“Superstring 理論とＫ３曲面” ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ

報　告　集

と　き：　１９８８年１月２５日～１月２８日

ところ：　北海道大学 学術交流会館

（代表者 中 村　　郁）

Series #10. October, 1988

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#	Author	Title

1. **T. Morimoto**, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations
2. **J. L. Heitsch**, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds
3. Twelfth Sapporo Symposium on Partial Differential Equations in 1987, Edited by K. Kubota
4. **J. Tilouine**, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module
5. Abstracts of Mathematical Analysis seminar 1987 Edited by Y. Giga
6. 1987年度談話会ｱﾌﾞｽﾄﾗｸﾄ集, Editted by T. Yoshida
7. “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, Edited by S. Izumiya and G. Ishikawa
8. The thirteenth Sapporo Symposium on Partial Differential Equations in 1988, Edited by K. Kubota
9. “ランジュヴァン方程式とその応用” 研究集会予稿集, Edited by Y. Okabe

Superstring 理論とＫ３曲面

１９８８年１月２５日から２８日までの４日間 北海道大学学術交流会館で“Superstring 理論とＫ３曲面”の表題のもとにシンポジウムが開いた。これはその報告集である。

物理学、とりわけ Superstring理論や Grand unified theory と数学のさまざまな分野との関連、例えば数論，代数幾何学，トポロジー等との関連が注目されて久しい。今回のシンポジウムでは Heterotic string 理論の中に現われる $c_1 = 0$ のコンパクトな複素多様体 (Calabi-Yau 多様体、例えばＫ３曲面や$\mathbb{P}^4$の中の３次元５次超曲面)を中心にプログラムを立てた。こちらの無理な注文、見当違いであるかも知れぬ注文、あるいは直前の変更、にもかかわらず講演者の方々には平易で充実した講演をして頂いた。心より感謝したい。

シンポジウムを開催するにあたり多くの方々の協力を頂いた。財政面では石川健三（北大）、笹倉頌夫（東京都立大）、諏訪立雄（北大）、上野健爾（京大）の四氏にそれぞれの科研費より援助頂いた。シンポジウム期間中交流会館事務室、北大理学部 数学教室 事務室及び図書室の方々には茶菓の準備、後片付け、論文のコピー、そしてその為の雪道の往復等大変お世話になった。 この場を借りてお礼を申し上げたい。 また、清水勇二氏（東北大）にはプログラム作成と報告集作成の全般にわたって協力頂いた。
本報告集中の江口 徹氏の講演記録は清水勇二氏のノ－トによる。 記して感謝したい。

１９８８年１０月　　北海道大学 教養部 数学教室

中　村　　　郁

目　次

注） Mathieu 群とK３曲面 ． ． ． ． 向井　茂（名大理）
の講演記録は例えば
数理研講究録 535 “多様体の特異点の最近の成果” 1 - 34
にあるので、この報告集には収録しなかった。

江口 徹 講演記録　　清水勇二 記

1988/1/25

江口氏 1回目

等質空間の理論 $\hookrightarrow$ 表現論

$c_1=0$ の多様体　　群論的扱い？ ⊋ある種の対称性

super conformal 代数 の表現論

string theory に現れる
10次元の空間 $= M_4 \times K_6$

Minkowski　Kähler　(複素3次元)
特に $c_1=0$

これ以外にも (複素次元)

$M_6 \times K_2$　K3曲面

$M_8 \times K_1$　Riemann面

conformal 代数

$N=2$ の super conformal 代数

<u>Rem.</u> 1. supergravity と
代数幾何 の関連

<u>Ref.</u> Gepner, Nucl. Phys. B296 757 ('88)
preprint　$N=2$

Seiberg, preprint. (1988) $N=2,4$
K3 の moduli 空間

conformal 代数の表現

$$\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \\ c:\ \text{central charge} \end{cases}$$

で定まる代数の 表現を 調べる.

highest wt rep. でかつ unitary (discrete series)

$$\begin{cases} L_n |h\rangle = 0 & n \geq 1 \\ L_0 |h\rangle = h|h\rangle \end{cases} \Rightarrow \{L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} |h\rangle\}$$

$0 < c \leq 1$ なら　$c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$　　$m = 3, 4, \cdots$

$$h = h_{r,s} = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}, \quad 1 \leq s \leq r \leq m-1$$

なる時に限り．unitary rep. が存在する．
$c \geq 1$，h に制約なし．

Rem. Gepner は．$c > 1$ の時の unitary rep も，$c \leq 1$ の時のそれの tensor 積で作ろうという発想

Superconformal

$N=1$　　幾何的でない

$N=2$　←…　$n=3$　Calabi Yau manifold

$N=4$　←…　$n=2$　K3 曲面（or hyperkähler 多様体）

superconformal 代数．

生成元
- L_m ; Virasoro op.
- G_r ; super charge（conformal dim $= \frac{3}{2}$）

$N=2$ の時は，さらに $U(1)$ の Kac-Moody 代数
$N=4$　$SU(2)$ の　〃　（$A_1^{(1)}$）
が "ごみ" で表われる。

- $N=1$．G_r : real
- $N=2$．G_r : complex
  i.e. $G_r = G_r^1 + i G_r^2$
  $\overline{G_r} = G_r^1 - i G_r^2$
- $N=4$．$\begin{pmatrix} G_r^1 \\ G_r^2 \end{pmatrix}$　G_r^i : cpx.
  $SU(2)$ を左からかける．

これが登場する理由は説明すると長い。

$n, m \in \mathbb{Z}$

$r, s \in \mathbb{Z}$ … Ramond sector
or $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ … Neveu-Schwarz sector (NS)

交換
N=2 の時の(基本)関係

L は $h=2 \rightsquigarrow$ $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}$

G が $h=\frac{3}{2} \rightsquigarrow$ $[L_m, G_r] = \left(\frac{m}{2}-r\right)G_{m+r}$

$[L_m, \overline{G_r}] = \left(\frac{m}{2}-r\right)\overline{G}_{m+r}$

$\{G_r, \overline{G_s}\} = 2L_{r+s} + (r-s)T_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}$

U(1)-KM.

T が $h=1 \rightsquigarrow$ $[T_m, G_r] = G_{m+r}$, $[T_m, \overline{G_r}] = -\overline{G}_{m+r}$

(T_0 に関して, G_r. $\overline{G_r}$ の charge が +1, −1.)

