



|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 気泡を含む液体中の圧力波伝播の非線形波動方程式：二流体モデルと混合体モデルとの比較                                         |
| Author(s)        | 金川, 哲也; 渡部, 正夫; 矢野, 猛 他                                                           |
| Citation         | 日本機械学会論文集. B編, 76(771), 1802-1810                                                 |
| Issue Date       | 2010-11-25                                                                        |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/51719">https://hdl.handle.net/2115/51719</a> |
| Rights           | © 2010 日本機械学会                                                                     |
| Type             | journal article                                                                   |
| File Information | NKRB76-771_1802-1810.pdf                                                          |



# 気泡を含む液体中の圧力波伝播の非線形波動方程式\*

## (二流体モデルと混合体モデルとの比較)

金川 哲也<sup>\*1</sup>, 渡部 正夫<sup>\*2</sup>, 矢野 猛<sup>\*3</sup>, 藤川 重雄<sup>\*4</sup>

### Nonlinear Wave Equations for Pressure Wave Propagation in Liquids Containing Gas Bubbles (Comparison between Two-Fluid Model and Mixture Model)

Tetsuya KANAGAWA<sup>\*5</sup>, Masao WATANABE, Takeru YANO and Shigeo FUJIKAWA

<sup>\*5</sup> Division of Mechanical and Space Engineering, Hokkaido University  
Kita 13 Nishi 8, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido 060-8628, Japan

Based on the unified theory by the present authors (T. Kanagawa, *et al.*, *J. Fluid Sci. Tech.*, **5**, 2010), the Korteweg–de Vries–Burgers (KdVB) equation and the nonlinear Schrödinger (NLS) equation with an attenuation term for weakly nonlinear waves in bubbly liquids are re-derived from a system of bubble–liquid mixture model equations composed of the conservation equations of mass and momentum, the Keller equation for bubble dynamics, and supplementary equations. We show that the re-derived KdVB equation and NLS equation are essentially the same as those derived from a system of two-fluid model equations except for the coefficients of nonlinear, dissipation, and dispersion terms. The differences in these coefficients are studied in detail, and we find that for the case of KdVB equation, the mixture model is valid only for sufficiently small initial void fractions. On the other hand, for the case of NLS equation, the range of validity of the mixture model depends on not only the initial void fraction but also the wavenumber concerned.

**Key Words** : Bubble, Bubbly Liquid, Gas–Liquid Two-Phase Flow, Pressure Wave, Weakly Nonlinear Wave, Two-Fluid Model, Bubble–Liquid Mixture Model

## 1. 緒 論

気泡を含む液体 (以後 “気泡流” とよぶ) 中の圧力波の伝播の問題は、海洋分野における水中音波の利用によって物体を探知するソナー、医療分野における超音波を用いた結石破碎やマイクロカプセルを用いたドラッグデリバリーなど、さまざまな技術の基礎であり、工学上重要である。このような技術を効率よく発展させるためには、数学的なモデルの作成によって、物理現象の本質を大局的に理解することが必要不可欠である。そのため、理論的な立場からは、過去 40 年以上にもわたり、van Wijngaarden による Korteweg–de Vries (KdV) 方程式の導出<sup>(1)</sup>をはじめとし、弱非線形解析の手法を用いて多数の研究が行われてきた<sup>(2)~(9)</sup>。

最近、著者らは、理論的研究のさらなる発展のため、気泡流中のさまざまな種類の非線形波動方程式の統一的導出法として、個々の波動現象の記述に適切な物理パラメータのスケーリングに基づく手法を提示した<sup>(10)</sup>。この手法を用いて、微細な球形気泡を多数含む静止液体中における平面進行波の伝播の弱非線形解析を行い、低周波数の長波の伝播過程を記述する KdV–Burgers (KdVB) 方程式、および、比較的高周波数の搬送波の包絡波の伝播過程を記述する非線形 Schrödinger (NLS) 方程式を導いた<sup>(10)</sup>。これらの解析では、波の代表的な伝播速度  $U^*$ 、波長  $L^*$ 、周波数  $\omega^*$  に対して、物理パラメータのスケーリングは以下のように定められる。

$$\left( \frac{U^*}{c_{L0}^*}, \frac{R_0^*}{L^*}, \frac{\omega^*}{\omega_B^*} \right) \equiv \begin{cases} (O(\sqrt{\epsilon}), O(\sqrt{\epsilon}), O(\sqrt{\epsilon})), & (\text{for KdVB}) \\ (O(\epsilon^2), O(1), O(1)), & (\text{for NLS}) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\epsilon (\ll 1)$  は波の代表的な無次元振幅、 $c_{L0}^*$  は初期状態における液単相音速、 $R_0^*$  は初期気泡半径、 $\omega_B^*$

\* 原稿受付 2010 年 7 月 日

<sup>\*1</sup> 正員、北海道大学大学院工学院 (〒 060-8628 札幌市北区北 13 条西 8), (独) 日本学術振興会特別研究員 DC.

<sup>\*2</sup> 正員、北海道大学大学院工学研究院.

<sup>\*3</sup> 正員、大阪大学大学院工学研究科.

<sup>\*4</sup> 正員、フェロー、北海道大学大学院工学研究院.

Email: kanagawa@mech-me.eng.hokudai.ac.jp

は気泡の固有角振動数, \* は有次元量を示す.

気泡流のモデルには, 二流体モデルや混合体モデルなどのさまざまなモデルが存在する<sup>(11)</sup>. 本報では, 気泡流のモデルが異なるとき, そこから導かれる非線形波動方程式がどのように異なるかを調べる. 著者らは既に前報<sup>(10)</sup>において, 二流体モデル<sup>(12)</sup> <sup>(13)</sup> を用いた KdVB 方程式と NLS 方程式の導出を行っているが, 本報では, 前報の理論<sup>(10)</sup>を混合体モデル<sup>(11)</sup>の基礎方程式に適用し, KdVB 方程式と NLS 方程式を再導出する.

一般に弱非線形波動では, 非線形効果は高調波成分を励起して波形を歪ませる. 一方, 散逸効果はより高い次数の高調波のエネルギーをより大きく散逸させ, 分散効果は各波数成分を独自の伝播速度で進行させる. 結果として, 両者はともに非線形効果を打ち消す役割を演じる. 二流体および混合体モデル方程式のそれぞれから導かれた非線形波動方程式の違いは, その非線形項, 散逸項, 分散項の係数に集約されるので, これらの係数を比較して特性を調べることによって, 波の伝播特性の差異を明らかにすることができ, さらに二流体モデルと混合体モデルの精密性や有効性などへの知見も得られることが期待される.

