



Title	株価収益率ボラティリティの変動特性に関する実証分析
Author(s)	木村, 俊一; Kimura, Toshikazu; 渡辺, 岳夫 他
Description	ポートフォリオ選択あるいはオプション価格評価においては、その原資産である株価過程に対する数理モデルとして幾何ブラウン運動を仮定することが一般的である。この仮定は、株価収益率は正規分布に従い、そのボラティリティは斉時的であることを意味しているが、これまでの実証研究においてはいずれも否定的な見解が示されている。本論文では、日経平均株価収益率の実データを用いてその日時収益率の正規性を再検証する。また、株価収益率の誤差項に積過程を用いることで日時収益率のボラティリティ変動を表現し、正規分布より裾の厚い分布として知られているt分布を当てはめたEGARCHtモデルが最適な非線形時系列モデルであることを示す。
Citation	経済学研究, 54(3), 67-86
Issue Date	2004-12-09
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/5269">https://hdl.handle.net/2115/5269</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	ES_v54(3)_04.pdf



# 株価収益率ボラティリティの変動特性に関する実証分析

木村 俊一・渡辺 岳夫

## 1. はじめに

H. Markowitz と W. Sharpe が証券市場に関する理論への貢献によって 1990 年のノーベル経済学賞を受賞したことは、投資分野における科学的アプローチの重要性を広く認知させる出来事であった。情報通信技術と金融技術を融合した科学的な方法により資産運用を行うことは、いまや金融実務において必要不可欠なものとなっている。こうした時代の要請に応じて実際に役立つ投資理論を開発するには、現実の市場における金融資産の価格変動を観察・分析し、それらの特性を正確に把握することが重要である。価格変動の特性から遊離した理想的な条件下でしか成立しない理論では、実際にそれを用いたときに大きな損失を被る危険性がある。

理論と現実が一致しないことを示す典型的な例が、インプライド・ボラティリティが示すボラティリティ・スマイル効果 [16] である。ボラティリティを定数と仮定する Black-Scholes モデル [7] は、オプション価格をアット・ザ・マネーで過大評価、イン・ザ・マネーまたはアウト・オブ・ザ・マネーで過小評価する傾向にあることが以前より指摘されている。また、オプションのペイオフが原資産価格が辿る経路に依存して定まる経路依存型オプションのように、価格評価に Black-Scholes モデルを使うこと自体が妥当かどうかを考えなくてはならない金融商品もすでに広く販売されている。このため最近では、Black-Scholes モデルのような確率モデルに加えて、様々な時系列モデルを利用してオプション価格やボラティリティ変動を分析する傾向が強くなってきている。

これまでに知られているボラティリティ変動モデルには、大別して、ARCH (autoregressive conditional heteroskedasticity) 型モデルと確率ボラティリティ (stochastic volatility) モデルの 2 つがある。ARCH 型モデルは、ボラティリティを過去の情報に依存して変動させるモデルで、Black-Scholes モデルにおけるボラティリティ一定という仮定を緩めた離散時間モデルに相当する。ARCH 型モデルとしては、ボラティリティ変動を積過程で表現した Engle [12] による ARCH モデルや Bollerslev [9, 10] による GARCH モデルが提案されている。これらのモデルを用いることで、例えば金融時系列データでしばしば観察される「ボラティリティが大きい日の後にはボラティリティの大きい日が続く、小さい日の後には小さい日が続く」といった現象をうまく説明することが可能となる。株価収益率のボラティリティは、「株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が大きくなる」傾向(レバレッジ効果)があることが知られている。しかし、ARCH モデルや GARCH モデルでは、このようなボラティリティ変動の非対称性を扱うことができない。こうしたボラティリティ変動の非対称性を取り入れたモデルとして、Nelson [15] による EGARCH モデルや Glosten et al. [13] による GJR モデルが提案されている。

一方、確率ボラティリティモデルでは、ボラティリティ変動を線形の ARMA モデルによって定式化する。この定式化の下では誤差項が存在するため、ある期のボラティリティの値が直前の期で

は既知ではない。そのため、最尤法によってパラメータの推定を行うことが難しく、ARCH型モデルに比べてモデルの拡張や実際のデータへの適用があまりなされていないのが現状である。

そこで本論文では、ARCH型モデルに対して、1996年1月4日から2001年9月30日までの日経平均株価に対する実際のデータを用いて日次収益率を計算し、日次収益率のボラティリティ変動を表現するにはどの時系列モデルが最も適しているかを実証する。さらに、ARCH型モデルの誤差項の分布をより現実に近いとされる $t$ 分布のような裾の厚い分布に変更した場合の各モデルの改善の程度を検討する。時系列モデルの基礎的な解説とそのオプション価格評価への応用については付録にまとめる。

## 2. 日経平均株価データによる実証分析

### 2.1 株価に対する実証結果

#### 株価データの特徴

分析に用いるデータは1996年1月4日から2001年12月30日（データ数1403）の日経平均株価の終値である。第 $t$ 日（以下、単に $t$ 期という）の日経平均株価終値を $S_t$ で表す。図1は日経平均株価 $\{S_t; t = 1, \dots, 1403\}$ をプロットしたものであり、図2は対数日次収益率

$$R_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \approx \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \quad (1)$$

をプロットしたものである。

表1は、分析に用いたデータの基本統計量をまとめたものである。同じデータから、株価変化 $(S_t - S_{t-1})$ については、平均 $-7.734$ 、分散 $244.8$ と求めることができる。標本抽出期間がバブル崩



図1 日経平均株価 $S_t$  (1996/1/4 -2001/9/30)

