



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	統計力学に基づく労働市場の確率モデル
Author(s)	陳, 鶴
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	修士(情報科学)
Issue Date	2012-03-22
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/52281
Type	master thesis
File Information	Chen_MasterThesis2011.pdf



統計力学に基づく労働市場の確率モデル



陳 鶴

北海道大学 大学院情報科学研究科 複合情報学専攻 複雑系工学講座 混沌系工学研究室

平成 23 年度 修士論文

目次

1	はじめに	4
2	基本となるモデルシステム	5
2.1	システムに課す4つの条件	5
2.2	求職者の確率的意思決定	6
2.3	統計力学とのアナロジー	7
3	ミクロ変数の統計的性質	7
4	マクロ変数: 失業率	9
4.1	秩序変数	9
4.2	ビバレッジ曲線	10
5	労働市場の相転移	11
5.1	マクロ変数の質的变化	11
5.2	ランキング因子変化に対するシステムの応答	12
6	集学生確率に関する非線形写像	12
6.1	失業率と定員未充足率の関係	13
6.2	ランキング凍結条件	14
7	高温領域での定常分布	15
7.1	高温展開による近似解	15
7.1.1	第0近似	16
7.1.2	第1近似	16
7.1.3	高次の近似式	16
7.2	高温領域における失業率の解析解	18
8	企業によるセレクション	19
8.1	ランダム選考	19
8.2	学生のスコアに基づく選考	20
9	計算機実験	20
9.1	内定獲得率	21
9.2	ジニ係数に基づく「格差」の評価	21
9.2.1	ローレンツ曲線	21
9.2.2	ジニ係数	24
10	実データとの整合性	27
10.1	フィリップス曲線	27
10.2	Neugart モデル	27
10.2.1	非線形写像の導出	28
10.2.2	カオス・アトラクタとしてのフィリップス曲線	31
10.2.3	提案モデルとの結合系	31

10.2.4	典型的なダイナミックス	32
10.2.5	トラジェクトリとしてのフィリップス曲線	32
10.2.6	負のインフレ率	33
10.3	ミスマッチと U - Ω 曲線	33
11	おわりに	34

1 はじめに

現在の我が国では就職率(雇用率)の悪化が最も深刻な問題の一つとなっている。言うまでもなく、労働は人間の基本的活動であり、その対価として人々は賃金を受け取り、それらの相互交換によって経済市場は形成される。一方、生産/サービス活動を行う企業は、自社製品やサービスを効率的に生み出すために労働者を必要とし、その労働対価として労働者に賃金を支払う。

従って、労働は雇用者(企業)と被雇用者(労働者)間の極めて「局所的」営みのようにも思えるが、そうではない。事実、景気が悪化することで十分な雇用が確保できない状況では、失業者が増加し、その結果、国や地方自治体の税収も悪化する。そうした状況下にある国家は金利を大幅に下げ、大量の国債を発行し、それを売却することで(場合によっては「日銀買い取り」という荒技を使う¹⁾、不足した税収を国家の「借金」として補うことになり、これが国としての格付けを落とすばかりか、場合によっては「国家的経営破綻」につながるリスクを生むことになる。また、大学をはじめとする研究教育機関に目を向ければ、就職状況の悪化から学生/大学院生は就職活動に多くの時間を割くようになり、結果として卒業研究等がおろそかになることで、卒業(修了)生の「質の保証」が困難となり、それが学術分野全体の活動停滞につながっている。これは、我が国が「科学技術立国」であるとするならば憂うべき事態である。

このように、労働市場における雇用者と被雇用者の局所関係 — 相互作用 — は大域的に「国家というシステム」の振る舞いに影響を与え、逆に国家の経営状態や政府の施策(所謂「ケインジアン」の意味での)政策が労働者個人や企業にフィードバックされる。つまり、労働市場はミクロなエージェント「労働者」からマクロな「国家」の間を様々な時間/空間的スケールをもつシステムが相互作用を介して共存する「階層性を有する複雑多体系」の典型例なのである。

しかし、その一方で、労働市場は詳細にみると国や地域、時代背景に依存するため、その研究はともすれば、個別事例を列挙した膨大な詳細データのコレクションとその整理/解釈になりかねない。そこで本研究では、このような労働市場の研究に数理科学的視点を持ち込みたい。つまり、国や地域、時代背景などの詳細には依らない市場の「普遍的性質」に着目し、それを単純な数理モデルから演繹的に導きだすことを試みる。

労働市場の数理モデルは既に様々な観点/立場から提案されてはいるが[1, 2, 3, 4, 5]、ミクロな視点から統計力学の概念を用いて構築された例は本研究以外に今までのところ無い。特に本稿では、物理学において「相転移」と呼ばれる多体系の協力現象が労働市場のある一側面を説明しうることを計算機実験や簡単な解析計算に基づく推論によって示す。

本稿の構成は以下の通りである。次の第2節では大卒労働市場を解析していくにあたって基本的な数理モデルを導入する。求職者のミクロな意思決定(企業の「集学生確率」)はエネルギー関数に基づくギブス分布によって定義される。この統計力学との関係から、未就職率(失業率)等のシステムのマクロ変数が求職者群のミクロな意思決定の結果から算出されることになる。その詳細は第3節で説明されることになる。続く第4節では、システムの振る舞いをマクロに記述する秩序変数を導入し、労働経済学の分野で知られる「ビバレッジ曲線」を描くことで、我々のモデルシステムの振る舞いを定量的に調べる。第5節では、秩序変数としての就職率がシステムパラメータ — ランキング因子の大きさ — の変化に対して質的变化する「相転移現象」が、我々の確率的労働市場においても生じうることを示し、その相転移点近傍で、システムのランキング因子変化に対する応答を調べることにより、相転移点を特定する。第6節では、第2節で導入する時間依存した集学生確

¹ 実際には、民間金融機関が一旦購入した長期国債を市場を介して「ワンクッションおいた後に」日銀が買い取ること、財政法の定めた禁止事項を巧妙に「くぐり抜ける」ことができる。この場合、購入元の金融機関を介して国民に一定量の通貨が流れるため、デフレを解消できる可能性もあるが、購入額によっては逆に悪性インフレを招く場合もあり、その「さじ加減」が難しいと考えられている。

率が、ある条件下で非線形写像としてみなすことができることを示す。この視点によって、企業のランキングが年度をまたいで「凍結する」条件等を導くことができる。第7節では、写像として与えられる集学生確率をパラメータの「高温極限」で展開することで、集学生確率をコンパクトに求める方法を提案する。これによって「高温領域」での失業率が陽に記述されることになる。第8節では、企業による学生の選抜を「ランダム選抜」から「学生ランキング」、すなわち、学生の成績に基づく選抜へと拡張する。これにより、特定学生の「一人勝ち」の状況が生じうることになるが、そうした就職内定数に関する「格差」を議論するため、ジニ係数による格差評価を行う。第10節では、前節までに得られた数理モデルからの結果を実データと比較検討する。具体的には、フィリップス曲線、および、ミスマッチ度（失業率と定員未充足率の関係）を数理モデルの数値計算から求め、それに対応する実データからの統計量と比較する。これら双方間のギャップの要因について議論する。最終の第11節は簡単なまとめである。

2 基本となるモデルシステム

この節では、我々が本論文で扱う労働市場の数理モデルを導入し、そのモデルと統計力学との関係を明らかにする。この際、システムを構成する N 人の労働者（求職者）をラベル $i = 1, \dots, N$ で区別し、 K 社の企業をラベル $k = 1, \dots, K$ で表すことにしよう。

2.1 システムに課す4つの条件

システムを構成する N 人の学生を添字 $i = 1, \dots, N$ で区別し、 K 社の企業を添字 $k = 1, \dots, K$ で表す。このとき、以下で構築する「人工労働市場」のジョブマッチング・プロセスに次の簡素な条件のみを課す。

(i) 募集定員

各企業 ($k = 1, \dots, K$) は募集定員 $v_k^* \in \mathbb{Z}$ を定め、この値を年次ごとに変動させない。

(ii) 局所的ミスマッチの影響

各年度で定員を大きく越える/下回るエントリーシートを獲得した企業は次年度の集学生能力が低下傾向にある。

(iii) 企業ランキング

各企業は陽な「ランク付け」がされ、学生が企業選択の際に共有する情報となる。

(iv) エントロピー最大化と多様性

学生の企業選択は集学生確率に関し、条件付き情報論的エントロピー最大化の意味で多様性を持つ。

このうちの条件 (i) 募集定員から、総求人数 V は

$$V = \sum_{k=1}^K v_k^* \quad (1)$$

で与えられる。従って、求人倍率を α で定義すれば、求人数 V と求職者数 N の間には α を比例定数として

$$V = \alpha N \quad (2)$$

なる関係がある。よって、 $\alpha > 1$ の場合には「売り手市場」、逆に $\alpha < 1$ の場合には「買い手市場」となる。そこで、 α を労働市場を特徴つけるシステム・パラメータの一つとみなす。

次に集学生能力を決定する「エネルギー関数」を導入する。前掲条件 (ii) **局所的ミスマッチの影響**を考慮し、各企業 k ($k = 1, 2, \dots, K$) に対して「局所ミスマッチ規準」を次式で定義する。

$$h_k(t) = \frac{1}{V} |v_k^* - v_k(t)| = \frac{1}{\alpha N} |v_k^* - v_k(t)| \quad (3)$$

ここで、 $v_k(t)$ は年度 t において、企業 k を希望する学生数である。 $h_k(t)$ が大きいほど、当該年次 t における企業と学生間のミスマッチ度が大きい。また、前掲条件 (iii) **企業ランキング**に基づき、 ϵ_k を会社 k のランキング因子とし、これが大きいほどランキング上位であるとする。ここでは具体的に

$$\epsilon_k = 1 + \frac{k}{K} \quad (4)$$

と選ぶ。この場合、企業 $k = K$ が最も「人気企業」となり、企業 $k = 1$ が最も「不人気」となる。

このとき、企業ごとに定義される労働市場のエネルギー関数は次式で与えられる。

$$E(\epsilon_k, h_k; t) \equiv -\gamma \log \epsilon_k + \sum_{l=1}^{\tau} \beta_l h_k(t-l) \quad (5)$$

このエネルギー関数に基づく学生の振る舞いは次のように考えることができる。エネルギー関数の第 1 項から、学生は比較的ランキングの高い企業にエントリーシートを提出するが、第 2 項により、過去 τ 年度に渡り定員よりもはるかに多くのエントリーシートを集めた企業に対しては、 $\tau + 1$ 年度の人気は下降する。従って、この市場の履歴に依存する第 2 項は第 1 項に対する「負のフィードバック」となる。本論文では簡単のため、市場履歴は直近のみ考慮する ($\beta_1 = \beta, \beta_2 = \dots = \beta_\tau = 0$)。

2.2 求職者の確率的意思決定

労働市場を構成する学生の意思決定は「多様なもの」であるべきである。つまり、全員が同じ選択を起こす可能性は低いと考える。そこで、前掲条件 (iv) **エントロピー最大化と多様性**より、この多様性の指標として情報論的エントロピー $H = -\sum_{k=1}^K P_k(t) \log P_k(t)$ を考え、これを確率分布の規格化条件と $\sum_{k=1}^K P_k(t) E(\epsilon_k, h_k; t) = E$ 下で最大化する確率分布:

$$P_k(t) = \frac{\exp[-E(\epsilon_k, h_k; t)]}{\sum_{k=1}^K \exp[-E(\epsilon_k, h_k; t)]} \quad (6)$$

を採用する。ここで、 $\gamma = \beta = 0$ で等確率 $P_k(t) = 1/K$ での「ランダム選択」となる。

なお、上記の最適化問題は λ_1, λ_2 をラグランジュ未定係数とした次の汎関数の最大化で定義される。

$$f = -\sum_{k=1}^K P_k(t) \log P_k(t) + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^K P_k(t) - 1 \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^K P_k(t) E(\epsilon_k, h_k; t) - E \right) \quad (7)$$

まず、 $P_k(t)$ で変分をとると

$$\log P_k(t) + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 E(\epsilon_k, h_k; t) = 0 \quad (8)$$

すなわち

$$P_k(t) = \exp[-1 + \lambda_1 + \lambda_2 E(\epsilon_k, h_k; t)] \quad (9)$$

が得られるが, λ_1 に関する変分より, $\sum_{k=1}^K P_k(t) = 1$ に上式を代入して, 規格化因子として $e^{-1+\lambda_1} = \{\sum_{k=1}^K e^{\lambda_2 E(\epsilon_k, h_k; t)}\}^{-1}$ に気づけば

$$P_k(t) = \frac{\exp[\lambda_2 E(\epsilon_k, h_k; t)]}{\sum_{k=1}^K \exp[\lambda_2 E(\epsilon_k, h_k; t)]} \quad (10)$$

となる. そこで, 逆温度 $-\lambda_2 = 1/T$ を 1 とおけば (6) 式が得られることになる.

2.3 統計力学とのアナロジー

以上より, 統計力学におけるギブス・ボルツマン分布とのアナロジーを考えることができる. ここでは, その関係性を詳しくみていくことで, 集学生確率の性質についての理解を深めていくことにする.

前節までの議論から, 年次 t において企業 k が求職者からの応募 (エントリシート) を受ける確率 $P_k(t)$ を次式で与えられる.

$$P_k(t) = \frac{\epsilon_k}{Z} \exp[-H_k(\beta_k, h_k)] \equiv \frac{\exp[-E(\epsilon_k, H_k(\beta_k, h_k))]}{Z} \quad (11)$$

ここに, $Z \equiv \sum_{k=1}^K \exp[-E(\epsilon_k, H_k(\beta_k, h_k))]$ は確率 (11) の規格化定数である. また, τ 次元ベクトル: $\beta_k \equiv (\beta_k(t-1), \dots, \beta_k(t-\tau))$, $h_k \equiv (h_k(t-1), \dots, h_k(t-\tau))$ として, 考える労働市場の過去 τ 年度まで遡った「履歴」を導入した. このとき, (11) 式右辺に現れる H_k はこれらの履歴ベクトルの内積: $H_k(\beta_k, h_k) \equiv \beta_k \cdot h_k$ で定義される. 従って, (11) 式の指数関数に現れる量: $E(\epsilon_k, H_k(\beta_k, h_k))$ を企業ごとに定義される労働市場の「エネルギー関数」とみなせば, これは具体的に

$$E(\epsilon_k, H_k(\beta_k, h_k)) \equiv -\gamma \log \epsilon_k + \sum_{l=1}^{\tau} \beta_l h_k(t-l) \quad (12)$$

で与えられることになる.