本研究では, とくに, これらの 3 つの係数のボイド率依存性に注目した考察を行って各係数の性質を明らかにし, 2 つのモデルの間に定量的な違いのみならず, 定性的な違いもあらわれる場合があることを示す. また, van Wijngaarden が導いた KdV 方程式<sup>(1)</sup>が, 本報で導かれる KdV 方程式に含まれることを明らかにし, 本理論が気泡流中の弱非線形波動を幅広く包含しうることを示す.

## 2. 主 要 記 号

|       |                                               |
|-------|-----------------------------------------------|
| $A$   | : 波の無次元複素振幅                                   |
| $c$   | : 音速 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$           |
| $D$   | : 陰関数表記の線形分散関係                                |
| $i$   | : 虚数単位                                        |
| $k$   | : 無次元波数                                       |
| $L$   | : 波の代表的な波長 $\text{m}$                         |
| $n$   | : 物質定数 (水の場合 7.15)                            |
| $N$   | : 気泡の数密度 $\text{m}^{-3}$                      |
| $p$   | : 圧力 $\text{Pa}$                              |
| $P$   | : 気液界面における局所的液相圧力 <sup>(14)</sup> $\text{Pa}$ |
| $R$   | : 気泡の半径 $\text{m}$                            |
| $t$   | : 時間 $\text{s}$                               |
| $t_m$ | : 多重スケールの時間 ( $m = 0, 1, \dots$ )             |
| $T$   | : 波の代表的な周期 $\text{s}$                         |

|            |                                             |
|------------|---------------------------------------------|
| $u$        | : 流速 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$         |
| $U$        | : 波の代表的な伝播速度 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| $v_p$      | : 無次元位相速度                                   |
| $v_g$      | : 無次元群速度                                    |
| $x$        | : 空間座標 $\text{m}$                           |
| $x_m$      | : 多重スケールの空間座標 ( $m = 0, 1, \dots$ )         |
| $\alpha$   | : ボイド率 (気相の体積分率)                            |
| $\gamma$   | : ポリトロップ指数                                  |
| $\epsilon$ | : 波の代表的な無次元振幅 ( $\ll 1$ )                   |
| $\theta$   | : 位相関数                                      |
| $\mu$      | : 液体の粘性 $\text{Pa} \cdot \text{s}$          |
| $\rho$     | : 密度 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$        |
| $\sigma$   | : 表面張力 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$       |
| $\omega$   | : 波の代表的な角振動数 $\text{s}^{-1}$                |
| $\omega_B$ | : 単一気泡の固有角振動数 $\text{s}^{-1}$               |
| $\Omega$   | : 波の代表的な無次元角振動数                             |

多くの記号が, 無次元量, 有次元量 (\* を付す) の両方としてあらわれることに注意されたい. 無次元量としてのみあらわれる記号については, 単位を省いた.

## 添え字

|   |                                  |
|---|----------------------------------|
| 0 | : 初期状態 ( $t_0$ と $x_0$ を除きすべて定数) |
| G | : 気相                             |
| L | : 液相                             |
| * | : 有次元量                           |

## 3. 問題と基礎方程式

多数の球形微細気泡を含む圧縮性液体中における圧力波伝播の弱非線形解析を, 前報<sup>(10)</sup>と同じ物理パラメータのスケーリング (式 (1)) に基づいて行う. 初期時刻において気泡と液体は静止しており, 体積平均された密度と圧力およびボイド率は空間的に一様であるとして, そこを伝播する平面進行波を考える. 液相の粘性は考慮するが, 気相の粘性, 両相の熱伝導性, 界面を通しての相変化を無視する. したがって, 熱的效果による気泡振動と波の減衰<sup>(15)</sup>は考慮しない. さらに, 気泡の生成・消滅・合体・分裂, および, 気泡間の相互作用も無視する.

**3.1 混合体モデルに基づく基礎方程式** 気泡流を一つの混合体として取り扱う基礎方程式<sup>(5)~(7)</sup>は以

下のように表される.

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u^*}{\partial x^*} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho^* u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u^{*2}}{\partial x^*} + \frac{\partial p_L^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial N^*}{\partial t^*} + \frac{\partial N^* u^*}{\partial x^*} = 0 \quad (4)$$

$$\rho^* \equiv (1 - \alpha) \rho_L^* \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \pi R^{*3} N^* \quad (6)$$

本報では, 式 (2)–(6) を “混合体モデル” の方程式とよぶ<sup>(11)</sup>. 運動量保存式 (3) では, 混合体の圧力が液相の相体積平均圧力  $p_L^*$  に等しいと考えている. また, 混合体の密度  $\rho^*$  の定義式 (5) では, 気相の相体積平均密度が無視されている. これらの取り扱い, 混合体モデルを用いる解析では一般的である<sup>(16)–(18)</sup>. ボイド率の定義式 (6) と後述の式 (14) を数密度の保存方程式 (4) に, また, 式 (5) を式 (2) と (3) に, それぞれ代入すると, 以下を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t^*} (\alpha \rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\alpha \rho_G^* u^*) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} [(1 - \alpha) \rho_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u^*] = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u^*] + \frac{\partial}{\partial x^*} [(1 - \alpha) \rho_L^* u^{*2}] + \frac{\partial p_L^*}{\partial x^*} = 0 \quad (9)$$

基礎方程式 (7)–(9) は液体の圧縮性を考慮している. これに整合するように, 圧縮性液体中における気泡壁の運動方程式として, Keller 方程式<sup>(19)</sup>を用いる.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}^*}{c_{L0}^*}\right) R^* \ddot{R}^* + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}^*}{3c_{L0}^*}\right) \dot{R}^{*2} \\ &= \left(1 + \frac{\dot{R}^*}{c_{L0}^*}\right) \frac{P^*}{\rho_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*} (\dot{p}_L^* + \dot{P}^*) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, ドット記号 ( $\dot{\phantom{x}}$ ) は以下の微分演算子を表す.

$$\frac{D}{Dt^*} \equiv \frac{\partial}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (11)$$

気泡流中の波動伝播解析を行った多数の文献が, 液体の圧縮性を無視しているか<sup>(1)–(4) (16)–(18)</sup>, もしくは, 式 (7)–(9) に相当する保存方程式において液体の密度変化を考慮しながら, 気泡壁の運動方程式として Rayleigh–Plesset 方程式を用いている<sup>(5)–(7)</sup>. 後者の場合には, 式 (10) の右辺第 2 項から生じる音響放射, これに起因する気泡の減衰振動, および波の伝播にともなう減衰を表現できない.

