



Title	ランジュヴァン方程式とその応用 予稿集
Author(s)	岡部, 靖憲
Description	1988年8月20日 (土) -8月22日 (月) 北海道大学 理学部 数学教室 (4-508)
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 9, 1
Issue Date	1988-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/5128
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/5443
Type	departmental bulletin paper
File Information	09.pdf



ランジュヴァン方程式とその応用

予稿集

日時： 1988年8月20日(土)～8月22日(月)

場所： 北海道大学 理学部 数学教室 (4-508)

(代表者 岡部 靖 憲)

Series #9. August, 1988

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- | # | Author | Title |
|----|----------------|--|
| 1. | T. Morimoto, | Equivalence Problems of the Geometric Structures
admitting Differential Filtrations |
| 2. | J. L. Heitsch, | The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds |
| 3. | | Twelfth Sapporo Symposium on Partial Differential Equations in 1987,
Edited by K. Kubota |
| 4. | J. Tilouine, | Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module |
| 5. | | Abstracts of Mathematical Analysis seminar 1987
Edited by Y. Giga |
| 6. | | 1987年度談話会ワークアウト集, Edited by T. Yoshida |
| 7. | | “特異点と微分幾何” 研究集会報告集,
Edited by S. Izumiya and G. Ishikawa |
| 8. | | The thirteenth Sapporo Symposium on Partial Differential Equations in
1988, Edited by K. Kubota |

ランジュヴァン方程式とその応用

科研費総合研究A『確率論の総合研究』（代表者 池田 信行）による
シンポジウムを次のように開催致します。

研究分担者 岡部 靖憲（北大・理）

記

1. 日時： 1988年8月20日（土） ～ 8月22日（月）
2. 場所： 北海道大学理学部数学教室 4-508室
3. 講演：

8月20日（土）		page
9:00～10:00	嶋 中 雄 二 (日本経済研究センター)	1-8
	太陽活動と景気	
10:30～11:30	田 村 義 保 (統数研)	9-13
	非定常時系列モデルとその応用	
13:00～14:00	岡 部 靖 憲 (北大・理)	14-19
	KM ₂ O-ランジュヴァン方程式論(I)	
14:30～15:30	野 田 明 男 (愛教大)	20-24
	ガウス確率場に対する確率変分解析	
8月21日（日）		
9:00～10:00	長 島 知 正 (室工大)	25-28
	カオス的時系列のデータ解析に関するコメント	
10:30～11:30	杉 本 幸 司 (北大・理)	29-33
	KM ₂ O-ランジュヴァン方程式論(II)	

13:00~14:00 井上 昭彦 (北大・理) 34-37
KM₂O-ランジュヴァン方程式とフィルタリング

14:30~15:30 今野 紀雄 (室工大) 38-41
KM₂O-ランジュヴァン方程式と音楽分析

8月22日 (月)

9:00~10:00 中 澤 宏 (京大・理) 42-48
森の (量子) ランジュヴァン方程式

10:30~11:30 広 川 真 男 (北大・理) 49-54
RWA-振動子に対する森のランジュヴァン方程式

13:00~13:30 香 坂 雅 子 (北大・医) 55-57
発作波の時系列解析

14:00~15:00 岡 部 靖 憲 (北大・理) 58-64
KM₂O-ランジュヴァン方程式と量子統計

連絡先: 北海道大学理学部数学教室

TEL : 011-716-2111 内線 2679 (河合)

説明と予測 太陽黒点が 経済を支配する

5つの循環論からみた 物価・金利・相場の新波動

日本経済研究センター研究員
鳴中 雄二

恐らく今度のアメリカの干ばつは大事に至らない。インフレ懸念 金利上昇不安は消えるだろう。心配しなければならないのは 「目先のインフレより次のデフレ」である。これが経済を支配する5つの基本的な季節・気象循環を検証した結論だ。この5つの自然界のサイクルに対応した短期・中期・長期の景気循環論が存在するのは偶然ではない。

「太陽面で爆発」に 証券マンから電話

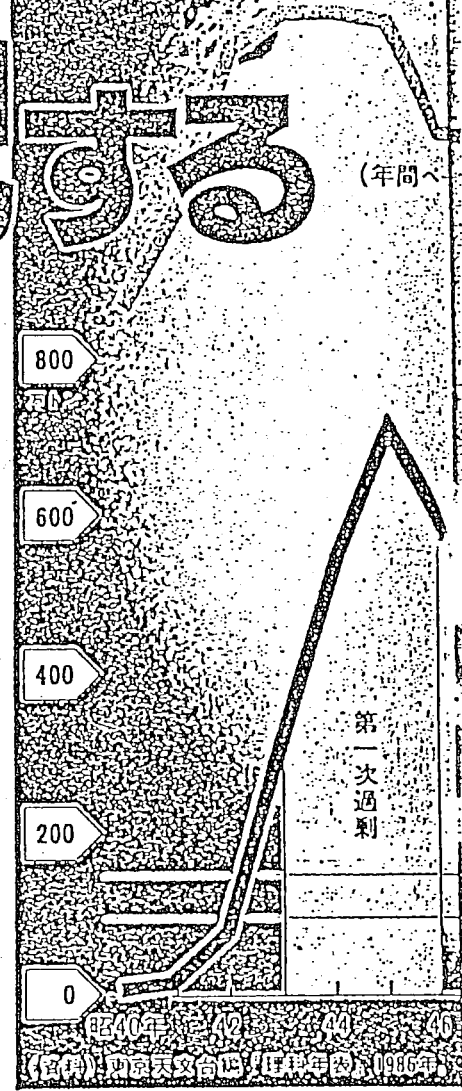
アメリカ中西部穀倉地帯での干ばつという気象・農業問題が穀物とりわけ大豆を中心とする国際商品市況を乱高下させ、これがインフレ懸念との絡みで、世界の金融市場を一喜一憂させている。

今回の干ばつは、例年と異なり、春に始まり、4月中旬以降7月初旬までまとまった降雨がなかったため、一部には、1934年の大干ばつ以来、実に54年ぶりの深刻な事態であるとの見方もあった。

そこで、「干ばつ→大豆(トウモロコシ)の大幅減産→価格高騰」

という最悪シナリオに思惑が入り込んで、3月末ごろに1ブッシェル=6.5台だった大豆価格は6月には一時11.5近くまで上昇した。これにより大豆関連のウエートが14.3%を占めるC R B先物指数も、3月の220台から一気に一時280近くまで上昇し、世界的なインフレ懸念に火をつけ、長期金利を上昇させる格好となったわけだ。

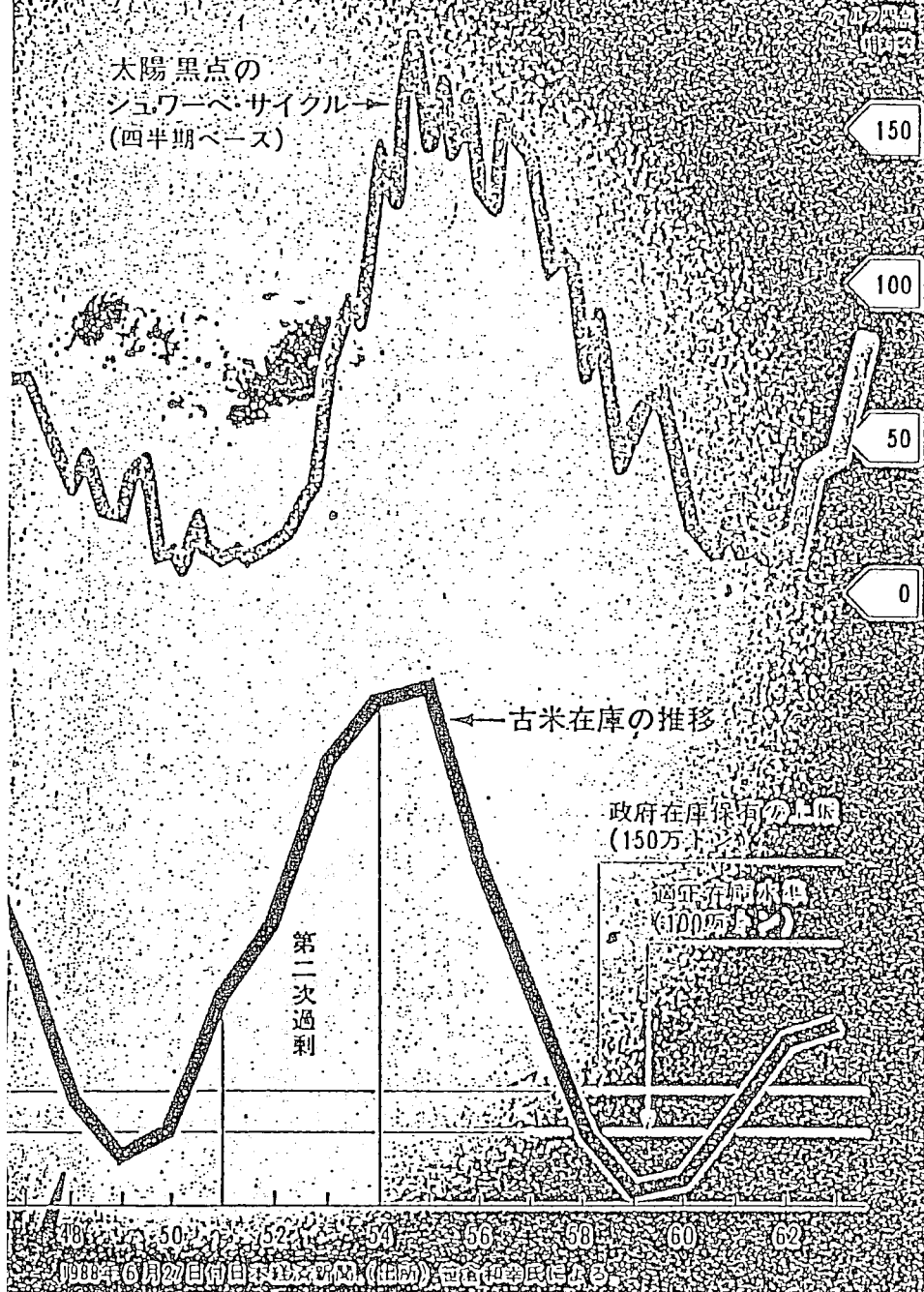
そこへ6月末から7月初めにかけて、不気味なことに「太陽面で大規模爆発。4年ぶりの大黒点群出現」なるニュースが外電や新聞を通じて伝えられ、すお異常気象ということで、マーケットでも大いに注目された。



筆者が「太陽活動と景気」(日本経済新聞社、1987年)の著者であることを思い出して、6月の末ごろ、某証券会社の調査マンが心配そうに電話をかけてきた。いわく「なにやら太陽活動が異常に活発になってきているようで、アメリカではカリフォルニア工科大学の科学者たちが太陽面爆発の異常を報告したり、西ドイツではこの太陽の動きと干ばつとの連動性が指摘されたりしているようですが、お説はいかがでしょうか」と。

筆者は、この時期に太陽活動が

シュワーベ・サイクルと古米在庫の推移



活発になって、フレアと呼ばれる太陽面爆発が頻発するのは、珍しいことでもなんでもない。むしろこの干ばつは今年3月末に終息したエルニーニョ現象の余波と考えられ、早晚雨が降って、この大豆ブームも終えんし、インフレ懸念も鎮静し、金利は下落するだろう、と答えておいた。

設備投資循環は太陽黒点サイクル

太陽活動には、後に触れるように、さまざまなリズム・周期があ

るが、最も基本的なものは、「シュワーベ・サイクル」と呼ばれる11年周期である。太陽の表面に出現する黒点は、ウォルフ太陽黒点相対数という指標で計測され、これが太陽活動のパロメーターとなっている。

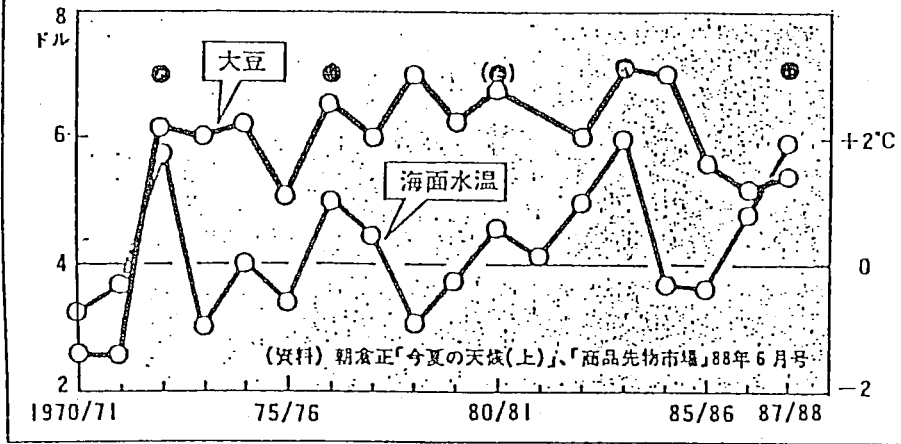
その数は多いときで通常120～130程度(これまでの最大は、1957年の190.2)、少ないときにはほとんどゼロになってしまう。これがほぼ11年周期で繰り返されるのだが、黒点の極大期が近づくと、フレアが頻発して、X線や紫外線、

電磁波など種々の太陽放射線が地球へと降り注いでくる。そして、地球の磁気圏とぶつかって磁気おらしを巻き起こし、極地方ではオーロラを発生させる。

磁気おらしが発生したときには、テレビやラジオ、無線通信などに障害が出るほか、半導体を通じてコンピュータ回線にも影響を与えやすい。ソ連では、心臓病患者に発作が起こりやすいことから、病院に磁気おらし警報を発令するほどである。

今回のフレアは、6月23、24日の両日と6月29日の計3日間観測され、東京天文台に入った速報によると、いずれもその規模は、重要度のクラス分けでいうと、「2」という水準で、1984年4月25日に記録された重要度3のフレアには及ばない。しかも今回の場合には、84年と異なり、黒点のシュワーベ・サイクルの上昇局面に起こったもの(前回の谷は1986年、今回の山はおそらく1990年)であるため、ことさらに驚くことではない。

〈図2〉大豆価格(シカゴ現物年間平均)と東太平洋赤道海面水温(平年からの差)



可能性は否めないのである。

経済を左右する気象変動

気象というと、すぐ思い浮かぶのが、春夏秋冬の四季ではないだろうか。春は暖かく、夏は暑く、秋は涼しく、冬は寒い。この四季の気温の変化は、1年を周期として規則的に繰り返している。

こうした四季の変化に対応して、1年を周期として発生する経済活動の変動を「季節変動」と呼ぶわけだが、この変動の幅は意外に大きく、経済指標の多くは、著しい幅で規則的に季節変動を繰り返している。そこで、エコノミストは、この季節変動を除去するために、一般に季節調整を施した後の経済統計(前年比でもよい)を用いて論ずる。

その意味では、エコノミストたちも、気象のもつ威力を一応は理解している。ところが、一度「季節調整済み値」を使用してしまうと、その途端に気象の存在がいさっぱり忘れられてしまうことが多いのである。そうしておいて、ちょっと異なる気象が発生すると、マーケットの参加者もエコノミストも、一斉に「異常気象」と

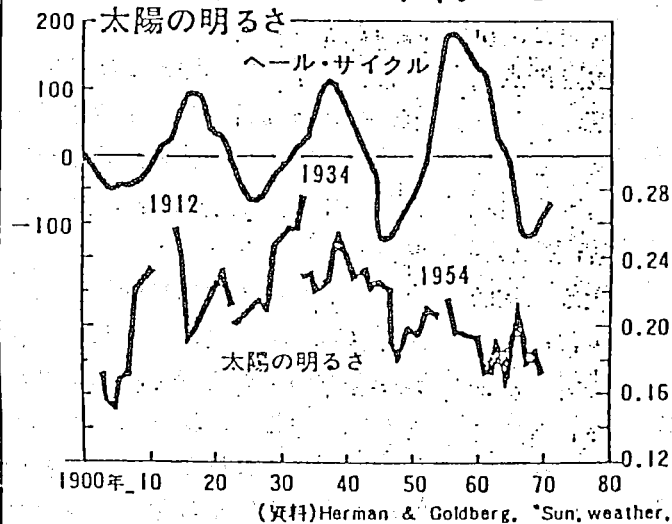
ただ、図1に見られるように、今回のシュワーベ・サイクルの立上がりはきわめて速く、87年1~3月期に9.2にすぎなかった黒点数が88年4~6月期にはすでに78.2、特に6月には94.8にまで増加している。このペースは、1957年に史上最大の黒点数を記録したサイクルの立上がりと同様か、それを上回る勢いである。したがって、今後の太陽黒点数の推移によっては、もちろん異常な事態の発生も考えられないことではない。

この黒点のシュワーベ・サイクルが、実は一般に「設備投資循環」といわれている「ジェグラー・サイクル」の原因であるというのが筆者の見解である。筆者は必ずし

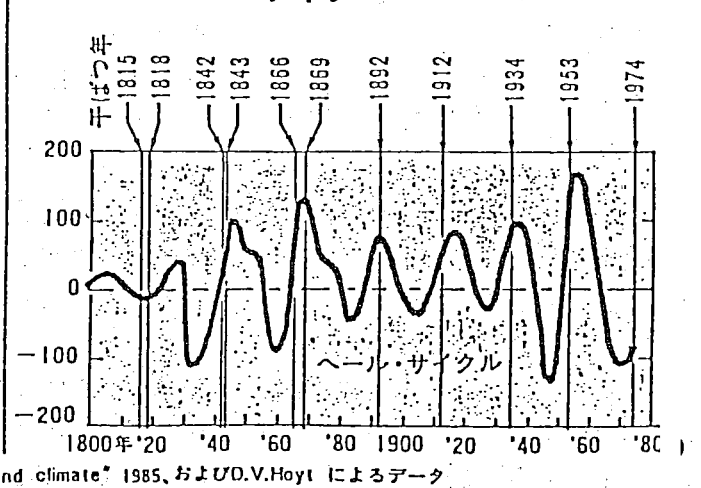
も、太陽活動の作用は穀物の収穫を通じてのみ経済に影響が及ぶとするW・S・ジェボンスの古い学説をそのまま踏襲するものではなく、人間の生理やエネルギー需要の変化まで考慮に入れているのだが、ジェボンスの穀物収穫説それ自体の説得力も捨て難い。

例えば図1では、太陽黒点のシュワーベ・サイクルと昭和40年(1965年)以降今日までの日本の古米在庫の推移が比較されているが、一見してよく動きが合っている。現在、政府の在庫保有は230万ト、適正在庫水準を大きく上回り、「第3次過剰」期に入っているのではないかとの見方があるが、太陽黒点のサイクルからみても、その

〈図3〉太陽黒点のヘール・サイクルと太陽の明るさ



〈図4〉アメリカ大平原地帯の干ばつとヘール・サイクル



大騒ぎするのである。

しかし、そうした対応は誤りではないかと思う。経済に影響する気象のサイクルは、1年周期の季節変動だけではないからだ。前述の11年周期のシュワーベ・サイクルに伴う気温や気圧、湿度の循環がまず挙げられる。それから、もっと短い3～4年周期の“エルニーニョ・サイクル”や平均22年周期の太陽黒点の“ヘール・サイクル”、さらに平均55年周期の“吉村サイクル”と呼ばれる周期性が存在している。

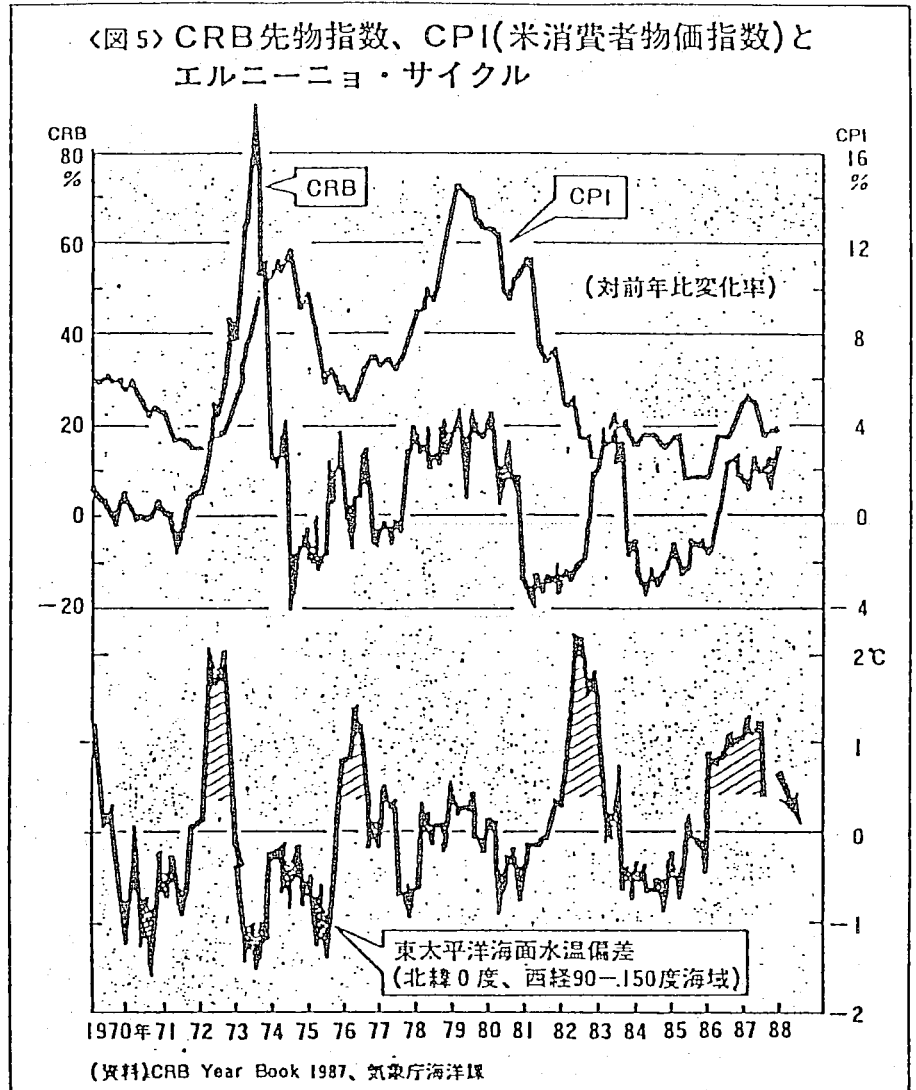
これらの太陽や気象リズムは、それぞれ経済の分野でいう“キッチン・サイクル”（在庫循環といわれ、3～4年周期）、“クスネッツ・サイクル”（建設循環といわれ、22年周期）、さらに“コンドラチェフ・サイクル”（イノベーション波動といわれ、平均55年周期）の発生に根本的な部分で深くかかわっている、と筆者は考えている。