表 1 日経平均株価の基本統計量

標本数	平均値	標準誤差	中央値	最大値	最小値
1403	17102.69	-76.08	17038.36	22666.8	9504.41

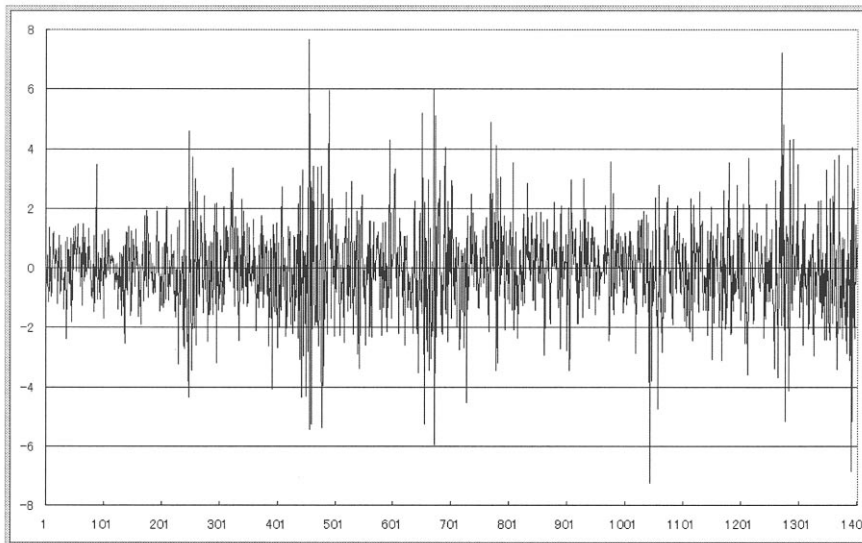
壊後のために平均が負の値となっていることが読み取れる。

### ランダムウォーク仮説の検証

株価がランダムウォークに従うという仮説が Black-Scholes モデルの根幹を形成していることは疑いようのない事実である。ランダムウォーク仮説は「過去の株価の動きをいくら分析しても将来の株価の動きや方向性は予測できない」ことを意味している。この仮説の正当性を示す1つの例として、実際の株価収益率の自己相関が0であるという分析結果が提示されることが多い。しかし、株価収益率の2乗の時系列については、その自己相関が有意に0とは異なることが知られている[3]。そこで、我々のデータについてもまずランダムウォーク仮説を検証してみることにする。表2の1行目は日経平均株価の対数日次収益率時系列データの自己相関を、2行目は対数日次収益率の2乗の自己相関に対する計算結果をそれぞれしたものである。表2の1行目の値から株価収益率データの自己相関は0と判断できるため、ランダムウォーク仮説は正当化されるように思える。し

表 2 日経平均株価収益率データの自己相関

次数	1	2	3	4	5	6	7
収益率	-0.0701	-0.0719	0.0495	-0.0463	0.0025	0.0016	-0.0039
収益率の2乗	0.117	0.179	0.185	0.0698	0.143	0.114	0.118

図 2 対数日次収益率  $R_t$  (1996/1/4—2001/9/30)

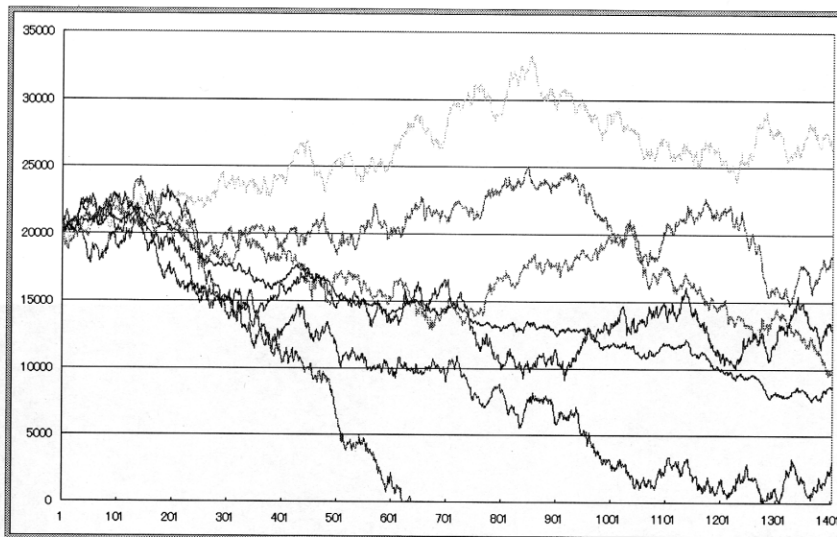


図3 日経平均のシミュレーション

かし、その2乗の自己相関は有意に0とは異なると判断できる。したがって、株価収益率は無相関ではあるが独立ではない時系列データであると結論付けられる。

日経平均株価がランダムウォークしているか否かをさらに検証するために、連検定を行なうことにする。連検定を行う手順は以下のとおりである [5]。

1.  $t-1$  期と  $t$  期の株価を比べ、 $t$  期の株価が  $t-1$  期よりも上昇していれば正の符号を、下落していれば負の符号を付ける。
2. 同じ符号が続く塊を1つの連として、その数を数える。
3. 標本数が多い場合には、連の個数  $X$  の標本分布は、平均と分散が

$$E[X] = \frac{2MN}{M+N} + 1, \quad V[X] = \frac{2MN(2MN - M - N)}{(M+N)^2(M+N-1)} \quad (2)$$

で与えられる正規分布に従うことが知られている。ここで、 $M$  は負符号の個数、 $N$  は正符号の個数を表している。この事実から、(連続補正された) 検定統計量

$$Z = \frac{X + 0.5 - E[X]}{\sqrt{V[X]}} \quad (3)$$

を計算し、その値が標準正規分布に従うことを用いて両側検定を行なう [2]。

日経平均株価に対するデータ ( $M = 724$ ,  $N = 678$ ,  $X = 736$ ) を用いて計算した結果は  $Z = 1.886 < z(0.025) = 1.96$  となり、有意水準 5% では「日経平均株価はランダムウォークに従う」という帰無仮説を棄却することができない。

ランダムウォーク仮説を検証する別の方法として、表計算ソフトウェア Microsoft Excel を利用して正規乱数を発生させ、モンテカルロ・シミュレーションを行なった。図3は、乱数を7系列発生させてプロットしたものである。乱数の違いによってシミュレーションの結果も当然異なってく

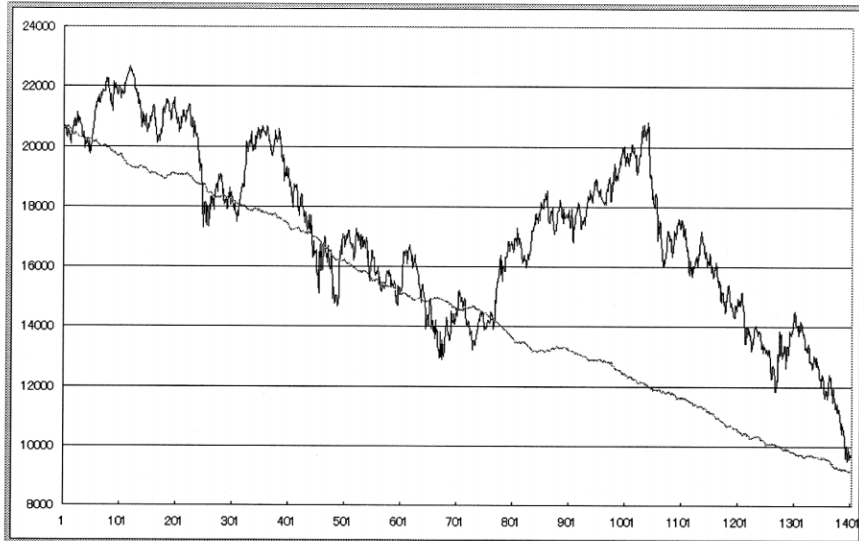


図4 日経平均株価と乱数100系列を用いた予測値

る。つまり乱数を用いたシミュレーションでは得られる予測値も毎回異なり、結局どの結果が最も適しているかは何も言えないことになる。図4は乱数を100系列発生させ、そこから得られる予測値の平均をプロットしたものである。多数の乱数を発生させ平均しているため、ランダムな要素が打ち消しあって、ほぼ直線に近い形となっていることがわかる。予測値に下方のトレンドがあるのは、標本期間の株価変化の平均が $-7.734$ と負の値を示しているためである。図3、4より、正規乱数を使ったシミュレーションでは、日経平均株価をうまく予測することは不可能であることが確認された。