式 (7)–(10) は, 以下の 4 つの式によって閉じられる.

(i) 液相の Tait 状態方程式

$$p_L^* = p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n} \left[ \left( \frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} \right)^n - 1 \right] \quad (12)$$

(ii) 気相のポリトロプ変化の状態方程式

$$\frac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \left( \frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} \right)^\gamma \quad (13)$$

(iii) 気泡内気体の質量保存方程式

$$\frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left( \frac{R_0^*}{R^*} \right)^3 \quad (14)$$

(iv) 気液界面における法線方向応力のつりあい式

$$p_G^* - (p_L^* + P^*) = \frac{2\sigma^*}{R^*} + \frac{4\mu^*}{R^*} \frac{DR^*}{Dt^*} \quad (15)$$

**3.2 多重尺度法** 本節で述べる事項は, 前報<sup>(10)</sup>で詳述しており, 本報においては概略のみ述べる.

対象とする現象は, 波の代表的な無次元振幅  $\epsilon$  が有限ではあるが 1 に比べて十分に小さい, いわゆる弱非線形波動である. 非線形現象ゆえに生じるさまざまな時間変動と空間変動のスケールを系統的に取りこむために, パラメータ  $\epsilon (\ll 1)$  を用いて, 時間と空間に関する複数のスケール ( $\epsilon t, \epsilon x, \epsilon^2 t, \epsilon^2 x, \dots$ ) を導入し, それぞれのスケールで一様に有効な  $\epsilon$  に関する漸近展開を構成する. これは多重尺度法<sup>(20) (21)</sup>とよばれる.

従属変数を以下のようにべき級数展開する.

(i) ボイド率  $\alpha/\alpha_0 - 1$ , 流速  $u^*/U^*$ , 気泡半径  $R^*/R_0^* - 1$  のおのおのを  $h = \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \dots$  のように展開する.

(ii) 液体密度は, KdVB 方程式の場合,  $\rho_L^*/\rho_{L0}^* - 1 = \epsilon^2 \rho_{L1} + \epsilon^3 \rho_{L2} + \dots$  と展開し, NLS 方程式の場合,  $\rho_L^*/\rho_{L0}^* - 1 = \epsilon^5 \rho_{L1} + \epsilon^6 \rho_{L2} + \dots$  と展開する. これらは, 物理パラメータのスケールリング (19)–(21) および (45)–(47) から自然に導かれる.

(iii) 圧力については

$$p_L \equiv \frac{p_L^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}}, \quad p_{L0} \equiv \frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}}, \quad p_{G0} \equiv \frac{p_{G0}^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} \quad (16)$$

と無次元化し,  $p_L - p_{L0} = \epsilon p_{L1} + \epsilon^2 p_{L2} + \dots$  と展開する.

また, 液体の無次元の粘性係数  $\mu$  を,  $\epsilon$  を用いて

$$\frac{\mu^*}{\rho_{L0}^* U^* L^*} \equiv \begin{cases} O(\epsilon) \equiv \mu \epsilon, & (\text{for KdVB}) \\ O(\epsilon^2) \equiv \mu \epsilon^2, & (\text{for NLS}) \end{cases} \quad (17)$$

と定義する.

球形気泡の固有角振動数は

$$\omega_B^* \equiv \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}} \quad (18)$$

で与えられる (ここでは粘性の効果を無視している).

さらに,  $\rho_{G0}^*/\rho_{L0}^* = O(\epsilon^3)$  とする. これによって,  $\rho_{G0}^*$  は本解析結果に含まれなくなる.

#### 4. Korteweg-de Vries-Burgers 方程式

KdVB 方程式を導くための物理パラメータのスケーリング<sup>(10)</sup>は以下のように与えられる.

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv V\sqrt{\epsilon} \quad (19)$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Delta\sqrt{\epsilon} \quad (20)$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Omega\sqrt{\epsilon} \quad (21)$$

ここに  $V, \Delta, \Omega$  はすべて  $O(1)$  の量であり, 本章では代表時間を  $T^* \equiv 1/\omega^*$  と選ぶ. 式 (19)–(21) からわかるように, 本章で着目する圧力波は, 位相速度が液単相音速に比べて遅く, 波長は気泡径に比べて長く, さらに, 周波数は気泡の固有振動数に比べて低い.

**4.1 混合体モデルに基づく KdVB 方程式** 式 (7)–(10) に対応する  $O(\epsilon)$  の方程式系を導いて, 未知変数  $f \equiv R_1(t_0, x_0; t_1, x_1)$  についてまとめれば,  $f$  に関する線形波動方程式を得る ( $R_1$  は無次元気泡半径の第 1 次近似解,  $t_0 = t, x_0 = x, t_1 = \epsilon t, x_1 = \epsilon x$ ). 波動方程式において, 位相速度は

$$v_p = \frac{\Delta/\Omega}{\sqrt{3\alpha_0(1-\alpha_0)}} \quad (22)$$

と与えられ,  $v_p \equiv 1$  とおくことで

$$\Delta^2/\Omega^2 = 3\alpha_0(1-\alpha_0) \quad (23)$$

なる関係式を得て, さらに代表速度  $U^*$  が定まる.

$$U^* = \frac{R_0^*\omega_B^*}{\sqrt{3\alpha_0(1-\alpha_0)}} \quad (24)$$

代表的な波長も,  $L^* \equiv U^*T^*$  からただちに定まる. 結果として,  $x$  軸の正方向に伝播する波を考えるならば,  $f = f(x_0 - t_0; t_1, x_1)$  とおくことができる.

1 次の変数  $\alpha_1, u_1, p_{L1}$  は,  $f$  を用いて

$$\alpha_1 = s_1 f, \quad u_1 = s_2 f, \quad p_{L1} = s_3 f \quad (25)$$

$$s_1 = 3(1-\alpha_0), \quad s_2 = -3\alpha_0, \quad s_3 = s_1 s_2 / 3 \quad (26)$$

と表される.

