPTPF) と呼ぶ．ここで，γ は，$0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータである．

このフィルタは，部分射影フィルタにおいても行なっている，原画像が属する既知の線形部分空間に対する考慮を除けば，パラメトリック射影フィルタと同様の復元手法である．

パラメトリック部分射影フィルタ $B_{PPTPF}(\gamma)$ は，

$$B_{PPTPF}(\gamma) = P_S A'(AP_S A' + \gamma Q)^+ \tag{4.46}$$

と書くことができる [48]．

4.4.4　パラメトリックウィーナーフィルタ

パラメトリックウィーナーフィルタは，平均射影フィルタに対し，前述の二つのフィルタ同様，偏り最小性が緩和されるようパラメータを用いて最適化基準の優先度を制御するという考え方を適用したフィルタであり，以下のように定義される．

定義 21 (パラメトリックウィーナーフィルタ (Parametric Wiener Filter)[49])

最適化基準

$$J_{PWF} = E_{\boldsymbol{f}}||BA\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}||^2 + \gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 \tag{4.47}$$

を最小とする作用素 B をパラメトリックウィーナーフィルタ (PWF) と呼ぶ．ここで，γ は $0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータである．

ウィーナーフィルタは，画像の分布に関して平均的な意味での再現性と雑音の影響を同時に最小化するという要請から定義され，平均射影フィルタは，画像の平均的な意味での再現性が最も良いものの中で雑音の影響を最小とするものという形で定義された．パラメトリックウィーナーフィルタは，この二つの最適性のトレードオフをパラメータ γ で制御する復元手法である．

パラメトリックウィーナーフィルタ $B_{PWF}(\gamma)$ は，

$$B_{PWF}(\gamma) = R_{\boldsymbol{f}}A'(AR_{\boldsymbol{f}}A' + \gamma Q)^{+} \tag{4.48}$$

と書くことができる [49]．パラメータ γ の値を 1 とした場合，パラメトリックウィーナーフィルタはウィーナーフィルタと一致する．

4.4.5 パラメトリック射影フィルタ族の統一理論

以上で述べた，パラメトリック射影フィルタ，パラメトリック部分射影フィルタ，パラメトリックウィーナーフィルタは，その導出過程及びフィルタの具体的な形式が類似している．今井らは，文献 [12] において，これらのフィルタを統一的に扱う枠組を考察し，パラメトリック射影フィルタ族 (PPFs) という形で定式化した．

文献 [12] の考えに沿い，パラメトリック射影フィルタ族を改めて以下のように定義する，

定義 22 (パラメトリック射影フィルタ族 (The Family of Parametric Projection Filters)[12])

最適化基準

$$J_{PPFs} = \begin{cases} \mathrm{tr}\{(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})'\} + \gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 \\ \qquad\qquad : (\text{パラメトリック射影フィルタ}) \\ \mathrm{tr}\{(BAP_S - P_{S_1}P_S)(BAP_S - P_{S_1}P_S)'\} + \gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 \\ \qquad\qquad : (\text{パラメトリック部分射影フィルタ}) \\ E_{\boldsymbol{f}}||BA\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}||^2 + \gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 \\ \qquad\qquad : (\text{パラメトリックウィーナーフィルタ}) \end{cases} \tag{4.49}$$

を最小化する作用素 B をパラメトリック射影フィルタ族と呼ぶ．ここで，$0 < \gamma \leq 1$ はパラメータとする．

パラメトリック射影フィルタ族に関して，以下の定理が成り立つ．

定理 5 パラメトリック射影フィルタ族は，

パラメトリック射影フィルタの場合　：　$R = P_{\mathcal{R}(A')}$,　$M = I_m$

パラメトリック部分射影フィルタの場合　：　$R = P_S$,　$M = P_{S_1}$

パラメトリックウィーナーフィルタの場合　：　$R = R_{\boldsymbol{f}}^{1/2}$,　$M = I_m$

として，作用素方程式

$$(BA - M)R^2A' + \gamma BQ = 0 \tag{4.50}$$

の解として得られる [12].

この定理を用いて，パラメトリック射影フィルタ族に属する作用素 $B_{PPFs}(\gamma)$ は，

$$B_{PPFs}(\gamma) = R^2A'(AR^2A' + \gamma Q)^+ \tag{4.51}$$

と統一的に書くことができる．

射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族の相互関係について考察すべく，以下の補題を与える．

補題 5　$0 < \gamma \leq 1$ に対して，

$$||(AR^2A' + \gamma Q)^+|| \leq \frac{1}{\gamma}||(AR^2A' + Q)^+|| \tag{4.52}$$

が成立する [67].

補題 6

$$\begin{aligned} ||B_{PPFs}(\gamma) - B_{PFs}|| \leq \gamma||R||||(AR)^+||||Q|| \\ ||(AR^2A')^+||||A||||B_{PFs}||(1 + ||(AR^2A' + Q)^+||||Q||) \end{aligned} \tag{4.53}$$

が成立する [13, 67].

文献 [67] の証明及び記述と文献 [13] の記述には多少誤りがあるため，以下に正しい証明を与える．

補題 6の証明

$\mathcal{R}(AR)$ への射影子 $P_{\mathcal{R}(AR)}$ を

$$P_{\mathcal{R}(AR)} = AB_{PFs} = AR(RA'(AR^2A' + Q)^+AR)^+RA'(AR^2A' + Q)^+$$

とおく．文献 [67] の補題 7 の証明の前半部分により，

$$\mathcal{N}(RA'(AR^2A' + \gamma Q)^+) = \mathcal{N}(RA'(AR^2A' + Q)^+)$$

であるので，

$$\begin{aligned} & R^2A'(AR^2A' + \gamma Q)^+ \\ &= R^2A'(AR^2A' + \gamma Q)^+(P_{\mathcal{R}(AR)} + (I_n - P_{\mathcal{R}(AR)})) \\ &= R^2A'(AR^2A' + \gamma Q)^+P_{\mathcal{R}(AR)} \\ &= R(AR)^+(AR)(RA')(AR^2A' + \gamma Q)^+P_{\mathcal{R}(AR)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= R(AR)^{+}(AR^2A' + \gamma Q - \gamma Q)(AR^2A' + \gamma Q)^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} \\
&= R(AR)^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} - \gamma R(AR)^{+} Q(AR^2A' + \gamma Q)^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} \\
&= B_{PFs} - \gamma R(AR)^{+} Q(AR^2A' + \gamma Q)^{+}(AR^2A')(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} \\
&= B_{PFs} - \gamma R(AR)^{+} Q(AR^2A' + \gamma Q)^{+}(AR^2A' + \gamma Q - \gamma Q)(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} \\
&= B_{PFs} - \gamma R(AR)^{+} Q(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} + \gamma^2 R(AR)^{+} Q(AR^2A' + \gamma Q)^{+} Q(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)}.
\end{aligned}
$$

よって，補題5を用いて，

$$
\begin{aligned}
&||B_{PPFs}(\gamma) - B_{PFs}|| \\
&= || - \gamma R(AR)^{+} Q(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)} + \gamma^2 R(AR)^{+} Q(AR^2A' + \gamma Q)^{+} Q(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)}|| \\
&\leq \gamma ||R(AR)^{+} Q(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)}|| + \gamma^2 ||R(AR)^{+} Q(AR^2A' + \gamma Q)^{+} Q(AR^2A')^{+} P_{\mathcal{R}(AR)}|| \\
&\leq \gamma ||R||||(AR)^{+}||||Q||||(AR^2A')^{+}||||P_{\mathcal{R}(AR)}|| \\
&\quad + \gamma^2 ||R||||(AR)^{+}||||Q||||(AR^2A' + \gamma Q)^{+}||||Q||||(AR^2A')^{+}||||P_{\mathcal{R}(AR)}|| \\
&\leq \gamma ||R||||(AR)^{+}||||Q||||(AR^2A')^{+}||||P_{\mathcal{R}(AR)}|| \\
&\quad + \gamma ||R||||(AR)^{+}||||Q||||(AR^2A' + Q)^{+}||||Q||||(AR^2A')^{+}||||P_{\mathcal{R}(AR)}|| \\
&\leq \gamma ||R||||(AR)^{+}||||Q||||(AR^2A')^{+}||||A||||B_{PFs}||(1 + ||(AR^2A' + Q)^{+}||||Q||).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

補題6から，容易に以下の定理が導かれる．

定理 6 $\gamma \to 0$ とするとき，

$$||B_{PPFs}(\gamma) - B_{PFs}|| \to 0 \tag{4.54}$$

が成り立つ [67] .

この定理により，パラメトリック射影フィルタ族の，対応する射影フィルタ族への収束性が保証される．図6に，パラメトリック射影フィルタ族と射影フィルタ族の相互関係と，

第 3.4節において同様の結果が得られた，パラメトリック一般逆フィルタと一般逆フィルタの相互関係を模式的に表した図を示す [67].

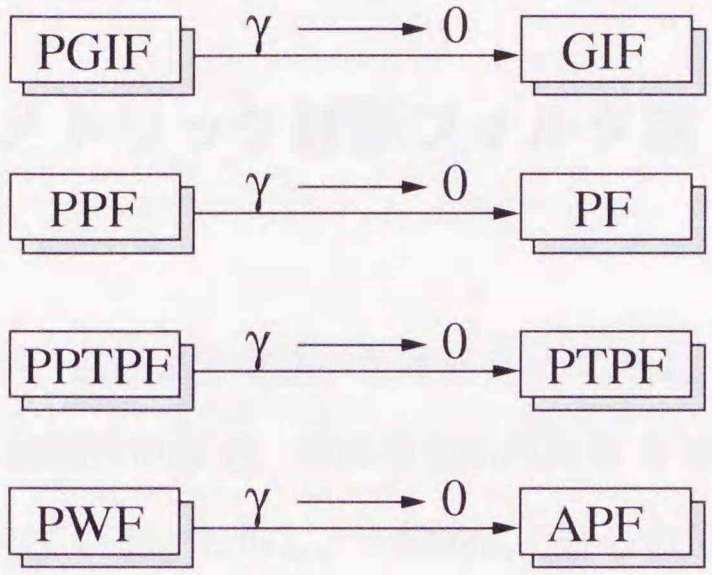


図 4.1: パラメトリック射影フィルタ族と射影フィルタ族及びパラメトリック一般逆フィルタと一般逆フィルタの関係

4.4.6　総括

射影フィルタ族は，ある拘束条件を満たすものの中で最適化基準を最小とする作用素として定式化された．それに対しパラメトリック射影フィルタ族では，前者が成り立つ度合を数値化したものと後者の最適化基準の荷重和を最小化するものを復元フィルタとして採用している．後者の基準で得られる解はパレート解と呼ばれ，二つの最適化基準を同時に改善する解がないという意味での最適性を保証することを意味している．

パラメトリック射影フィルタ族は，それが直接改良の対象とした射影フィルタ族を定義する際に用いた拘束条件の偏り最小性を緩和することにより，射影フィルタ族よりも効果的に雑音の影響を抑制することができると言え，既存手法の中でも特に優れた雑音抑制能力を有する手法である．しかし，第 1 章でも述べたが，パラメトリック射影フィルタ族は，その定式化において個々の画像に関する情報，とりわけ画像の局所的な情報を有効に利用することができないという問題や，次節で述べる復元作用素の構成要素の真値とのずれが復元画像に致命的な影響を及ぼし得るという問題がある．

以下，本論文では，パラメトリック射影フィルタ族が有する高い雑音抑制能力を活かすべく，これを基本として残る課題を解決するという立場をとる．

4.5　正則化パラメトリック射影フィルタ族

4.5.1　はじめに

本章の冒頭でも述べたが，前節までで述べた復元フィルタは，その構成要素となる観測作用素 A や雑音に関する相関作用素 Q，原画像空間の計量 R 等の情報は正確なものであるという前提で議論を進めている．しかし，一般的にそれらの正確な情報を入手するのは不可能であり，何らかの経験的知識等を用いて推定せざるを得ない．しかし，そのような方法により推定した構成要素が真の構成要素と十分近い場合でも，推定した構成要素に基づく復元フィルタと真の構成要素に基づく復元フィルタが近いものとなる保証はなく，その結果，復元画像に致命的な影響を及ぼし得る．今井らは，パラメトリック射影フィルタ族にも当てはまるこの問題を解決すべく，このような問題が生じる機構について考察するとともにその定量的な解析を行ない [12, 14, 15]，最終的にこの問題を回避できる正則化パラメトリック射影フィルタ族を提案し，構成要素の推定精度と復元作用素の関係について定量的な解析を行なっている [13].

本節では，この正則化パラメトリック射影フィルタ族の定義や具体的な形式，定量的な解析に関する主要な結果，問題点等を概括する．

4.5.2　正則化パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体的な形式

定義 23 (正則化パラメトリック射影フィルタ族 (The Family of Regularized Parametric Projection Filters)[13])

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= AR^2A' + \gamma Q \\ T(\gamma,\delta) &= \{U^2(\gamma) + \delta I_n\}^{-1} U(\gamma) \end{aligned}$$

として,

$$B_{RPPFs}(\gamma,\delta) = R^2A'T(\gamma,\delta) \tag{4.55}$$

と表される $B_{RPPFs}(\gamma,\delta)$ を，正則化パラメトリック射影フィルタ族 (RPPFs) と呼ぶ.

これは，パラメトリック射影フィルタ族の具体形における Moore-Penrose 一般逆行列を，正則化一般逆行列 [40, 62] に置き換えたものである．これにより，復元フィルタの構成要素が真値とずれていた場合でも，ずれの大きさに応じて真の復元フィルタに近付けることが可能となる.

4.5.3　正則化パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係

以下で，正則化パラメトリック射影フィルタ族の正則化効果に関する主要な解析結果について述べる．具体的には，フィルタの構成要素の真値とのずれに応じて，当該フィルタ族がパラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族にどのように収束するかについての主要な定理を示す.

— パラメトリック射影フィルタ族への収束性 —

正則化パラメトリック射影フィルタ族のパラメトリック射影フィルタ族への収束性に関して，以下の定理が成立する.

定理 7 $\tilde{R}$, $\tilde{A}$, $\tilde{Q}$ を，各々真値 R, A, Q からずれのある作用素とし，$\tilde{B}_{RPPFs}(\gamma, \delta(\varepsilon))$ を上記ずれのある作用素から構成された正則化パラメトリック射影フィルタ族とする．このとき，

$$\varepsilon = \max(||\tilde{R}\tilde{A}' - RA'||, ||\tilde{Q} - Q||, ||\tilde{R} - R||),$$

とし，$\varepsilon \to 0$ と共に，

1. $\delta(\varepsilon) \to 0$,
2. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \to 0$

が成り立つならば，

$$||\tilde{B}_{RPPFs}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}(\gamma)|| \to 0 \tag{4.56}$$

が成立する [13].

この定理により，正則化パラメトリック射影フィルタ族は，構成要素の真値とのずれに応じて適切にパラメータを選択することにより，パラメトリック射影フィルタ族に近付くことが保証される．

— 射影フィルタ族への収束性 —

同様に，射影フィルタ族への収束性に関して，以下の定理が成立する．

定理 8

$$\varepsilon = \max(||\tilde{R}\tilde{A}' - RA'||, ||\tilde{Q} - Q||, ||\tilde{R} - R||),$$

とし，$\varepsilon \to 0$ と共に，

1. $\delta(\varepsilon) \to 0$,
2. $\gamma(\varepsilon) \to 0$,
3. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \to 0$,
4. $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\gamma^3(\varepsilon)} \to 0$

が成り立つならば，

$$||\tilde{B}_{RPPFs}(\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) - B_{PFs}|| \to 0 \tag{4.57}$$

が成立する [13].

この定理により，正則化パラメトリック射影フィルタ族は，構成要素の真値とのずれに応じて適切にパラメータを選択することにより，射影フィルタ族に近付くことが保証される．

4.5.4　総括

正則化パラメトリック射影フィルタ族を用いることにより，復元フィルタの構成要素が真値とずれのあるものである場合でも，そのずれに大きさに応じて復元フィルタを真の復元フィルタに近付けることが可能であることが明らかになった．これにより，第4.4.6節で述べたパラメトリック射影フィルタ族が有する問題点のうち，後者に関しては解決されたと言える．

図4.2に，正則化パラメトリック射影フィルタ族と，パラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族との関係図を示す．但し，図中の実線部は正則化効果を有する収束性を表し，破線部は正則化効果を有しない収束性を表すものとする．

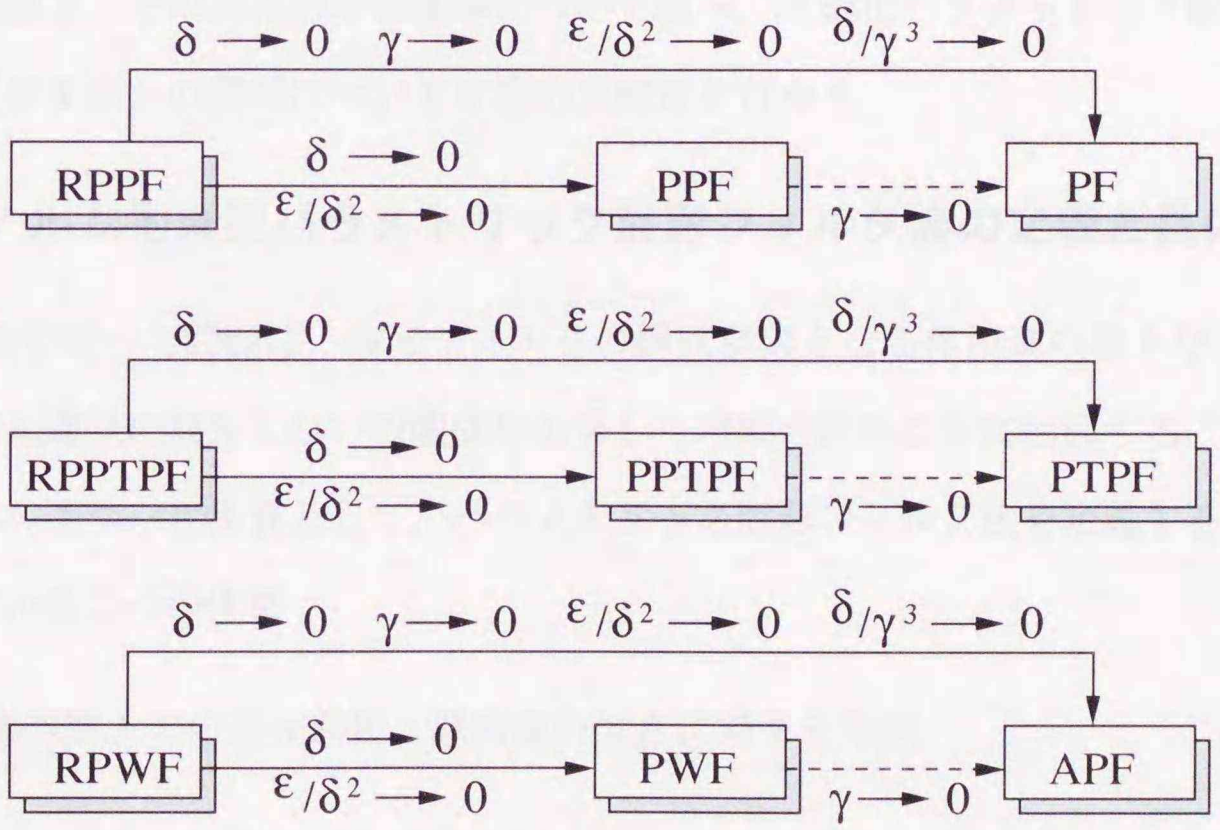


図 4.2: 正則化パラメトリック射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族の関係

しかし，正則化パラメトリック射影フィルタ族が行なっている，Moore-Penrose 一般逆行列を正則化一般逆行列に置き換えるという操作が，パラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準の最適性に，どう寄与しているかという点が必ずしも明確とは言えないという問題が残されている．

4.6　ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族

4.6.1　はじめに

本節では，前節で述べた正則化パラメトリック射影フィルタ族が有する，

- フィルタの最適性に対する正則化操作の寄与が明確ではない

という問題に対処する「ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族」を提案する．この手法では，正則化を行なうに際しフィルタを定義する最適化基準の改良まで戻ってこれを実現する．以下，その具体形や特徴等について述べ，正則化パラメトリック射影フィルタ族同様，既存手法との関係について定量的な解析を行なう．

4.6.2　ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体形

第 4.5.1節で述べた問題は，復元フィルタの構成要素となる作用素の微小なずれにより，真の観測復元過程に関与しない空間成分が著しく増幅されることに起因する．そこで，復元フィルタが持つべき性質として，パラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準が表現している二つの性質

1) 原画像空間上での復元画像と原画像の近さに対する保証

2) 原画像空間上での雑音成分の最小性

に加え，

3) 復元過程において極端に増幅される空間がない

という新たな性質を考える．この性質は，

- 復元作用素のノルムが極端に大きくならない

と換言できる．この性質を反映させるべく，パラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準式 (4.49) に，$\delta \mathrm{tr}\{BB'\}$ という項を加える．この項は，復元作用素の特異値の二乗和の定数倍であり，これを用いて復元フィルタを拘束することで，復元フィルタの最大特異値，すなわちノルムの値を抑制することができる．従って，前述の真の観測復元過程にとって本質的でない空間成分が著しく増幅することを避けることが可能となる．

以下，ここで提案する正則化効果を有するパラメトリック射影フィルタ族を，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族 (NPPFs) と呼び，パラメトリック射影フィルタ族との対応は以下のとおりとする．

パラメトリック射影フィルタ
　　→ ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ (NPPF)

パラメトリック部分射影フィルタ
　　→ ノルム拘束型パラメトリック部分射影フィルタ (NPPTPF)

パラメトリックウィーナーフィルタ
　　→ ノルム拘束型パラメトリックウィーナーフィルタ (NPWF)

ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族を以下のように定義する．

定義 24 (ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族 (The Family of Norm Constrained Parametric Projection Filters)[55, 56])

最適化基準

$$J_{NPPFs}(B) = \begin{cases} \mathrm{tr}\{(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})'\} \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \delta \mathrm{tr}\{BB'\} \\ \quad\quad : (\text{ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ}) \\ \\ \mathrm{tr}\{(BAP_S - P_{S_1}P_S)(BAP_S - P_{S_1}P_S)'\} \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \delta \mathrm{tr}\{BB'\} \\ \quad\quad : (\text{ノルム拘束型パラメトリック部分射影フィルタ}) \\ \\ E_{\boldsymbol{f}}||BA\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}||^2 \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \delta \mathrm{tr}\{BB'\} \\ \quad\quad : (\text{ノルム拘束型パラメトリックウィーナーフィルタ}) \end{cases} \tag{4.58}$$

を最小化する作用素 B をノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族と呼ぶ．ここで，γ は，$0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータ，δ は正実数のパラメータとする．

上記最適化基準を最小化する作用素を得るべく，以下の定理を与える．

定理 9 作用素 B_0 が，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族となる必要十分条件は，

$$(B_0A - M)R^2A' + \gamma B_0Q + \delta B_0 = 0 \tag{4.59}$$

が成立することである [56].

定理 9の証明

最適化基準式 (4.58) は，

$$J_{NPPFs}(B) = \mathrm{tr}\{(BA - M)R^2(BA - M)'\} + \gamma \mathrm{tr}\{BQB'\} + \delta \mathrm{tr}\{BB'\}$$

という形に変形できる．また，簡便のため

$$K = (AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)$$

とおく．K は正定値行列である．

(十分性に関して) B_0 を，式 (4.59) を満たす作用素とするとき，任意の B に対して $J_{NPPFs}(B) \geq J_{NPPFs}(B_0)$ が成立することを示す．

式 (4.59) が，$B_0K = MR^2A'$ と同値であることに留意すると，

$$\begin{aligned}
J_{NPPFs}(B) &= \mathrm{tr}\{MR^2M - B_0AR^2M - MR^2A'B_0' + B_0AR^2A'B_0' + \gamma B_0QB_0' + \delta B_0B_0'\} \\
&= \mathrm{tr}\{MR^2M - B_0AR^2M - MR^2A'B_0' + B_0(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)B_0'\} \\
&= \mathrm{tr}\{MR^2M - B_0AR^2M - MR^2A'B_0' + B_0KB_0'\} \\
&= \mathrm{tr}\{MR^2M - B_0AR^2M - MR^2A'B_0' + MR^2A'B_0'\} \\
&= \mathrm{tr}\{MR^2M - B_0AR^2M\}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
&J_{NPPFs}(B) - J_{NPPFs}(B_0) \\
&= \mathrm{tr}\{MR^2M - BAR^2M - MR^2A'B' + BKB'\} - \mathrm{tr}\{MR^2M - B_0AR^2M\} \\
&= \mathrm{tr}\{-BAR^2M - MR^2A'B' + BKB' + B_0AR^2M\} \\
&= \mathrm{tr}\{-BKB_0' - B_0KB' + BKB' + B_0KB_0'\} \\
&= \mathrm{tr}\{(B - B_0)K(B - B_0)'\} \geq 0.
\end{aligned}$$

以上より，$J_{NPPFs}(B) \geq J_{NPPFs}(B_0)$ が成立する．

(必要性に関して) J_{NPPFs} が B_0 によって最小化されるならば，B_0 は J_{NPPFs} の停留点でなくてはならない．よって，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J_{NPPFs}(B)}{\partial B}\Big|_{B=B_0} \\
&= 2(B_0AR^2A' - MR^2A' + \gamma B_0Q + \delta B_0) \\
&= 2[B_0(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n) - MR^2A'] = 0.
\end{aligned}$$

これは，式 (4.59) に等しい．Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族 $B_{NPPFs}(\gamma,\delta)$ は，

$$B_{NPPFs}(\gamma,\delta) = R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1} \tag{4.60}$$

と一意に書くことができる．

以上のように構成されたノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族では，正則化に関する項を最適化基準に付加しているため，得られた解はパレート解となっている．すなわち，当該フィルタ族の最適化基準が表している，画像の再現性，及び，雑音の最小性，復元フィルタのノルムの最小性を同時に改善する解がないという意味での最適性を保証していることが明確となっている．

4.6.3　ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係

本節では，正則化パラメトリック射影フィルタ族同様，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族のパラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族への収束性に関する定量的な解析を行なう．また，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタに関しては，一般逆フィルタへの収束性についても検証する．

— パラメトリック射影フィルタ族への収束性 —

ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族のパラメトリック射影フィルタ族への収束性について定量的な評価を行なうべく，以下にいくつかの補題を示す．

補題 7 対称行列 H について，

$$H^+H = HH^+ \tag{4.61}$$

が成立する．

補題 7の証明

$$HH^+H = H = H' = (HH^+H)' = H(H^+)'H$$

と，Moore-Penrose 一般逆行列の一意性により，$H^+ = (H^+)'$．よって，

$$H^+H = (H^+H)' = H(H^+)' = HH^+.$$

Q.E.D.

補題 8

$$(AR^2A' + \gamma Q)^+(AR^2A' + \gamma Q)AR = AR \tag{4.62}$$

が成立する [56].

補題 8の証明

$\mathcal{R}(AR) \subseteq \mathcal{R}(AR^2A' + \gamma Q)$ より，

$$\mathcal{N}(AR^2A' + \gamma Q) \subseteq \mathcal{N}(RA').$$

従って，$\mathbf{o}_n$ を n 次の零ベクトルとして，

$$\mathcal{R}(P_{\mathcal{N}(AR^2A'+\gamma Q)}AR) \subseteq \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}(RA')}AR) = \{\mathbf{o}_n\}.$$

これは，$P_{\mathcal{N}(AR^2A'+\gamma Q)}AR$ が零作用素であることを意味する．従って，

$$P_{\mathcal{N}(AR^2A'+\gamma Q)}AR = \{I_n - (AR^2A' + \gamma Q)^+(AR^2A' + \gamma Q)\}AR = 0.$$

よって，$(AR^2A' + \gamma Q)^+(AR^2A' + \gamma Q)AR = AR$．　Q.E.D.

補題 9

$$||(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \leq \frac{1}{\delta} \tag{4.63}$$

が成立する．

補題 9の証明

$(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)$ は正定値行列であり，その最小特異値を λ_{min} とすると，$\lambda_{min} \geq \delta$．

よって，$||(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| = \dfrac{1}{\lambda_{min}} \leq \dfrac{1}{\delta}$. Q.E.D.

補題 10

$$||B_{NPPFs}(\gamma,\delta) - B_{PPFs}(\gamma)|| \leq \frac{2\delta}{\gamma^2}||A||||R||^2\ ||(AR^2A'+Q)^+||^2 \tag{4.64}$$

が成立する [56].

補題 10の証明

補題 7と補題 8を用いると,

$$\begin{aligned}
&R^2A'(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n-\delta I_n)(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+-\delta R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+\\
&\quad -\delta R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+\\
&\quad -\delta R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+\\
&\quad -\delta R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n-\delta I_n)\\
&\quad \times(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}\\
&= R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+\\
&\quad -\delta R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)^+\\
&\quad +\delta^2R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}.
\end{aligned}$$

よって, 補題 9と補題 5を用いて,

$$\begin{aligned}
&||B_{NPPFs}(\gamma,\delta) - B_{PPFs}(\gamma)||\\
&= ||R^2A'(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^+||
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ||-\delta R^2 A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)^+ \\
&\quad +\delta^2 R^2 A'(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q)^+(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}|| \\
&\leq \delta||A||||R||^2\ ||(AR^2A'+\gamma Q)^+||^2+\delta^2||A||||R||^2\ ||(AR^2A'+\gamma Q)^+||^2 \\
&\quad \times||(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}|| \\
&\leq 2\delta||A||||R||^2||(AR^2A'+\gamma Q)^+||^2 \leq \frac{2\delta}{\gamma^2}||A||||R||^2\ ||(AR^2A'+Q)^+||^2.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

補題 11 $\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma,\delta)$ を $\tilde{A}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ から構成されたノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族とする.

$$\varepsilon = \max\{\ ||\tilde{R}\tilde{A}'-RA'||,\ ||\tilde{Q}-Q||,\ ||\tilde{R}-R||\ \}$$

とし, このとき, $\varepsilon(2||A||||R||+1)+\varepsilon^2<\delta$ が成り立つならば, $\varepsilon/\delta\to 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma,\delta)-B_{NPPFs}(\gamma,\delta)|| \ \leq\ & \frac{\varepsilon}{\delta}(||A||||R||+||R||+\varepsilon) \\
&+\frac{\varepsilon}{\delta^2}||A||||R||^2(2||A||||R||+1+\varepsilon)\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

が成立する [56].

