



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	同期的ネットワーク構造最適化により創発されるネットワークの特徴解析
Author(s)	岩根, 慎司; 鈴木, 育男; 山本, 雅人 他
Citation	ネットワークが創発する知能研究会 (JWEIN10) 講演論文集, 7
Issue Date	2010-08-20
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/51686
Type	journal article
File Information	10007-iwane.pdf



同期的ネットワーク構造最適化により 創発されるネットワークの特徴解析

Characteristics of the emergent network structure is optimized
by a synchronous network structure

岩根 慎司

Shinji IWANE

北海道大学

Hokkaido University

iwane@complex.eng.hokudai.ac.jp

鈴木 育男

Ikuo SUZUKI

北海道大学

Hokkaido University

山本 雅人

Masahito YAMAMOTO

北海道大学

Hokkaido University

古川 正志

Masashi FURUKAWA

北海道大学

Hokkaido University

キーワード: 結合振動子ネットワーク, 複雑ネットワーク, 同期現象, コミュニティ

概要

蔵本モデルをネットワークに拡張した結合振動子ネットワークに関する解析的な議論が多くなされている. 本論文では, 結合振動子ネットワークにおいて同期の強さを測る示標であるコヒーレンスを最大化するネットワーク構造を得る最適化実験を行い, その結果, 創発されたネットワークの構造的特徴と固有振動数分布に関して解析を行うことで, 強い同期を実現するネットワークが有する一般的な特徴を明らかにする.

I 緒論

「同期現象」と呼ばれる現象[1]は, 人間の生活リズムを司る体内時計や心拍あるいは, レーザーや振り子など生物学や物理学といった幅広い領域に存在する. 従来, 同期現象の研究は一つの学問の中で読み解かれるのではなく物理学, 生物学, 数学, または工学といった幅広い領域においてそれぞれの観点から研究が進められてきた. しかし, ほとんどの研究に共通して, 蔵本モデル[2-4]の「結合振動子」がその中心であるといえる.

また, 1998年にWatts等[5]がスモールワールドネットワークを発見したことをきっかけに, 自

然界や人間界に存在する巨大で複雑なネットワーク構造を読み解く手段として「複雑ネットワーク」[6,7]と呼ばれる領域が発展してきた. 複雑ネットワーク理論では, 構成要素間の関係性をノードとリンクによりネットワークとして記述することで, 構成要素自体を解析するだけでは知ることのできない有用な情報を抽出することを目的としている. このようにノードとリンクによって記述できる構成要素間の関係性は様々な領域に存在する. 同期現象においても, 現実世界で同期現象を引き起こす系は蔵本モデルにおいて仮定された全結合の状態をとるとは考えられず, 実際は複雑ネットワークのように構成要素間に結合

関係が存在するものと考えられる。したがって、近年では同期現象の解析のために複雑ネットワーク理論を導入する研究が解析と応用の二つの観点からなされている。解析の観点での研究は、ネットワークを利用し、振動子間に結合関係を持たせた結合振動子ネットワークを解析する研究[8-10]がそのほとんどである。また、応用の観点での研究は、神経系に代表される生態学的な同期活動機能の説明や制御[11]、あるいは同期を引き起こす系の安定性の調査[12]のように、その目的に応じて様々な分野の研究が存在する。しかし、どの分野においても共通して、ネットワークの構造に応じて変化する振動子系の挙動を捉えることは重要な知見になり得ると考えられる。例えば、通信の分野であるセンサネットワークにおいては、時系列で変化する機器間ネットワークにおいて、動作を同期化させる必要がある。その際に有効な機器間ネットワークの構成方法を探ることはセンサネットワーク研究において、重要な課題であるが、この課題を解決するためには解析の観点の研究によって得られた知見をフィードバックすることが不可欠である。