$[T_m, T_n] = \frac{c}{3} m \delta_{m+n,0}$

$[L_m, T_n] = -n T_{m+n}$

Rem. conformal dim. h の conformal field $\psi(z)$

$\{\psi(z)(dz)^h\}$ が globally well-defined = $(\Omega^1)^{\otimes h}$ の section

$[L_m, L_n^{(h)}] = (m(h-1)-n)L_{m+n}^{(h)} + \cdots$

N=2 の時の highest wt. state

$L_n|h,q\rangle = 0$ ($n \geq 1$), $L_0|h,q\rangle = h|h,q\rangle$

$G_r|h,q\rangle = 0$ ($r \geq 1$ or $\frac{1}{2}$), $T_0|h,q\rangle = q|h,q\rangle$

$T_n|h,q\rangle = 0$ ($n \geq 1$) q : "U(1)-charge"

で定義される。

Rem.

1) N=2, 4 の extended world-sheet supersymmetry
(Riemann 面)
上での

2) space-time supersymmetry の存在

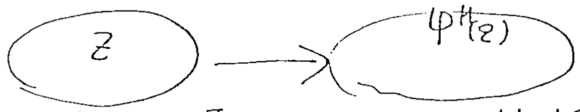
$\Leftrightarrow$ $c_1 = 0$

$\Leftrightarrow$ holonomy が SO(n)

この supersymmetry が, Ramond sector と NS sector の間の関係を与える。(N=2, 4 の時)

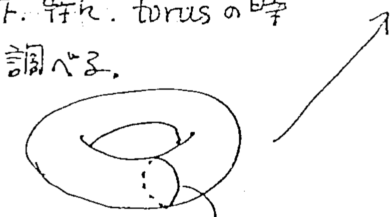
Notation : $T(z) = \sum L_m z^{-m-2}$
$G(z) = \sum G_r z^{-r-3/2}$
$J(z) = \sum T_n z^{-n-1}$

Rem. 3) world-sheet susy と space-time susy



Riemann 面　　　　　　$M \times K$.

以下、特に torus の時に調べる。



ここでの境界条件 (a-cycle)　periodic ⇝ Ramond --> fermionic
anti-periodic ⟶ NS --> bosonic　($M \times K$ での)

space-time supersymmetry で fermion と boson の関係がつく。

$N=2$ の時の unitary discrete series $0 \leq c \leq 3$.　($c \geq 3$ だと continuous series)
(current の c = 左の c の $\frac{1}{3}$)

$$c = 3\left(1-\frac{2}{m}\right) \qquad m = 3, 4, \cdots$$

NS ; $h = h_{j,k} = \dfrac{(jk-\frac{1}{4})}{m}$　　$j, k \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$
$q = q_{j,k} = \dfrac{(j-k)}{m}$　　$0 \leq j, k, j+k \leq m-1$.

R ; $h = h_{j,k} = \dfrac{jk}{m} + \dfrac{c}{24}$
$q = q_{j,k} = \pm \dfrac{(j-k)}{m}$

c を fix した時、$\overbrace{(h, q)}^{\text{許される}}$ の組が有限通りという事実が、理論に強い制約を与えている。

Characeter $\{\chi^{(c,h,q)}(\tau)\}$ の automorphy

Rem.

R-sector $\quad k=0, \quad h \geq h_{j,k=0} = \dfrac{c}{24}$

$\dfrac{c}{24}$ はひきさる.

$\downarrow$

$h=0$ と考える $\Big\} \rightsquigarrow$ ある種の $\overbrace{\text{harmonic form}}^{K\text{の上の}}$ に対応

NS-sector $\quad j=k=\frac{1}{2} \Rightarrow h_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0$

N=4 の時の 交換関係

$a=1,2 \quad , i,j=1,2,3 \qquad \overset{(-)}{G}{}^a = \mathrm{Re}\,G^a \underset{(-)}{+} i\,\mathrm{Im}\,G^a$

$$[L_m, G^a_r] = \left(\frac{m}{2}-r\right) G^a_{m+r}$$

$$[L_m, \bar{G}^a_r] = \left(\frac{m}{2}-r\right) \bar{G}^a_{m+r}$$

$$[T^i_m, G^a_r] = -\frac{1}{2}\sigma^i_{ab} G^b_{m+r} \qquad (\sigma_{ab}{}^i) : \text{Pauli 行列}$$

SO(2) の基本行列

$$[T^i_m, \bar{G}^a_r] = +\frac{1}{2}(\sigma^*_{ab})^i \bar{G}^b_{m+r}$$

$$[T^i_m, T^j_n] = i\epsilon^{ijl} T^l_{m+n} + \underbrace{\frac{k}{2} m\, \delta_{m+n,0}\, \delta^{ij}}$$

central ext.

$$\{G^a_r, \bar{G}^b_s\} = 2\delta_{ab} L_{r+s} + 2(r-s)\sigma^i_{ab} T^i_{r+s} + \underbrace{\frac{k}{2}(4r^2-1)\delta_{r+s,0}\,\delta_{ab}}$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \underbrace{\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}}$$

$c = 6k \qquad \dfrac{c}{12} = \dfrac{k}{2}$

Vir の central charge $\quad$ KM の central charge

N=4 の時の unitary discrete series

$k = 1, 2, 3, \cdots$

が知られているから,

$c = 6k = 6, 12, 18, \cdots$

$(2k = n) = \dim_{\mathbb{C}} K. \quad K$: hyper-Kähler mfd

(N=4の時の) 2種類の rep.

massless rep.

k: given NS: $h = l, \ l = 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{k}{2}$

R: $h = \frac{k}{4}, \ l = 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{k}{2}$

(NB $\frac{k}{4} = \frac{c}{24}$) 注

N=4の時の highest wt. state

$$\begin{cases} L_0|h,l\rangle = h|h,l\rangle \\ T_0^3|h,l\rangle = l|h,l\rangle \end{cases}$$

SU(2)の Cartan subalg. に属する部分.

lが SU(2)の spin

Rem NS → $\begin{cases} h=0 \\ h=\frac{1}{2} \end{cases}$ if $k=1$.

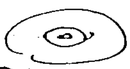
R → $h=\frac{1}{4}, \ l=0,\frac{1}{2}$ if $k=1$.

massive rep

NS : $h > l$ $\quad l = 0, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{k-1}{2}$

R : $h > \frac{k}{4}$ $\quad l = \frac{1}{2}, \cdots, \frac{k}{2}$.

N=4.

torus 上の →  K

cpx. analytic に入っているとは限らぬ.

$\boxed{\sum \chi\bar{\chi}(\tau) = Z(\tau)}$ が modular inv.

⟹ どういう h が入っているか?

N=2の時. characterの表から、Kの Hodge数が読みとれる。

e.g. Kの $h^{1,1} = 20$ (⇒ K3)

$\boxed{?}$

{conformal field theory の moduli space} ---> {Kの moduli space}

表現の isomorphism

$N=2,4$ の場合 NS, R-sector の間を

continuous につなげる.