このエネルギー関数に基づく求職者の振る舞いは次のように考えることができる. エネルギー関数の第 1 項から, 求職者は比較的ランキングの高い企業にエントリシートを提出するが, エネルギー関数の第 2 項により, 過去 τ 年度に渡り定員よりもはるかに多くのエントリシートを集めた企業に対しては, $\tau+1$ 年度の人気は下降することになる. 従って, この市場の履歴に依存する第 2 項は第 1 項に対する「負のフィードバック」となる. 求職者が応募を検討中の企業の集客実績をどの程度まで考慮するのかは, パラメータ γ に対する β_l ($l = 1, \dots, \tau$) の相対的な大きさに依存する. 本稿では簡単のため, 市場履歴は直近のみ考慮される ($\beta_1 = \beta, \beta_2 = \dots = \beta_\tau = 0$) とする. これら β, γ は労働市場をマクロに特徴つけるパラメータとなる. 図 1 にランキング一位企業, 最下位企業の集求職者数確率 $P_{k=K}, P_{k=1}$ の γ 依存性を $\beta = 0$, $K = 50$, および, $K = 1000$ に対してプロットする. この図より, パラメータ β の増加につれ, $k = K$ のランキング一位企業がマクロオーダの求職者数を独占するようになり, この傾向は全企業数増加につれて顕著になることがわかる.

3 ミクロ変数の統計的性質

ここでは, 先に導入したミクロ変数の統計的性質について簡単に見ておく. そのために, 確率変数 $A(t)$ の分布を次のように長期間にわたる (11) 式に基づく試行の結果得られる「ヒストグラム」

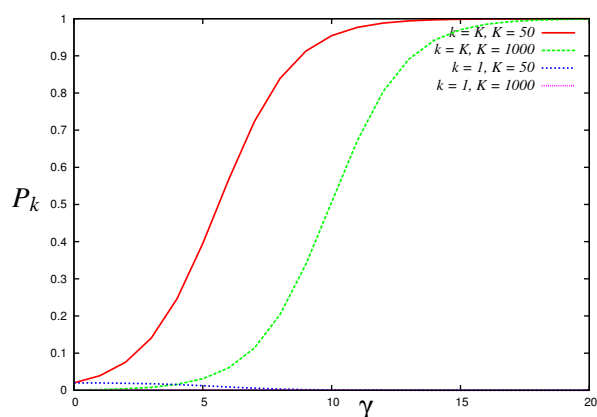


図 1: ランキング一位企業, 最下位企業の集求職者数確率 $P_{k=K}$, $P_{k=1}$ の γ 依存性. 簡単のため $\beta = 0$ としており, 企業数 $K = 50, 1000$ の場合につきプロットしてある.

として定義する.

$$P(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \delta_{A(t), A} \quad (13)$$

ここで, $\delta_{a,b}$ はクロネッカ・デルタである. 従って, 例えば, 企業 k が獲得するエントリーシートの分布は (13) 式において $A(t) = v_k(t)$ とすればよい.

さて, 各求職者がただ一社のみにエントリーシートを提出するとすれば, 企業 k は平均 $NP_k(t)$ ものシートを受け取ることになる². ここでは, これを拡張し, 各求職者は平均 $a (\geq 1)$ 社に対し, エントリーシートを提出するものとして議論を進める. つまり, 企業 k は平均 $aNP_k(t)$ ものエントリーシートを受け取る. 企業によってはこの平均から大きく下回る場合や大きく上回る場合があり, それが $P(a_{ik})$ で与えられることになる. 図 2 にその結果を載せよう. 以下では, この a をシステムを特徴

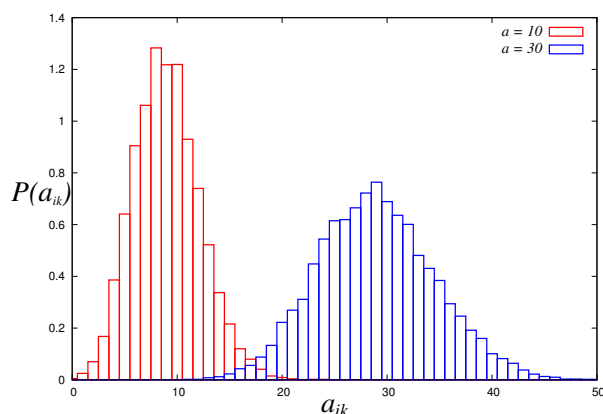


図 2: a_{ik} の従う確率分布. システムサイズを $N = 10000$, $K = 1000$ に選び, 各企業の募集人員を簡単のため $v_k^* = v = 30$, つまり, 求人倍率を $\alpha = 3$ とした. (13) 式を計算するにあたり, 試行回数を $T = 10^4$ と選んである. β, γ は $\beta = \gamma = 1$ とし, $P(a_{ik})$ を $a = 10, 30$ に対してプロットしてある.

² 我が国の高等学校卒業予定者の就職活動においては, ある一定期間内に 1 社のみしかエントリーできない制約がある (平成 23 年 2 月 16 日付 朝日新聞 朝刊より).

つけるパラメータの一つとして議論を進める。

次に企業 k が受け取るエントリーシート数の分布 $P(v_k)$ を考える。結果を図 3 に載せる。この図

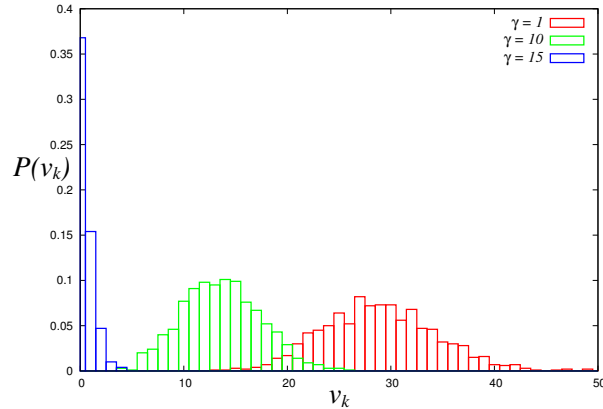


図 3: 獲得エントリーシート分布 $P(v_k)$. システムサイズを $N = 10000, K = 1000$ に選び, 各企業の募集人員を簡単のため $v_k^* = v = 30$, つまり, 求人倍率を $\alpha = 3$ とした. (13) 式を計算するにあたり, 試行回数を $T = 10^4$ と選んである. $\beta = 1$ を固定し, γ を $\gamma = 1, 10, 15$ に変えてプロットした.

より, 市場の履歴効果が有効に働く $\beta = \gamma = 1$ の場合には, 分布は比較的大きな v_k のまわりに広がるが, γ を β に対して $\gamma \gg \beta$ となるよう大きくし, 相対的にランキングの効果を増加させることで, ピークは次第にゼロへと移動する. これは, 一社 (少数社) のみが求職者を独占している状態であり, 所謂「ミスマッチ」の状況に対応している. このようなマイクロ変数の振る舞いがマクロにみてシステム全体にいかなる影響を与えるか, 次節以降で詳しくみて行こう.

4 マクロ変数: 失業率

前節で議論したマイクロ変数とその振る舞いをマクロな視点で考察するため, ここでは失業率をマクロ変数とし, その時間変化 U_t をマイクロ変数 $s_i(t)$ から次式を用いて算出する.

$$U_t = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \Theta[s_i(t)]}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{s_i(t), 0} \quad (14)$$

ここでは年次 t における失業率を「求職者全体 N に対する一社からも内定を受けられなかった ($s_i(t) = 0$) 求職者の割合」で定義したことに注意しよう.

4.1 秩序変数

システムのマクロな性質を議論するため, (14) 式で定義された年次毎の失業率 U_t の長時間平均を考え, それをシステムの「秩序変数」として次式で定義する.

$$U = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} U_t \quad (15)$$

従って, 以下では上式 (15) で定義される失業率 U の各種パラメータ依存性を調べて行くことになる.

4.2 ビバレッジ曲線

図4に就職率 $1-U$ の求人倍率 α 依存性をいくつかのパラメータセット $(\gamma, \beta) = (1, 1), (1, 5), (5, 1)$ に対してプロットする. この関係は労働経済学において**ビバレッジ曲線 (UV 曲線)** と呼ばれるも

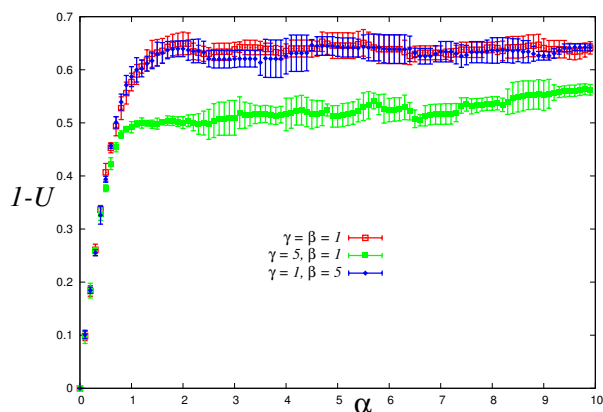


図 4: 就職率 $1-U$ の求人倍率 α 依存性. 各種パラメータを $(\gamma, \beta) = (1, 1), (1, 5), (5, 1)$ と選んだ. システムサイズを $N = 500, K = 50$ に選び, エラーバーは 5 回の独立試行から算出した.

のである³. この図より, 就職率は常に 0.7 より下回ることが見てとれるが, この結果は各求職者が平均して 1 回だけエントリーシートを提出する場合である. 従って, 複数のシートを提出できる状況下では結果は異なる可能性がある. これをみるために, 求職者が平均して $a = 1, 2, 3$ 回のエントリーを行う場合のビバレッジ曲線を図 5 に載せよう. この図からわかるように, a の増加とともに就職

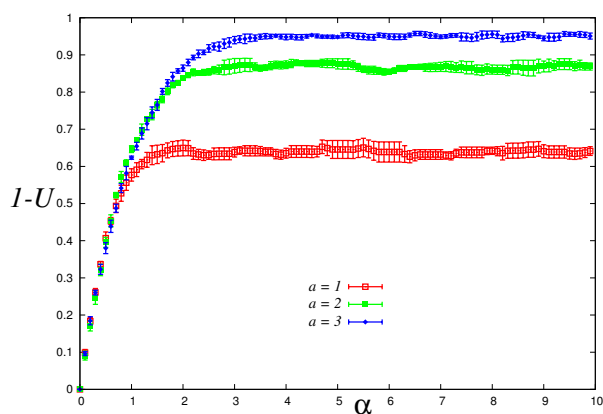


図 5: 就職率 $1-U$ の求人倍率 α 依存性. 各労働者が提出するエントリーシートの平均を $a = 1, 2$, および, $a = 3$ と選んだ. 各種パラメータを $\gamma = \beta = 1$, システムサイズを $N = 500, K = 50$, エラーバーは 5 回の独立試行によって算出している.

率 $1-U$ は 1 へと近づき, 「完全就職」が達成される.

³ この分野の慣習に従えば, ビバレッジ曲線は失業率 U に対して求人数 V をプロットしたものとなるが, (2) 式より, 本稿での曲線定義でもよいことがわかる.

5 労働市場の相転移

次に市場履歴効果を $\beta = 1$ に固定した場合に関し、就職率 $1 - U$ のランキング γ 依存性をいくつかの a の値 ($a = 1, 2, 3$, および, $a = 10$) に対してプロットし、その結果を図 6, に載せる. この図 6 の上図では求人倍率を $\alpha = 1$, 下図では $\alpha = 10$ に選んである.

5.1 マクロ変数の質的变化

求人倍率が極めて高い (下図: $\alpha = 10$) 「売り手市場」の場合, 平均エントリーシート提出数 a の増加とともに就職率が 1 へ近づき, 「完全就職」の状態が達成される. しかし, 求職者がランキング重視の戦略に基づいて企業を選択しはじめると, 完全就職状態はもはや持続することはできず, $\gamma \simeq 10 \equiv \gamma_c$ 近傍では「完全失業」状態へと変化してしまうことがわかる. また, 注目すべきは, この転移点前後で, 平均エントリー数 a に対する就職率の順序が逆転する点である. つまり, 領域 $\gamma < \gamma_c$ では平均エントリー数 a が多いほど就職率も高くなる一方, 領域 $\gamma > \gamma_c$ ではこの順序関係が逆転し, 平均エントリー数 a が多いほど失業率が悪化する. 従って, 労働市場をマクロにみれば, 求職者がランキングに重きを置いて行動する場合「できるだけ多くの企業にエントリーせよ」という戦略は逆に失業率を悪化させる要因となってしまうことになる. この現象をもう少し詳しくみていくた

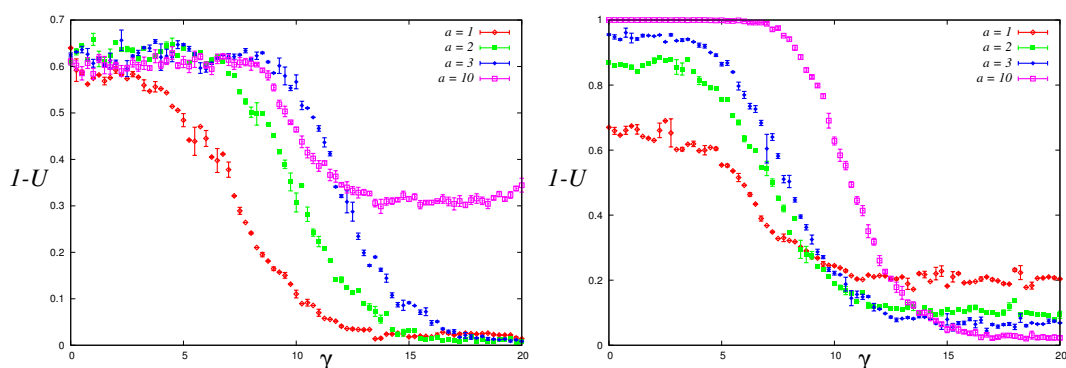


図 6: 就職率 $1 - U$ の γ 依存性 ($\beta = 1$). 提出する平均エントリー数を $a = 1, 2, 3, 10$ と変えてプロット. 左図では求人倍率を $\alpha = 1$, 右図では $\alpha = 10$ に選んである. システムサイズを $N = 500$, $K = 50$, エラーバーは 5 回の独立試行によって算出している.