## 2.2 株価収益率に対する実証結果

### 分析に用いるデータの特徴

表3は、株価日次収益率データの基本統計量をまとめたものである。表3より、以下のことが読み取れる。

1. 標本抽出期間がバブル崩壊後のために、日経平均株価日次収益率の標本平均は $-0.05324$ と負の値を示しているが、これは統計的に有意な値ではない。標本平均の標準誤差は、標本数を $T$ 、標本標準偏差を $\hat{\sigma}$ とすると、表3より $\sqrt{\hat{\sigma}^2/T} = 0.046$ と計算され、標本平均の値を上回っている。

表3 日経平均株価日次収益率(%)の基本統計量

標本数	平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	LB(12)
1402	$-0.05324$	1.52004	7.23398	$-7.66048$	0.031340146	5.361696	25.58
	(0.0406)				(0.0654)	(0.1308)	

括弧内の数値は標準誤差を示す。またLB(12)は、分散不均一性を調整したLjung-Box統計量である。

2. 歪度が  $0.031 > 0$  であることから、日経平均株価日次収益率の分布は右の裾が長いことがわかる。歪度の標本誤差は  $\sqrt{6/T} = 0.0654$  と計算される。
3. 尖度が  $5.362$  であることから、日経平均株価日次収益率の分布は正規分布よりも裾の厚い分布に従っていることがわかる。尖度の標本誤差は、 $\sqrt{24/T} = 0.1308$  と計算される。
4. LB(12) とは「日経平均株価日次収益率の 1 階から 12 階までの自己相関係数がすべて 0 である」という帰無仮説を検定するための LB (Ljung and Box) 統計量 [6] の値である。ただし、ここで計算されている LB 統計量は分散不均一性を調整したものである。帰無仮説が正しければ、この統計量は自由度 12 の  $\chi^2$  分布に従う。

$$LB(12) = 25.58 > \chi_{12}^2(0.05) = 21.03$$

より、この帰無仮説は有意水準 5% で棄却され、日経平均株価日次収益率には統計的に有意な自己相関が存在する。

5. 日経平均株価日次収益率の正規性を検証するために、Jarque and Bera による正規性の検定 [5] を行なう。歪度を  $\gamma_3$ 、尖度を  $\gamma_4$  で表すと、BJ 統計量

$$BJ = \frac{T}{24} \{4\gamma_3^2 + (\gamma_4 - 3)^2\} \quad (4)$$

は自由度 2 の  $\chi^2$  分布に従うことが知られている。

$$BJ = 23.27 > \chi_2^2(0.01) = 9.210$$

より、帰無仮説「収益率が正規分布に従う」は有意水準 1% で棄却され、収益率の正規性は否定される。

### 収益率に対する AR モデルの推定

表 4 (a) は AR モデルにおける次数選択の計算結果を示したものである。AIC および SIC がともに次数 2 で最小となることから、AR(2) モデルを選択することが最適である。表 4 (b) はパラメータの最小 2 乗推定値を示したものである。括弧内に示されている標準誤差は、White の方法 [6] で計算された誤差項の分散が不均一でも一貫性を満たす標準誤差である。表 4 (c) には残差  $\epsilon_t$  の基本統計量を示した。残差の自己相関の有無を検定するために LB(12) についても計算結果を示した。LB(12) = 8.37 であり、帰無仮説は 10% の有意水準でも採択されることから、推定された AR(2) モデルは LB 検定において許容される。

推定された AR(2) モデルより、適当な確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上で、 $T$  期における  $T+1$  期の期待収益率は

$$E_T[R_{T+1}] = -0.06143 + (-0.07613)R_T + (-0.07727)R_{T-1}$$

で与えられる。ここで、 $E_t[\cdot] \equiv E[\cdot | \mathcal{F}_t]$  は AR(2) が適合するフィルトレーション  $\{\mathcal{F}_t\}$  に関する条件付き期待値を表す。同様に、 $T$  期における  $T+k$  期 ( $k \geq 1$ ) の期待収益率は

$$E_T[R_{T+k}] = -0.06143 + (-0.07613)E_T[R_{T+k-1}] + (-0.07727)E_T[R_{T+k-2}]$$

と計算できる。この結果、 $T$  期から  $T+k$  期までの日次収益率の期待値は

$$E_T \left[ \log \left( \frac{S_{T+k}}{S_T} \right) \right] = E_T \left[ \sum_{i=1}^k R_{T+i} \right], \quad k \geq 1$$

で与えられる。しかし、表 4 (b) より、このモデルの自由度修正済み決定係数は 0.00951 と非常に小さく、日経平均株価の日次収益率のうち過去の値によって説明できる変動は小さいと考えられる

表4 AR(p) モデルによる日経平均株価日次収益率の分析

## (a) AIC および SIC

次数	AIC	SIC
0	0.838184	0.839184
1	0.835291	0.839037
2	0.831387	0.838879
3	0.831937	0.843175
4	0.831964	0.846948
5	0.833768	0.852497

## (b) 日次収益率 AR(2) モデルのパラメータの推定

$$R_t = a + b_1 R_{t-1} + b_2 R_{t-2} + \epsilon_t$$

パラメータ	a	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	$\bar{R}^2$
推定値	-0.06143	-0.07613	-0.07727	9.51E-03
標準誤差	0.04051	0.02668	0.02668	

$\bar{R}^2$  は自由度修正済み決定係数を表す。

(c) 残差  $\epsilon_t$  の基本統計量

標本数	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	$\epsilon_t$ の LB(12)	$\epsilon_t^2$ の LB(12)
1400	1.512503	7.508474	-7.13965	0.064778	5.136818	8.37	134.97
				(0.0655)	(0.1309)		