$\left.\begin{array}{l} N=2 \text{ なら}, 1 \text{ parameter} \\ N=4 \quad 〃 \quad 2 \quad 〃 \end{array}\right\}$ でつなげる

$N=2$, parameter η

idea. $U(1)$ の KM の generator T_n と L_n を "混ぜる"

と

$$\begin{cases} L_n^{\eta} := L_n - \eta T_n + \eta^2 \frac{1}{2} k \, \delta_{n,0} \\ T_n^{\eta} := T_n - \eta k \, \delta_{q,0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G^{\eta}_{n+\eta} = G_n \\ G^{\eta}_{n-\eta} = \overline{G}_n \end{cases}$$

例えば.

$$[L_m, G_n] = \left(\frac{m}{2} - n\right) G_{m+n}$$

$$[T_m, G_n] = G_{m+n}$$

$$\Rightarrow \quad [L^{\eta}_m, G_n] = \left(\frac{m}{2} - n - \eta\right) G_{m+n} = \left(\frac{m}{2} - n\right) G^{\eta}_{m+n}$$

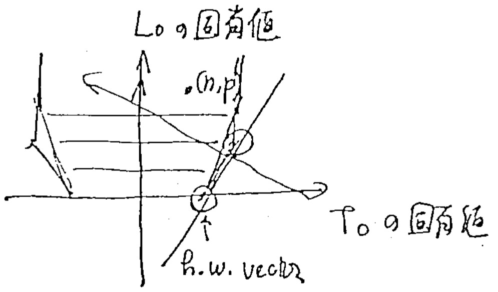
Rem?
$J(z) = \partial\phi(z)$
target space が Kähler
$\Leftrightarrow$ このような intertwining op. がある.

$N=4$, parameter η, ρ

$$\begin{cases} L_n^{(\eta,\rho)} := L_n - \eta T_n^3 + \eta^2 \frac{1}{2} k \, \delta_{n,0} \\ T_n^{3(\eta,\rho)} := T_n^3 - \eta k \, \delta_{n,0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G^{\rho,\eta,1}_{n+(\rho+\eta)/2} = G^1_{n+\rho/2} \\ G^{\rho,\eta,2}_{n+(\rho-\eta)/2} = G^2_{n+\rho/2} \end{cases}$$

$\overline{G}$; $(\rho \mapsto -\rho)$



$\eta=0,1,2,\cdots$

highest wt. state が、Weyl群で、移る.

η が特別な値でないと、unitary rep. には対応しない.

character

$$\underset{\substack{\| \\ ch(\tau,z)}}{\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left(q^{L_0} e^{i2\pi z T_0}\right)} = \underbrace{\sum_{(n,p)} d(n,p)\, q^n e^{i2\pi z p}}_{\mathrm{tr}_{\mathcal{H}(n,p)}} \qquad q = e^{2\pi i\tau}$$

$\mathcal{H} = \bigoplus_{n,p} \mathcal{H}(n,p)$

$z \mapsto z+\tau$

↓

q^{T_0} が余計にかかる.

roughに書くと、RからNSへ移るという意味は.

N=2. $\quad ch^{R}(\tau; z+\tau) = ch^{NS}(\tau; z)$

N=4, 同様の事情がある.

江口氏 2回目

space-time の supersymmetry について補足

compactification on K3

10次元を $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Minkawski}}}{M_6} \times K3$ ↖ cpt.

massless rep.

NS $\quad h=l \quad l=0,\cdots,\frac{k}{2}$

R $\quad h=\frac{k}{4}=\frac{1}{4}$

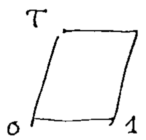
N=4

NS : $(h=l=0)$

$\quad (h=l=\frac{1}{2})$

R : $(h=\frac{1}{4} \quad l=\frac{1}{2})$

$\quad (h=\frac{1}{4} \quad l=0)$



$z \mapsto z+\tau$

flow

この flow を元に して、上の ⤻ の couple が関連する.

M_6 : 6次元 Minkowski space

$$\underbrace{++\cdots+}_{5コ}\,-$$

(massless rep.) $\Downarrow$

4次元 Euclidean space と思う.

SO(4) (or Spin(4))　　　(space-time)　　　$(M_6)\times K3$

$\left\{\begin{array}{lll} \text{tensor 型 の表現} & & \text{boson} \\ \text{spinor 型 の表現} & & \text{fermion} \end{array}\right.$

space-time SUSY

<u>Rem.</u> massive な表現だと、SO(5) までしか reduce しない。

さて、K3 の方の $N=2$ or 4 の SUSY から、

$M_6 \to \overset{4\,\mathrm{dim}}{\text{Euclidean}}$ での SUSY が出てくる ことを説明したい。

Spin(4) の表現

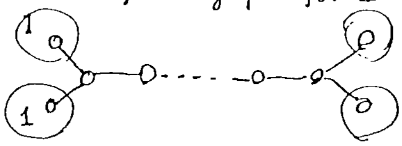
$(SO(3)\times SO(3))$

もっと一般に、

Spin(2n) の表現

rank n

extended Dynkin graph for $\tilde{D}$



basic rep.	b	$\vec{w} = (\overbrace{0,0,\cdots,0}^{nコ})$ highest weight
vector 〃	v	$(1,0,\cdots,0)$
spinor	s	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$
conjugate spinor	$\bar{s}$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,-\frac{1}{2})$

な3表現がある。

$n=2$ を以後考える。

b	$(0,0)$
v	$(1,0)$
s	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
$\bar{s}$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$$L_0 = h + \frac{\vec{w}^2}{2} - \frac{c}{24} \qquad (M_6\times K3 \text{ に関して})$$

$4\times\frac{3}{2}=6$　$\left(\begin{array}{l} M_6 \xrightarrow{c=6} \\ K3 \xrightarrow{c=6} \end{array}\right.$ $\Rightarrow c=12$　$= h + \frac{\vec{w}^2}{2} - \frac{1}{2}$

$L_0=0$ のものを探す。 (massless になるもの)

(world-sheet)
Riemann 面

$$\begin{array}{llll} & M_6 & K3 & \text{character} \\ \text{NS} & (\text{vector rep.}) \times & (h=\ell=0) & \to \chi_v^{SO(4)} \times \chi_{NS}^{h=0,\ell=0} \\ \text{R} & (\text{spinor}) \times & (h=\frac{1}{4}, \ell=\frac{1}{2}) & \quad \chi_s^{SO(4)} \times \chi_R^{h=\frac{1}{4},\ell=\frac{1}{2}} \end{array}$$

ここで、
($N=4$ の時の character $\to \chi^{h=0,\ell=0}$ (一般に multiplicity $= 2\ell+1$)

$\Rightarrow$ 分配関数 $Z = \left| \chi_v^{SO(4)} \times \chi_{NS}^{h=0,\ell=0} + \chi_s^{SO(4)} \times \chi_R^{h=\frac{1}{4},\ell=\frac{1}{2}} \right|^2 + \left| \quad \right|^2 + \cdots$

$|\ |^2$ の中身を見る.