め, $\alpha = a = 1$ の場合に対し, $\gamma \rightarrow \infty$ の極限を考えてみよう. この極限では, 全ての求職者は自分のエントリーシートを「一番人気」の企業 ($k = K$) に提出する. その結果, およそ $v_K^* = v = 10$ 人の求職者は内定を得ることができるが, 残り大多数は内定を得られず, 結果として「残留就職率」は $1 - U \simeq v/N = 10/500 = 0.02$ 程度と見積もることができる. これをミクロ変数からみると, 選別された v 人の求職者のみ ($v \ll N$) が $\Theta(s_i) = 1$ であり, 残り $(N - v)$ 人が $\Theta(s_i) = 0$ となる. このミクロ状態に対し, 就職率は磁性体における「自発磁化」

$$1 - U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \Theta(s_i) \rangle \quad (16)$$

との類推から, $N \rightarrow \infty$ の極限において $1 - U \simeq (1/N) \times v = v/N = 0$ となる. これは, 労働市場は「対称性の低い相」にあると言える. 一方の極限 $\gamma \rightarrow 0$ では, 求職者がほぼランダムにエントリーシートの提出先を選択するため, 結果としてマクロオーダー $\sim N \langle \Theta(s_i) \rangle$ の求職者が内定を獲得する

ことができる．結果として $1 - U \simeq (1/N) \times N \langle \Theta(s_i) \rangle = \langle \Theta(s_i) \rangle > 0$ となり，このとき労働市場は「対称性の高い相」にあると言える．このように，労働市場は転移点 $\gamma = \gamma_c$ をまたいで対称性の破れ（低下）を伴う相転移（二次転移）を起こすことがわかる．この種の現象を本研究では**労働市場の相転移**と呼ぶことにする．

5.2 ランキング因子変化に対するシステムの応答

転移点 γ_c の位置を評価するため，磁性体における「帯磁率」との類推から，システムのランキング因子 γ に対する応答指標を

$$\chi \equiv -\frac{\partial(1-U)}{\partial\gamma} = \frac{\partial U}{\partial\gamma} \quad (17)$$

を介して調べよう．就職率が転移点近傍で， $\zeta (< 1)$ を指数として $1 - U \sim (\gamma_c - \gamma)^\zeta$ でゼロになるのであれば，指標 χ はこの点近傍で $\chi \sim (\gamma_c - \gamma)^{-(1-\zeta)}$ のように発散する．得られた結果を図 7 に載せよう．この図より，指標 χ は $\gamma_c \simeq 10$ にピークを持つことがわかる．システムサイズが有限

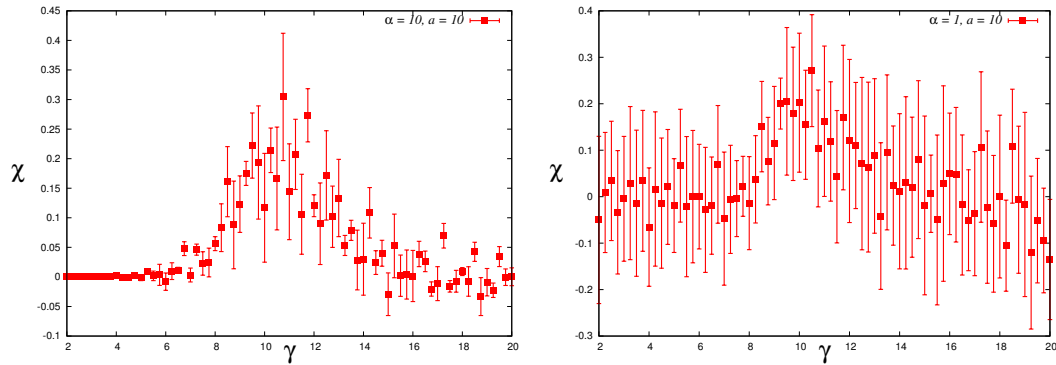


図 7: 指標 χ の γ 依存性．各種パラメータは $\alpha = a = 10$ と選んだ．システムサイズを $N = 500, K = 50$ ，エラーバーは 20 回の独立試行により算出した．

$N = 500, K = 50$ のため，ピーク（発散）は鋭くないが， $\gamma = \gamma_c$ での相転移を示唆する結果となっている．

6 集学生確率に関する非線形写像

各企業の定員数が一定値 v_k^* であるとすれば， $V = \sum_{k=1}^K v_k^* = K v_k^*$ となる．また，求人倍率の定義は $V = \alpha N$ であったことを思い出すと $\beta v_k^*/V = \beta/K$ であり， $(\beta/V)v_k(t-1) = (\beta/\alpha)(v_k(t-1)/N) = (\beta/\alpha)P_k(t-1)$ となる．ここで，量 $NP_k, NP_k(1-P_k)$ が十分に大きい場合，確率変数 $v_k(t)$ の従う 2 項分布:

$$P(v_k) = {}_N C_{v_k} P_k^{v_k} (1-P_k)^{N-v_k} \quad (18)$$

は平均 NP_k ，分散 $NP_k(1-P_k)$ の正規分布で良く近似できる．つまり， $\mathcal{N}(0, 1)$ を標準正規分布と定義すれば

$$v_k(t) = NP_k + \sqrt{NP_k(1-P_k)} \mathcal{N}(0, 1) \quad (19)$$

である。そこで、この両辺を N で割ると直ちに

$$v_k(t)/N = P_k + \sqrt{P_k(1-P_k)/N} \mathcal{N}(0,1) \quad (20)$$

が得られるが、熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ において上式右辺第 2 項が無視されて

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{v_k(t)}{N} = P_k(t) \quad (21)$$

なることに注意されたい。

従って、 $P_k(t)$ を次のように書き直すことができる。

$$P_k(t) = \frac{\exp \left[\gamma \log \left(1 + \frac{k}{K} \right) - \frac{\beta}{\alpha} |P_k(t-1) - \frac{\alpha}{K}| \right]}{\sum_{k=1}^K \exp \left[\gamma \log \left(1 + \frac{k}{K} \right) - \frac{\beta}{\alpha} |P_k(t-1) - \frac{\alpha}{K}| \right]} \quad (22)$$

これは $P_k(t)$ に関する漸化式である。従って、例えば、初期条件: $P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_K(0) = 1/K$ からスタートし、(22) 式を逐次的に繰り返すことで、 $P_k(t)$ の時間発展 $P_k(0) \rightarrow P_k(1) \rightarrow \dots \rightarrow P_k(t) \rightarrow \dots$ を調べることができる。いくつかの場合に計算を行うと図 8 のようになる。 β が比較

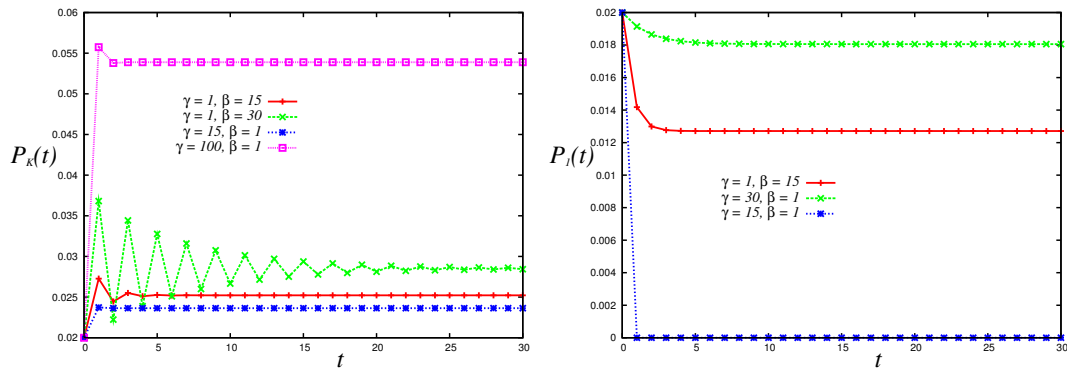


図 8: 最人気企業 (左) と最不人気企業 (右) の集学生確率の時間発展。

的大きな場合、前述のフィードバック効果により、 $P_K(t)$ が周期的に上下する様子が見てとれる。また、 $P_1(t) < \epsilon \equiv 10^{-5}$ となった時点のある種の「倒産」として定義すると、 $\gamma \simeq 10.3 \equiv \gamma_c$ まではそのような倒産は起こらない。しかし、 $\gamma = \gamma_c$ を越えた瞬間に倒産企業が出現する。

6.1 失業率と定員未充足率の関係

本稿では簡単のため、複数の内定を受けた求職者は最もランクの高い企業に就職すると考える。すなわち、求職者 i の選ぶ企業 $\tilde{l}_i$ は

$$\tilde{l}_i = \operatorname{argmax}_l \delta_{s_{il},1} = \operatorname{argmax}_l (1 + l/K) \delta_{s_{il},1} \quad (23)$$

で与えられる。従って、企業 k が受け入れる社員数 m_k はその定義から $m_k = \sum_{i=1}^N s_{ik} \delta_{k,\tilde{l}_i}$ で与えられるから、定員未充足率 (「大域的ミスマッチ規準」) は

$$\Omega = (1/V) \sum_{k=1}^K (v_k^* - m_k) = 1 - (1/V) \sum_{k=1}^K m_k \quad (24)$$

で定義される。一方、全ての企業が受け入れた新入社員数は、全ての求職者数から一社からも内定を受けることができなかった求職者を差し引いたものであるから

$$\sum_{k=1}^K m_k = N - N \sum_{i=1}^N \delta_{s_i,0} = N(1 - U) \quad (25)$$

で与えられる。従って、これら 2 式 (24)(25) より、 $\sum_{k=1}^K m_k$ を消去すると、失業率 U と定員未充足率 Ω の間には次式:

$$U = \alpha\Omega + 1 - \alpha \quad (26)$$

が成り立つことがわかる。ここで注意すべきは、この実際の実現値がこの直線上 (26) のどこに位置するかは Ω の値によって異なり、この値は求人倍率 α 以外のパラメータ β, γ 等に依存して変化する点である⁴(図 9 参照)。

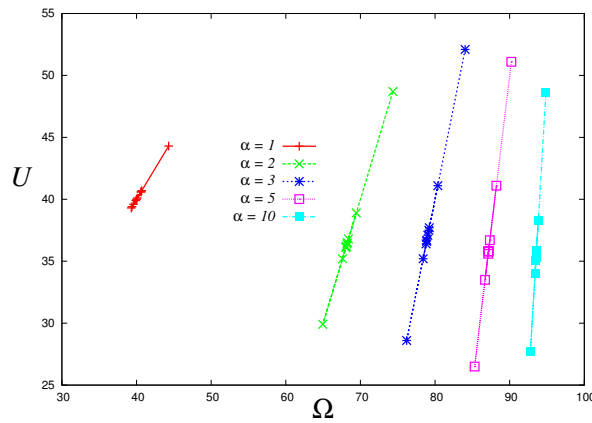


図 9: $\gamma = \beta = a = 1$ の場合の失業率 U と定員未従属率 U の関係。

6.2 ランキング凍結条件

連続する任意の 2 時刻間で m だけランクが離れた企業間の $P_k(t)$ の大きさに関する順位が逆転する条件を考える。以下の 3 つの場合わけが必要となる。

- (i) $P_K(t) > P_{K-m}(t), P_K(t), P_{K-m}(t) > \alpha/K$ の場合: $P_k(t)$ の分母の規格化定数は企業 $K, K-m$ の両者で共通であること、指数関数の単調増加性から、指数関数の肩の大小関係のみを議論すればよい。両者の指数関数の肩の差をとると、時刻 $t+1$ に両者の関係が逆転するためには $\gamma \log(2K/(2K-m)) - (\beta/\alpha)(P_K(t) - P_{K-m}(t)) < 0$, すなわち、時刻 t において $P_K(t) - P_{K-m}(t) > (\gamma\alpha/\beta) \log(2K/(2K-m))$ が成り立つことが必要である。従って、逆転が不可能な条件は $1 = \max\{P_K(t) - P_{K-m}(t)\} > (\gamma\alpha/\beta) \log(2K/(2K-m))$ であるから、企業 $K, K-m$ 間の順位が「凍結」する条件は次式で与えられる。

$$\frac{\gamma\alpha}{\beta} \log\left(\frac{2K}{2K-m}\right) > 1 \quad (27)$$

⁴ ここでは職を持ちつつ就職活動を行う者を考慮していない。大卒労働市場に限り、この扱いは妥当であろう。

- (ii) $P_K(t) > P_{K-m}(t)$, $P_K(t) > \alpha/K$, $P_{K-m}(t) < \alpha/K$ の場合: 場合 (i) と同様にして $\gamma \log(2K/(2K-m)) - (\beta/\alpha)(P_K(t) + P_{K-m}(t)) + (2\beta/\alpha) < 0$ が逆転条件である. よって, 逆転が起こらない条件は $(\gamma\alpha/\beta) \log(2K/(2K-m)) > 0$ であるが, これは常に成り立つので, 結局, 場合 (ii) で逆転は起こらない.
- (iii) $P_K(t) > P_{K-m}(t)$, $P_K(t), P_{K-m}(t) < \alpha/K$ の場合: (i)(ii) と同様にして $\gamma \log(2K/(2K-m)) + (\beta/\alpha)(P_K(t) - P_{K-m}(t)) < 0$ が逆転可能な条件. しかし, これでは明らかに $P_K(t) - P_{K-m}(t) < -(\gamma\alpha/\beta) \log(2K/(2K-m)) < 0$ となってしまう, これは当初の仮定 $P_K(t) - P_{K-m}(t) > 0$ に反する. 従って, この (iii) の場合でも逆転は起こらない.

以上をまとめると, (i) の場合の (27) 式が求める順位凍結条件となる. ここで, $\beta \rightarrow \infty$ ととり, 履歴の依存度を増すとの条件は満たされやすくなり, また, $m(\geq 1)$ の値が小さければ小さいほど満たされやすくなる. 逆に, ランキング因子の重要度 γ や求人倍率 α が大きな状況での逆転は起こりづらい. 逆転可能/不可能領域を分断する境界線の例を図に示す.

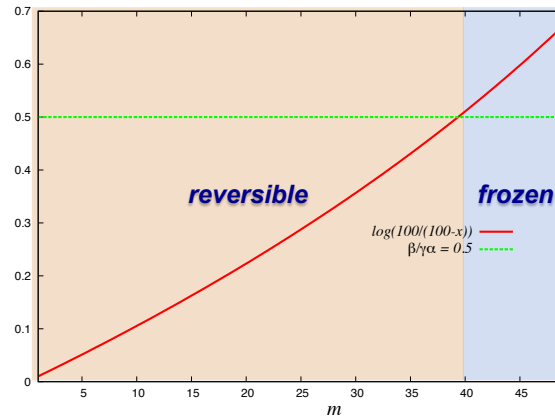


図 10: ランキング逆転可能 (reversible)/不可能 (凍結, frozen) 領域の分断線: $\frac{\gamma\alpha}{\beta} \log\left(\frac{2K}{2K-m}\right) = 1$.

7 高温領域での定常分布

前節で見たように $P_k(t)$ に関する非線形写像の定常状態 (アトラクタ) を有限サイズの計算機実験によって調べることはさほど難しくない. しかし, 解析的定常解を求めることはその非線形性から困難である. そこで, ここでは考えるシステムの「ノイズ」が強い, 高温領域: $\gamma, \beta/\alpha \ll 1$ の場合に関し⁵, 定常分布 P_k の近似解とその系統的改善法を提案する.