標準誤差 (括弧内の数値) は White の方法による。

ため、このモデルを用いて株式を売買したところで利益を上げられるかどうかは疑問である。

## 残差 2 乗に対する AR モデルの推定

表 4 (c) に示された残差 2 乗の LB(12) の値は、134.97 と非常に大きな値を示している。このことは、表 2 の結果と同様に、残差 2 乗には強い自己相関が存在する可能性を示している。そこで表 4 には株価収益率そのものではなく、AR(2) モデルを当てはめて得られた残差 2 乗のデータを使って、同様な分析を行なった結果を示した。表 5 (a) は次数選択の計算結果を示している。ここでは AIC および SIC がともに次数 5 で最小となることから AR(5) モデルを選択する。AR(5) モデルのパラメータの最小 2 乗推定値を表 5 (b) に示した。この場合の自由度修正済み決定係数は 0.054378 となりあまり大きいものとはいえないが、日経平均株価日次収益率に AR(2) モデルを当てはめた場合の 0.009514 より大きな値を示している。

$\epsilon_t^2$  は 1 期先の  $R_t$  を予測した際の予測誤差 ( $R_t - E_{t-1}[R_t]$ ) の 2 乗であり、将来の予測誤差の 2 乗の大きさはその株式への投資リスクを表していることから、残差 2 乗を表すモデルが推定できることは、投資家にとって非常に重要な情報を与えることを意味する。

## ARCH 型モデルの推定

日次収益率  $R_t$  は、 $t-1$  期に予測可能な変動  $E_{t-1}[R_t]$  と予測不可能なショック  $\epsilon_t$  に分割するこ

表5 AR(p)モデルによる残差2乗  $\epsilon_t^2$ 

(a) AIC および SIC

次数	AIC	SIC
0	3.09776655	3.09776655
1	3.08831985	3.09206573
2	3.07110303	3.07859478
3	3.05157556	3.06881319
4	3.05347884	3.06846234
5	3.04848564	3.06721503
6	3.05577398	3.06824924
7	3.05308408	3.06930521
8	3.05489532	3.07486233
9	3.05611165	3.07982454
10	3.05470436	3.08216313

(b) 残差2乗 AR(5)モデルのパラメータの推定

$$\epsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 \epsilon_{t-3}^2 + \alpha_4 \epsilon_{t-4}^2 + \alpha_5 \epsilon_{t-5}^2 + \eta_t$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\bar{R}^2$
推定値	1.36251	0.068524	0.110493	0.134968	0.007343	0.084349	0.054378
標準誤差	0.16402	0.02674	0.02680	0.02672	0.02680	0.02674	

とができる。

$$R_t = E_{t-1}[R_t] + \epsilon_t \quad (5)$$

予測不可能なショック  $\epsilon_t$  が積過程

$$\epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0 \quad (6)$$

で表せるものとする。ここで  $\{\sigma_t\}$  は過去の収益率  $\{R_{t-1}, R_{t-2}, \dots\}$  の関数であり、 $z_t$  は過去と独立でかつ同一分布に従う確率変数列であると仮定する。また、 $\sigma_t$  と  $z_t$  は独立であるとする。さらに  $z_t$  に対しては

$$E[z_t] = 0, \quad V[z_t] = 1 \quad (7)$$

を仮定する。過去の  $\{\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots\}$  が与えられたときの  $\epsilon_t$  の条件付き期待値と条件付き分散は、それぞれ

$$\begin{aligned} E_{t-1}[\epsilon_t] &= E_{t-1}[\sigma_t z_t] = \sigma_t E_{t-1}[z_t] = 0 \\ V_{t-1}[\epsilon_t] &= E_{t-1}[\epsilon_t^2] - \{E_{t-1}[\epsilon_t]\}^2 = E_{t-1}[\sigma_t^2 z_t^2] = \sigma_t^2 E_{t-1}[z_t^2] = \sigma_t^2 \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられるため、積過程の条件付き分散は時間  $t$  とともに変動する。また、 $k = 1, 2, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} C[\epsilon_t, \epsilon_{t-k}] &= E[\sigma_t z_t \sigma_{t-k} z_{t-k}] \\ &= E[E_{t-1}[\sigma_t z_t \sigma_{t-k} z_{t-k}]] \\ &= E[\sigma_t z_t \sigma_{t-k} E_{t-1}[z_{t-k}]] = 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\{\epsilon_t\}$  のすべての次数における自己相関は 0 である。したがって、積過程は無相関な系列である。

ARCH 型モデルのパラメータは最尤法を用いて推定することができる。しかし、最尤法を使うためには  $z_t$  の分布を特定する必要がある。本論文では、まず  $z_t$  の分布を標準正規分布と仮定して尤度を計算し、それを最大化するパラメータを推定する。次に、 $z_t$  の分布を  $t$  分布と仮定して尤度を計算し、最大尤度を与えるパラメータを推定する。この方法は疑似最尤法とよばれる。疑似最尤法によるパラメータの推定量は一致性をもつことが知られている [17, 18]。

ARCH 型モデルの次数選択も、AIC や SIC といった情報量基準に基づいて行われることが多い。しかし、ARCH 型モデルの場合 AIC や SIC を最小化するように選んだときに選ばれる次数の統計的な性質はまだよくわかっていないのが現状である [6]。そこで本論文では、実際に GARCH モデルを推定する際には次数 ( $p, q$ ) をデータの特性から決定しなければならないが、単純なケースの GARCH(1, 1) モデルでデータ変動をほぼ記述できると指摘する実証研究が多いことから [4]、GARCH(1, 1) モデルとその拡張モデルのみに限定する。

(i)  $z_t$  が標準正規分布に従う場合： $\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$

表 6 (a)–(c) は、それぞれ、GARCH(1, 1)、GJR(1, 1)、および EGARCH(1, 1) モデルに対する推定結果をまとめたものである。この場合は、EGARCH モデルの対数尤度をもっとも大きくなることから日次収益率の変動ボラティリティを表すモデルとしては EGARCH モデルが最も適していると考えられる。しかし、GJR モデルと EGARCH モデルを比べるとそれほど大きな差は生じていないことから、パラメータに非負制約をもつ GJR モデルと推定するパラメータ数が 1 つ多い EGARCH モデルのどちらを選択するかという問題はケース・バイ・ケースである。

ボラティリティ  $\sigma_t^2$  が時間  $t$  とともに変動するとき、積過程  $\epsilon_t = \sigma_t z_t$  の尖度は 3 を上回ることが知られている (付録 B.3 参照)。すなわち、収益率データの尖度が 3 以上だからといって  $z_t$  の分布が正規分布よりも裾の厚い分布になるとは必ずしも限らない。しかし、日経平均株価収益率に対する正規性の検定結果から、 $z_t$  の分布が何らかの裾の厚い分布に従っていることが明らかになったため、 $z_t$  の分布として正規分布よりも裾が厚い  $t$  分布を当てはめて検証してみよう ([8] 参照)。

(ii)  $z_t$  が自由度  $n$  の  $t$  分布に従う場合： $\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim t_n$