本研究では、ネットワーク構造に起因する振動子系の挙動、特に強い同期を実現するネットワークが有する構造的特徴を明らかにするために、数値計算実験を行った。その際、振動子系は結合振動子ネットワークによってモデル化し、強い同期を実現するネットワークの構成方法には、同期が強くなるネットワーク構造最適化手法を採用した。また、結果として得られたネットワークを解析する手段には、ネットワーク特徴量の変化を観測する方法とネットワークを可視化する方法の二種類を用いた。

本論文の構成は以下の通りである。まず、第II章において結合振動子ネットワークを用いた関連研究を紹介する。次に、第III章で本研究が扱う振動子モデルの定義を行い、第IV章でネットワーク特徴量を説明する。続いて、第V章では数値計算実験の方法を述べ、第VI章で結果と考察を示す。最後に第VII章で本論文をまとめる。

II 関連研究

複雑ネットワーク理論が発展するのに伴い、結合振動子ネットワークを利用した数値計算実験に基づく解析が広く行われてきた。それらの研究の多くはネットワークが持つ構造と振動子の挙動の関係性に焦点を当てたものがほとんどである。

Hong等[13]はWatts等によって考案されたスモールワールドモデルに結合振動子ネットワークを適用した数値計算実験を行い、その結果からスモールワールドモデル上での臨界結合強度 σ_c とコヒーレンス R は辺の張替え確率 β とは反比例することを明らかにした。つまり、規則的な構造を持つレギュラーネットワークより不規則な構造を持つランダムネットワークの方が強い同期を引き起こしやすくなることを示した。Hong等が使用した結合振動子ネットワークモデルにおいて、各振動子の位相 θ_j は以下の式(1)に従う。

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \omega_j + \frac{\sigma}{2k} \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (1)$$

ここで、 ω_j と σ はそれぞれは振動子 j の固有振動数と振動子間の結合強度を表すパラメータであり、 a_{jk} はネットワークの隣接行列 $\mathbf{A}$ の (j, k) 成分を表す。 $a_{jk}=1$ であるときノード (j, k) 間にリンクがあり、 $a_{jk}=0$ であるときノード間にリンクが存在しない。また、 k はレギュラーネットワークにおいてリンクを張るノードの近傍数を指すため各ノードの次数が均一の場合は $k_j = 2k$ となる。辺の張替えが進み各ノードの次数が不均一になった場合このモデルでは次数に依らず結合強度の値が一定となる特徴を有する。

Arenas等[14]は幾つかの理論ネットワークモデル上で、同期の数値積分を行い、その際に同期している振動子集団をコミュニティと定義し、コミュニティ抽出法によって抽出されるコミュニティとの比較を行っている。結果として、ハブが存在しない均質なネットワークでは、コミュニテ

ィ分割の結果と同期によって形成されるコミュニティがほぼ一致することを明らかにした. Arenas 等が使用した結合振動子ネットワークモデルは以下の通りである.

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \omega_j + \sigma \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (2)$$

このモデルは結合強度 σ の値によっては Hong 等が使用したモデルと一致する.

Brede[15]はネットワークの構造ではなくネットワーク中での固有振動数分布に着目し, ネットワーク上で固有振動数の値が異符号でかつ絶対値の大きさが近い振動子対が結合しているほど系全体でのコヒーレンス R は高くなることを明らかにした. Brede が使用した結合振動子ネットワークモデルは Arenas 等が使用したモデルと同一のモデルである.

以上で述べた振動子ネットワークを用いた研究事例では, 理論ネットワークモデル上での解析やネットワーク上での固有振動数分布に着目した解析等, 限定された条件での研究がほとんどである. 本研究では, より一般的な議論を行うために, ネットワークの構造と固有振動数の分布を併せて観測する. また, 強い同期を実現するネットワーク有している構造的特徴に着目し, 数値計算実験を行った.

III 結合振動子ネットワークモデル

I 章で述べたとおり, 本研究では要素間に結合関係が存在し, 結合関係のある要素対のみが相互作用を及ぼしあう振動子系を対象とする. このような振動子系のモデル化は同期現象を記述する上で最も基本的な振動子モデルである蔵本モデルの結合振動子をネットワーク上での結合関係に拡張して実現する.