実際、過去において“異常気象”といわれた状況は、ことごとく長短さまざまな太陽黒点＝気象サイクルの一局面として繰り返し現われたものにすぎない。気象が引き起こす経済の波動には計5つが観測される。いい換えれば、季節変動よりも周期の長い、4つの気象変動に伴う経済活動サイクル、すなわち景気循環が存在しているのである。

エルニーニョとCRB先物指数の関係

エルニーニョ・サイクルほど、“異常気象”が“異常”ではないことを示すものもなからう。

エルニーニョ現象というのは、南米ペルー沖の東部太平洋赤道海域の海面水温が平年値に比べて大きく上昇する現象をいい、通常1



年から1年半持続する。エルニーニョが発生すると、ペルー沖で、アンチョビ漁が不漁となることは有名だが、それだけでなく、その影響は汎地球的である。ソ連の“ウインター・キル”、東南アジアの干ばつ、インド、オーストラリア、南アフリカの干ばつ、日本の長梅雨と暖冬、アメリカ東部の寒波などがほぼ同時に起きやすい。これは、赤道東太平洋と西太平洋の海面水温が大きく異なるために、かなり遠隔地まで広範囲に地球の大気に作用を及ぼすと考えられるからである。

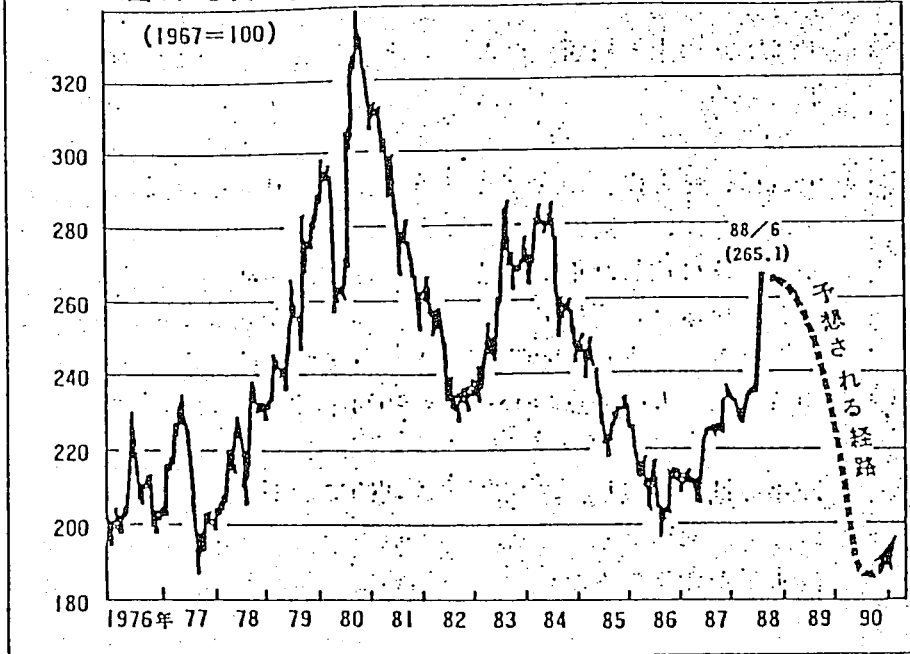
もちろん、この現象の発生も太陽活動と関係が深いとみられるが、原因論は別にして、エルニーニョ現象の発生間隔をみると、

1972～73年、76年、79～80年、82～83年、そして今回の87～88年、とかなり規則的な3～4年周期のサイクルが見いだせる。

植物の生長は数多くの環境要因によって影響されるが、なんといっても光と気温と水分が重要である。気温でいえば、植物が最も効率よく光合成を行なえる温度は20～35°Cの間であり、7°C以下でも45°C上でも、植物の生長と発育には、著しい障害となるといわれる。

エルニーニョの周期的発生に伴う“異常気象”は、こうして農作物に周期的な不作状況をつくり出すと考えられる。図2をご覧いただきたい。これは日本気象協会の朝倉正氏の手になる図で、シカゴ

〈図6〉CRB先物指数の推移



大豆の現物年間平均と東太平洋赤道海面水温とを比較したものが、年々の大豆価格の推移が海面水温の推移とほぼ一致していることが読みとれる（図中の黒丸はエルニーニョ発生年）。

また、図5は、やはり東太平洋海面水温偏差と、CRB先物指数およびアメリカの消費者物価指数のそれぞれの前年同月比変化率と一緒に月次ペースで図示したものである。この図からは、次の2つのことがわかる。

第1に、1970年から88年に至るまで、CRB指数の前年比変化率は、東太平洋海面水温偏差に連動して動いており、しかも、後者が前者に対し、平均して約3四半期（9ヵ月）の先行性をもっている。第2に、アメリカの消費者物価上昇率は、CRB指数の上昇率と連動性があり、後者が前者に対し、やはり3四半期ほど先行する傾向がある。

要するにこれらは、気象が国際商品市況を支配し、結局は、インフレ率にも大きな影響を与えていることを物語っている。

いずれにしても、図2や図5に表われた事実は、「異常気象」という現象が少しも珍しい現象ではなく、3～4年を1周期とするエルニーニョ・サイクルのなかのひとつの位相にすぎないことを端的に示しているといえよう。

今回のアメリカ中西部の干ばつは、今年3月末ですでにエルニーニョ現象が終息した後に発生したものであるから、エルニーニョ自体とは無関係であるとの意見もみられるようだ。しかし、筆者にはとても無関係だとは思われない。なぜなら、今回の干ばつの直接の原因とされている中西部上空での高気圧の居ずわりという現象は、やはりエルニーニョが同じ3月末で終息した後に起こった1973～74年の干ばつ時にも発生しているからである。

22年周期のクズネッツ・サイクルも太陽活動に符合

こうしたことから1973年のときとの類似性を指摘する向きもあるが、当時のように先行きに大インフレが待ち受けているのかといえ

ば、必ずしもそうはいえない。というのは、73年のときと現在とでは、「クズネッツ・サイクル」の位相が逆であるからである。

クズネッツ・サイクルとは、1930年にアメリカの経済学者S・クズネッツが、数多くの1次産品価格と生産量のトレンド除去済みデータから導き出した、約22年周期の景気循環のことをいう。通説によれば、このサイクルは人口移動や建替えなどに伴う、住宅建設の変動が生み出すものとされている。

けれども筆者は、このクズネッツ・サイクルの本質は、約22年ごとに繰り返すアメリカ中西部の干ばつの周期的発生にあり、さらに

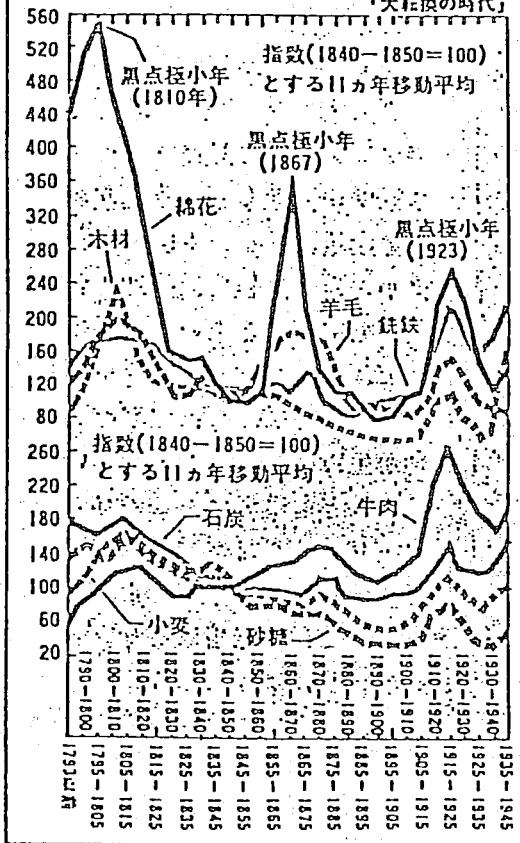
その根底には「ヘール・サイクル」と呼ばれる太陽黒点磁場の周期性が横たわっていると考えている。

太陽黒点数が11年周期で増減を繰り返すシュワーベ・サイクルに対して、ヘール・サイクルはその2倍の周期をもっている。これは、太陽黒点の持つN極とS極の磁極性が、最初の11年間はN極、次の11年間はS極という具合に、合計22年の周期でちょうど1回転するというものである。

図3は、この太陽黒点のヘール・サイクルと太陽の輝度（明るさ）との関係を示したものであるが、1900年から1970年までの間でみると、太陽の明るさは黒点のヘール・サイクルの上昇局面でピークに達する傾向があり、しかもそうしたピークは、1912年、1934年、そして1954年という具合に約22年の周期をもっている。

ここで注目したいのは、1934年のときの太陽の明るさが、70年間のデータのなかで最大となっていることである。もちろん、これもヘール・サイクルの上昇局面で生じている。

〈図7〉イギリスの商品相場と太陽黒点の吉村サイクル (史料)ロストウ「大転換の時代」



次に、図4をご覧いただきたい。この図は太陽黒点のヘール・サイクルの位相と問題のアメリカ中西部・大平原地帯での干ばつ年とを比較対照したものである。

1800年から1970年代までの長期間にわたり、アメリカ中西部での重要な干ばつは、約22年周期で発

生しており、その発生年はほとんどの場合、ヘール・サイクルの上昇局面に限られている。

図3と図4とを重ね合わせれば、さらに、こうした干ばつ年が、太陽の明るさがピークに達した年に記録されているという事実も読みとれる。つまり、太陽の明るさは、太陽黒点のヘール・サイクルにしたがって、22年周期で増減し、これに応じて、地球上の日照り、降水量が変化するために、アメリカ中西部の干ばつは22年周期で繰り返し、これにともなう自然災害の発生や環境の変化が、経済的な面ではクズネッツ・サイクルとして表われてくるのであろう。

今度の干ばつは大事に至らない

そこで気になるのは、今年1988年における干ばつをどうみるかという点である。ヘール・サイクルのその後の動きは、1968年を谷にして1979年にピークを迎え、現在

下降中で、おそらく1990年に再び谷を迎えると思われる。

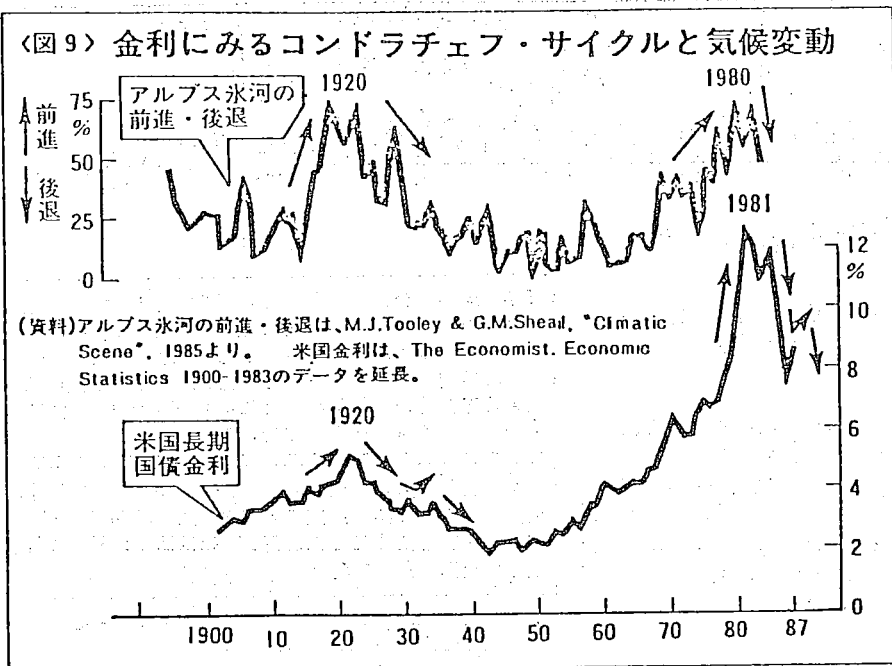
ということは、今回の干ばつは、ヘール・サイクルの下降局面で発生していることになる。前述のように、アメリカ中西部での重要な干ばつはことごとくヘール・サイクルの上昇局面で起きていることからみて、今回はやや異例といえよう。また、前回の大きな干ばつが1974年であったことからみると、まだ14年しか経過しておらず、周期的には不十分である。

以上から導き出される暫定的な結論は、今回の干ばつは、結局のところはあまり大規模なものには発展せず終わってしまうのではないかと、ということである。

とするならば、1971年から1974年の干ばつをはさんで1981年まで10年間上昇し続けた後、下降傾向を続けてきた1次産品市況のクズネッツ・サイクルも、ヘール・サイクルに合わせて、1990年近辺までは下落し続けると考えるのが妥当であるのかも知れない。つまり、1980年代は70年代と異なり、クズネッツ・サイクルの下降局面であるから、商品市況も基本的には下降トレンドを維持しよう。少なくとも、1990年代に予想される次の大干ばつまでは大きな上昇のチャンスはないと考えられる。

その一方で、今年の干ばつについて最も厳しい見方をするアメリカの商品市場関係者は、前述のごとく、1934年以来54年ぶりの事態に発展しつつあるとみている。

この「54年ぶり」という言葉には、独特の響きを感じられる。というのは、それは一般には「技術革新の波」とされ、世界景気の長期波動ともいわれている「コンドラチェフ・サイクル」の平均周期とほぼ一致するからである。コン



でみたコンドラチェフ・サイクルの次の大きな盛り上がりもそのころということになる。

物価 金利はもう一度大きく下がる

逆にいえば、今回のコンドラチェフ・サイクルのボトムは1978～81年と2030年との間の中間点よりやや前寄り（コンドラチェフ・サイクルの下降期は上昇期に比べ相対的に短い。また吉村サイクルの活動期あるいは上昇期は黒点の磁場効率が高いため、下降期よりも短い）の、1990年代の前半あたりに記録される確率が高い。

もっとも、今回のアメリカ西部の干ばつが本当に54年前のような大干ばつに発展してしまうようであれば、1986年あたりが谷であったということになる。しかし、いくら54年あるいは55年の周期といても、それは平均の問題であって、実際には49年から61年といった程度の許容範囲のズレは特にサイクルの谷については、過去においても存在している。

筆者はやはり、この先国際商品市況、したがって世界のインフレ

率および金利は、少なくとももう一度大きく下がらざるをえないとみている。その手がかりとなるのが、図9である。これは地球の中高緯度帯の地上気温の代理変数であるスイス・アルプスの氷河の前進・後退とアメリカの長期国債金利の推移とを比較したものである。一見して、よく一致していることがわかるが、このアルプス氷河の指標は、太陽黒点の吉村サイクルの関数であると考えてよい。つまり、太陽活動が活発になって気候が温暖化すると氷河は解けて後退し、反対に太陽活動が不活発になって気候が寒冷化すると氷河は前進してくる。

これと長期金利との関係を見ると、山・谷とも一致している。これは偶然ではない。気候の変化は人間の1次エネルギー需要量を左右するので、寒冷化は商品価格を押し上げやすく、熱波による干ばつとの綱引きはあるものの、温暖化は逆に押し下げやすい。そして、これらはそれぞれインフレやデフレを引き起こして、名目金利を動かすのである。

とすれば、吉村サイクルの活動

期入りとともに始まった気候の温暖化は、今後しばらくの間は続くと思われるので、現在9%程度のアメリカの長期金利も今後かなり下降していくのではないかと。

目先のインフレより “次のデフレ”

以上の諸考察をもとに、最後に、1990年までのC R B指数の動向がどうなるか大胆に予想してみると、図6のようになる。“予想される経路”は、1988年の6月をピークに1990年に向けて下降し続けるコースを想定している。

図5に関して述べたことから当然予想されたことではあるが、C R B指数は現時点までは、昨年7～9月期におけるエルニーニョの最盛期から約3四半期遅れて急上昇し、高値を追ってきている。だが、エルニーニョ現象はすでに今年3月末で終息しているのだから、今後タイム・ラグをもってC R B指数にも下落圧力となって、そして、やがてはインフレ率を上昇から下降へと転換させることになろう。

もしも、実際に1984年の山から4年後の1988年に山をつけるとすれば、3～4年周期の法則性からしても、次の谷は1986年の谷の4年後の1990年あたりに形成される可能性が高い。そのころには、現在は拡張局面にある世界景気も相当悪化しているとみられる。

それはまた、太陽黒点のヘル・サイクルに伴うクズネツツ・サイクルの谷にも当たっており、また吉村サイクルに伴うコンドラチェフ・サイクルの下降局面にも位置することになる。こうしたことから、筆者には目先のインフレよりも“次のデフレ”のほうが警戒戒であるように思われてならない。

1. はじめに

非定常時系列の例としては、ある種の経済指標の記録、地震計の記録、大気乱流の記録、機械の振動の記録等がある。これらの時系列では、統計的性質が時間変化している。

非定常時系列を扱うために、

(1) 周波数領域で非定常スペクトルを定義し、推定するための方法。

(2) 時間領域で統計モデルを提案し、パラメータを推定するための方法。

が考えられてきた。周波数領域から接近する方法が予測のために用いることができないに対し、時間領域から接近する方法は、パラメータ推定法が予測誤差と大きく関係していることからわかるように、予測と直結している。本稿では、時間領域での非定常モデルをいくつか紹介する。著者の方法を用いた場合の結果については、発表の時に詳しく述べる。

2. 局所定常ARモデル

Ozaki・Tong(1975)、Kitagawa・Akaike(1978)によって局所定常ARモデルが導入された。与えられたデータをいくつかのスパンにわけて、個々のスパンごとに別々のARモデルをあてはめるべきか、いくつかの連続するスパンに同一のARモデルをあてはめるべきかを、赤池情報量規準AIC(Akaike, 1974)を用いて判断している。統計的性質がゆらくり変化する過程を解析するのに、有効な手法であるが、スパンごとにモデルを考えているため、モデルを更新するように判定されたスパンの解析をする時、その時点より過去のデータの持つ情報を取り込むことができない。また、AIC最小のモデルのみ採用することは、複数個のモデルのAICの値が近い場合に、推定の安定性を低くする恐れがある。

このようなことを改める目的で、注目している時点より以前のスパンに含まれ

るデータの情報も取り込むことができるように、AICの値を用いて定義される重み関数で、異なった次数のARモデルを同時に考えるベイズ型局所定常ARモデルが、Kitagawa・Akaike(1981)により提案されている。

3. 制約条件付きモデル1 ---Raoのモデル---

Rao(1970)はデータ $z(n)$ 、 $n=1, 2, \dots$ に対して、次の非定常時系列モデルを考えた。

$$z(n) = a(1, n)z(n-1) + a(2, n)z(n-2) + \dots + a(m, n)z(n-m) + \varepsilon(n)$$

ただし、 $\langle \varepsilon(n) \rangle = 0$ 、 $\langle \varepsilon(n)\varepsilon(n') \rangle = \sigma^2 \delta_{nn'}$ である。ある時刻 n_0 におけるパラメータ $a(j, n_0)$ 、 $j=1, 2, \dots, m$ を推定するために、次の関数

$$L(a, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_l (z(n_0-1) - \sum_{j=1}^m a(j, n_0-1-j)z(n_0-1-j))^2$$

を最小にするパラメータを推定値とする方法を提案した。ただし、 w_l は適当な重み関数であり、 $|l|$ が小さい時のみ、0でない値を持つ。

Raoの方法はアイデアとしては優れているが、実際の推定に使おうとする時、ARモデルの次数 m 、重み関数 w_l の選択規準については、全くふれておらず、このままでは実用にならない。

4. 制約条件付きモデル2 ---Akaikeのモデル---

赤池は、第42回ISIで発表した論文(Akaike, 1979)の中で、急激に時間変化するスペクトルを推定するためのモデルを提案している。このモデルでは、データ $z(n)$ ($n=-M+1, -M+2, \dots, 1, \dots, PK$)がある時、 $n=(p-1)K+1$ から $n=pK$ までのデータを p 番目のスパン($p=1, 2, \dots, P$)に含める。ただし、 P はスパン数、 K は個々のスパンに含まれるデータ数、 M はあてはめるARモデルの次数である。個々のスパンで別々のARモデルを考えているが、隣合うスパンのAR係数の間に、後述する制約条件を果たしている。

p 番目のスパンのデータにあてはめるARモデルの係数を $a_p(m)$ ($m=0, 1, \dots, M$)とする。これらの係数を、 Q に含まれるパラメータ a, b, \dots を固定して、

$$L = SSR + Q$$

を最小にするという規準を用いて推定している。ただし、SSR、Qは、それぞれ残差二乗和、制約条件である。

$$\begin{aligned}
 SSR &= \sum_{p=1}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} \left(z(i) - \sum_{m=1}^M a_p(m) z(i-m) - a_p(0) \right)^2 \\
 Q &= c^2 \sum_{i=1}^K \left(\sum_{m=1}^M a_1(m) z(i-m) \right)^2 \\
 &+ a^2 \sum_{p=2}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} \left(\sum_{m=1}^M a_p(m) (z(i-m) - z(i-K-m)) \right)^2 \\
 &+ b^2 \sum_{p=1}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} \left(\sum_{m=1}^M m a_p(m) z(i-m) \right)^2 \\
 &+ d^2 P K a_1(0)^2 + e^2 P K \sum_{p=2}^P \left(a_p(0) - a_{p-1}(0) \right)^2
 \end{aligned}$$