NS × NS

$SO(4) = SU(2) \times SU(2)$

ϕ_{ij}	$v \times v = (1,1)$	graviton	対称 tensor
$\phi_{i\alpha}$	$v \times s = \underset{\sim}{2}(1, \frac{1}{2})$ $(s \times v = \underset{\sim}{2}(\frac{1}{2}, 1))$	gravitino 〃	$\Leftarrow$ ($\chi_R^{h=\frac{1}{4},\ell=\frac{1}{2}}$ の multiplic $=2$
$\phi_{\alpha\beta}$	$s \times s =$ vector	vector field	

これが、
space-time supersymmetry
(一つの multiplet をなしている)

Rem. ∘ M_6 の代りに M_8 でやってもうまくいかない.

∘ $M_6 \times K3$

space-time supersymmetry $\Leftrightarrow$ world-sheet susy
$N=2,4$
$c_1=0$
$SU(n)$

∘ twistor theory に似てるとも言える (土屋氏の comment)

∘ $\{NS(h=\ell=0) \Leftrightarrow R(h=\frac{1}{4}, \ell=\frac{1}{2})\}$
$\{NS(h=\ell=\frac{1}{2}) \Leftrightarrow R(h=\frac{1}{4}, \ell=0)\}$ $\Rightarrow h^{1,1}=20$

∘ Z の modular 不変性の基に. M_6 の SUSY と K3 の SUSY が相補的になっている.

Z の Expression には. M_6 の boson の contribution が $|\ |^2$ の分だけかかる.

$M_4 \times K_3$

NS $\quad h=0$

R $\quad h=\frac{3}{8}\ (+\frac{1}{8})$

$\underbrace{}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2}$ としない

SO(2)

$$\begin{array}{c} SO(10-2n) \\ \cup \\ SO(8-2n) \end{array}$$

light-cone

n-dim
$c_1=0$

N=2,4 のSUSYから
Space-time supersymmetric な multiplet が決まる…
(supergravity)

幾何に関する準備

K3 曲面の Hodge diamond.

$h^{p,q}$ ($\nearrow p$, $\searrow q$)

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{cases} h^{p,q} = h^{q,p} \\ h^{p,q} = h^{n-p,n-q} \end{cases}$$

quintic 3-fold (in $\mathbb{P}^4$) の Hodge diamond

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & 0 & & 101 & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

表現論から、Hodge 数が決まるという事の説明が
明日のテーマ。

holonomy が SU(n) である $\iff$ $h^{0,q} = \begin{cases} 1 & q=0,n \\ 0 & q\neq 0,n \end{cases}$

SU(n) holonomy をもつ mfd の Dirac operator
(ここでは string の話は一応忘れよ)

Γ行列.

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad \mu,\nu = 1,\cdots,2n$$

$n=3$, 正則に組み直して. $\Gamma^a, \Gamma^{\bar b}$ とすると,

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = \{\Gamma^{\bar a}, \Gamma^{\bar b}\} = 0$$

$$\{\Gamma^a, \Gamma^{\bar b}\} = 2g^{a\bar b}$$

$\Rightarrow$ Γ^a : 消滅演算子 を思う.
$\Gamma^{\bar b}$: 生成 〃

$$\not{D} = (\Gamma^\mu D_\mu =)\ D^a\Gamma_a + D^{\bar b}\Gamma_{\bar b}$$

$\Gamma^a, \Gamma^{\bar b}$ の作用する Fock space は.

$$\Gamma^a|\Omega\rangle = 0 \qquad a,b = 1,\cdots,\overset{(n)}{3}$$

$$\Gamma^{\bar b}|\Omega\rangle$$

$$\psi(z^a,\bar z^a) = \overset{1}{\phi(z^a,\bar z^a)|\Omega\rangle} \qquad \text{0-form}$$

$$+ \underset{3}{\phi_{\bar b}(z^a,\bar z^a)}\Gamma^{\bar b}|\Omega\rangle + \underset{3}{\phi_{\bar b\bar c}(z^a,\bar z^a)}\Gamma^{\bar b}\Gamma^{\bar c}|\Omega\rangle \qquad \text{1 form, 2 f.}$$

$$+ \underset{1}{\phi_{\bar b\bar c\bar d}(z^a,\bar z^a)}\Gamma^{\bar b}\Gamma^{\bar c}\Gamma^{\bar d}|\Omega\rangle \qquad \text{3-form}$$

$$1+3+3+1 = 8 = 2^3 = 2^{6/2}$$

これに. $\not{D}$ を作用させる。

$$D^{\bar b}\Gamma_{\bar b} \to \bar\partial \qquad \therefore\ \not{D} \to \bar\partial^* + \bar\partial \quad \text{Dolbeault 作用素}$$

$\Rightarrow$ Dirac operator の zero mode の空間 $\cong$ Dolbeault cohomology

$$-\not{D}^2 = -D^\mu D_\mu + \frac{1}{4}R$$

今, Ricci flat i.e. $R=0$.

space-time susy と関連あり

($\not{D}$ の) zero mode $=$ $\boxed{\text{covariant constant}}$

$$\left(\because \quad D^\mu D_\mu f = 0 \quad \Rightarrow \quad \int f D^\mu D_\mu f = 0 \quad \Rightarrow D_\mu f = 0 \right)$$

$|\Omega\rangle$ SU(2)-singlet

$\Gamma^{\bar{b}}|\Omega\rangle$ 〃 -triplet

$\Gamma^{\bar{b}}\Gamma^{\bar{c}}|\Omega\rangle$ 〃

$\Gamma^{\bar{b}}\Gamma^{\bar{c}}\Gamma^{\bar{d}}|\Omega\rangle$ singlet

zero mode は SU(2)-singlet のみ.

$|\Omega\rangle$, $\Gamma^{\bar{b}}\Gamma^{\bar{c}}\Gamma^{\bar{d}}|\Omega\rangle$

$$\therefore \begin{cases} h^{0,0} = h^{0,n} = 1 \\ h^{0,i} = 0 , \quad i \neq 0, n \end{cases}$$

K : mfd with SU(n) holonomy

X : holomorphic vector bundle on K ($E_8 \times E_8$ が構造群 $\Rightarrow$ $c_1(X) = 0$ が言える)

$H^q(K; X)$

$\not{D} \cdot \phi^i_{\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_q} = 0$ ($R \otimes \overset{q}{\wedge} \bar{T}_K$ の section に対する方程式)

$[D_{\bar{a}}, D_{\bar{b}}] = 0$

holom. connection on X

$\boxed{F_{\bar{a}\bar{b}} = 0}$ $(D_{\bar{a}})^2 = 0$

space-time supersymmetry (この関係の説明は明日 try する)

$10 \rightsquigarrow M_4 \times K$

$E_8 \times E_8$ があるとする。

$$\boxed{\mathrm{tr}\int_{\text{4-cycle}} R \wedge R = \mathrm{tr}\int_{\text{4-cycle}} F \wedge F} \quad \text{4-cycle in K}$$

vect. bdle の curvature

なる条件が、anomaly cancellation の条件として出てくる。

Xの構造群

$E_8 \times E_8 \supset SU(3) \times E_6$

gauge connection = spin connection (*)

を仮定する。

K上の spinor 場 として E_8 の adjoint 表現を考える.