位相振動子の平均場結合系である蔵本モデルにおいて, 各振動子の位相 θ_j は式(4)に従う.

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \omega_j + \frac{\sigma}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (4)$$

式(4)において各振動子の位相は, 固有振動数で振動する働きと, 他の振動子との位相差を小さくする働きの和によって決定付けられ, どちらの働きを強くするかを調節するパラメータが結合強度 σ である. 蔵本モデルのような位相振動子における系全体の状態記述には式(5)で定義される秩序パラメータを用いる.

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (5)$$

式(5)において, $-\pi < \phi(t) \leq \pi$ は振動子位相場での平均位相である. また, $0 \leq r(t) \leq 1$ は振動子位相場での平均振幅であり, 同期の強さを表すパラメータであるため, コヒーレンスと呼ばれる. 実際にコヒーレンスを用いて振動子系の同期の強さを測る際には, 式(6)で定義される $r(t)$ の時間平均を用いる.

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt \quad (6)$$

式(6)で定義される結合振動子系において振動子間に同期が発生するかどうかは固有振動数の分布関数 $g(\omega)$ と結合強度 σ によって決定付けられる. 例えば, 固有振動数の分布関数に $g(-\omega) = g(\omega)$ が成り立つ場合, 振動子系のコヒーレンスが $R > 0$ となる臨界結合強度は $\sigma_c = 2/(\pi g(0))$ となることが知られている. 実際に, 固有振動数の分布関数が以下の式(7)で定義される Cauchy-Lorenz 分布

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (7)$$

に従う場合, 臨界結合強度は $\sigma_c = 2s$ となり, 結合強度 $\sigma > \sigma_c$ のコヒーレンスは $R = \sqrt{1 - (\sigma_c / \sigma)}$ となる.

本研究では, 位相振動子モデルの結合関係を考慮するために, 式(8)で定義される結合振動子ネットワークモデルを採用する.

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} = \omega_j + \frac{\sigma}{k_j} \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (8)$$

式(8)において, k_j は j 番目の振動子の次数を,

表す. 式(8)を用いることにより, 蔵本モデルによって定義された振動子系は, ネットワーク上で結合している振動子のみの影響を受ける結合振動子ネットワークとしてモデル化することができる.

式(8)で定義した結合振動子ネットワークにおける同期には, 大域的同期と局所同期の二通りが考えられる. 本研究において, 大域的同期はネットワーク上の全ての振動子が位相同期していることを示し, 式(6)で定義したコヒーレンス R によって評価する. また, 局所同期は, ネットワーク上でつながっている振動子対のみで同期が起こっていることを示すが, 局所同期の強さを評価する指標は存在しない. そこで, 新たに m 次近傍内コヒーレンスと名付けた指標を導入する. ここで, m 次近傍とはある振動子からの最短パス長が m 以下の振動子集合を示す. まず, 振動子 j の m 次近傍内の振動子のみでコヒーレンスを計算すると振動子 j の m 次近傍内コヒーレンス $r_{mj}(t)$ を式(9)で定義する.

$$r_{mj}(t)e^{i\phi_{mj}(t)} = \frac{1}{|\mathbf{B}_{mj}|} \sum_{k \in \mathbf{B}_{mj}} e^{i\theta_k(t)} \quad (9)$$

式(9)における $\mathbf{B}_{mj}$ は振動子 j の m 次近傍内にある振動子を要素とする集合である. 更に, $r_{mj}(t)$ を各振動子で平均化することにより, 振動子系における m 次近傍内コヒーレンスを式(10)と定義できる.

$$r_m(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_{mj}(t) \quad (10)$$

この m 次近傍内コヒーレンス $r_m(t)$ も振動子の実際の挙動の評価に適用する際には式(11)で定義される $r_m(t)$ の時間平均を用いる

$$R_m = \frac{1}{T} \int_0^T r_m(t) dt \quad (11)$$

この m 次近傍内コヒーレンスは, ネットワークの直径 d であるときに, 最大で R_d まで定義することができ, $R_d = R$ が成り立つ. 本研究では, 局

所同期の強さを測るための指標として R_1 を用いる.