ここで、 a 、 b はスペクトルの時間領域、周波数領域のなめらかさを制御するパラメータである。 c はスペクトルの初期推定を、 d 、 e は平均値の初期推定、なめらかさを制御するパラメータである。

5. 制約条件付きモデル3 --- Kitagawaのモデル ---

北川は各時点で異なった係数を持つARモデル(Kitagawa、1983)を導入した。時刻 n におけるAR係数を $a(i, n)$ ($i=1, 2, \dots, m$)とすると、モデルは $n=1, 2, \dots, N$ に対して

$$z(n) = \sum_{i=1}^m a(i, n) z(n-i) + \varepsilon(n)$$

となる。ただし、 $\varepsilon(n)$ は、平均0、分散 σ^2 の白色ガウス雑音である。北川は、係数 $a(i, n)$ 、 $i=1, 2, \dots, m$ 、 $n=1, 2, \dots, N$ の間に次の制約条件を設けた。

$$\nabla^k a(i, n) = \delta(i, n)$$

ただし、 ∇ は差分演算子で、次式で定義される。

$$\nabla a(i, n) = a(i, n) - a(i, n-1)$$

また、 $\delta(i, n)$ は

$$\langle \delta(i, n) \rangle = 0$$

$$\langle \delta(i, n) \delta(j, m) \rangle = \tau^2 \quad \text{for } n=m \text{ and } i=j$$

$$0 \quad \text{otherwise}$$

を満足するランダム変動である。

6. 制約条件付きモデル 4 --- Tamura のモデル ---

著者は、ゆっくりと統計的性質が変化する非定常過程を扱うためには、Akaike (1979) のように、適当な長さのスパンごとに AR モデルをあてはめるという方針で、モデル構築を行えば十分であると思う。スパンの長さは、解析したい周波数の限界を ω とする時、 $2\pi/\omega$ 以上にとるべきである。しかし、制約条件を通して、過去のデータの情報も取り込んでいるので、スパン長をある程度短くしてもそれ程問題はないと思う。

PK+M 個のデータ $z(n)$ 、 $n=1-M, 2-M, \dots, 0, 1, \dots, PK$ があるとす。ここで、P、K、M はスパン数、スパンに含まれるデータ数、あてはめる AR モデルの次数である。 $\{z((p-1)K+1), \dots, z(pK)\}$ のデータを含む p 番目のスパン ($p=1, 2, \dots, P$) に次の AR モデルをあてはめる。

$$z(i) = \sum_{m=1}^M a_o(m) z(i-m) + a_o(0) + \varepsilon(i)$$

$$i = (p-1)K+1, (p-1)K+2, \dots, pK$$

$$\langle \varepsilon(i) \rangle = 0 \quad \langle \varepsilon(i) \varepsilon(j) \rangle = \sigma^2 \delta_{ij}$$

残差二乗和を SSR とし、係数間の制約を Q とする。

$$SSR = \sum_{p=1}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} \left(z(i) - \sum_{m=1}^M a_o(m) z(i-m) - a_o(0) \right)^2$$

$$Q = \sum_{p=2}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} \left(\sum_{m=1}^M (a_o(m) - a_{o-1}(m)) z(i-m) + a_o(0) - a_{o-1}(0) \right)^2$$

Q は p 番目のスパンで、一時点先の予測を $\{a_o(m)\}$ を用いて行なった場合と $\{a_{o-1}(m)\}$ を用いて行なった場合との差の二乗和である。係数の時間変化のなめらかさを、予測値のずれの量で制御するような制約条件になっている。SSR と Q を用

いて定義される尤度を最小にするように、係数を決定する。このような制約付き尤度を最小化するために、A B I C 最小化 (Akaike, 1980) がよく用いられている。このモデルでもパラメータ推定には A B I C 最小化を用いている。詳細については、発表の時に報告する。

参考文献

- Akaike, H. (1979). On the construction of composite time series model, Bull. 42nd Session ISI, Vol. 48, 411-422.
- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes Procedure, Bayesian Statistics (eds. Bernardo J. S. et al.).
- Kitagawa, G. and Akaike, H. (1978). A procedure for the modeling of non-stationary time series, Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 30B, 351-363.
- Kitagawa, G. and Akaike, H. (1981). On TIMSAC-78, Applied Time Series Analysis II (ed. Findley D.), 449-548.
- Kitagawa, G. (1983). Changing Spectrum Estimation, J. Sound and Vib., Vol. 89, 443-445.
- Ozaki, T. and Tong, H. (1975). On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis, Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Science, 224-226.
- Subba Rao, T. (1970). The fitting of non-stationary time-series model with time-dependent parameters, J. R. Statist. Soc., Vol. B23, 312-332.
- Tamura Y.-H. (1987). An approach to the nonstationary process analysis Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 39B, 227-241.

KM₂O-ランジュヴァレ方程式論 (I)

岡部 立青 憲 (北大理)

§1 目的

気象データ、工学データ、経済データ、医学データ等、時の推移と共に変化するランダムな現象に關し有限個の観測データ・実験データ等を統計的・数学的に分析することにより、その現象の持つ法則を見つけ出し、それに基づいてその将来を予測し制御することは、科学の重要な研究部門の一つである。

私の研究の目的は、局所定常性という法則に自的をしぼり、言及した現象が局所定常性を持つかどうかを判定するテストを得ることである。その際、理論的によく調べられたモデル(確率時系列)を天下りの用いるのではなく、局所定常性のみをもつ確率時系列の数学的構造を調べあげ、上記の目的にかたえらるるようにする。そのためには、データ解析に伴う近似は、理論の限界を明確にする形に存すべく、精査をし、その回数も少くすること大事と思われる。

さらに、局所定常性を持つことが分た現象に対して、平均見本エントロピーを計算することにより、そのランダム性を調べ、見本予測誤差に關しテストを行ふことにより、2つの現象間の因果性の有無を問うことが次の目的である。

一、局所定常性を持たないような現象に対して、標本エントロピーを時系列と見て、“その異常性がどこに現れるか”についての試みを行う。融れる。

応用数学において大事なことは、数学的理論が応用に果たしただけ展開したというと同時に、その研究の過程から数学的理論に新しい側面が見出されたという事と思われる。このことは、統計物理学における採動散逸定理のうちの哲学的理解である。そして、私の研究では、Wienerの仕事の中での非線形型予測問題の復活であり、因果関係が線形、2次、3次、……と非線形性を高めることにより検証される。これを可能にするのがKM₂O-ランジュヴァレ方程式の理論である。

§2 局所定常性 (1)

確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上に \mathbb{R}^d -値 弱定常過程 $X = (X(n); 1 \leq n \leq N)$ が与えられ、平均ベクトル関数は 0、共分散関数は R とする;

$$(2.1) \quad R(n-m) = E(X(n)^t X(m)).$$

テプツツ行列に関する条件の下で、 X は、次の式により、その時間発展が記述される;

KM₂O-ランジュウレオ程式

∃ KM₂O-ランジュウレオ ($\delta_{\pm}^*(n, k), \mathcal{J}_{\pm}^*(n), V_{\pm}^*(n); 0 \leq k < n \leq N$)

∃ KM₂O-ランジュウレオ $V_{\pm}^* = (V_{\pm}^*(n); 0 \leq n \leq N)$ s.t.

$$(2.2) \quad X(n) = - \sum_1^{n-1} \delta_+^*(n, k) X(k) - \mathcal{J}_+^*(n) X(0) + V_+^*(n);$$

$$(2.3) \quad X(-n) = - \sum_1^{n-1} \delta_-^*(n, k) X(-k) - \mathcal{J}_-^*(n) X(0) + V_-^*(n).$$

基本的性質 :

$$(2.4) \quad E(V_+^*(n)^t V_+^*(n)) = \sum_{m=0}^{n-1} V_+^*(m)$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} [X_j^*(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n] &= [V_{\pm}^*(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n] \quad (0 \leq n \leq N) \\ [X_j^*(-n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n] &= [V_{\pm}^*(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n] \quad (0 \leq n \leq N) \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad (\text{リジリズム}) \quad 1 \leq k < n \leq N$$

$$(i) \quad \delta_{\pm}^*(n, k) = \delta_{\pm}^*(n-1, k-1) + \mathcal{J}_{\pm}^*(n) \delta_{\pm}^*(n-1, n-k-1)$$

$$(ii) \quad V_{\pm}^*(n) = (I - \mathcal{J}_{\pm}^*(n) \mathcal{J}_{\pm}^*(n)) V_{\pm}^*(n-1)$$

$$(iii) \quad \mathcal{J}_-^*(n) V_+^*(n) = V_-^*(n-1)^t \mathcal{J}_+^*(n)$$

$$(iv) \quad V_{\pm}^*(n) \in GL(d; \mathbb{R})$$

$$\text{但し} \quad \delta_{\pm}^*(n, 0) = \mathcal{J}_{\pm}^*(n)$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_+(\lambda) &= - \left(R(\lambda) + \sum_{k=0}^{\lambda-2} \delta_+(\lambda, k) R(k+1) \right) V_-(\lambda-1)^{-1} \\ \mathcal{J}_-(\lambda) &= - \left({}^t R(\lambda) + \sum_{k=0}^{\lambda-2} \delta_-(\lambda, k) R(k+1) \right) V_+(\lambda-1)^{-1} \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad \mathcal{J} \text{ の局所定常性} \iff \mathcal{J}_+ \text{ の白色雑音性 i.e. } E(\xi_+(\lambda) {}^t \xi_+(\lambda)) = \int_{\lambda} I$$

$$\text{但し, } \xi_+(\lambda) = W_+(\lambda)^{-1} V_+(\lambda)$$

$$(W_+(\lambda) \text{ は } W_+(\lambda) {}^t W_+(\lambda) = V_+(\lambda) \text{ をみたす下三角行列})$$

§3 局所定常性 (2)

[3.1] \mathbb{R}^d 中の点 $\mathcal{J}(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq N$) が $N+1$ 個与えられたとする。その見本平均 $\mu^{\mathcal{J}}$ と見本共分散関数 $R^{\mathcal{J}}$ が次により定まる;

$$(3.1) \quad \mu^{\mathcal{J}} = \frac{1}{N+1} \sum_0^N \mathcal{J}(\lambda)$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} R_{pp}^{\mathcal{J}}(\lambda) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N-\lambda} (\mathcal{J}_p(\lambda+k) - \mu_p^{\mathcal{J}}) (\mathcal{J}_p(\lambda+k) - \mu_p^{\mathcal{J}}) \\ R_{pp}^{\mathcal{J}}(-\lambda) = R_{pp}^{\mathcal{J}}(\lambda) \end{cases}$$

とす。 $\mathcal{J} = (\mathcal{J}(\lambda); 0 \leq \lambda \leq N)$ を正規化した \mathcal{X} $\mathcal{X} = (\mathcal{X}(\lambda); 0 \leq \lambda \leq N)$ と

$$(3.3) \quad \mathcal{X}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}^{\mathcal{J}}(\lambda)^{-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{R_{dd}^{\mathcal{J}}(\lambda)^{-1}} \end{pmatrix} (\mathcal{J}(\lambda) - \mu^{\mathcal{J}})$$

と定め、 \mathcal{X} の見本共分散関数を $R^{\mathcal{X}}$ とす。

§2 の \mathcal{J} の式 (2.6) と (2.7) に従い、 \mathcal{X} の $R \in R^{\mathcal{X}}$ を置換え \mathcal{J} とおき、見本 KM_2O - \mathcal{J} を \mathcal{J} として $\{\delta_+(\lambda, k), V_+(\lambda); 0 \leq k < \lambda \leq N, 0 \leq \lambda \leq N\}$ を構成し、(2.2) の式に従い、 \mathcal{X} の $\mathcal{X}(\lambda) \in \mathcal{X}(\lambda)$ を置換え \mathcal{J} とおき、見本 KM_2O - \mathcal{J} を \mathcal{J} として $V_+ = (V_+(\lambda); 0 \leq \lambda \leq N)$ を導く;

$$(3.4) \quad \begin{cases} V_+(0) = \mathcal{X}(0) \\ V_+(\lambda) = \mathcal{X}(\lambda) + \sum_0^{\lambda-1} \delta_+(\lambda, k) \mathcal{X}(k) \end{cases}$$

データ解析の経験則より $[3\sqrt{N+1} \cdot d^{-1}]$ が $R^{\mathcal{X}}(\lambda) (0 \leq \lambda \leq N)$ の最大有効数ゆえ

$$(3.5) \quad M = [3\sqrt{N+1} \cdot d^{-1}] - 1$$

として、信頼区間を見本 KM_0 - \bar{X} - \bar{S}^2 - \bar{X} ($\delta_+(n, k), V_+(l); 0 \leq k \leq n \leq M, 0 \leq l \leq M$) を考察の対象とする。

[3.2] 各 $i \in \{0, \dots, N-M\}$ に対して、 $\mathcal{X}_i = (\mathcal{X}(i+n); 0 \leq n \leq M)$ とし、(3.4) に従って $\mathcal{X}(i)$ を初期値とし、 $U_{+i} = (U_{+i}(n); 0 \leq n \leq M)$ と

$$(3.6) \quad \begin{cases} U_{+i}(0) = \mathcal{X}(i) \\ U_{+i}(n) = \mathcal{X}(i+n) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_+(n, k) \mathcal{X}(i+k) \end{cases}$$

を定める。 $F \equiv$ 角行列 $W_+(n)$ と

$$(3.7) \quad W_+(n)^t W_+(n) = V_+(n)$$

を満足する様にして、 d -次元ベクトル $\mathcal{J}_{+i} = (\mathcal{J}_{+i}(n); 0 \leq n \leq M)$ と 1次元ベクトル \mathcal{J}_i と

$$(3.8) \quad \mathcal{J}_{+i}(n) = W_+(n)^t U_{+i}(n)$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_i &= {}^t(\mathcal{J}_{+i}(0), \dots, \mathcal{J}_{+i+d}(0), \dots, \mathcal{J}_{+i}(M), \dots, \mathcal{J}_{+i+d}(M)) \\ &\equiv {}^t(\mathcal{J}_i(n); 0 \leq n \leq d(M+1)-1) \end{aligned}$$

を構成する。

§2 の (2.8) より、次の 2 つのことは同値である：

(3.10) \mathcal{X}_i は \mathbb{R}^d 値局所弱定常過程の実現である。

(3.11) \mathcal{J}_i は 1次元局所正規化した白色雑音の実現である。

2 の (3.11) については、検証が大変に、見本平均 $\bar{\mu}^{\mathcal{J}_i}$ 、見本分散 $\bar{v}^{\mathcal{J}_i}$ と見本共分散函数 $R^{\mathcal{J}_i}(n, n)$ ($1 \leq n \leq L, 0 \leq n \leq L-n$) を \mathbb{R} 上で定める

$$(3.12) \quad \bar{\mu}^{\mathcal{J}_i} = \frac{1}{d(M+1)} \sum_{k=0}^{d(M+1)-1} \mathcal{J}_i(k)$$

$$(3.13)_c \quad v^{\beta_c} = \frac{1}{d(M+1)} \sum_{k=0}^{d(M+1)-1} \xi_c(k)^2$$

$$(3.14)_c \quad R^{\beta_c}(\lambda, \lambda) = \frac{1}{d(M+1)} \sum_{k=\lambda}^{d(M+1)-\lambda} \xi_c(k) \xi_c(k+\lambda)$$

但し $L+1$ は R^{β_c} の 最小有効数 である;

$$(3.15) \quad L = \lfloor 2\sqrt{d(M+1)} \rfloor - 1$$

(3.11)_c の 検証の大抵は $\mu^{\beta_c}, v^{\beta_c} - 1$ と $R^{\beta_c}(\lambda, \lambda)$ が 0 に近くなる) 規準が必要で、これを 求めた大抵、直交性を 2.2.2 1 節に 置換えれば、中心極限定理を 適用すれば できる。

$$(3.16)_c \quad \sqrt{d(M+1)} |\mu^{\beta_c}| < 1.96 \quad (\text{確率 } 0.95)$$

$$(3.17)_c \quad \sqrt{d(M+1)/2} |v^{\beta_c} - 1| < 1.96 \quad (\text{確率 } 0.95)$$

$$(3.18)_c \quad d(M+1) \left(\sum_{j=1}^L \sqrt{\frac{L_j}{L}} \right)^{-1} |R^{\beta_c}(\lambda, \lambda)| < 1.96 \quad (\text{確率 } 0.90)$$

∴ $L_{\lambda\lambda}^{(s)}$ は λR と なる:

$$(3.19) \quad \begin{cases} d(M+1) = 8(2\lambda) + r & (0 \leq r \leq 2\lambda - 1) \\ \lambda = 5\lambda + t & (0 \leq t \leq \lambda - 1) \end{cases}$$

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \in \{0, \dots, \lambda\} \text{ なら } \\ \left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda\lambda}^{(1)} = \begin{cases} \lambda(8+2^s) - \lambda & (s \text{ 偶数}) \\ \lambda(8-2^s(s+1)) & (s \text{ 奇数}) \end{cases} \\ L_{\lambda\lambda}^{(2)} = \begin{cases} \lambda(8-1-2^s) + r & (s \text{ 偶数}) \\ \lambda(8-1+2^s(s+1)) + r - \lambda & (s \text{ 奇数}) \end{cases} \end{array} \right. \\ \\ r \in \{\lambda+1, \dots, 2\lambda-1\} \text{ なら } \\ \left\{ \begin{array}{l} L_{\lambda\lambda}^{(1)} = \begin{cases} \lambda(8-1+2^s) + r - \lambda & (s \text{ 偶数}) \\ \lambda(8-1-2^s(s+1)) + r & (s \text{ 奇数}) \end{cases} \\ L_{\lambda\lambda}^{(2)} = \begin{cases} \lambda(8-2^s) & (s \text{ 偶数}) \\ \lambda(8+2^s(s+1)) - \lambda & (s \text{ 奇数}) \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

各 $i \in \{0, \dots, N-M\}$ に対して、次のテスト $(M)_i, (V)_i$ と $(O)_i$ を設けた:

$(M)_i$: (3.16)_i 成立

$(V)_i$: (3.17)_i 成立

$(O)_i$: (3.18)_i 成立 (各 n, m)

すなわち、最終的に これが局所弱定常過程の実現であったことの検証 として、次のテスト (S) を提案する:

(S) : $(M)_i, (V)_i$ と $(O)_i$ が同時に通る i ($i \in \{0, \dots, N-M\}$) の割合が 80% 以上。

注意 これが通れば、元のデータ X は局所弱定常過程の実現であったことに注意する。

(S) の実験として、正規乱数、一様乱数、カオティックな一次変換を用いて行った。現実の現象として、太陽の黒点数 (Walfer's sunspot number) と NEC の様子を分析した。

Gauss 確率場 に対する 確率変分解析

愛知教育大学 野田明男

1. Stochastic infinitesimal equation

多次元パラメータ $A \in \mathbb{R}^n$ が動くとき、Gauss 確率場 $X(A)$ が有する random element (white noise) のあり様を究めたいというのが報告者の宿願である。

Gauss 過程 $X(t)$ に対しては、 $t \in \mathbb{R}^1$ の動きは単に未来に向かう一方 (時間発展) だけであり、P. Lévy が導入した stochastic infinitesimal equation (以下、SIE と略)

$$(1) \quad \delta X(t) = X(t+dt) - X(t) = \mu_t(dt) + \sigma_t(dt) \xi$$

の解析が重要な鍵となる ([1])。ここで、 $\mathcal{F}_t := \sigma(X(u); u \leq t)$ と記して、

$$(2) \quad \mu_t(dt) = E[\delta X(t) | \mathcal{F}_t], \quad \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t) - \mu_t(dt))^2]$$

と定める。 ξ は独立な $N(0, 1)$ -確率変数 ξ は、微小な dt の間に X が新たに獲得する random element と表す。通常の場合 (確率微分方程式論では)、

$$\mu_t(dt)/dt = \mu(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P), \quad \sigma_t^2(dt)/dt = \sigma^2(t) > 0$$

となつて、 $\int \sigma dt = dB(t) = \dot{B}(t) dt$ と解釈すると、SIE (1) は次の正規形に書き直される:

$$(3) \quad \delta X(t) = \mu(t) dt + \sigma(t) dB(t), \quad \text{i.e.,} \quad X'(t) = \mu(t) + \sigma(t) \dot{B}(t).$$

この報告の眼目の一つとして、我々には深い (3) の形には存在しないような非正規形の SIE において記述される Gauss 過程に新たな注意を喚起したい。

2. Gauss 確率場 に対する variational approach

多次元パラメータ A の話を経ると、点 $A \in \mathbb{R}^n$ の動きは一次元の場合のように単純に一方に向って進むというわけに行かず、SIE に関する P. Lévy の idea は多様な方向に拡張され得るであろう。

T. Hida が近年唱導されている variational approach (cf. [2]) はその一つの試みであり、我々はこの線に沿って進む。

\mathbb{R}^n 内の曲線 C を任意にとり、パラメータの動き εC と沿う方向と法線方向とに分けて取り扱う。具体的には、次の i), ii) を研究する:

- i) パラメータ εC 上に制限して得られる Gauss 過程 $X_C(t) = X(A(t))$, $A(t) \in C$, の SIE と標準表現;
- ii) 条件付平均値 $Y(C) := E[X(A) | \mathcal{F}_C]$ ($\mathcal{F}_C := \sigma\{X(A(t)), A(t) \in C\}$) と曲線 C の random functional とみだりの変分 $\delta Y(C) = Y(C + \delta C) - Y(C)$.