7.1 高温展開による近似解

小さな $\gamma, \beta/\alpha \ll 1$ に関する展開を行うので, ここからの議論は「高温展開」に基づく.

⁵ ここでは温度 T でスケールされた $\gamma = \gamma/T, \beta/\alpha = \beta/\alpha T$ に対し, $T \gg 1$ を「高温領域」と定義したと考える.

7.1.1 第0近似

最も近似の粗い「第0近似」を考えよう. この場合, 指数関数を $e^x = 1$ で置き換えることに相当する. 直ちに $Z = \sum_{k=1}^K 1 = K$ が得られるので, 定常分布の第0近似は

$$P_k^{(0)} = \frac{1}{K} \quad (28)$$

となる. これは高温極限 $\gamma, \beta/\alpha \rightarrow 0$ における「ランダム企業選択」である.

7.1.2 第1近似

以下では $P_k^{(1)} > \alpha/K$ の場合を考える. まず, $P_k(t)$ の指数関数が1次までの展開: $e^x = 1 + x$ で近似すると, 規格化因子はこの極限で $Z = K + \gamma \sum_{k=1}^K \log(1 + k/K) - (\beta/\alpha) + \beta$ となるが, 企業数が十分に大きな極限 $K \gg 1$ において

$$\sum_{k=1}^K \log(1 + k/K) = K \cdot (1/K) \sum_{k=1}^K \log(1 + k/K) \simeq K \int_0^1 \log(1 + x) dx = K(2 \log 2 - 1) \quad (29)$$

と書き直すことができることに注意すれば, 規格化因子 Z は $Z = K(1 + 2\gamma \log 2 - \gamma) - (\beta/\alpha) + \beta$ となり, $P_k(t) = P_k(t-1) = P_k^{(1)}$ (定常) とおけば

$$P_k^{(1)} = \frac{1 + \gamma \log(1 + k/K) - \frac{\beta}{\alpha} P_k^{(1)} + \frac{\beta}{K}}{Z} \quad (30)$$

が満たされるべきだから, これを P_k について解くと

$$P_k^{(1)} = \frac{1 + \frac{\beta}{K} + \gamma \log(1 + k/K)}{K(1 + 2\gamma \log 2 - \gamma) + \beta} \quad (31)$$

が第1近似のもとでの定常分布となる (図 11). ここで, $P_k^{(1)} < \alpha/K$ の場合

$$\hat{P}_k^{(1)} \equiv \frac{1 - \frac{\beta}{K} + \gamma \log(1 + k/K)}{K(1 + 2\gamma \log 2 - \gamma) - \beta} \quad (32)$$

となる. ここで, 定常分布はこの近似精度のもとでは求人倍率 α に依存しないことに注意されたい. また, 高温極限 $\beta = 0$ においては, 当然, ランダムな企業選択である第0近似 $P_k^{(1)} = \hat{P}_k^{(1)} = 1/K = P_k^{(0)}$ が復元される. 従って, 企業 k の獲得するエントリシートの分布は図 12 のようになる.

7.1.3 高次の近似式

上記の手続きは, より高精度の近似式へと系統的に改善することができる. 第2近似を行うと, 分配関数 Z は指数関数の2次までの展開式に関する k についての和を含む. このとき $\sum_k P_k \log(1 + k/K)$ 等の和が出現するが, これは定常解 P_k が得られるまで実行できないので, ここでは k に関する和の中に含まれる P_k をこの2次近似に対して一段階粗い近似で得られる定常解 $P_k^{(1)}$ でおき直す. この「置き換え」はこの手続きが近似次数の増加とともに「断熱的」に行われる限り妥当なものであると考えられる. また, P_k^2 など, 高次の P_k の冪に関する和等を全て第2近似より1段階粗い近似 $P_k^{(1)}$ でおき直す手続きをふむと

$$(1/K) \sum_{k=1}^K \{\log(1 + k/K)\}^2 \simeq \int_0^1 \{\log(1 + x)\}^2 dx = 2\{(\log 2)^2 - 2 \log 2 + 1\} \quad (33)$$

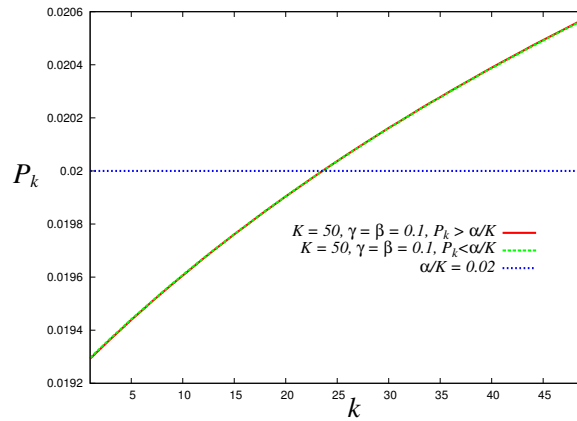


図 11: 高温での定常分布の第 1 近似解. 高温極限 ($\beta = 0$) に近いので, ほぼ k に依らずに $P_k = 1/K = 0.02$ 近傍値をとる.

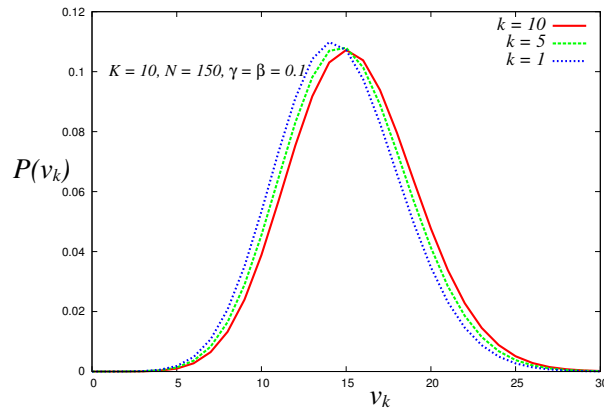


図 12: 高温における定常分布の第 1 近似解 $P_k^{(1)}$ に基づいて計算された $P(v_k)$.

等に注意すれば, 熱力学的極限において第 2 近似解 $P_k^{(2)}$ は次式で与えられる.

$$P_{k(\pm)}^{(2)} = \frac{\psi_{\pm} + \frac{\gamma^2}{2} \{\log(1 + \frac{k}{K})\}^2 + \frac{\beta^2}{2K^2} \{1 + (\frac{K+\beta}{\alpha B})^2\}}{\frac{\beta(\psi_{\pm} \mp 1)}{\alpha} + B\gamma^2 K \chi_1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha B} (2K\gamma\chi_1 + (K+\beta)\chi_2)} \quad (34)$$

ここに

$$\chi_1 \equiv (\log 2)^2 - 2 \log 2 + 1, \quad (35)$$

$$\chi_2 \equiv 2 \log 2 - 1, \quad (36)$$

$$\psi_{\pm} \equiv \gamma \log(1 + k/K) \pm (\beta/K) + 1, \quad (37)$$

$$B \equiv K\{2\gamma \log 2 - \gamma + 1\} + \beta \quad (38)$$

と定義したことに注意されたい. また, $P_{k+}^{(2)}$ は $P_k > \alpha/K$, $P_{k-}^{(2)}$ は $P_k < \alpha/K$ の解である. このような手続きを以降順次経ることで, 系統的に「高温」におけるシステムの振る舞いを高次の近似式に基づいて計算機実験に依らずに解析することが可能となる.

7.2 高温領域における失業率の解析解

ここでは高温において失業率の解析解がコンパクトに求まることを第1近似解 $P_k^{(1)}$ に関して示す。まず、高温領域における定常確率を $P_k = P_k^{(1)}$ とすると、 $P_k > \alpha/K$ に対し、 $NP_k, NP_k(1-P_k)$ が十分におおきな場合、既に述べたように $\lim_{N \rightarrow \infty} v_k/N = P_k$ が成り立つ。これを確率分布で書くと

$$P(v_k) = \delta(v_k - NP_k)\Theta(P_k - \alpha/K) + \delta(v_k - N\hat{P}_k)\Theta(\alpha/K - P_k) \quad (39)$$

である。ここで、 $P_k = \hat{P}_k = \alpha/K$ となる交点 k が一つ存在することに注意されたい。

労働者 i が v_k ものエントリシートを受けた企業 k から内定を受ける確率を $P(s_{ik} = 1|v_k)$ で書くことにすると

$$\begin{aligned} P(s_{ik} = 1|v_k) &= P(s_{ik} = 1|a_{ik} = 1, v_k > v_k^*)P(a_{ik} = 1)\Theta(v_k - v_k^*) \\ &+ P(s_{ik} = 1|a_{ik} = 1, v_k < v_k^*)P(a_{ik} = 1)\Theta(v_k^* - v_k) \end{aligned} \quad (40)$$

であるが、それぞれ $P(s_{ik} = 1|a_{ik} = 1, v_k > v_k^*) = v_k^*/v_k$, $P(s_{ik} = 1|a_{ik} = 1, v_k < v_k^*) = 1$, かつ、 $P(a_{ik} = 1) = P_k$ 等に注意すれば

$$P(s_{ik} = 1|v_k) = \left(\frac{v_k^*}{v_k}\right) P_k \Theta(v_k - v_k^*) + \hat{P}_k \Theta(v_k^* - v_k) \quad (41)$$

が得られる。これは v_k に依存するので、 $P(v_k)$ で平均をとると $P(s_{ik} = 1) = \sum_{v_k} P(v_k)P(s_{ik} = 1|v_k)$ は

$$\phi_k \equiv \frac{\alpha}{K} \Theta(P_k - \alpha/K) + \hat{P}_k \Theta(\alpha/K - \hat{P}_k) \quad (42)$$

として得られることになる。これはもはや特定の労働者インデックス i には依存しないので、ある

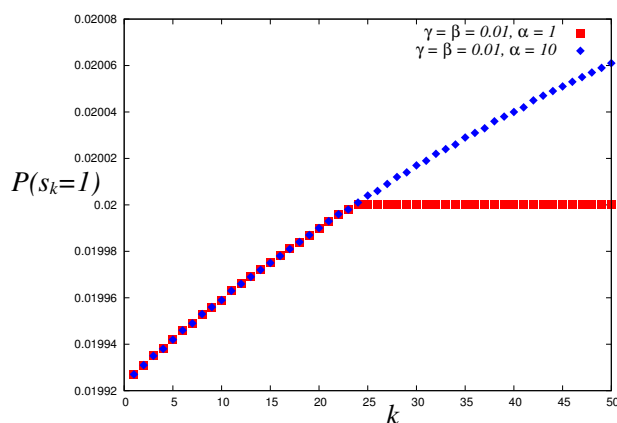


図 13: 第1近似解 $P_k^{(1)}$ のもとで計算された $P(s_k = 1) \equiv \phi_k$ の振る舞い。

任意の労働者が企業 k から内定をうける確率を ϕ_k とおいたことに注意されたい。いくつかの典型例を図13に載せる。従って、任意の労働者が3通のエントリシートを企業 k, l, m に提出したにも関わらず、どの一社からも内定を受けない確率は $(1 - \phi_k)(1 - \phi_l)(1 - \phi_m)/3!$ である。よって、 a 社にエントリシートを出した場合、その a 社の組み合わせでどこからも内定を受けない確率を全ての a 社の組み合わせで平均したものが失業率 U と等価であることは明らかである。従って、この失業

率は高温領域における定常確率に対して

$$U = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_a}^K \frac{(1 - \phi_{k_1}) \cdots (1 - \phi_{k_a})}{K(K-1) \cdots (K-a+1)} \quad (43)$$

で与えられる.

本節では我々が提案した労働市場の確率モデルに対し, 解析的議論のできる部分に焦点をあて, 高温展開法に基づき, 近似の精度を系統的に向上させることで, システムの定常状態を議論することができるを見た. しかし, 高温展開の収束半径が発散するため, 相転移の観測される $\gamma, \beta/\alpha \simeq 1$ 近傍領域の振る舞いまではこの近似のもとで議論することはできない. その場合, やはり, 我々が既に行った計算機実験が有力な解析手段となろう. つまり, ここでのマルチエージェント・システムの振る舞いを詳細に調べるためには数理解析と計算機実験, 実データ解析による重層的なアプローチが必要となる.

8 企業によるセレクション

前節までにおいては, 各学生の就職活動 (企業選択/エントリーシート提出) に関するミクロなモデルを定義し, 各種マクロ変数や, それらのダイナミクスを議論してきた. しかし, より詳細な企業と学生のマッチング・プロセスを考えるためには, 定員を越えてエントリーシートを獲得した企業がいかに学生を選考 (選抜) するか, という問題をより現実的に即して考えなければならない.

最も簡単な前節までのモデリングにおいては, 定員を越えてエントリーシートを獲得した人気企業は定員数を満たすまで「ランダム」に学生を選択した. しかし, 近年では入社した学生を「オン・ザ・ジョブトレーニング」で鍛えて行くだけの体力が各企業になくなり, 新入社員としては「再教育」の必要のない「完成された」即戦力が期待されている. 従って, 選考対象となる学生数が膨大だとしても「ランダム選考」は将来の生き残りを賭けた企業の現実を捉えていないように思われる.

そこで本節では, 企業と学生のマッチング・プロセスを学生スコアに基づいて改良する. 具体的には, 定員を越えてエントリーシートを獲得した企業は, 候補者のなかから, 各学生の GPA (Grade Point Average) 等の「単一成績 (スコア)」に基づいて選抜を行うと仮定し, 確率モデルを修正する. 既に調べられた「ランダム選考」の場合と比べ, 多数社から内定を受ける学生が現れることで, 内定数に「格差」が生じることが予想される. 我々はこの格差の度合いを内定獲得率 (= 内定数/提出エントリーシート数) に関し, 社会科学で伝統的に用いられている「ジニ係数」を用いて定量化する. そこで, この係数が求人倍率, 平均提出エントリーシート数等, システム制御変数の変化に対し, いかに振る舞うかを計算機実験する.