補題 11の証明

$(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}'+\gamma\tilde{Q})-(AR^2A'+\gamma Q)=\Delta U$ とおくと, $\gamma\leq 1$ より

$$||\Delta U||\leq\varepsilon(2||A||||R||+\gamma)+\varepsilon^2\leq\varepsilon(2||A||||R||+1)+\varepsilon^2$$

となる. 条件より,

$$||\Delta U(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)^{-1}||\ \leq\ \frac{||\Delta U||}{\delta}\leq\frac{\varepsilon(2||A||||R||+1)+\varepsilon^2}{\delta}\ <\ 1$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}'+\gamma\tilde{Q}+\delta I_n)^{-1} \\
&\quad =\ (AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n+\Delta U)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{(I_n + \Delta U(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1})(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)\}^{-1} \\
&= (AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}(I_n + \Delta U(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1})^{-1} \\
&= (AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\Delta U(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1})^k \\
&= (AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1} \\
&\quad +(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{\ \Delta U(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}\ \}^k
\end{aligned}
$$

と書ける．よって，補題9等を用いると $\varepsilon/\delta \to 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma,\delta) - B_{NPPFs}(\gamma,\delta)|| \\
&= ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&= ||\tilde{R}(\tilde{R}\tilde{A}' - RA' + RA')(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&= ||\tilde{R}(\tilde{R}\tilde{A}' - RA')(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} + \tilde{R}RA'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} \\
&\qquad -R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta}(||R|| + \varepsilon) \\
&\qquad +||(\tilde{R} - R + R)RA'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&= \frac{\varepsilon}{\delta}(||R|| + \varepsilon) \\
&\qquad +||(\tilde{R} - R)RA'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} + R^2A'((\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} \\
&\qquad -(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1})|| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta}(||R|| + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\delta}||A||||R|| \\
&\qquad +||A||||R||^2||(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta I_n)^{-1} - (AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&= \frac{\varepsilon}{\delta}(||A||||R|| + ||R|| + \varepsilon) \\
&\qquad +||A||||R||^2\ ||(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\{\ \Delta U(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}\ \}^k|| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta}(||A||||R|| + ||R|| + \varepsilon) \\
&\qquad +\frac{||A||||R||^2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{||\Delta U||}{\delta}\right)^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta}(||A||||R|| + ||R|| + \varepsilon) + \frac{||A||||R||^2}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon(2||A||||R|| + 1) + \varepsilon^2}{\delta}\right)^k \\
&= \frac{\varepsilon}{\delta}(||A||||R|| + ||R|| + \varepsilon) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\delta^2}||A||||R||^2(2||A||||R|| + 1 + \varepsilon)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}(2||A||||R|| + 1 + \varepsilon)\right)^k\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{\delta}(||A||||R|| + ||R|| + \varepsilon) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\delta^2}||A||||R||^2(2||A||||R|| + 1 + \varepsilon)\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

以上の補題等から，以下の定理が成り立つ．

定理 10

$$\varepsilon = \max\{\ ||\tilde{R}\tilde{A}' - RA'||,\ ||\tilde{Q} - Q||,\ ||\tilde{R} - R||\ \}$$

とするとき，$\varepsilon \to 0$ と共に，

1. $\delta(\varepsilon) \to 0$,
2. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \to 0$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}(\gamma)|| \to 0 \tag{4.66}$$

が成立する [56].

定理 10の証明

補題 10，補題 11より，

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}(\gamma)|| \\
&= ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q)^+|| \\
&= ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} \\
&\quad + R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q)^+|| \\
&\leq ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1}||
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+||R^2A'(AR^2A'+\gamma Q+\delta(\varepsilon)I_n)^{-1}-R^2A'(AR^2A'+\gamma Q)^{+}|| \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}(||A||||R||+||R||+\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}||A||||R||^2(2||A||||R||+1+\varepsilon)\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right) \\
&+\frac{2\delta(\varepsilon)}{\gamma^2}||A||||R||^2\ ||(AR^2A'+Q)^{+}||^2.
\end{aligned}
$$

よって，条件が成立するとき，$\varepsilon \to 0$ ならば，

$$||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma,\delta(\varepsilon))-B_{PPFs}(\gamma)|| \quad \to \quad 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族は，パラメータを適切に選ぶことによりパラメトリック射影フィルタ族に収束することが保証され，その性能に関しては，正則化パラメトリック射影フィルタ族と同等であることがわかる．

— 射影フィルタ族への収束性 —

ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族の，射影フィルタ族への収束性に関して，以下の定理を与える．

定理 11

$$\varepsilon=\max\{\ ||\tilde{R}\tilde{A}'-RA'||,\ ||\tilde{Q}-Q||,\ ||\tilde{R}-R||\ \}$$

とするとき，$\varepsilon \to 0$ と共に，

1. $\delta(\varepsilon) \to 0$,
2. $\gamma(\varepsilon) \to 0$,
3. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \to 0$,
4. $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)} \to 0$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma(\varepsilon),\delta(\varepsilon))-B_{PFs}|| \to 0 \tag{4.67}$$

が成立する [56].

定理 11の証明

補題 6，補題 10，補題 11より，

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma(\varepsilon),\delta(\varepsilon)) - B_{PFs}|| \\
&= ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma(\varepsilon)\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - B_{PFs}|| \\
&= ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma(\varepsilon)\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} \\
&\quad + R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q)^{+} \\
&\quad + R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q)^{+} - B_{PFs}|| \\
&\leq ||\tilde{R}^2\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma(\varepsilon)\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1}|| \\
&\quad + ||R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q)^{+}|| \\
&\quad + ||R^2A'(AR^2A' + \gamma(\varepsilon)Q)^{+} - B_{PFs}|| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}(||A||||R|| + ||R|| + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}||A||||R||^2(2||A||||R|| + 1 + \varepsilon)\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right) \\
&\quad + \frac{2\delta(\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)^2}||A||||R||^2\ ||(AR^2A' + Q)^{+}||^2 \\
&\quad + \gamma(\varepsilon)||R||||(AR)^{+}||||Q||||(AR^2A')^{+}||||A||||B_{PFs}||(1 + ||(AR^2A' + Q)^{+}||||Q||).
\end{aligned}
$$

よって，条件が成立するとき，$\varepsilon \to 0$ ならば，

$$||\tilde{B}_{NPPFs}(\gamma(\varepsilon),\delta(\varepsilon)) - B_{PFs}|| \quad \to \quad 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族は，パラメータを適切に選ぶことにより射影フィルタ族に収束することが保証され，かつ，正則化パラメトリック射影フィルタ族よりも緩い条件で収束することが確認された．

— 一般逆フィルタへの収束性 —

ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタに関しては，一般逆フィルタへの収束性についても考えることができる．その定量的な解析を行なうに際し，以下に補題を与える．

補題 12

$$||B_{NPPF}(\gamma,\delta) - A'(AA' + \delta I_n)^{-1}|| \leq \frac{\gamma}{\delta^2}||A||||Q|| \tag{4.68}$$

が成立する [56].

補題 12の証明

$$\begin{aligned}
& B_{NPPF}(\gamma,\delta) \\
&= A'(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1} \\
&= A'(AA' + \delta I_n)^{-1}(AA' + \delta I_n)(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1} \\
&= A'(AA' + \delta I_n)^{-1}(AA' + \gamma Q + \delta I_n - \gamma Q)(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1} \\
&= A'(AA' + \delta I_n)^{-1} - \gamma A'(AA' + \delta I_n)^{-1}Q(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}.
\end{aligned}$$

よって，補題 9を用いて，

$$\begin{aligned}
& ||B_{NPPF}(\gamma,\delta) - A'(AA' + \delta I_n)^{-1}|| \\
&= ||A'(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1} - A'(AA' + \delta I_n)^{-1}|| \\
&= ||-\gamma A'(AA' + \delta I_n)^{-1}Q(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&\leq \gamma||A||||(AA' + \delta I_n)^{-1}||||Q||||(AA' + \gamma Q + \delta I_n)^{-1}|| \\
&\leq \frac{\gamma}{\delta^2}||A||||Q||.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

以上より，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタの，一般逆フィルタへの収束に関して以下の定理が成り立つ.

定理 12

$$\varepsilon = \max\{\ ||\tilde{A} - A||,\ ||\tilde{Q} - Q||\}$$

とするとき，$\varepsilon \to 0$ と共に，

1. $\delta(\varepsilon) \to 0$,
2. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \to 0$,
3. $\gamma = 0$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NPPF}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - A^+|| \to 0 \tag{4.69}$$

が成立する [56].

定理 12の証明

補題 1，補題 11，補題 12より，

$$\begin{aligned}
&||\tilde{B}_{NPPF}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - A^+|| \\
&= ||\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A^+|| \\
&= ||\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A'(AA' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} \\
&\quad + A'(AA' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A'(AA' + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} \\
&\quad + A'(AA' + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A^+|| \\
&\leq ||\tilde{A}'(\tilde{A}\tilde{A}' + \gamma\tilde{Q} + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A'(AA' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1}|| \\
&\quad + ||A'(AA' + \gamma Q + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A'(AA' + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1}|| \\
&\quad + ||A'(AA' + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A^+|| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}(||A|| + 1 + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}||A||(2||A|| + 1 + \varepsilon)\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{\delta^2(\varepsilon)}||A||||Q|| + 2\delta(\varepsilon)||(A'A)^+||||A^+||.
\end{aligned}$$

よって，条件が成立するとき，$\varepsilon \to 0$ ならば，

$$||\tilde{B}_{NPPF}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - A^+|| \ \to\ 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタは，適切にパラメータを選択することにより一般逆フィルタに収束することが保証された．また，定理11との比較により，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタは，パラメータ γ と δ の選び方によって射影フィルタと一般逆フィルタのどちらに収束するかが変化することがわかる．

4.6.4　総括

ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族を用いることにより，正則化パラメトリック射影フィルタ族と同様，復元フィルタの構成要素が真値とずれがある場合でも，そのずれに大きさに応じて復元フィルタを真の復元フィルタに近付けることができることが明らかになった．これにより，本手法を用いても，第4.4.6節で述べたパラメトリック射影フィルタ族が有する問題点のうち後者に関しては解決されたと言える．また，正則化パラメトリック射影フィルタ族においては，正則化の操作がパラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準の最適性にどう寄与しているかが明確ではなかったが，本手法では最適化基準の構成に立ち戻って正則化を行ない，結果としてパレート解となっているため，当該最適化基準が表現している，画像の再現性，及び，雑音の最小性，復元フィルタのノルム最小性を同時に改善する解がないという意味での最適性を保証しているということが明確となっている．

図4.3に，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタと，パラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族，一般逆フィルタの相互関係を示す．但し，図中の実線部は正則化効果を有する収束性を表し，破線部は正則化効果を有しない収束性を表すものとする．

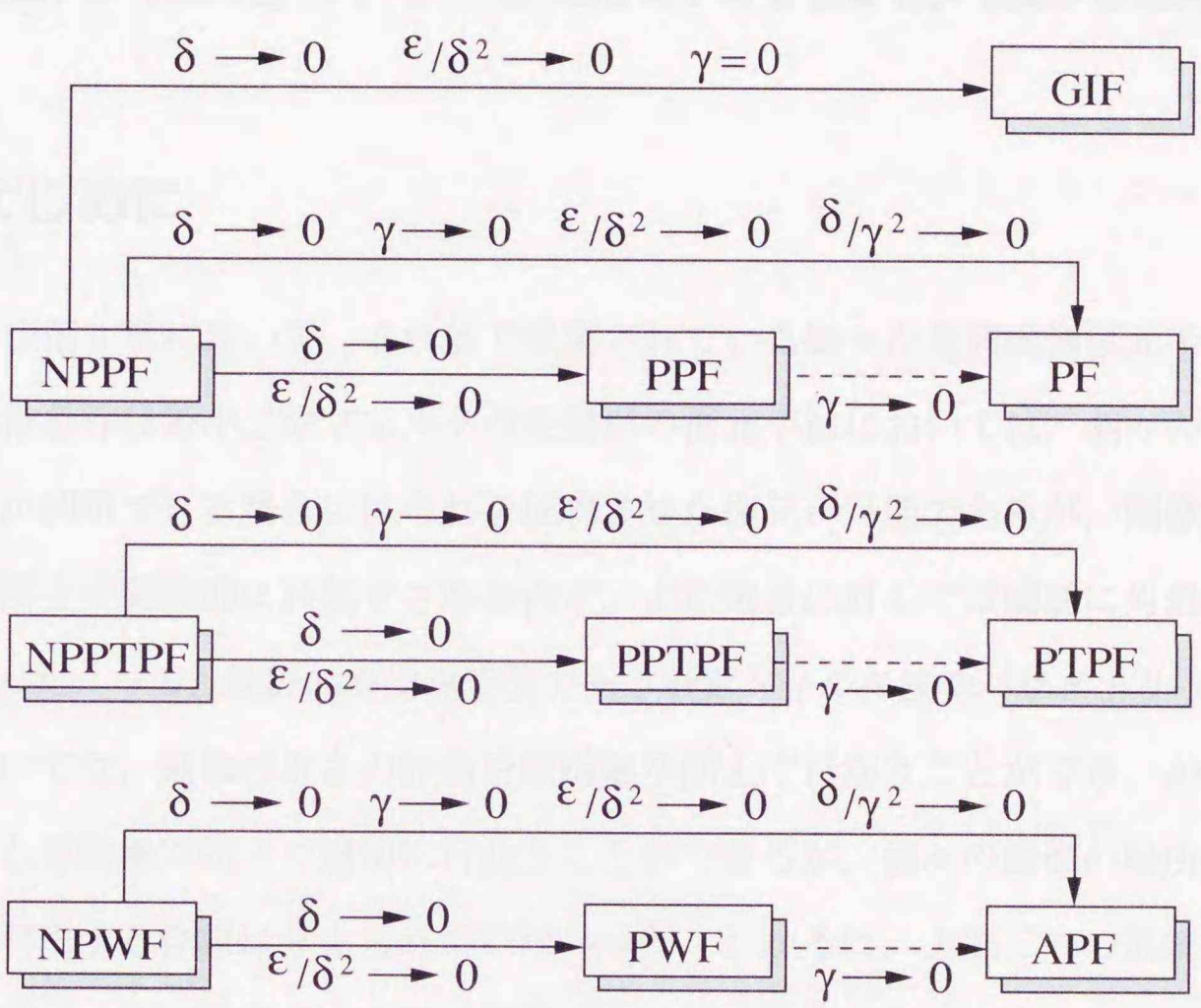


図 4.3: ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族，一般逆フィルタの関係

第 5 章

信号適応性を有する統計的画像復元法

5.1 はじめに

第 3 章及び第 4 章において，これまで提案されている様々な最適画像復元手法について述べた．拘束条件付最小二乗フィルタの発展形の復元手法においては，個々の画像の局所的な情報等が利用できる場合にはそれを反映させた復元が可能であるが，画像の最適性を観測画像空間上で間接的に評価せざるを得ず，また雑音に対しては適切に対処しているとは言い難かった．一方，統計的画像復元法である射影フィルタ族やパラメトリック射影フィルタ族においては，画像の近さの評価を原画像空間上で行なうことができ，かつ，雑音に対する対処も原画像空間上で適切に行なうことができるが，個々の画像の局所的な情報等を効果的に利用する枠組は与えられていなかった．しかるに，上記二つの系統に属する手法双方の長所を同時に有する復元法が構成できれば，より望ましい復元が可能であることは想像に難くない．本論文では，これを実現すべく，統計的画像復元法を土台とし，これを拡張することによって，信号に関する統計的知識と個々の画像に関する情報等を反映させることが可能な復元法を構成するという立場をとる．以降の論点は，

(1) 画像の特徴及び情報等の効果的な記述法

(2) 画像に関する情報を統計的画像復元法に反映させる方法

の二点である．前者の課題に関しては，ウェーブレット理論を用いてこれを解決するという立場をとるが，その詳細については次章以降に譲る．本章では，後者の課題を解決する方法について論ずる．具体的には，雑音に対する考慮を原画像空間上で適切に行なうことができるパラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準の改良に基づき，

- 個々の画像に関する情報等が利用可能であるならば，それを効果的に利用できる

新しいフィルタ族として「信号適応型パラメトリック射影フィルタ族」を提案し，その性質，とりわけ既存手法との関係について定量的な解析を行なう．また，このフィルタ族に対し，第4章で提案した「ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族」の考え方を適用することによって正則化効果を持たせた「ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族」についても併せて提案し，上と同様，既存手法との関係について定量的な解析を行なう．

5.2　信号適応型パラメトリック射影フィルタ族

5.2.1　はじめに

本節では，パラメトリック射影フィルタ族が有する，個々の画像の局所的な情報等を利用する枠組が与えられていないという問題点を解決すべく，パラメトリック射影フィルタ族の最適化基準の構成に立ち戻りこれを実現する信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 [51, 57] について述べる．

5.2.2　信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体形

信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，信号適応型パラメトリック射影フィルタ，信号適応型パラメトリック部分射影フィルタ，信号適応型パラメトリックウィーナーフィルタの総称であり，各々のフィルタのパラメトリック射影フィルタ族との対応は以下のとおりとする．

パラメトリック射影フィルタ
→ 信号適応型パラメトリック射影フィルタ (SAPPF)

パラメトリック部分射影フィルタ
→ 信号適応型パラメトリック部分射影フィルタ (SAPPTPF)

パラメトリックウィーナーフィルタ
→ 信号適応型パラメトリックウィーナーフィルタ (SAPWF)

信号適応型パラメトリック射影フィルタ族を以下のように定義する.

定義 25 (信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (The Family of Signal Adaptive Parametric Projection Filters)[57])

最適化基準

$$J_{SAPPFs}(B) = \begin{cases} \mathrm{tr}\{(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})'\} \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \lambda||CB\boldsymbol{g}||^2 \\ \quad : (\text{信号適応型パラメトリック射影フィルタ}) \\ \mathrm{tr}\{(BAP_S - P_{S_1}P_S)(BAP_S - P_{S_1}P_S)'\} \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \lambda||CB\boldsymbol{g}||^2 \\ \quad : (\text{信号適応型パラメトリック部分射影フィルタ}) \\ E_{\boldsymbol{f}}||BA\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}||^2 \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \lambda||CB\boldsymbol{g}||^2 \\ \quad : (\text{信号適応型パラメトリックウィーナーフィルタ}) \end{cases} \tag{5.1}$$

を最小にする作用素 B を信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (SAPPFs) と呼ぶ. ここで, 作用素 C は復元画像に作用させる何らかの線形作用素とし, γ は $0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータ, λ は正実数のパラメータとする.

最適化基準 $J_{SAPPFs}(B)$ の第 3 項は, その形からも明らかなように, 復元画像 $B\boldsymbol{g}$ を作

用素 C で変換したベクトルのエネルギーを表す．作用素 C は，画像信号として望ましくない成分を抽出する作用素である．例えば事前知識として「画像は大域的に滑らかなものである」という性質を反映させる場合，望ましくない成分は変化量の大きな成分であるので，C として Laplacian 等を採用することが可能でり，また，事前知識として「画像はエネルギーが小さいものである」という性質を反映させる場合には，画像信号のエネルギーそのものを小さくする必要があるので，C として恒等作用素を採用することが可能であろう．前述のように，本論文では当該特徴の記述，すなわち作用素 C の構成にはウェーブレット理論を用いるという立場をとるが，その詳細については第7章に譲る．

以上の定式化により，雑音の影響を原画像空間で適切に評価でき，かつ画像に関する情報等を反映することが可能な復元過程を構成できる．

この最適化基準を最小化する作用素を構成すべく，以下の補題及び定理を与える．

補題 13 作用素方程式，

$$B(AR^2A' + \gamma Q) + \lambda C'CB\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}' = MR^2A' \tag{5.2}$$

を満たす B が存在する [57].

補題 13の証明

式 (5.2) は，補題 2を用いて，

$$\{(AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C)\}\mathrm{vec}(B) = \mathrm{vec}(MR^2A')$$

と変形できる．ここで，$(AR^2A' \otimes I_m)$，$\gamma(Q \otimes I_m)$，$\lambda((\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C))$ は全て非負定値行列であるので，

$$\mathcal{R}(AR^2A' \otimes I_m) \subseteq \mathcal{R}(\ (AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C)\ ).$$

よって，

$$\mathrm{vec}(MR^2A') \in \mathcal{R}(AR^2A' \otimes I_m) \tag{5.3}$$

が証明できれば，題意が成立する．

$\mathrm{vec}(MR^2A')$ の $\mathcal{R}(AR^2A' \otimes I_m)$ の直交補空間への直交射影を考えると，

$$\begin{aligned}
& P_{\mathcal{R}(AR^2A'\otimes I_m)^\perp}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= (I_{mn} - (AR^2A' \otimes I_m)^+(AR^2A' \otimes I_m))\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= (I_n \otimes I_m - (AR^2A')^+(AR^2A') \otimes I_m)\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= \mathrm{vec}\{MR^2A'(I_n - (AR^2A')^+(AR^2A'))\} \\
&= \mathrm{vec}\{MR(RA' - RA'(AR^2A')^+(AR^2A'))\} \\
&= \mathbf{o}.
\end{aligned}$$

よって，式 (5.3) が示された．Q.E.D.

補題 14 行列の積 $A'B$ が定義できるならば，

$$\mathrm{tr}\{A'B\} = \{\mathrm{vec}(A)\}'\mathrm{vec}(B) \tag{5.4}$$

が成立する [26].

定理 13 作用素 B_0 が，最適化基準 J_{SAPPFs} を最小化する必要十分条件は，B_0 が式 (5.2) を満たすことである [57].

定理 13の証明

(十分性に関して) 最適化基準式 (5.1) は，

$$J_{SAPPFs}(B) = \mathrm{tr}\{(BA - M)R^2(BA - M)'\} + \gamma\mathrm{tr}\{BQB'\} + \lambda\mathrm{tr}\{CB\boldsymbol{gg}'B'C'\}$$

と変形でき，更に補題 2と補題 14を用いて，

$$J_{SAPPFs}(B) = \{\mathrm{vec}(RM)\}'\mathrm{vec}(RM) - 2\{\mathrm{vec}(B')\}'\mathrm{vec}(AR^2M) + \{\mathrm{vec}(B')\}'K\,\mathrm{vec}(B')$$

と記述できる．但し，簡便のため，

$$K = [I_m \otimes (AR^2A' + \gamma Q) + \lambda(C'C) \otimes (\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')]$$

とした．

一方，式 (5.2) は，補題 2により，

$$K\mathrm{vec}(B') = \mathrm{vec}(AR^2M) \tag{5.5}$$

と変形できる．補題 13より，この作用素方程式は解を持ち，B_0 が式 (5.5) を満たすと仮定すると，

$$J_{SAPPFs}(B_0) = \{\mathrm{vec}(RM)\}'\mathrm{vec}(RM) - \{\mathrm{vec}(B_0')\}'\mathrm{vec}(AR^2M) \tag{5.6}$$

と書ける．B を B_0 と同じ大きさの任意の行列とすると，

$$\begin{aligned} & J_{SAPPFs}(B) - J_{SAPPFs}(B_0) \\ = \ & \{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B') + [\mathrm{vec}(B_0') - 2\mathrm{vec}(B')]'\mathrm{vec}(AR^2M) \\ = \ & \{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B') + \{\mathrm{vec}(B_0')\}'K\mathrm{vec}(B_0') - 2\{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B_0') \\ = \ & [\mathrm{vec}(B') - \mathrm{vec}(B_0')]'K[\mathrm{vec}(B') - \mathrm{vec}(B_0')] \end{aligned}$$

が成立する．K は非負定値行列なので，

$$J_{SAPPFs}(B) - J_{SAPPFs}(B_0) \geq 0.$$

よって，式 (5.2) が成り立つとき，最適化基準式 (5.1) は最小の値をとる．

(必要性に関して) $J_{SAPPFs}(B)$ が，B_0 によって最小化されると仮定すると，B_0 は $J_{SAPPFs}(B)$ の停留点でなくてはならない．従って，

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J_{SAPPFs}(B)}{\partial B}\Big|_{B=B_0} \\ = \ & 2[B_0(AR^2A' + \gamma Q) + \lambda C'CB_0\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}' - MR^2A'] \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

が成立する．これは，式 (5.2) と同値である．Q.E.D.

この定理より，式 (5.2) を満たす作用素 B_0 の一つとして，例えば，

$$B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda) = \mathrm{unvec}[\{(AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C)\}^{+}\mathrm{vec}(MR^2A')] \quad (5.7)$$

を採用することが可能である．

式 (5.7) からも明らかなように，このフィルタ族は，観測作用素や雑音に関する相関作用素等が同じであったとしても，対象とする画像が異なれば別のフィルタとなるという意味で信号適応型のフィルタと言える．また，当該フィルタ族は，その構成に際し，第 4.6節で提案したノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族同様，最適化基準に画像に関する情報の項を付加しているため，得られた復元フィルタはパレート解となっている．すなわち，画像の再現性，及び，雑音の最小性，画像として望ましくない成分のエネルギーの最小性を同時に改善する解が存在しないという意味での最適性を保証するフィルタ族となっている．

5.2.3　信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の数値解法

式 (5.7) で与えられる信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の算出には，非常に大きなサイズの行列の Moore-Penrose 一般逆行列の計算が必要となり，記憶領域及び計算量双方の観点から，そのままの形では現実的な問題には適用できない．そこで，この問題を解決すべく，式 (5.2) を変形して現実的な問題に適用できる数値解法を以下で与える．それに先立ち，以下の定理を与える．

定理 14　A，B を非負定値対称行列とするとき，$T^{-1}AT^{-1'}$ と $T^{-1}BT^{-1'}$が共に対角行列となるような正則行列 T が存在する [43].

定理 14より，式 (5.2) は，

$$(SS')B(P\Delta P') + \lambda(S\Sigma S')B(P\Lambda P') = MR^2A' \tag{5.8}$$

と書ける．ここで，S は $(C'C)$ を対角化する直交行列で，Σ がその対角行列，P は，$(AR^2A' + \gamma Q)$ と $(\boldsymbol{gg}')$ を同時対角化する正則行列で，Δ 及び Λ は各々対角化された結果得られる対角行列とする．

式 (5.8) に，左側から S'，右側から $P^{-1'}$ を乗じると，

$$S'BP\Delta + \lambda\Sigma S'BP\Lambda = S'MR^2A'P^{-1'} \tag{5.9}$$

となり，更に $Z = S'BP$ とおくと，

$$Z\Delta + \lambda\Sigma Z\Lambda = S'MR^2A'P^{-1'} \tag{5.10}$$

と書ける．これは，

$$(\Delta \otimes I_m + \lambda\Lambda \otimes \Sigma)\mathrm{vec}(Z) = \mathrm{vec}(S'MR^2A'P^{-1'}) \tag{5.11}$$

と同値であり，これを $\mathrm{vec}(Z)$ について解くことにより，

$$\mathrm{vec}(Z) = (\Delta \otimes I_m + \lambda\Lambda \otimes \Sigma)^{+}\mathrm{vec}(S'MR^2A'P^{-1'}) \tag{5.12}$$

を得る．ここで，$(\Delta \otimes I_m + \lambda\Lambda \otimes \Sigma)$ は対角行列であるため，その Moore-Penrose 一般逆行列の算出は，対角要素の非零要素の逆数の計算を行なうのみで済み，かつその他の非対角要素を記憶領域に保持せずに済むので，計算量及び記憶領域の使用量を大幅に削減することが可能である．

式 (5.12) から，最終的な復元フィルタは，

$$B = SZP^{-1} \tag{5.13}$$

として得られる．

5.2.4　信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係

ここでは，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と，パラメトリック射影フィルタ族や射影フィルタ族，拘束条件付最小二乗フィルタ等との関係について考察する．第4章で述べた正則化パラメトリック射影フィルタ族やノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族では，フィルタ間の距離を測る際に作用素ノルムを用いていたが，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族においては，その具体形式をベクトルと見なした方が扱いが容易となるため，収束性の評価は基本的にベクトルのノルムで行ない，最終的にベクトルのノルムと作用素ノルムの関係から，作用素ノルムでの評価を行なうというプロセスを辿る．ここで，作用素ノルムとベクトルのノルムの関係について，以下の補題を与える．

補題 15 作用素 $A \in \mathbf{R}^{r\times c}$ に関して，

$$||A|| \leq ||\mathrm{vec}(A)|| = (\mathrm{tr}\{AA'\})^{1/2} \leq r^{1/2}||A|| \tag{5.14}$$

が成り立つ．

補題 15の証明

$||\mathrm{vec}(A)||$ は，行列 A の全成分の二乗和の平方根であり，明らかに

$$||\mathrm{vec}(A)|| = (\mathrm{tr}\{AA'\})^{1/2}$$

が成り立つ．また，$||A||$ が行列 A の最大特異値，$(\mathrm{tr}\{AA'\})^{1/2}$ が，行列 A の全特異値の二乗和の平方根であることから，

$$||A|| \leq (\mathrm{tr}\{AA'\})^{1/2} \leq r^{1/2}||A||$$

となる．以上を合わせると，式 (5.14) が成り立つ．Q.E.D.

また，行列の Kronecker 積と作用素ノルムの関係について，以下の補題が成り立つ．

補題 16

$$||A \otimes B|| = ||A||||B|| \tag{5.15}$$

が成り立つ.

補題 16の証明

行列 A 及び行列 B の特異値分解を，各々 $P\Lambda S'$，$T\Sigma U'$ とし，λ_{max}，σ_{max} を各々の最大特異値とすると，

$$||A \otimes B|| = ||(P \otimes T)(\Lambda \otimes \Sigma)(S \otimes U)'|| = \lambda_{max}\sigma_{max} = ||A||||B||.$$

Q.E.D.

— パラメトリック射影フィルタ族との関係 —

信号適応型パラメトリック射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族との関係を考察すべく，以下にいくつかの補題を与える.

補題 17

$$((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)^+ \mathrm{vec}(MR^2A') = \mathrm{vec}(MR^2A') \tag{5.16}$$

が成り立つ.

補題 17の証明

補題 13で示された式 (5.3) より，

$$\mathrm{vec}(MR^2A') \in R(AR^2A' \otimes I_m).$$

また，Q が非負定値行列であるので，明らかに

$$R(AR^2A' \otimes I_m) \subseteq R((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m).$$

以上より，$\mathrm{vec}(MR^2A') \in R((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)$ であり，

$$P_{\mathcal{N}((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)}\mathrm{vec}(MR^2A') = 0.$$

従って,

$$((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A')=\mathrm{vec}(MR^2A').$$

Q.E.D.

補題 18

$$\mathcal{R}((\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))\subseteq\mathcal{R}((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m) \tag{5.17}$$

が成り立つ.

補題 18の証明

確率 0 の事象を無視すれば, $\boldsymbol{g}\in\mathcal{R}(AR^2A'+\gamma Q)$ が成り立つ. よって, $\mathcal{R}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\subseteq\mathcal{R}(AR^2A'+\gamma Q)$ であり, $\mathcal{N}(AR^2A'+\gamma Q)\subseteq\mathcal{N}(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')$ となる. よって, 任意の $Z\in\mathbf{R}^{m\times n}$ について,

$$Z(AR^2A'+\gamma Q)=0\quad\Longrightarrow\quad Z\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'=0$$

が成り立つ. これは,

$$((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)\mathrm{vec}(Z)=0\quad\Longrightarrow\quad((\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes I_m)\mathrm{vec}(Z)=0$$

と同値であり,

$$\mathcal{N}((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)\subseteq\mathcal{N}((\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes I_m) \tag{5.18}$$

を意味する. 一方, 任意の $Z\in\mathbf{R}^{m\times n}$ に対し,

$$I_mZ=0\quad\Longrightarrow\quad C'CZ=0.$$

ここで, $Z=X\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'$ とすると,

$$I_mX\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'=0\quad\Longrightarrow\quad C'CX\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'=0$$

となり, これは,

$$((\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes I_m)\mathrm{vec}(X)=0\quad\Longrightarrow\quad((\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))\mathrm{vec}(X)=0$$

と同値である．よって，

$$\mathcal{N}((\boldsymbol{gg}') \otimes I_m) \subseteq \mathcal{N}((\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C)). \tag{5.19}$$

式 (5.18) と式 (5.19) より，

$$\mathcal{N}((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m) \subseteq \mathcal{N}((\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))$$

が成り立つ．これは，

$$\mathcal{R}((\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C)) \subseteq \mathcal{R}((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)$$

に等しい．Q.E.D.