IV ネットワーク特徴量

前章で定義した式(8)の結合振動子ネットワークにおいて, 振動子の挙動は, 結合強度 σ やネットワークの構造とそこでの固有振動数の分布等の様々な要素により決定付けられる. 本研究では, 結合振動子ネットワークの同期が強くなるネットワーク構造最適化実験を行い, 結果として得られた最終状態のネットワーク構造を観測し, 同期の起こりやすいネットワークが有する特徴を解析することを目的としている. そのため, ネットワーク構造の特徴を定量的に評価する指標が必要である. 複雑ネットワークの領域では, こうした指標をネットワーク特徴量と呼ぶ. 本章では, こうしたネットワーク特徴量の中から, 本研究で扱ういくつかを述べる.

まず, ネットワークの「クラスター性」を測るための特徴量であるクラスター係数 C は式(12)で定義される.

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (12)$$

式(12)において, E_i はノード i に接続されている k_i 個のノード間に張られているリンク数を表す. クラスター係数 C を用いることで, ネットワーク中で三つのノードが互いにリンクを張り合っている三角形構造の密度を計測することができる.

次に, ネットワークの「スモールワールド性」を測る際に用いる特徴量である固有パス長 L は式(13)で定義される.

$$L = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N l(i, j) \quad (13)$$

式(13)において, $l(i, j)$ はノード (i, j) 間の最短パス長を示す. 固有パス長 L は二つのノード対のネットワーク中での平均最短距離を図ることができる.

前述した二種類のネットワーク構造における特徴以外に, 結合振動子ネットワークにおいては

ネットワーク中での固有振動数分布に関する特徴量も考慮する必要がある. Brede[15]は固有振動数分布を定量的に測る指標として, 固有振動数分布の相関係数 C_ω を式(14)で定義した.

$$C_\omega = \frac{\sum_{i,j} a_{ij}(\omega_i - \langle \omega \rangle)(\omega_j - \langle \omega \rangle)}{\sum_{i,j} a_{ij}(\omega_i - \langle \omega \rangle)^2} \quad (14)$$

式(14)において, $\langle \omega \rangle$ は全振動子の固有振動数の平均値である. この C_ω はリンクで繋がれている二つの振動子の固有振動数に相関がない場合, つまり固有振動数がランダムに分布している場合は $C_\omega \approx 0$ となる. また, リンクで繋がれている二つの振動子の固有振動数が同符号である傾向が強いときに $C_\omega > 0$, 異符号である傾向が強いときに $C_\omega < 0$ の値となる.

V 実験方法

5.1 実験概要

数値計算実験においては, 振動子系の同期を強くするネットワーク構造最適化実験を行い, 得られたネットワークの解析を行うことで, 同期を強くする上で各ネットワーク特徴量がどのような働きを持つのかを調査する. また, 振動子系の同期の強さを測るための指標には, 式(6)で定義したコヒーレンス R と式(11)で定義した一次近傍コヒーレンス R_1 とし, それぞれのコヒーレンスを最適化した際のネットワーク構造の相違を観測する. その際, ネットワークの構造変化はネットワーク特徴量を調査することで, 観測する.

5.2 実験方法

以下に実験データを取得する手順を示す.

- (a) 初期ネットワークを生成する.
- (b) 初期ネットワークの特徴量を計算し, 式(4)に基づき同期の数値積分を行い, 一定時間 T 内のコヒーレンスの平均値 (R or R_1) を計算する.
- (c) ネットワークの中からランダムに一本のリンクを選択し, 非連結のノードが現れないようにつなぎかえを行う.
- (d) (c) で構造を変化させたネットワークに関しても一定時間 T 内のコヒーレンスの平均値 (R or R_1) を計算し, つなぎかえを行う前のネットワークからのコヒーレンスの変化

量 (ΔR or ΔR_1) が正のときは, つなぎかえを許容し, 負のときはつなぎかえを元に戻す.