8.1 ランダム選考

前節までで, 我々はミクロ変数 $s_{ik}(t)$ を導入し, この変数を用いて年次 t に学生 i が企業 k から内定を受ける ($s_{ik}(t) = 1$) / 受けない ($s_{ik}(t) = 0$) を区別した. 具体的にはミクロ変数 $a_{ik}(t)$ を用いて学生 i が企業 k にエントリーシートを提出したことを

$$a_{ik}(t) = \begin{cases} 1 & (\text{学生 } i \text{ が企業 } k \text{ にシート提出}) \\ 0 & (\text{提出しない}) \end{cases} \quad (44)$$

で判別する．そこで，年次 t において学生 i の行動 $a_{ik}(t)$ が与えられたとき，彼/彼女が企業 k から内定を受ける条件付き確率 $P(s_{ik}(t) = 1|a_{ik}(t))$ を

$$P(s_{ik}(t) = 1|a_{ik}(t)) = \Theta(v_k^* - v_k(t))\delta_{a_{ik}(t),1} + \frac{v_k^*}{v_k(t)}\Theta(v_k(t) - v_k^*)\delta_{a_{ik}(t),1} \quad (45)$$

$$P(s_{ik}(t) = 0|a_{ik}(t)) = 1 - P(s_{ik}(t) = 1|a_{ik}(t)) \quad (46)$$

で与える．ここに $\delta_{x,y}$ はクロネッカのデルタ， $\Theta(x)$ は階段関数であり，次式で定義される．

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (47)$$

つまり，ここでは定員割れ企業 k にエントリーシートを提出すれば ($a_{ik}(t) = 1$) 「確率 1」で必ず内定を受けるが ($P(s_{ik}(t) = 1|a_{ik}(t) = 1) = 1$)，募集定員を上回る応募を受けた人気企業にエントリーシートを出した場合，当該企業は全ての入社希望者 $v_k(t)$ の中から定員 v_k^* 人だけをランダムに選択して (確率 $v_k^*/v_k(t)$ で) 内定を出す．従って，学生が獲得する内定数 $s_i = \sum_{k=1}^K s_{ik}$ は各学生 i ごとにばらつくことになる．このばらつきが偏る要因としては，エントリーシート提出時の学生と企業間のミスマッチの他，企業が学生を選抜する規準の「画一性」が考えられる．本稿では後者について考察を進める．

8.2 学生のスコアに基づく選考

既に我々が述べたように，ランダム選考の場合，ランキング因子の大きさ γ の増大によって企業ごとのエントリーシート獲得数に偏りが生まれ，それが大域的ミスマッチを誘因し，結果として就職率が急激に減少した．一方，各大学のキャリアセンター等からの指導により，学生がいわゆる企業ランキングだけでなく，広く中小企業にも目を向けて就職活動を行ったとしても，企業の採用規準が学生の GPA 等に基づく画一的選考基準である場合には就職率が低下し，また，学生の獲得内定数にある種の「格差」が生じる可能性がある．

そこで例えば，各学生のスコアが (4) 式のランキングにならって次の指標：

$$\varepsilon_i = 1 + \frac{i}{N} \quad (48)$$

で与えられるとする．つまり，重複 (成績の同点) がなく，最も成績の良い学生 $i = N$ から成績最下位の学生 $i = 1$ まで陽な順序付けがされているものとする．無論，一般の選考基準はこのような一元的指標 GPA による画一的なものではないが，ここでは簡単のため，定員以上のエントリーシートを獲得した企業は (48) 式に応じて，成績上位 v_k^* 人の学生に対して内定を出す．

9 計算機実験

上記の修正モデルに対して計算機実験を行う．システムの制御変数は求人倍率 α ，ランキング重要度 γ ，履歴重要度 β ，平均提出エントリーシート数 a である．観測量としては，内定獲得率の成績依存性，および，ジニ係数を採用し，これらの物理量の制御変数依存性を計算機上に構築された人工労働市場におけるジョブマッチングを考察することで明らかにする．

9.1 内定獲得率

前節までで、我々は就職率、定員充足率等のマクロ変数に着目し、システムの振る舞いを調べたが、ここでは求職者(学生)のよりミクロな情報について調べるため、各学生の内定獲得率 $r(\varepsilon_i) \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, N$) を採用し、これを次式で定義する。

$$r(\varepsilon_i) = \frac{(\text{学生 } i \text{ の獲得内定数})}{(\text{学生 } i \text{ の提出エントリーシート数})} = \frac{s_i}{a_i} \quad (49)$$

$$a_i = \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \sum_{k=1}^K a_{ik}(t) \right] \quad (50)$$

$$s_i = \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \sum_{k=1}^K s_{ik}(t) \right], i = 1, \dots, N \quad (51)$$

ここに、 $\lfloor x \rfloor \equiv \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$ であることに注意されたい。つまり、各個人の就職活動の成否を、単純に内定獲得数からではなく、ある種の「費用対効果」すなわち「エントリーシートを提出したうちの何社から内定を受けたか」で測る。この内定獲得率と学生スコア (48) の関係 $r(\varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, N$ を図 14 にプロットしよう。これは (48) 式で定義されるスコアに対する内定獲得率の振る舞いであるから、次節で導入されるジニ係数よりもシステムに関するミクロな情報を含んでいる。この図より、就職戦線「百発百中」($r = 1$) の学生の割合は平均提出エントリーシートの増加とともに減少し、求人倍率の増加とともに増加する。このとき

$$\varepsilon_c \equiv \min\{\varepsilon_i | r(\varepsilon_i) = 1\} \quad (52)$$

で「臨界値」 ε_c を定義すれば、 $r = 1$ の成績上位学生の割合 ($1 - \varepsilon_c/2$: その人数は $\sim (1 - \varepsilon_c/2)N$) と $r < 1$ の学生の割合 ($\varepsilon_c/2$: その人数は $\sim \varepsilon_c N/2$) を分つ臨界値 ε_c の値を境に、内定獲得率は急激に減少することが見てとれる。この臨界値 ε_c が 2 に近く、臨界値以下の内定率減少が急激であればあるほど内定獲得数に関する「格差」が生じていることになる。以下ではこの「格差の創発」を別の切り口から考察する。

9.2 ジニ係数に基づく「格差」の評価

このような内定数の格差を考察するためには、社会的不平等の度合いを測る指標として社会科学において伝統的に用いられるマクロな量である**ジニ係数** [11] が有効である。ジニ係数は所得/収入に関する格差評価の他、金融商品の点過程における待ち時間に関するばらつきの解析等にも積極的に用いられてる [12]。

9.2.1 ローレンツ曲線

ジニ係数を求めるためには、内定数分布から以下の手続きで**ローレンツ曲線**を求める。

まず、内定数分布を $P(r)$ とし、その累積分布 $X(t)$ と規格化された累積内定数 $Y(t)$ をそれぞれ次式:

$$X(t) = \int_0^t P(r) dr, \quad Y(t) = \frac{\int_0^t r P(r) dr}{\int_0^\infty r P(r) dr} \quad (53)$$

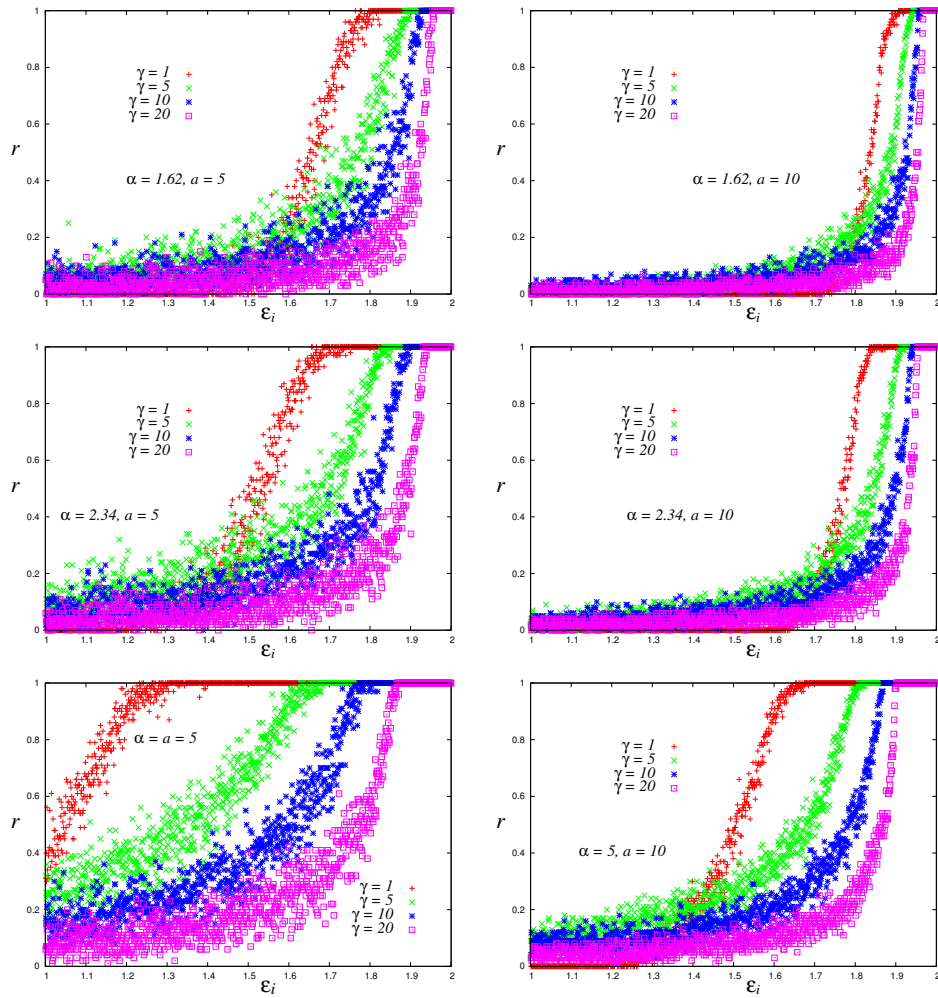


図 14: 上段から求人倍率を $\alpha = 1.62$ (我が国 2010 年度の実数値), $\alpha = 2.34$ (我が国バブル期 1987 年度の実数値), $\alpha = 5$ (フィクション) と選んだ場合の内定獲得率の成績順位依存性 $r(\varepsilon_i)$. $\varepsilon_N = 2$ が最優秀学生, $\varepsilon_1 = 1$ が最下位学生である. 左コラムは平均提出エントリーシート数が $a = 5$, 右は $a = 10$ の場合. 市場履歴強度を $\beta = 1$ に固定し, ランキング重要度を $\gamma = 1, 5, 10$ および $\gamma = 20$ と変化させてプロットした. 各点はサンプルを変えた 10 回の独立試行による平均値で代表している.

で計算し, t を媒介変数として X と Y の関係をプロットする (明らかに $0 \leq X, Y \leq 1$). このようにして描かれる曲線がローレンツ曲線である. 完全平等の場合には上式に $P(r) = \delta(r - r_*)$ を代入し

$$X(t) = \int_0^t \delta(r - r_*) dr = \Theta(t - r_*), \quad (54)$$

$$Y(t) = \frac{\int_0^t r \delta(r - r_*) dr}{\int_0^\infty r \delta(r - r_*) dt} = r_* \Theta(t - r_*) / r_* = \Theta(t - r_*) \quad (55)$$

となるから, $Y = X$ がローレンツ曲線となる. $Y = X$ をここでは「完全平等線」と呼ぶ. また

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dt} \bigg/ \frac{dX}{dt} = \frac{t}{\int_0^\infty r P(r) dr} \geq 0 \quad (56)$$

であるから, ローレンツ曲線は単調増加関数であり (微分係数は $t = \infty$, すなわち, $X = 1$ で発散),

さらに

$$\frac{d^2Y}{dX} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{dX} \right) \times \frac{1}{\frac{dX}{dt}} = \frac{1}{P(t) \int_0^\infty r P(r) dr} > 0 \quad (57)$$

であるから下に凸の曲線である.

分布 $P(r)$ が具体的にパラメトリックに与えられる場合, ローレンツ曲線が陽に計算できる. 例えば「内定数の発生」がポアソン過程に従うランダム・イベントであるならば, 内定数 r の従う分布は指数分布: $P(r) = \mu e^{-\mu r}$ となる. このとき, 直ちに

$$X(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (58)$$

$$Y(t) = 1 - (\mu t + 1)e^{-\mu t} \quad (59)$$

が得られるので, これから媒介変数 t を消去するとローレンツ曲線:

$$Y = 1 + (1 - X)\{\log(1 - X) - 1\} \quad (60)$$

が得られる (図 15 参照). 指数分布の場合, この曲線は分布を特徴つけるパラメータ μ に依存しないことに注意されたい. この曲線の意味は「就職活動をする学生の割合 X が, 全体のポストの割合 Y を占める」であり, この意味で, $Y = X$ ならばポストは等分配され, 逆に, $Y = \delta_{X,1}$ であれば, 一人の学生が全てのポストを独占することになる.

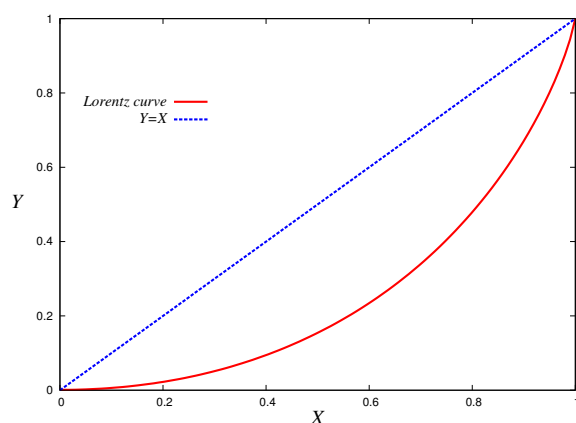


図 15: 指数分布 $P(r) = \mu e^{-\mu r}$ に対して計算されるローレンツ曲線: $Y = 1 + (1 - X)\{\log(1 - X) - 1\}$. この曲線の意味は「就職活動をする学生の割合 X が, 全体のポストの割合 Y を占める」であり, この意味で, $Y = X$ ならばポストは等分配され, 逆に, $Y = \delta_{X,1}$ であれば, 一人の学生が全てのポストを独占する. ジニ係数 G はこの曲線と完全平等線 $Y = X$ によって囲まれる面積の 2 倍で与えられる.

ところで, 分布 $P(r)$ が陽に与えられず, データ列のみが利用可能であるときでさえも, 数値的にローレンツ曲線を求めることができる. 例えば各人の順序付けされた内定数が $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_N$ のように与えられたとすると

$$X_i = \frac{i}{N}, \quad Y_i = \frac{\sum_{k=1}^i r_k}{\sum_{k=1}^N r_k} = \frac{\sum_{k=1}^i r_k}{N\mu} \quad (61)$$

であるから (ここに, $\mu \equiv (1/N) \sum_{k=1}^N r_k$), これら散布点群 (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, N$ の関係をプロットすればよい.

図 16 に我々の確率モデルに対して算出されたデータに基づくローレンツ曲線をプロットする.