補題 19

$$||\mathrm{vec}(B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda)) - \mathrm{vec}(B_{PPFs}(\gamma))|| \leq \frac{\lambda}{\gamma^3}||(AR^2A' + Q)^+||^2||\boldsymbol{gg}'||||C'C|| \times||\mathrm{vec}(MR^2A')||\,(\gamma + ||((AR^2A' + Q) \otimes I_m + (\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))^+||||\boldsymbol{gg}'||||C'C||) \tag{5.20}$$

が成り立つ．

補題 19の証明

補題 7と補題 17，補題 18 を用いて，

$$\begin{aligned}
\mathrm{vec}(B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda)) &= ((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= ((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))^+((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m) \\
&\quad \times((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= ((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))^+((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C) \\
&\quad -\lambda(\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= ((AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+ \\
& \times \mathrm{vec}(MR^2A') \\
= \; & ((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+ \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
= \; & ((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+ \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)-\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+ \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
= \; & ((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& +\lambda^2((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+ \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+ \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A').
\end{aligned}
$$

よって，補題16と補題5等を用いて，

$$
\begin{aligned}
& ||\mathrm{vec}(B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda))-\mathrm{vec}(B_{PPFs}(\gamma))|| \\
= \; & ||-\lambda((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& +\lambda^2((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+ \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+ \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m)^+\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
\leq \; & \lambda||((AR^2A'+\gamma Q)^+||||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||(AR^2A'+\gamma Q)^+||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
& +\lambda^2||((AR^2A'+\gamma Q)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+||||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||(AR^2A'+\gamma Q)^+|| \\
& \times||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||(AR^2A'+\gamma Q)^+||||\mathrm{vec}(MR^2A')||
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\lambda}{\gamma^2}||((AR^2A'+Q)^+||^2||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\quad +\frac{\lambda}{\gamma^3}||((AR^2A'+Q)\otimes I_m+(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^+||||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||(AR^2A'+Q)^+||^2 \\
&\quad \times||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&= \frac{\lambda}{\gamma^3}||((AR^2A'+Q)^+||^2||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\quad \times(\gamma+||((AR^2A'+Q)\otimes I_m+(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^+||||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

よって，以下の定理が成り立つ．

定理 15 $\lambda \to 0$ のとき，

$$||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda)-B_{PPFs}(\gamma)|| \to 0 \tag{5.21}$$

が成り立つ．

定理 15の証明

補題 15と補題 19から，

$$
\begin{aligned}
&||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda)-B_{PPFs}(\gamma)|| \\
&\quad \leq ||\mathrm{vec}(B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda))-\mathrm{vec}(B_{PPFs}(\gamma))|| \\
&\quad \leq \frac{\lambda}{\gamma^3}||((AR^2A'+Q)^+||^2||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\qquad \times(\gamma+||((AR^2A'+Q)\otimes I_m+(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^+||||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||).
\end{aligned}
$$

よって，$\lambda \to 0$ のとき，

$$||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda)-B_{PPFs}(\gamma)|| \to 0.$$

Q.E.D.

この定理により，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，パラメータを適切に制御することによりパラメトリック射影フィルタ族に収束することがわかり，ある意味パラメトリック射影フィルタ族の拡張となっていると言える．

— 射影フィルタ族との関係 —

以上で行なったパラメトリック射影フィルタ族との関係の議論と同様に，射影フィルタ族との関係についても以下の定理が成立する．

定理 16

$$1.\ \gamma \to 0,$$

$$2.\ \frac{\lambda}{\gamma^3} \to 0$$

であるならば，

$$||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda) - B_{PFs}|| \to 0 \tag{5.22}$$

が成り立つ．

定理 16の証明

補題 6及び，補題 15，補題 19 から，

$$\begin{aligned}
&||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda) - B_{PFs}|| \\
&\leq ||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda) - B_{PPFs}(\gamma)|| + ||B_{PPFs}(\gamma) - B_{PFs}|| \\
&\leq ||\mathrm{vec}(B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda)) - \mathrm{vec}(B_{PPFs}(\gamma))|| + ||B_{PPFs}(\gamma) - B_{PFs}|| \\
&\leq \frac{\lambda}{\gamma^3}||((AR^2A'+Q)^+||^2||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\quad \times(\gamma + ||((AR^2A'+Q)\otimes I_m + (\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^+||||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||) \\
&\quad +\gamma||R||||(AR)^+||||Q||||(AR^2A')^+||||A||||B_{PFs}||(1 + ||(AR^2A'+Q)^+||||Q||).
\end{aligned}$$

よって，条件が成り立つとき，

$$||B_{SAPPFs}(\gamma,\lambda) - B_{PFs}|| \to 0.$$

Q.E.D.

この定理により，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，パラメータを適切に制御することにより射影フィルタ族にも収束することがわかり，射影フィルタ族の拡張となっていることもわかった．

— 拘束条件付最小二乗フィルタ等との関係 —

信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，拘束条件付最小二乗フィルタや適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ，非等方拡散フィルタ等と同様，画像の情報を有効に利用すべく定義した．これらのフィルタとの違いは，その定義から明らかなように，

(1) 復元画像と原画像の近さの評価を原画像空間で行なっている．

(2) 雑音に関する考慮を行なっている．

という点である．特に，上記 (1) の違いにより，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族とこれらフィルタの違いについて定量的な解析をすることは困難であるが，定性的には，これらフィルタは信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の持つ上記二つの性質を考慮せずに簡略化したものと言える．

5.2.5　総括

以上の議論より，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，第 1 章で述べた，復元フィルタが持つべき三つの性質

(1) 未知の原画像が属する空間上で，最良の画像を推定できる．

(2) その際，観測過程で混入する雑音等の対処も，未知の原画像が属する空間上で行なうことができる．

(3) 画像に関する事前知識等がある場合には，それを有効に活用することができる．

を満たす復元法であり，また，ある意味既存の多くの復元法の拡張となっていることがわかった．既存手法との収束性に関する以上の議論をまとめた結果として，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と既存手法の関係を図 5.1に示す．

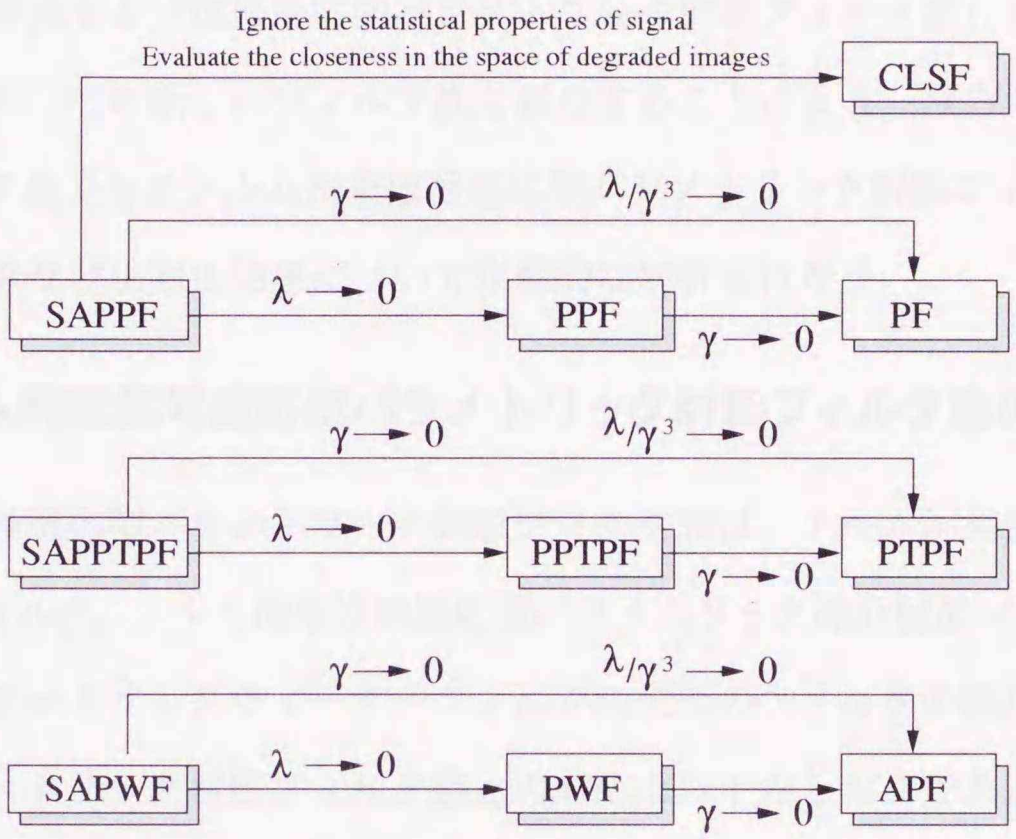


図 5.1: 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族等の関係

5.3　ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族

5.3.1　はじめに

第 4.6節において，パラメトリック射影フィルタ族が有する

- 復元フィルタの構成要素の真値とのずれにより，復元過程に致命的な影響が及ぶ可能性がある．

という問題を，最適化基準の改良に基づいて解決した「ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族」を提案し，前節においては，

- 画像に関する情報，とりわけ画像の局所的な情報等を有効に利用する枠組が与えられていない．

というパラメトリック射影フィルタ族が有するもう一つの問題点を，同じく最適化基準の改良に基づいて解決する「信号適応型パラメトリック射影フィルタ族」を提案した．

本節では，この二つの新しいフィルタ族を統合することにより，双方の長所を同時に有する復元フィルタ族であるノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族を提案し，既存手法との関係及び正則化効果について定量的な解析を行なう．

5.3.2　ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の定義と具体形

ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ，ノルム拘束信号適応型パラメトリック部分射影フィルタ，ノルム拘束信号適応型パラメトリックウィーナーフィルタの三つのフィルタの総称である．各々のフィルタのパラメトリック射影フィルタ族との対応は以下のとおりである．

パラメトリック射影フィルタ
　　→ ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ (NSAPPF)

パラメトリック部分射影フィルタ
　　→ ノルム拘束信号適応型パラメトリック部分射影フィルタ (NSAPPTPF)

パラメトリックウィーナーフィルタ
　　→ ノルム拘束信号適応型パラメトリックウィーナーフィルタ (NSAPWF)

ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族を以下のように定義する．

定義 26 (ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (The Family of Norm Constrained Signal Adaptive Parametric Projection Filters))

最適化基準

$$J_{NSAPPFs}(B) = \begin{cases} \mathrm{tr}\{(BA - P_{\mathcal{R}(A')})(BA - P_{\mathcal{R}(A')})'\} \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \lambda||CB\boldsymbol{g}||^2 + \delta\mathrm{tr}\{BB'\} \\ \quad : (\text{ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ}) \\ \mathrm{tr}\{(BAP_S - P_{S_1}P_S)(BAP_S - P_{S_1}P_S)'\} \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \lambda||CB\boldsymbol{g}||^2 + \delta\mathrm{tr}\{BB'\} \\ \quad : (\text{ノルム拘束信号適応型パラメトリック部分射影フィルタ}) \\ E_{\boldsymbol{f}}||BA\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}||^2 \\ \quad +\gamma E_{\boldsymbol{n}}||B\boldsymbol{n}||^2 + \lambda||CB\boldsymbol{g}||^2 + \delta\mathrm{tr}\{BB'\} \\ \quad : (\text{ノルム拘束信号適応型パラメトリックウィーナーフィルタ}) \end{cases} \tag{5.23}$$

を最小化する作用素 B をノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (NSAPPFs) と呼ぶ．ここで，作用素 C は復元画像に作用させる何らかの線形作用素とし，γ は，$0 < \gamma \leq 1$ を満たすパラメータ，λ，δ は正実数のパラメータとする．

最適化基準式 (5.23) は，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の最適化基準式 (5.1) に，正則化に関する項 $\delta\mathrm{tr}\{BB'\}$ を加えたものである．作用素 C に関しては，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族のものと同様である．

この最適化基準を最小化する作用素を構成すべく，以下の定理を与える．

定理 17 作用素 B_0 が，最適化基準 $J_{NSAPPFs}(B)$ を最小化する必要十分条件は，B_0 が，作用素方程式，

$$B_0(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n) + \lambda C'CB_0\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}' = MR^2A' \tag{5.24}$$

を満たすことである．

定理 17の証明

(十分性に関して) 最適化基準式 (5.23) は,

$$\begin{aligned} J_{NSAPPFs}(B) &= \mathrm{tr}\{(BA-M)R^2(BA-M)'\}+\gamma\mathrm{tr}\{BQB'\} \\ &\quad +\lambda\mathrm{tr}\{CB\boldsymbol{gg}'B'C'\}+\delta\mathrm{tr}\{BB'\} \end{aligned}$$

と変形でき，更に補題 2と補題 14を用いて,

$$J_{NSAPPFs}(B)=\{\mathrm{vec}(RM)\}'\mathrm{vec}(RM)-2\{\mathrm{vec}(B')\}'\mathrm{vec}(AR^2M)+\{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B')$$

と記述できる．但し，簡便のため,

$$K=[I_m\otimes(AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)+\lambda(C'C)\otimes(\boldsymbol{gg}')]$$

とした.

一方，式 (5.24) は，補題 2により,

$$K\mathrm{vec}(B')=\mathrm{vec}(AR^2M) \tag{5.25}$$

と変形できる．この作用素方程式は解を持ち，B_0 が式 (5.25) を満たすと仮定すると,

$$J_{NSAPPFs}(B_0)=\{\mathrm{vec}(RM)\}'\mathrm{vec}(RM)-\{\mathrm{vec}(B_0')\}'\mathrm{vec}(AR^2M) \tag{5.26}$$

と書ける．B を B_0 と同じ大きさの任意の行列とすると,

$$\begin{aligned} &J_{NSAPPFs}(B)-J_{NSAPPFs}(B_0) \\ &= \{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B')+[\mathrm{vec}(B_0')-2\mathrm{vec}(B')]'\mathrm{vec}(AR^2M) \\ &= \{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B')+\{\mathrm{vec}(B_0')\}'K\mathrm{vec}(B_0')-2\{\mathrm{vec}(B')\}'K\mathrm{vec}(B_0') \\ &= [\mathrm{vec}(B')-\mathrm{vec}(B_0')]'K[\mathrm{vec}(B')-\mathrm{vec}(B_0')] \end{aligned}$$

が成立する．K は正定値行列なので,

$$J_{NSAPPFs}(B)-J_{NSAPPFs}(B_0)\geq 0.$$

よって，式 (5.24) が成り立つとき，最適化基準式 (5.23) は最小の値をとる．

(必要性に関して) $J_{NSAPPFs}(B)$ が，B_0 によって最小化されると仮定すると，B_0 は $J_{NSAPPFs}(B)$ の停留点でなくてはならない．従って，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J_{NSAPPFs}(B)}{\partial B}|_{B=B_0} \\
&= 2[B_0(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n) + \lambda C'CB_0\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}' - MR^2A'] \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立する．これは，式 (5.24) と同値である．Q.E.D.

この定理より，式 (5.24) を満たす作用素 B_0 は，

$$B_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta) = \mathrm{unvec}[\{(AR^2A' + \gamma Q + \delta I_n) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C)\}^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')] \tag{5.27}$$

と一意に書くことができる．

このフィルタ族は，第4.6節で提案したノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族や前節で提案した信号適応型パラメトリック射影フィルタ族同様，パレート解となっている．すなわち，画像の再現性，及び，雑音の最小性，画像として望ましくない成分のエネルギーの最小性，復元フィルタのノルム最小性を同時に改善する解が存在しないという意味での最適性を保証するフィルタ族である．

また，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族に関しても，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族同様，非常に大きなサイズの行列の逆行列の計算が必要となるが，信号適応型パラメトリック射影フィルタで用いた方法によって計算量を削減することが可能であることを付記しておく．

5.3.3　ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と既存の復元法との関係

ここでは，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族，及び，パラメトリック射影フィルタ族，射影フィルタ族への収束性に関する定量的な解析を行なう．また，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタに関しては一般逆フィルタへの収束性についても検証する．

— 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族との関係 —

以下で，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族への収束性について検証する．

収束性の検証に先立ち，以下にいくつかの補題を与える．また，簡便のため

$$\begin{cases} Z = (AR^2A' + \gamma Q) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C), \\ \tilde{Z} = (\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' + \gamma \tilde{Q}) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C) \end{cases}$$

とする．

補題 20

$$ZZ^{+}\mathrm{vec}(MR^2A') = \mathrm{vec}(MR^2A') \tag{5.28}$$

が成立する．

補題 20の証明

$\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C)$ が非負定値行列であることと，補題 17の証明から明らか．Q.E.D.

補題 21

$$\begin{aligned} &||(Z + \delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') - Z^{+}\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\ &\quad \leq \frac{2\delta}{\gamma^2\lambda^2}||((AR^2A' + Q) \otimes I_m + (\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C))^{+}||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \end{aligned} \tag{5.29}$$

が成り立つ．

補題 21の証明

補題 7及び，補題 20等を用いると，

$$
\begin{aligned}
&(Z+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= (Z+\delta I_{mn})^{-1}ZZ^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= (Z+\delta I_{mn})^{-1}(Z+\delta I_{mn}-\delta I_{mn})Z^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')-\delta(Z+\delta I_{mn})^{-1}Z^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')-\delta(Z+\delta I_{mn})^{-1}ZZ^+Z^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')-\delta(Z+\delta I_{mn})^{-1}(Z+\delta I_{mn}-\delta I_{mn})Z^+Z^+\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')-\delta Z^+Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')+\delta^2(Z+\delta I_{mn})^{-1}Z^+Z^+\mathrm{vec}(MR^2A').
\end{aligned}
$$

よって，補題 5，補題 9から，

$$
\begin{aligned}
&||(Z+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')-Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&= ||-\delta Z^+Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')+\delta^2(Z+\delta I_{mn})^{-1}Z^+Z^+\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\leq \delta||Z^+||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')||+\delta^2||(Z+\delta I_{mn})^{-1}||||Z^+||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\leq 2\delta||Z^+||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\leq \frac{2\delta}{\gamma^2\lambda^2}||((AR^2A'+Q)\otimes I_m+(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^+||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')||.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

補題 22

$$\varepsilon = \max\{\ ||\tilde{R}\tilde{A}' - RA'||,\ ||\tilde{Q} - Q||,\ ||\tilde{R} - R||\ \}$$

とするとき，$\varepsilon(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon) < \delta$，かつ$\varepsilon/\delta \ \rightarrow\ 0$ であるならば，

$$||(\tilde{Z} + \delta I_{mn})^{-1} - (Z + \delta I_{mn})^{-1}|| \ \leq\ \frac{\varepsilon}{\delta^2}(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon)\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right) \qquad (5.30)$$

が成り立つ．

補題 22の証明

$\Delta Z = \tilde{Z} - Z$ とすると，

$$\Delta Z = \{\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' - AR^2A' + \gamma(\tilde{Q} - Q)\} \otimes I_m.$$

よって，

$$||\Delta Z|| = ||\tilde{A}\tilde{R}^2\tilde{A}' - AR^2A' + \gamma(\tilde{Q} - Q)||||I_m|| \leq \varepsilon(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon).$$

以上と条件より，

$$||\Delta Z(Z + \delta I_{mn})^{-1}|| \ \leq\ \frac{||\Delta Z||}{\delta} \ \leq\ \frac{\varepsilon(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon)}{\delta} < 1.$$

$$(\tilde{Z} + \delta I_{mn})^{-1} = (Z + \delta I_{mn} + \Delta Z)^{-1}$$

$$= \ [\{I_{mn} + \Delta Z(Z + \delta I_{mn})^{-1}\}(Z + \delta I_{mn})]^{-1} = (Z + \delta I_{mn})^{-1}\{I_{mn} + \Delta Z(Z + \delta I_{mn})^{-1}\}^{-1}$$

$$= \ (Z + \delta I_{mn})^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\Delta Z(Z + \delta I_{mn})^{-1})^k$$

$$= \ (Z + \delta I_{mn})^{-1} + (Z + \delta I_{mn})^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-\Delta Z(Z + \delta I_{mn})^{-1})^k.$$

よって，$\varepsilon/\delta \ \rightarrow\ 0$ のとき，

$$||(\tilde{Z} + \delta I_{mn})^{-1} - (Z + \delta I_{mn})^{-1}||$$

$$= \ ||(Z + \delta I_{mn})^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-\Delta Z(Z + \delta I_{mn})^{-1})^k|| \leq \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{||\Delta Z||}{\delta}\right)^k$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)}{\delta}\right)^k \\
&= \frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)}{\delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)}{\delta}\right)^k \\
&= \frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)}{\delta^2}\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

補題 23 $\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)<\delta$ が成立し，かつ，$\varepsilon/\delta \to 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&||(\tilde{Z}+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(M\tilde{R}^2\tilde{A}')-(Z+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\leq \frac{\varepsilon m^{1/2}(||R||||A||+||R||+\varepsilon)}{\delta} \\
&\quad+\frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta^2}\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

が成り立つ．

補題 23の証明

条件が成り立つとき，補題 9，補題 15等を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&||(\tilde{Z}+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(M\tilde{R}^2\tilde{A}')-(Z+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&= ||(\tilde{Z}+\delta I_{mn})^{-1}\{\mathrm{vec}(M\tilde{R}^2\tilde{A}')-\mathrm{vec}(MR^2A')+\mathrm{vec}(MR^2A')\} \\
&\quad -(Z+\delta I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&= ||(\tilde{Z}+\delta I_{mn})^{-1}\{\mathrm{vec}(M\tilde{R}^2\tilde{A}')-\mathrm{vec}(MR^2A')\} \\
&\quad +\{(\tilde{Z}+\delta I_{mn})^{-1}-(Z+\delta I_{mn})^{-1}\}\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\leq \frac{1}{\delta}||\mathrm{vec}(M\tilde{R}^2\tilde{A}')-\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
&\quad +\frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta^2}\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right) \\
&\leq \frac{m^{1/2}}{\delta}||M\tilde{R}^2\tilde{A}'-MR^2A'|| \\
&\quad +\frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta^2}\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{\varepsilon m^{1/2}(||R||||A|| + ||R|| + \varepsilon)}{\delta} + \frac{\varepsilon(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta^2}\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right).$$

Q.E.D.

以上の補題より，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と信号適応型パラメトリック射影フィルタ族との関係について，以下の定理が成り立つ．

定理 18

$$\varepsilon = \max(||\tilde{R}\tilde{A}' - RA'||, ||\tilde{Q} - Q||, ||\tilde{R} - R||)$$

とし，$\varepsilon \to 0$ と共に，

$$1.\ \delta(\varepsilon) \to 0,$$

$$2.\ \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \to 0$$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{SAPPFs}(\gamma, \lambda)|| \to 0 \tag{5.32}$$

が成り立つ．

定理 18の証明

補題 15と補題 21，補題 23により，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{SAPPFs}(\gamma, \lambda)||$$

$$\leq ||(\tilde{Z} + \delta(\varepsilon)I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(M\tilde{R}^2\tilde{A}') - (Z + \delta(\varepsilon)I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')||$$

$$+||(Z + \delta(\varepsilon)I_{mn})^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') - Z^{+}\mathrm{vec}(MR^2A')||$$

$$\leq \frac{\varepsilon m^{1/2}(||R||||A|| + ||R|| + \varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta(\varepsilon)^2}\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right)$$

$$+\frac{2\delta(\varepsilon)}{\gamma^2\lambda^2}||((AR^2A' + Q) \otimes I_m + (\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}') \otimes (C'C))^{+}||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')||.$$

よって，条件が成り立つとき，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{SAPPFs}(\gamma, \lambda)|| \to 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，その構成要素が真値とずれていた場合でも，当該ずれの大きさに応じて適切にパラメータを選択することにより，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族に近付くことが保証される．

— パラメトリック射影フィルタ族との関係 —

ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の，パラメトリック射影フィルタ族への収束性について定量的な解析を行なうべく，以下に補題を与える．

補題 24

$$||B_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta) - B_{NPPFs}(\gamma,\delta)|| \leq \frac{\lambda}{\delta^2}||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')|| \left(1+\frac{\lambda}{\delta}||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||\right) \tag{5.33}$$

が成り立つ．

補題 24の証明

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vec}(B_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta)) \\
&= ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m) \\
&\quad \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1} \\
&\quad \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C) - \lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C)) \\
&\quad \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
&= ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^{-1}((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
= \ & ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^{-1}((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
= \ & ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^{-1} \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)-\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
= \ & ((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -\lambda((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& +\lambda^2((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^{-1} \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1} \\
& \times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A').
\end{aligned}
$$

よって，補題9及び補題15より，

$$
\begin{aligned}
& ||B_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta)-B_{NPPFs}(\gamma,\delta)|| \\
\leq \ & ||((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A') \\
& -((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')|| \\
= \ & ||-\lambda((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C)) \\
& \times((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda^2((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))^{-1}\\
&\times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\\
&\times((\boldsymbol{gg}')\otimes(C'C))((AR^2A'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(MR^2A')||\\
\leq\ & \frac{\lambda}{\delta^2}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')||+\frac{\lambda^2}{\delta^3}||\boldsymbol{gg}'||^2||C'C||^2||\mathrm{vec}(MR^2A')||\\
=\ & \frac{\lambda}{\delta^2}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')||\left(1+\frac{\lambda}{\delta}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||\right).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

定理 19

$$\varepsilon=\max(||\tilde{R}\tilde{A}'-RA'||,||\tilde{Q}-Q||,||\tilde{R}-R||)$$

とし，$\varepsilon\ \rightarrow\ 0$ と共に，

1. $\lambda=0$,
2. $\delta(\varepsilon)\rightarrow 0$,
3. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)}\rightarrow 0$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta(\varepsilon))-B_{PPFs}(\gamma)||\ \rightarrow\ 0 \tag{5.34}$$

が成り立つ．

定理 19の証明

補題 10，補題 23，補題 24等により，

$$
\begin{aligned}
&||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta(\varepsilon))-B_{PPFs}(\gamma)||\\
&\leq\ ||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta(\varepsilon))-B_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta(\varepsilon))||\\
&\quad+||B_{NSAPPFs}(\gamma,\lambda,\delta(\varepsilon))-B_{NPPFs}(\gamma,\delta(\varepsilon))||+||B_{NPPFs}(\gamma,\delta(\varepsilon))-B_{PPFs}(\gamma)||\\
&\leq\ \frac{\varepsilon m^{1/2}(||R||||A||+||R||+\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}+\frac{\varepsilon(2||A||||R||+\gamma+\varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta(\varepsilon)^2}\left(1+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right)\\
&\quad+\frac{\lambda}{\delta(\varepsilon)^2}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')||\left(1+\frac{\lambda}{\delta(\varepsilon)}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||\right)\\
&\quad+\frac{2\delta(\varepsilon)}{\gamma^2}||A||||R||^2\ ||(AR^2A'+Q)^+||^2.
\end{aligned}
$$

よって，条件が成り立つとき，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}(\gamma)|| \ \rightarrow \ 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，その構成要素が真値とずれていた場合でも，当該ずれの大きさに応じて適切にパラメータを選択することにより，パラメトリック射影フィルタ族に近付くことが保証される．

— 射影フィルタ族との関係 —

ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の，射影フィルタ族への収束性に関して，以下の定理を与える．

定理 20

$$\varepsilon = \max(||\tilde{R}\tilde{A}' - RA'||, ||\tilde{Q} - Q||, ||\tilde{R} - R||)$$

とし，$\varepsilon \ \rightarrow \ 0$ と共に，

1. $\lambda = 0$,
2. $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$,
3. $\dfrac{\delta(\varepsilon)}{\gamma^2(\varepsilon)} \rightarrow 0$,
4. $\dfrac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \rightarrow 0$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma(\varepsilon), \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{PFs}|| \ \rightarrow \ 0 \qquad (5.35)$$

が成り立つ．

定理 20の証明

補題 6及び，補題 10，補題 23，補題 24等により，

$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma(\varepsilon), \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{PFs}||$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & ||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma(\varepsilon),\lambda,\delta(\varepsilon)) - B_{NSAPPFs}(\gamma(\varepsilon,\lambda,\delta(\varepsilon)))|| \\
& + ||B_{NSAPPFs}(\gamma(\varepsilon,\lambda,\delta(\varepsilon))) - B_{NPPFs}(\gamma(\varepsilon),\lambda)|| \\
& + ||B_{NPPFs}(\gamma(\varepsilon),\lambda) - B_{PPFs}(\gamma(\varepsilon))|| \\
& + ||B_{PPFs}(\gamma(\varepsilon)) - B_{PFs}|| \\
\leq\ & \frac{\varepsilon m^{1/2}(||R||||A|| + ||R|| + \varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon(2||A||||R|| + \gamma(\varepsilon) + \varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta(\varepsilon)^2}\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right) \\
& + \frac{\lambda}{\delta(\varepsilon)^2}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||||\mathrm{vec}(MR^2A')||\left(1 + \frac{\lambda}{\delta(\varepsilon)}||\boldsymbol{gg}'||||C'C||\right) \\
& + \frac{2\delta(\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)^2}||A||||R||^2\ ||(AR^2A' + Q)^+||^2 \\
& + \gamma(\varepsilon)||R||||(AR)^+||||Q||||(AR^2A')^+||||A||||B_{PFs}||(1 + ||(AR^2A' + Q)^+||||Q||).
\end{aligned}
$$

よって，条件が成り立つとき，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma(\varepsilon),\lambda,\delta(\varepsilon)) - B_{PFs}|| \ \rightarrow\ 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，その構成要素が真値とずれていた場合でも，当該ずれの大きさに応じて適切にパラメータを選択することにより，射影フィルタ族に近付くことが保証される．

— 一般逆フィルタとの関係 —

ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタと，一般逆フィルタの関係を評価すべく，以下の補題を与える．

補題 25

$$
\begin{aligned}
&||((AA' + \gamma Q + \delta I_n) \otimes I_m + \lambda(\boldsymbol{gg}') \otimes (C'C))^{-1}\mathrm{vec}(A') \\
&\quad -((AA' + \delta I_n) \otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A')|| \leq \frac{1}{\delta^2}\{\gamma||Q|| + \lambda||\boldsymbol{gg}'||||C'C||\}||\mathrm{vec}(A')||
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

が成り立つ．

補題 25の証明

$$
\begin{aligned}
&((AA'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}\mathrm{vec}(A')\\
&= ((AA'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)\\
&\quad\times((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A')\\
&= ((AA'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}\\
&\quad\times((AA'+\delta I_n)\otimes I_m+\gamma(Q\otimes I_m)+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C)-\gamma(Q\otimes I_m)-\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))\\
&\quad\times((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A')\\
&= ((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A')\\
&\quad-((AA'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}(\gamma(Q\otimes I_m)+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))\\
&\quad\times((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A').
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
&||((AA'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}\mathrm{vec}(A')\\
&\qquad-((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A')||\\
&\leq ||-((AA'+\gamma Q+\delta I_n)\otimes I_m+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))^{-1}(\gamma(Q\otimes I_m)+\lambda(\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}')\otimes(C'C))\\
&\qquad\times((AA'+\delta I_n)\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(A')||\\
&\leq \frac{1}{\delta^2}\{\gamma||Q||+\lambda||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||\}||\mathrm{vec}(A')||.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

この補題より，以下の定理が成り立つ.