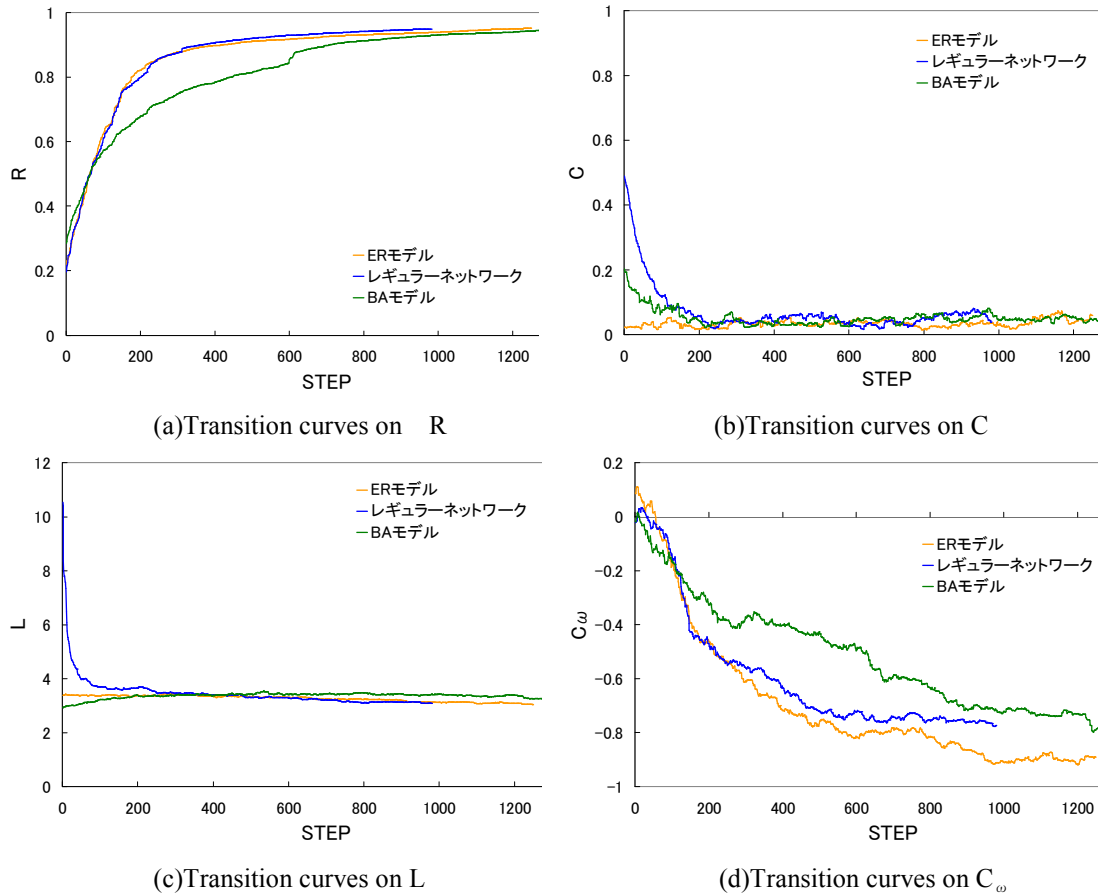
- (e) (b) ~ (d) をランダムに選択するリンクを変化させながら繰り返し, 一定ステップの間ネットワークの構造変化が起こらなければ終了.