表 7 (a)–(c) は、表 6 に対応して、それぞれ、GARCH(1, 1)- $t$ 、GJR(1, 1)- $t$  および EGARCH(1, 1)- $t$  モデルに対する推定結果をまとめたものである。表 7 より、すべてのモデルに対して  $z_t$  の分布に標準正規分布を当てはめた場合よりも  $t$  分布を当てはめた方が対数尤度は大きくなることから読み取れる。このことから、日次収益率の分布は変動ボラティリティを調節しても正規分布には従わないことがわかる。どのモデルにおいても  $t$  分布の自由度は 7~8 であった。以上のことから日次収益率の変動ボラティリティを表すモデルとしては、EGARCH- $t$  モデルが最適であるといえる。

### 3. 結 論

本論文では、1996 年 1 月 4 日から 2001 年 12 月 30 日の日経平均株価終値のデータ (データ数 1403) から計算した日次収益率のボラティリティに対して、代表的な非線形時系列モデルを用いた実証研究を行なった。その結果、日次収益率のボラティリティ変動を表現するモデルとして

表6 ARCH型モデルの推定

## (a) GARCH(1,1) モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	対数尤度
推定値	0.0725	0.0933	0.878	-2481.72
標準誤差	0.0358	0.0284	0.0191	

## (b) GJR(1,1) モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma 1_{\{\epsilon_{t-1} < 0\}} (\epsilon_{t-1}) \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	対数尤度
推定値	0.0573	0.0698	0.169	0.890	-2438.54
標準誤差	0.0276	0.0336	0.0437	0.0302	

## (c) EGARCH(1,1) モデル

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left\{ \theta z_{t-1} + \gamma \left( |z_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right\} + \beta \log(\sigma_{t-1}^2)$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha$	$\theta$	$\gamma$	$\beta$	対数尤度
推定値	0.0297	0.0981	-0.166	0.269	0.952	-2430.29
標準誤差	0.0085	0.0528	0.0410	0.0349	0.0092	

表7 ARCH-t型モデルの推定

## (a) GARCH(1,1)-t モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	自由度	対数尤度
推定値	0.0698	0.0899	0.903	7.19	-2401.52
標準誤差	0.0498	0.0223	0.0224	1.77	

## (b) GJR(1,1)-t モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \gamma 1_{\{\epsilon_{t-1} < 0\}} (\epsilon_{t-1}) \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha$	$\gamma$	$\beta$	自由度	対数尤度
推定値	0.0632	0.0689	0.147	0.882	7.42	-2363.75
標準誤差	0.0226	0.0295	0.0486	0.0371	1.25	

## (c) EGARCH(1,1)-t モデル

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left\{ \theta z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E(|z_{t-1}|)) \right\} + \beta \log(\sigma_{t-1}^2)$$

パラメータ	$\omega$	$\alpha$	$\theta$	$\gamma$	$\beta$	自由度	対数尤度
推定値	0.0306	0.0885	-0.159	0.273	0.918	7.75	-2358.47
標準誤差	0.0071	0.0513	0.0392	0.0330	0.0089	1.03	

EGARCH- $t$ モデルが最適であることを示した。この結論自体は、本論文で比較対照として取り上げた他の ARCH 型モデルよりも EGARCH- $t$ モデルの説明パラメータの数が多いことからある程度は予想されたものではあるが、 $z_t$ を標準正規分布ではなく  $t$ 分布を仮定した場合の ARCH 型モデルにおける対数尤度の向上が非常に大きいという性質を得たことは注目に値する。この性質は株価収益率の正規性に関する帰無仮説が棄却されたことと整合する。ARCH 型モデルがボラティリティ変動のいかなる部分を説明しているのかを解明すること、さらには確率ボラティリティモデルによる検証は今後の課題である。また、Black-Scholes モデルに代る新たなオプション価格評価モデルの構築も大きな課題として残されている (付録 C 参照)。

\*本研究の一部は日本学術振興会平成 16 年度科学研究費補助金 (基盤研究(B) (2), 研究代表者: 木村俊一 (北海道大学), 課題番号 16310104) の助成による。

## 付 録

### A. 線形時系列モデル

時系列データ  $\{y_t\}$  は

$$y_t = m_t + x_t \quad (9)$$

と表現できる。ここで、 $m_t$  は時間  $t$  の関数で  $y_t$  の長期的な傾向を表わすのに対し、 $x_t$  は  $y_t$  から確定的な変動  $m_t$  を除いた部分であり、不規則的な確率変動を表すと考えることができる。

時系列モデルでは、通常、データの確率的特性が時間に関わらず一定であるという定常性の仮定をおく。すべての  $t$  に対して  $E[X_t^2] < \infty$  が存在し、条件

1.  $E[X_t] = \mu$ : すべての  $t$  に対して平均が一定である
2.  $V[X_t] = \gamma(0)$ : すべての  $t$  に対して分散が一定である
3.  $C[X_t, X_{t-k}] = \gamma(k)$ : 自己共分散が時間差のみに依存する

を満たすとき、確率過程  $\{X_t; t = 0, 1, \dots\}$  は定常過程であるという。

#### A. 1 代表的な線形時系列モデル

##### AR モデル

$x_t$  を説明するために、自分自身の過去(ラグ)を説明変数とする回帰モデル

$$x_t = a + \sum_{i=1}^p b_i x_{t-i} + u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (10)$$

を自己回帰モデルとよび AR( $p$ ) と書く。ここで、 $a$  と  $b_i$  は定数パラメータである。また誤差項  $u_t$  は通常の回帰モデルと同様に

(U-1) 平均が 0, 分散が  $\sigma^2 > 0$  であり、互いに無相関

(U-2) 各  $t$  について  $u_t$  と  $x_{t-k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) は互いに独立

な系列であるという仮定を満たす。また、この仮定を満たす確率変数列  $\{u_t\}$  をホワイトノイズという。自己回帰モデルは説明変数にラグを含むことから、定常であるとは限らない (次節参照)。一

般にモデルの定常性が保証されるための条件は

方程式  $1 - b_1 z - b_2 z^2 - \dots - b_p z^p = 0$  のすべての根の絶対値が 1 より大きいであることが知られている。

### MA モデル

ホワイトノイズ  $\{u_t\}$  に対して

$$x_t = \mu + u_t + \sum_{i=1}^q c_i u_{t-i}, \quad t = 1, \dots, T \quad (11)$$

と表される時系列モデルを移動平均モデルとよび、MA( $q$ ) と書く。ここで、 $\mu$  と  $c_i$  は定数パラメータである。移動平均モデルに対し、平均、分散および  $k$  次の自己共分散関数は、それぞれ

$$E[x_t] = \mu \quad (12)$$

$$V[x_t] = \sigma^2 \sum_{i=1}^q c_i^2 \quad (13)$$

$$C[x_t, x_{t-k}] = \begin{cases} c_k + c_{k+1} c_1 + c_{k+2} c_2 + \dots + c_q c_{q-k}, & k = 1, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases} \quad (14)$$