定理 21

$$\varepsilon = \max\{\ ||\tilde{A} - A||,\ ||\tilde{Q} - Q||\}$$

とし，$\varepsilon \to 0$ と共に，

1. $\delta(\varepsilon) \to 0$,
2. $\dfrac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \to 0$,
3. $\gamma = 0$,
4. $\lambda = 0$

であるならば，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{GIF}|| \ \to\ 0 \tag{5.37}$$

が成り立つ．

定理 21の証明

補題 1，補題 23，補題 25より，

$$\begin{aligned}
&||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - A^+|| \\
&\leq\ ||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon))|| \\
&\quad +||B_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - A'(AA' + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1}|| \\
&\quad +||A'(AA' + \delta(\varepsilon)I_n)^{-1} - A^+|| \\
&\leq\ \frac{\varepsilon m^{1/2}(||R||||A|| + ||R|| + \varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon(2||A||||R|| + \gamma + \varepsilon)||\mathrm{vec}(MR^2A')||}{\delta(\varepsilon)^2}\left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\right)\right) \\
&\quad +\frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\{\gamma||Q|| + \lambda||\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}'||||C'C||\}||\mathrm{vec}(A')|| \\
&\quad +2\delta(\varepsilon)||(AA')^+||||A^+||.
\end{aligned}$$

よって，条件が成り立つとき，

$$||\tilde{B}_{NSAPPFs}(\gamma, \lambda, \delta(\varepsilon)) - B_{GIF}|| \ \to\ 0.$$

Q.E.D.

この定理により，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタの，一般逆フィルタへの収束性が保証される．

5.3.4　総括

以上の議論から，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族は，第1章で述べた，復元フィルタが持つべき三つの性質

(1) 未知の原画像が属する空間上で，最良の画像を推定できる．

(2) その際，観測過程で混入する雑音等の対処も，未知の原画像が属する空間上で行なうことができる．

(3) 画像に関する事前知識等がある場合には，それを有効に活用することができる．

を満たし，かつ，正則化パラメトリック射影フィルタ族と同等以上の正則化効果を有し，既存の手法の多くをその特殊な場合として含む最適画像復元フィルタであることが言えた．

図5.2に，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と他の復元フィルタとの関係を示す．但し，実線部は正則化効果を有する収束を表し，破線部は正則化効果を有しない収束を表す．

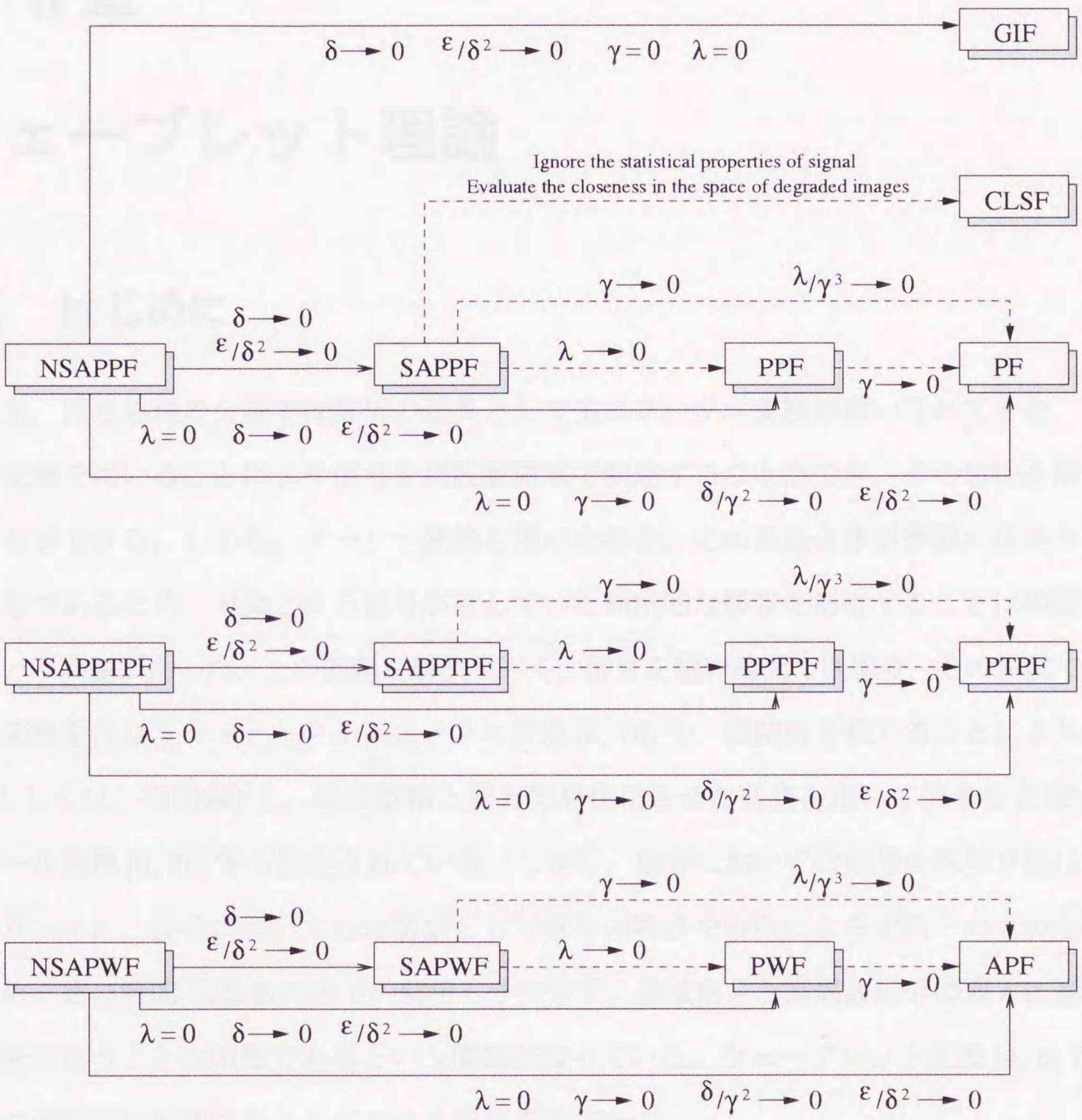


図 5.2: ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と既存の手法の関係

第 6 章

ウェーブレット理論

6.1 はじめに

旧来，信号処理の分野では解析の道具として主にフーリエ変換が用いられてきた．フーリエ変換を用いることにより信号を周波数領域で記述することができ，その特性を解析することができる．しかし，フーリエ変換を用いた場合，その基底自体が無限の広がりを持つ信号であるため，対象とする信号が有していた局所的な情報を解析することは困難であるという問題があった．この問題を解決すべく，信号を短い時間で区切り，その単位でフーリエ変換を行なうショートタイムフーリエ変換 [6, 76] や，窓関数を乗じることにより時間軸 (もしくは，空間軸) 上，周波数軸上双方で局在化させた基底を用いて信号を表現する，ガボール変換 [6, 76] 等も提案されている．しかし，前者においては信号の区切り幅は一定であり，また，後者についても窓関数として信号の特性や場所によらず同一のものを用いるため一定の時間-周波数の窓での解析しかできず，低域信号と高周波信号の双方に適した解析を行なうことは困難であるという問題が残っていた．ウェーブレット変換 [4, 6, 7, 76] は，この問題に対処することができる解析手法である．

本章では，ウェーブレット理論の概要を述べる．

6.2 準備

$L^2(\mathbf{R})$ を実軸 $\mathbf{R}$ 上で定義された複素数値をとる二乗可積分関数全体からなる可分なヒ

ルベルト空間 [2] とし，その内積及びノルムを以下のように定義する．

定義 27 ($L^2(\mathbf{R})$ の内積とノルム [6])

内積　：　$< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx,$

ノルム　：　$\|f\|_2 =< f, f >^{1/2},\ \ f, g \in L^2(\mathbf{R}).$

また，l^2 を各項の絶対値の二乗和が収束するような複素数無限数列全体からなる可分なヒルベルト空間とし，その内積及びノルムを $L^2(\mathbf{R})$ 同様，以下のように定義する．

定義 28 (l^2 の内積とノルム [6])

内積　：　$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (c_i \overline{d_i}),$

ノルム　：　$\|\boldsymbol{c}\|_{l^2} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c})^{1/2},\quad \boldsymbol{c}(=\{c_i\}),\ \boldsymbol{d}(=\{d_i\}) \in l^2.$

但し，以上の定義における $\overline{g(x)}$ や $\overline{d_i}$ は，複素共役を表すものとする．

6.3　ウェーブレット変換

ウェーブレット変換の目的は，空間領域と周波数領域双方において局在化され，かつ信号の低域成分と高域成分各々に対し，時間-周波数窓の大きさが適切に変化するような基底を用いて信号を表現することにある．これを実現すべく，ある関数 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対して，

$$\psi^{a,b}(x) = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),\ \ a, b \in \mathbf{R},\ \ a \neq 0 \tag{6.1}$$

として生成された関数族で信号を表現することを考える．この操作は，関数$\psi(x)$ を圧縮・伸長及び平行移動させることに対応し，低域成分の解析には時間軸上で広く周波数軸上で狭い窓を持つ基底を用い，高域成分の解析には逆に時間軸上で狭く周波数軸上で広い窓を持つ基底を用いることによって，ショートタイムフーリエ変換やガボール変換が有する問

題の解決を目指すものである．上記関数族が解析対象である信号 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ を完全に表現し得るためには，関数 $\psi(x)$ が以下に示す基本ウェーブレットでなくてはならない [6].

定義 29 (基本ウェーブレット [6])

関数 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ のフーリエ変換 $\hat{\psi}(\omega)$ が，条件

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \tag{6.2}$$

を満たすとき，$\psi(x)$ を基本ウェーブレットという．また，この条件を許容条件 (admissibility condition) と呼ぶ.

また，基本ウェーブレットによる積分ウェーブレット変換を以下のように定義する.

定義 30 (積分ウェーブレット変換 [6])

$\psi(x)$ を基本ウェーブレットとし，$f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，

$$(W_\psi f)(b,a) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \tag{6.3}$$

と定義される積分変換を，積分ウェーブレット変換という．ここで，$a, b \in \mathbf{R}$ であり，$a \neq 0$ とする.

関数 $\psi(x)$ が基本ウェーブレットであるならば，関数 $f(x)$ の積分ウェーブレット変換 $(W_\psi f)(a,b)$ によって，$f(x)$ を完全に記述することができ，かつ，逆変換公式

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int\int \{(W_\psi)(b,a)\} \left\{ |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\} \frac{dadb}{a^2} \tag{6.4}$$

によって，$f(x)$ を完全に再構成することが可能となる [6].

以上の形式では，基本ウェーブレットとして使用できる関数の選択肢が非常に広範であるという利点を持つ反面，関数族 $\psi^{a,b}(x)$ が空間に対して冗長であり，かつ，計算機上での信号処理への適用を考えた場合，必ずしも扱い易いとは言えない．以降の節では，種々の制限を加えることによってより使い易い形式を与える.

6.4　ウェーブレット級数展開

前節で述べた積分ウェーブレット変換では，そのパラメータ a, b の定義域として $\mathbf{R}$ 全体 (但し，$a \neq 0$) を用いていたが，これを離散的な値，特に，$\mathbf{Z}$ を整数全体からなる集合として，

$$\begin{cases} a &= 2^{-j}, \\ b &= 2^{-j}k, \quad j,k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

のみで実現することを考える．これは，より細かい構造の解析には高域成分をより多く含む基底を密に配置し，逆に，より大域的な構造の解析には低域成分をより多く含む基底を必要十分なだけ配置したいという要請からくるものである．これを実現するにあたり，その道具立てとして，以下に示すリース基底を定義する．

定義 31 (リース基底 [6])

関数 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ により生成される関数族

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbf{Z} \tag{6.5}$$

が，以下の二つの条件を満たすとき $\{\psi_{j,k}(x)\}$ はリース基底であるという．

i)　$\{\ \psi_{j,k}(x)\ ;\ j,k \in \mathbf{Z}\ \}$ の線形結合の全体が $L^2(\mathbf{R})$ 内の稠密な集合である．

ii)　定数 A, B $(0 < A \leq B < \infty)$ が存在して，各項の二乗の和が収束するような任意の無限数列 $\{c_{j,k}\}$ に対し，

$$A||\{c_{j,k}\}||_{l^2}^2 \ \leq\ \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k} \right\|_2^2 \ \leq\ B||\{c_{j,k}\}||_{l^2}^2$$

が成立する．

また，このとき $\psi(x)$ を R 関数という．

関数 $\psi(x)$ を R 関数とするとき $\{\psi_{j,k}(x)\}$ に対して

$$< \psi_{j,k}, \psi^{l,m} >= \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j,k,l,m \in \mathbf{Z} \tag{6.6}$$

という意味で共役な $L^2(\mathbf{R})$ のリース基底 $\{\psi^{j,k}(x)\}$ が存在する．但し，$\delta_{i,j}$ は Kronecker のデルタである．

これにより，関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対して

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \psi_{j,k} > \psi^{j,k}(x) \tag{6.7}$$

なる一意的な級数展開を得る．次に，リース基底による級数展開と積分ウェーブレット変換及び逆変換を結びつけるため，以下に示す R-ウェーブレットを定義する．

定義 32 (R-ウェーブレット [6])

R 関数 $\psi(x)$ から，式 (6.5) によって定義される関数族 $\{\psi_{j,k}(x)\}$ と，適当な関数 $\tilde{\psi}(x)$ から

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x) = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbf{Z} \tag{6.8}$$

によって生成される関数族 $\{\tilde{\psi}_{j,k}(x)\}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の共役な基底となるとき，$\psi(x)$ を R-ウェーブレット (もしくは，単にウェーブレット) と呼ぶ．また，$\psi(x)$ が R-ウェーブレットであるとき，$\tilde{\psi}(x)$ を共役ウェーブレットと呼ぶ．

明らかに共役ウェーブレット $\tilde{\psi}(x)$ は $\psi(x)$ に対して一意に定まり，かつ $\tilde{\psi}(x)$ 自身，R-ウェーブレットである．

R 関数 $\psi(x)$ が R-ウェーブレットであるならば，式 (6.7) の級数展開は，

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \psi_{j,k} > \tilde{\psi}_{j,k}(x) \tag{6.9}$$

と書くことができる．これは，積分ウェーブレット変換からの再構成式 (6.4) を，離散的な $a(=2^{-j})$, $b(=2^{-j}k)$ を用いて記述した形式に他ならない．

以上の，R-ウェーブレットにより生成された関数族を用いた級数展開形では，双直交系を用いて議論を進めていたが，直交系を用いることも可能である．以下で直交ウェーブレット [6] による級数展開について述べる．

定義 33 (直交ウェーブレット [6])

ある関数 $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対して，以下のように生成される関数族が，

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbf{Z}$$

以下の二つの条件，

(i) $< \psi_{j,k}, \psi_{l,m} >= \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m} \quad j,k,l,m \in \mathbf{Z}$ が成り立つ．

(ii) $f \in L^2(\mathbf{R})$ が

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(x) \tag{6.10}$$

のように展開される．この級数の収束は，$L^2(\mathbf{R})$ の収束であり，

$$\lim_{M_1,N_1,M_2,N_2\to\infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k}\psi_{j,k} \right\|_2 = 0.$$

の意味で $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となるとき，関数 $\psi(x)$ を直交ウェーブレットという．

直交ウェーブレットを用いた場合は，式 (6.7) 及び式 (6.9) の級数展開は，

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \psi_{j,k} > \psi_{j,k}(x) \tag{6.11}$$

と書くことができる．

6.5　多重解像度解析

関数 $\psi(x)$ をウェーブレット，$\{\psi_{j,k}(x)\}$ を ψ から生成されるリース基底とする．各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$\{\psi_{j,k}(x)\ ;\ k \in \mathbf{Z}\}$ が生成する線形部分空間の閉包を W_j で表す．すなわち

$$W_j = clos_{L^2(\mathbf{R})} < \psi_{j,k}(x)\ ;\ k \in \mathbf{Z} > \tag{6.12}$$

とすると，$L^2(\mathbf{R})$ は，

$$L^2(\mathbf{R}) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} W_j = \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \cdots \tag{6.13}$$

のように，W_j の直和に分解される．($\dot{+}$ は直和を表す記号とする．)

次に，各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，次のような $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間列

$$V_j = \sum_{i=-\infty}^{j-1} \dot{W}_i = \cdots \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1} \tag{6.14}$$

を考える．この V_j は以下の五つの性質を満たす．

(1) $V_j \subset V_{j+1} \qquad (j \in \mathbf{Z})$,

(2) $clos_{L^2(\mathbf{R})}(\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j) = L^2(\mathbf{R})$,

(3) $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$,

(4) $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j \qquad (j \in \mathbf{Z})$,

(5) $f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \qquad (j \in \mathbf{Z})$.

ここで，部分空間 V_0 に注目し，もしこの部分空間が一つの関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ によって

$$V_0 = clos_{L^2(\mathbf{R})} < \phi_{0,k}(x) \; ; \; k \in \mathbf{Z} > \tag{6.15}$$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k) \tag{6.16}$$

の意味で生成されているものとすれば，他の全ての部分空間 V_j もこの一つの関数 $\phi(x)$ によって，

$$V_j = clos_{L^2(\mathbf{R})} < \phi_{j,k} \; ; \; k \in \mathbf{Z} >, \quad j \in \mathbf{Z} \tag{6.17}$$

のように生成される．

以上の道具立てをもとに，多重解像度解析を以下のように定義する．

定義 34 (多重解像度解析 [6, 7, 27])

関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ は，式 (6.17) で定義される閉部分空間の列 V_j が前述の性質 (1),(2),(3),(5) を満足し，かつ $\{\phi_{0,k}(x)\}$ が線形部分空間 V_0 のリース基底となるとき，多重解像度解析 (multiresolution analysis ; MRA) を生成するという．また，関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が一つの多重解像度解析を生成するとき，$\phi(x)$ をスケール関数と呼ぶ．特に，$\phi(x)$ が，

$$< \phi(\cdot - j), \phi(\cdot - k) >= \delta_{j,k} \tag{6.18}$$

を満たすとき，$\phi(x)$ を直交スケール関数と呼ぶ．

6.6 ウェーブレット分解とウェーブレット再構成

部分空間列 $\{V_j\}$ は直交スケール関数 $\phi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ によって，また部分空間列 $\{W_j\}$ は直交ウェーブレット $\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ によって生成されているものとする．このとき前節の性質 (2) より，任意の $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ は，適当な $N \in \mathbf{Z}$ と 関数 $f_N(x) \in V_N$ を選べば，$f_N(x)$ によって任意の精度で近似できる．また，$V_j = V_{j-1} \dot{+} W_{j-1}$ $(j \in \mathbf{Z})$ であるので，関数 $f_N(x)$ を

$$f_N(x) = f_{N-1}(x) + g_{N-1}(x), \quad f_{N-1}(x) \in V_{N-1},\ g_{N-1}(x) \in W_{N-1} \tag{6.19}$$

のように一意的に分解できる．これを繰り返せば，

$$f_N(x) = g_{N-1}(x) + g_{N-2}(x) + \cdots + g_{N-M}(x) + f_{N-M}(x) \quad (f_j(x) \in V_j,\ g_j(x) \in W_j) \tag{6.20}$$

なる分解を得る．式 (6.20) をウェーブレット分解という．

以下では，$f_N(x)$ を式 (6.20) のように成分 $g_{N-1}(x)$, $g_{N-2}(x), \cdots, g_{N-M}(x)$, $f_{N-M}(x)$ の直和分解で表現するためのアルゴリズムと，逆にこれらの成分から $f_N(x)$ を再構成するためのアルゴリズムを示す．

スケール関数 $\phi(x) \in V_0$ とウェーブレット $\psi(x) \in W_0$ は共に V_1 に属しており，また V_1 は $\phi_{1,k}(x) = 2^{1/2}\phi(2x-k)$ $(k \in \mathbf{Z})$ により生成されるので，

$$\phi(x) = \sum_k p_k \phi(2x-k), \tag{6.21}$$

$$\psi(x) = \sum_k q_k \phi(2x-k) \tag{6.22}$$

となるような l^2 の数列 $\{p_k\}, \{q_k\}$ が存在する．

一方，$\phi(2x)$ と $\phi(2x-1)$ は，共に V_1 に属しており，かつ $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$ なので，

$$\phi(2x) = \sum_k [a_{-2k}\phi(x-k) + b_{-2k}\psi(x-k)], \tag{6.23}$$

$$\phi(2x-1) = \sum_k [a_{1-2k}\phi(x-k) + b_{1-2k}\psi(x-k)] \tag{6.24}$$

となる l^2 の元 $\{a_{-2k}\}, \{b_{-2k}\}, \{a_{1-2k}\}, \{b_{1-2k}\}$ $(k \in \mathbf{Z})$ が存在する．式 (6.23) と式 (6.24) を合わせれば，

$$\phi(2x-l) = \sum_k [a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)], \quad l \in \mathbf{Z} \tag{6.25}$$

を得る．これらの数列 $\{p_k\}, \{q_k\}, \{a_k\}, \{b_k\}$ は，直和関係 $V_1 = V_0 \dot{+} W_0$ より一意に定まる．以下，$\{p_k\}, \{q_k\}$ を再構成数列，$\{a_k\}, \{b_k\}$ を分解数列と呼ぶ．

次に，$f_j(x) \in V_j$, $g_j(x) \in W_j$ を，

$$\begin{cases} f_j(x) &= \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k) \\ \mathbf{c}^j &= \{c_k^j\} \in l^2 \end{cases} \tag{6.26}$$

$$\begin{cases} g_j(x) &= \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \\ \mathbf{d}^j &= \{d_k^j\} \in l^2 \end{cases} \tag{6.27}$$

という形で表す．但し，式 (6.26) 及び式 (6.27) において，正規化定数 $2^{j/2}$ は，$\mathbf{c}^j$ 及び $\mathbf{d}^j$ に含まれるものとする．

(i) 分解アルゴリズム

式 (6.25) 及び，式 (6.26)，式 (6.27) を用いると

$$\begin{cases} c_k^{j-1} &= \sum_l a_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} &= \sum_l b_{l-2k} c_l^j \end{cases} \tag{6.28}$$

となる．この関係を用いて 式 (6.26) の $\mathbf{c}^N$ は，図 6.1 のように分解される [6, 7].

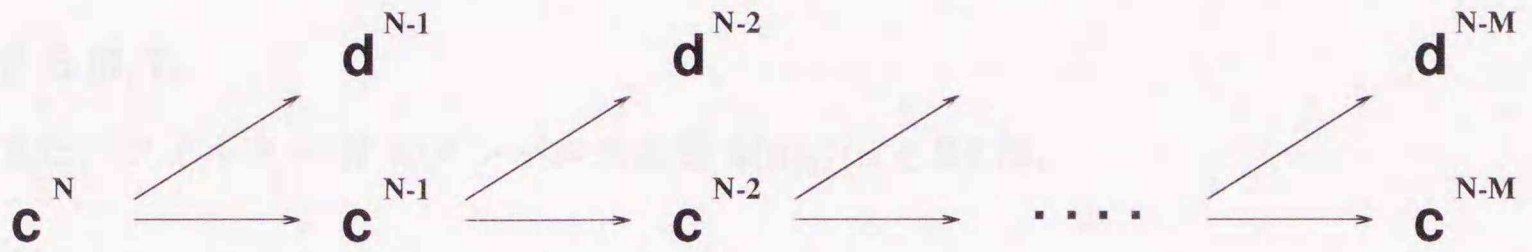


図 6.1: ウェーブレット分解の流れ

(ii) 再構成アルゴリズム

同様に，式 (6.21) 及び式 (6.22)，式 (6.26)，式 (6.27) より，

$$c_k^j = \sum_l [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}] \tag{6.29}$$

を得る．この関係を用いて 式 (6.26) の $\mathbf{c}^N$ は，図 6.2 のように再構成される [6, 7].

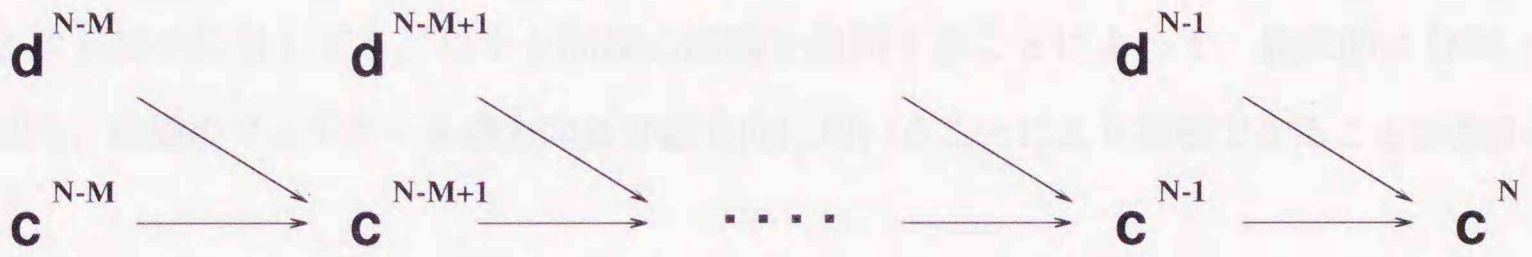


図 6.2: ウェーブレット再構成の流れ

6.7　ディジタルフィルターによるウェーブレット分解・再構成

前節の分解・再構成のアルゴリズムは，分解数列及び再構成数列を重みとした移動平均とダウンサンプリング・アップサンプリングからなっている．従って，これらの過程はディジタルフィルターの枠組で論じることが可能である．分解過程は，空間 V_j 上の要素から空間 V_{j-1} の成分を分解するフィルター H によるフィルタリング，及び，空間 W_{j-1} の成分を分解するフィルター G によるフィルタリングとダウンサンプリングを用いて行なうことができ，各分解成分から一つ解像度の高い空間の成分を再構成する際には，H, G のミ

ラーフィルター $\tilde{H}$, $\tilde{G}$ によるフィルタリングとアップサンプリングを用いて行なうことができる [6, 7].

また，フィルター H のインパルス応答 $h(n)$, $(n \in \mathbf{Z})$ は，

$$h(n) =< \phi(x), \phi(2x - n) > \tag{6.30}$$

で与えられ，フィルター G のインパルス応答 $g(n)$ は，

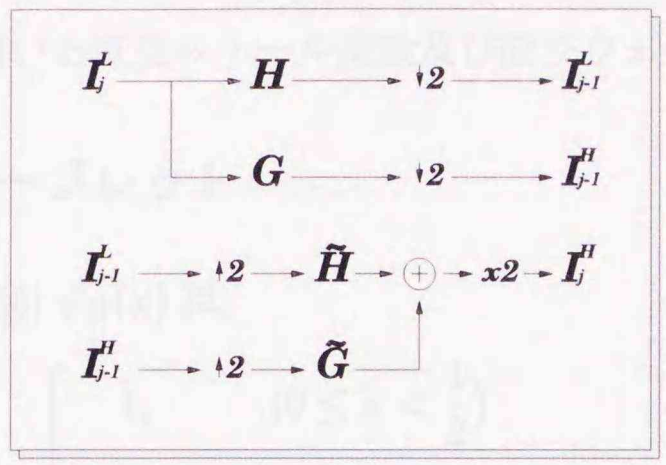
$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1 - n) \tag{6.31}$$

で与えられる [6, 7].

以上の議論により，1 次元のディジタル信号に対するウェーブレット変換は，多重解像度解析の枠組と，ディジタルフィルタを用いて可能であることがわかった.

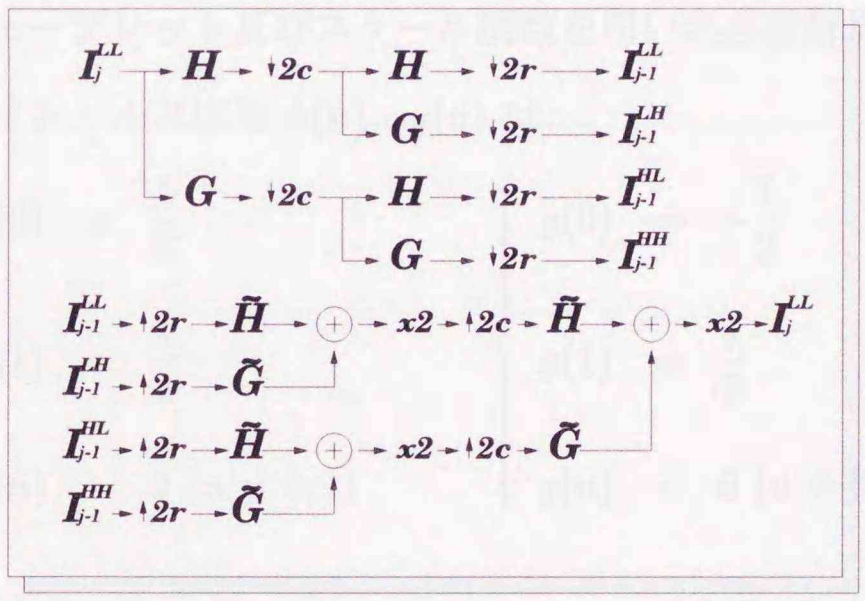
2 次元信号に対しても，以上と同様の議論を展開することによって，最終的に分解・再構成も，同様のフィルターを横方向及び縦方向に用いることにより実現できることがわかる.

図 6.3，図 6.4 は各々1 次元信号及び 2 次元信号に対する分解及び再構成の過程を模式的に示したものである．図 6.3 の I_j^L は空間 V_j の成分を，I_j^H は空間 W_j の成分を表し，図 6.4 の I_j^{LL} は横方向縦方向ともに空間 V_j に属する成分を，I_j^{LH} は横方向が空間 V_j 縦方向が空間 W_j に属する成分を，I_j^{HL} は横方向が空間 W_j 縦方向が空間 V_j に属する成分を，I_j^{HH} は横方向縦方向ともに空間 W_j に属する成分を表す.