$E_8 \supset SU(3) \times E_6$

$\chi^{i}_{\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_q}$ $\quad 248 = (3, 27) + (\bar{3}, \overline{27}) + (1, 78) + (8, 1)$

次元表現

(3, 27) を調べるとき, SU(3)の $\underset{\sim}{3}$ として, 仮定(*)より,

$H^q(K; T_K)$

を調べることに帰着

$q = 1 \quad H^1(K; T_K) \qquad \psi^{a}_{\bar{b}}$

covariant constant ϵ_{abc} が存在するという事を使うと,

$\psi^{a}_{\bar{b}} \mapsto \tilde{\psi}_{a_1 a_2 \bar{b}} = \omega_{a_1 a_2 a_3} \psi^{a_3}_{\bar{b}}$

$H^1(K; T_K) \longrightarrow H^1(K, \Omega^2_K) = H^{2,1}(K)$

これは. 同型

∴ (3, 27) の zero mode の数. $= h^{2,1}$

同様に, $(\bar{3}, \overline{27})$ についても,

$\psi^{\bar{a}}_{\bar{b}} \mapsto \tilde{\psi}_{a\bar{b}} = g_{a\bar{a}} \psi^{\bar{a}}_{\bar{b}}$ (metric を使う)

$H^1(K; T^*_K) \longrightarrow H^1(K; \Omega^1_K) = H^{1,1}(K)$

$(\bar{3}, \overline{27})$ の zero mode の数 $= h^{1,1}$

素粒子の世代 が $\underset{\sim}{h^{2,1}}$ 個 ある.

27コ
$$\begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \\ e & \mu & \tau \\ \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$(E_8) \times E_8 \rightarrow \underline{SU(3) \times E_6}$

忘れる.

anomaly cancellation

gauge 場 = spin 場 とした

27 は E_6 の 27次元表現

反世代 ($= \overline{27}$ の表現の multiplicity) $= h_{1,1}$ 個ある。

$$\chi = 2(h^{1,1} - h^{2,1})$$

$\therefore$ |世代数 − 反世代数| $= \dfrac{|\chi|}{2}$

☆ $h^{2,1}$, $h^{1,1}$ という数は、実験家にとっても重要。

<u>moduli</u>.

$$10 \longrightarrow M_4 \times K$$
x , y ← coordinate

計量 $g_{MN}(x, y)$
$M, N = 1 \sim 10$

$$g_{MN} = \begin{cases} g_{\mu\nu} & \mu, \nu = 1 \sim 4 \\ g_{\mu i} & i = 1 \sim 6 \\ g_{ij} & i,j = 1 \sim 6 \end{cases}$$

(K の) moduli が出てくる。

K が Ricci flat : $R_{ij} = 0$

$$g_{ij} = g^0_{ij} + h_{ij}$$
← deformation の parameter

$$0 = \Delta h_{ij} = -D_k D^k h_{ij} - R_{isjt} h^{st}$$
(Δ : Lichnerowicz の Laplacian)

$h_{a\bar{b}}$, $h_{\bar{a}\bar{b}}$ について decouple した方程式を得る。
(独立な)

Kähler metric の変形
(Kähler metric の scale 変換)

$$g^{a\bar{a}} h_{\bar{a}\bar{b}} = \tilde{h}^a_{\bar{b}} \in H^1(T) \cong H^{2,1}(K)$$
複素構造の変形

moduli 空間の計量の方へ興味が移って来た。
(K3 の metric 自身より)
複素構造以上の real analytic str. 等を知らないでも話ができる
CFT の technique でいろいろ計算できる。

1988/1/26

江口氏　3回目

27次元 massless (ℓ, q, s)

(20)	$z_1^3 z_2^2$	$(0,0,0)\ (1,9,0),(3,7,0)^3$	(20) P_{44555}	$(0,0,0)^3\ (1,7,0).(3,3,0)$
(30)	$z_1^3 z_2 z_3$	$(0,0,0),(2,8,0)^2\ (3,7,0)^2$	(30×2) P_{45455}, P_{53445}	$(0,0,0)^2\ (1,1,0)\ (1,7,0)\ (2,2,0)$
(30)	$z_1^2 z_2^2 z_3$	$(1,9,0)^2\ (2,8,0)\ (3,7,0)$	(30×2) P_{34555}, P_{43555}	$(0,0,0)^2(1,1,0)(2,6,0)(3,3,0)$
(20)	$z_1^2 z_2 z_3 z_4$	$(1,9,0)\ (2,8,0)^3,(3,7,0)$	(20×3) P_{23455} P_{32455} P_{42355}	$(0,0,0)(1,1,0)^2(2,6,0)(2,2,0)$
(1)	$z_1 z_2 z_3 z_4$	$(2,8,0)^5$	(4) P_{12345}, P_{21345}, P_{31245}, P_{41235}	$(1,1,0)^4(2,6,0)$

計 $106 = H^{2,1}$

計 $224 = H^1(\mathrm{End}(T))$

Calabi-Yau compactification

複素3次元 $c_1 = 0$

$N=2$ superconformal代数の表現論

discrete unitary series

$$c = 3\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

notationをかえる　$j+k-1 = \ell$, $j-k = q$

$$h = \frac{\ell(\ell+2) - q^2}{4m} + \left(\frac{1}{8}\right), \quad Q = \frac{q}{m} + \left(\frac{1}{2}\right)$$

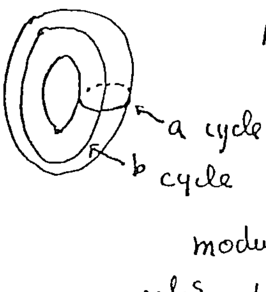
（このとき、$|h, Q\rangle$ が highest wt vector.）

character formula

$$\chi^{\ell,s}_{q}(\tau) = \sum_{j \bmod (m-2)} C^{\ell}_{q+4j-s}(\tau) \times \Theta_{2q+(4j-s)m,\,2m(m-2)}(\tau)$$

$$\begin{array}{cccc} -- & +- & -+ & ++ \\ s=0, & 1, & 2, & 3 \end{array}$$

NS　R



ここで、$\Theta_{\ell,m}(\tau) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} q^{m\left(p + \frac{\ell}{2m}\right)^2}$　（level が ℓ）