Gauss 確率場の中で基本的な位置を占める Lévy の Brown 運動と Wiener 過程をまず始めに取り上げて、i), ii) についで研究した ([2] に付く予稿)。この研究に基づいて、講演では SIE、特に正規形に属するものをテーマとし、次の3種類の Gauss 過程を論じている:

- A) Y. Okabe ([3], その他一連の論文) に負う reflection positivity を持つ定常過程;
- B) 2次元パラメータの Wiener 過程 $\{W(u, v); u, v \geq 0\}$ を種々の曲線 $C_p = \{(t, p(t)); t \geq 0\}$ 上に制限して得られる過程 $W_p(t)$;
- C) 2次元パラメータ ε の Brown 運動 $B(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, の折れ線 $C_a = \{y = a|x|\}$ 上の制限 $B_a(x)$ 。

\mathbb{R}^1 上の Gauss 過程 $B_a(x)$ は reflection positivity を有する事に留意する。

3. KMO-Langevin equation ([3])

この節では、標準表現

$$(4) \quad X(t) = \int_{-\infty}^t E(t-u) dB(u), \quad E(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} d\nu(\lambda), \quad s > 0,$$

ε の Gauss 定常過程を扱う。 $[0, \infty)$ 上の測度 ν は、Stieltjes 変換 $S_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{d\nu(\lambda)}{z + \lambda}$

($\operatorname{Re} z > 0$) をもち、 ν の分布関数の $\lambda \rightarrow \infty$ の asymptotic behaviour

$$(5) \quad \nu(\lambda) = \int_0^\lambda d\nu(\lambda) \sim c \lambda^{1-p} / \Gamma(2-p), \quad c > 0, \quad \frac{1}{2} < p < 2,$$

を仮定する。 X の変分散はこの場合、

$$r(h) = \int_0^\infty E(h+s) E(s) ds = \int_0^\infty e^{-h\lambda} S_\nu(\lambda) d\nu(\lambda), \quad h \geq 0,$$

で与えられる。

$X(t)$ の SIE は, (4) から自然に

$$(6) \quad \begin{cases} \mu_t(dt) = \int_{-b}^t \{ E(t+dt-u) - E(t-u) \} dB(u), \\ \sigma_t^2(dt) = E \left[\left(\int_t^{t+dt} E(t+dt-u) dB(u) \right)^2 \right] = \int_0^{dt} E(s)^2 ds \end{cases}$$

と導かれる. 正規形 (3) に想定するに

$$(6') \quad \mu(t) = \int_{-b}^t E'(t-u) dB(u), \quad \sigma(t) = E(0)$$

と書ける。

I) $p > \frac{3}{2}$ の場合: $-E'(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} \lambda d\nu(\lambda) \in L^2(0, \infty, ds)$ に注意すれば, 上の正規形

(6') は正しい. 従って, 定常過程 $\mu(t)$ は, X 自身の言葉で,

$$(7) \quad \mu(t) = -\beta X(t) - \int_{-b}^t \gamma(t-u) dX(u)$$

と記述される. \Rightarrow $\beta \geq 0$ と $\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-s\lambda} d\rho(\lambda)$ は, $S_\nu(z)$ と関する表現定理を通じて
次式で定まる:

$$(8) \quad E(0)/z S_\nu(z) = 1 + \beta/z + S_\rho(z).$$

II) $1 < p < \frac{3}{2}$ の場合: $\sigma_t^2(dt) = E(0)^2 dt$ は I) と同じ; 一方,

$$E[(\mu_t(dt))^2] = \int_0^{dt} (E(dt+s) - E(s))^2 ds = \int_0^{dt} ds \left\{ \int_0^{dt} E'(s+h) dh \right\}^2 \sim (\text{const.}) (dt)^{2p-1}$$

を得. 正規形の $E[\mu(t)^2] \cdot (dt)^2$ とは違う形となる. 以上から, 上式 (7) は, generalized process の立場から依然として有効で, 其分散 $\int_0^\infty E'(h+s) E'(s) ds \sim (\text{const.}) h^{-(3-2p)}$, $h > 0$,
と成る.

III) $\frac{1}{2} < p < 1$ の場合: Tauberian theorem $E(s) \sim c s^{-(1-p)}$ ($s \downarrow 0$) と $S_\nu(\lambda) \sim c \Gamma(p) \lambda^{-p}$

($\lambda \rightarrow 0$) を用いると, $\int_0^{dt} E(s)^2 ds \sim \frac{c^2}{2p-1} (dt)^{2p-1}$, 他方,

$$E[\mu_t^2(dt)] + \sigma_t^2(dt) = E[(\delta X(t))^2] = 2 \int_0^t (-\Gamma'(h)) dh \sim \frac{c^2}{2p-1} \{2^{1-2p} B(p, \frac{3}{2}-p)\} (dt)^{2p-1}$$

から、 $E[\mu_t^2(dt)] = \frac{c^2}{2p-1} \{2^{1-2p} B(p, \frac{3}{2}-p) - 1\} (dt)^{2p-1}$ を得、両項とも $(dt)^{2p-1}$ の主要項
 である。この不事実は、fractional Brownian motion に対して観察された、非正規形の SIE
 の中で一つの典型を構成する。

$\mu_t(dt)$ を X 自身で記述するには、

$$(9) \quad \dot{B}(t) = \beta X(t) + \int_{-\infty}^t \gamma(t-u) dX(u)$$

に (6) に適用すればよい、ここで、 β と γ は、(8) の振る

$$(10) \quad (z S_p(z))^{-1} = \beta/z + S_p(z)$$

を通じて定まる。

4. 2-parameter Wiener process

$W(u, v)$ は双分級 $E[W(u, v_1)W(u, v_2)] = (u_1 \wedge u_2)(v_1 \wedge v_2)$ である Gauss 確率場である。

$\bar{W}(u, v) := v W(u, v)$ は元の W と同じ確率法則に従うことに留意する。 C^1 -関数 $\varphi(t) \geq 0$
 に対して定まる曲線 $C_\varphi = \{(t, \varphi(t)); t \geq 0\}$ 上の W の制限を $W_\varphi(t)$ と書く。

命題 1. i) φ が増加の場合、 $W_\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{(u\varphi(u))'} dB(u)$ (増加過程) となる；

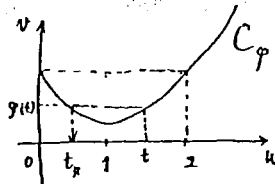
ii) φ が減少の場合、 $W_\varphi(t) = \varphi(t) \int_0^t \sqrt{(u/\varphi(u))'} dB(u)$ (Mayer 過程) となる。

こうして φ が単調の場合には、 $W_\varphi(t)$ の SIE は簡明な正規形であることがわかる。

次のステップとして、unimodal な φ を取り上げる。簡単のため、 φ は $[1, \infty)$ 上で増加。

$\varphi_{|[0,1]}$ は $\varphi_{|[1,2]}$ と $t=1$ で折り返す (右側の $(\varphi(t_x) = \varphi(t), t_x = 2-t, 1 \leq t \leq 2)$ とし、

$h(u) := -u\varphi'(u) / \sqrt{\varphi(u) - u\varphi'(u)}$, $0 < u < 1$, と書く。



定理 2. 上記の φ に対して, $W_\varphi(t)$ は次の標準表現と SIE $dX(t) = \mu_t(dt) + \sigma(t)dB(t)$ と $t \rightarrow$:

t の範囲	標準表現	$\mu_t(dt)$	$\sigma(t)$
$0 \leq t \leq 1$	$\varphi(t) \int_0^t \sqrt{(u/\varphi(u))'} dB(u)$	$(\varphi'(t)/\varphi(t)) W_\varphi(t) dt$	$\varphi(t) \sqrt{(t/\varphi(t))'}$
$1 < t \leq 2$	$W_\varphi(t_x) + \int_{t_x}^1 \frac{1}{\sqrt{(u/\varphi(u))'}} dB(u) + \int_1^t \sigma(u) dB(u)$	$-(\varphi'(t_x)/\varphi(t_x)) W_\varphi(t_x) dt - h(t_x) dB(t_x^-)$	$\sqrt{(t\varphi(t))' - h^2(t_x)}$
$t > 2$	$W_\varphi(2) + \int_2^t \sigma(u) dB(u)$	0	$\sqrt{(t\varphi(t))'}$

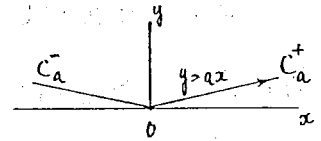
$1 < t \leq 2$ のときの SIE が正規形でないのは t_x ぶん, $\mu_t(dt)$ の部分に原因し, $h(t_x)dB(t_x^-) = h(t_x)(B(t_x) - B(t_x - dt))$ という形で過去の時点 t_x とかかると white noise が再び生じるからである。

5. Lévy's Brownian motion

Lévy の Brown 運動 $B(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, の特性は, $0 \leq x < y$ は任意の直線上に制限して動かすと, 加法過程となる点がある。これは直線から動点かはずれるとどんな Gauss 過程になるか?

この問題に取り組む第一歩として, 折れ線 $C_a = C_a^+ \cup C_a^-$ を考える。

$B_{C_a^+}$ と $B_{C_a^-}$ とは別々に扱えば, “それぞれ標準 Brown 運動であるか”。



傾きが $a > 0$ の場合お互いに弱くない相関をもつ。この C_a 上の Gauss 過程 $B_a(x)$ の標準表現を求める問題の意味をもつ。講演では, この問題と時間分割について詳述したい。

References

- [1] P. Lévy, 全集 IV, Gauthier-Villars (1970); 特に, pp 187-286 を見よ。
- [2] 教理解析研究所講究録 (研究代表者 野田明男「Random Fields with Reflection Positivity」 (1988) 出版予定; 中の 野田, 藤田, SiSi の各論説。
- [3] Y. Okabe, On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian processes with T-positivity, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 33, 1-56 (1986).

カオス的時系列のデータ解析に 関するコメント

長島 知正 (室工大)

1. はじめに

“カオスカ学系”なる言葉が大衆化され、種々の分野でとりまわされた一時的熱気は冷めたかの感がある。ところで、数学として見たとき、“カオス”の研究はどの程度に評価されてきたのか、又今後どの程度の発展が展望されるのか着落にはよく分らない。むしろ、個人的にはカオスの研究はまだ“という評価を与える程にはほど遠く、問題が十分整理されていらないように思われる。ここでは、従来のカオスの研究が主としてカ学系を与え、 $flow$ を如何に特徴付けるかという観点からのものであったのに反して、ある意味で、逆の立場から見たカオスの問題についての考察を述べる。

2. カ学の逆問題としてのカオスの問題——カオス的時系列の解析

“カオス”が数学者以外の大衆に *impact* を与えたのは、不規則運動を含む複雑な運動が必ずしも複雑な仕掛けや *rule* によらずに生成されるという事実に集約される。つまり、極めて単純な非線形なバクトル場や写像から容易にカオス的な運動が作りだされることを

知り、更には "random" な現象としてのサイコロやコイン投げと区別の一つがない(決定論的)力学系であることを学んだ。

しかしこのことは、実際の流体や化学反応等、カオスの発生が期待される物理系での観測方法、特にデータ解析の方法に問題を抱かせることになった。

流体の乱流に限らず、現実の物理系に現れる不規則的なデータから、それが決定論的力学系のカオス状態であることを示す方法が問われることになった。

3. カオス的時系列の解析と予測

実験的立場からは、従来、不規則データを解析することは、(標準)相関数やスペクトルを計算することか、ほとんど唯一の基本的な方法と見做されてきた。

しかし、スペクトルのみでは決定論に従うカオスであるか否かの判定には不十分である。

ここでは、与えられた時系列データから、力学系についてのより詳しい情報を得るための方法(1)とそれに付随する予測の問題(2)に関する最近の試みを紹介し、若干の考察を述べる。(1),(2)それぞれに立脚する資料として、(3),(4)を参考のため示しておく。

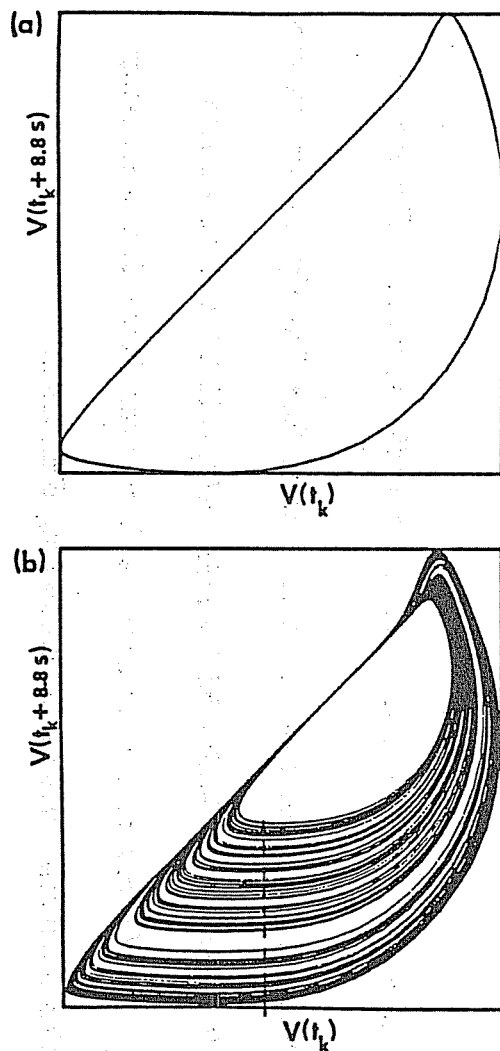


Figure 1 (a) A two-dimensional phase portrait for a periodic state observed in experiments on the Belousov-Zhabotinsky reaction; the corresponding power spectrum has a single sharp fundamental component and its harmonics. (b) A two-dimensional projection of a three-dimensional phase portrait (with the third axis, $V(t_k + 17.6s)$, normal to the page) for a chaotic state observed in the Belousov-Zhabotinsky reaction; the corresponding power spectrum contains broadband noise. The attractor in (a) is a limit cycle and in (b) a strange attractor

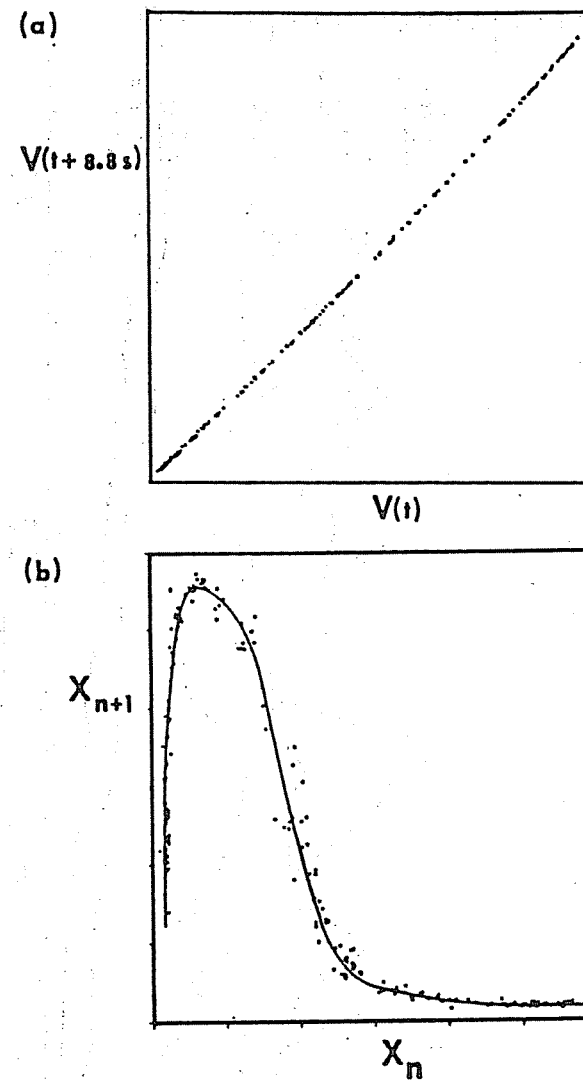
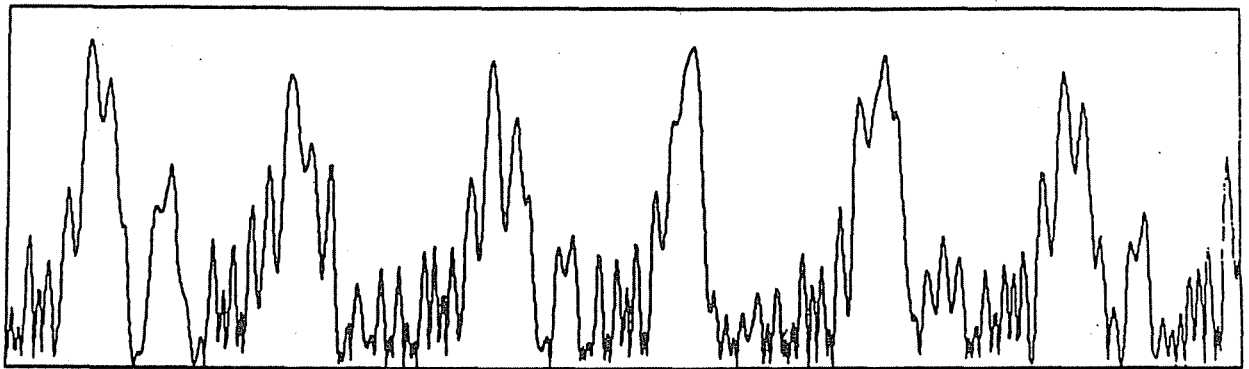
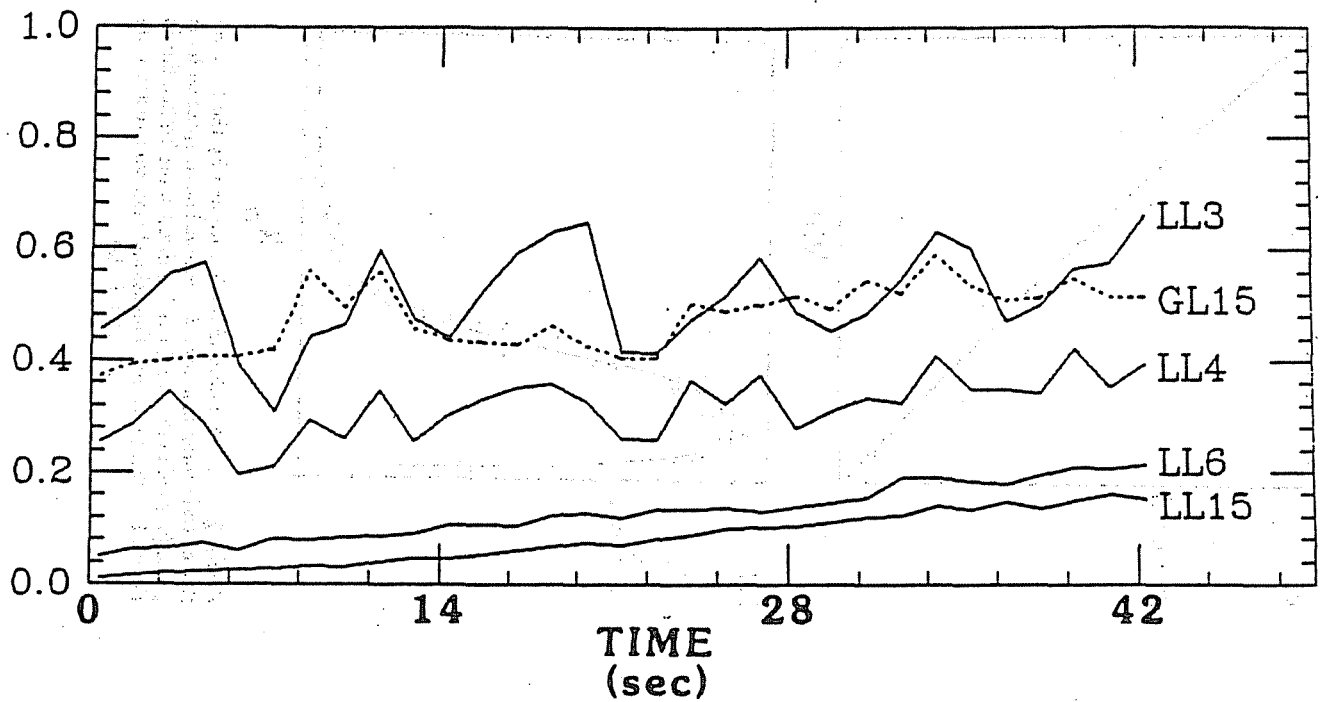


Figure 2 (a) A Poincaré section formed by the intersection of trajectories in a three-dimensional phase space with the plane (normal to the page) passing through the broken line in Figure 1 (b). (b) A one-dimensional map constructed from the data in (a)



1. The normalized error $r(T) = \frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_x}$, as a function of the prediction time T . The time series is plotted underneath on the same scale, and was obtained from Rayleigh-Benard convection in an He^3 - He^4 mixture¹². The Rayleigh number $R/R_c = 12.24$, and the attractor dimension $D \approx 3.1$. We show results for the Local Linear and Global Linear methods; numbers following the initials indicate the embedding dimension.