で与えられる [14]。明らかに MA( $q$ ) は定常過程である。

### ARMA モデル

自己回帰モデル AR( $p$ ) と移動平均モデル MA( $q$ ) に対して、

$$\text{ARMA}(p, q) = \text{AR}(p) + \text{MA}(q)$$

によって定められる時系列モデル、すなわち

$$x_t = \mu + \sum_{i=1}^p b_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^q c_i u_{t-i}, \quad t = 1, \dots, T \quad (15)$$

を自己回帰平均移動モデルとよぶ。定常過程を推定するためには、平均や分散に加えて（無限個の）自己相関を求めなければならないが、自己回帰平均移動モデルを用いると、有限個のパラメータによってすべての自己相関を定めることができる。

## A. 2 データの定常化

現実の時系列は必ずしも常に定常であるとは限らない。定常性の条件を満たしていない時系列は非定常な時系列とよばれる。分析にあたっては何らかの方法でデータを定常化する必要がある。経済時系列データの非定常性の原因には、①データの平均の変化、②分散の変化、③季節性などがある。以下ではそれぞれの処理方法を説明する。

### トレンドの処理

経済時系列では、データの平均の変化は時間に対してトレンドをもつことが多い。これを処理する方法としては

(a-1) データの階差を取る。

(a-2) 外生的なトレンドの関数を仮定する。

の2つの方法が代表的である。方法 (a-1) では、データ系列を

$$\{\Delta^d x_t\} = \{\Delta^d x_d, \Delta^d x_{d+1}, \dots, \Delta^d x_T\}, \quad \Delta^d \equiv (1-B)^d, \quad B^d = x_{t-d} \quad (16)$$

とし、このデータ系列に対して ARMA モデルを適用する。ここで、ラグ演算子  $\mathcal{L}$  を

$$\mathcal{L}^i y_t = y_{t-i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

で定義する。 $\Delta = 1 - \mathcal{L}$  を階差演算子、 $d$  を階差の階数という。経済データの場合は、経験的に1階の階差で十分である。(15)はラグ演算子  $\mathcal{L}$  を用いて

$$b(\mathcal{L})x_t = \mu + c(\mathcal{L})u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (18)$$

と表すことができる。ここで

$$b(\mathcal{L}) = 1 - \sum_{i=1}^p b_i \mathcal{L}^i, \quad c(\mathcal{L}) = 1 - \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{L}^i \quad (19)$$

である。階差を  $d$  階取った過程が ARMA ( $p, q$ ) モデルに従うとき

$$b(\mathcal{L})\Delta^d y_t = \mu + c(\mathcal{L})u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (20)$$

となり、自己回帰和分移動平均モデル、あるいは単に和分モデルとよばれ、ARIMA( $p, d, q$ ) と書く。階差を取ったデータに当てはめられた定常な ARMA モデルを加え合わせることで、非定常なデータを表すモデルを構築できる。

他方、方法 (a-2) では、トレンドの関数  $f(t)$  を

$$b(\mathcal{L})x_t = \mu + f(t) + c(\mathcal{L})u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (21)$$

のように ARMA モデルの式の中に組み込んで分析を行う。

### 分散変化の処理

分散の変化による非定常性を処理する方法である。経済時系列では、分散もトレンドをもつ時間的変化をすることが多い。この処理にあたっては、データに対して対数変換を行うのが一般的である。実際の経済データの分析においては、対数変換と1階の階差の組み合わせが定常化に有効であることが多い。

### 季節性の処理

季節性による非定常性を処理する方法としては

(b-1) データの階差を取る。

(b-2) 外生的なトレンドの関数を仮定する。

の2つの方法が代表的である。方法 (b-1) では、データ系列を

$$\{\Delta_S^D x_t\} = \{\Delta_S^D x_D, \Delta_S^D x_{D+1}, \dots, \Delta_S^D x_T\} \quad (22)$$

とし、このデータ系列に対して ARMA モデルを適用する。ここで、 $\Delta_S = 1 - \mathcal{L}^S$  を季節階差演算子、 $D$  を季節階差の階数、 $S$  を季節の周期という。

方法 (b-2) では、季節性の関数  $s(t)$  を

$$b(\mathcal{L})x_t = \mu + s(t) + c(\mathcal{L})u_t \quad (23)$$

のように ARMA モデルの式の中に組み込んで分析を行う。処理方法から (a-1) と (b-1) は乗法的方法、(a-2) と (b-2) は加法的方法とよばれる。

### A. 3 予測誤差

株価収益率が AR( $p$ ) モデル

$$R_t = a + \sum_{i=1}^p b_i R_{t-i} + \epsilon_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (24)$$

に従っていると仮定すると、 $T$  期における  $T+1$  期の期待収益率が

$$E_T[R_{T+1}] = a + \sum_{i=1}^p b_i R_{T+1-i} \quad (25)$$

と計算できる。

投資家がこのモデルに従って将来の期待収益率を求め、それに基づいて投資を行うと仮定する。危険回避的な投資家はリスクの代償として危険資産に安全資産の収益率を上回る期待収益率を要求する。危険資産の収益率と安全資産の収益率の差をリスクプレミアムとよぶ。ある株式の期待収益率が、安全利率にリスクプレミアムを加えた値を上回ると計算された場合、投資家はその株式を購入するであろう。その結果、株価は上昇し超過期待収益率はリスクプレミアム分まで押し下げられてしまう。従って、株価収益率に対する時系列分析はあまり有用ではないように思われる。

そこで、少し視点を変えて収益率  $R_t$  そのものではなく、それに AR( $p$ ) モデルを当てはめた残差の 2 乗  $\{\epsilon_t^2\}$  に注目する。収益率の従うモデルが (24) により与えられたとすると

$$E_{t-1}[R_t] = a + \sum_{i=1}^p b_i R_{t-i} \quad (26)$$

となる。(24) から (26) を引いた両辺を 2 乗すると

$$(R_t - E_{t-1}[R_t])^2 = \epsilon_t^2 \quad (27)$$

が得られ、 $\epsilon_t$  は 1 期先の  $R_t$  を予測した際の予測誤差  $(R_t - E_{t-1}[R_t])$  であることがわかる。将来の予測誤差の 2 乗の大きさは、その株式への投資リスクを表していると考えられる。なぜなら株式のリスクは、その収益率の分散

$$V_{t-1}[R_t] = E_{t-1}[(R_t - E_{t-1}[R_t])^2] = E_{t-1}[\epsilon_t^2] \quad (28)$$