$C^{\ell}_{m}(\tau)$: $A_1^{(1)}$ の string function

modular 変換性

$$\chi^{\ell,s}_{q}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{\ell',q',s'} \underbrace{\sin\frac{\pi(\ell+1)(\ell'+1)}{m}}_{A_1^{(1)}\text{の変換性}} \underbrace{e^{\frac{\pi i q q'}{m}}\, e^{-\frac{\pi i s s'}{2}}}_{\Theta\text{の変換性}} \cdot \chi^{\ell',s'}_{q'}(\tau)$$

cf. $A^{\ell}_{m-2}(-\frac{1}{\tau}) = \sum_{\ell'} \sin\frac{\pi(\ell+1)(\ell'+1)}{m} A^{\ell'}_{m-2}(\tau)$

$\Theta_{g,m}(-\frac{1}{\tau}) = e^{\frac{\pi i g g'}{m}} \Theta_{g',m}(\tau)$

Rem. superstring の意味するところ. CFTでは正則と反正則の部分を分けて扱い最後に組合せる。

superstring

boson+fermion 10次元 $= M_4 + CY$ ←… 正則

boson+fermion 10次元 $= M_4 + CY$ ←… 反正則

heterotic string

b+f 10 $= M_4 + CY$

b 26 $= M_4 + CY +$ lattice

	center	M_4 (b+f)	CY	
10次元	$(c=12) =$	$2\times\frac{3}{2}$	$+ 9$	
26次元	$(c=24) =$	2	$+ 9$	$+ 13$
		↑ M_4		↑ lattice

lattice 13次元の格子として.

$E_8 \times SO(10)$

rk 8 rk 5) 最終的には.

(E_6 に)持ち上がる

物理的には. heterotic string が面白い.

lattice の部分から, gauge群の部分が出てくる。"color をもつ。"

superstring からは, 重力のみの"暗い"理論のみ導びかれる。

44F. Gepner に従い. heterotic の場合の表現を扱う

$n=3$, $c=9$ にせよ。 (反正則の CY の部分を考える)

$c = 3(1-\frac{2}{m}) \to 3$

(Gepner の) example

$m=5$, $c=\frac{9}{5}$ なる rep. を 5個もってくる.

$(m=5)^5$ $\qquad$ $(\mathbb{Z}/5)^5 \ltimes \mathfrak{S}_5 / (\mathbb{Z}/5)$

の対称性がある。

反正則 $\qquad M_4 \times CY \times \text{lattice}$

$$\chi_q^{l,s} \times \chi^{SO_{10}}_{\substack{b\\v\\s\\\bar{s}}} \times \chi_b^{E_8}$$

$(m=5)$

level 1の表現の character

→ gauge 群 E_6 のどんな表現かを数える。

正則 $\qquad \overset{(\text{super})}{M_4} \times CY$

$$\chi^{SO_2}_{\substack{b\\v\\s\\\bar{s}}} \times \chi_q^{l,s}$$

M_4 の $\qquad\qquad (m=5)$

全体の分配関数は

$$Z = \sum_{\text{表現}} \chi_{\text{正}} \chi_{\text{反}}^*$$

という形で、要請は、Z が modular 不変であること。

$$Z\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = Z(\tau)$$

$(m=5)^5$

E_6 の $\underline{\underline{27}}$ 次元表現の数 $= h^{2,1}$

cf. 最初の表. (Gepner の preprint にある)

CY としては、5次超曲面 $\underbrace{z_1^5 + \cdots + z_5^5}_{P(z)} = 0 \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$

を考える。

表から、 $\qquad H^{2,1}(K) \cong H^1(K, T_K) \longleftrightarrow$ 27次元表現

K の deformation の方向を与える多項式 $\longleftrightarrow$ character の組合せ。

が読みとれる。

massless

super gravity multiplet

gauge multiplet

matter multiplet

$$\left\{\begin{array}{lll} 27 & 101 & h^{2,1} \\ 27^* & 1 & h^{1,1} \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \text{Kähler form} \ (2.8.0)^{5}$$

$E_8 \supset SU(3) \times E_6$

$$248 = (3, 27) + (3^*, 27^*)$$
$$+ (8, 1) + (1, 78)$$

E_6 の gauge 粒子 $\longleftrightarrow$ gauge multiplet

SU(3) の adj. rep.

$\Downarrow$

$\underbrace{H^1(End(T_K))}$

vector bundle の moduli (の求め方)

$V^a \approx V^a + \lambda Z^a \qquad a = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial Z^a} V^a = 0$$

$$\searrow \quad \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z^a}}_{4\text{次}} + P_{\underbrace{abcde}_{\text{対称}}} z^b z^c z^d z^e$$

対称化すると考える

E_6-singlet が 228 コ

$H^1(End(T)) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} SU(3) \text{ の adj. rep.} \\ \text{の character} \end{pmatrix}$

$E_8 \times E_6 \times U(1)^4$

$\uparrow$ 持ち上がる.

$E_8 \times SO(10)$

$$\begin{array}{r} 228 \text{ コ} \\ \hline 224 \\ 4 \end{array}$$

$$\chi(End(T)) = h^0(End(T)) - h^1(\ ) + h^2(\ )$$
$$= 0$$

K3 による compact 化

正則 $\quad M_6^{\text{super}} \times K3$

$\text{center } 12 = 4\times\frac{3}{2} + 6$

反正則 $\quad M_6 \times K3 \times \left(\underset{\text{の格子}}{E_8\times SO(12)} \right)$ $\supset E_7$

$24 = 4 + 6 + 14$

この"成上り"の理由は、SO(12) の表現が出てくる、まとまって E_7 の irred. rep. になる。

$E_8 \supset E_7 \times SU(2)$

について、$E_8 \supset E_6\times SU(3)$ の時と同じような分解を考える。

$m \equiv k+2$ (Gepner の論文では)

$c = 3(1-\frac{2}{m}) = \frac{3k}{k+2}$

$(k=1)^6 \quad \begin{pmatrix} E_6 \\ \underline{27} \\ h^{2,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_7 \\ \underline{56} \\ h^{1,1} \end{pmatrix}$

$\underline{56}$ の数 : 予想値 $= h^{1,1} = 20$

$\underline{56}^*$ の数

	s in 56	$\bar{s}$ in 56	E_7-singlet の数
$(k=1)^6$	20	0	140
$(k=1)^4(k=4)^1$	20	0	140
$(k=1)^2(k=2)^1(k=10)^1$	20	6	136
⋮	⋮		⋮
$(k=2)^4$			

s = super-multiplet

$\longrightarrow z_1^4 + \cdots + z_4^4 = 0 \quad \subset \mathbb{P}^3$

symmetry が $(\mathbb{Z}/4)^4 \rtimes \mathfrak{S}_4 / (\mathbb{Z}/4)$

Rem. Fermat 型の多様体は一般に出てくる。

$(m)^m \Leftrightarrow$ 複素 $(m-2)$ 次元の $c_1 = 0$

$h^1(End(T)) = 45$ (90 ?)