KM₂O・ランジュヴァン方程式論 (II)

杉本 幸司 (北大・理)

岡部先生は、論文[2]において、多次元弱定常系列に対するKM₂O-ランジュヴァン方程式の理論を展開している。この講演では主にこのKM₂O-ランジュヴァン方程式の理論及びそれからKM₀O-ランジュヴァン方程式に移行する原理を紹介する。

以下この予稿集を通して $X = (X(n) : n \in \mathbb{Z})$ は常に確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上の \mathbb{R}^d 値弱定常系列で平均 0 なるものとし、その相関函数を R とする

$$R(n) = E[X(n)^t X(0)] \quad (n \in \mathbb{Z})$$

§ 1 KM₂O-ランジュヴァン方程式

[1] $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $S_n \in M(nd; \mathbb{R})$ を

$$S_n := \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \cdots & R(n-2) & R(n-1) \\ {}^tR(1) & R(0) & R(1) & \cdots & R(n-3) & R(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^tR(n-2) & {}^tR(n-3) & {}^tR(n-2) & \cdots & R(0) & R(1) \\ {}^tR(n-1) & {}^tR(n-2) & {}^tR(n-3) & \cdots & {}^tR(1) & R(0) \end{bmatrix}$$

で定義して、これを「ブロックトロープリツ行列表 (block Toeplitz matrix)」という。このとき次の (C.1) (C.2) のいずれかが起こる。

(C.1) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n \in GL(nd; \mathbb{R})$

(C.2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $1 \leq n \leq n_0 \Rightarrow S_n \in GL(nd; \mathbb{R})$

$n_0 + 1 \leq n \Rightarrow S_n \notin GL(nd; \mathbb{R})$

$L^2(\Omega)$ の閉線型部分空間 $M, M_0^+(n), M_0^-(n)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) を

$$M := L.h[\{X_j(m) : 1 \leq j \leq d, m \in \mathbb{Z}\}]$$

$$M_0^+(n) := L.h[\{X_j(m) : 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n\}]$$

$$M_0^-(n) := L.h[\{X_j(-m) : 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n\}]$$

で定義する。ただし $X(m) = (X_1(m), \dots, X_d(m))$ ($m \in \mathbb{Z}$) また、 (Ω, \mathcal{B}, P) 上の \mathbb{R}^d 値時系列

$$U_+ = (U_+(n) : n \in \mathbb{N}^*), U_- = (U_-(n) : n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\nu_+(n) := X(n) - P_{M_0^+(n-1)} X(n)$$

$$\nu_-(n) := X(-n) - P_{M_0^-(n-1)} X(-n)$$

で定義する. ただし $M_0^+(-1) = M_0^-(-1) = \{0\}$, $P_{M_0^+(n-1)}, P_{M_0^-(n-1)}$ はそれぞれ $M_0^+(n-1), M_0^-(n-1)$ への直交射影. $\nu_+(n), \nu_-(n)$ の共分散行列を $V_+(n), V_-(n)$ とする

$$V_+(n) := E[\nu_+(n)^t \nu_+(n)]$$

$$V_-(n) := E[\nu_-(n)^t \nu_-(n)]$$

このとき次が成り立つ.

$$(1) \nu_+(0) = \nu_-(0) = X(0)$$

(2) ν_+, ν_- は平均0の直交系列

$$E[\nu_+(m)^t \nu_-(n)] = \delta_{m,n} V_+(n)$$

$$E[\nu_-(m)^t \nu_-(n)] = \delta_{m,n} V_-(n)$$

$$(3) M_0^+(n) = L.h[\{\nu_{+j}(m) : 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n\}]$$

$$M_0^-(n) = L.h[\{\nu_{-j}(m) : 1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq n\}]$$

ただし $\nu_+(m) = {}^t(\nu_{+1}(m), \dots, \nu_{+d}(m))$, $\nu_-(m) = {}^t(\nu_{-1}(m), \dots, \nu_{-d}(m))$

[2] この項では (C.1) が起こっているとする. すると

定理 1.1

$\exists \{\gamma_+(n, k), \gamma_-(n, k), \delta_+(n), \delta_-(n) : 1 \leq k < n\} \subset M(d; \mathbb{R})$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1.1) \quad X(n) = -\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k) - \delta_+(n) X(0) + \nu_+(n)$$

$$(1.2) \quad X(-n) = -\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_-(n, k) X(-k) - \delta_-(n) X(0) + \nu_-(n)$$

(1.1) [resp (1.2)] を X の 前向き [resp 後向き] KM₂O-ランジュヴァン方程式 (forward [resp backward] KM₂O-Langevin equation) といふ. また ν_+ [resp ν_-] を X の 前向き [resp 後向き] KM₂O-ランジュヴァン雑音, $\{\gamma_+(n, k), \gamma_-(n, k), \delta_+(n), \delta_-(n), V_+(n), V_-(n) : 0 \leq k < n\}$ を KM₂Oランジュヴァンデータ といふ. KM₂O-ランジュヴァンデータについて次が成り立つ

定理 1.2

$n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$ とする

$$(1.3) \quad \gamma_+(n, k) = \gamma_+(n-1, k-1) + \delta_+(n) \gamma_-(n-1, n-k-1)$$

$$(1.4) \quad \gamma_-(n, k) = \gamma_-(n-1, k-1) + \delta_-(n) \gamma_+(n-1, n-k-1)$$

$$(1.5) \quad V_+(n) = (I - \delta_+(n)\delta_-(n)) V_+(n-1)$$

$$(1.6) \quad V_-(n) = (I - \delta_-(n)\delta_+(n))V_-(n-1)$$

$$(1.7) \quad \delta_-(n)V_+(n-1) = V_-(n-1)^t \delta_+(n)$$

$$(1.8) \quad \delta_-(n)V_+(n) = V_-(n)^t \delta_+(n)$$

$$T = T^L \quad \gamma_+(n, 0) := \delta_+(n) \quad \gamma_-(n, 0) := \delta_-(n)$$

また (C.1) が起こっていることより $V_+(n), V_-(n) \in GL(d, \mathbb{R})$ が示され.

定理 1.3

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(1.9) \quad \delta_+(n+1) = -(R(n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) R(k+1)) V_-(n)^{-1}$$

$$(1.10) \quad \delta_-(n+1) = -({}^t R(n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) R(k+1)) V_+(n)^{-1}$$

$$(1.11) \quad \delta_+(1) = -R(1)R(0)^{-1}$$

$$(1.12) \quad \delta_-(1) = -{}^t R(1)R(0)^{-1}$$

が成り立つ. (1.3)-(1.6), (1.9)-(1.12) は KM_2O ランジュヴァンデータが $R(n)$ から帰納的に求まることを表わしている.

[3] 以上が 線型タイプの KM_2O -ランジュヴァン方程式の理論の主要な結果であるが講演では 非線型タイプの KM_2O -ランジュヴァン方程式, 及び 1次元 ($d=1$) の場合について (C.2) が起こっている時についても言及する

§2. KMO -ランジュヴァン方程式

この§では

(H.1) \times のスペクトル測度はスペクトル密度 $\Delta(\theta) = (\Delta_{jR}(\theta))_{1 \leq j, R \leq d}$ を持つ 特

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \Delta(\theta) d\theta$$

(H.2) $\log(\det \Delta(\theta)) \in L^1(-\pi, \pi)$

をみたすと仮定する.

[1] 仮定 (H.1) (H.2) の下で

定理 2.1

$\exists \{ \gamma_+(n, k), \gamma_-(n, k), \delta_+(n), \delta_-(n) : 0 \leq k < n, \}^1$ d 次元直交過程

$U_+ = (\nu_+(n) : n \in \mathbb{N}^*)$ $U_- = (\nu_-(n) : n \in \mathbb{N}^*)$ (平均0) s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(2.1) \quad X(n) = - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k) - \delta_+(n) X(0) + \nu_+(n)$$

$$(2.2) \quad X(-n) = - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_-(n, k) X(-k) - \delta_-(n) X(0) + \nu_-(n)$$

が示される。また KM_2O -ランジュヴァンデータは次の様な挙動をする。

定理 2.2

(1) $\lim_{N \rightarrow \infty} V_N^{\pm}(N)$ が存在する [これを $V_N^{\pm}(\infty)$ と書く]

さらに $V_N^{\pm}(\infty) \in GL(d; \mathbb{R})$ かつ正定値な対称行列

(2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N^{\pm}(N) = 0$,

$\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N^{\pm}(N, k) = 0$

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N^{\pm}(N, N-k)$ が存在する

各 $N \in \mathbb{N}^*$ に対して $E_N^+ = (\varepsilon_N^+(n) : n \in \mathbb{Z})$, $E_N^- = (\varepsilon_N^-(n) : n \in \mathbb{Z})$ を

$$\varepsilon_N^+(n) := U(n-N) \nu_+(N)$$

$$\varepsilon_N^-(n) := U(n+N) \nu_-(N)$$

で定める。ただし $U(\cdot)$ はシフト作用素

$$U(n) X(m) = X(m+n)$$

E_N^{\pm} は弱定常系列になる。この挙動について次が成り立つ

定理 2.3

\exists \mathbb{R}^d 値白色雑音 $\xi_N^{\pm} = (\xi_N^{\pm}(n) : n \in \mathbb{Z})$ s.t.

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N^{\pm}(n) = V_N^{\pm}(\infty)^{\frac{1}{2}} \xi_N^{\pm}(n)$$

[この時系列を $E_{\infty}^{\pm} = (\varepsilon_{\infty}^{\pm}(n) : n \in \mathbb{Z})$ と書く]

[2] KM_2O -ランジュヴァン方程式

$$X(N) = - \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_+(N, k) X(k) - \delta_+(N) X(0) + \nu_+(N)$$

の両辺に $U(n-N)$ を作用させると

$$X(n) = - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_+(N, k) X(n-N+k) - \delta_+(N) X(n-N) + \varepsilon_N^+(n) \quad N-k \text{ を改めて } k \text{ とおけば}$$

$$(2.3) \quad X(n) = - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_+(N, N-k) X(n-k) - \delta_+(N) X(n-N) + \varepsilon_N^+(n)$$

が得られる。後向きについても同様のことを行ない、 N についての L^2 極限をとれば

定理 2.4

$$(2.3) \quad X(n) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_+(N, N-k) X(n-k) + \varepsilon_{\infty}^+(n)$$

$$(2.4) \quad X(-n) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_-(N, N-k) X(n+k) + \varepsilon_{\infty}^-(n)$$

(2.3) [resp (2.4)] を X の 前向き [resp 後向き] KMO-ランジュヴァン方程式 という.

§ 3. $R(\cdot)$ の挙動・ $\delta(\cdot)$ の挙動

[1] この項では AR 過程及び MA 過程について述べる

*が AR(N) 過程とは (2.3) において ε_N^+ が白色雑音になることである このとき

定理 3.1

$$* \text{ が AR(N) 過程} \iff n \geq N+1 \text{ のとき } \delta_+(n) = 0$$

$$\iff n \geq N+1 \text{ のとき } \delta_-(n) = 0$$

が成り立つ

*が MA(N) 過程の場合, $R(\cdot)$ は定理 3.1 の様にふるまうが $\delta(\cdot)$ についてはわかっていない. 大体は指数的に decay すると言われているが そうでない例もある.

[2] AR 過程の無限的な場合と考えられる $R(n) = \frac{1}{e^{n+1} - 1}$ や T-正値性を持つ例 $R(n) = \frac{1}{n+1}$ の様な場合の $\delta(\cdot)$ の挙動はまだわかっていない

[3] $R(\cdot)$ が周期的な場合. 次の結果を得た ($d=1$)

定理 3.2.

$$R(n) = \sum_{k=1}^N \sigma_k \cos n\theta_k \quad (\sigma_k > 0, \theta_k \neq \theta_l \ (k \neq l))$$

$$\implies |\delta(2N)| = 1$$

参考文献

[1] Box, G.E.P. and G.M. Jenkins. Time series analysis, Forecasting and Control. Holden-Day (1976)

[2] Okabe, Y. On stochastic difference equations for the multidimensional weakly stationary time series, to appear

KM₂₀ - Langevin 方程式とフィルタリング

井上 昭彦

北大理

§1. アルゴリズム

信号過程 x_n が KM₂₀ - Langevin eq. を満たす時のフィルタリングを考える。この § では x_n の定常性は仮定しない。考える確率空間を (Ω, \mathcal{F}, P) とする。以下の確率変数は、すべて $L^2(\Omega)$ に属するとする。'直交する'等の意味は、この L^2 -空間の内積の意味である。信号過程 x_n は、次の KM₂₀ - Langevin eq. で決まるとする。

$$x_0^{(w)} = i_0^{(w)}, \quad x_n(\omega) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma(n, k) x_k(\omega) + i_n(\omega) \quad (n=1, 2, \dots).$$

ここで、 i は平均 0 の互いに直交する確率過程、 x, i : e -次元、 γ : $e \times e$ -行列。 x に定常性を仮定しないので、 γ や、 i の分散の間に関係はない。観測過程 y_n は、次で与えられるとする。

$$y_n(\omega) = F_n \cdot x_n(\omega) + w_n(\omega) \quad (n=0, 1, \dots).$$

ここで、 w は white noise (i.e. $E(w(n))=0, E(w(n) \cdot {}^t w(m)) = \delta_{nm} \times$ 単位行列) とする。 y, w : d -次元 vector, F : $d \times e$ -行列。

(仮定) $\{i_0, i_1, \dots, w_0, w_1, \dots\}$ は、互いに直交する。

$$R^i(n, n) \equiv E(i_n \cdot {}^t i_n), \quad P(n, m) \equiv E(x_n \cdot {}^t i_m) \quad (n \geq m \geq 0)$$

$$R^x(n, m) \equiv E(x_n \cdot {}^t x_m) \quad \text{とおく。}$$

命題、 $p(n, m)$ 、 $R^x(n, m)$ は、次から帰納的に求まる。

$$(i) \quad p(n, m) = \begin{cases} R^i(n, n) & (n=m) \\ -\sum_{k=m}^{n-1} \delta(n, k) p(k, m) & (n > m) \end{cases}$$

$$(ii) \quad R^x(n, m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \delta(n, k) \cdot R^x(k, l) \cdot {}^t \delta(n, l) + R^i(n, n), & (n=m) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \delta(n, k) \cdot R^x(k, l) \cdot {}^t \delta(m, l) - \sum_{k=m}^{n-1} \delta(n, k) \cdot p(k, m) & (n > m). \end{cases}$$

$$H_n \equiv \langle y_0, \dots, y_n \rangle \quad (n \geq 0) \quad (\text{closed linear hull})$$

とし、 P_{H_n} を H_n への直交射影とする。 y の innovation j

を次で定める。

$$j_0^{(\omega)} \equiv y_0^{(\omega)}, \quad j_n^{(\omega)} = y_n^{(\omega)} - (P_{H_n} y_{n-1})^{(\omega)} \quad (n \geq 1) \quad .$$

$$R^j(n, n) \equiv E(j(n) \cdot {}^t j(n)), \quad R^J(n, n) \equiv \begin{pmatrix} R^j(0,0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R^j(n,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^J(n-1, n-1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R^j(n,n) \end{pmatrix}$$

とおく。 $R^j(n, n)$ は、正則であることがわかる。

$$P_{H_n} x_k = a_{k0} j_0 + \dots + a_{kn} j_n, \quad A^n \equiv \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (0 \leq k \leq n)$$

とおく。 $a_{k\ell}$: $e \times d$ -行列、 A^n : $(n+1)e \times (n+1)d$ -行列。

$$P_{H_n} i_k = c_{k0} j_0 + \dots + c_{kn} j_n, \quad C^n \equiv \begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{n-1} & & c_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

§2. シミュレーション

§1の内容に対する数値実験を行なう。特に、 $d=e=1$ で、 x が定常の場合を考える。 $\delta(n,0) \equiv \delta(n)$ ($n \geq 1$)を与えれば、 $\delta(n,k)$ ($n=0,1,\dots, k \leq n$)及び、 i_n の分散は自動的に決定される。但し、 $|\delta(n)| < 1$ 。 x_0 を与え(例えば、 $=0$)、乱数を使って i_n を与えることにより、定常列 x_n が得られる。 $F = \text{const.}$ として、フィルタ $y_n = F \cdot x_n + w_n$ を通して得られるデータ y_0, y_1, \dots から、§1のアルゴリズムを用いて、 x_n の推定値を求め、 x_n との誤差を調べる。 x_n は定常であるから、 $R^x(n,n)$ として命題のii)を用いる必要はなく、

$$R^x(n,n) = (R^y(0) - 1) / F^2$$

但し

$$R^y(0) = \frac{\sum_{k=0}^N y(k)^2}{N+1}$$

とすればよい。詳しくは、発表の時に述べる。

§ 1 はじめに

「良い音楽」あるいは「心地よい音楽」とは何だろうという素朴な疑問から始まって、決定論的な方法と非決定論的な方法を考えてきた。前者に関しては今年の2、3月ごろ、2つのことを考えた。1つは、シェバードの螺旋という音高空間上に、ウォルフラムのセルオートマトンの中でフラクタルパターンを生じるタイプ3の生成規則に対応するものを使って音楽の自己相似性という概念を捉えられないかと考えた。もう1つは、記憶を持つセルオートマトンという新しい概念を導入して(しかしこの概念は音楽が記憶というものから逃れられないということを考えても自然であると思える)、その最も単純と考えられる生成システムからどんな音楽が生まれるか観察する。そして順次、長音階や短音階などの既成の音楽理論のシステムを加えていってそのどの規則がどういう役割をしているかはっきり見ようと考えた。これらの生成規則はどちらも決定論的であることに1つの重要なポイントがあると思うが、これらに対して、非決定論的な音楽解析の手法も考えられる。ARモデルやARMAモデルは従来使われてきたが、今回の研究ではKM₂O-ランジュヴァン方程式の理論を用いることにより、従来の研究では解析できなかったこともわかってきた。

§ 2 分析方法

童謡、民謡、歌謡曲（演歌、ポップス etc）など様々な曲を5線譜で分析した。そのときとりあえず拍子は2拍子（4分の2拍子、2分の2拍子）と4拍子（4分の4拍子）の曲に限った。3拍子の曲など他の拍子の曲もこれから調べていきたい。そうすることによって、5線譜データではリズムが明確に反映されないがそれでも拍子ごとに特徴的な構造が得られるかも知れない。

またここでは、伴奏までは考えず主旋律のみを考慮にいった。そのときの時間の最小単位は通常8分の1音符にした。このとき例えば、4分の1音符の「ラ」が1音鳴っている場合と8分の1音符の「ラ」が2つ続けて鳴っている場合をこの場合は区別していないことに注意する必要がある。最小時間単位に関してであるが、特別に16分の1音符の多い曲は時間の最小単位を16分の1音符とした。また3連符の多い曲は音の持続時間単位が多少狂ってくるので除くことにした。

音高列の数値化であるが、440ヘルツの「ラ」の音を「13」とし、半音上がるごとに1を加え、半音下がる場合は1を引いた。そうすると220ヘルツのラの音は「1」、880ヘルツのラの音は「25」となる。曲の長さはプログラムの関係上データ数を400以下とした。よって、最小単位が8分の1拍子であれば、50小節以下となる。

休符をどう扱うかは問題であるが、今回はとりあえず前と同じ音が続いているとして処理をした。

以上のようにして得られたデータに対してまず定常性の検定を行った。次に、デルタとエントロピーレイトのグラフを描かせそれぞれの曲の特徴を調べた。これらは様々な曲に対して行ったが、並行して作曲家別（中島みゆき、松任谷由美）に同様の分析をし、作曲家の個性と言うべきものが特徴パラメータのデルタにどの様に反映してくるか調べた。

§ 3 分析例 (船頭小唄)

No.11 船頭小唄 野口雨情—作詞 中山晋平—作曲

おれはかわらの
おしぬもいきるも
かれたまこにも
かれすすきおなじおまえもかれすすき どうせ
ねえおまえるみずのながれになにかわらん おれたし
てらして りたこでじまのおつきさん わ
ふた—りはこのよでは はなのさかないかれすす—き
おま—えもとねがわの ふねのせんだうでくらそう—よ
これ—からとねがわの ふねのせんだうでくらすの—よ

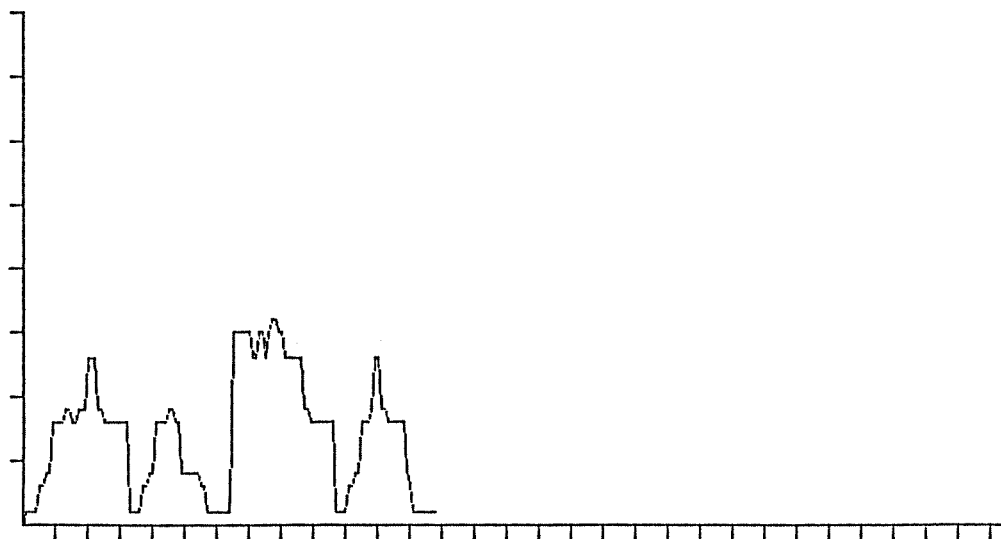
***** DATA *****

1	1	1	1	3	3	4	4	8	8	8	8	9	9	8	8
9	9	9	13	13	13	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8
1	1	1	1	3	3	4	4	8	8	8	8	9	9	8	8
4	4	4	4	4	4	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1
15	15	15	15	15	15	13	13	15	15	13	15	16	16	15	15
13	13	13	13	13	13	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8
1	1	1	1	3	3	4	4	8	8	8	9	13	13	9	9
8	8	8	8	8	8	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1