または標準偏差で定義されるからである。予測誤差の 2 乗の期待値は収益率の条件付き分散と等しいことから、予測誤差の 2 乗を求めることは、将来の収益率の条件付き分散を求めることと等価である。

## B. 非線形時系列モデル

### B.1 代表的な非線形時系列モデル

#### ARCH モデル

Engle [12] は、ボラティリティに対するショックの持続性を考慮するため、ボラティリティを過去の収益率の予期せざるショックの線形関数をして定式化した ARCH( $p$ ) モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2, \quad t = 1, \dots, T \quad (29)$$

を提案した。ここで、 $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, p$ ) である。パラメータに非負制約を課すのは、ボラティリティの非負性を保証するためである。ARCH( $p$ ) モデルの定常性が保証される 1 つの十分条件は

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1 \quad (30)$$

であることが知られている。

#### GARCH モデル

Bollerslev [9, 10] による GARCH( $p, q$ ) モデルは、ボラティリティの説明変数に過去の収益率の予測不可能なショックの 2 乗だけでなく、過去のボラティリティの値を加えている。すなわち

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t = 1, \dots, T \quad (31)$$

と表すことができる。ここで、 $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$ ) である。このモデルは、 $q = 0$  とすると ARCH( $p$ ) モデルと一致し、ARCH モデルの一般化モデルとみなすことができる。GARCH( $p, q$ ) モデルの定常性が保証される 1 つの十分条件は

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (32)$$

であることが知られている。

#### GJR モデル

Glosten et al. [13] による GJR( $p, q$ ) モデルは、GARCH モデルにボラティリティ変動の非対称性を取り入れたモデルであり、 $\epsilon_{t-1} < 0$  であれば 1, それ以外では 0 を取る指標関数  $1_{\{\epsilon_{t-1} < 0\}}$  ( $\epsilon_{t-1}$ ) を加えている。すなわち

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p (\alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i 1_{\{\epsilon_{t-1} < 0\}} (\epsilon_{t-1}) \epsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t = 1, \dots, T \quad (33)$$

で与えられる。このモデルにおいてもボラティリティの値が負にならないために、パラメータに非負制約

$$\omega > 0, \quad \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \geq 0 \quad (i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q)$$

が必要となる。

## EGARCH モデル

ARCH モデル, GARCH モデルおよび GJR モデルでは, ボラティリティが負にならないようにパラメータに非負制約を課す必要があった。こうした制約があるとパラメータを推定する際に厄介である。そこで, Nelson [15] による EGARCH( $p, q$ ) モデルは, ボラティリティを被説明変数とするのではなく, その(自然)対数値を被説明変数とすることで, パラメータの非負制約を取り除いている。また, EGARCH( $p, q$ ) モデルは, 過去の収益率の予測誤差  $\epsilon_{t-i}$  をボラティリティの平方根  $\sigma_{t-i}$  で割って基準化した  $z_{t-i}$  (i.e.,  $z_{t-i} = \epsilon_{t-i}/\sigma_{t-i}$ ) を説明変数に加えることで, ボラティリティ変動の非対称性を示すことも可能である。すなわち

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i [\theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E[|z_{t-i}|])] + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2), \quad t = 1, \dots, T \quad (34)$$

で与えられる。

ボラティリティのショックの持続性を調べるには, GARCH( $p, q$ ) モデルはボラティリティ  $\sigma_{t-1}^2$  の変動を含む予測誤差の 2 乗  $\epsilon_{t-1}^2$  を説明変数としているため,  $\alpha + \beta$  の値を見なければならぬが, EGARCH( $p, q$ ) モデルは  $z_{t-i}^2$  の変動と  $\sigma_{t-1}^2$  の変動が独立であることから  $\beta$  の値だけを見ればよいという利点をもっている。

## B. 2 線形モデルへの変換

**定理 B. 1**  $\{\epsilon_t\}$  が ARCH( $p$ ) モデルに従うとき,  $\{\epsilon_t^2\}$  は AR( $p$ ) モデルに従う。

**証明:**  $v_t \equiv \epsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$  とおくと, (29) より

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + v_t$$

と変形できる。ここで, (6) と (7) より

$$E[v_t] = E[E_{t-1}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)]] = E[\sigma_t^2 E_{t-1}[z_t^2 - 1]] = 0$$

となり,  $k > 0$  とすると

$$\begin{aligned} E[v_t v_{t-k}] &= E[E_{t-1}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)\sigma_{t-k}^2(z_{t-k}^2 - 1)]] \\ &= E[\sigma_t^2 \sigma_{t-k}^2 (z_t^2 - 1) E_{t-1}[z_{t-k}^2 - 1]] = 0 \end{aligned}$$

となるから,  $\{v_t\}$  はホワイトノイズである。また

$$\begin{aligned} E(v_t \epsilon_{t-k}^2) &= E[E_{t-1}[\sigma_t^2(z_t^2 - 1)(\sigma_{t-k}^2 z_{t-k}^2)]] \\ &= E[\sigma_t^2 \sigma_{t-k}^2 z_{t-k}^2 E_{t-1}[z_t^2 - 1]] = 0 \end{aligned}$$

であるから  $\{v_t\}$  と  $\{\epsilon_{t-k}^2\}$  は無相関である。したがって,  $\{\epsilon_t^2\}$  は AR( $p$ ) モデルになる。□

この定理より, 残差 2 乗に AR( $p$ ) モデルを当てはめることは, 変動ボラティリティに ARCH( $p$ ) モデルを当てはめていることと等価であることがわかる。本論文第 2 章では, この定理の結果から, 変動ボラティリティに対する ARCH 型モデルのパラメータを推定する前に, 収益率とその式から得られた残差 2 乗のデータに AR( $p$ ) モデルを当てはめている。

**定理 B. 2**  $\{\epsilon_t\}$ が GARCH( $p, q$ ) モデルに従うとき,  $\{\epsilon_t^2\}$ は ARMA( $(\max(p, q), q)$ ) モデルに従う。

**証明** :  $v_t \equiv \epsilon_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(z_t^2 - 1)$  とおくと,  $\{v_t\}$ はマルチンゲール差となる [3]。  $p > q$  のとき

$$\begin{aligned} \epsilon_t^2 &= \sigma_t^2 + (\epsilon_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + v_t \\ &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j (\epsilon_{t-j}^2 - v_{t-j}) + v_t \\ &= \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=q+1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q \beta_j v_{t-j} \end{aligned}$$

これは, ARMA( $p, q$ ) モデルである。同様にして  $p \leq q$  のときは ARMA( $q, q$ ) モデルになる。 □

以上の定理より, もし ARMA モデルにおける MA 部分が反転可能性の条件を満たしているならば,  $\{\epsilon_t^2\}$ は AR( $\infty$ ) として表される。このとき, GARCH は ARCH( $\infty$ ) として特徴付けられる。したがって, ARCH モデルに当てはめると次数が高くなってしまいう場合でも, GARCH モデルによって簡潔にデータをモデル化できることがわかる。