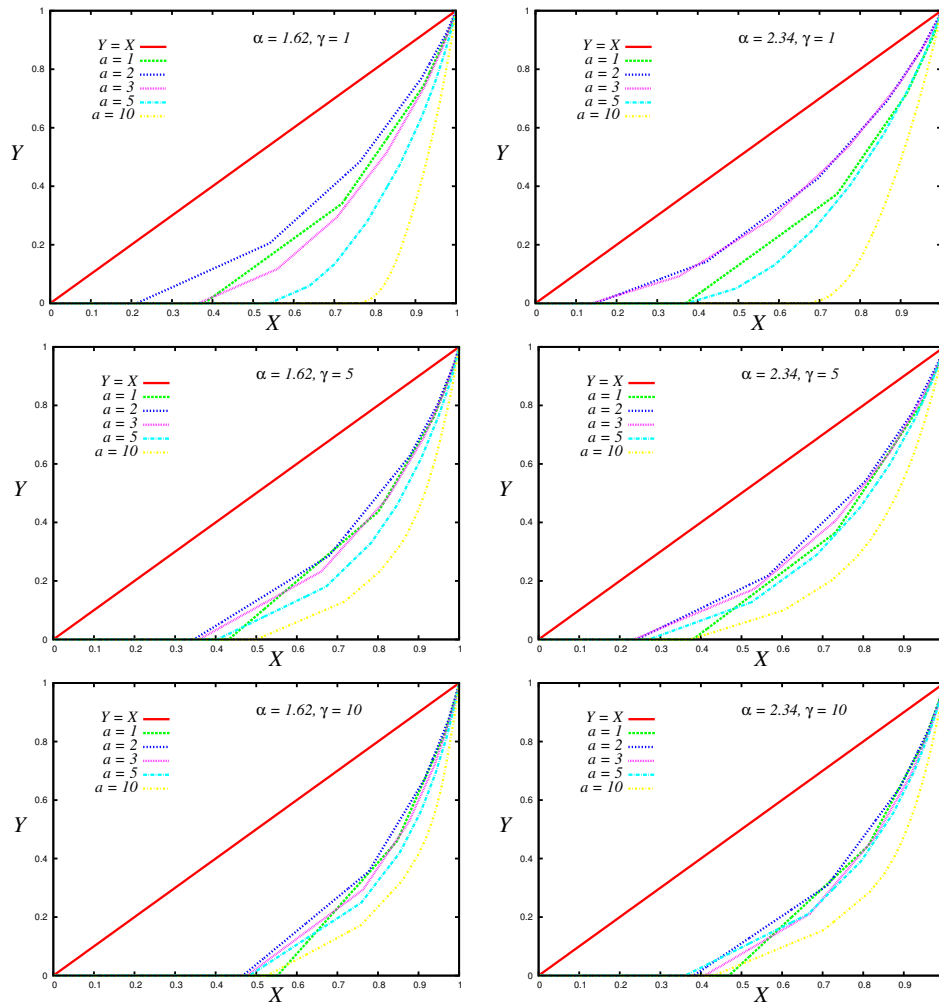


図 16: 提案確率モデルから出力される獲得内定数データに関し, (61) 式から計算されるローレンツ曲線. 右コラムは求人倍率を $\alpha = 1.62$ (我が国 2010 年度の実数値), 左は $\alpha = 2.34$ (我が国バブル期 1987 年度の実数値). 市場履歴強度を $\beta = 1$ に固定し, ランキング重要度は上段から $\gamma = 1, 5, 10$ と選んだ. 平均提出エントリーシート数を $a = 1, 2, 3, 5$, および, $a = 10$ に変化させてプロット. サンプルを変えた 10 回の独立試行による平均値をつなげて描画.

9.2.2 ジニ係数

ジニ係数はこのローレンツ曲線と完全平等線との間の面積を 2 倍したものとして算出される. 従って, ローレンツ曲線自体が完全平等線の場合にはゼロ. その対極の「一人勝ちの場合」には, $O(1)$ の学生 c 人の各々が内定数の最大値を $r_{\max}$ を獲得し, それ以外の $N - c$ 人が内定数ゼロの状況であるから, $\delta(\cdot)$ をデルタ関数として, 内定数分布が

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{N-c}{N} \delta(r) + \frac{c}{N} \delta(r - r_{\max}) \\ &= (1 - \epsilon) \delta(r) + \epsilon \delta(r - r_{\max}), \quad \epsilon \equiv \frac{c}{N} \ll 1 \end{aligned} \quad (62)$$

と書ける. 従って, $X(t) = 1 - \epsilon + \epsilon \Theta(t - r_{\max}), Y = \Theta(t - r_{\max})$ が得られる. つまり, $X = 1$ のとき $Y = 1$ であり, その他の X の場合 ($X = 1 - \epsilon$), $Y = 0$ となる. よって, このとき完全平等線 $Y = X$ と X 軸, Y 軸とで囲まれる「直角三角形」の面積は $1/2$ であり, ジニ係数はその 2 倍の

$G = 1$ となる。以上より、ジニ係数のとりうる範囲は

$$0 \text{ (完全平等)} \leq G \leq 1 \text{ (完全不平等)} \quad (63)$$

となる。これらをふまえると、ジニ係数は一般の場合

$$G = 2 \int_0^1 (X - Y) dX = 2 \int_0^\infty (X(t) - Y(t)) \frac{dX}{dt} \cdot dt \quad (64)$$

と書ける。従って、 $P(r)$ が指数分布に従う場合、そのローレンツ曲線は (60) 式で与えられたので、そのジニ係数は直ちに

$$G = -2 \int_0^1 (1 - X) \log(1 - X) dX = \frac{1}{2} \quad (65)$$

と算出される。

ローレンツ曲線の場合に見たように、 $P(r)$ が陽に与えられず、データ列のみが利用可能な場合でも数値的にジニ係数を求めることができる [12]。そこで、(61) 式と (64) 式を対比し、 $dX = (i+1)/N - i/N = 1/N$ であることに注意すると

$$\begin{aligned} G &= 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{i}{N} - \frac{\sum_{k=1}^i r_k}{\mu N} \right) \frac{1}{N} \\ &= \frac{(N+1)}{\mu N} \mu - \frac{2}{\mu N^2} \sum_{i=1}^N (N-i+1) r_i \\ &= \frac{(N+1)}{\mu N^2} \sum_{i=1}^N r_i - \frac{2}{\mu N^2} \sum_{i=1}^N (N-i+1) r_i \\ &= \frac{1}{N^2 \mu} \sum_{i=1}^N (2i - N - 1) r_i \end{aligned} \quad (66)$$

が求めるジニ係数となる。図 17 にその結果をプロットしよう。この左上図より、例えば、さほど高くない 2010 年度の求人倍率 $\alpha = 1.62$ の場合、平均提出エントリーシート数が $a = 1$ でランキング重要度が比較的小さい $\gamma \ll 1$ 場合、ジニ係数は $G \simeq 0.5$ 程度となり、これは獲得エントリーシート数が指数分布に従う場合の結果 (65) に近い。つまり、各学生に内定数をランダムに割り当てる場合に近い振る舞いを見せる。また、このパラメータ領域では、各自が平均して $a = 2$ 通のエントリーシートを提出すれば、ジニ係数の意味で獲得エントリーシート数に関する格差を小さくすることができる。一方、徐々にランキング因子の大きさを大きくすると、格差が増大し、その大きさは平均提出エントリーシート数が多いほど甚だしいことがわかる。これは少数の成績優秀な学生で多くの内定が占有されてしまうためである。この場合、普通の成績以下の学生は一社からも内定を受けることができない。また、興味深いことに、ジニ係数は γ の増加とともに単調増加するのではなく、各 a に対し、ジニ係数を最小にする γ 値が存在すること — ジニ係数の非単調性 — も見てとれる。また、図 18 に各企業 $k = 1, \dots, 50$ の集めるエントリーシート数を γ を $\gamma = 0, 4, 8$ と変化させてプロットした。

ジニ係数の γ の変化に関する非単調性は図 17 の左上図と図 18 より、次のように理解できる。まず、 $\gamma \simeq 0$ の場合、各学生が平均 $a = 10$ ものエントリーシートを提出すれば、上位成績学生による内定の独占が起きる。従って、失業率が大きくなることで、ジニ係数も大きくなる。そこで、次第に γ を増加させ、 $\gamma = 4$ 程度になると、成績下位の低位企業内定者は上位企業へ逃げることはないで、定員未充足率 Ω が減少することになる。 $U \propto \Omega$ であったから、これは失業率の減少を意味し、従って、ジニ係数も減少する。次に γ を $\gamma = 8$ を超えて大きくしていくと、そもそも不人気企業はエン

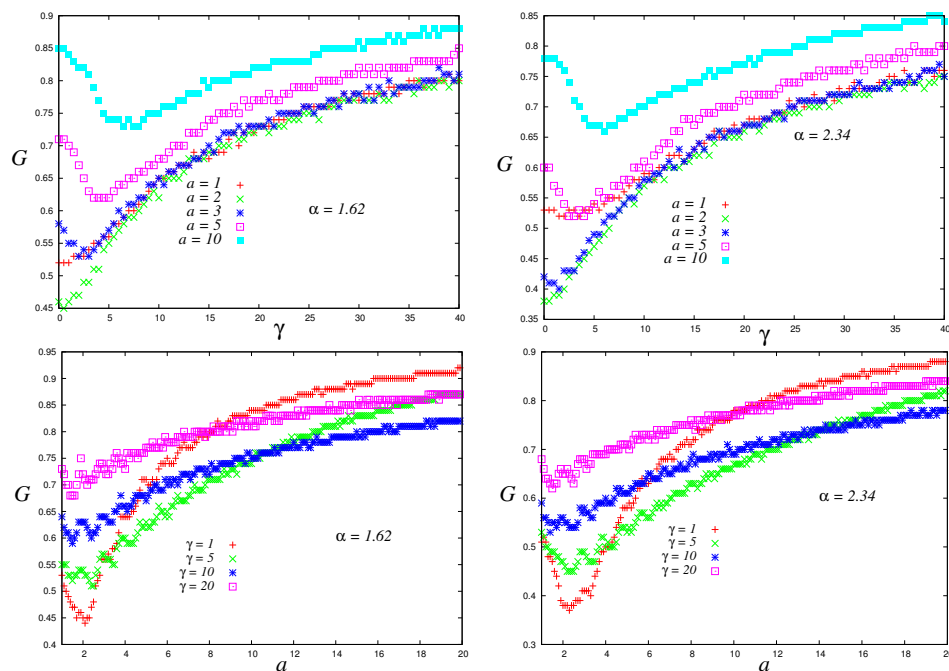


図 17: 提案確率モデルから生成される内定獲得数に関するジニ係数のランキング重要度依存性 (上図) と平均提出エントリーシート数依存性 (下図). 右コラムは求人倍率を $\alpha = 1.62$ (我が国 2010 年度の実数値) と選び, 左は $\alpha = 2.34$ (我が国バブル期 1987 年度の実数値) に選んだ. 各点はサンプルを変えた 10 回の独立試行による平均. 市場履歴強度はいずれも $\beta = 1$ に固定. 具体的算出は式 (66) による.

トリシートを集められなくなり, 結果, Ω が増加することで, 失業率 U も増加, よって, ジニ係数は再び増加に転じることになる.

本節では求職者に一元的観点からスコアを割り振り, 定員を越えてエントリーを受けた人気企業は「ランダム」でなく, このスコアに基づき内定者を決定するシナリオを導入し, 求人倍率, 平均提出エントリーシート数等, システム制御変数を変化させることで, 求職者の内定獲得数に関する大きな格差が創発しうることを示した. 我々は一元的スコアを (48) 式で具体的に定義したが, このスコアは「学生の順序付け」のみに用いたに過ぎず, この式自体を積極的に企業のセレクション・プロセスに用いたわけではない. その意味で本稿で扱ったモデルにはさらなる改良の余地がある. また, 成績上位の学生はランキング上位の企業を中心にエントリーシートを提出する傾向が見受けられるが, このような傾向をモデルに取り込むためには, 学生の成績と企業選択との「相関」を適時取り込んでジョブマッチング・プロセスを構築していかなければならない. 一方, 企業が持続的に発展していくためには「多様な人材」の確保が重要とされている. 事実, 企業のなかには, 国籍を問わない求人を行うものや, 卒業後数年間のブランクを持った人材も積極的に受け入れる企業も増えつつある. その意味では, 本稿で扱ったような「一元的順序付け」ではなく, 多元的選抜規準 (エネルギー関数) を導入し, 我々が集学生確率 $P_k(t)$ を導いた指針と同様の考え方 (本稿 2 節条件 (iv) **エントロピー最大化と多様性**, および, 本稿 2.1 節参照) に基づき, これらエネルギー関数の下でのエントロピー最大化の意味で「多様性」を保証したセレクション確率を導出し, その確率を用いてモデルを修正することも考えられる.

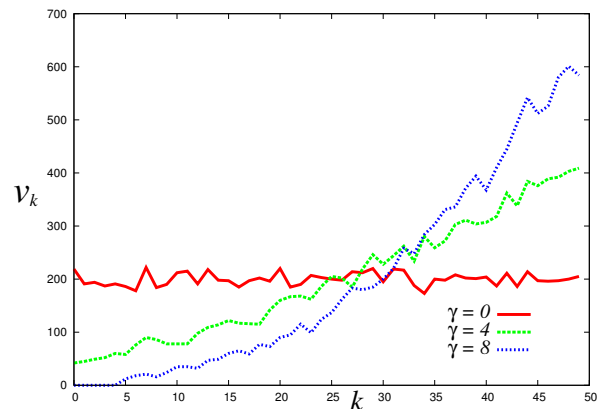


図 18: 各企業 $k = 1, \dots, 50$ の集めるエントリシート数. γ を $\gamma = 0, 4, 8$ と変化させた.