MEAN = 7.09375

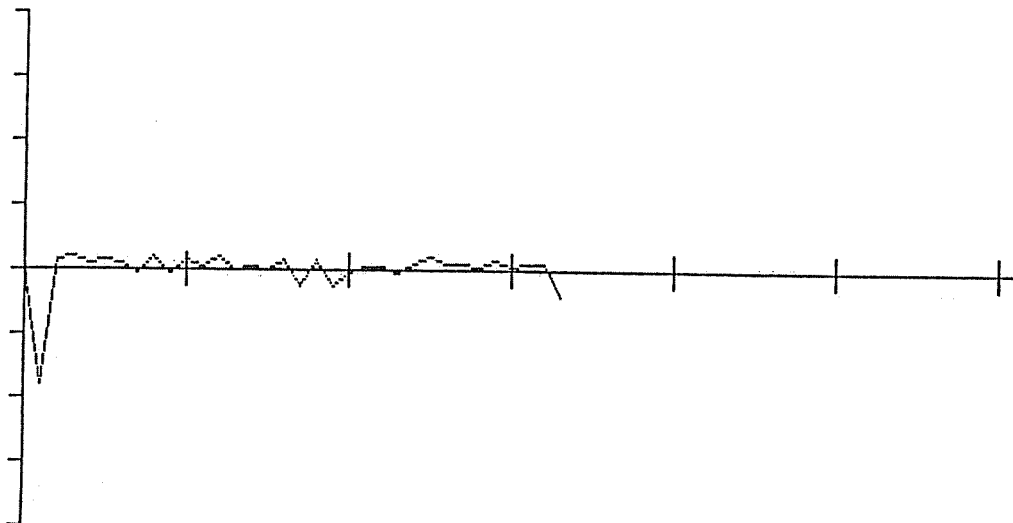
***** MELODY GRAPH *****

1 Scale = 5



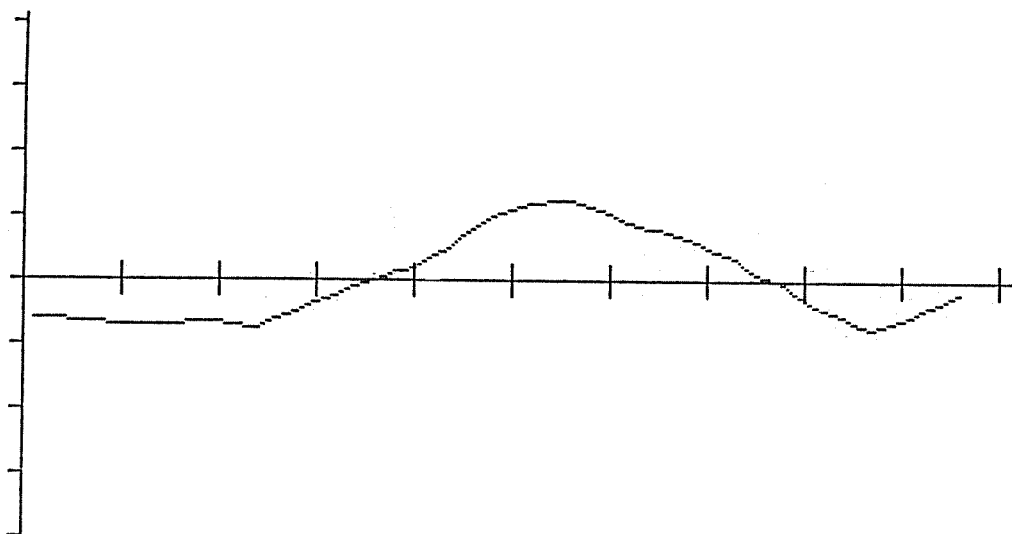
***** DELTA GRAPH *****

l Scale = .5



***** ENTROPY RATE GRAPH *****

l Scale = .05



§ 4 おわりに

楽音に関して主要な感覚は「音高」「強さ」「音色」の3つであるが、今回の研究の5線譜データ入力の場合は、「音高」だけを問題としており「強さ」や「音色」の情報は捨象されている。これは実際の演奏音からのデータ入力による解析が可能になれば、解消されるものと考えられる。よって今後の研究方向として、実際の演奏データから分析したいと思う。

森の(量子)ランジュヴァン方程式

京都大学理学部物理

中澤 宏

1. まえおき

統計力学の目的の一つは、諸物質の輸送係数(電気伝導度、...)の微視的構造を明らかにする事である。これに関する基礎が、共に古典である久保¹⁾の線形応答理論及び森²⁾の射影作用素理論によって置かれた事は言を俟たない。前者は多くの輸送係数に熱平衡状態での相関函数 correlation functionsによる表現を与えた。後者はこれら相関函数に対して射影作用素の方法に基づく方程式を与え解析を可能にし、さらに自然に力学的自由度の発展に対するブラウン運動的な一般的な見方に我々を導いた。現在の報告では量子論での射影作用素の方法について、従来想定されていた「作用素値 Langevin 方程式」の埒外にある種の場合必然的に出る事³⁾を明確な例と共に示して、「量子確率過程」の一つの統計物理学的枠組みを明かにし、数学・物理学的諸理論の間に新しい相互作用のチャンネルを開く事を目指す。

2. 久保理論

統計物理学における相関函数-射影演算子の方法についての展望、思想や諸手法は Forster⁴⁾の lucidな講義録に詳しい。幾つかの記法を導入し概念を明確にするために、しかし、少しの説明を以下に述べる。ハミルトニアン \mathbb{H} を持つ量子力学的な系^{*}を考えよう。 $t < -T$ での系の状態を、逆温度 β での熱平衡密度行列 $G_{eq} = \exp(-\beta\mathbb{H})/N$, N は規格化定数、であたえられると仮定する。一般性を失う事なく、以下登場するすべての作用素 X (例えば A, B, \dots) の G_{eq} での期待値について、 $\langle X \rangle \equiv \text{Tr}(G_{eq}X) = 0$ とおく。 $t = -T$ から系の自由度 B に弱い外場 $e(t)$ が作用を始め、ハミルトニアンが $\mathbb{H}'(t) = \mathbb{H} - Be(t)$ に変わるとする。 $t \geq -T$ での密度行列 $G'(t)$ は Bloch 方程式 $i\hbar \partial G'(t)/\partial t = [\mathbb{H}', G'(t)]$ に従う。 $G'(t) = G_{eq} + G(t)$ と置き $e(t)$ の一次までの変化を考えるなら、次の方程式を得る：

$$i\hbar \partial G(t)/\partial t = [\mathbb{H}, G(t)] - [B, G_{eq}]e(t), \quad G(-T) = 0. \quad (1)$$

密度行列の線形応答は、だから、

$$G(t) = i/\hbar \int_{-T}^t U(t-s) [B, G_{eq}] U^*(t-s) e(s) ds, \quad U(t) \equiv \exp[-it\mathbb{H}/\hbar]. \quad (2)$$

である。この変化を作用素 A の期待値 $\text{Tr}\{G'(t)A\} = \text{Tr}\{G(t)A\} \equiv a(t)$ で観測するなら、

$$a(t) = i/\hbar \int_0^{t+T} \text{Tr}\{U(s) [B, G_{eq}] U^*(s) A\} e(t-s) ds. \quad (3)$$

こうして、 $T \rightarrow \infty$ に対する次の久保公式が得られる：

$$a(t) = i/\hbar \int_0^\infty \langle [A(s), B(0)] \rangle e(t-s) ds, \quad A(s) \equiv U^*(s) A U(s). \quad (4)$$

* 古典系へは、 $\hbar \rightarrow 0$ とし $-i[A, B]/\hbar \equiv -i(AB - BA)/\hbar \rightarrow \text{Poisson}$ 括弧式とすれば移る。

基本的な役割を演ずる函数 $q(t) \equiv \langle [A(t), B(0)] \rangle / 2\hbar$ について, そのフーリエ変換 $\hat{q}(f)$ 及びそれから作られる $\hat{p}(f)$, $\hat{r}(f)$ を次で導入する:

$$\hat{q}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ift) q(t) dt, \quad \hat{p}(f) \equiv (1/\pi) \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (f' - f)^{-1} \hat{q}(f') df', \quad (5)$$

$$\hat{r}(f) \equiv \hat{p}(f) + i\hat{q}(f).$$

$\hat{r}(z)$ は $2iq(t) = (i/\hbar) \langle [A(t), B(0)] \rangle$ のラプラス変換

$$\hat{r}(z) \equiv \int_0^{\infty} \exp(izt) 2iq(t) dt, \quad \text{Im}(z) > 0, \quad (6)$$

の境界函数で, これを用いると線形応答関係は $\hat{a}(f) = \hat{r}(f)\hat{e}(f)$ と表す事ができる. 通常の相関函数 $s(t) \equiv \langle A(t)B(0) \rangle$ とそのフーリエ変換 $\hat{s}(f)$ については β -KMS性から $\langle B(0)A(t) \rangle = s(t - i\beta\hbar)$ であるから, $2\hbar q(t) = [1 - \exp(-i\beta\hbar \partial / \partial t)]s(t)$ となり, 一種の fluctuation-dissipation relation

$$2\hbar \hat{q}(f) = [1 - \exp(-\beta\hbar f)] \hat{s}(f) \quad (7)$$

が成り立つ. 従って $\hat{q}(f)/f$ が $f=0$ 近傍で正則なら, それは $\hat{s}(f)$ とは同等の情報を含む.

$A=B$ 且つ $A=\text{hermite}$ の最も簡単な場合については, $\hat{q}(f)$, $\hat{s}(f)$ 共に実である. $\hat{q}(f)$ が奇函数である事はすぐわかる. 一方 $\hat{s}(f)$ については Bochner の定理から $\hat{s}(f) \geq 0$ となり, これによって重要な次の式を得る:

$$\hat{q}(f)/f \geq 0, \quad \hat{q}(f)/f \text{ は偶函数, 但し } A=B=\text{hermite}. \quad (8)$$

3. 森理論

線形応答理論は力学変数である作用素 A, B 等について, $s(t)$ を与える期待値 $\langle A^*B \rangle$, 或いは $q(t)$ を与える次の量の算出を要求する:

$$(A, B) = 1/\beta\hbar \int_0^{\beta\hbar} \langle A^*B(ix) \rangle dx, \quad B(ix) = U(-ix)BU(ix). \quad (9)$$

(9)式の物理的意味は, Heisenberg 方程式の次の含意から分かる:

$$i\beta\hbar d\langle A(t), B(0) \rangle / dt = \langle [A^*(t), B(0)] \rangle, \\ q(t) = \langle [A^*(t), B(0)] \rangle / 2\hbar = (i\beta/2) d\langle A(t), B(0) \rangle / dt. \quad (10)$$

(10)前半と $\langle A^*(t)B(0) \rangle$ の β -KMS性 は次を意味し, これから逆に(9)を得る事もできる:

$$0 = \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{-i\beta\hbar} + \int_{-i\beta\hbar}^{-i\beta\hbar - \infty} \right) [d\langle A^*(t), B(0) \rangle / dt] dt.$$

$\langle A^*B \rangle$ も (A, B) も共に内積の性質を示す事は見易い.

以下に述べる定式化に関する限り, どちらでも同じだから, (A, B) を採用して進む. 力学変数 A で条件 $(A, A) \equiv \|A\|^2 < \infty$ を満たすものの全体 (複素線形空間*) を V' , V' の $\|\cdot\|$ による完備化を Hilbert 空間 V とする. 統計力学的課題は, ある $A, B \in V$ について $\langle A(t), B(0) \rangle$ を算出する事である.

岡部⁵⁾はこの状況での森理論が平均連続過程の一般の set-up として把握できる事を指

*ここに非有界作用素の場合含まれる仮定については, 第4節の例と第5節末尾を参照.

摘した. このset-upを森-岡部構造と呼ぼう.³⁾ 上のHilbert空間 $\{V, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ から出発し, 物理の細部を捨象すると, 問題の構造は次で捉えられる:

森-岡部構造 Pre-Hilbert空間 $\{V', \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ について, ある元(一般には組) $\Lambda = \Lambda(0) \in V'$ の V' 内での時間発展 $A(t)$ が与えられているとして, ①時間シフト $T_t: T_t A(u) \equiv A(u+t)$ は $(T_t A(u), T_t A(v)) = (A(u), A(v))$ を与え, ② $(A(t), A(0))$ は t -連続である.

実際これだけから, 森理論のすべての結論が生成する. これを説明する.^{5), 3)} 以下簡単のために Λ は一自由度, $A^* = A$ の場合について考えよう.

$W' \subset V$ を $\{\Lambda(t); t \in \mathbb{R}\}$ が V 中で張る複素線形空間とし, そのノルム $\|\cdot\|$ での完備化を W とする. 以下 W' , W 内で述べるが, すべては V' , V へ拡張される. $A(t)$ 上の時間シフト T_t は群をなす: $T_s T_t = T_{s+t}$. T_t の作用は線形性,

$$T_t \sum_k a_k A(t_k) = \sum_k a_k T_t A(t_k), \quad a_k \in \mathbb{C},$$

によって W' 上へ拡張される. 仮定①から拡張された T_t は W 中で部分等長的且つ群の性質を保つ. 従って T_t は W 上のユニタリ-作用素の1-パラメーター群に一意拡張される. 仮定②によって $\{T_t; t \in \mathbb{R}\}$ は t -連続である. 実際任意の $X \in W$ と $\varepsilon > 0$ について, $\|X - \sum_k a_k A(t_k)\| < \varepsilon$ となる有限和 \sum_k があるから,

$$\begin{aligned} \|(T_h - 1)X\| &\leq \|T_h(X - \sum_k a_k A(t_k))\| + \|(T_h - 1)\sum_k a_k A(t_k)\| \\ &+ \|\sum_k a_k A(t_k) - X\| < 2\varepsilon + \|(T_h - 1)\sum_k a_k A(t_k)\|, \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ として右辺第二項 $\rightarrow 0$ となり, (弱)連続となる. Stoneの定理から, T_t の生成作用素 L が存在して, $T_t = \exp(itL)$. 故に $\Lambda(0)$ が L の定義域 $D(L)$ に入っていれば⁵⁾常に $A(t) \in D(L)$ であって, 運動方程式

$$dA(t)/dt = iLA(t) \tag{11}$$

が得られる. W 中での射影作用素 P を

$$PX \equiv \|A(0)\|^{-2} \langle A(0), X \rangle A(0), \quad \forall X \in W, \tag{12}$$

と定義して, 森理論のすべての出発点が揃う. 次の諸結果^{2), 4), 6)}はよく知られている:

$$dA(t)/dt = i\Omega A(t) - \int_0^t m(t-s)A(s)ds + k(t), \tag{13}$$

$$k(t) = \exp(itQL)QiLA(0), \quad Q = 1 - P, \quad \Omega = \langle A(0), LA(0) \rangle, \\ m(t-s) = \langle k(s), k(t) \rangle \|A(0)\|^{-2}, \tag{14}$$

$$dc(t)/dt = -i\Omega c(t) - \int_0^t \bar{m}(t-s)c(s)ds. \tag{15}$$

4. 久保函数型⁴⁾内積に対する量子力学的森-岡部構造

内積 $\langle A^* B \rangle$ は作用素代数のGNS構成法と明らかな関連があり, この内積の選択に対して森-岡部構造の基本仮定が成り立つ量子統計力学的な場合はかなり一般的に論じる事ができる.³⁾ 得られる要点は次である: V' から上記Hilbert空間 V への拡張では, 一般に作用素としては意味を与える事のできない要素が入り得るが, Liouville作用素を上記で存在の示された生成作用素 L と読み代えるなら, 量子統計力学的射影演算子の方法の正当性は保証される. この結論は, 応用上ばかりでなく, 量子統計力学的確率過程の新しい性

格付け、枠組み⁷⁾を与える点で重要と思う。

久保函数⁴⁾型の内積，(9)式の(A,B)，でも同じ結論が成り立つ。この内積の構造は今少し複雑で、現在までのところ上の様な一般論には乗っていないが、 $\langle A^*B \rangle$ 同様或いはそれ以上に重要と思われるから、ここではある力学系の例に即して詳しく考察する。取り上げるのは量子ガウス型ホワイトノイズ(簡単のため、以下ではQ-ノイズと略称する)の作る力学系、^{8)-13), 7)} 一群のガウス及び非ガウス型作用素(超)過程である。

文献7), 12), 13)の参照を容易にするため、下でのフーリエ変換の定義は(5)とは数因子だけ異なるものを用い、対応する大文字で表す。Q-ノイズ $w(t)$ は作用素値の超函数的存在であって、実の性質の良い(急減少なら十分だが困る所もある；「良さ」の正確な特徴付けはすぐに述べる)試験函数(test function) $\xi(t)$ に対して*

$$w(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \xi(-u)w(u)du, \quad (16)$$

と(「ならされた」時)，ある状態Hilbert空間Fの上の自己共役作用素 $w(\xi)$ を与える。Fには特別なベクトル Ω があって、 Ω は $w(\xi)$ やその多項式すべての定義域に属し、それら作用素Aの我々に興味ある期待値は $\langle A \rangle = (\Omega, A\Omega)$ である。 $w(\xi)$ に関する期待値・交換関係は、ユニタリーな $W(\xi) = \exp[iw(\xi)]$ についての次で完全に規定される：**)

$$\langle W(\xi) \rangle = \exp[-s(\xi, \xi)/2], \quad W(\xi)W(\eta) = \exp[-i\sigma(\xi, \eta)]W(\xi+\eta),$$

$$s(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(f)\mathbb{H}(f)\mu(f)df, \quad \sigma(\xi, \eta) = i \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(f)\mathbb{H}(f)(\beta\hbar f/2)df, \quad (17)$$

$$\mu(f) = (\beta\hbar f/2) \coth(\beta\hbar f/2),$$

$$E(f) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(-u)e^{if^u}du, \quad \mathbb{H}(f) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(-u)e^{if^u}du.$$

上の第一式は $\langle w(\xi) \rangle = 0$ ， $\langle w^2(\xi) \rangle = s(\xi, \xi)$ と高次モーメントのガウス性を，第二式(Weyl関係式^{#)})は $[w(\xi), w(\eta)] = 2i\sigma(\xi, \eta)$ ，即ちQ-ノイズ $w(t)$ の次の交換関係を意味する：

$$[w(t), w(u)] = i\beta\hbar\delta'(t-u). \quad (18)$$

一般に試験函数 $\xi(-u)$ のフーリエ変換 $E(f)$ が $\mu(f)df$ に関して2乗可積分なら， $w(\xi)$ はwell-definedな作用素になる事は知られている。¹²⁾ $\xi(-u)$ が急減少なら $E(f)$ も同様だから，上に述べた様にこの範疇に入る。作用素(力学変数)が時間シフト T_t

$$T_t w(u) = w(u+t), \quad T_t w(\xi) = w(\xi_t), \quad \xi_t(-u) = \xi(t-u), \quad (19)$$

に関して逆温度 β でのKMS性を持つ事は(17)から容易に検証される。既に述べた様に，Q-ノイズは量子化されたガウス型ホワイトノイズであり，(ならされた)Q-ノイズの全体はwell-definedな平衡力学系である；それらはLewisとThomas⁹⁾の見出した一群の量子論的

*) 下の時間シフトの表現の便宜と，(5)との記法の統一のため， $\xi(-u)$ を試験函数として用いる。これによって7), 12), 13)の諸式がそのまま使える。

**) Ref. 12)の式(6.6)の右辺は，正しくは $(\alpha \underline{\omega}/2) \coth(\beta\hbar\omega/2)$ である； ω が脱落している。

) Ref. 7)の(A.4)式中の指数函数上 $(1+\text{sign}\omega)$ は，正しくは $(1+\text{sign}\omega)/2$ と因子/2を持たねばならない。遺憾と共に訂正する。なお， σ は実symplectic形式である。

確率過程を構成しており,^{7), 13)} 実際平衡状態にある調和振動子系の極限として実現される。

我々の関心を持つ力学変数として, 十分に性質の良い(例えば急減少の)試験函数 $\xi(-s), \eta(-s), \dots$ を取り, $A=A(0)=w(\xi), B=B(0)=w(\eta)$ としよう。(17)から, 或いはもっと手早く(18), (19)から, 次が得られる:

$$[A(t), B(0)] = i\beta\hbar(d/dt) \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-u)\eta(-u)du. \quad (20)$$

(10)との比較は次を与える:

$$(A, B) = (w(\xi), w(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(s)\eta(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\xi}(f)\Pi(f)df. \quad (21)$$

実効的に $(w(t), w(u)) = \delta(t-u)$. これは曰見ましい結果である; Q-ノイズと内積 (\cdot, \cdot) との対は, 「量子化ガウス型ホワイトノイズ」の名前にふさわしい。しかし次節に述べる様に, Q-ノイズの2次以上の多項式作用素ではもはやこのように簡単ではない。内積 (A, B) は $\langle A^*B \rangle$ と違ってガウス性(対毎の期待値の積となる性質)を壊す。古典的ガウス型ホワイトノイズの連想は単純には成り立たない。

$V' \equiv \{w(\xi), \xi(-u) \text{ は急減少, の張る線形空間}\}$ としよう。 V' に内積 (A, B) を入れて完備化したものを Hilbert 空間 V とする。この完備化は試験函数 $\xi(t)$ の空間の $L^2(dt)$ ノルムでの完備化に対応するから, $V = \{w(\xi); \xi(-u) \in L^2(du)\}$ と書ける。 V の元は一般にもとの状態 Hilbert 空間 F 上の作用素とは言えないけれど, $\{V', (\cdot, \cdot), T_t\}$ は森-岡部構造である。実際仮定①は(19)と(21)から明らか, ②は積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-u)\eta(-u)du$ の急減少函数 $\xi(-u), \eta(-u)$ に対する t -連続性だが, 任意の $\xi(-u), \eta(-u) \in L^2(du)$ についてこれは真だから*')満たされる。

5. 射影演算子理論と量子確率過程

内積 (A, B) と Q-ノイズの作る空間 V についてさらに明確な視野を得るために, 量子化された Ornstein と Uhlenbeck の調和振動子ブラウン運動^{8), 10)} の座標及び運動量過程 $Q(t) = w(\xi_t), P(t) = w(\eta_t)$ について考えよう。典型的な under-damped case では, ξ_t, η_t は適当な規格化の下に次で与えられる:**)

$$\xi_t(-u) = \begin{cases} 0 & (u > t) \\ \exp[-\gamma(t-u)] \sin(t-u) & (u < t) \end{cases}, \quad \eta_t(-u) = \partial \xi_t(-u) / \partial t. \quad (22)$$

ここで γ は定数 > 0 . $\xi(-u), \eta(-u) \in L^2(du)$ は明らかで $Q(t), P(t) \in V$ だが, 前者だけが状態 Hilbert 空間 F の上の作用素の意味を持ち, 後者はそうではない。^{8), 10)} 力学変数の時間シフト $T_t = e^{tL}$ は試験函数の上のシフト $\xi(-u) \rightarrow \xi_t(-u) = \xi(t-u)$, その生成作用素 id/du で惹き起こされるから, $Q(t)$ は $D(L)$ に入る。 $P(t)$ は $\eta_t(-u)$ が不連続で入らない。 $iLQ(t) = P(t)$ だから, 次の一般事実を我々は認識する: 作用素に対する量子 Langevin 方程