$H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$: $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$ によるフィルタリング
$\downarrow 2$: ダウンサンプリング
$\uparrow 2$: アップサンプリング

図 6.3: 1 次元信号に対する分解 (上)・再構成 (下) の過程



$H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$: $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$ によるフィルタリング
$\downarrow 2\mathrm{r}$: ダウンサンプリング (行)
$\downarrow 2\mathrm{c}$: ダウンサンプリング (列)
$\uparrow 2\mathrm{r}$: アップサンプリング (行)
$\uparrow 2\mathrm{c}$: アップサンプリング (列)

図 6.4: 2 次元信号に対する分解 (上)・再構成 (下) の過程

6.8　直交スケール関数と直交ウェーブレットの例

本節では，以降の章で用いる直交スケール関数及び直交ウェーブレットの例を示す．

6.8.1　Haar のウェーブレット

Haar のウェーブレット [6] $\psi_H(x)$ は，

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1, & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -1, & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

で表され，対応するスケール関数 $\phi_H(x)$ は，

$$\phi_H(x) = \begin{cases} 1, & (0 \leq x < 1) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

で表される．このウェーブレット及びスケール関数を用いた多重解像度解析に用いるフィルター H 及び G のインパルス応答 $h(n)$，$g(n)$ は，

$$\begin{cases} h(0) = \frac{1}{2} \\ h(1) = \frac{1}{2} \\ h(n) = 0 \ (n \neq 0, 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} g(0) = -\frac{1}{2} \\ g(1) = \frac{1}{2} \\ g(n) = 0 \ (n \neq 0, 1) \end{cases}$$

で与えられる．

Haar ウェーブレットは，コンパクト・サポートでありかつ多重解像度解析に用いるフィルター H，G のタップ数が他のウェーブレットに比べて少なく，計算の効率が良いという特徴を持つ反面，$\psi_H(x)$ が不連続点を持っているため，多重解像度解析により得られた隣接する部分空間の成分が周波数軸上で重なりあい，周波数軸上での局所化という面で他のウェーブレットに劣るという欠点を持つ．図 6.5 に Haar のウェーブレットのグラフを，図 6.6 に Haar のウェーブレットに対応するスケール関数のグラフを示す．

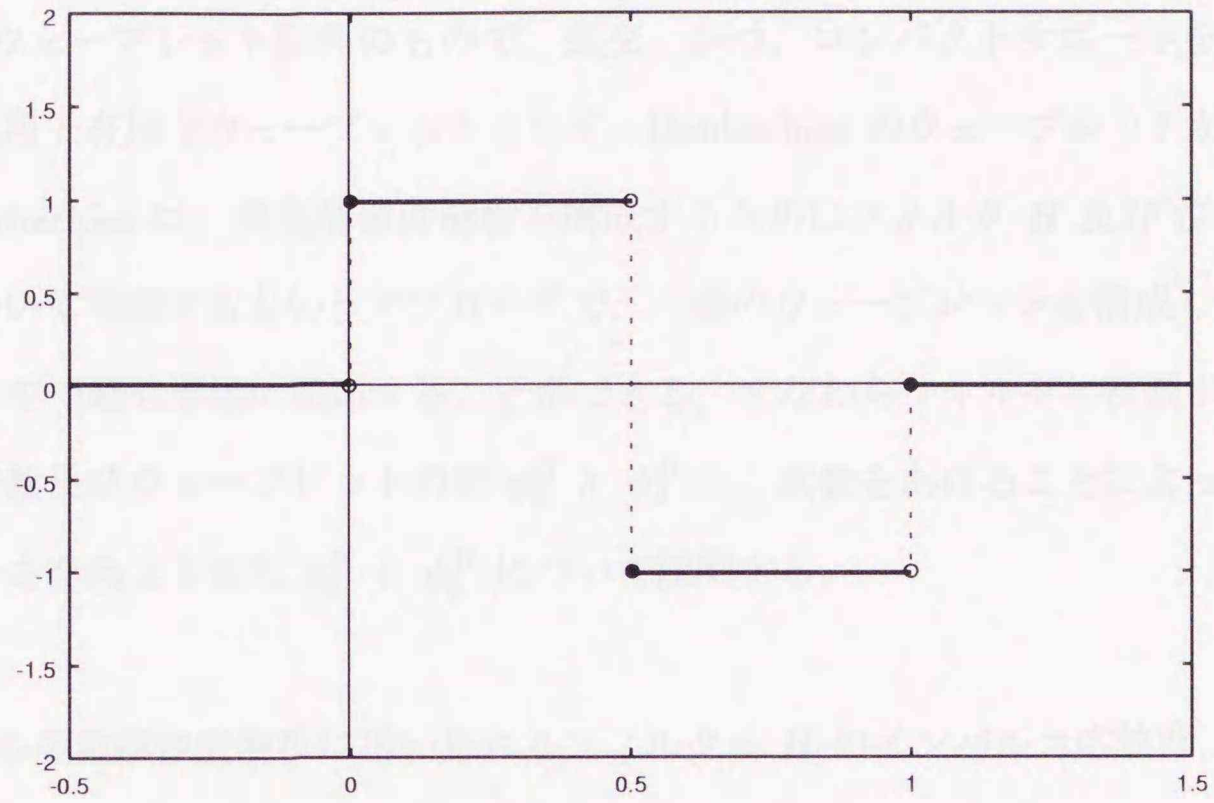


図 6.5: Haar のウェーブレット

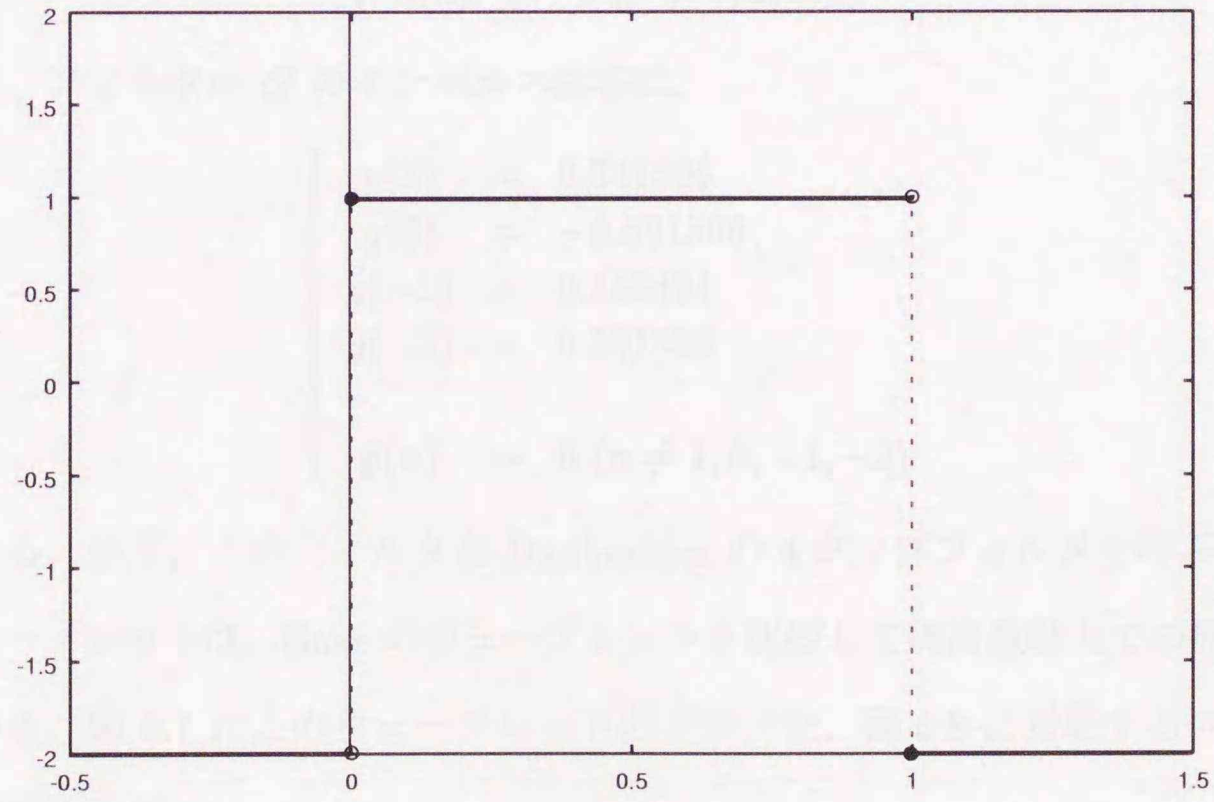


図 6.6: Haar のウェーブレットに対応するスケール関数

6.8.2 Daubechies のウェーブレット

Haar のウェーブレット以外のもので，直交，かつ，コンパクトサポートを有するという意味で実用上有用なウェーブレットとして，Daubechies のウェーブレットが挙げられる [6, 8]．Daubechies は，多重解像度解析を構成するためにフィルタ H 及び G が満たすべき条件について考察するというアプローチで，一連のウェーブレットを構成した [8]．ここでは，その中で最も単純に記述することができる，すなわちフィルタの次数が最も少ないスケール関数及びウェーブレットの対 ϕ_4^D と ψ_4^D と，次数をあげることによって，基底関数の滑らかさを向上させた ϕ_8^D と ψ_8^D について説明する．

ψ_4^D による多重解像度解析に用いられるフィルター H のインパルス応答は，

$$\begin{cases} h(0) &= 0.341506 \\ h(1) &= 0.591506 \\ h(2) &= 0.158494 \\ h(3) &= -0.091506 \\ \\ h(n) &= 0\ (n \neq 0,1,2,3) \end{cases}$$

で与えられ，フィルター G のインパルス応答は，

$$\begin{cases} g(1) &= 0.341506 \\ g(0) &= -0.591506 \\ g(-1) &= 0.158494 \\ g(-2) &= 0.091506 \\ \\ g(n) &= 0\ (n \neq 1,0,-1,-2) \end{cases}$$

で与えられる．以下，このフィルタを Daubechies の 4 タップフィルタと呼ぶ．

このウェーブレットは，Haar のウェーブレットと比較して周波数軸上での局所化の性能が優れている．図 6.7 にこのウェーブレットのグラフを，図 6.8 に対応するスケール関数のグラフを示す [30].

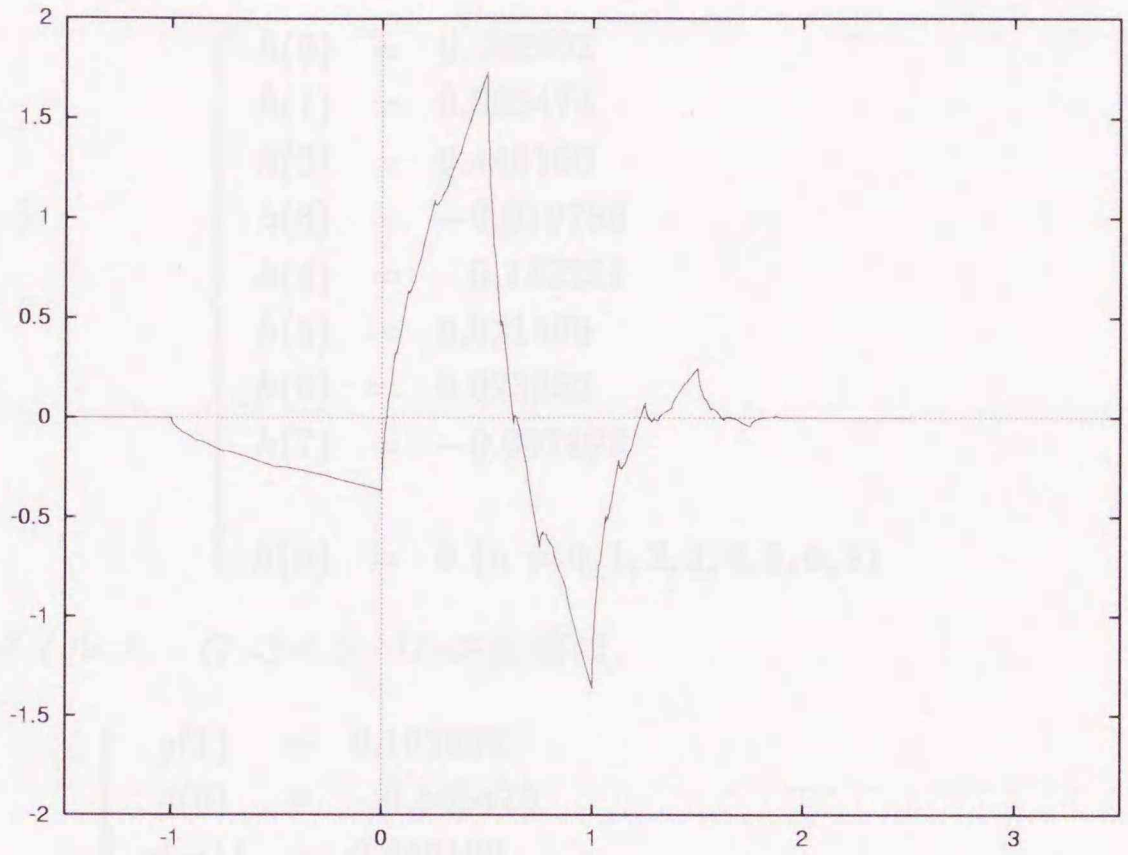


図 6.7: Daubechies のウェーブレット ψ_4^D

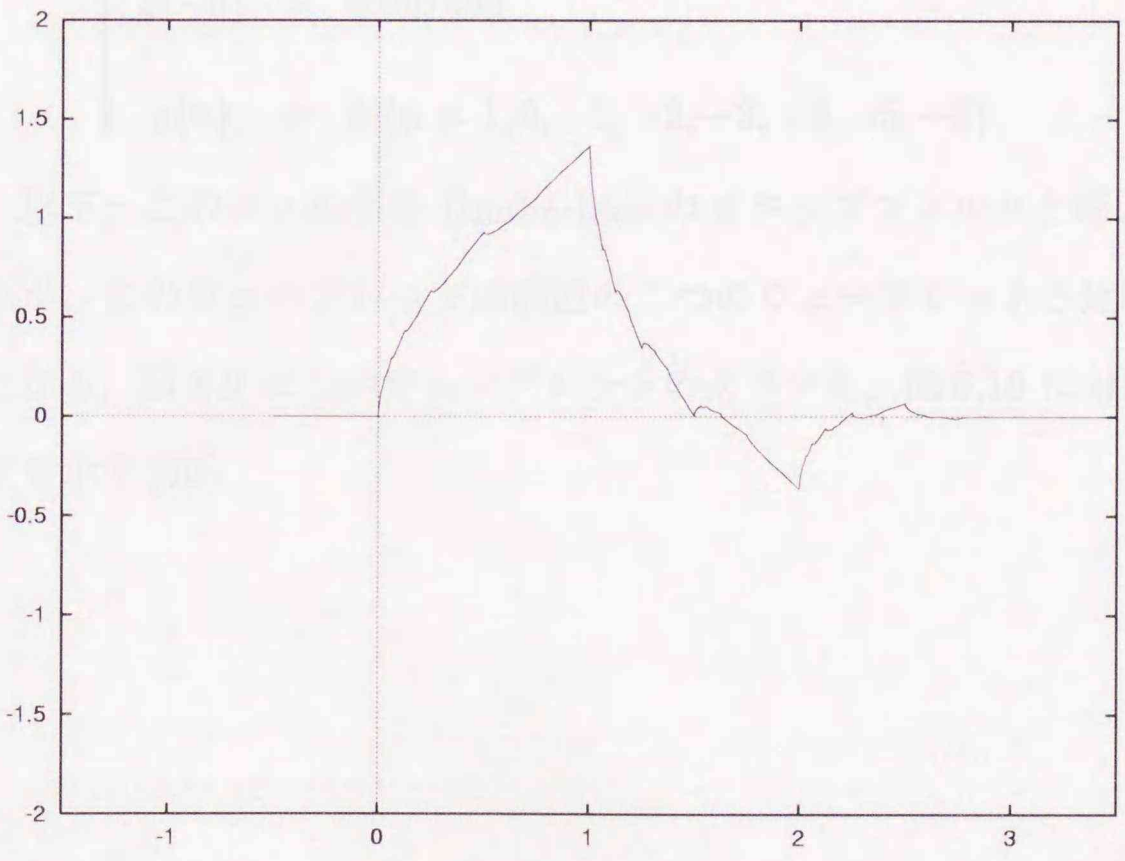


図 6.8: Daubechies のスケール関数 ϕ_4^D

ψ_8^D による多重解像度解析に用いられるフィルター H のインパルス応答は,

$$\begin{cases} h(0) &= 0.162902 \\ h(1) &= 0.505473 \\ h(2) &= 0.446100 \\ h(3) &= -0.019788 \\ h(4) &= -0.132254 \\ h(5) &= 0.021808 \\ h(6) &= 0.023252 \\ h(7) &= -0.007493 \\ \\ h(n) &= 0\ (n \neq 0,1,2,3,4,5,6,7) \end{cases}$$

で与えられ，フィルター G のインパルス応答は,

$$\begin{cases} g(1) &= 0.162902 \\ g(0) &= -0.505473 \\ g(-1) &= 0.446100 \\ g(-2) &= 0.019788 \\ g(-3) &= -0.132254 \\ g(-4) &= -0.021808 \\ g(-5) &= 0.023252 \\ g(-6) &= 0.007493 \\ \\ g(n) &= 0\ (n \neq 1,0,-1,-2,-3,-4,-5,-6) \end{cases}$$

で与えられる．以下，このフィルタを Daubechies の 8 タップフィルタと呼ぶ.

先にも述べたが，このウェーブレットは前述の二つのウェーブレットと比較して，より滑らかな関数となる．図 6.9 にこのウェーブレットのグラフを，図 6.10 に対応するスケール関数のグラフを示す [30].

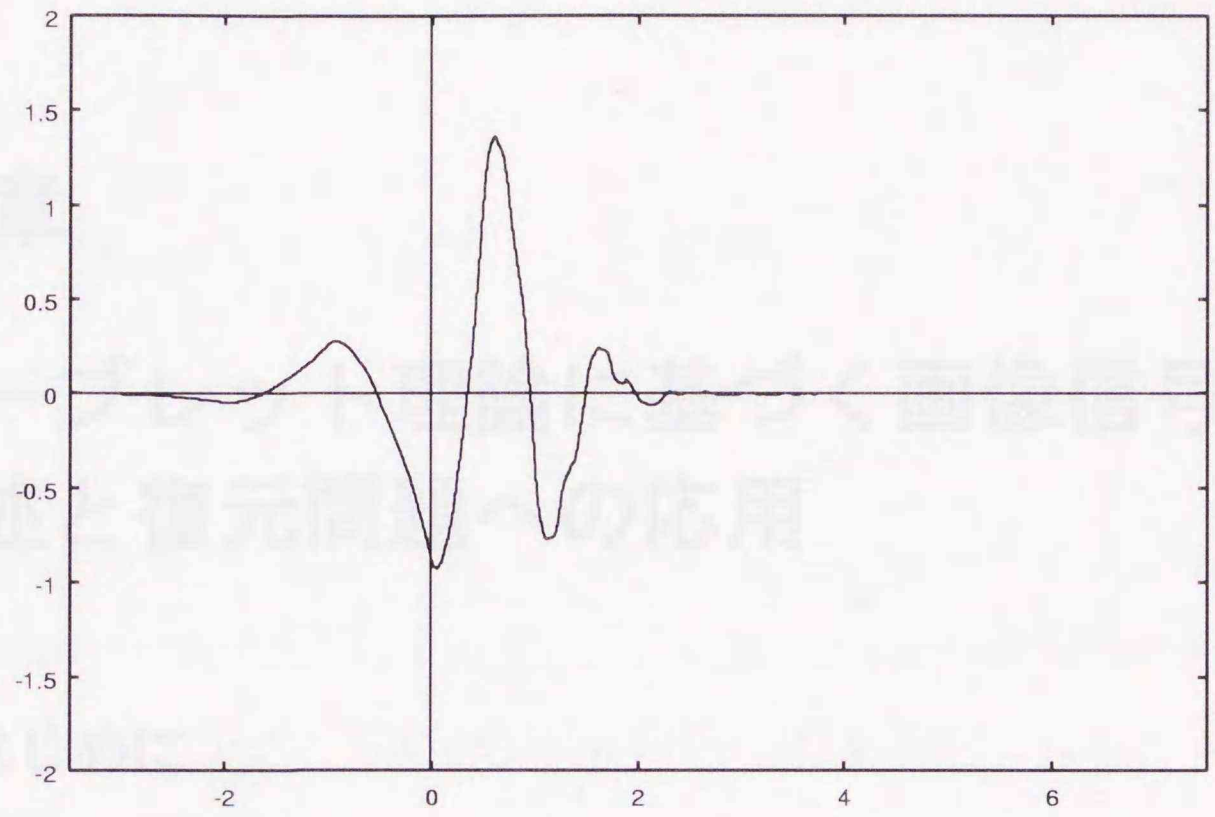


図 6.9: Daubechies のウェーブレット ψ_8^D

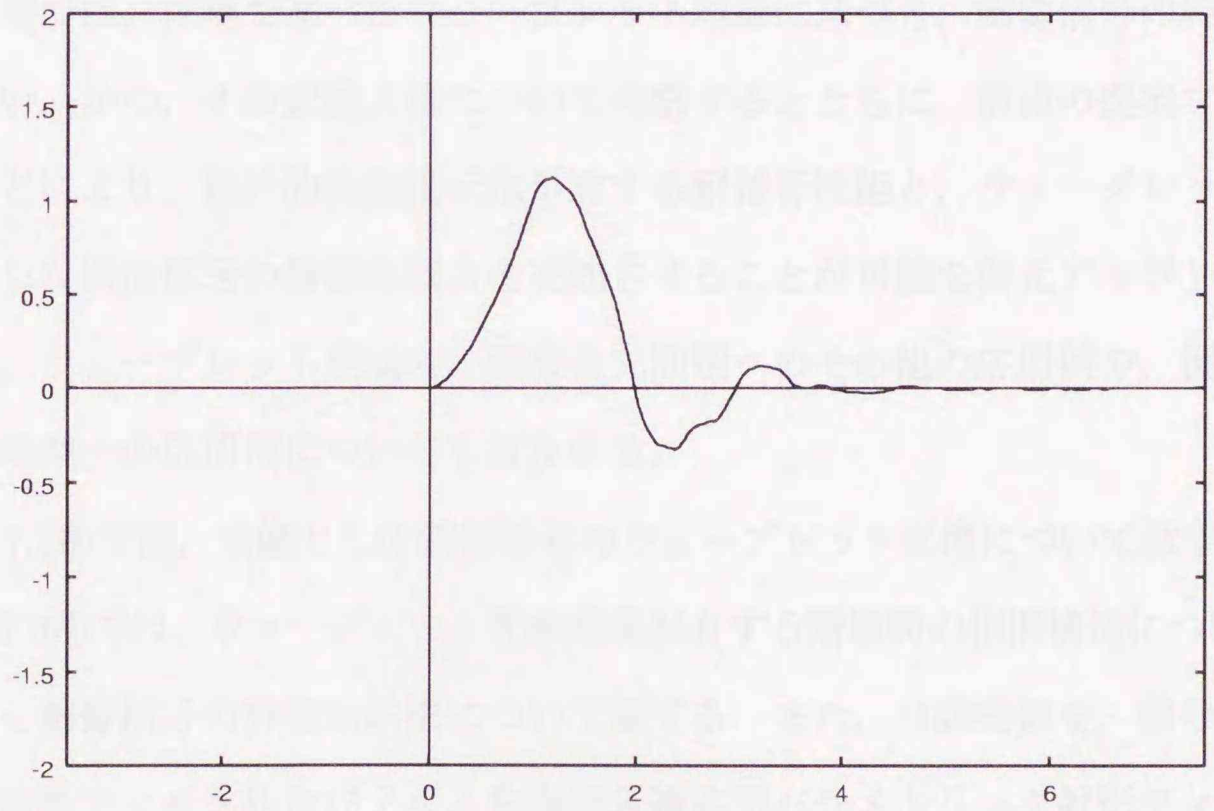


図 6.10: Daubechies のスケール関数 ϕ_8^D

第 7 章

ウェーブレット理論に基づく画像信号の特徴記述と復元問題への応用

7.1 はじめに

第 5章において，個々の画像の特徴を利用可能である場合，その特徴を反映させることが可能な統計的画像復元法である，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族及び，この手法に正則化の効果を持たせたノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族を提案した．本章では，前章で述べたウェーブレット理論に基づき，画像信号の特徴について解析を行ない，かつ，その記述方法について考察するとともに，前述の提案フィルタ族に適用することにより，統計的画像復元法が有する耐雑音性能と，ウェーブレット理論に基づいて記述した画像信号の特徴の双方を反映させることが可能な復元アルゴリズムを構成する．また，ウェーブレット理論の，画像復元問題へのその他の応用例や，復元問題以外の画像信号処理への応用例についても言及する．

以下，第 7.2節では，準備として画像信号のウェーブレット変換について数学的定式化を行なう．第 7.3節では，ウェーブレット変換画像が有する階層間の相関構造について考察し，それに基づく画像信号の特徴記述法について論ずる．また，当該特徴を，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族及びノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族において画像の特徴を記述すべく導入した作用素 C の構成に用いて復元を行なうアルゴリズムを提案する．また，これとは別に，第 7.4節では，画像のウェーブレット変換成分が有する

ある種のエネルギーの偏りについて考察し，復元問題への適用可能性について論じる．また，第7.5節では，その他の画像信号処理に対するウェーブレット理論の応用例としてディジタル画像の拡大法について述べる．

7.2　画像信号のウェーブレット変換

以下，本論文では，画像信号に多重解像度解析を適用したものを，画像の多重解像度表現と呼ぶ．

画像信号 $F(\in \mathbf{R}^{m_r \times m_c})$ に対し，W_i^v $(\in \mathbf{R}^{m_r \times m_r})$ を，画像の縦方向に関する $i-1$ 階層までの多重解像度表現を同じく縦方向に関する i 階層まで多重解像度表現に変換する作用素とし，$W_i^{h'}$ $(\in \mathbf{R}^{m_c \times m_c})$ を，画像の横方向に関する同様の作用素とすると，F の n 階層までの多重解像度表現 F_n^W は，

$$\begin{aligned} W_{n\cdots 1}^v &= W_n^v W_{n-1}^v \cdots W_1^v, \\ W_{n\cdots 1}^h &= W_n^h W_{n-1}^h \cdots W_1^h \end{aligned}$$

として，

$$F_n^W = (W_{n\cdots 1}^v) F (W_{n\cdots 1}^h)' \tag{7.1}$$

と書ける．例えば $n=2$ の場合，行列 F_2^W は，

$$F_2^W = \begin{bmatrix} F_2^{W,LL} & F_2^{W,HL} & \\ F_2^{W,LH} & F_2^{W,HH} & F_1^{W,HL} \\ & F_1^{W,LH} & F_1^{W,HH} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

という分割形式で記述できる．ここで，$F_i^{W,\Gamma}$ $(\Gamma \in \{LL, LH, HL, HH\})$ は，i 階層目のΓ成分を表すものとする．また，F_n^W は，

$$\boldsymbol{f}_n^W = \mathrm{vec}(F_n^W) = (W_{n\cdots 1}^h \otimes W_{n\cdots 1}^v)\mathrm{vec}(F) \tag{7.3}$$

という，ベクトル表現で記述することもできる．以下，必要に応じて行列表現式 (7.1) とベクトル表現式 (7.3) を使い分ける．

例として，画像 (LENA) を 3 階層までの多重解像度表現に変換した画像を，図 7.1に示す．

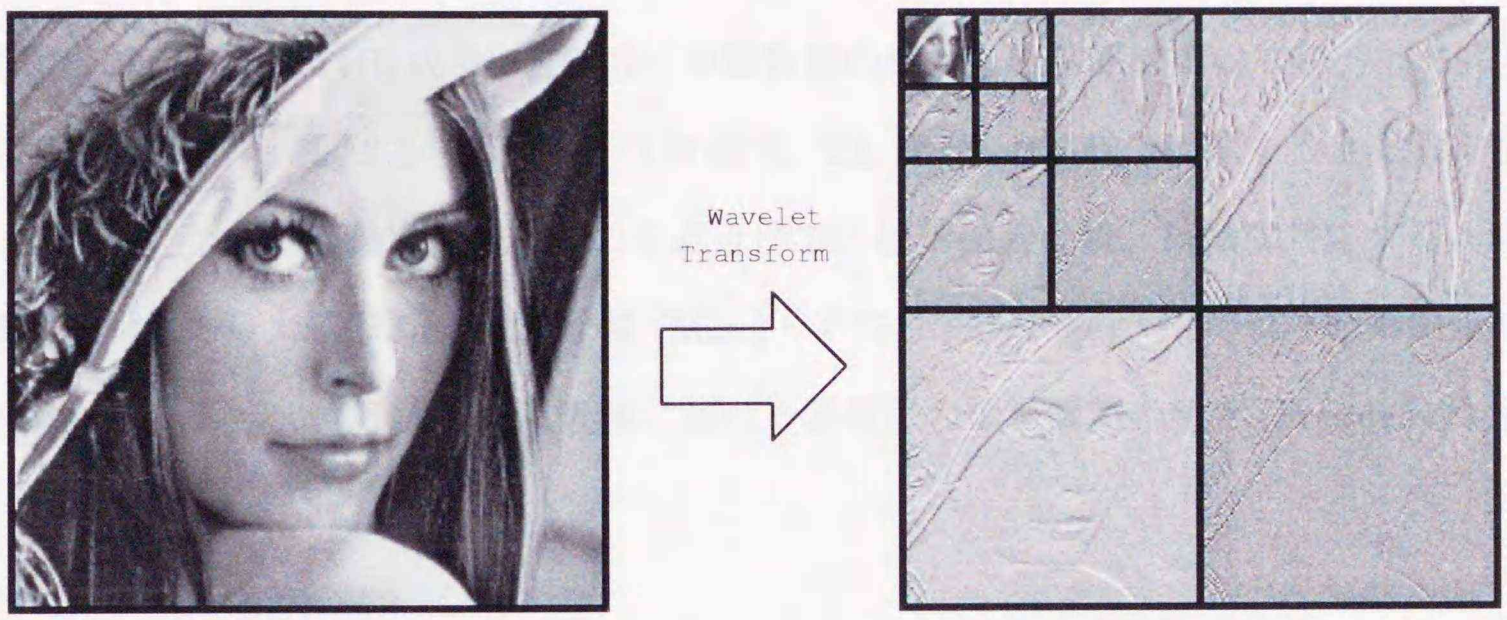


図 7.1: 多重解像度表現の例

7.3 多重解像度表現における階層間の相関とその復元問題への応用

第 7.2節の画像例 (図 7.1) においても確認できるが，自然画像の多重解像度表現においては，隣接する成分間にある程度の相関があることが知られている [24, 52]．本節では，ウェーブレット変換された画像信号の，各階層間の相関関係について定量的な解析を行なうとともに，当該解析結果を信号適応型パラメトリック射影フィルタ族及びノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族に適用するアルゴリズムについて述べる．

7.3.1 多重解像度表現における階層間相関

ここでは，ウェーブレット変換画像の各階層間の相関構造として，最低域成分の各点近傍の平坦さと，対応する領域の高域成分の係数の関係について考察する [59]．

256 階調の自然画像約 1700 枚を，Daubechies の 8 タップフィルタ [8] を用いて 1 階層までの多重解像度表現に変換し，低域成分である LL 成分の個々の要素の近傍 (LH，HL 両成

分に対しては，各々縦方向・横方向に対し自身を含む 3 近傍，HH 成分に関しては，自身を含む斜め方向 5 近傍) における係数値の標準偏差の頻度分布，及び各標準偏差値に対応する領域の LH 成分，HL 成分，HH 成分の係数値の絶対値の関係について調べた [59]．図 7.2にその模式図を，図 7.3〜図 7.5に，LH 成分，HL 成分，HH 成分に関する上記分布を示す．但し，グラフの横軸は低域成分の各点近傍での標準偏差の値，縦軸は対応する高域の係数の絶対値の最大値 (Max.)・最小値 (Min.)・平均値 (Average)・平均値と標準偏差の和 (Average + s.d.) と，LL 成分各点近傍における係数値の標準偏差の頻度 (Frequency) を表すものとする．