漸近展開の  $O(\epsilon^2)$  の計算によって得られる非同次波動方程式の可解条件から, KdVB 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0, \quad (27)$$

$$\tau = \epsilon t, \quad \xi = x - (1 + \epsilon \Pi_0) t$$

が導かれる<sup>(10)</sup>. ここで, 式 (27) の 3 つの係数は

$$\Pi_0 = -\frac{(1-\alpha_0)\Delta^2 V^2}{6\alpha_0 \Omega^2} \quad (28)$$

$$\Pi_2 = -\frac{1}{6\alpha_0(1-\alpha_0)} \left( 4\mu + \frac{\Delta^3 V}{\Omega^2} \right) \quad (29)$$

$$\Pi_3 = \frac{\Delta^2}{6\alpha_0(1-\alpha_0)} \quad (30)$$

である. 散逸項の係数  $\Pi_2$  と分散項の係数  $\Pi_3$  の, 二流体モデルから得られるもの<sup>(10)</sup>との差異は, 分母の  $(1-\alpha_0)$  の有無, および  $\Delta \equiv R_0^*/(\sqrt{\epsilon}L^*) = R_0^*\omega^*/(\sqrt{\epsilon}U^*)$  に含まれる  $U^*$  の表現が異なることの 2 点である. 二流体モデルの場合,  $U^*$  は式 (24) に比べて複雑であり<sup>(10)</sup>, それゆえ  $\Pi_2$  と  $\Pi_3$  も, 有限の  $\alpha_0$  に対しては, 次節で示す式 (33) と (34) のように簡潔に表現することができない. 非線形項の係数  $\Pi_1$  は

$$\Pi_1 = \frac{1}{6} \left[ k_1 - \frac{k_2}{\alpha_0} + \frac{k_3}{\alpha_0(1-\alpha_0)} - 6k_4 \right] \quad (31)$$

$$k_1 = 6(2-s_1) + 2s_2(3-s_1), \quad k_2 = -2\alpha_0 s_1 s_2,$$

$$k_3 = 0, \quad k_4 = 1 + \frac{\gamma(3\gamma-1)p_{G0}}{2\alpha_0(1-\alpha_0)} \quad (32)$$

と与えられる. ここで,  $k_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) は, それぞれ, 式 (7)–(10) に対応する  $O(\epsilon^2)$  の方程式系の非同次項の非線形項に由来するものである. 二流体モデルに基づく KdVB 方程式の非線形項の係数の表現は相当に複雑なのでここには示さない.

**4.2 二流体モデルに基づく係数<sup>(10)</sup>との比較** 式 (17), (19)–(21), (23) を用いて, 式 (29) と (30) を書き換えると, 以下ようになる.

$$\Pi_2 = -\frac{\omega^*}{\epsilon\omega_B^*} \left( \frac{2\mu^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2} \omega_B^*} + \frac{R_0^* \omega_B^*}{2c_{L0}^*} \right) \quad (33)$$

$$\Pi_3 = \frac{\omega^{*2}}{2\epsilon\omega_B^{*2}} \quad (34)$$

ここで, 散逸係数  $\Pi_2$  と分散係数  $\Pi_3$  は, 初期ボイド率  $\alpha_0$  に独立なパラメータから構成されており, これは二流体モデルの場合との著しい差異である. なお, 式 (33) と (34) は, 二流体モデルから得られる  $\Pi_2$  と  $\Pi_3$  の  $\alpha_0 \rightarrow 0$  の極限と一致している.

式 (31) に式 (26) と (32) を代入して、非線形係数  $\Pi_1$  を整理すると

$$\Pi_1 = -2 - \frac{\gamma(3\gamma - 1)p_{G0}}{2\alpha_0(1 - \alpha_0)} \quad (35)$$

を得る。ここで、式 (16), (18), (24) から導かれる

$$p_{G0} = \frac{3\alpha_0(1 - \alpha_0)p_{G0}^*}{3\gamma p_{G0}^* - 2\sigma^*/R_0^*} \quad (36)$$

を用いて、式 (35) から  $p_{G0}$  を消去すると

$$\Pi_1 = -2 - \frac{3\gamma(3\gamma - 1)p_{G0}^*}{2(3\gamma p_{G0}^* - 2\sigma^*/R_0^*)} \quad (37)$$

となる。したがって、気泡半径  $f = R_1$  を従属変数とする KdVB 方程式においては、 $\Pi_1$  も  $\alpha_0$  に依存しない。しかしながら、式 (25) と (26) からわかるように、ボイド率  $\alpha_1$ 、流速  $u_1$ 、液相圧力  $p_{L1}$  を従属変数とする KdVB 方程式においては、 $\Pi_1$  の形が変わり ( $\Pi_0, \Pi_2, \Pi_3$  の形は不変)、 $\alpha_0$  依存性があらわれる。二流体モデルから導かれる非線形係数は、従属変数をどのように選んでも  $\alpha_0$  に依存する<sup>(10)</sup>。

とくに等温変化 ( $\gamma = 1$ ) の場合、式 (37) は

$$\Pi_1 = -2 - \frac{3p_{G0}^*}{3p_{G0}^* - 2\sigma^*/R_0^*} \quad (38)$$

となり、 $\sigma^* = 0.0728 \text{ N/m}$ 、 $p_{L0}^* = 101325 \text{ Pa}$ 、 $R_0^* = 10 \mu\text{m}$  のもとでは、 $\Pi_1$  は以下のように見積もられる。

$$\Pi_1 = -3.0437 \dots \quad (39)$$

図 1 に、二流体と混合体の両モデルを用いて得られる  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  の  $\alpha_0$  依存性を示す。同じ物性値を用いているが、二流体モデルの場合には気液相間の運動量輸送に伴う付加慣性係数  $\beta_1$  と  $\beta_2$  の値も必要である。球形気泡の仮定と気泡間の強い相互作用を無視する仮定のもとでは、 $\alpha_0 \ll 1$  でなければならないだろう。しかし、本解析は  $\epsilon \ll 1$  における漸近解析であるので、 $\alpha_0 = O(1)$  として扱われる。したがって、図 1 における  $\alpha_0 \approx 0.1$  のようなある程度大きな  $\alpha_0$  の場合も解析対象に含まれる。図 1 から、このように  $\alpha_0$  が比較的大きい場合には、混合体モデルは適用できなくなることが示唆される。この結果は、たとえば、クラウドキャビテーション中の超音波の挙動などへの応用が期待される。