10 実データとの整合性

前節までで、我々の提案する数理モデルとその振る舞いについての説明は済んだが、得られた結果と現実の労働市場との整合性を考えなければならない。そこで、この節ではいくつかの視点から、提案モデルと現実とのギャップについて議論していきたい。

10.1 フィリップス曲線

労働市場と景気の間を示す経験則として、インフレ率と失業率の間を示す、所謂、**フィリップス曲線**が知られている [13]。図 19 に我が国の 1970 年代から 2000 年代に至る、年代別のフィリップス曲線を示す。ここで、各図のフィッティングカーブ $\pi + b \propto U^{-c}$ は、 n 個のデータ点 $(X_i, Y_i) = (\log U_i, \log(\pi_i + b))$, $i = 1, \dots, n$ からパラメータ b, c を最小自乗法から求めたものである。この図から明らかに、フィリップス曲線は現代に向かうにつれて「平坦化」していることが見てとれる。これらフィリップス曲線の年代依存性をより陽に見るために、図 20 に全年度に渡るデータに対し、フィリップス曲線を描く。

このフィリップス曲線を再現するためには、インフレ率に関する情報が必要である。しかし、我々の提案モデルは大卒労働市場のマッチングプロセスに特化したものであるため、インフレ率を求めることができない。そこで、次節では、Neugart によるマクロなモデルについて言及し、このモデルと我々の結果を組み合わせることで、フィリップス曲線を再現することを試みてみよう。

10.2 Neugart モデル

Neugart モデル [5] はマクロ変数に関する決定論的非線形写像で与えられる。具体的には、失業率と物価上昇率の関係をマクロに与え、その年次ごとの状態更新が非線形写像を与える。その導出はやや込み入っているが、得られる「連立写像」はパラメータの選び方次第ではカオスの性質を持つ。以下の導出の詳細は日野 [14] によるものを参考にした。

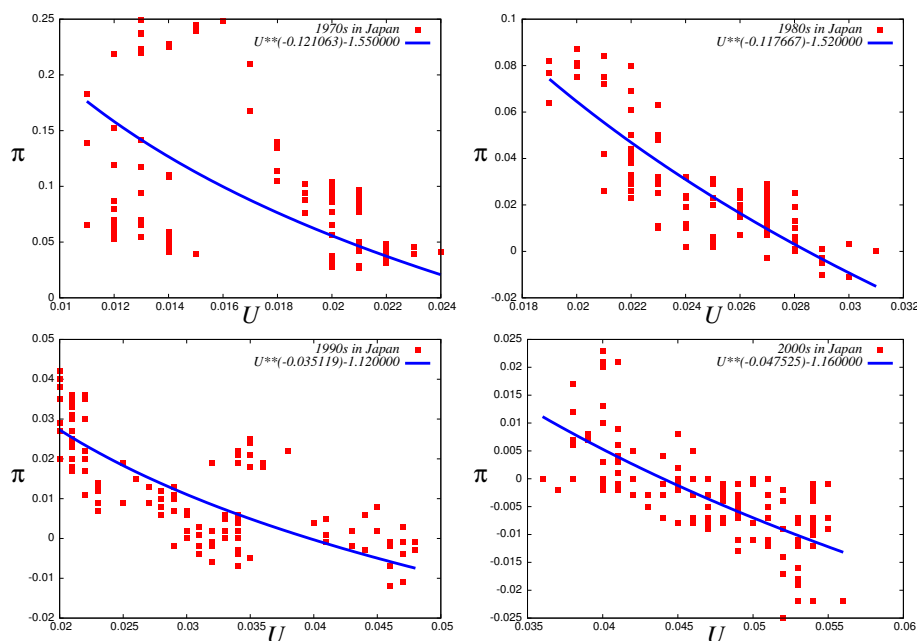


図 19: 我が国の年代別フィリップス曲線. 左上から右下にかけて, 1970, 80, 90 年代, および, 2000 年代.

10.2.1 非線形写像の導出

まず, ステップ t での失業率⁶ を U_t , 外的な社会要因のためそれまで定職にあった者が職を失う「離職率」を i とする. また, それまで失業中だった者が職にありつき, 「就労者組」へと流れ込む確率を就職率として o_t とする. ここに, この就職率はステップ t に依存することに注意されたい. このとき, ステップ $t+1$ での失業率 $U_{t+1} (\leq 1)$ は前ステップ t での失業率 U_t を用いて

$$U_{t+1} = U_t + i(1 - U_t) - o_t U_t \quad (67)$$

で与えられるものとする. この式の意味するところは, ステップ $t+1$ での失業率 U_{t+1} は, 前ステップの失業率 U_t にステップ t で職にありつけた労働者のために「失業組」が減る寄与: $-o_t U_t$ と, このステップで職を失った労働者: $i(1 - U_t)$ の和で与えられるという事実である.

Neugart モデルでは離職率 i は時間的に変化せず, 「外的コントロールパラメータ」として扱う. 具体的にはカオス力学系として広く知られるロジスティック写像:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \quad (68)$$

における分岐パラメータ a と同様の扱いとする. 後に見ることになるが, この離職率 i を変化させていくことで, システムは周期軌道からカオス軌道への分岐を見せることになる.

一方, ステップ t で職を見つける労働者の割合 o_t はステップに依存して変化するものとして扱う. 具体的にはステップ t での値が次式によって与えられるものとする.

$$o_t = \frac{J_s + J_{c,t}}{U_t + d(1 - U_t)} \quad (69)$$

$$J_{c,t} = \gamma(m - \pi_t) \quad (70)$$

⁶ 「ステップ t 」をここでは「年次」と考えるとイメージしやすいと思われる.

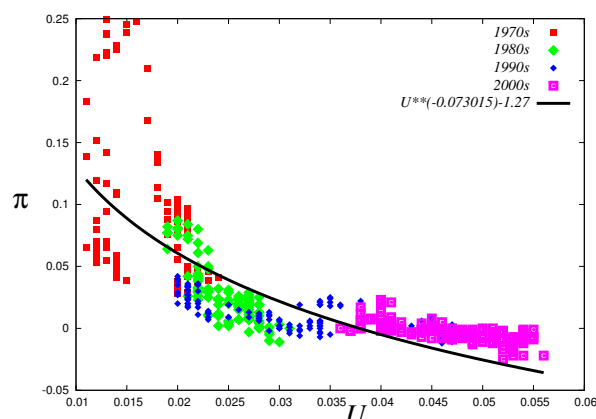


図 20: 図 19 のデータを単一プロットして得られるフィリップス曲線.

ここに, (69) 式分子に現れる $J_s + J_{c,t}$ は考える社会における全求人数を与える. この 2 項のうちの第 1 項 J_s は定数であり, 時間が経過しようが不変に保たれる社会が供給する一定数の求人数を意味する. 一方, 第 2 項 $J_{c,t}$ は社会情勢等によって変化をうける一定求人数 J_s からの「偏差」であり, この時間的に変化する求人数は, Neugart モデルにおいては (70) 式のように貨幣価値の成長率 m と物価上昇率 π_t の差によって決まるものと仮定される. γ は $0 < \gamma < 1$ を満たす定数である. 従って, 貨幣価値が上昇すればするほど, 実質求人数 $J_s + J_{c,t}$ は増加し, 逆に, 物価上昇率が上がればあがるほど減少する.

分母は現在 (ステップ t に) 職にありつけていない求職者数であり, 分母第 2 項 $d(1 - U_t)$ は職にありつきながら, より良い職を探している就労者の数を表し, この項と第 1 項である離職者数 U_t を合算したもの $U_t + d(1 - U_t)$ が社会全体の求職者数を与えることになる. 従って, d は所謂 *On the job searching* の割合を表すパラメータと考えることもできる.

以上を総合すると, (69) 式はステップ t で職にありつける人の割合は求人数に比例し, 求職者数に反比例するという事実を表すことになる.

次に, 期待物価上昇率 $\pi_{e,t}$, 交渉賃金 $w_{b,t}$, (実質) 賃金 w_p を定義する. 期待物価上昇率とは, 将来に予想される物価上昇率のことである. Neugart モデルでは, ステップ $t+1$ における期待物価上昇率が, ステップ t における期待物価上昇率と物価上昇率 π_t との間の, パラメータ a ($0 \leq a \leq 1$) を用いた加重平均として, 次式で定義される.

$$\pi_{e,t+1} = a\pi_t + (1-a)\pi_{e,t} \quad (71)$$

また, 物価上昇率 π_t を定義するために, 以下で, 労働者の賃金 w_p , ステップ t での交渉賃金 $w_{b,t}$ を以下に説明するように定義する.

まずは賃金を次で定義する.

$$w_p = (1 - \mu)y \quad (72)$$

ここに, y は労働者一人当たりの生産量であり, μ は「需要弾力度」の逆数を表す. 需要弾力度とは, 需要の増加にともなって価格が下落する割合を表し, この価格の下落率が小さいほど需要弾力度が大きいものとして定義される (図 21 参照). 従って, 労働者の実質賃金は, 需要の弾力性が大きければ大きいほど高くなる. これは例えば, いわゆる「贅沢品」の需要弾力性は大きい, 日常品の弾力

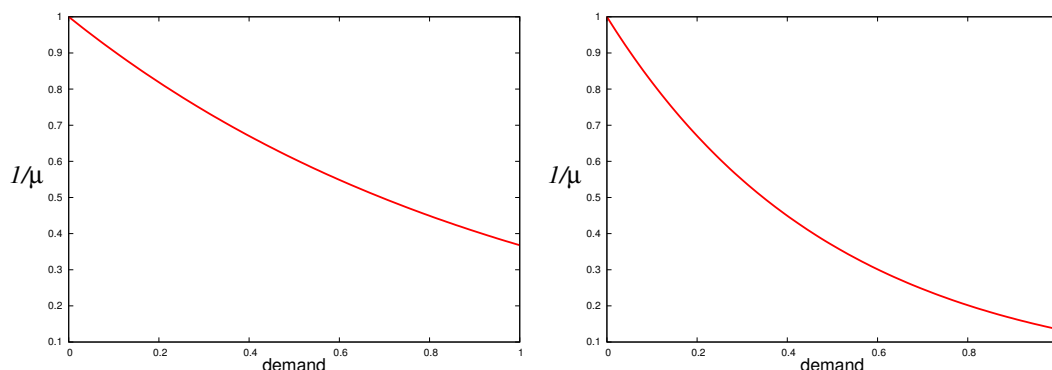


図 21: 重要弾力度 $1/\mu$ の需要 (demand) 依存性. 左図が弾力性が高く, 右図が低い.

性は低いということからわかるように, 一人あたりの生産量 (y) が同じであれば, より高価なものを生産すればするほど, その労働者の実質賃金は上昇することを意味している. これは理にかなった設定である. 簡単のため, 以下では $y = 1$ として議論を進める.

多くの就労者は労働組合に加入しており, 労働組合は次年度の賃金⁷, を引き上げるために交渉を行う. この交渉が成功すれば賃金は上昇する. 従って, 次にステップ t での交渉賃金を

$$w_{b,t} = 1 - (1 - b)U_t \quad (73)$$

で定義する. ここに, パラメータ b は $0 < b < 1$ の値をとることから, 交渉賃金は離職率が高ければ高いほど減少し⁸, 逆に離職率ゼロの極限, つまり, 全ての労働者が就労している状況下においては, 一人あたりの生産量, すなわち, $y = 1$ に一致する⁹. これらを用いて, ステップ t での物価上昇率を次式で定義する.

$$\pi_t = \frac{1}{\delta} \left(\pi_{e,t} + \frac{w_{b,t} - w_p}{w_p} \right) = \frac{1}{\delta} \left(\pi_{e,t} + \frac{\mu - (1 - b)U_t}{1 - \mu} \right) \quad (74)$$

ここで, 上式の説明のため, ステップ t での賃金上昇率を

$$\Delta w_t \equiv \frac{w_{b,t} - w_p}{w_p} \quad (75)$$

で定義しよう. つまり, Δw_t はある時刻における賃金 w_p に対し, 時刻 t における交渉賃金 $w_{b,t}$ がどの程度まで上昇したかの割合を w_p を基準に測ったものである.

従って, (74) 式の意味は, ステップ t での賃金上昇率が正 ($\Delta w_t > 0$) ならば, ステップ t での物価上昇率は, 期待される物価上昇率 $\pi_{e,t}$ より大きくなり, 逆に, 賃金上昇率が負 ($\Delta w_t < 0$) ならば, 物価上昇率は, 期待物価上昇率よりも小さく押さえられる. このことは, 賃金が労使交渉によって上昇し, 消費者でもある就労者にお金が多ければ回るほど, 人々の購買意欲が上がり, 多くの消費材の需要が増加することで, それらの価格も高騰していくことを考えると, 合理的な設定であると思われる.

また, (74) 式における δ は, (74) 式において $w_p = w_{b,t}$ とおけば明らかなように, 物価上昇率と期待上昇率の間のスケール変換 (大きさの調整) を表すパラメータである.

⁷ 多くの場合には, 給与の基本的部分 (「ベース」) の引き上げ, つまり, ベースアップ (所謂「ベア」).

⁸ 労働組合の構成員が減少するため, 賃金交渉が十分適切に行われないと考える.

⁹ 労働組合の構成員による賃金交渉の結果, 就労者の意見が取り入れられ, 生産量に見合った賃金が得られると考える.

以上から、物価上昇率 π_t と離職率 U_t の間の連立非線形写像を得ることができる。具体的には、(67) 式に (69),(70) 式を (74) 式に (71) 式を代入すると

$$U_{t+1} = U_t + i(1 - U_t) - U_t \frac{J_s + \gamma(m - \pi_t)}{U_t + d(1 - U_t)} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \pi_{t+1} = & \frac{1}{\delta} \left(\frac{\mu}{1 - \mu} + a\pi_t + (1 - a) \left(\delta\pi_t - \frac{\mu - (1 - b)U_t}{1 - \mu} \right) \right) \\ & - \frac{1}{\delta} \left(\frac{1 - b}{1 - \mu} \left(U_t + i(1 - U_t) - U_t \frac{J_s + \gamma(m - \pi_t)}{U_t + d(1 - U_t)} \right) \right) \end{aligned} \quad (77)$$

となる。つまり、 U_t と π_t は上記の非線形写像に従って、ともに決定論的に状態更新していくことになる。

ところで、上記の非線形写像 (76)(77) の固定点 $U^* = U_{t+1} = U_t, \pi^* = \pi_{t+1} = \pi_t$ は直ちに

$$U^* = \frac{\mu - m(\delta - 1)(1 - \mu)}{1 - b} \quad (78)$$

$$\pi^* = m \quad (79)$$

のように求めることができる。ここでは、物価上昇率の固定点 π^* が、貨幣価値の上昇率 m に等しい、すなわち、 $\pi^* = m$ と仮定すると (つまり、固定点の条件のうちで (79) のみを仮定すると)、(76) 式で、 $U^* = U_{t+1} = U_t, \pi^* = \pi_{t+1} = \pi_t = m$ とおくことで

$$U^* + i(1 - U^*) - U^* \frac{J_s}{U^* + d(1 - U^*)} = U^* \quad (80)$$

すなわち

$$J_s = \frac{i(1 - U^*)(U^* + d(1 - U^*))}{U^*} \quad (81)$$

として社会が供給する一定数の求人数 J_s が定まる。以下の数値計算では、上記 (81) の条件下で非線形写像 (76)(77) の振る舞いを調べて行くことにする。

10.2.2 カオス・アトラクタとしてのフィリップス曲線

Neugart モデルでは、アトラクタ (U_t, π_t) がフィリップス曲線を与えることになる。図 22 にその一例を載せよう。ここで、各種パラメータは $\xi = 0.18, d = 0.01, c_1 = c_2 = 0.5, \mu = 0.04, \Gamma = 0.5, \delta = 2, m = 0.03$ のように選んだ。このアトラクタのフィッティング・カーブは $\pi + 1.0 \propto U^{-0.006186}$ となる。

10.2.3 提案モデルとの結合系

前節までで導入された我々のモデルでは、ミクロ変数 $a_{ik}(t)$ と $s_i(t) = \sum_k s_{ik}(t)$ によって、就職活動をする学生、学生を獲得する企業の微視的な性質が確率的に決定した。このとき、マクロ量である失業率は $U = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=0}^{T-1} U_t$ で与えられることになる。そこで、Neugart モデルから得られるインフレ率の時間変化 π_t と我々のモデルから得られる失業率の時間変化 U_t を結合させ、そのアトラクタを調べることで、フィリップス曲線を描いてみることにしよう。すなわち、我々のモデルには含まれない、インフレ率を $J_s = J_s^*$ とおいた (77) 式で我々のモデルを補い、フィリップス曲線を描く。この際、Neugart モデルのパラメータは $\xi = 0.18, d = 0.01, c_1 = c_2 = 0.5, \mu = 0.04, \Gamma = 0.5, \delta = 2$, および、 $m = 0.03$ と選ぶことにする。

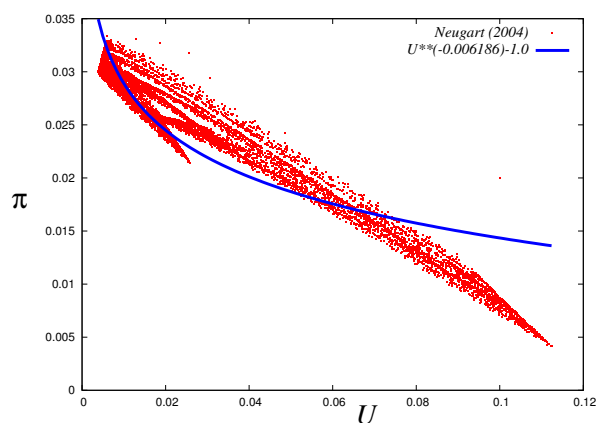


図 22: Neugart モデルにおける「カオス・アトラクタ」としてのフィリップス曲線.