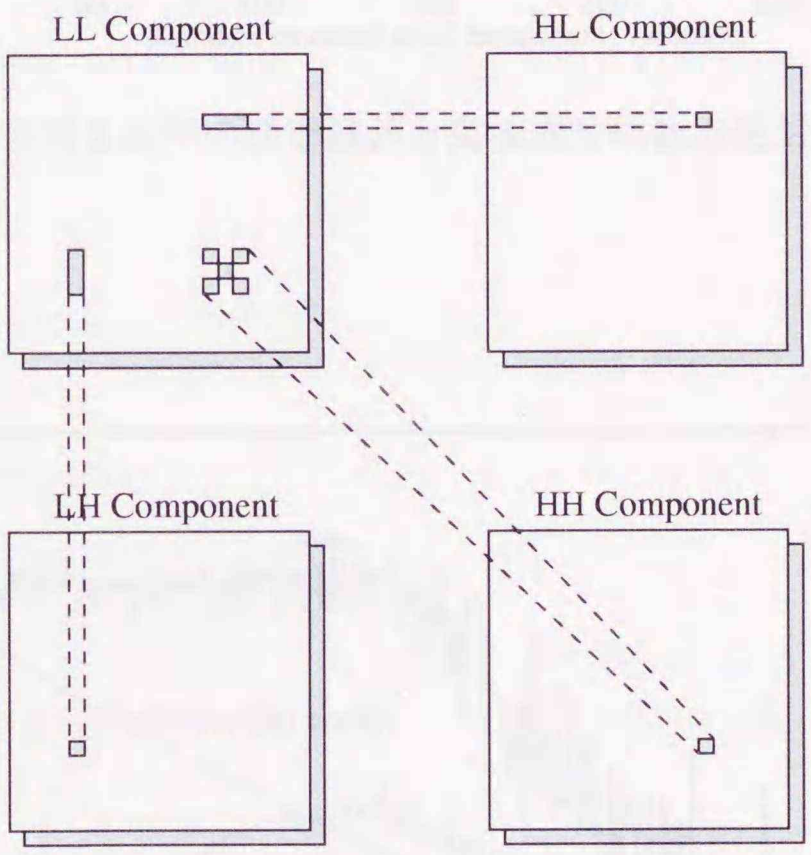


図 7.2: 低域成分近傍の標準偏差と高域成分係数の絶対値の関係 (模式図)

これらの結果から，画像信号の多重解像度表現において，LL 成分はその局所的な領域の係数値が比較的平坦である領域が支配的であることがわかり，かつ当該平坦領域の中でもより平坦な領域については対応する領域の高域成分のエネルギーは平均的に小さく，そうでない領域では，対応する領域の高域成分のエネルギーは平均的に大きいと言える．以上

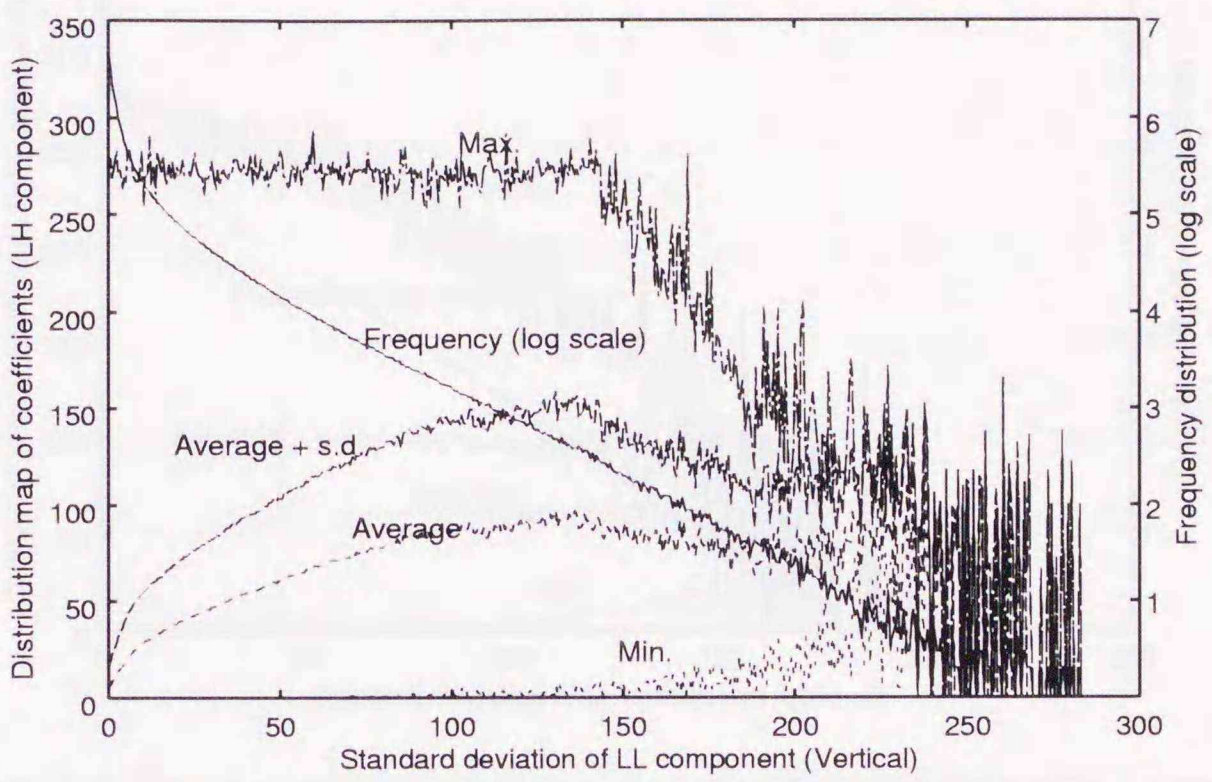


図 7.3: 低域成分縦方向 3 近傍の標準偏差と高域成分係数の絶対値の関係 (LH 成分)

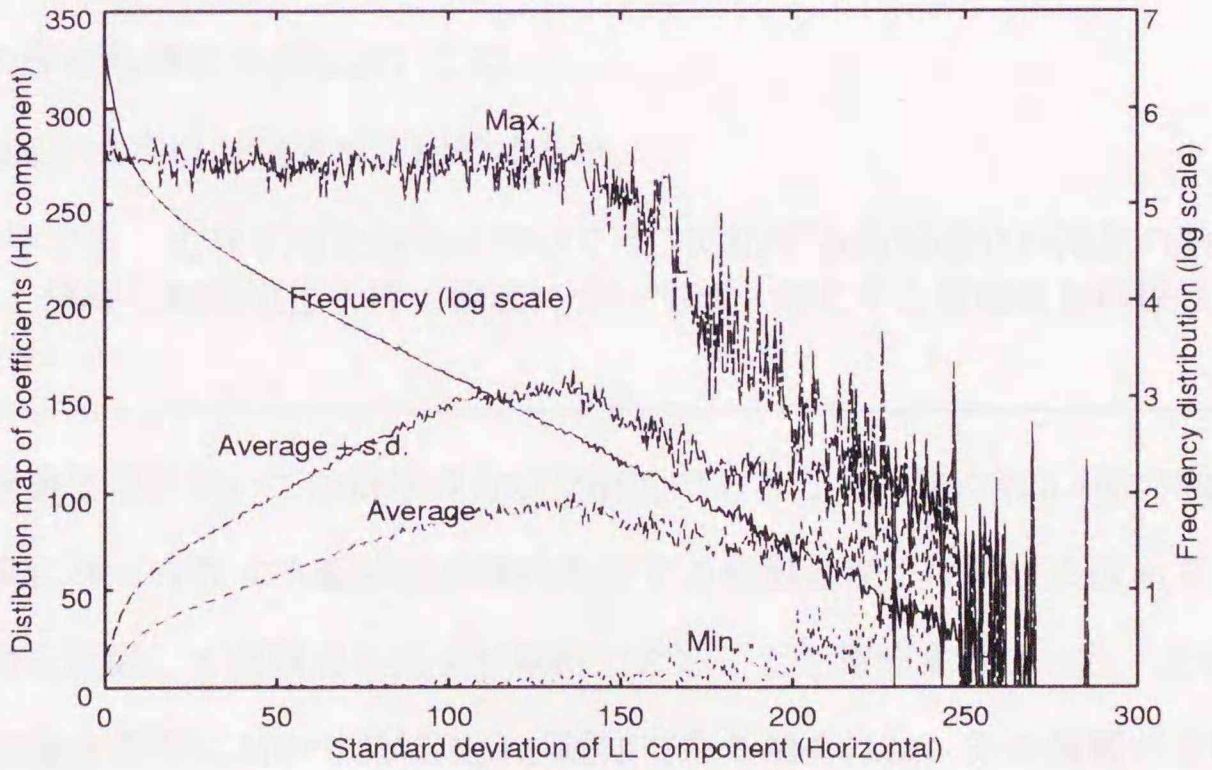


図 7.4: 低域成分横方向 3 近傍の標準偏差と高域成分係数の絶対値の関係 (HL 成分)

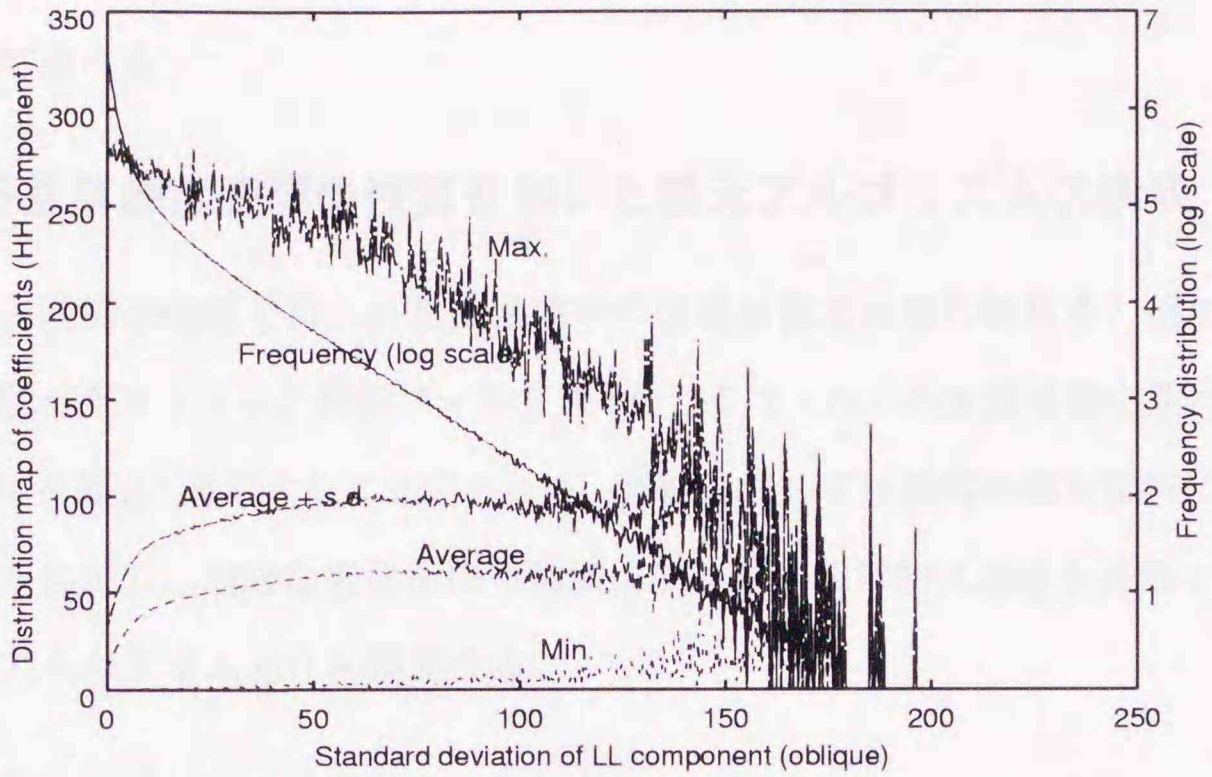


図 7.5: 低域成分斜め 5 近傍の標準偏差と高域成分係数の絶対値の関係 (HH 成分)

をまとめて，次の性質を得る．

性質 1 ウェーブレット変換画像における階層間の関係

自然画像の多重解像度表現においては，

- 低域成分は平坦な領域が支配的であり，
- その中でも，より平坦な領域については，対応する高域成分の係数の絶対値は小さく，急峻な輝度変化を持つ領域については，対応する高域成分の係数の絶対値は大きい．

一般的に画像信号においては低域成分が支配的であることは既に第 3.4節で触れた．このことは，現実に多く存在する低域通過特性を有する観測過程下における復元では，低域成分は高域成分と比較して高精度の復元が期待できることを意味する．一方，上の結果から，画像の多重解像度表現において低域成分が既知である場合には，その情報と未知である高域成分の間に存在する相関を用いることにより，本来相対的に低い精度でしか復元できない高域成分の復元精度を向上させることができ，結果として復元画像全体の復元精度を向

上させることができると期待される．以下では，この性質を利用した復元アルゴリズムの構成について述べる．

7.3.2 多重解像度表現の性質を用いた復元アルゴリズムの構成

ここでは，前節の議論で得られた画像信号の多重解像度表現の性質を，第5章で提案した信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (もしくはノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族) に適用することによって，画像において比較的平坦な領域に関しては効果的に雑音を抑制し，急峻な変化を持つ領域に関しては相対的に雑音を許容するような復元を行なうアルゴリズム [57] を提案する．

原画像を $F(\in \mathbf{R}^{m_r \times m_c})$ とする．何らかの手法により復元した画像を $\tilde{F}$ とし，その k 階層までの多重解像度表現 $\tilde{F}_k^W$ の最低域成分 $\tilde{F}_k^{W,LL}$ の各変換係数について，縦横斜め各々の方向の近傍における標準偏差を算出し，$T_k^{LH} = (t_k^{LH}(i,j))$，$T_k^{HL} = (t_k^{HL}(i,j))$，$T_k^{HH} = (t_k^{HH}(i,j))$ とする．前節で得られた結果より，低域成分である LL 成分の各点近傍の標準偏差と対応する高域成分のエネルギーには正の相関があるので，これらから，同じ階層の他の成分 $\tilde{F}_k^{W,LH}$，$\tilde{F}_k^{W,HL}$，$\tilde{F}_k^{W,HH}$ に対する重みとして，

$$
\begin{aligned}
U_k^{LH} &= (u_k^{LH}(i,j)), \quad u_k^{LH}(i,j) = \frac{1}{1 + t_k^{LH}(i,j)} \\
U_k^{HL} &= (u_k^{HL}(i,j)), \quad u_k^{HL}(i,j) = \frac{1}{1 + t_k^{HL}(i,j)} \\
U_k^{HH} &= (u_k^{HH}(i,j)), \quad u_k^{HH}(i,j) = \frac{1}{1 + t_k^{HH}(i,j)}
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

を構成し，作用素 X_k を

$$
X_k = \begin{bmatrix} 0 & U_k^{HL} & \\ U_k^{LH} & U_k^{HH} & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{7.5}
$$

と定義する．小行列 U_k^{LH}，U_k^{HL}，U_k^{HH} の要素は，対応する領域の LL 成分が比較的平坦である場合には大きな値をとり，逆に急峻に変化するような領域では小さな値をとる．この

作用素を用いて，復元画像 $\mathrm{vec}(\hat{F})$ に対する作用素 C_k として，

$$C_k = \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(X_k))(W^h_{k\cdots 1} \otimes W^v_{k\cdots 1}) \tag{7.6}$$

を構成し，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (もしくはノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族) で用いる作用素 C として復元を行なう．ここで，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{v})$ は，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の要素からなる対角行列である．このような復元を行なうことによって，LL 成分において比較的平坦な領域に関しては，対応する領域の高域成分のエネルギーを抑制，すなわち雑音を抑制でき，逆に急峻な変化を持つ領域に対しては，高域成分に対する過度の平滑化効果を抑制することが可能となる．

以下，逐次この復元結果を用いて，最終的に

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & U^{HL}_k & \cdots & U^{HL}_1 \\ U^{LH}_k & U^{HH}_k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ U^{LH}_1 & & & U^{HH}_1 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

を構成し，

$$C_1 = \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(X_1))(W^h_{k\cdots 1} \otimes W^v_{k\cdots 1}) \tag{7.8}$$

を用いた信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (もしくはノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族) による復元結果を最終的な復元画像とする．このアルゴリズムの模式図を図 7.6に示す．

7.4 多重解像度表現における階層間のエネルギー分布とその復元問題への応用

本節では，画像の多重解像度表現における各階層間の関係として，変換係数のエネルギーの分布について考察し，その画像復元問題への応用について論じる．

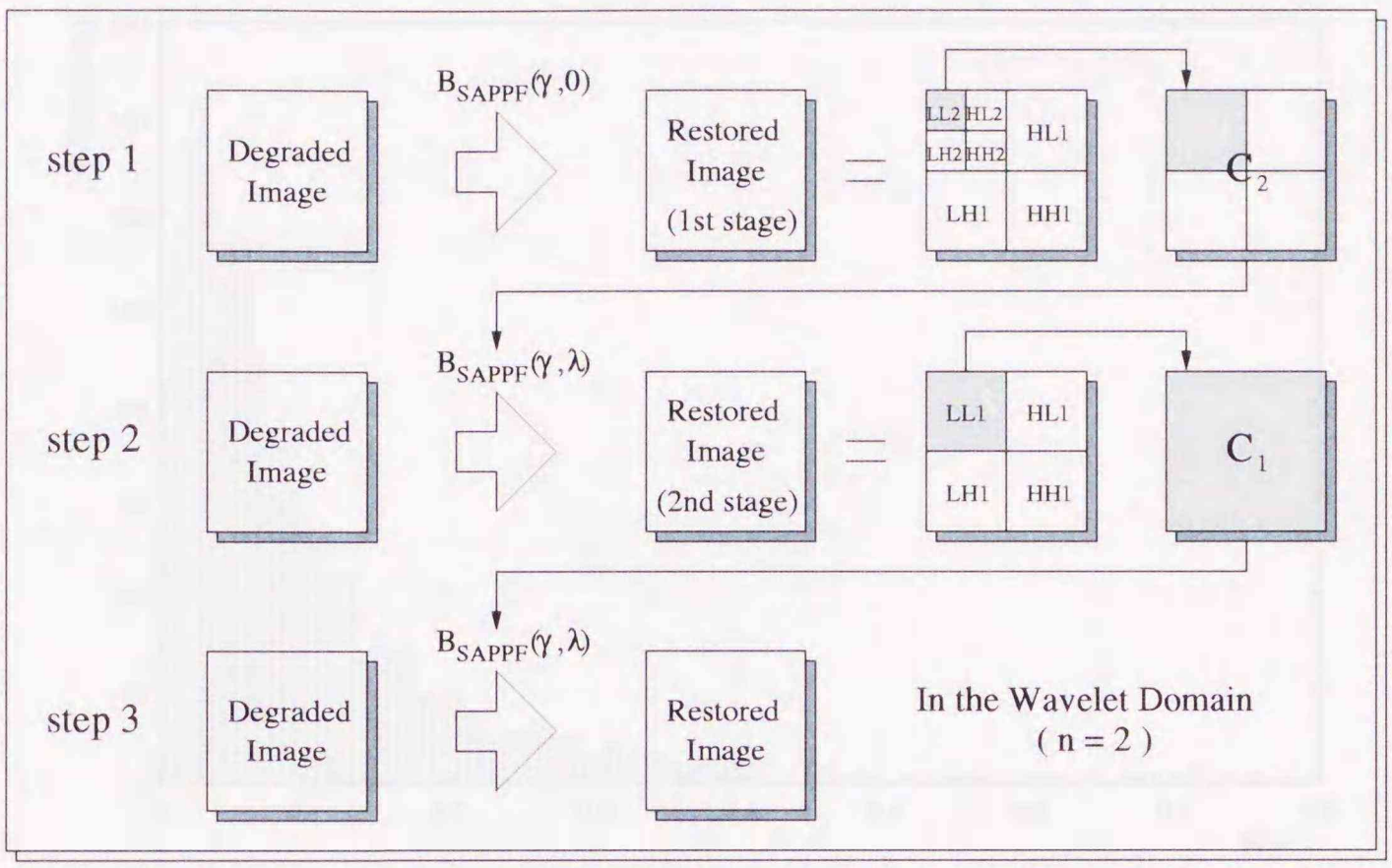


図 7.6: 逐次的復元アルゴリズムの模式図

7.4.1 変換係数のエネルギー分布

画像信号 F の k 階層までの多重解像度表現 F_k^W について，その j 階層目 $(j \leq k)$ の $\Gamma(\in \{LL, LH, HL, HH\})$ 成分を抽出する作用素 G_j^Γ とすると，以下のような関係が成立する．

$$F_k^W = \mathrm{unvec}\left(\left(G_k^{LL} + \sum_{l=1}^{k}(G_l^{LH} + G_l^{HL} + G_l^{HH})\right)\mathrm{vec}(F_k^W)\right). \tag{7.9}$$

Daubechies の 4 タップフィルタ [8] を用いて 1 階層までの多重解像度表現に変換した自然画像約 1700 枚に対し，その LL 成分のノルムと，LH 成分，HL 成分，HH 成分の和のノルムの比，

$$R_N = \frac{||(G_1^{LH} + G_1^{HL} + G_1^{HH})\mathrm{vec}(F_1^W)||}{||G_1^{LL}\mathrm{vec}(F_1^W)||} \tag{7.10}$$

を調べた．この頻度分布を図 7.7に示す．

この結果は，自然画像の多くは多重解像度表現において低域成分のエネルギーが支配的であるという事実と合致する．また，例えば上記解析に用いた画像全体の 95% を含むとい

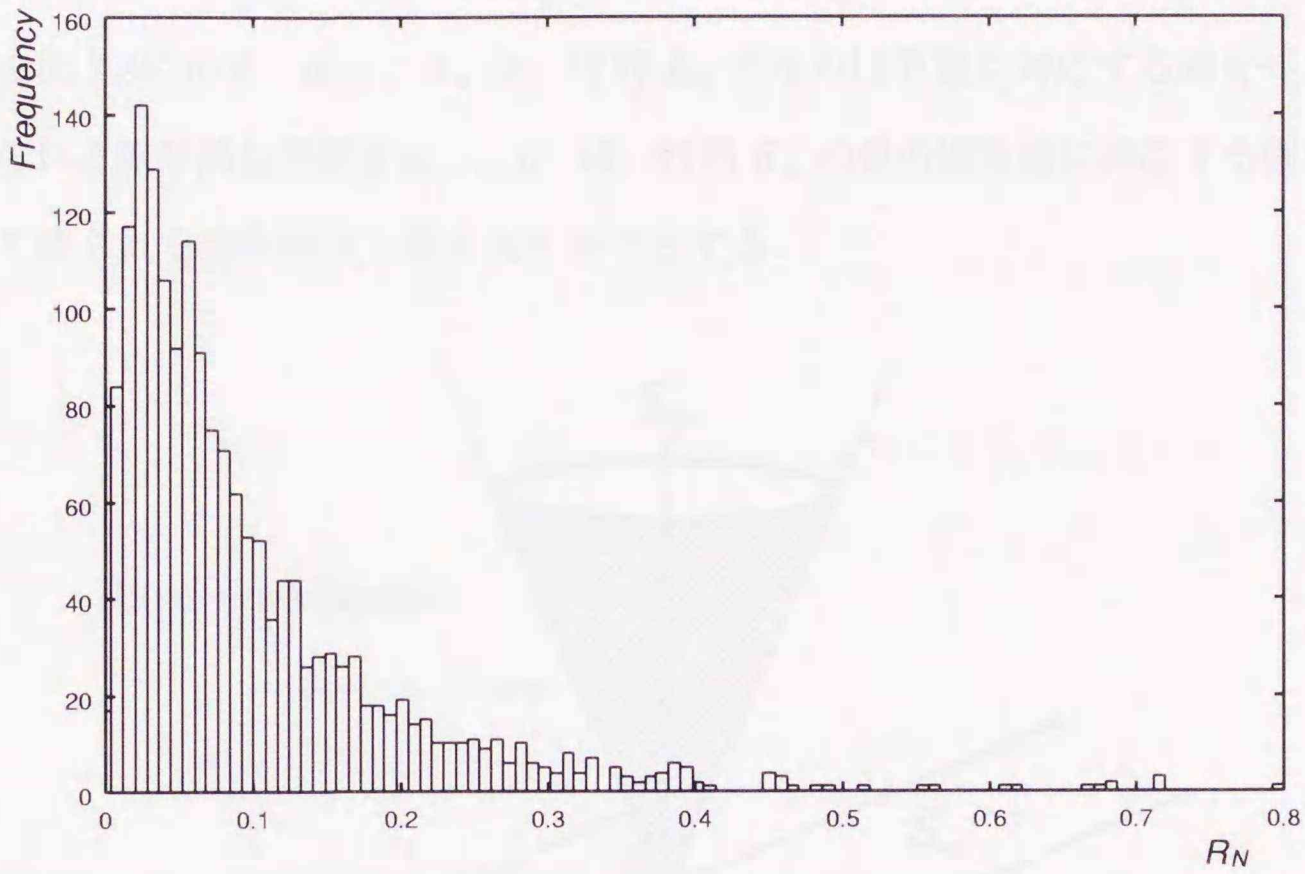


図 7.7: LL 成分とその他の成分のノルム比の頻度分布

う意味で外れ値を除外した集合を考えた場合，その集合に属する画像信号が存在し得る領域は，画像信号の低域成分と高域成分のノルムの関係を用いて制限することが可能である．当該領域は，$\alpha(\in \mathbf{R}) \geq 0$ をパラメータとして，以下のように記述できる．

$$\alpha||G_1^{LL}\mathrm{vec}(F_1^W)|| \geq ||(G_1^{LH} + G_1^{HL} + G_1^{HH})\mathrm{vec}(F_1^W)||. \tag{7.11}$$

図 7.7の結果に従えば，α として例えば 0.3 という値を採用することが可能である．但し，この選択は対象とする画像信号に依存するため，対象とする画像に偏りがある場合には，それに応じて変化する性質のものであることを付記しておく．

式 (7.11) は，

$$K_1 = \alpha^2 G_1^{LL\prime} G_1^{LL} - (G_1^{LH} + G_1^{HL} + G_1^{HH})'(G_1^{LH} + G_1^{HL} + G_1^{HH}) \tag{7.12}$$

として，2 次形式不等式制約

$$\mathrm{vec}(F_1^W)' K_1 \mathrm{vec}(F_1^W) \geq 0 \tag{7.13}$$

という形で記述することが可能である [53, 54]. 式 (7.13) で示される領域の，次元を下げた概念図を図 7.8に示す. 但し，S_+ は，行列 K_1 の正の固有値に対応する固有ベクトルによって張られる線形部分空間を表し，S_- は，行列 K_1 の負の固有値に対応する固有ベクトルによって張られる線形部分空間を表すものとする.

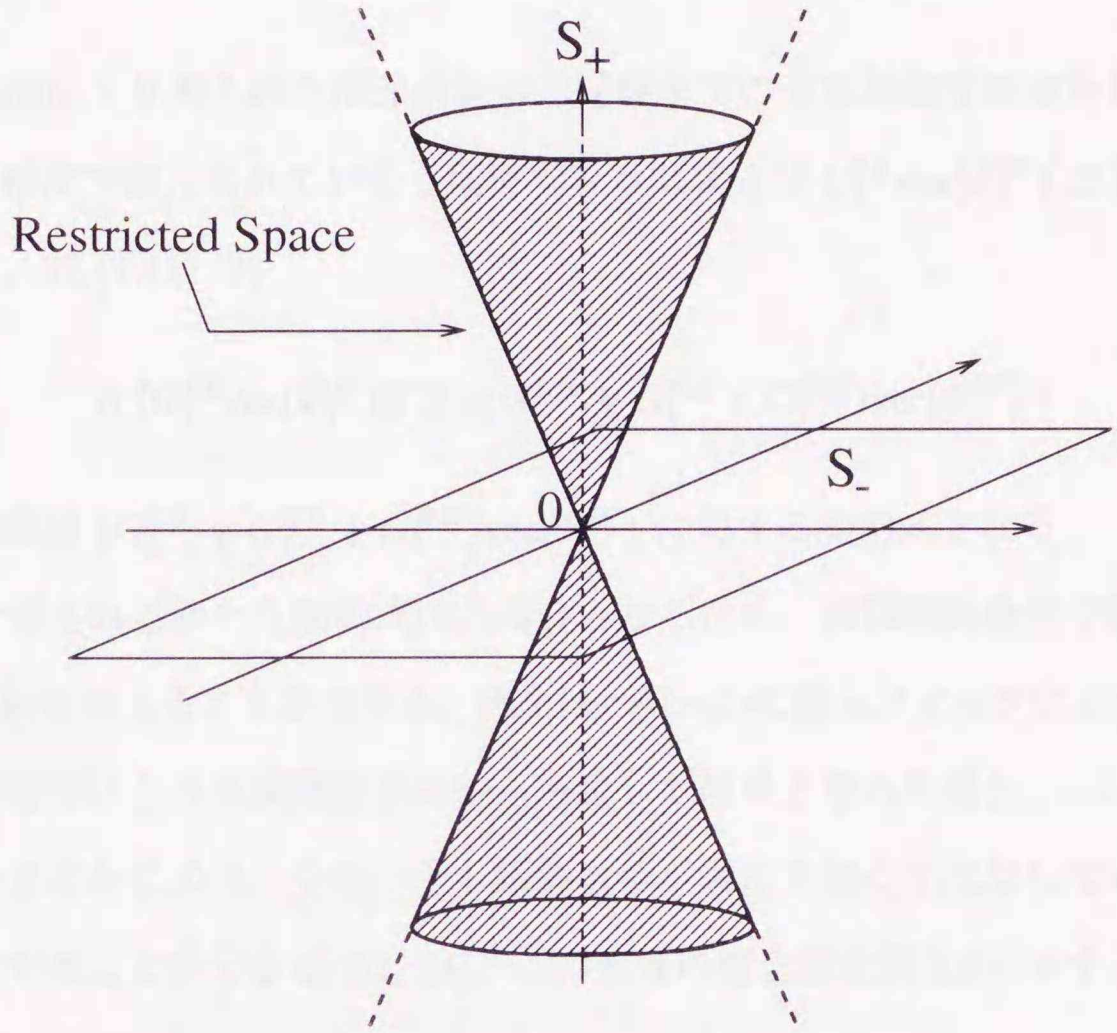


図 7.8: 条件式により制限された空間の概念図

以上の議論をまとめて次の性質を得る.

性質 2 ウェーブレット変換画像のエネルギー分布による画像空間の制限

自然画像の多くは制約条件

$$\mathrm{vec}(F_1^W)' K_1 \mathrm{vec}(F_1^W) \geq 0$$

を満たす.

7.4.2 凸射影法を用いた復元後処理への応用

第 3.4節及び第 7.3節でも述べているが，多くの画像劣化過程がある種低域通過特性を持つものであることと，上記「画像信号のエネルギーは低域成分が支配的である」という性質より，画像復元において，低域成分は，高域成分と比較してより高精度の復元が可能であると言える.

何らかの手法により得られた復元画像の 1 階層までの多重解像度表現を $\tilde{F}_1^W$ とし，そのうち比較的高精度で復元されていると期待できる低域成分 $G_1^{LL}\mathrm{vec}(\tilde{F}_1^W)$ は復元結果を信頼し固定すると，式 (7.11) は，

$$\alpha||G_1^{LL}\mathrm{vec}(\tilde{F}_1^W)|| \geq ||(G_1^{LH}+G_1^{HL}+G_1^{HH})\mathrm{vec}(F_1^W)|| \tag{7.14}$$

という，高域成分 $(G_1^{LH}+G_1^{HL}+G_1^{HH})\mathrm{vec}(F_1^W)$ に対する制約式となる.

式 (7.14) で表される新たな制約式は凸集合となるため，当該制約条件で記述される領域に対する凸射影を考えることができる．例えば，何らかの復元フィルタによる復元画像 $\tilde{F}_1^W$ が，雑音の影響等により当該制約条件から逸脱した信号となった場合，この領域に対する凸射影を用いることにより，少なくとも画像信号が満たさなくてはならない条件の一つを満たすようにすることができる [53, 54]．この処理の概念図を図 7.9に示す.