5.3 実験設定

実験の設定として, 初期ネットワークは ER モデル, BA モデル, レギュラーネットワークの三種類の理論ネットワークモデル[6]をノード数 100, 平均次数 4 に設定し, 用いた. この際, ER モデルにおいては, モデルの特性上非連結のノードが発生する可能性があるが, その場合は初期ネットワークを再び生成し直すこととした. このノード数 100 というパラメータは一般的な議論を行うためには少ないと考えられるが, 計算時間を削減するためにこの値を採用した. また, 振動子の固有振動数の分布は $[-1, 1]$ の一様分布, 初期位相は $[-\pi, \pi]$ の一様分布とした. 更に, 同期の数値積分は結合強度を $\sigma = 1.0$ とし, シミュレーションの試行時間は $T = 100$ でタイムステップ 0.1 の四次のルンゲクッタ法を適用した. また実験の終了条件は 500 ステップの間, 構造変化が起こらないこととする.

VI 結果と考察

振動子全体でのコヒーレンス R を最大化した実験の結果を図 1 に示す. 図 1(a)を見ると初期ネットワークにおいて, 0.2 程度の値であったコヒーレンス R がどの初期ネットワークにおいても 0.9 以上の値に上昇しており, 大域的同期が強くなる構造変化を実現できていることがわかる. また, ネットワーク特徴量 C , L , C_ω の変化については, 図 1(b)からネットワークの最適化に従いクラスター係数の値はほぼ 0 に収束し, 図 1(c)からネットワークの固有パス長 L はほぼ 3.6 程度の値に収束している. この結果は, 各振動子対が小さなパス長でつながれることで振動子系全体の位相を近づける働きが創発された結果であると考えられる. また, 図 1(d)から固有振動数分布の

Fig.1 Change of network characteristics in maximization of R

相関係数は徐々に負の大きな値へと変化して行く様子が見て取れ、異符号の固有振動数を持つ振動子対が繋がれるほど振動子系の大域的同期が強くなる傾向があることが分かる。

次に、一次近傍コヒーレンス R_1 を最大化した実験の結果を図 2 に示す。図 2(a)を見ると、 R_1 が徐々に大きくなっていき、局所同期の起こりやすいネットワークを実現できていることがわかる。また、ネットワーク特徴量 C , L , C_ω の変化については、図 2(b) からクラスター係数は 0 ではなく 0.1~0.2 程度の値を推移しており、図 2(c) からネットワークの固有パス長 L はほぼ 4 程度の値に収束している。また、図 2(d) から固有振動数分布の相関係数は徐々に正の大きな値に変化していき、同符号の固有振動数を持つ振動子対が多く繋がれていることがうかがえる。以上でネットワーク特徴量の変化から、最適化によって得られたネットワークが有する構造的な特徴を観測した。

次に、図 3, 図 4 に ER モデルを初期ネットワークにした際に得られたネットワークを可視化した結果を示す。図 3, 図 4 において、各振動子の色は固有振動数の値を表し赤に近いほど固有振動数の値は 1 に近く、青に近いほど固有振動数の値は -1 に近いことを表す。また負の固有振動数を持つ振動子を正方形で正の固有振動数を持つ振動子を丸で表示している。図 3 は R を最大化したネットワークであるが、ネットワーク中のほとんどのリンクは異符号の固有振動数を持つ振動子同士を接続している。また、ネットワーク中にはハブと見なすことができる高次数の振動子が存在しているのがわかり、ハブの存在によって小さな固有パス長を実現していることが明らかになった。また、図 4 は R_1 を最大化したネットワークであるが、固有振動数の大きさが近いもの同士が結合し、コミュニティを形成していることがわかる。図 2(b) で観測されたクラスタリング係数は、コミュニティ内のリンク密度を高める働きをし