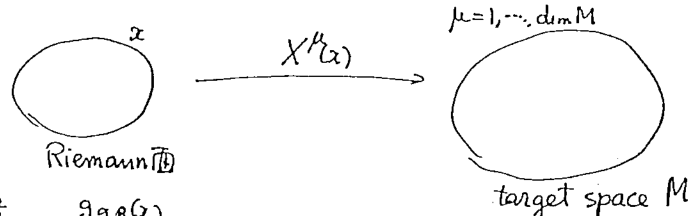
$45\times 2 + 20\times 2 = 130$

N=4 の表現論でやると、
パラメーターつきの moduli 不変な combination があるだろう。
(Hecke の不定符号の2次形式に付随する保型形式との関連があるか?)

supergravity については、Green-Schwarz-Witten に
割と良い解説がある。

1988/1/28

江口氏



計量 $g_{\alpha\beta}(x)$ $\alpha\beta=1,2$ $\quad$ $G_{\mu\nu}(X)$

Polyakov string

$$Z[g_{\alpha\beta},G_{\mu\nu}]\equiv\int \mathcal{D}X^\mu \mathcal{D}\psi^\mu \exp\Big\{-\int d^2x\, \overbrace{G_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}_{(x)}}^{(X(x))}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\mu \underbrace{\ }_{+\text{ fermion}}\Big\}$$

① $g_{\alpha\beta}$ への依存性 $\xrightarrow{(Z\text{の})}$ (curveの) moduli まで下がることがある $\Longleftrightarrow$ $\dim M=26$ or 10

② $G_{\mu\nu}$ への依存性 $\longrightarrow$ moduli まで下がることがある。
(CYの) $\qquad M = M_\varphi\times CY$ $\boxed{c=9}$

CY, K3曲面の場合には, そうなるだろう。

N=2,4 superconformal symmetry

Virasoro

discrete $0<c\le 1$, $c=1-\dfrac{6}{m(m+1)}$ $\quad m=3,4,\cdots$ $\qquad$ continuum $1\le c$

h は有限個しかない $\qquad$ h も勝手

($h \longleftrightarrow$ 粒子の数) $\quad \{\chi^{(c,h)}(\tau)\}$ $\qquad$ modular 群の無限次元表現

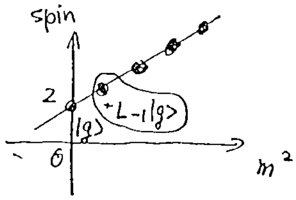
$\downarrow$

modular 群の有限次元表現 $\qquad$ $G_{\mu\nu}$ に無限自由度がある。

N=2 s.c.alg. $\downarrow$ moduli の依存性までおち

cf. N=2 superconformal 代数 $\supset$ Virasoro 代数

$\Rightarrow$ Virasoro の無限個の rep. が N=2 の superconformal alg. の rep. として(1つ)のキヤク rep. にまとまる状況を考える。有限個の



Regge trajectory

BRST-coh.

● が highest wt vector となるような rep. の 可算系列
無限可約

superchange → $|g\rangle$, $+L_{-1}|g\rangle$ — exact form
で mod out する
↓
singular vector

$\langle \phi_1 \cdots \phi_n \psi \rangle = 0$
decouple

$N=2$ 代数 $\Longrightarrow$?

$\supset$ Virasoro 代数 $\Rightarrow$ general covariance

$\Rightarrow$ gauge-sym.

(1|4) $\boxed{c_1 = 0}$

自明な実第一Chern類をもつコンパクトKähler多様体

大阪大 教養　榎 一郎

自明な実第一Chern類をもつコンパクトKähler多様体について知られている一般的な結果を紹介する：

Part 1 では構造定理，いわゆるBogomolov分解について，Part 2 では，変形とモデュライ空間上の計量について．

1. Bogomolov分解

実第一Chern類 $c_1(M)_{\mathbb{R}}\ (\in H^2(M, \mathbb{R}))$ が 0 のとき，コンパクトKähler多様体 M は，Yau [16] によるCalabi予想の解決により，Ricci平坦なKähler計量をもつ．このような多様体は，次のような3種類のものの積に分解する：

定理 (Bogomolov 分解) M を Ricci 平坦なコンパクト Kähler 多様体とする。このとき, M をある有限 (不分岐) 被覆 $M' \to M$ にまであげれば, 次のように複素解析的かつ計量も込めて直積に分解する;

$$M' \cong T \times X_1 \times \cdots \times X_r \times Y_1 \times \cdots \times Y_s ,$$

ここで,

0) T は平坦な複素トーラス (すなわち $T \cong \mathbb{C}^m/\Gamma$, 計量は $\sum dz^\alpha \cdot d\bar{z}^\alpha$ の形),

1) X_i は単連結な偶数次元 Ricci 平坦 Kähler 多様体で, ホロノミー群は, $Sp(m_i)$, $2m_i = \dim_{\mathbb{C}} X_i$, 特に正則 2-形式 φ_i で次のようなものをもつ;

- $\varphi_i^{m_i} = \underbrace{\varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_i}_{m_i \text{回}}$ は X_i の各点で消えない,
- X_i 上の正則 p-形式は, $c\varphi_i^{p/2}$, $c \in \mathbb{C}$, の形に限る (特に奇数次正則形式は 0 のみ).

2) Y_j は単連結な Ricci 平坦 Kähler 多様体でホロノミー群は, $SU(n_j)$, $n_j = \dim_{\mathbb{C}} Y_j$. 特に各点で消えない正則 n_j-形式をもつが, 他の正則 p-形式, $0 < p < n_j$, は 0 のみ.

次のような系がある.

系1 (Calabi) M を上の定理のとおりとすると, M の Albanese 写像 $\alpha : M \longrightarrow A$ (M 上の正則 1-形式を積分して得られる複素トーラス A への写像) は, 全射となり, 構造群が有限の正則ファイバーバンドルを定める.

系2 (Bogomolov) M, N をコンパクトKähler 多様体で, $c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$, $c_1(N)_{\mathbb{R}} = 0$ とする. このとき, 全射正則写像 $f : M \rightarrow N$ は, つねに構造群有限の正則ファイバーバンドルを定める.