数値例

以下で，上記凸射影を用いた復元後処理の例を示す．対象としては，比較的エネルギーの大きな雑音が付加された場合に復元結果に致命的な影響が及び得る射影フィルタを採用する.

図 7.10に原画像 (128 × 128 画素，256 階調) を，図 7.11に，32 画素の縦流れを生じさせ，雑音として平均が 0，標準偏差が 4.0 の独立な正規乱数を付加した観測画像を示す．また，制約式 (7.13) 中のパラメータ α としては 0.3 を採用し，ウェーブレット変換には Daubechies の 4 タップフィルタ [8] を用いた.

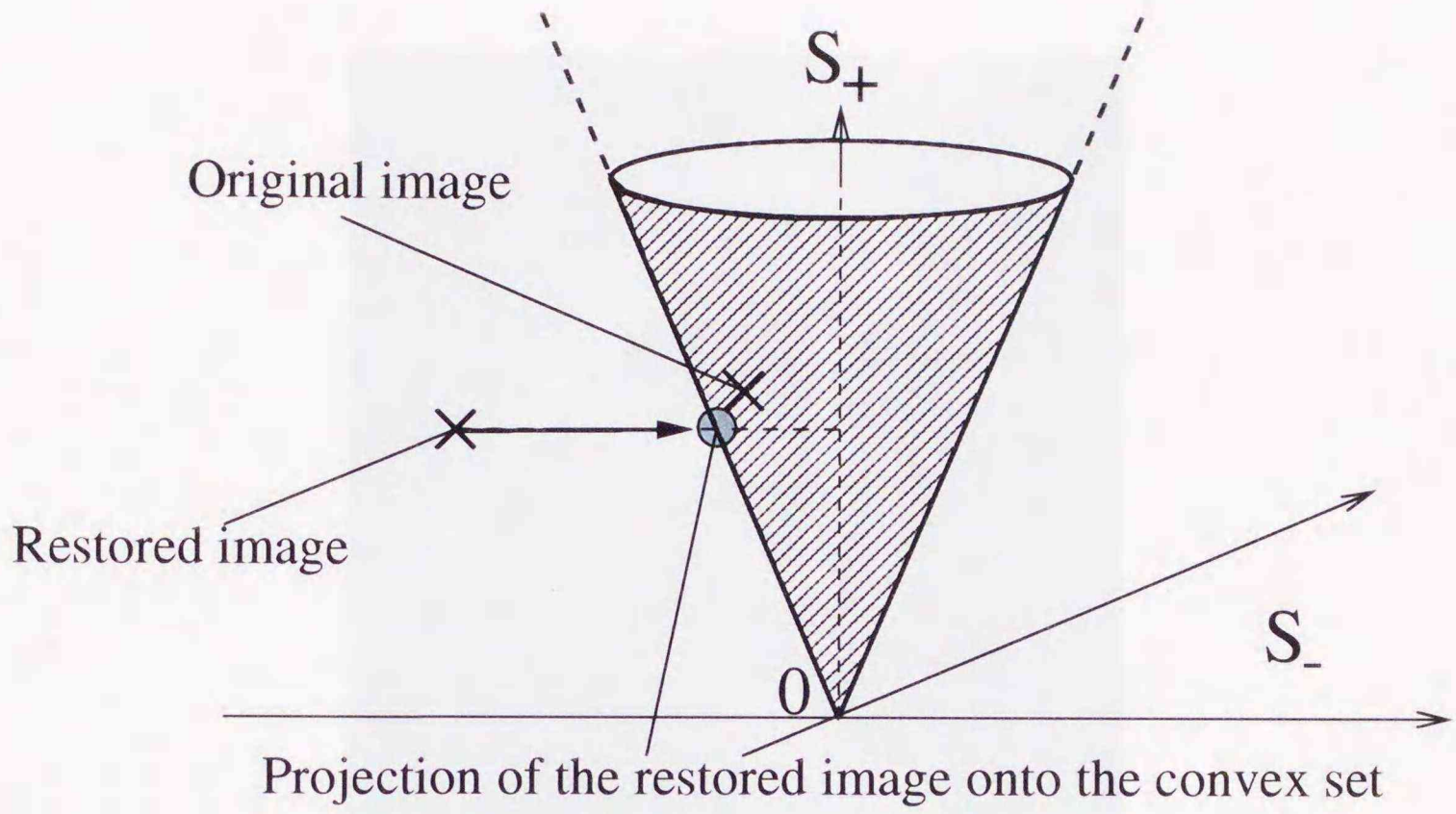


図 7.9: 条件式により制限された凸集合への凸射影の概念図

図 7.12に射影フィルタによる復元画像を，図 7.13に射影フィルタによる復元画像を制約式 (7.13) で表される領域に凸射影した画像を示す.

また，表 7.1に，各復元画像の原画像に対する S/N 比を示す.

表 7.1: 復元画像の原画像に対する S/N 比

復元画像	S/N 比
PF による復元画像	0.16
提案手法による復元画像	6.35

この結果より，制約式 (7.13) で記述された領域から逸脱した成分の抑制が行なわれ，結果的に効果的に雑音の抑制が行なわれていることが確認できる.



図 7.10: 原画像



図 7.11: 観測画像



図 7.12: 射影フィルタによる復元画像

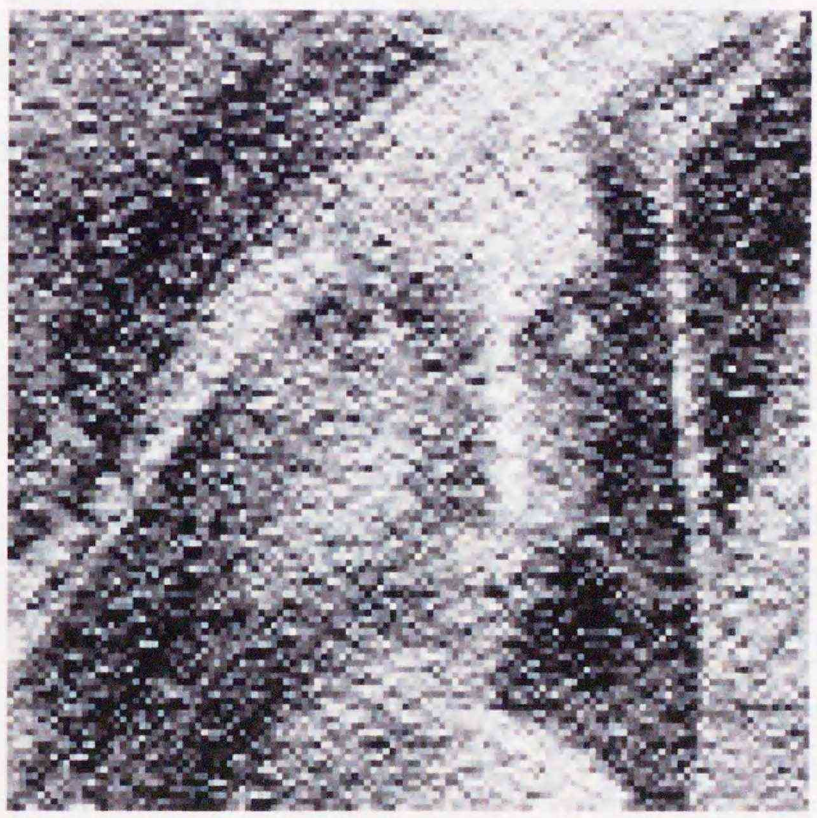


図 7.13: 射影フィルタによる復元画像を制約式で表される領域に凸射影した画像

7.4.3 パラメトリックフィルタにおけるパラメータ選択支援への応用

画像のウェーブレット変換係数のエネルギー分布に関する性質の別の応用例として，パラメトリックフィルタのパラメータ選択支援が挙げられる．多くのパラメトリックフィルタは，そのパラメータを変動させることにより，雑音の抑制効果を制御することができる．しかしパラメータの決定には，個々の問題に応じた事前知識等が必要となることが多いが[9, 25]，一般にこれらの情報は未知のものである．このような問題に対し，上で述べた性質を考慮することにより，復元画像が当該制約条件で記述される領域に入るようにパラメータを調整することにより，過度の平滑化効果を生じさせず，かつ雑音成分が支配的にならないようなパラメータ設定が可能と考えられる．この概念図を図 7.14に示す．

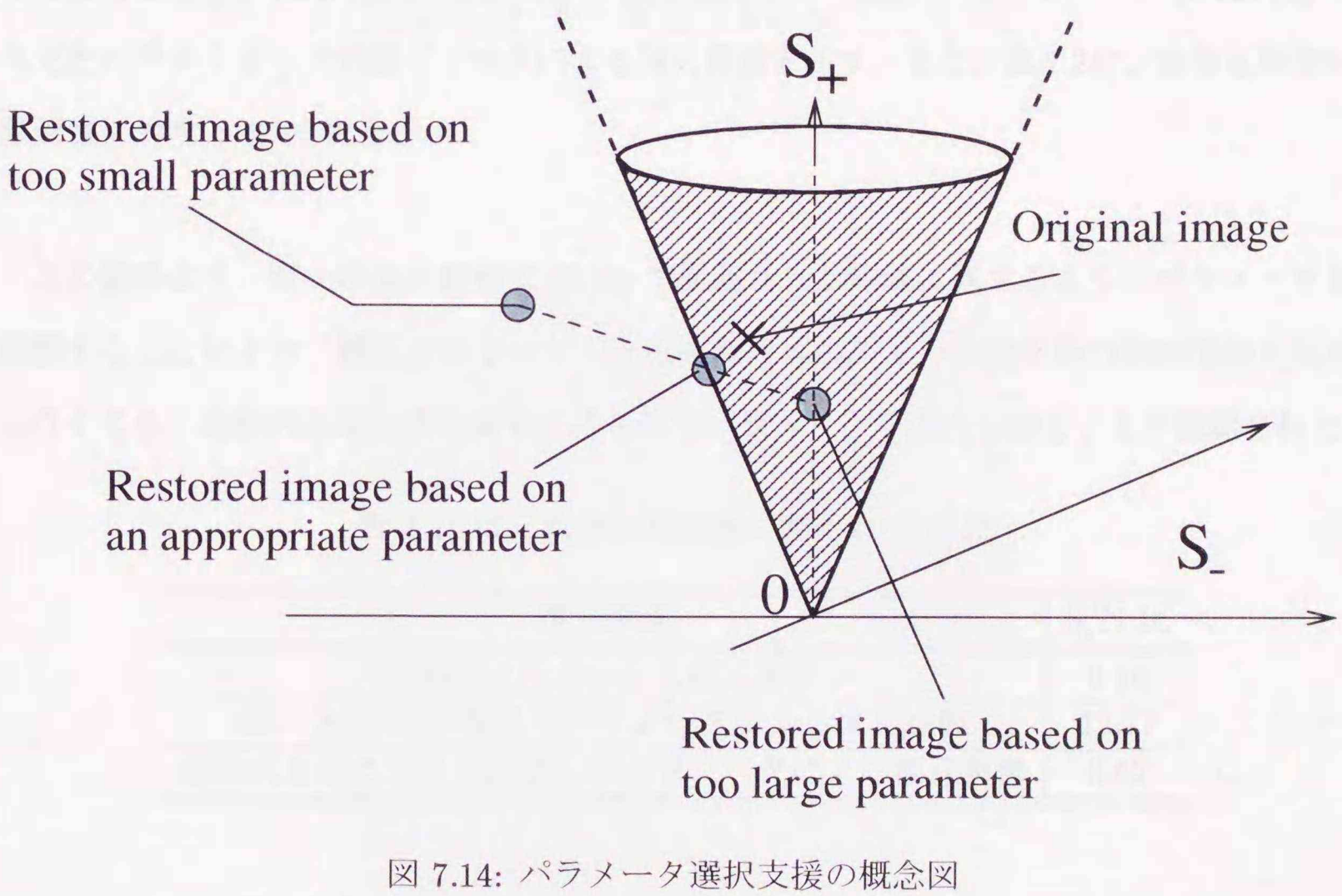


図 7.14: パラメータ選択支援の概念図

数値例

ここで述べた，パラメータ選択支援に関する数値例を以下に示す．復元法としてはパラメトリック射影フィルタを採用する．

図 7.15に原画像 (128 × 128 画素，256 階調) を，図 7.16に，32 画素の縦流れを生じさせ，雑音として平均が 0，標準偏差が 4.0 の独立な正規乱数を付加した観測画像を示す．また，制約式 (7.13) 中のパラメータ α としては前節同様 0.3 を採用し，ウェーブレット変換には Daubechies の 4 タップフィルタ [8] を用いた．

図 7.17に，比較のために射影フィルタによる復元画像を，図 7.18に，原画像との S/N 比が最大となるパラメータ (0.0009) を事前に探索して与えたパラメトリック射影フィルタによる復元画像を，図 7.19に，制約式 (7.13) を満たすよう調整したパラメータ (0.00012) を与えたパラメトリック射影フィルタによる復元画像を示す．また，表 7.2に，各復元画像の原画像に対する S/N 比を示す．

この結果より，復元画像が制約式 (7.13) で記述された領域に属するようにパラメータを調整することにより，雑音のエネルギーと原画像のエネルギーの関係等の事前情報を利用しなくても，比較的良好な復元結果が得られるパラメータを選択し得ることが確認された．

表 7.2: 復元画像の原画像に対する S/N 比

復元画像	S/N 比
射影フィルタによる復元画像	0.16
最大 S/N 比を与えるパラメータによる復元画像	12.77
制約式を満たすよう調整したパラメータによる復元画像	8.62



図 7.15: 原画像



図 7.16: 観測画像



図 7.17: 射影フィルタによる復元画像



図 7.18: S/N 比が最大となるパラメータに基づくパラメトリック射影フィルタによる復元画像

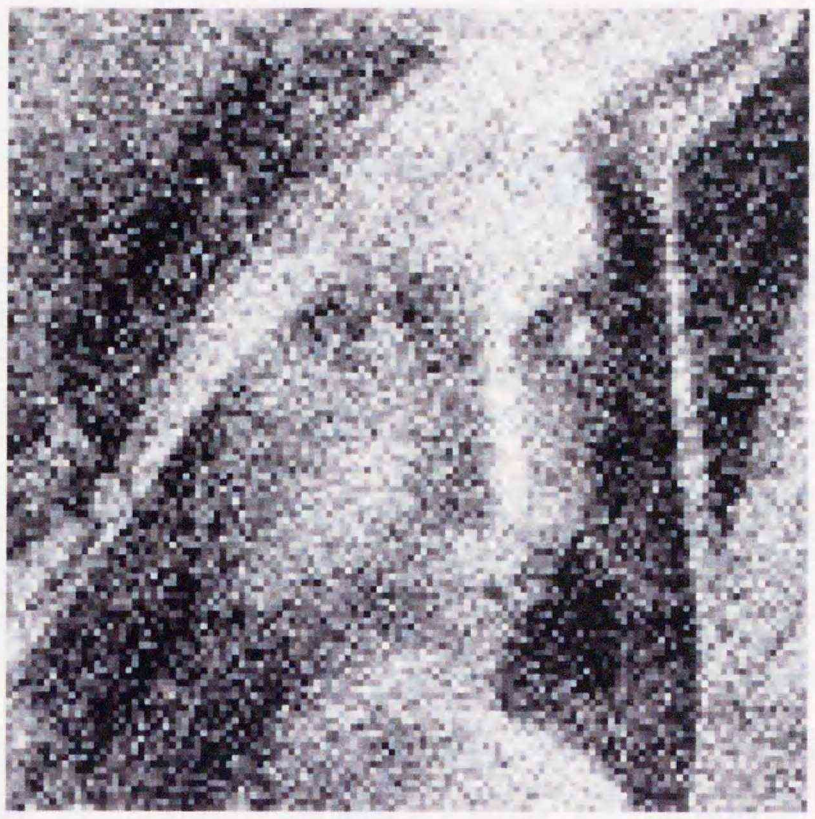


図 7.19: 制約式を満たすよう調整したパラメータに基づくパラメトリック射影フィルタによる復元画像

7.5　その他の画像信号処理への応用 (ディジタル画像の拡大)

本節では，画像の多重解像度表現における既知の 2 階層の成分の関係を用いて，未知の階層の成分を推定する方法について述べ，それをディジタル画像信号の拡大に応用する方法について述べる [52].

画像の多重解像度表現における，隣接する階層間相関構造について考察すべく，自然画像 (LENA，512 × 512 画素，256 階調) の多重解像度表現における，$F_i^{W,LH}$ 成分と $F_{i+1}^{W,LH}$ 成分，$F_i^{W,HL}$ 成分と $F_{i+1}^{W,HL}$ 成分，$F_i^{W,HH}$ 成分と $F_{i+1}^{W,HH}$ 成分の各々に関するノルムの比と相関係数を算出した．この結果を表 7.3及び表 7.4に示す．ここで，$1 \leq i \leq 4$ とし，表 7.3に関しては Haar ウェーブレット，表 7.4に関しては Daubechies 4 タップフィルタ [8] を用いた．

この結果から，隣接する成分間は同程度のノルム比及び相関係数を有することがわかっ

表 7.3: 画像の多重解像度表現における各階層の成分間の相関係数とノルム比 (Haar のウェーブレット)

LH 成分	4 階層目-5 階層目	3 階層目-4 階層目	2 階層目-3 階層目	1 階層目-2 階層目
相関係数	0.849	0.887	0.878	0.873
ノルム比	0.447	0.479	0.468	0.482

HL 成分	4 階層目-5 階層目	3 階層目-4 階層目	2 階層目-3 階層目	1 階層目-2 階層目
相関係数	0.722	0.810	0.842	0.861
ノルム比	0.501	0.461	0.481	0.463

HH 成分	4 階層目-5 階層目	3 階層目-4 階層目	2 階層目-3 階層目	1 階層目-2 階層目
相関係数	0.527	0.330	0.282	0.405
ノルム比	0.305	0.296	0.281	0.298

表 7.4: 画像の多重解像度表現における各階層の成分間の相関係数とノルム比 (Daubechies の 4 タップフィルタ)

LH 成分	4 階層目-5 階層目	3 階層目-4 階層目	2 階層目-3 階層目	階層目 1-2 階層目
相関係数	0.576	0.672	0.658	0.630
ノルム比	0.350	0.323	0.317	0.343

HL 成分	4 階層目-5 階層目	3 階層目-4 階層目	2 階層目-3 階層目	1 階層目-2 階層目
相関係数	0.639	0.618	0.624	0.656
ノルム比	0.424	0.344	0.367	0.327

HH 成分	4 階層目-5 階層目	3 階層目-4 階層目	2 階層目-3 階層目	1 階層目-2 階層目
相関係数	0.128	-0.007	0.097	0.105
ノルム比	0.295	0.328	0.255	0.263

た．いくつかの自然画像に対しても同様に相関係数及びノルム比を求めところ，多くの画像において各階層の成分間に同程度の相関及びノルム比があることが確認された．以上より，既知の成分を用いることにより，未知の成分をある程度推定することが可能と言える．以下に，その応用例としてディジタル画像の拡大法について述べる．

図 7.1からもわかるように，画像信号の多重解像度表現においては，最低域成分である LL 成分は変換対象の画像を縮小したものとなっている．よって，与えられた画像を未知の拡大画像の多重解像度表現の最低域成分とみなし，かつ，上で述べた性質を用いて高域成分を推定することにより，より高精細な拡大画像が得られると期待できる．

画像の多重解像度表現における各成分 $F_i^{W,\Gamma} \in \mathbf{R}^{2n_i \times 2m_i}$ に作用させる行列 $S_4(n_i, m_i)$ を以下のように定義する．

$$S_4(n_i, m_i)\mathrm{vec}(F_i^{W,\Gamma}) = (H_s(m_i) \otimes H_s(n_i))\mathrm{vec}(F_i^{W,\Gamma}) \tag{7.15}$$

但し，$H_s(k)$ は，

$$H_s(k) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

という形の k 行 $2k$ 列行列とする．

この作用素は，与えられた成分に対し縦横各々2 係数の計 4 係数単位に平均を取り，その代表値とするような作用素である．従って，

$$\mathrm{unvec}(S_4(n_i, m_i)\mathrm{vec}(F_i^{W,\Gamma})) \in \mathbf{R}^{n_i \times m_i} \tag{7.17}$$

となる．

拡大の対象とする画像を $F_g \in \mathbf{R}^{4n_1,4m_1}$ とし，縦横2倍に拡大された画像を $F_e \in \mathbf{R}^{8n_1,8m_1}$ とする．ここで，F_g を F_e の多重解像度表現における $(F_e)_1^{W,LL}$ と見なせば，高域成分 $(F_e)_1^{W,LH}$，$(F_e)_1^{W,HL}$，$(F_e)_1^{W,HH}$ は，$(F_g)_1^{W,LH}$，$(F_g)_1^{W,HL}$，$(F_g)_1^{W,HH}$ と相関があると考えられる．またその度合に関しては，前述の結果より，$(F_g)_1^{W,LH}$，$(F_g)_2^{W,LH}$ 間，$(F_g)_1^{W,HL}$，$(F_g)_2^{W,HL}$ 間，$(F_g)_1^{W,HH}$，$(F_g)_2^{W,HH}$ 間のそれと同程度であると言える．

以上より，回帰モデル

$$(F_g)_1^{W,LH} = a^{LH}\mathrm{unvec}(S_4(n_1,m_1)^+\mathrm{vec}((F_g)_2^{W,LH})), \tag{7.18}$$

$$(F_g)_1^{W,HL} = a^{HL}\mathrm{unvec}(S_4(n_1,m_1)^+\mathrm{vec}((F_g)_2^{W,HL})), \tag{7.19}$$

$$(F_g)_1^{W,HH} = a^{HH}\mathrm{unvec}(S_4(n_1,m_1)^+\mathrm{vec}((F_g)_2^{W,HH})) \tag{7.20}$$

を構成し，その回帰係数 a^{LH}，a^{HL}，a^{HH} を最小二乗基準により求める．

最終的に，拡大画像における高域成分 $(F_e)_1^{W,LH}$，$(F_e)_1^{W,HL}$，$(F_e)_1^{W,HH}$ として，各々

$$(F_e)_1^{W,LH} = a^{LH}\mathrm{unvec}(S_4(2n_1,2m_1)^+\mathrm{vec}((F_g)_1^{W,LH})), \tag{7.21}$$

$$(F_e)_1^{W,HL} = a^{HL}\mathrm{unvec}(S_4(2n_1,2m_1)^+\mathrm{vec}((F_g)_1^{W,HL})), \tag{7.22}$$

$$(F_e)_1^{W,HH} = a^{HH}\mathrm{unvec}(S_4(2n_1,2m_1)^+\mathrm{vec}((F_g)_1^{W,HH})) \tag{7.23}$$

を採用し，ウェーブレット逆変換を施すことにより拡大画像を得る．上記のアルゴリズムでは，縦横二倍の拡大についてのみ述べたが，同様の処理を繰り返すことにより，2 の冪乗倍の拡大を実現することができる [52].

図 7.20～図 7.22に，画像拡大法として従来から用いられている共一次内挿法 [49] 及び 3 次畳み込み内挿法 [49]，ここで述べた提案法による拡大画像を示す．但し，各々の画像は，三つの手法それぞれが想定している縮小過程により得られた画像を拡大した結果である [52].

この結果から，提案法では既存手法と比較し，観測されていない高域成分が良好に復元され，過度の平滑化効果が生じない拡大ができることがわかる．



図 7.20: 共一次内挿法による拡大画像



図 7.21: 3 次畳み込み内挿法による拡大画像



図 7.22: 提案法による拡大画像

第 8 章

数値例

8.1 はじめに

本章では，前章までで述べた種々の提案法のうち，本論文が主眼を置いている，

(1) 第 5 章で提案した信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (もしくはノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族) をもとに，第 7 章で構成した，ウェーブレット変換画像の相関構造を利用した復元アルゴリズムによる復元性能

(2) 第 4 章及び第 5 章で提案した，ノルム拘束に基づく復元フィルタ (ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族) の正則化の効果

の二点に関して，その有効性を数値例によって確認する．

8.2 多重解像度解析における相関関係を適用した復元例

本節では，第 7.3.2節で提案したアルゴリズム，すなわち，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族 (もしくはノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族) に対し，ウェーブレット理論に基づき記述した特徴を反映させた復元アルゴリズムによる復元結果が，これら復元フィルタが改良の対象としたパラメトリック射影フィルタ族による復元結

果と比較して，想定したとおりに画像の特徴を有効利用可能であるかを数値実験によって確認する．

例として縦方向流れの観測作用素と有色雑音による観測画像の復元性能によって従来手法との比較を行なう．提案法の中からは，画像の特徴利用の有効性について注目するため，信号適応型パラメトリック射影フィルタ (SAPPF) を採用し，比較対象としては，この手法が直接改良の対象としたパラメトリック射影フィルタ (PPF) を採用した．

提案手法 (SAPPF) における作用素 C としては，第 7.3節で述べたものを用いるものとし，予め用意する復元画像として，PPF によるものを用いた．また，本例では，縦方向のみの劣化であるので，作用素 C を構成する際の多重解像度表現への変換等は縦方向のみ行なった．ウェーブレットとしては，Daubechies の 8 タップフィルタ [8] を用い，多重解像度表現の階層数は 2 とした．また，重み構成時に用いる低域成分の近傍としては，対象画素を含む 3 近傍を用いた．

— 画像例 1 (LENA) —

図 8.1に原画像 (LENA，64 × 64 画素，256 階調) を，図 8.2に縦方向に 15 画素の平均を取るような劣化を施し，縦方向に相関のある雑音を加えて作成した観測画像を示す．但し，縦方向に関する雑音の相関作用素としては，

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

という，64 × 64 行列を用いた．

双方の手法で用いるパラメータには，原画像に対する S/N 比が最大となるものを事前に探索して与えた．具体的なパラメータの値を表 8.1に示す．

図 8.3，図 8.4に，PPF による復元画像及び SAPPF による復元画像を示す．また，参考

までに，表 8.2に各々の画像の原画像に対する S/N 比を示す．

表 8.1: 使用パラメータ (数値例 1)

復元手法	パラメータ	値
PPF	γ	0.00189
SAPPF	γ	0.00080
	λ	0.00063



図 8.1: 原画像

表 8.2: 復元画像の S/N 比

復元手法	SNR(dB)
PPF	19.30
SAPPF	20.24

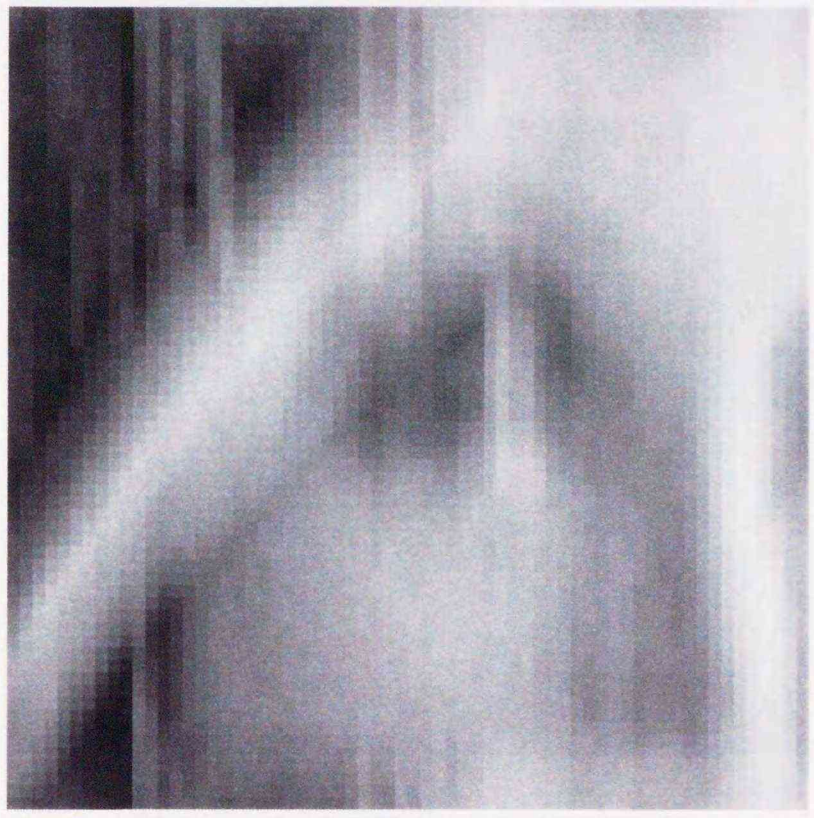


図 8.2: 観測画像



図 8.3: PPF による復元画像



図 8.4: SAPPF による復元画像

— 画像例 2 (HOUSE) —

図 8.5に原画像 (HOUSE，64 × 64 画素，256 階調) を，図 8.6に縦方向に 7 画素の平均を取るような劣化を施し，縦方向に相関のある雑音を加えて作成した観測画像を示す．但し，縦方向に関する雑音の相関作用素としては，

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

という，64 × 64 行列を用いた．使用したパラメータについては，数値例 1 と同様，原画像に対する S/N 比が最大となるものを事前に探索して与えた．具体的な値を表 8.3に示す．

図 8.7，図 8.8に，PPF による復元画像及び SAPPF による復元画像を示す．また，参考までに，この例に関しては，提案法同様個々の画像の特徴利用に主眼を置いている適応ノルム型拘束条件付最小二乗フィルタ (ANCLSF) による復元画像を図 8.9に示す．但し，こ

の復元法においては，主観的に提案法と同程度の鮮鋭度が得られるよう調整したパラメータを用いて復元を行なった．参考までに，表 8.4に各々の画像の原画像に対する S/N 比を示す．

表 8.3: 使用パラメータ (数値例 2)

復元手法	パラメータ	値
PPF	γ	0.00128
SAPPF	γ	0.000767
	λ	0.000131

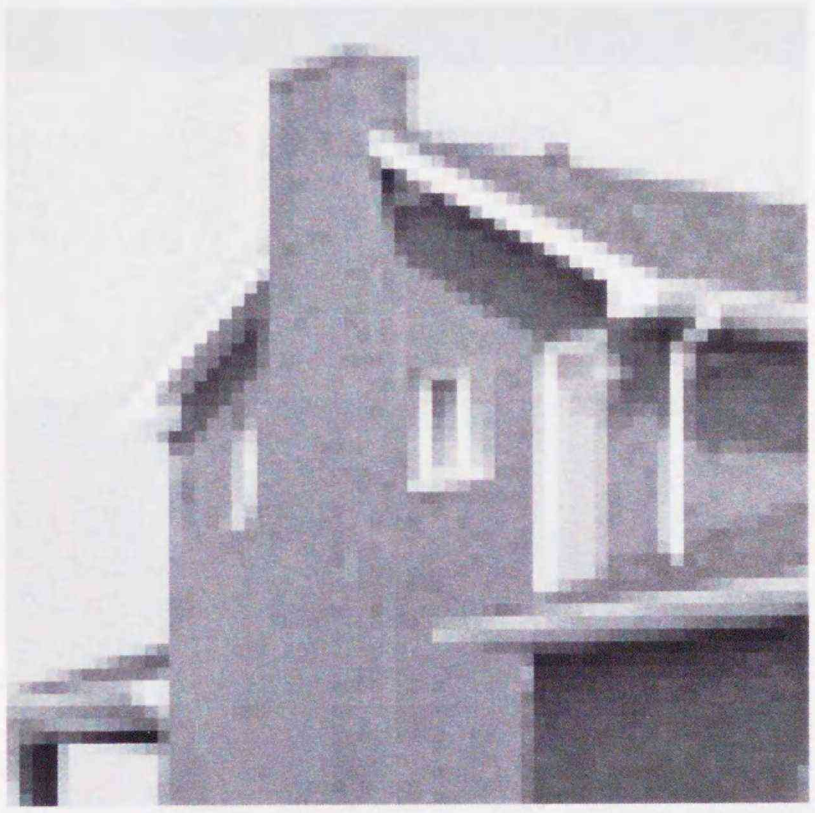


図 8.5: 原画像

上記二つの画像例から，信号適応型パラメトリック射影フィルタによる復元画像は，パラメトリック射影フィルタによる復元画像と比較し，平坦な領域においては効果的に雑音を抑制し，急峻な変化を持つ領域においては過度の平滑化効果を生じさせないような復元ができていることが確認できる．