*') Parseval 等式から, $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-u)\eta(-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1\gamma t} \bar{\xi}(f)\Pi(f)df$, 右辺の $\bar{\xi}(f)\Pi(f)$ は可積分で, Riemann-Lebesgue の定理によって t -連続。

**') 下は方程式 $dQ/dt = P, dP/dt = -(1+\gamma^2)Q - 2\gamma P + w(t)$ の解である。

式は、森-岡部構造の中で、必ずしも作用素の意味のあるrandom forceを持たない。既に強調された様に、³⁾これは射影作用素の方法にとって何等の障害でもない。

「量子統計力学的な確率過程とは一体どのような範囲のものか?」、或いは「量子統計力学的確率微分方程式とは何を扱うのか?」といった諸問は、未だに数理・物理的に確定した答を持っていない。〈A*B〉又は久保函数型内積に伴われる森-岡部構造は超作用素過程を自然に包摂するという事実は、これらに対する重要な物理的示唆を与えている。

終わりにあたって、ガウス型確率過程の一般多項式として生成される確率変数に対する久保型の内積(A,B)について述べる。基本となるのは、内積〈A*B〉に関する直交作用素多項式^{12), 7), 14)}(一般化されたWick多項式)の概念である。n次(n>0)の直交多項式は我々に興味ある移動平均については、時間シフトT_tと共に次の形をとる:

$$T_t G_n(\xi) \equiv G_n(\xi_t)$$

$$= \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t-u_1, \dots, t-u_n) :w(u_1) \cdots w(u_n): du_1 \cdots du_n, \quad (23)$$

$$:w(u): = w(u), \quad :w(u)w(v): = w(u)w(v) - \langle w^*(u)w(v) \rangle, \quad \dots$$

ここで実函数ξ(-u₁, ..., -u_n)は置換不変として一般性を失わない。一般の:w(u₁)...w(u_n):の形などの詳細はRefs.12), 14)に委ねる。

A(t)=G_m(ξ_t), B(0)=G_n(η)を取ろう。ξ(-u₁, ..., -u_m), η(-u₁, ..., -u_n)のフーリエ変換を(17)の自明な拡張で定義し、対応する大文字で表して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \langle A^{(*)}(t)B(0) \rangle &= \delta_{mn} n! \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\xi}(f_1, \dots, f_n) \exp[-it(f_1 + \cdots + f_n)] \\ &\quad \times \Delta(f_1) \cdots \Delta(f_n) \Pi(f_1, \dots, f_n) df_1 \cdots df_n, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Delta(f) = (\beta \hbar f / 2) [\coth(\beta \hbar f / 2) - 1].$$

これと(10)式から、次数の異なる直交多項式は、久保型の内積でも直交している事がわかる。詳しい結果は次で与えられる:

$$\begin{aligned} (G_m(\xi), G_n(\eta)) &= \delta_{mn} n! (1/\beta \hbar) \int_0^{\beta \hbar} dx \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \cdots df_n \bar{\xi}(f_1, \dots, f_n) \\ &\quad \times \Pi(f_1, \dots, f_n) \prod_{k=1}^n \{ \beta \hbar f_k \exp(-x f_k) / [1 - \exp(-\beta \hbar f_k)] \} \\ &= \delta_{mn} n! \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} df_1 \cdots df_n \bar{\xi}(f_1, \dots, f_n) \Pi(f_1, \dots, f_n) \Delta_n(f_1, \dots, f_n), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_n(f_1, \dots, f_n) &= \prod_{k=1}^n \{ \beta \hbar f_k / [1 - \exp(-\beta \hbar f_k)] \} \\ &\quad \times \{ 1 - \exp[-\beta \hbar (f_1 + \cdots + f_n)] \} / [\beta \hbar (f_1 + \cdots + f_n)] \\ &= \Delta_n(-f_1, \dots, -f_n) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

m=n=1ではこれは(21)と合致する。

上の(23)式が示す様に、Q-ノイズの時間発展T_tは直交多項式の次数を変えない。n>1に対するn次多項式の空間V'のノルム||·||での完備化をVとすれば、{V, T_t}中での非ガウスの量子確率過程が容易に森-岡部構造を持つ事がわかる。試験函数のフーリエ空間での内積(25)はL²(df)ノルムよりは強いが、因子{1-exp[-βħ(f₁+...+f_n)]}/

$[Bh(f_1+\cdots+f_n)]$ 等のため, $G_n(\xi)$ の作用素性を保証するのに十分ではない. その様な詳細とは関係なく, しかし, 射影演算子の方法はこれら非ガウスの量子過程への適用可能性を保証されている.

この報告の中でしばしば非有界作用素の作る線形空間に言及した. 力学変数(の組) $\Lambda(t)$ について $W'=\{\Lambda^{(*)}(t), t \in \mathbb{R}, \text{の作る線形空間}\}$ を作る時は常に, これら作用素全体に共通で状態Hilbert空間 F で稠密な定義域の存在を仮定している. 一般的にどのような場合この仮定がなりたつのかは, 大変心許ない. けれども少なくともQ-ノイズについてはその点は保証される.¹²⁾ この意味でもQ-ノイズに基づく一群の(非線形)確率微積分方程式^{3), 7), 12), 13)}への森理論の応用は, 確率積分の可能性の間と共に, 解析の容易さを示唆して興味深い, 未だ不分明に留まっている.

文献

- 1) R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12 (1957), 570.
- 2) H. Mori, Prog. Theor. Phys. 34 (1962), 423.
- 3) H. Nakazawa, in Proceedings of the Third University of California Conference on Statistical Mechanics (1988); to appear as Nucl. Phys. B supplement.
- 4) D. Forster, *Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry, and correlation functions* (Benjamin, 1975).
- 5) 岡部靖憲, 数学 33 (1981), 306.
- 6) H. Grabert, Z. Phys. B26 (1977), 79.
- 7) H. Nakazawa, J. Stat. Phys. 45 (1986), 1049.
- 8) G. W. Ford, M. Kac and P. Mazur, J. Math. Phys. 6 (1965), 504.
- 9) J. T. Lewis and L. C. Thomas, Ann. Inst. Henri Poincare 22 (1975), 241.
- 10) R. Benguria and M. Kac, Phys. Rev. Lett. 46 (1981), 1.
- 11) H. Maassen, Thesis (Groningen University, 1982).
- 12) H. Nakazawa, J. Math. Anal. Appl. 111 (1985), 353.
- 13) H. Nakazawa, Lec. Notes Math. No. 1136 (1985), p.375.
- 14) H. M. Ito, J. Math. Phys. 29 (1988), 696.

§ 1. 序。

熱浴としてのRWA-振動子にカッ プリングされたBose粒子の振舞いをH. Haken、K. Lindenberg、B. J. West、E. Braunらの物理学者が、それぞれのランジュバン方程式をたてて研究している ([1]、[2]、[3])。ここでは、このモデルを森の一般化されたBrown運動の理論 ([4]、[5]) で扱い、その森のランジュバン方程式をみる。森の一般化されたBrown運動の理論によると、物理量からなるヒルベルト空間を X とし、 L を X 上の自己共役作用素とする。このとき、 $A_0 \neq 0$ となる $A_0 \in D(L)$ に対して、ある、実数 $\omega = \omega(A_0)$ 、 \mathbb{R} 上の関数 ϕ と $I_M(t) \in X$ ($t \in \mathbb{R}$) が存在して、

$$(1 \cdot 1) \quad \frac{d}{dt} A(t) = i\omega \cdot A(t) - \int_0^t ds \phi(t-s) A(s) + I_M(t)$$

が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。ここで、 $A(t) = e^{i\omega t} A_0$ 、 $\omega(A_0)$ を森の振動数、 ϕ を森のメモリー関数、 I_M を森ノイズと呼び、(1・1) を森のランジュバン方程式と言う。

§ 2. ヒルベルト空間 (partial *-algebra) $X_c(H)$ の構成。

RWA-振動子にカッ プリングされたBose粒子の生成・消滅演算子に対する森のランジュバン方程式をみるには、物理量、すなわち、 X の元は非有界作用素となる。また、森が [5] でとったように、ここでは X の内積をカノニカル相関から入れる。さらに、生成・消滅演算子のハイゼンベルグ描像を考えるので、それとリュウビル演算子 L による時間発展とが一致することが要求される。まず、状態空間としての、ヒルベルト空間 H 上の自己共役作用素であるハミルトニアン H に対して、

$$(As. A. 1) \quad H \text{ は非負値で、かつ、ある、 } \mathcal{F} \text{ の } C. O. N. S. \{ \varphi_n ; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \} \\ \subset D(H) \text{ が存在して、 } H\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \text{ かつ} \\ 0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

$$(As. A. 2) \quad \tau \in [0, \beta] \text{ に対して、 } e^{-\tau H} \in \mathcal{F}_1, \text{ ここで、 } \beta \text{ は正の実数、 } \mathcal{F}_1 \text{ は} \\ \text{トレース族。}$$

を仮定する。このとき、 $D=L. h. [\{ \varphi_n ; n=0, 1, 2, \dots \}]$ として、次のクラスを考える：

$$(2 \cdot 1) \quad \mathcal{F}(D, H) = \{ A \text{ は } \mathcal{F} \text{ 上の線形作用素； } (*1) \quad D(A) \supset D, D(A^*) \\ \supset D, (*2) \quad AD, A^*D \subset D, (*3) \quad \text{任意の } \tau \in \\ [0, \beta] \text{ に対して、 } e^{-\tau H} A \uparrow D, A e^{-\tau H} \uparrow D \text{ はヒルベ} \\ \text{ルト-シュミット型に拡張できる。} \}$$

以下、 $e^{-\tau H} A \uparrow D, A e^{-\tau H} \uparrow D$ のヒルベルト-シュミット型への拡張をそれぞれ、

$(e^{-\tau H} A \uparrow D)_{c. Bx.}$ 、 $(A e^{-\tau H} \uparrow D)_{c. Bx.}$ と書くことにする。 $\mathcal{F}(D, H)$ の元で、 D 上で等しいものを同一視すれば、ベクトル空間 $\mathcal{F}(D, H) / \sim$ を得る。この中に、カノニカル

相関から内積が入る。すなわち、

$$(2 \cdot 2) \quad \langle [A]; [B] \rangle = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\int_0^\beta d\lambda \operatorname{tr} \left((e^{-(\beta-\lambda)H} A^* [D])_{c. B. x.} (e^{-\lambda H} B [D])_{c. B. x.} \right)}{\operatorname{tr} (e^{-\beta H})}$$

ここで、 $[A] \in \mathcal{F}(D, H) / \sim$ は A の同値類、すなわち、作用素 A に対応するベクトルとみる。 $\mathcal{F}(D, H) / \sim$ の $\| \cdot \|_c = \langle \cdot ; \cdot \rangle^{1/2}$ による完備化を $X_c(H)$ とする。次に、 $X_c(H)$ 上に対称作用素 δ とユニタリ作用素 $U(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) を

$$(2 \cdot 3) \quad D(\delta) = \{ [A] \in X_c(H); A \in \mathcal{F}_\delta \} \\ \mathcal{F}_\delta = \{ A \in \mathcal{F}(D, H); AH, HA \in \mathcal{F}(D, H) \}$$

$$\delta [A] = \left[\frac{1}{\hbar} [H, A] \right] \quad ([A] \in D(\delta)).$$

$$(2 \cdot 4) \quad U(t) [A] = [e^{i t H / \hbar} A e^{-i t H / \hbar}] \quad (t \in \mathbb{R}; [A] \in \mathcal{F}(D, H))$$

で定義できる。

定理 2. 1. $(U(t); t \in \mathbb{R})$ は 1-パラメータ・ユニタリ群となり、その生成作用素を L とすると、 $L \supset \delta$ 。従って、 $[A] \in D(\delta)$ に対して、

$$e^{i t L} [A] = [e^{i t H / \hbar} A e^{-i t H / \hbar}] \quad (t \in \mathbb{R}).$$

さて、 $A \in \mathcal{F}(D, H)$ に対して、ある、実数 σ_A が存在して、

$$(2 \cdot 5) \quad [H, A] = -\hbar \sigma_A A$$

となる時、 A を H -diagonal と言うことにする。 H -diagonal な元の有限一次結合全体を $\mathfrak{A}_r(H)$ とおくと、 $\mathfrak{A}_r(H)$ は $*$ -algebra となり、 $X_c(H)$ は partial $*$ -algebra となる。ここで、 $\varphi_\beta([A]) = \langle [I]; [A] \rangle$ ($[A] \in \mathfrak{A}_r(H)$) により、 φ_β が一種の KMS-条件を満たす state に成ることを注意しておく。

二次形式的ハミルトニアン H の相互作用が有限自由度的な系にたいする森の一般化された Brown 運動の理論は、 $\mathfrak{A}_r(H)$ の中で展開できるが、 H の相互作用が無限自由度的な系にたいしては、 $X_c(H)$ の中の $\mathfrak{A}_r(H)$ より広い所で考えなければならない。そのような、ベクトル $[A]$ に対応する作用素のクラスを考える ($X_c(H)$ の元が常に作用素になるとは限らないことに注意する)。次の条件 (C. 1)、(C. 2) と (C. 3) を満たす作用素のクラスを $\mathcal{C}_1(H)$ とし、さらに (C. 4) を満たす作用素のクラスを $\mathcal{C}_2(H)$ とする：

$$(C. 1) \quad D(A), D(A^*) \supset D,$$

$$(C. 2) \quad e^{-\lambda H} A \varphi_n \in D(A^*) \quad (\lambda \in [0, \beta]; n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

$$(C. 3) \quad \sum_n \| e^{-H/\beta} A \varphi_n \|^2, \sum_n \| e^{-H/\beta} A^* \varphi_n \|^2 < \infty,$$

$$(C. 4) \quad \sum_n \| A e^{-H/\beta} \varphi_n \|^2, \sum_n \| A^* e^{-H/\beta} \varphi_n \|^2 < \infty.$$

補題 2. 1. $A \in \mathcal{C}_1(H)$ に対して、 $X_c(H)$ の元 $[A]$ を対応させることができる。また、 $A \in \mathcal{C}_2(H)$ に対して、 $e^{i t L} [A] = [e^{i t H / \hbar} A e^{-i t H / \hbar}]$ ($t \in \mathbb{R}$)。

ここで、 $\mathcal{F}_\delta \subset \mathcal{F}(D, H) \subset \mathcal{C}_2(H)$ 、また、 \mathcal{F}_δ 、 $\mathcal{F}(D, H)$ には D -不変性がある

が、 $\mathcal{C}_2(H)$ には問わないことに注意しておく。

§3. $B_{RWA}(N)$ - システムに対する森の理論。

このセクションでは (As. A. 1)、(As. A. 2) を仮定し、今、 $A_k \in D(\delta)$ が、 $A_k A_m^*、A_m^* A_k \in \mathcal{D}(D, H)$ 、 $[A_k, A_m^*]x = \delta_{km}x$ ($x \in D$) なる作用素 A_k ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) に対して、ハミルトニアンが次の二次形式的なものを想定する。

$$(3 \cdot 1) \quad H = \hbar (A_0^* A_0 + \dots + A_N^* A_N) (L)_N^{-1} (A_0, A_1, \dots, A_N) \\ + \sum_{k=N+1}^{\infty} \hbar \sigma_k(N) A_k^* A_k$$

ここで、 $(L)_N$ は正値エルミート行列で、その固有値を $\sigma_1(N), \dots, \sigma_N(N) (> 0)$ とし、 $\sigma_{N+1}(N), \sigma_{N+2}(N), \dots > 0$ とする。また、さらに $\sigma_k(N) \neq \sigma_m(N)$ ($k \neq m$) とする。このような $\{A_k; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ を $X_c(H)$ の $B_{RWA}(N)$ - システムと呼ぶことにする。このとき、 $L. h. [\{A_0, A_1, \dots\}]$ に作用する L は $\mathcal{C} \oplus \ell^2(N)$ 上の自己共役作用素 L_N をその表現として持ち、

補題 3.1. $k=1, 2, \dots, N$ に対して、 $\omega(A_k) = - (L_N^{-1})_{kk}^{-1}$ となり、

$$\int_0^{\infty} dt \phi_k(t) e^{itx} = i \omega(A_k) F_{N,k}(z) \{1 + F_{N,k}(z)\}^{-1}$$

$$F_{N,k}(z) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^N \frac{\overline{(L_N^{-1})_{kp}} ((z - L_N)^{-1})_{kp}}{(L_N^{-1})_{kk} ((z - L_N)^{-1})_{kk}}$$

ここで、 $\omega(A_k)$ と ϕ_k はそれぞれ、 A_k の森の振動数、森のメモリー関数である。また、 $\mathcal{C} \oplus \ell^2(N)$ 上の作用素 T に対して、 $T_{kp} = \langle e_k | T e_p \rangle$ 、($\langle | \rangle$ は $\mathcal{C} \oplus \ell^2(N)$ の内積 (右が線形、左が反線形) で $e_p = (0, \dots, 0, \underset{(p+1)\text{-th}}{1}, 0, \dots)$ 、 $p=0, 1, 2, \dots$.)

§4. RWA-振動子に対する全ハミルトニアン H のスペクトル解析。

RWA-振動子に対する全ハミルトニアン H とは、

$$(4 \cdot 1) \quad H = H_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\Gamma_k a^+ b_k + \overline{\Gamma}_k b_k^+ a)$$

$$H_0 = \hbar \omega_0 a^+ a + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k b_k^+ b_k \quad (\text{自由ハミルトニアン})$$

ここで、 Γ_k ($k \in \mathbb{N}$) は複素数で、 a, b_k ($k \in \mathbb{N}$) は Bose 粒子の消滅演算子、 a^+, b_k^+ ($k \in \mathbb{N}$) は Bose 粒子の生成演算子である。

Hを解析するために、Hをカットオフして H_N をとっておく。すなわち、

$$(4 \cdot 2) \quad H_N = H_0 + \sum_{k=1}^N (\Gamma_k a^\dagger b_k + \bar{\Gamma}_k b_k^\dagger a) \quad , \quad N \in \mathbb{N} \quad .$$

次の仮定 (As. B. 1)、(As. B. 2)、(As. B. 3)のもとで、H、 H_N はフック空間 $\mathcal{F}_s(\mathbb{C} \oplus \ell^2(\mathbb{N}))$ 上の自己共役作用素として実現できる。

$$(As. B. 1) \quad 0 < \omega_0 ; 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots ; \omega_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\Delta \omega := \inf_{k=1, 2, \dots} (\omega_{k+1} - \omega_k) > 0 ; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} < \infty \quad .$$

$$(As. B. 2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 |\Gamma_k|^2 < \infty \quad .$$

$$(As. B. 3) \quad D(0) < 0, \text{ ここで、} D(z) = z - \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Gamma_k|^2}{\hbar^2 (\omega_k - z)} \quad , \\ (z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega_k : k \in \mathbb{N}\}) \quad .$$

このとき、H、 H_N を次の形で書ける。

$$(4 \cdot 3) \quad H = \hbar (a^\dagger, b_1^\dagger, b_2^\dagger, \dots) L^t (a, b_1, b_2, \dots)$$

$$(4 \cdot 4) \quad H_N = \hbar (a^\dagger, b_1^\dagger, b_2^\dagger, \dots) L_N^t (a, b_1, b_2, \dots)$$

ただし、L、 L_N は無限次元の行列で $\mathbb{C} \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ 上の自己共役作用素として実現できる。このとき、 $\mathbb{C} \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ 上のユニタリ作用素 U、 U_N が存在して L、 L_N を U、 U_N を使って、それぞれ対角化できる。このとき、 $\sigma(L) = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots\}$ 、 $\sigma(L_N) = \{\epsilon_0(N), \epsilon_1(N), \dots, \epsilon_1(N), \omega_{N+1}, \omega_{N+2}, \dots\}$ 、ただし、 ϵ_k ($k \in \mathbb{N}$) は $D(z) = 0$ の解、 $\epsilon_k(N)$ ($k=1, 2, \dots, N$) は $D_N(z) = 0$ の解、ここで、

$$(4 \cdot 5) \quad D_N(z) = z - \omega_0 + \sum_{k=1}^N \frac{|\Gamma_k|^2}{\hbar^2 (\omega_k - z)} \quad .$$

次の補題に注意したい。

補題 4.1. $L_N \rightarrow L$ in the strong resolvent sense .