以下に、本節の主要な結果を要約する：(i) 散逸係数と分散係数は、混合体モデルを用いると、二流体モデルの場合には存在した  $\alpha_0$  依存性が消える。(ii) 非線形係数は、両モデルにおいて、 $\alpha_0$  依存性を有する (混合体モデルにおいて従属変数を  $R_1$  に選んだ場合は依

存しない)。(iii) 比較的  $\alpha_0$  が小さな場合においては両モデルを用いて得られる各係数の値に大きな差はないが、比較的  $\alpha_0$  が大きな場合においては各係数の値は離れてゆく。

#### 4.3 van Wijngaarden の結果<sup>(1)</sup>との比較

van Wijngaarden が KdV 方程式を導くにあたって設定した仮定<sup>(1)</sup>を列挙する：(i) 気泡と液体の相対速度を無視、(ii) 液相の圧縮性と粘性を無視、(iii) 表面張力を無視、(iv) 気泡内気体は等温変化。

混合体モデルから導かれた KdVB 方程式 (27) は、当然ながら、気液間の相対速度を無視している。式 (27) において、さらに、液体の圧縮性および粘性をも無視する ( $V = \mu = 0$ ) と、KdV 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0, \quad \tau = \epsilon t, \quad \xi = x - t \quad (40)$$

を得る。すなわち、散逸係数  $\Pi_2$ 、および、位相速度の補正に寄与する係数  $\Pi_0$  が消える。さらに、表面張力も無視する ( $\sigma^* = 0$ ) ならば、すでに等温変化 ( $\gamma = 1$ ) を仮定した式 (38) は

$$\Pi_1 = -3 \quad (41)$$

となる。

一方、van Wijngaarden の文献中<sup>(1)</sup>の式 (5.1) によれば、KdV 方程式が

$$\frac{\partial p_{G1}}{\partial t} + \frac{\partial p_{G1}}{\partial x} + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial p_{G1}^2}{\partial x} + \frac{\psi}{6} \frac{\partial^3 p_{G1}}{\partial x^3} = 0 \quad (42)$$

と導かれている。ここに、 $t$  は時間、 $x$  は空間座標、 $p_{G1}$  は気相圧力の無次元変動 ( $\epsilon$  はその無次元振幅)、 $\psi = 3c_0^2/(\omega_b^2 \lambda^2)$  である ( $c_0$  は気泡流中の音速、 $\omega_b$  は気泡の固有振動数、 $\lambda$  は波長)。同じ問題設定のもとで、諸記号を本論文の無次元化の定義を用いて書き改めると、 $c_0 = U^*$ 、 $\lambda = L^*$ 、 $\omega_b = \omega_B^*$  である (それぞれ、左辺が van Wijngaarden の表記、右辺が本論文の表記)。ここで、式 (18) と (24) は、 $\sigma^* = 0$  かつ  $\gamma = 1$  のとき

$$\omega_B^* = \sqrt{\frac{3p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}}, \quad U^* = \sqrt{\frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* \alpha_0 (1 - \alpha_0)}} \quad (43)$$

となるが、これらは van Wijngaarden が用いた気泡の固有振動数、および、等温平衡音速<sup>(1)(2)</sup>と等しい。さらに、式 (42) の従属変数を気泡半径の 1 次の変動  $f$  に選べば、 $p_{G1} = -3f$  であるから

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - 3f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\omega_B^{*2}}{2\epsilon \omega_B^{*2}} \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0, \quad \tau = \epsilon t, \quad \xi = x - t \quad (44)$$

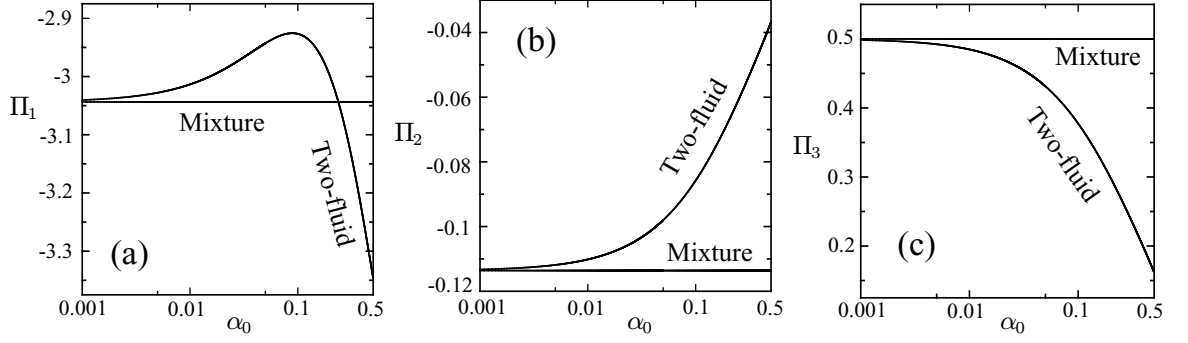


Fig. 1 The coefficients in the KdVB equation versus the initial void fraction  $\alpha_0$  for both cases of the mixture model and the two-fluid model<sup>(10)</sup>, where  $\Omega = 1$ ,  $\sqrt{\epsilon} = 0.15$ ,  $R_0^* = 10 \mu\text{m}$ ,  $p_{L0}^* = 101325 \text{ Pa}$ ,  $\rho_{L0}^* = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma^* = 0.0728 \text{ N/m}$ ,  $c_{L0}^* = 1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$ ,  $\mu^* = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , and  $\gamma = 1$ . The virtual mass coefficients  $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$  are used only in the two-fluid model. (a) Nonlinear coefficient  $\Pi_1$ . (b) Dissipation coefficient  $\Pi_2$ . (c) Dispersion coefficient  $\Pi_3$ .