### B. 3 ボラティリティの変動と尖度

$\epsilon_t^4$  の無条件期待値について検討する。(6)より

$$E[\epsilon_t^4] = E[\sigma_t^4 z_t^4] = E[\sigma_t^4] E[z_t^4] \geq E[\sigma_t^2]^2 E[z_t^4] \quad (35)$$

が成り立つ。ここでは, Jensen の不等式を利用した。等号が成り立つのは, ボラティリティが時間に依らず一定の場合のみである。また,  $\sigma_t^2$  を条件とする  $\epsilon_t^2$  の条件付き期待値  $E(\epsilon_t^2 | \sigma_t^2)$  は, (6)より

$$E[\epsilon_t^2 | \sigma_t^2] = E[\sigma_t^2 z_t^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^2 E[z_t^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^2 E[z_t^2] = \sigma_t^2 \quad (36)$$

である。上式の両辺の期待値を取ると

$$E[\sigma_t^2] = E[E[\epsilon_t^2 | \sigma_t^2]] = E[\epsilon_t^2]$$

この式と, (35)から

$$E[\epsilon_t^4] \geq E[\sigma_t^2]^2 E[z_t^4] = E[\epsilon_t^2]^2 E[z_t^4] \quad (37)$$

が成り立つ。 $E[z_t^2] = 1$  より

$$\frac{E[\epsilon_t^4]}{E[\epsilon_t^2]^2} \geq \frac{E[z_t^4]}{E[z_t^2]^2} \quad (38)$$

となり,  $z_t$  が標準正規分布に従う場合,  $E[z_t^4] = 3$  だから, 仮に  $z_t$  が標準正規分布に従うとしてもボラティリティ  $\sigma_t^2$  が時間的に変動するならば,  $\epsilon_t$  の尖度は3より大きくなることがわかる。ただし, これは  $z_t$  の分布が標準正規分布であり,  $\epsilon_t$  の尖度がボラティリティの変動だけで完全に説明できることを示した訳ではない。たとえボラティリティが変動するとしても,  $z_t$  自体が裾の厚い分布に従っている可能性があるからである。

### C. GARCH モデルによるオプション価格評価

GARCH モデルによるオプションの価格評価は Duan [11] により提案された。しかし、GARCH が離散時間過程であるために、1 期間の変化が多様すぎて市場が完備とはならない。そのため Duan は代表的個人の効用関数を以下のように仮定することで、オプション価格評価を行った。

- ・相対的リスク回避度一定の効用関数で、総消費の対数の変化がある確率測度  $P$  の下で一定の平均と分散をもつ正規分布に従う。
- ・絶対的リスク回避度一定の効用関数で、総消費の対数の変化がある確率測度  $P$  の下で一定の平均と分散をもつ正規分布に従う。
- ・効用関数が線形である。

この効用関数の仮定の下では LRNVR (locally risk-neutral valuation relationship) が成立し、確率測度  $P$  と同値なマルチンゲール測度  $\mathbb{P}$  が存在する。同値マルチンゲール測度の下では、収益率は対数正規分布に従い

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] &= e^r, \\ \mathbb{V}\left[\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] &= V\left[\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \end{aligned} \quad (39)$$

となる。ここで、 $\mathbb{E}[\cdot], \mathbb{V}[\cdot]$  は確率測度  $\mathbb{P}$  に関する平均と分散を、 $r$  は 1 期間の (連続複利) 安全利子率を表す。確率測度  $\mathbb{P}$  の下での価格過程  $\{S_t; t \geq 0\}$  に対して

$$\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t \quad (40)$$

が成り立つ。ここで、 $\xi_t | \mathcal{F}_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ ,

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1(\xi_{t-1} - \mu(\sigma_t) + r)^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \geq 0$$

である (詳細については Duan [11] 参照)。また、確率測度  $\mathbb{P}$  の下で、満期  $T$  での原資産価格は

$$S_T = S_t \exp\left\{r(T-t) - \frac{1}{2} \sum_{s=t+1}^T \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^T \xi_s\right\} \quad (41)$$

と表すことができる。原資産の割引現在価格  $e^{-rt} S_t$  は確率測度  $\mathbb{P}$  の下でマルチンゲールになる。したがって、GARCH(1, 1) モデルで表される原資産の上に書かれた満期  $T$ 、権利行使価格  $K$  ヨーロピアンコールオプションの時点  $t \in [0, T]$  での価格  $C(t, T, K)$  は

$$C(t, T, K) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \quad (42)$$

で与えられる [1]。

## 参考文献

- [1] 木村俊一『金融工学入門』実教出版 (2002)。
- [2] ———・古澄英男・鈴木晶夫『確率と統計』朝倉書店 (2003)。
- [3] 小暮厚之『ファイナンスの計量分析』朝倉書店 (1996)。
- [4] 白石典義・高山俊則「株価収益率ボラティリティの長期依存性とロングメモリー・モデル」『リスク管理と金融・証券投資戦略—ジャフィー・ジャーナル 1998』123-150 (1998)。
- [5] 養谷千鳳彦『ブラック・ショールズモデル』東洋経済新報社 (2000)。
- [6] 渡部敏明『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店 (2000)。
- [7] Black, F. and Scholes, M., “The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 637-659 (1973).
- [8] Blattberg, R. C. and Gonedes, N. J., “A comparison of the stable and Student distributions as statistical model for stocks prices,” *Journal of Business*, 47, 244-280 (1974).
- [9] Bollerslev, T., “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics* 31, 307-327 (1986).
- [10] Bollerslev, T., “A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return,” *The Review of Economic and Statistics*, 69, 542-547 (1987).
- [11] Duan, J. C., “The GARCH option pricing model,” *Mathematical Finance*, 5, 13-32 (1995).
- [12] Engle, R. F., “Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation,” *Econometrica*, 50, 987-1008 (1982).
- [13] Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E., “On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks,” *Journal of Finance*, 48, 1779-1801 (1993).
- [14] Hamilton, J. D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1994).
- [15] Nelson, D. B., “Conditional heteroskedasticity in asset returns,” *Econometrica*, 59, 347-370 (1991).
- [16] Rubinstein, M., “Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the thirty most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978,” *Journal of Finance*, 40, 455-480 (1985).
- [17] Weiss, A. A., “ARMA models with ARCH errors,” *Journal of Time Series Analysis*, 5, 129-143 (1984).
- [18] Weiss, A. A., “Asymptotic theory for ARCH models: estimation and testing,” *Econometric Theory*, 2, 107-131 (1986).