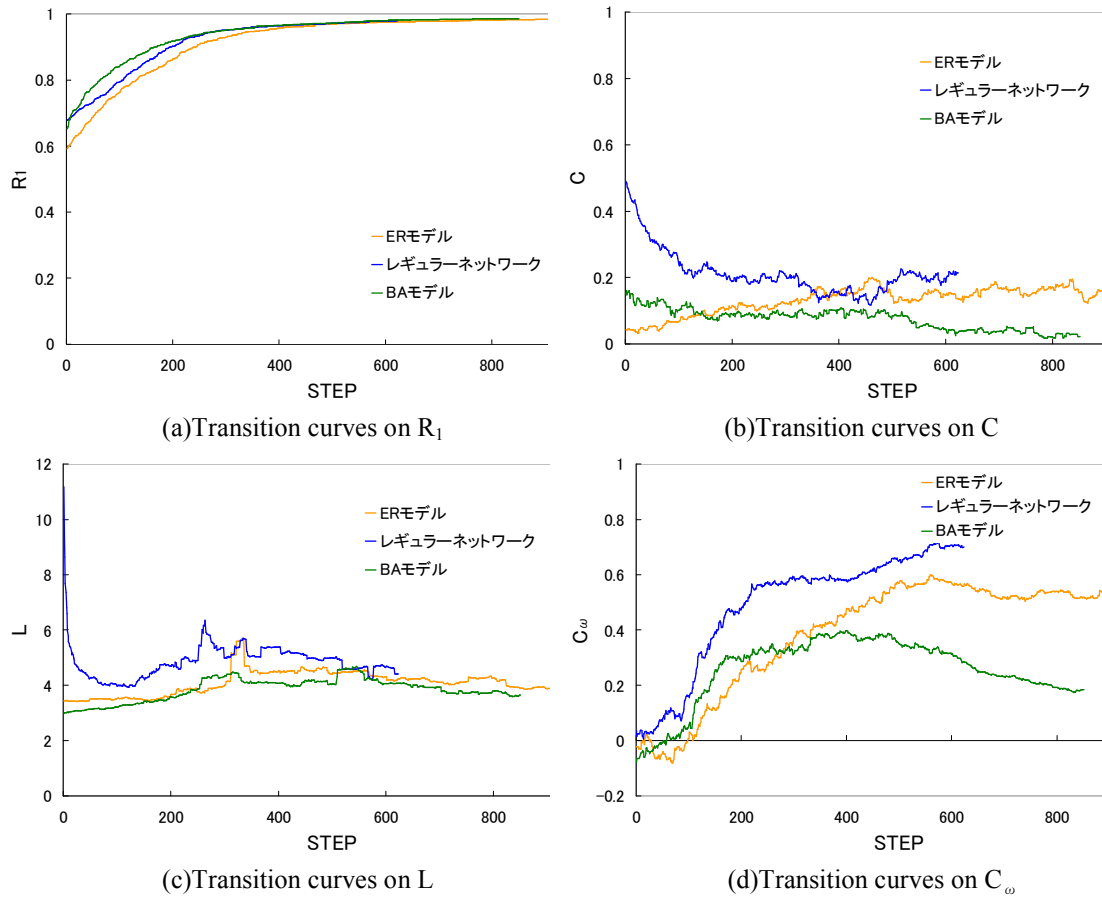


Fig.2 Change of network characteristics in maximization of R_1

ていると考えられる。以上の結果から、大域的同期を最大化する場合には、各振動子は接続している振動子の固有振動数を打ち消しあうような結合を行うことで振動子全体を同期させる構造、局所同期を最大化する場合には固有振動数の近い振動子同士でコミュニティを形成することでコミュニティ内での近傍同期を実現するネットワーク構造といった異なる性質を有するネットワークが創発された。以上の傾向は初期ネットワークの種類に依らず、同様に観測できたため、初期ネットワークによる結果の相違はないものと考えられる。

VII 結言

本研究では、振動子系の同期化力を高めるネットワーク構造最適化実験を行い、得られたネットワークの解析から、強い同期を実現するネットワークが有している特徴的な構造を明らかにした。その結果、以下の知見が得られた。