を得て、これは式 (34), (40), (41) と一致する。以上より、本論文で得られた KdV 方程式は、van Wijngaarden の結果を包含することが示された。

## 5. 非線形 Schrödinger 方程式

NLS 方程式を導くための物理パラメータのスケーリング<sup>(10)</sup>は以下のように与えられる。

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^2) \equiv V\epsilon^2 \quad (45)$$

$$\frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(1) \equiv \Delta \quad (46)$$

$$\frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(1) \equiv \Omega \quad (47)$$

ここに、 $T^* \equiv 1/\omega_B^*$  である。式 (45)–(47) は、波の代表的な伝播速度は液単相音速に比べて著しく小さく、波長は気泡径と同程度で、さらに、周波数が気泡の固有振動数と同程度であることを意味する。

**5.1 混合体モデルに基づく NLS 方程式**  $O(\epsilon)$  の計算から、気泡振動に伴う分散項を有する線形波動方程式を得て、空間 2 階微分項の係数を 1 とおけば

$$\Delta^2 = 3\alpha_0(1 - \alpha_0) \quad (48)$$

を得る。これは、4.1 節における式 (23) に類似した関係式である。同時に、代表速度  $U^*$  は

$$U^* = \frac{R_0^* \omega_B^*}{\sqrt{3\alpha_0(1 - \alpha_0)}} \quad (49)$$

と定まる。

無次元気泡半径の第 1 次近似  $R_1$  に、準単色波

$$R_1 = A(t_1, x_1; t_2, x_2)e^{i\theta} + \text{c.c.} \quad (50)$$

$$\theta = kx_0 - \Omega t_0 \quad (51)$$

を仮定すれば、線形分散関係

$$D(k, \Omega) = \frac{\Delta^2 k^2 (1 - \Omega^2)}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} - \Omega^2 = 0 \quad (52)$$

を得る。式 (50) の右辺の c.c. は複素共役を表す。式 (48) を用いると、式 (52) は

$$\Omega = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} \quad (53)$$

と書き換えられ、初期ボイド率  $\alpha_0$  依存性が消える。式 (53) から、位相速度、群速度、群速度の波数に関する導関数は、それぞれ、以下のように求まる。

$$v_p = \frac{\Omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \quad (54)$$

$$v_g = \frac{(1 - \Omega^2)\Omega}{k} = \frac{1}{(1 + k^2)^{3/2}} \quad (55)$$

$$q \equiv \frac{dv_g}{dk} = -\frac{3(1 - \Omega^2)\Omega^3}{k^2} = -\frac{3k}{(1 + k^2)^{5/2}} \quad (56)$$

式 (53) に  $\alpha_0$  が含まれないことから、 $v_p$ ,  $v_g$ ,  $dv_g/dk$  は  $\alpha_0$  に依存しない。なお、式 (52) より、 $\Omega \neq 1$  (すなわち  $\omega^* \neq \omega_B^*$ ) がしたがう。さらに、群速度 (55) が非負であると考え、 $\Omega < 1$  (すなわち  $\omega^* < \omega_B^*$ ) となる。

$R_1$  以外の 1 次の変数は以下のように表される。

$$\alpha_1 = b_1 R_1, \quad u_1 = b_2 R_1, \quad p_{L1} = b_3 R_1 \quad (57)$$

$$b_1 = \Delta^2/\alpha_0, \quad b_2 = -3\alpha_0 v_p, \quad b_3 = \Delta^2(\Omega^2 - 1) \quad (58)$$

$O(\epsilon^2)$  と  $O(\epsilon^3)$  の計算を行い、両方の方程式の可解条件を組み合わせると、散逸項を伴う NLS 方程式

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu_1 |A|^2 A + i\nu_2 A = 0, \quad \tau \equiv \epsilon^2 t, \quad \xi \equiv \epsilon(x - v_g t) \quad (59)$$

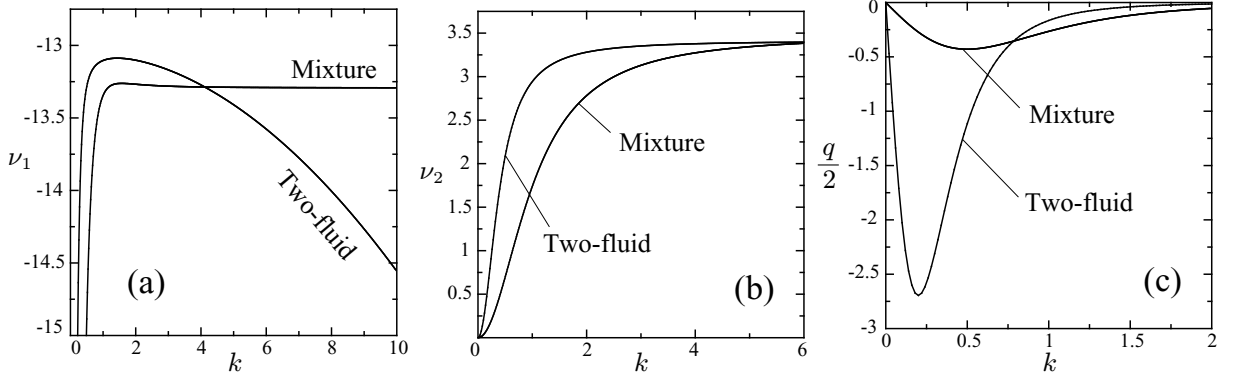


Fig. 2 The coefficients in the NLS equation versus the wavenumber  $k$ , where  $\alpha_0 = 0.05$ ,  $\epsilon = 0.07$ , and other physical quantities are the same as those used in Fig. 1. (a) Nonlinear coefficient  $\nu_1$ . (b) Dissipation coefficient  $\nu_2$ . (c) Dispersion coefficient  $q/2$ .