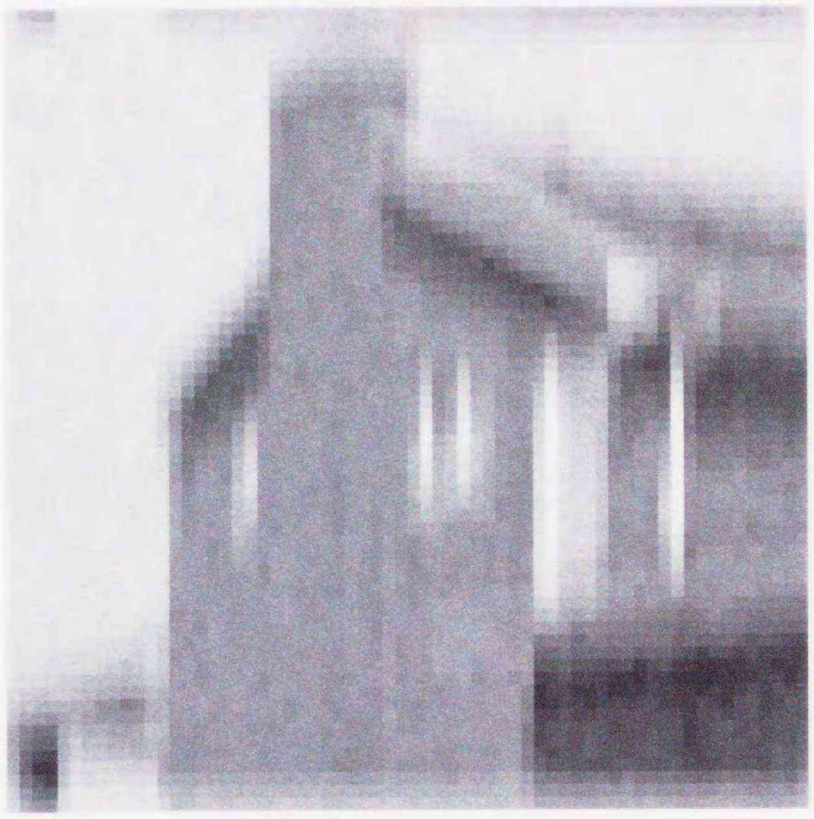


図 8.6: 観測画像

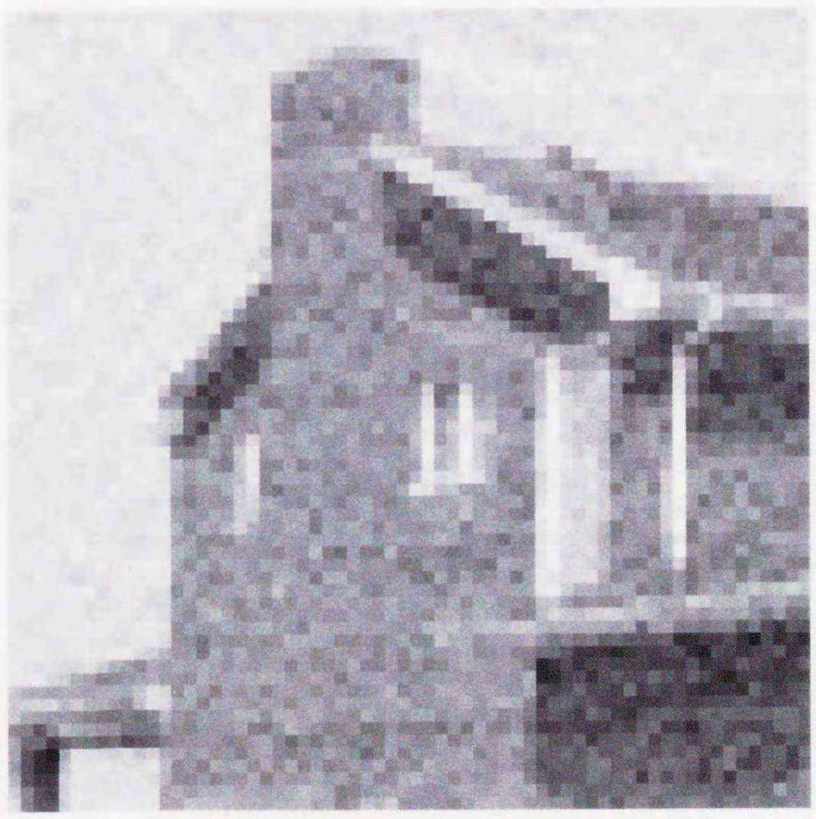


図 8.7: PPF による復元画像

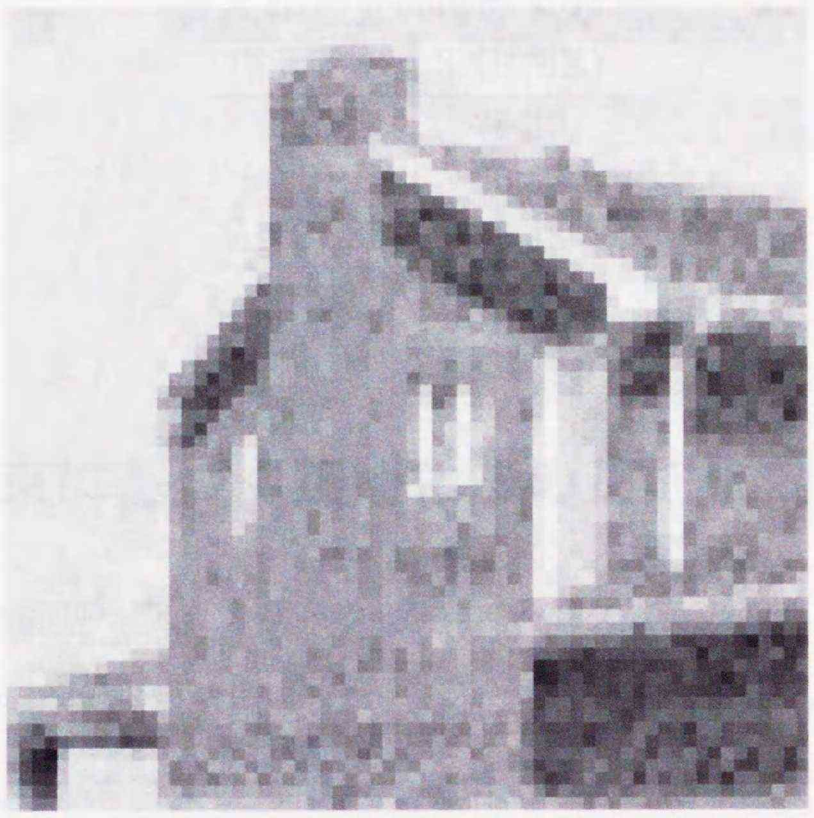


図 8.8: SAPPF による復元画像

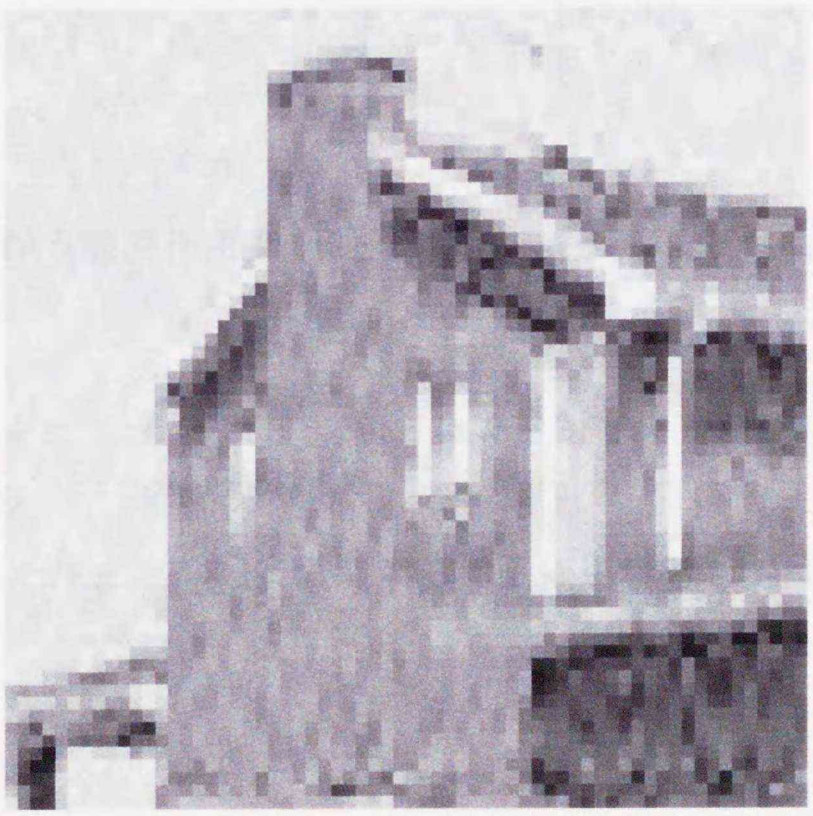


図 8.9: ANCLSF による復元画像

表 8.4: 復元画像の S/N 比

復元手法	SNR(dB)
PPF	20.30
SAPPF	20.83
ANCLSF	20.48

8.3　ノルム拘束に基づく正則化法の正則化効果の検証

本節では，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族，及び，ノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族で用いている，作用素ノルムによる拘束によってどの程度の正則化効果が得られるかを，実際の画像に適用することによって検証する．

真の観測作用素 A として，

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{127} & c_{128} \\ c_{128} & c_1 & \cdots & c_{126} & c_{127} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_3 & c_4 & \cdots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{128} & c_1 \end{bmatrix}, \quad c_i = \begin{cases} 1/32 & : \ i = 1, \ldots, 32 \\ 0 & : \ i = 33, \ldots, 128 \end{cases} \tag{8.3}$$

を用い，微小なずれを伴う観測作用素 $\tilde{A}$ としては，A 及び$\tilde{A}$ の i 行 j列成分を a_{ij} 及び $\tilde{a_{ij}}$ として，

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + \varepsilon & : \ k = 0, \ldots, 30, \ i = k + 2, \ j = (5k \bmod 128) + 1, \\ a_{ij} & : \ otherwise. \end{cases} \tag{8.4}$$

という作用素を構成した．また，雑音に関する相関作用素としては，

$$Q = AA' \tag{8.5}$$

を用いた．

図 8.10及び図 8.11に，原画像 (LENA，128 × 128 画素，256 階調) と，真の観測作用素による観測過程と相関作用素が Q となるような正規乱数による観測画像を示す．以上の実

験条件のもと提案法の正則化効果について検証する．但し，ここでは正則化効果についてのみ注目するため，提案法としては $\lambda = 0$ とおいたノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ (すなわち，ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ) を採用した．また，$\varepsilon = 0.001$ とした．

図 8.12〜図 8.14には，各々，真の構成要素 (A, Q) に基づくパラメトリック射影フィルタ，微小なずれを伴う構成要素 $(\tilde{A}, Q)$ に基づくパラメトリック射影フィルタ，同じく微小なずれを伴う構成要素 $(\tilde{A}, Q)$ に基づくノルム拘束型パラメトリック射影フィルタによる復元画像を示す．



図 8.10: 原画像

この結果より，何らかの形で推定したフィルタの構成要素が真の構成要素と十分近い場合においても，推定した構成要素に基づくパラメトリック射影フィルタは，真のパラメトリック射影フィルタとは近付かない可能性があることがわかり，一方ノルム拘束型パラメトリック射影フィルタにおいては，推定した構成要素に基づいて構成された復元フィルタでも真の復元フィルタに近付けることが可能であることが確認された．



図 8.11: 観測画像



図 8.12: 真の構成要素に基づくパラメトリック射影フィルタによる復元画像



図 8.13: 微小なずれを伴う構成要素に基づくパラメトリック射影フィルタによる復元画像



図 8.14: 微小なずれを伴う構成要素に基づくノルム拘束型パラメトリック射影フィルタによる復元画像

第 9 章

結論

9.1　本論文の成果

本論文，第 3 章においては，統計的画像復元フィルタの一つである射影フィルタ族について，その構成要素となる観測作用素，相関作用素等が分離核表現で記述できる場合には，復元作用素を同じく分離核表現で記述できることを示した．現実に復元問題を扱う場合には計算機を用いざるを得ず，計算量及び記憶容量という双方の観点から，可能であるならば復元過程を分離核表現したほうが効率が良いことは想像に難くない．古典的な復元法である一般逆フィルタにおいては分離核表現可能性について古くから知られていたが，統計的性質を有効に用いることができる射影フィルタ族についてもこのような枠組が与えられたことは有用な結果と言える．

既存の復元手法の多くは，その構成要素となる観測作用素，雑音や画像に関する相関作用素等の情報は正確であるという仮定に基づいて構成されている．しかし現実に与えられるのは観測画像のみであることが一般的であり，それら構成要素は何らかの経験的知識等を用いて推定せざるを得ない．しかし，推定した当該構成要素が真のそれと十分に近い場合であっても，それら推定された構成要素に基づく復元フィルタが真の構成要素からなる復元フィルタと近い保証はない．パラメトリック射影フィルタ族にも当てはまるこの問題を解決すべく提案された正則化パラメトリック射影フィルタ族についても，正則化の操作が，パラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準の最適性に与える影響が明確で

ないという問題があった．このような問題を解決すべく，本論文第4章では，パラメトリック射影フィルタ族を定義する最適化基準の改良に基づき正則化を実現するノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族を提案した．このフィルタ族では，最適化基準の中に「極端に増幅される空間がない」という性質を定量的に付加することによりこれを実現しており，結果として復元フィルタとして何を最適と見なすかが明確な正則化手法を構成できた．このことは，正則化手法の数理的な意味合いを明確にできたという意味で有意義な結果である．また，当該フィルタ族と，パラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族等との関係について定量的な解析を行ない，正則化パラメトリック射影フィルタ族と同等もしくはより緩い条件で既存手法に収束することも示された．

本論文第5章では，同じくパラメトリック射影フィルタ族の最適化基準の改良に基づき，それまでの統計的画像復元法では実現されていなかった，個々の画像の局所的な情報等も有効に利用できる信号適応型パラメトリック射影フィルタ族を提案した．このフィルタ族を用いることにより，パラメトリック射影フィルタ族が有する耐雑音性能と個々の画像の情報の双方を利用した復元が可能となる．また，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族の，パラメトリック射影フィルタ族及び射影フィルタ族との関係について定量的な解析を行ない，当該提案手法が，これら既存手法の拡張と見なせることを示した．また，信号適応型パラメトリック射影フィルタ族と，第4章で提案したノルム拘束型パラメトリック射影フィルタ族の考え方を同時に適用することにより，双方の長所を併せ持つノルム拘束信号適応型パラメトリック射影フィルタ族を提案するとともに，このフィルタ族と既存手法との関係について定量的な解析を行ない，結果として，前述の二つの提案法を含む既存の多くの復元手法を包含する手法であることを示した．

本論文第7章においては，近年主に信号処理の分野で脚光を浴びているウェーブレット理論について，その画像復元問題への適用可能性について述べた．具体的には，画像の多重解像度表現における各階層間に存在する相関構造について明らかにし，当該相関構造の記述法について定式化するとともに，これを第5章で提案したフィルタ族に適用すること

により画像の特徴を効果的に利用可能な復元アルゴリズムを提案し，第 8 章における数値実験によってその有効性を確認した．また，同じく画像復元への応用として，画像の多重解像度表現における変換係数のエネルギー分布についても解析を行ない，復元法の後処理としての雑音抑制，及び，パラメトリックフィルタのパラメータ選択支援に適用可能であることを示した．また，画像の多重解像度表現においては，隣接階層間には同程度の相関構造があることも明らかにし，当該構造を用いた画像拡大法も提案した．

9.2　課題と今後の展望

本論文では，既存の多くの手法と同様，画像観測復元過程を扱う枠組としてヒルベルト空間を用いている．従って，画像間の距離を測る道具立てとしては当該空間に備わる内積から導入されるノルムに類するものを用いざるを得ない．上記内積は，線形性を満たすことが要求され，それ故，線形代数や関数解析，統計学に関する膨大な結果を利用することが可能となるが，画像の集合が形成する空間の特質は全く考慮しておらず，方法論主導の人為的な側面を否定できない．今回提案した信号適応型の復元フィルタは，個々の画像の特徴を復元の最適性の中に組み込むことにより，ある意味空間の特質を考慮したと言えるが，空間の本質まで踏み込んだ議論は行なっていない．画像間の距離は，本来人間の視覚特性に基づいて決められるべきものであることは異論の余地はないであろう．視覚特性と画質評価に関する研究も行なわれているものの，画像信号処理の道具立てとして利用できるほどの数学的な定式化等は行なわれていないというのが現状である．以上のことから，今後は，視覚特性等の考慮に基づき，かつ復元問題を含む画像処理全般に利用可能な対象主体の画像空間の記述が必要になると考えられる．

また，復元問題の定式化において，観測過程に関する情報がある程度正確に得られているような状況のみを想定していたことも課題の一つとして挙げられる．復元問題が適用される状況では，観測画像のみが与えられ，観測過程等の情報は未知であるという問題設定が一般的であろう．しかしながら，第 2 章でも概括したように，そのような状況を想定し

た復元法で，実用的な見地から有効な手法は開発されていない．よって，今後は，観測過程の情報を用いずに高精度の復元を行なう手法の開発も必要であると考えられる．

謝辞

本論文の執筆に際しまして，主査として多くの御指導及び御助言，御討論を頂きました北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻 宮腰 政明 教授，副査として貴重な御助言を頂きました同専攻 新保 勝 教授，伊達 惇 教授，同研究科電子情報工学専攻 北島 秀夫 教授，同研究科システム情報工学専攻今井 英幸 助教授，ゼミナール等において多くの御討論を頂きました同専攻 河口 万由香 助教授に，この場を借りて厚く御礼申し上げます．

参考文献

[1] S. Amari and J. F. Cardoso. Blind Source Separation - Semiparametric Statistical Approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, No. 11, pp. 2692–2700, 1999.

[2] 新井朝雄. ヒルベルト空間と量子力学. 共立出版株式会社, 1997.

[3] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverse : Theory and Applications.* John Wiley & Sons, 1974.

[4] J. J. ベネデッド/M. M. フレージャー編. ウェーブレット 理論と応用. シュプリンガーフェアラーク東京, 1974.

[5] J. A. Cadzow. Blind Deconvolution via Cumulant Extrema. *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 24–42, May 1996.

[6] C. K. Chui. 数理科学セミナー / ウェーブレット入門. 東京電機大学出版局, 1993.

[7] C. K. Chui. 数理科学セミナー / ウェーブレット応用 信号解析のための数学的手法. 東京電機大学出版局, 1997.

[8] I. Daubechies. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 41, pp. 909–996, 1988.

[9] N. P. Galatsanos and A. K. Katsaggelos. Methods for Choosing the Regularization Parameter and Estimating the Noise Variance in Image Restoration and Their Relation.

IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 1, No. 3, pp. 322–336, 1986.

[10] B. R. Hunt. The Application of Constrained Least-Squares Estimation to Image Restoration by Digital Computer. *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-22, pp. 805–812, 1973.

[11] H. Imai, Y. Nakata, and M. Miyakoshi. On restoration of overlapping images. *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E80–D, No. 12, pp. 1190–1194, 1997.

[12] H. Imai, A. Tanaka, and M. Miyakoshi. The family of parametric projection filters and its properties for perturbation. *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E80–D, No. 8, pp. 788–794, 1997.

[13] H. Imai, A. Tanaka, and M. Miyakoshi. The family of regularized parametric projection filters for digital image restoration. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E82–A, No. 3, pp. 527–534, 1999.

[14] 今井英幸, 田中章, 宮腰政明. 摂動に対する射影フィルタ族の性質. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J80–D-II, No. 5, pp. 1128–1135, 1997.

[15] 今井英幸, 田中章, 宮腰政明. 摂動法を用いた最適画像復元フィルタの評価. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J80–D-II, No. 3, pp. 754–761, 1997.

[16] 今井英幸. 線形推定理論に基づく画像復元法とその安定性に関する研究. 北海道大学大学院工学研究科 学位論文, 1999.

[17] 加藤正徳, 山田功, 坂庭好一. 新しい凸射影アルゴリズムによる最適ブラインドデコンボリューションの一実現法. 第 13 回ディジタル信号処理シンポジウム講演論文集, pp. 405–409, 1998.

[18] 金谷健一. 空間データの数理. 朝倉書店, 1995.

[19] 菊池学, 長谷山美紀, 北島秀夫. マルチフレーム射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J79–D-II, No. 9, pp. 1516–1524, 1996.

[20] 小出裕司, 山下幸彦, 小川英光. 信号・画像推定のための射影フィルタ族の統一理論. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J77–D-II, No. 7, pp. 1293–1301, 1994.

[21] 近藤正三, 熱田清明. 新しい拘束条件付き最小 2 乗フィルタによるディジタル画像の復元法. 電子通信学会論文誌, Vol. J68–D, No. 4, pp. 496–501, 1985.

[22] 近藤正三, 熱田清明. 新しい付加雑音を考慮した拘束条件付一般逆行列によるディジタル画像の復元法. 電子通信学会論文誌, Vol. J68–D, No. 4, pp. 502–507, 1985.

[23] D. Kundar and D. Hatzinakos. Blind Image Deconvolution. *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 43–64, May 1996.

[24] 黒木修隆, 野村孝徳, 亀田昌志, 沼昌宏, 平野浩太郎. 帯域間予測を用いたハール・ウェーブレット変換と画像符号化への応用. 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J77–A, No. 12, pp. 1738–1746, 1994.

[25] R. L. Lagendijk, J. Biemond, and D. E. Boekee. Regularized Iterative Image Restoration with Ringing Reduction. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 36, No. 12, pp. 1874–1888, 1988.

[26] J. R. Magnus and H. Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics.* John Wiley & Sons, 1988.

[27] S. G. Mallat. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, No. 7, pp. 674–693, 1989.

[28] 増田裕一, 黒木修隆, 沼昌宏, 平野浩太郎. 帯域間予測を用いた階層的ブラインドデコンボリューション. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J81–D-II, No. 12, pp. 2712–2717, 1998.

[29] 宮腰政明, 黒田浩之, 新保勝. Browder の強収束定理の凸射影法への応用. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J78–D-II, No. 2, pp. 205–212, 1995.

[30] 守本晃. ウェーブレットを用いた数値計算について, pp. 36–43. サイエンス社, 12 1992.

[31] 中村伸隆, 小川英光. 加法性ノイズを考慮した最適画像復元. 電子通信学会論文誌, Vol. J67–D, No. 5, pp. 563–570, 1984.

[32] H. Ogawa and E. Oja. Projection filter, Wiener filter and Karhunen–Loève subspaces in digital image restoration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 114, No. 1, pp. 37–51, 1986.

[33] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [i]-復元問題の普遍性. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 5, pp. 491–497, 1988.

[34] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [ii]-古典的最適復元フィルタ. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 6, pp. 593–601, 1988.

[35] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [iii]-最適復元のための射影フィルタ族. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 7, pp. 739–748, 1988.

[36] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [iv・完]-非線形復元. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 8, pp. 828–835, 1988.

[37] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J71–A, No. 2, pp. 519–526, 1988.

[38] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタの諸性質. 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J71–A, No. 2, pp. 527–534, 1988.

[39] E. Oja and H. Ogawa. Parametric Projection Filter for Image and Signal Restoration. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP–34, No. 6, pp. 1643–1653, 1986.

[40] 岡本良夫. 逆問題とその解き方. オーム社, 1992.

[41] S. U. Pillai and B. Liang. Blind Image Deconvolution Using a Robust GCD Approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 8, No. 2, pp. 295–301, 1999.

[42] C. R. Rao. 統計的推測とその応用, p. 38. 東京図書株式会社, 1977.

[43] C. R. Rao and S. K. Mitra. 一般逆行列とその応用. 東京図書株式会社, 1973.

[44] A. Rosenfeld and C. Kak. *Digital Picture Processing.* Academic Press, 1976.

[45] 斎藤正彦. 線形代数入門. 東京大学出版会, 1966.

[46] 斎藤恒雄. 画像処理アルゴリズム. 近代科学社, 1993.

[47] H. Stark. *Image Recovery Theory and Application.* Academic Press, 1987.

[48] 杉山博史, 小川英光. パラメトリック部分射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J72–D-II, No. 10, pp. 1618–1626, 1989.

[49] 高木幹雄 下田陽久監修. 画像解析ハンドブック. 東京大学出版会, 1991.

[50] 高橋渉. 非線形関数解析学. 近代科学社, 1988.

[51] A. Tanaka and M. Miyakoshi. Image Restoration by Multiscale Spatial Adaptive Regularization. In *Proceedings of Third International Conference on Computing Anticipatory Systems*, 1999. In Press.

[52] 田中章, 今井英幸, 宮腰政明, 伊達惇. 多重解像度解析を用いたディジタル画像の拡大. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J79–D-II, No. 5, pp. 819–825, 1996.

[53] 田中章, 今井英幸, 宮腰政明. 多重解像度解析におけるスケール間関係を利用した自然画像の復元. 第 13 回ディジタル信号処理シンポジウム講演論文集, pp. 141–145, 1998.

[54] 田中章, 今井英幸, 宮腰政明. 2 次形式不等式制約を用いた射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J82–D-II, No. 3, pp. 415–421, 1999.

[55] 田中章, 今井英幸, 宮腰政明. パラメトリック射影フィルタ族の正則化に関する一考察. 第 14 回ディジタル信号処理シンポジウム講演論文集, pp. 201–206, 1999.

[56] 田中章, 今井英幸, 宮腰政明. ノルム拘束に基づくパラメトリック射影フィルタ族の正則化. 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J83–A, No. 6, pp. 812–820, 2000.

[57] 田中章, 今井英幸, 宮腰政明. 信号適応型パラメトリック射影フィルタ族による画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J83–A, No. 8, pp. 1011–1020, 2000.

[58] 田中章, 宮腰政明. 射影フィルタ族の分離核表現. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J82–D-II, No. 4, pp. 838–840, 1999.

[59] 田中章, 宮腰政明. 階層的適応重みを用いたパラメトリック射影フィルタによる自然画像の復元. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J83–D-II, No. 2, pp. 662–670, 2000.

[60] 谷口雅彦, 工藤峰一, 宮腰政明, 新保勝. ボルテラ級数を用いた非線形画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J78–D-II, No. 2, pp. 378–384, 1995.

[61] 寺崎奈緒美, 岩間尚文, 細田陽介. Tikhonov-Philips 正則化と GCV による疎データ CT 像再構成-プラズマ画像への応用-. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J81–D-II, No. 1, pp. 93–100, 1998.

[62] A. Tikhonov and V. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problems.* John Wiley & Sons, 1977.

[63] 梅山伸二. Independent component analysis を用いたぼけ過程不明のぼけ画像の復元について. 電子情報通信学会技術報告 [パターン認識・メディア理解], Vol. PRMU98, pp. 9–16, 1998.

[64] 山下幸彦, 小川英光. 画像空間の位相と最適画像復元フィルタ. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J75–D-II, No. 2, pp. 306–313, 1992.

[65] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J74–D-II, No. 2, pp. 150–157, 1991.

[66] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタの諸性質. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J74–D-II, No. 2, pp. 142–149, 1991.

[67] 山下幸彦, 小川英光. 各種最適画像復元フィルタの相互関係. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J75–D-II, No. 5, pp. 890–898, 1992.

[68] 山下幸彦, 小川英光. 最適画像復元フィルタと一般逆. 電子情報通信学会論文誌 (D–II), Vol. J75–D-II, No. 5, pp. 883–889, 1992.

[69] 柳井晴夫, 竹内啓. 射影行列・一般逆行列・特異値分解. 東京大学出版会, 1983.

[70] Y. You and M. Kaveh. A Regularization Approach to Joint Blur Identification and Image Restoration. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 5, No. 3, pp. 416–428, 1996.

[71] Y. You and M. Kaveh. Ringing Reduction in Image Restoration by Orientation-Selective Regularization. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 3, No. 2, pp. 29–31, 1996.

[72] Y. You and M. Kaveh. Blind Image Restoration by Anisotropic Regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 8, No. 3, pp. 396–407, 1999.

[73] Y. You, W. Xu, A. Tannenbaum, and M. Kaveh. Behavioral Analysis of Anisotropic Diffusion in Image Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 5, No. 11, pp. 1539–1553, 1996.

[74] D. C. Youla. Mathematical theory of image restoration by the method of convex projections. In *Image Recovery Theory and Application*, pp. 29–77. Academic Press, 1987.

[75] D. C. Youla and H. Webb. Image restoration by the method of convex projections:Part 1—Theory. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. MI-1, No. 1, pp. 81–94, 1982.

[76] Y. Zeevi and R. Coifman. *Wavelet Analysis and its Applications : Signal and Image Representation in Combined Spaces.* Academic Press, 1998.

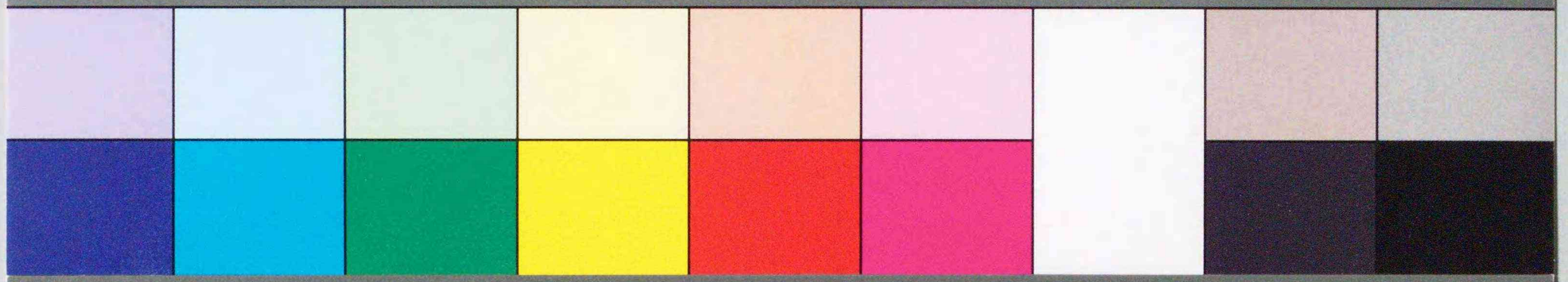
inches 1 2 3 4 5 6 7 8

cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



Kodak Gray Scale

C Y M

© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