H、 H_N については、

定理 4.1. $\sigma(H) = \{\epsilon_0 n_0 + \epsilon_1 n_1 + \dots + \epsilon_M n_M ; M \in \mathbb{N}, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j=1, \dots, M\}$ で、H は (As. A. 1)、(As. A. 2) を満たし、また、 $\sigma(H_N) = \{\epsilon_0 n_0 + \epsilon_1 n_1 + \dots + \epsilon_N n_N + \omega_{N+1} n_{N+1} + \dots + \omega_M n_M ; M \in \mathbb{N}, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j=1, \dots, M (M > N)\}$ で、 H_N は (As. A. 1)、(As. A. 2) を満たす。

U、 U_N に対してそれぞれ、 \mathcal{F}_s 上のユニタリ作用素 $\Gamma(U)$ 、 $\Gamma(U_N)$ がとれるが、これを使って、準粒子の Bose 粒子の生成・消滅演算子を作ることができる。

$$(4 \cdot 6) \quad \beta_p = \Gamma(U) b_p \Gamma(U)^{-1} ; \quad \beta_p^\dagger = \Gamma(U) b_p^\dagger \Gamma(U)^{-1}$$

$$(4 \cdot 7) \quad \beta_p(N) = \Gamma(U_N) b_p \Gamma(U_N)^{-1} ; \quad (b_0 := a)$$

$$\beta_p^\dagger(N) = \Gamma(U_N) b_p^\dagger \Gamma(U_N)^{-1} ; \quad (b_0^\dagger := a^\dagger)$$

§ 5. RWA—振動子に対する森のランジュバン方程式。

§ 4 により RWA—振動子に対する全ハミルトニアン H と、カットオフされたハミルトニアン H_N に対して、(As. B. 1)、(As. B. 2)、(As. B. 3) の仮定のもとで、§ 1 が適用できる。 $\beta_p(N)$ は H_N —diagonal で、 $[a]$ は $[\beta_p(N)]$ の有限一次結合となり、 $\mathfrak{A}_r(H_N)$ の中で森のランジュバン方程式がおさまる。 $\{\beta_p(N); p \in \mathbb{N}\}$ は $X_c(H_N)$ の $B_{RWA}(N)$ —システムとなり、補題 3. 1. により $X_c(H_N)$ における森の振動数、森のメモリー関数の複素・モビリティが実際に計算できる。また、 β_p は H —diagonal となり、 $[a]$ は $[\beta_p]$ の無限一次結合となるため、 $X_c(H)$ における森の振動数、 $[a]$ の相関関数が L を使って表現できる。また、 $X_c(H_N)$ における $[a]$ の相関関数も L_N を使って表現できる事に注意をすると、相関関数の複素・モビリティと森のメモリー関数の複素・モビリティの関係を使い、 $X_c(H_N)$ において、森のメモリー関数の複素・モビリティを計算しておき、補題 4. 1. により、極限をとれば、

定理 5. 1. a に対する森のランジュバン方程式は

$$\frac{d}{dt} [a](t) = i D(0) [a](t) - \int_0^t ds \phi(t-s) [a](s) + [I_M](t)$$

$$\int_0^\infty dt \phi(t) e^{-tz} = i D(0) F(z) \{1 + F(z)\}^{-1}$$

$$F(z) = \sum_{p=1}^\infty \frac{|\Gamma_p|^2}{\hbar^2 \omega_p (\omega_p - z)}$$

$$[I_M](0) = -i \sum_{k=1}^\infty \frac{|\Gamma_k|^2}{\hbar^2 \omega_k} [a] - i \sum_{p=1}^\infty \frac{\Gamma_p}{\hbar} [b_p]$$

を得る。

文献。

- [1] E .Braun , Irreversible behavior of a quantum harmonic oscillator coupled to a heat bath ,Physica 129A (1985) 262-301.
- [2] H.Haken ,Laser Theory ,in Vol.XX /2C Encyclopedia of Physics (Springer , Berlin, 1970);Rev.Mod.Phys.47,67,(1975)
- [3] K.Lindenberg and B.J.West ,Statistical properties of quantum systems : The linear oscillator ,Phys.Rev.30,1,(1984)
- [4] H.Mori ,Transport ,collective motion ,Brownian motion ,Progr.Theo.Phys. , 33,3,(1965)
- [5] H.Mori ,A continued-fraction representation of the time correlation functions , Progr.Theo.Phys. ,34,3,(1965)

発作波（てんかん性異常波）の時系列解析

香坂雅子（北大医・精神科）

福田紀子、村松宰（北大医短）

1. はじめに

てんかんとは「大脳の電氣的放電が引き起こす、反復する発作を主症状とする慢性の脳疾患」である。その多くは発作症状に対応した脳波異常を伴う。

臨床発作の発現には好発時刻があることを Janz が述べて以来てんかん並びにてんかん性異常波の出現様式には、超日リズムあるいは概日リズムが関与しているとの報告¹⁾²⁾が続き、近年、Biorythm の観点からてんかんをとらえようとする試みがなされている。例えば、Kellawayら³⁾⁴⁾は睡眠覚醒リズムと REM-NREM 睡眠周期の二つのリズムにより、出現様式が規定されるとの仮説を提唱している。このようにてんかん性異常波と生物リズムの関係を明らかにすることは、現在なお不明であるてんかんの病態生理を解明することにつながると思われる。これまではこのような研究は、全般性てんかんにおける 3/c sp-w-c や良性部分てんかんにおける focal spike³⁾⁴⁾、あるいは種類の型のでんかんでのてんかん性異常波の出現様式⁵⁾を調べた報告が主であった。

そこで我々は精神科領域では最も難治性が高いとされている側頭葉てんかんでのてんかん性異常波の出現様式を検討し、さらに新しい統計学的処理を加えた。

2. 対象と方法

対象：側頭葉てんかん 10例（18-60歳）

記録方法：7チャンネル携帯型脳波記録装置（北大方式）
連続2夜の終夜脳波

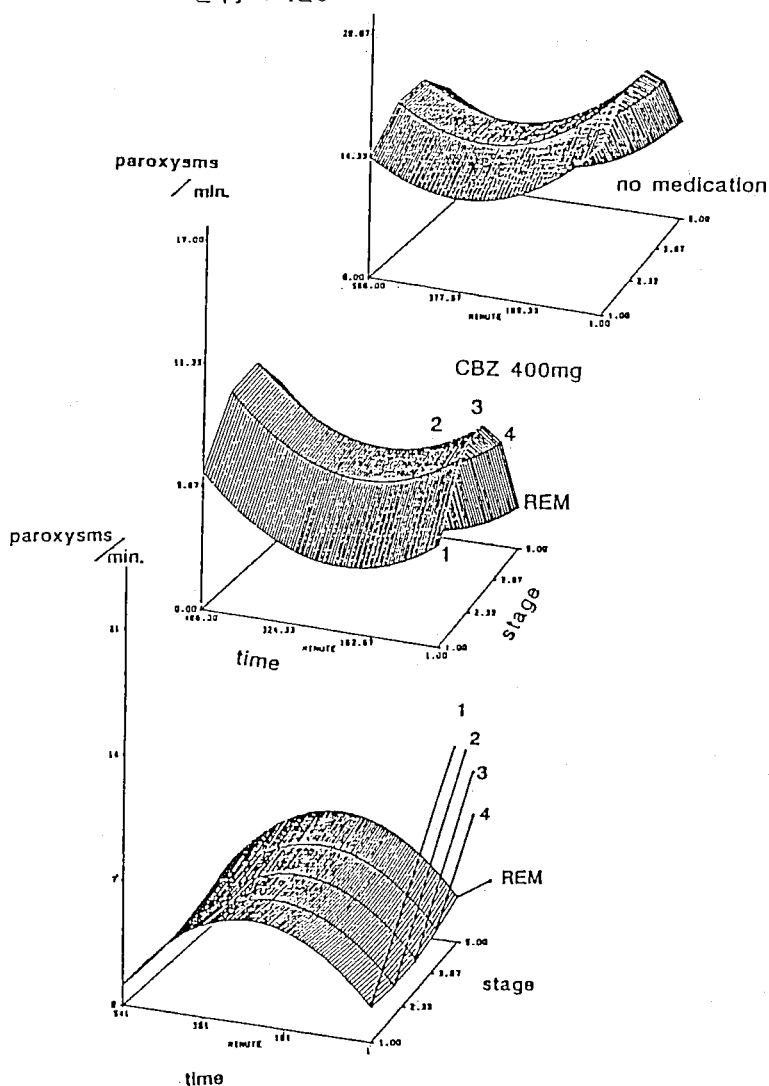
分析方法：①睡眠段階別にみたてんかん性異常波の出現様式
（ヒトの睡眠は約90分周期のREM睡眠とNREM睡眠から成立ち、
NREM睡眠もその睡眠深度により国際分類ではstage 1,2,3,4の
4段階に分かれている。）

②時系列からみたてんかん性異常波のヒストグラム

③時系列によるてんかん性異常波の最適回帰モデルへの近似

③時系列による最適回帰モデルへの近似

10症例について統計学的な処理を加え、二次応答面モデル式で時系列解析を行った。



X軸は時間を、Y軸は各睡眠段階を、Z軸はてんかん性異常波の一分間当りの出現個数を表している。

左上の図は先ほどの症例の治療前、中の図は治療後を表し、入眠後著明に増加し時間と共に減少覚醒前に再び増加するパターンを示した。

また左下の図は中側頭部焦点例で、就床262分にピークを示す凸型の曲線パターンを示している。

10例のうち9例が前側頭部焦点例で左上中図のような凹型を示し、他の1例が中側頭部焦点例で凸型を示した。焦点側の違いにより、このように時系列のパターンが変わるのかどうかは今後の課題である。

参考文献

- 1) Binnie, C.D. Temporal characteristics of seizures and epileptiform discharges. *Electroenceph Clin Neurophysiol* 1984
- 2) Cox, D.R. and Lewis, P.A.W. The statistical analysis of series of events. Chapman and Hall 1966
- 3) Kellaway, P. Biorythmic modulation of epileptic events. *Recent advances in epilepsy* 1983
- 4) Kronauer, R.E. Mathematical model of the human circadian system with two interacting oscillators. *Am J Physiol* 1982
- 5) Martin Da Silva. The circadian distribution of interictal epileptiform EEG activity. *Electroenceph Clin Neurophysiol* 1984

KM₂O-ランジュアル方程式 と 量子統計

岡部 立青憲 (北大理)

KM₂O-ランジュアル方程式論 (I) の 続きとして述べる。

§4 見本予測誤差 と 見本エントロピー

[4.1] 確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上に \mathbb{R}^d -値 弱定常過程 $X = (X(\lambda); \lambda \in \mathbb{Z})$ が与えられている。§2 との相違は、大域的定常性を 持っていることである。

スペクトル測度に関する条件の下で、 X は、次の式により、その時間発展が記述される；

KMO-ランジュアル方程式

$$(4.1) \quad X(\lambda) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \text{l.c.m.} (\delta_N^{(N)} * X)(\lambda) + V_+(\infty)^{\frac{1}{2}} \xi_+(\lambda)$$

ここで、

$$(4.2) \quad \delta_N^+(\lambda) = \begin{cases} 0 & N < \lambda \\ \delta_+(N, N-\lambda) & N \geq \lambda \end{cases}$$

$$(4.3) \quad \text{(i) } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_+(\lambda) = V_+(\infty)$$

$$\text{(ii) } V_+(\infty) \in GL(d; \mathbb{R})$$

$$(4.4) \quad \text{(i) } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_+(\lambda, k) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{(ii) } \exists \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_+(k+\lambda, \lambda)$$

$$(4.5) \quad E(\xi_+(n)^t \xi_+(n)) = \int_{\mathbb{R}^d} I$$

$$(4.6) \quad [X_j(n); 1 \leq j \leq d, n \leq n] = [\xi_j(n); 1 \leq j \leq d, n \leq n] \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

[4.2] X の一時点先の予測誤差行列 e 、局所的存 $e(N+1, N)$ と大域的存 $PE(X)$ とは、

$$(4.7) \quad e(N+1, N) \equiv E\left(\left(X(N+1) - P_{\substack{X(N+1) \\ [X_j(n); 1 \leq j \leq d, \\ 0 \leq n \leq N]}}\right)^t \left(X(N+1) - P_{\substack{X(N+1) \\ [X_j(n); 1 \leq j \leq d, 0 \leq n \leq N]}}\right)\right)$$

$$(4.8) \quad PE(X) \equiv E\left(\left(X(N+1) - P_{\substack{X(N+1) \\ [X_j(n); 1 \leq j \leq d, n \leq N]}}\right)^t \left(X(N+1) - P_{\substack{X(N+1) \\ [X_j(n); 1 \leq j \leq d, n \leq N]}}\right)\right)$$

で定義する。基本的存 (4.3) (i) の帰結とて、

$$(4.9) \quad PE(X) = \lim_{N \rightarrow \infty} e(N+1, N) = V_+(\infty).$$

さらに、見本予測誤差 $SPE_j(N)$ と

$$(4.10) \quad SPE_j(N) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} V_{+j}^2$$

で定義する ($1 \leq j \leq d$)。直交性と i.i.d 性も置換して、大数の強法則を

適用すると、

$$(4.11) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} SPE_j(N) = PE(X)_{jj} \quad \text{a.s.} \quad (1 \leq j \leq d).$$

注意 X が ガウス 定常過程 のときは、 $(X(0), \dots, X(N-1))$ の分布密度 $\in P_N$ とし、そのエントロピー $H(P_N)$ と

$$(4.12) \quad H(P_N) = - \int_{\text{ran}} P_N(x) \log P_N(x) dx$$

と定義する。

$$(4.13) \quad H(X) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H(P_N)}{dN} \\ = \frac{\log(2\pi e)}{2} + \frac{1}{2d} \log(\det PE(X))$$

が成り立つ。また、各 $N \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(4.14) \quad SH_N(X) \equiv \frac{1}{2d} \log \left(\frac{\sum_{\lambda=0}^{N-1} \det(V_+(\lambda) + V_-(\lambda))}{N} \right) + \frac{\log(2\pi e)}{2}$$

を X の 見本エントロピー と名付けた。

§5 因果性

[5.1] \mathbb{R} 値 弱定常過程 $X_j = (X_j(\lambda); \lambda \in \mathbb{Z})$ ($j=1, 2$) が与えられたとき、
定義 5.1

(i) 線型の大域的な意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であるとは、
 $[X_2(\lambda); \lambda \leq 0] \subset [X_1(\lambda); \lambda \leq 0]$

が成り立つことである。

(ii) 線型かつ局所的な意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であるとは、
 $[X_2(\lambda); 0 \leq \lambda \leq n] \subset [X_1(\lambda); 0 \leq \lambda \leq n] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

が成り立つことである。

X_1 に対する前向き KM_2O -ワルシュワルカを $\mathcal{W}_1 = (V_1(\lambda); \lambda \in \mathbb{N}^*)$ とし、2次元弱定常過程 ${}^t(X_1, X_2)$ に対する前向き KM_2O -ワルシュワルカの第1成分を $\mathcal{W}_{11} = (V_{11}(\lambda); \lambda \in \mathbb{N}^*)$ とする。(4.11)より、

$$(5.1) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N V_1(\lambda)^2}{N+1} = \|X_1(1) - P_{[X_1(\lambda); \lambda \leq 0]}^{X_1(1)}\|^2 \quad a.s.$$

$$(5.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N V_{11}(\lambda)^2}{N+1} = \|X_1(1) - P_{[X_1(\lambda), X_2(\lambda); \lambda \leq 0]}^{X_1(1)}\|^2 \quad a.s.$$

従って、線型の大域的意味における、 X_1 が厚因、 X_2 が総結果であるとする。

$$(5.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N (V_1(\lambda)^2 - V_{11}(\lambda)^2)}{N+1} = 0 \quad \text{a.s.}$$

これを検証するために、 $\frac{\sum_0^N (V_1(\lambda)^2 - V_{11}(\lambda)^2)}{N+1}$ が 0 に近い割合の規準を設ける必要がある。そのための基本的なことは、

Key Lemma 線型の大域的意味における、 X_1 が厚因、 X_2 が総結果であるとき、 $\{(V_1(\lambda), V_{11}(\lambda)); \lambda \in \mathbb{N}^*\}$ は直交する。

[5.2] このことは、実際のデータ解析に当り、局所弱定常性の検定 (S) の規準を設けるために用いた中心極限定理が適用できることが分かった。

\mathbb{R} の中の点がある 2 つのデータ $\mathcal{Z}_1 = (z_1(\lambda); 0 \leq \lambda \leq N)$ と $\mathcal{Z}_2 = (z_2(\lambda); 0 \leq \lambda \leq N)$ が与えられたとし、 \mathcal{Z}_1 を正規化したデータ \mathcal{X}_1 、 $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2)$ を正規化したデータを \mathcal{X} とする。すなわち、各 $i \in \{0, \dots, N-M_1\}$ に対して、 \mathcal{Z}_1 の意味での $\mathcal{X}_{i,1}$ は付随する前向き見本 K_{M_2} -ランダムウォークを $V_{1i} = (V_{1i}(\lambda); 0 \leq \lambda \leq M_1)$ 、 $\mathcal{X}_{i,2}$ は付随する前向き見本 K_{M_2} -ランダムウォークの第 1 成分を $V_{11i} = (V_{11i}(\lambda); 0 \leq \lambda \leq M_2)$ とする。但し、

$$(5.4) \quad M_1 = \lfloor 3\sqrt{N+1} \rfloor - 1, \quad M_2 = \lfloor 3\sqrt{N+1}/2 \rfloor - 1$$

\mathcal{Z}_2 は局所弱定常過程の實現であるとする。即ち、検定 (S) を通るものとする。

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_0^{M_2} (V_1(\lambda)^2 - V_{11}(\lambda)^2 - V_1(\lambda) + V_{11}(\lambda))}{M_2+1} \\ &= \frac{\sqrt{2} \sum_0^{M_2} (V_1(\lambda)^2 + V_{11}(\lambda)^2 - V_1(\lambda)V_{11}(\lambda))}{M_2+1} \cdot \frac{\sum_0^{M_2} (V_1(\lambda)^2 - V_{11}(\lambda)^2 - V_1(\lambda) + V_{11}(\lambda))}{\sqrt{2} \sum_0^{M_2} (V_1(\lambda)^2 + V_{11}(\lambda)^2 - V_1(\lambda)V_{11}(\lambda))} \end{aligned}$$

と変形し、 $2 \sum_0^{M_2} (V_1(\lambda)^2 + V_{11}(\lambda)^2 - V_1(\lambda)V_{11}(\lambda))$ が $\sum_0^{M_2} (V_1(\lambda)^2 - V_{11}(\lambda)^2 - V_1(\lambda) + V_{11}(\lambda))$

の分散と見なせることに注意し、中心極限定理より、

$$(5.5)_i \quad \left| \frac{\sum_0^{M_2} (V_{I_1}(\lambda)^2 - V_{II}(\lambda)^2 - V_{I_1}(\lambda) + V_{II}(\lambda))}{\sqrt{2 \sum_0^{M_2} (V_{I_1}(\lambda)^2 + V_{II}(\lambda)^2 - V_{I_1}(\lambda) V_{II}(\lambda))}} \right| < 1.96 \quad (\text{信頼率 } 0.95)$$

222. 各 $i \in \{0, \dots, N-M_1\}$ に対し、因果性の検定 $(C)_i$ を

$(C)_i$: 不等式 (5.5) $_i$ が成立する

と、線型かつ局所的意味での、 X_1 が原因、 X_2 が結果であることの検定 (C) を

(C) : $(C)_i$ が通る $i \in \{0, \dots, N-M_1\}$ の割合が 90% 以上

と提案する。

[5.3] [5.1] に戻す。

定義 5.2

- (i) 2次の非線型かつ大域的意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であるとは、
 $[X_2(\lambda); \lambda \leq 0] \subset [X_1(\lambda), X_1(\lambda)^2; \lambda \leq 0]$
- (ii) 2次の非線型かつ局所的意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であるとは、
 $[X_2(\lambda); 0 \leq \lambda \leq n] \subset [X_1(\lambda), X_1(\lambda)^2; 0 \leq \lambda \leq n] \quad (\forall n \in \mathcal{N})$

${}^t(X_1, X_1^2)$ に付随する前向き KH_2O -型コスペクトル成分の第1成分、第2成分をそれぞれ D_{31}, D_{32} とし、 ${}^t(X_1, X_1^2, X_2)$ に付随する前向き KH_2O -型コスペクトル成分の第1成分、第2成分をそれぞれ D_{31}, D_{32} とする。(4.11)より

$$(5.6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N D_{31}(\lambda)^2}{N+1} = \|X_1(1) - P_{[X_1(\lambda), X_1(\lambda)^2; \lambda \leq 0]} X_1(1)\|^2 \quad \text{a.s.}$$

$$(5.7) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N D_{32}(\lambda)^2}{N+1} = \|X_1(1)^2 - P_{[X_1(\lambda), X_1(\lambda)^2; \lambda \leq 0]} X_1(1)^2\|^2 \quad \text{a.s.}$$

$$(5.8) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N V_{31}(\lambda)^2}{N+1} = \|X_1(1) - P_{[X_1(\lambda), X_1(\lambda)^2; X_2(\lambda); \lambda \leq 0]} X_1(1)\|^2 \quad a.s.$$

$$(5.9) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N V_{32}(\lambda)^2}{N+1} = \|X_1(1)\|^2 - P_{[X_1(\lambda), X_1(\lambda)^2; X_2(\lambda); \lambda \leq 0]} X_1(1)^2 \quad a.s.$$

従って、2次の非線型が大域的意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であった

$$(5.10) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N (V_{21}(\lambda)^2 - V_{31}(\lambda)^2)}{N+1} = 0 \quad a.s.$$

$$(5.11) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_0^N (V_{22}(\lambda)^2 - V_{32}(\lambda)^2)}{N+1} = 0 \quad a.s.$$

2の場合も、

Key Lemma 2次の非線型が局所的意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であった

(i) $\{ {}^t(V_{21}(\lambda), V_{31}(\lambda)); \lambda \in N^* \}$ は 直交列

(ii) $\{ {}^t(V_{22}(\lambda), V_{32}(\lambda)); \lambda \in N^* \}$ は 直交列

が成り立つ。[5.2]で見左如く、実際のデータ解析に当りて、非線型が局所的意味において、 X_1 が原因、 X_2 が結果であった 2つの検定の規準を設けたことが出来る。

注意 高次の非線型の意味での因果性を考慮した検定は可能である。一般の非線型の意味での因果性を考慮した検定を設けたらば Wienerの意味での非線型予測問題を解く必要がある。しかし、無限次元値の弱定常過程に対する非線型予測問題への帰着は、すなわち、有限次元の場合の KMO-レゾルベ方程式論を適用するに依り、解ける可能性が示された。詳しくは別の機会に、散逸なく、推測がつけられている。すなわち、推測散逸定理のこの哲学的理解である。

§6 連続系の離散系による近似

古典統計・量子統計を問わず、実際の観測・実験で得られたデータは離散系列である。時間の中を小さくして、あるスケールで極限を取るとおいて、離散系列で得られた特性量から連続系に対する特性量を求めることは大事なことを思わせる。

[6.1] T -正値性を定常過程に対しては、可能である

[6.2] RWA-振動子に対しては (4.9) と (4.11) に代わる量子系に対する大数の法則が成り立つ。これは von Waldenfels の一般化定理の具体例になっている。

もっと徹底した研究が必要である。振動散逸定理に支えられた研究にわたるこの約10年、やはり研究の出发点に変わった感がある。