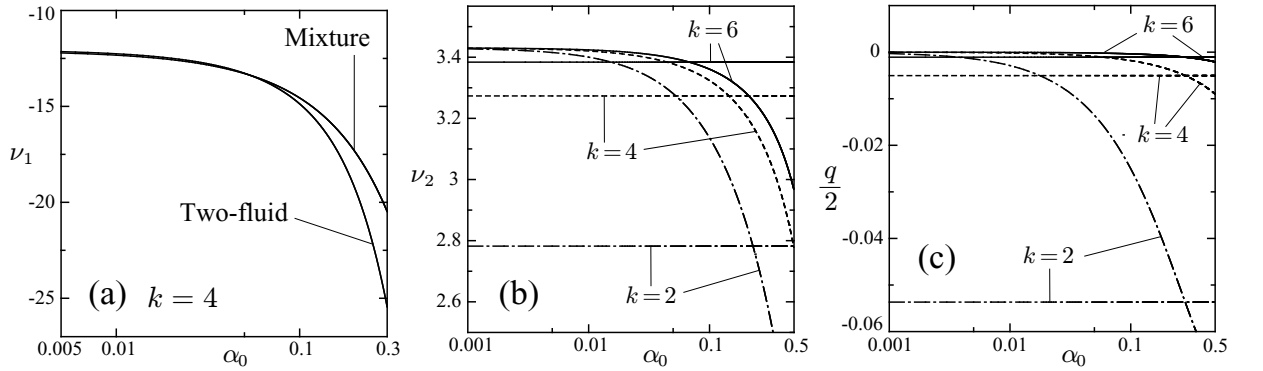


Fig. 3 The coefficients in the NLS equation versus the initial void fraction  $\alpha_0$ , where  $k$  is fixed and other quantities are the same as those used in Fig. 2. In (b) and (c),  $k$  is chosen as three values, and curves and straight lines correspond to coefficients derived from the two-fluid model and mixture model, respectively. (a)  $\nu_1$ . (b)  $\nu_2$ . (c)  $q/2$ .

が導かれる<sup>(10)</sup>. 散逸係数  $\nu_2$  は

$$\nu_2 = \frac{(4\mu + \Delta^3 V)\Omega^2}{2\Delta^2} \quad (60)$$

と与えられる. これを有次元量を用いて書き直すと

$$\nu_2 = \frac{\omega^{*2}}{\epsilon^2 \omega_B^{*2}} \left( \frac{2\mu^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2} \omega_B^*} + \frac{R_0^* \omega_B^*}{2c_{L0}^*} \right) \quad (61)$$

となり, 式 (56) を用いて表される分散係数  $q/2$  と同じく, 散逸係数  $\nu_2$  も  $\alpha_0$  に依存しない. 非線形係数  $\nu_1$  は

$$\nu_1 = \frac{1}{\partial D / \partial \Omega} \left( \frac{\Omega n_1}{3} - \frac{\Omega n_2}{3\alpha_0} + \frac{k n_3}{\Delta^2} - k^2 n_4 \right) \quad (62)$$

であり, 括弧内の諸量は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} n_1 &= 3[c_0(1 - b_1) - c_1 + 6b_1 - 10]\Omega \\ &\quad + [c_2(3 - b_1) + b_2(3c_0 - c_1 + 9b_1 - 18)]k, \\ n_2 &= -\alpha_0(c_1 b_2 + b_1 c_2)k, \quad n_3 = -9\alpha_0^2 \Delta^2 \Omega^2 / k, \\ n_4 &= c_0[2 + \Omega^2(5 + 18\alpha_0)] + 6\alpha_0 \Omega^2(1 + 3\alpha_0) \\ &\quad - 3 + 3\gamma p_{G0}(3\gamma - 1)(c_0 - 3\gamma/2 - 2)/\Delta^2, \\ c_0 &= -\frac{\Gamma}{12\Omega^2 k^2}, \quad c_3 = \Delta^2[c_0(4\Omega^2 - 1) + m], \\ c_1 &= -3\Delta^2 - \frac{c_3}{\alpha_0 v_p^2}, \quad c_2 = \frac{c_3}{(1 - \alpha_0)v_p}, \\ \Gamma &= 4(\Omega^2 + mk^2), \\ m &= \frac{5\Omega^2}{2} + 9\alpha_0 \Omega^2 + 1 + \frac{3\gamma(3\gamma - 1)}{2\Delta^2} p_{G0} \quad (63) \end{aligned}$$

## 5.2 二流体モデルに基づく係数<sup>(10)</sup>との比較

NLS 方程式の場合は, KdVB 方程式の場合と異なり,

二流体と混合体の両モデルから得られる係数の比較においては、初期ボイド率  $\alpha_0$  の依存性だけでなく、波数  $k$  の依存性も重要となる。

図 2 に、初期ボイド率を  $\alpha_0 = 0.05$  に固定した場合の非線形係数  $\nu_1$ 、散逸係数  $\nu_2$ 、分散係数  $q/2$  の波数  $k$  依存性を示す。散逸係数および分散係数のふるまいには、二流体と混合体の両モデルの間に定性的な差異はないといってよい。一方で、非線形係数のふるまいには、定性的な差異として、ともに  $k \approx 1$  で最大値をとった後に、 $k$  の増加に伴って、混合体モデルではほぼ一定値に漸近するのに対して、二流体モデルでは徐々に減少してゆくことが挙げられる。なお、 $k \lesssim 1$  の領域は、式 (46) で規定される短波を扱う本章の対象外である。また、二流体モデルの  $\nu_1$  は  $k \rightarrow \infty$  において  $-\infty$  に発散するため、 $k$  は有限でなければならない。

図 3 に、波数を  $k = 2, 4, 6$  の 3 通りに固定した場合の 3 つの係数の  $\alpha_0$  依存性を示す。ただし、 $\nu_1$  については、 $k$  の変化に伴って大きな差異があらわれないので  $k = 4$  の場合のみを載せる。式 (56) と (61) からわかるように、KdVB 方程式の場合 (図 1) と同じく、混合体モデルから導かれる散逸係数と分散係数は  $\alpha_0$  に依存しないが、非線形係数は  $\alpha_0$  に依存する。非線形係数については、 $\alpha_0$  が小さいときに、両モデルから得られる値の差が小さい。散逸係数と分散係数の値は、二流体モデルの場合は、 $\alpha_0$  が小さくなるにつれ、 $k$  によらない一定値に近づく。一方、混合体モデルの場合は、 $k$  が大きくなるにつれ増加し、二流体モデルの  $\alpha_0 \ll 1$  の値に近づいてゆく。したがって、 $k$  がある程度に大きければ、 $\alpha_0$  が小さいときに両モデルから得られる値の差が小さくなるといえる。さらに、 $\alpha_0$  が比較的大きな場合において、混合体モデルが適用できなくなることが示唆される。以上の議論において、NLS 方程式が導かれる状況は波の分散性が強い状況であり、無分散に対応する  $\alpha_0 \rightarrow 0$  の極限は含まれないことに注意を要する。これらの結果は、たとえば、超音波を用いた結石破碎技術などへの応用が期待される。