10.2.4 典型的なダイナミクス

はじめに、失業率 U_t とインフレ率 π_t の典型的なダイナミクスを図 23 に示す. この図より, これら 2つのマクロ量は, いずれも, 時間間隔 100 ~ 200 のインターバルで「クラスタリング」されることがわかる. この各インターバル間でこれらの量は短い周期で変化していることも見てとれる.

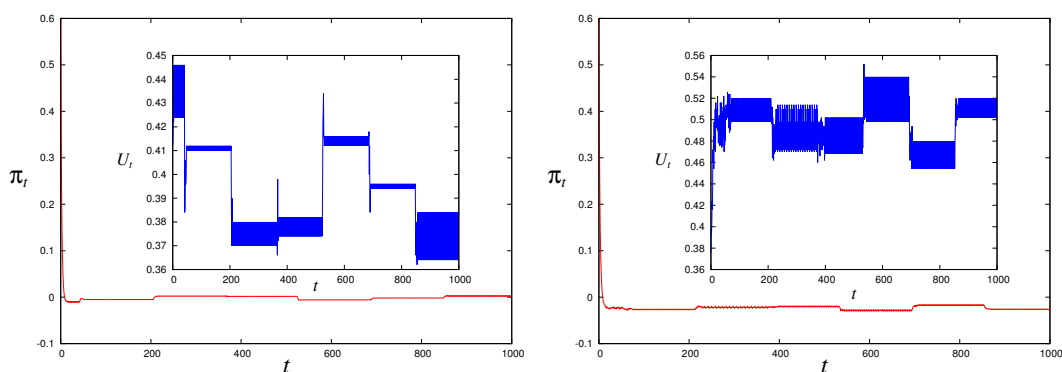


図 23: 失業率 U_t とインフレ率 π_t の典型的なダイナミクス. モデル・パラメータに関し, 左パネルでは $\beta = \gamma = 1$, 一方の右パネルでは $\beta = 10, \gamma = 1$ と設定されている. システムサイズは $N = 500, K = 50, v = 10$ ($\alpha = 1$), および, $a = 10$.

10.2.5 トrajekトリとしてのフィリップス曲線

前節で得られた失業率とインフレ率に関し, 時刻 t を媒介変数とした「トラジェクトリ」(U_t, π_t) をフィリップス曲線とみなし, これをプロットしてみよう. 得られた結果を図 24 に示す. この図では, 学生エージェントの行動に対する市場履歴の強さ β をランキング重要度を $\gamma = 1$ に固定した上で $\beta = 1$ と $\beta = 10$ の 2つの場合に選んでプロットしてある. 明らかに β の増加とともに, フィリップス曲線は $\pi + b \propto U^{-c}$ により当てはまりやすくなることが見てとれる.

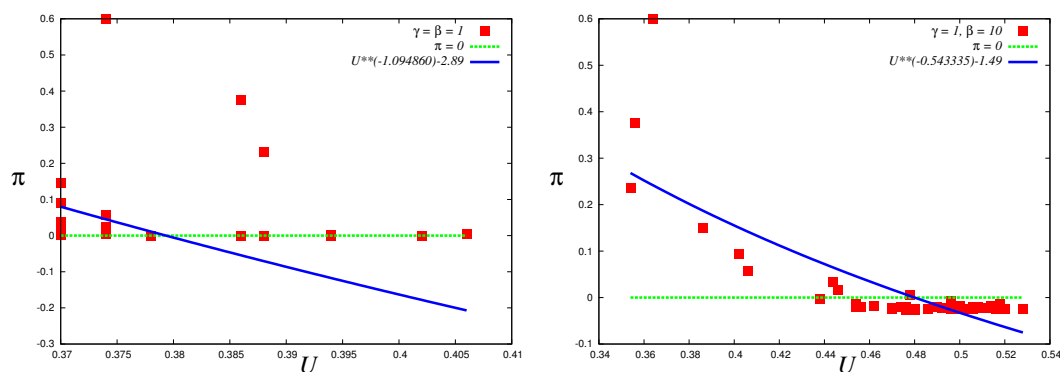


図 24: 提案モデルと Neugart モデルの結合系から得られる「トラジェクトリ」としてのフィリップス曲線. 左パネルでは $\beta = \gamma = 1$, 右パネルでは $\beta = 10, \gamma = 1$ と選んである. システムサイズは $N = 500, K = 50, v = 10 (\alpha = 1), a = 10$ である.

10.2.6 負のインフレ率

図 24 より, フィリップス曲線においては, 部分的にインフレ率が負, すなわち, $\pi < 0$ となる領域が現れることが見てとれる. 負のインフレ率はある種の「危機」の予兆とみることができるとすれば, このような「負のインフレ率」が出現しうるパラメータ領域を提案モデルの範囲内で特定しておくことは重要であろう. そこで, $\pi \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=0}^{T-1} \pi_t$ を c_1, c_2 の関数としてプロットし, その結果を図 25 に示す. この図より, $(c_1, c_2), 0 \leq c_1, c_2 \leq 1$ を満たすある限定された領域においてインフレ率が負になることがわかる.

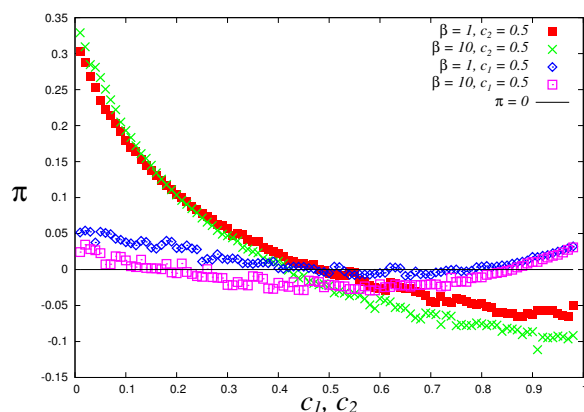


図 25: インフレ率の長時間平均: $\pi \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{t=0}^{T-1} \pi_t$ のパラメータ c_1, c_2 依存性. 各種パラメータは図 24 と同様に設定した.

10.3 ミスマッチと U - Ω 曲線

リクルート・ワークス研究所による「ワークス大卒求人倍率調査」と厚生労働省・文部科学省による就職率データに基づいて, みずほ総合研究所が作成した報告書 [15, 16, 17, 18] によれば, 定員未充足率 Ω と未就職率 $U (= 1 - \text{就職率})$ の双方が大きい場合において所謂「企業-学生間ミスマッ

チ」の度合いが大きく、これは 2010 年度に顕著であった。ここでの「定員未充足率」は、既にみたように

$$\text{定員未充足率 } (\Omega) = \frac{\text{全企業の全欠員数}}{\text{全企業の全定員数}} \quad (82)$$

定義される。すなわち、定員を満たすことができない企業 — 主に中小企業が該当すると思われる — が多く存在し、かつ、大卒予定者の就職率が低ければ（未就職率が高ければ）、結果として大卒（予定）求職者が定員を満たすことのできなかった中小企業を敬遠し、多くの大卒予定者が彼らの就職活動においてエントリーシートを殺到した一部の大手企業のみを志望したと推察することができる。そ

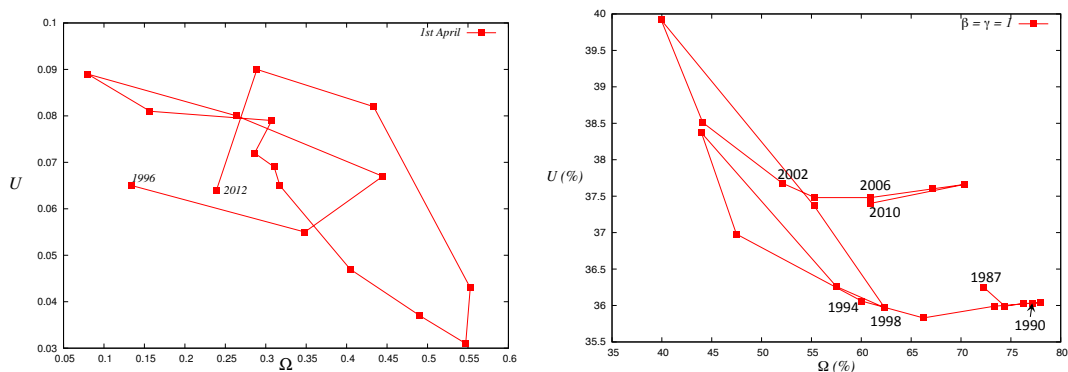


図 26: 翌年 4 月期に対して報告された就職率 $1 - U$ に基づいて算出された U - Ω 曲線。

こで、図 (左) に厚生労働省の公開するデータに基づいて、みづほ総研に倣って、過去 18 年間に渡る各年 4 月期において算出される (U, Ω) によって描かれる Ω - U 曲線を載せよう。この図から、2011 年度においては U, Ω とともに大きく、所謂「ミスマッチ」が顕著になっていることがわかる。

我々の数理モデルでは、 β, γ 等のシステム・パラメータを調整しなければならないため、現段階で Ω - U 曲線を再現することはできないが、予備実験として、 $\beta = \gamma = 1$ とおいた場合の曲線を図 (右) に載せる。この図より、実データと計算機実験結果には大きな乖離がある。このミスマッチの年度依存性等を利用可能な観測データ (雇用統計等) を用いて再現/予測することは重要であり、今後の課題として位置づけられる。

11 おわりに

統計力学の考え方を労働市場の研究に持ち込むことで、シンプルな労働市場の数理モデルを構築することができた。本論文の前半では、実データからの知見からは、かなり自由に数理モデルの解析を行い、いくつかの興味深いシステムの振る舞いを計算機実験によって明らかにすることができた。しかし、ひとたび実データとの整合性を考慮すると、必ずしも満足のいく結果が得られたとは言いがたい。これは、シンプルな数理モデルとは言え、いくつかのシステム・パラメータの調節が思いのほか難しいということが大きな理由として挙げられる。今後は提案モデルに対し、こうした「モデル・キャリブレーション」の方法を確立することが急務であり、将来に渡っての重要課題と位置づけられる。また、モデルの実証性が重要である一方、数理科学としての深みも同時に追求していかなければならない。例えば、本研究では無視したエージェント群の「不均一性」やエージェント間の相互作用を考慮した本格的な多体効果を導入し、そうした複雑な数理モデルの振る舞いをスピングラス理論等を用いることで調べていくことも今後の課題である。

謝辞

指導教員である井上純一准教授に感謝します。小野哲雄教授, 榎方渚助教, 混沌系工学研究室の皆様方に様々な形でサポート頂きましたことに御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] M. Aoki and H. Yoshikawa, *Reconstructing Macroeconomics: A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes*, Cambridge University Press (2006).
- [2] T. Boeri and J. van Ours, *The Economics of Imperfect Labor Markets*, Princeton University Press (2008).
- [3] R. Gabriele, *Labor Market Dynamics and Institution: An Evolutionary Approach*, Working Paper in Laboratory of Economics and Management Sant'Anna School of Advances Studies, Pisa, Italy (2002).
- [4] G. Fagiolo, G. Dosi and R. Gabriele, *Advances in Complex System* **7**, No.2, pp. 157-186 (2004).
- [5] M. Neugart, *Journal of Economic Behavior and Optimization* **53**, pp. 193-213 (2004).
- [6] S. Lippman and J.J. McCall, *Economic Inquiry* **14**, pp. 155-188 (1976).
- [7] P. A. Diamond, *Journal of Political Economy* **90**, pp. 881-894 (1982).
- [8] C.A. Pissarides, *American Economic Review* **75**, pp. 676-690 (1985).
- [9] C.A. Pissarides, *Equilibrium Unemployment Theory*, MIT Press (2000).
- [10] 「サーチ理論: 分権的取引の経済学」今井亮一, 工藤教孝, 佐々木勝, 清水崇, 東京大学出版会 (2007).
- [11] C. Gini, *Concentration and dependency ratios* (1909) (in Italian), *Rivista di Politica Economica* **87**, pp. 769-789 (1997) (English translation).
- [12] N. Sazuka and J. Inoue, *Physica A* **383**, pp. 49-53 (2007), N. Sazuka, J. Inoue and E. Scalas, *Physica A* **388**, pp. 2839-2853 (2009).
- [13] A.W. Philips, *Economica, New Series* **25**, No. 100, pp. 283-299 (1958).
- [14] 日野光「フィリップス曲線をミクロに検証する労働市場の数理モデル」北海道大学 大学院情報科学研究科 修士論文 (2010). <http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/44985>
- [15] <http://www.meti.go.jp/statistics/tyo/kikatu/result-2/h21kakuho.html>
- [16] <http://www.mhlw.go.jp/stf/houdou/2r98520000006hma.html>
- [17] <http://www.works-i.com/surveys/adoptiontrend/>
- [18] 「みずほ日本経済インサイト: 就職氷河期は再来するのか — 問題は求人減よりもミスマッチ —」みずほ総合研究所 (2010).