- (1)強い大域的同期を実現するネットワークは小さな固有パス長を持ち、異符号の固有振動数を持つ振動子対が多く繋がれている
- (2)強い局所同期を実現するネットワークは固有振動数の近い振動子同士でコミュニティを形成する構造を有する
- (3)本実験で適用したネットワーク構造の最適化においては初期ネットワークによる結果の相違はほとんどない

こうした知見はネットワークの構造的な特徴と固有振動数分布という振動子のダイナミクスを決定付ける二つの要因を併せて見ることで初めて得られるものであり、同期のメカニズムの解明にとって重要な結果であると考えられる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂いた自律系工学研究室の皆様にご感謝いたします。

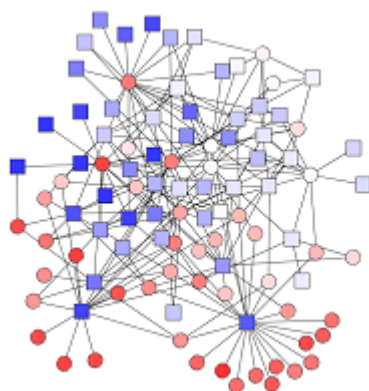


Fig.3 Network visualization on the final state in maximizing R

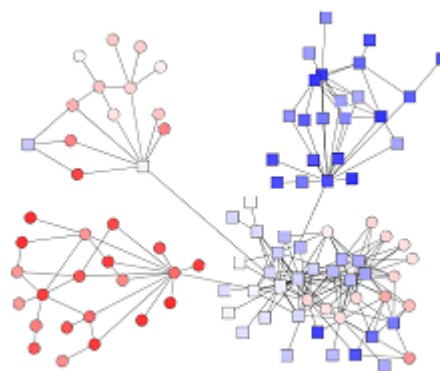


Fig.4 Network visualization on the final state in maximizing R_1

参考文献

- [1] Steven H. Strogatz, "SYNC なぜ自然はシンクロしたがるのか", 早川書房, 2005
- [2] Y. Kuramoto: Chemical Oscillations, Wave and Turbulence, Springer, Newyork, 1984
- [3] Y. Kuramoto: リズム現象の世界, 東京大学出版会, 2005
- [4] J.A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. Phys. Rev. Vol.77, pp.137-185, 2005
- [5] D.J.Watts, S.H.Strogatz: Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature, Vol.393, No.6684, pp.440-442, 1998
- [6] 増田 直紀, 今野 紀雄: 複雑ネットワークの科学, 産業図書, 2005
- [7] A.L.Barabási, R.Albert: Emergence of scaling in random networks. Science, Vol.286, pp.509-512
- [8] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, Changsong Zhou, Synchronization in complex networks, Phys. Rep. Vol. 469, Issue 3, pp. 93-153, 2008
- [9] Ping Li, Zhang Yi, Synchronization of Kuramoto oscillators in random complex networks, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 387, Issue 7, pp. 1669-1674, 2008
- [10] H. Hong, Beom Jun Kim, M. Y. Choi, Hyunggyu Park: Factors that predict better synchronizability on complex networks, Phys. Rev. E 69, 067105, 2004
- [11] István Z. Kiss, Craig G. Rusin, Hiroshi Kori, John L. Hudson: Engineering Complex Dynamical Structures: Sequential Patterns and Desynchronization, science 29, Vol. 316. no. 5833, pp. 1886 – 1889, 2007
- [12] Hiroaki Daido, Kenji Nakanishi, Aging Transition and Universal Scaling in Globally Coupled Oscillators, Progress of Theoretical Physics Supplement No.161, pp. 173-176, 2006
- [13] H. Hong, M. Y. Choi : Synchronization on small-world networks. Phys. Rev. E 65, 026139, 2002
- [14] A. Arenas, A. Diaz-Guilera: Synchronization and modularity in complex networks, Phys. Special Topics 143, 19-25, 2007
- [15] Markus Brede, Synchrony-optimized networks of non-identical Kuramoto oscillators, Phys. Lett. A 372, pp.2618-2622, 2008