## 6. 結 論

気泡流中の圧力波伝播を記述する非線形波動方程式が、二流体モデルから導出される場合と混合体モデルから導出される場合とでどのように異なるかを明らかにした。前報<sup>(10)</sup>で二流体モデルから導かれた KdVB 方程式と NLS 方程式を、本報で混合体モデルから再導出し、とくにボイド率依存性に着目して、得られた方程式の係数の違いを考察した。主要な知見を要約する：

(i) KdVB 方程式と NLS 方程式の両方において、非

線形係数は、二流体と混合体のどちらのモデルを用いても初期ボイド率に依存するが、散逸係数と分散係数は、混合体モデルを用いた場合は、初期ボイド率に依存しない。

- (ii) KdVB 方程式において、二流体と混合体の両モデルから得られる 3 つの係数の値は、初期ボイド率が小さいときには一致するが、大きくなるにつれて離れてゆく。NLS 方程式においては、非線形係数では同種の性質があらわれるが、その差はあまり大きくない。散逸係数と分散係数でも、同種の性質があらわれるが、そのためには波数がある程度大きいことが必要である。二流体モデルは、混合体モデルに比べて、有効な初期ボイド率の範囲が広いことが示唆される。
- (iii) NLS 方程式の 3 つの係数の波数依存性を二流体と混合体の両モデルで比較すると、散逸係数と分散係数は、定量的な差異はあっても定性的な差異はない。一方、非線形係数は、波数が大きくなるにつれて、混合体モデルの場合には一定値に漸近するが、二流体モデルの場合には徐々に減少する。

さらに、van Wijngaarden の KdV 方程式<sup>(1)</sup>は、本研究の混合体モデルから導かれる KdV 方程式と、同一の問題設定のもとで一致し、また、本理論の二流体モデルから導かれる KdV 方程式<sup>(10)</sup>と、 $\alpha_0 \ll 1$  の条件下で一致することも示された。

気泡流中の圧力波の非線形波動方程式の導出において、これまで二流体モデルは使用されてこなかったが、上述の結果は、定量的のみならず定性的な差異をも与えるものであり、二流体モデルの精密性および有用性を示唆する。今後は、それぞれのモデル方程式が、波の伝播過程や具体的な波形などにどのような影響を与えるのかについてのより踏み込んだ考察が必要である。さらに、熱的効果、気泡間の相互作用、気泡分布の非一様性などを考慮した解析も展望である。

## 謝 辞

本研究は、平成 21 年度厚生労働省科学研究費補助金 (医療機器開発推進研究事業：ナノメディシン研究 (H19-nano-010))、および、平成 22 年度文部科学省科学研究費特別研究員奨励費 (223218) の補助を受けた。

## 文 献

- (1) van Wijngaarden, L., On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 33 (1968), pp. 465–474.
- (2) van Wijngaarden, L., One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles, *Annual*

- Review of Fluid Mechanics*, Vol. 4 (1972), pp. 369–396.
- (3) Noordzij, L. and van Wijngaarden, L., Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble/liquid mixtures, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 66 (1974), pp. 115–143.
  - (4) Kuznetsov, V. V., Nakoryakov, V. E., Pokusaev, B. G. and Shreiber, I. R., Propagation of perturbations in a gas-liquid mixture, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 85 (1978), pp. 85–96.
  - (5) Nigmatulin, R. I., *Dynamics of multiphase media* (1991), Hemisphere, New York.
  - (6) Gumerov, N. A., Quasi-monochromatic weakly non-linear waves in a low-dispersion bubble medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 56, No. 1 (1992), pp. 50–59.
  - (7) Akhatov, I., Parlitz, U. and Lauterborn, W., Towards a theory of self-organization phenomena in bubble-liquid mixtures, *Physical Review E*, Vol. 54, No. 5 (1996), pp. 4990–5003.
  - (8) Khismatullin, D. B. and Akhatov, I. S., Sound-ultrasound interaction in bubbly fluids: Theory and possible applications, *Physics of Fluids*, Vol. 13, No. 12 (2001), pp. 3582–3598.
  - (9) Gasenko, V. G. and Nakoryakov, V. E., Nonlinear three-wave equation for a polydisperse gas-liquid mixture, *Journal of Engineering Thermophysics*, Vol. 17, No. 3 (2008), pp. 158–165.
  - (10) Kanagawa, T., Yano, T., Watanabe, M. and Fujikawa, S., Unified theory based on parameter scaling for derivation of nonlinear wave equations in bubbly liquids, Vol. 5, No. 3, *Journal of Fluid Science and Technology* (2010), pp. 351–369.
  - (11) The Japan Society of Fluid Mechanics ed., *Multiphase Fluid Dynamics* (in Japanese), Fluid Mechanics Series, Vol. 2 (1991), p. 72, Asakura Shoten Co., Ltd.
  - (12) Egashira, R., Yano, T. and Fujikawa, S., Linear wave propagation of fast and slow modes in mixtures of liquid and gas bubbles, *Fluid Dynamics Research*, Vol. 34 (2004), pp. 317–334.
  - (13) Yano, T., Egashira, R. and Fujikawa, S., Linear analysis of dispersive waves in bubbly flows based on averaged equations, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 75, No. 10 (2006), 104401.
  - (14) Jones, A. V. and Prosperetti, A., On the suitability of first-order differential models for two-phase flow prediction, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 11, No. 2 (1985), pp. 133–148.
  - (15) Watanabe, M. and Prosperetti, A., Shock waves in dilute bubbly liquids, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 274 (1994), pp. 349–381.
  - (16) Caffisch, R. E., Miksis, M. J., Papanicolaou, G. C. and Ting, L., Effective equations for wave propagation in bubbly liquids, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 153 (1985), pp. 259–273.
  - (17) Zhang, D. Z. and Prosperetti, A., Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 267 (1994), pp. 185–219.
  - (18) Karpov, S., Prosperetti, A. and Ostrovsky, L., Nonlinear wave interactions in bubble layers, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 113, No. 3 (2003), pp. 1304–1316.
  - (19) Keller, J. B. and Kolodner, I. I., Damping of underwater explosion bubble oscillations, *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, No. 10 (1956), pp. 1152–1161.
  - (20) Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods* (1973), Wiley, New York.
  - (21) Jeffrey, A. and Kawahara, T., *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory* (1982), Pitman, London.