歴史的には, まず Calabi [ ] が, Calabi 予想から上の系1が出ることを注意している. この部分は M が Hodge 多様体のときという制限のもとで 松島 [11] により Calabi 予想なしで証明された. 現在 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体に対しては多少の特異点 (canonical singularity) があっても $c_{1\mathbb{R}} = 0$ であれば 系1が成り立つことが知られている (川又 [8])

次に Bogomolov [3] が $\pi_1(M) = 0$ を仮定して分解定理を示した. しかし彼は, [4] で 1) のタイ

プの X_i は 4次元以上では存在しないという誤った主張をしている。上の形の分解定理は、小林昭七とM. L. Michelson [12] により独立に得られたようである。ただし [12] では、Bogomolov [4] の誤まりを引用して 1) のタイプが落ちている。

定理の証明は、知られている定理を組み合わせればできる。順に引用する。

① Cheeger-Gromoll の分解定理 [6]　$\tilde{M}$ を完備 Riemann 多様体で、いたる所 Ricci 曲率 ≥ 0 とする。このとき、計量もこめて

$\tilde{M} \cong \tilde{M}' \times \mathbb{R}^k$,　$\mathbb{R}^k$ の計量は平坦なもの、

と分解する。ここで $\tilde{M}'$ は (測地的な) 直線を含まない。
("直線" とは、C^∞ 写像 $\gamma : \mathbb{R} \to \tilde{M}'$ で各 $s, t \in \mathbb{R}$ に対し、つねに

$\gamma(s)$ と $\gamma(t)$ の距離は、$|s-t|$

となるもの。)

一般に $\tilde{M}$ がノンコンパクトであっても直線をもつとは限らない。しかし、もし $\tilde{M}$ がコンパクト多様体の被覆に (計量もこめて) なっていれば、$\tilde{M}$ は直線を含

すことが，微分幾何の初等的議論でわかる．似た議論をくりかえすと次がでる．

系［6］．M をコンパクト Riemann 多様体で，いたる所 Ricci 曲率 ≥ 0 とする．このとき，M をある有限（不分岐）被覆 $M' \to M$ にあげれば，計量もこめて

$$M' \cong T^k \times \bar{M}, \quad T^k \text{ は平坦な実トーラス}, \quad \bar{M} \text{ は単連結コンパクト}$$

と分解する．

② de Rham 分解（cf.［9］）M を単連結完備 Riemann 多様体とする．M のホロノミー群 $\Psi (= \Psi(M, x_0))$ が $T_{x_0}M$ への作用もこめて

$$\Psi = \Psi_0 \times \Psi_1 \times \cdots \times \Psi_r \quad (\Psi_0 \text{ は trivial})$$

$$T_{x_0}M = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

と分解するとき（V_i は Ψ_i の不変部分空間），M もこれに対応して，

$$M \cong \mathbb{R}^k \times M_1 \times \cdots \times M_r \quad (\mathbb{R}^k \text{ は平坦})$$

と計量もこめて直積に分解する（M_i のホロノミー群が Ψ_i となる）．さらに M が Kähler であれば，各 M_i も Kähler 多様体で（$\mathbb{R}^k = \mathbb{C}^m$, $k = 2m$），上の同型

は双正則となる。

[1]

③ Bergerによるホロノミー群の分類　Mを単連結なm次元Riemann多様体とする。このとき，

・Mのホロノミー群のT_xMへの作用は，既約（すなわち，②のような分解は自明なものに限る），

・$\nabla R \neq 0$（すなわちMは局所対称空間の開部分多様体ではない）

であれば，Mのホロノミー群は，T_xMへの作用もこめて次のいずれか：

$SO(m)$,

$U(1)\times SU(n)$,　$SU(n)$,　$m=2n$,

$Sp(1)\times Sp(\ell)$,　$Sp(\ell)$,　$m=4\ell$,

（$T_xM=\mathbb{R}^m$への作用はいずれも標準的なもの）

④ Mをコンパクト Riemann多様体でいたる所Ricci曲率≥ 0とする。このときM上の調和p-形式は全て平行。

これは，Bochnerの公式からでる：φを調和形式としたとき，

(*) $0=\Delta\varphi = \nabla^*\nabla\varphi + Ric(\varphi)$

ここで∇^*は共変微分∇のformal adjoint，$Ric(\ )$

はRicci曲率から定まるテンソル。仮定 Ricci曲率≥ 0により，Ric( )は各点で半正定値となるので，(*)の両辺とφとのL^2-内積をとれば，$\nabla\varphi = 0$がでる．

特に

④′ Mがホロノミー群ΦをもつRicci曲率≥ 0のコンパクトKähler多様体のとき，

$$H^0(M, \Omega^p) \xrightarrow{\sim} (\Lambda^p T^*_{x_0} M)^{\Phi}, \quad \varphi \longmapsto \varphi(x_0)$$

ここで，$T^*_{x_0}M$はMのx_0における正則余接空間に$(\ )^{\Phi}$は自然にひきおこされたΦの作用で不変な元の全体．

実際，$(\Lambda^p T^*_{x_0} M)^{\Phi}$の各点への平行移動は，経路によらず，M上の平行な$(p,0)$-形式を定める．MはKählerなので，(Levi-Civita接続による)共変微分∇の$(0,1)$-成分は$\bar{\partial}$となる．よって平行なら正則．

逆に，コンパクトKähler多様体上の正則形式は，調和形式となるから，④により平行となり，x_0における値は，Φの作用で不変。

以上を組みあわせて，Bogomolov分解の証明を述べる．Mを定理にある通りとする．②のde Rham分解が

Kähler多様体に対し正則なので，①の系の分解も正則となる；とくに T^k は複素トーラスで，$\bar{M}$ もKähler多様体。Kähler多様体のホロノミー群は，つねにユニタリ群の部分群となる．さらに $\bar{M}$ は単連結で，

$$c_1(\bar{M})_{\mathbb{R}} = -c_1(K_{\bar{M}}) = 0$$

だから，その標準束 $K_{\bar{M}} = \Lambda^{\bar{m}} T^* \bar{M}$ は自明なので正則 $\bar{m}$-形式，$\bar{m} = \dim \bar{M}$，をもつ 結局④により，$\bar{M}$ のホロノミー群は SU の部分群である．

$\bar{M}$ をさらに deRham分解する．各成分のホロノミー群は，③のホロノミー群の分類により，SU か Sp のいずれか．ここで次を引用する．

⑤ Weyl [15] $SU(m)$, $Sp(\ell)$ の $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{4\ell}$ への標準的な作用を考えたとき，

$$(\Lambda^p \mathbb{C}^m)^{SU(m)} = 0, \qquad 0 < p < m,$$

$(\Lambda^p \mathbb{C}^m)^{Sp(\ell)}$ は symplectic形式の外積ではられる．

④とあわせて，定理の残りの部分がわかる．

2. 変形

2.1 <u>倉西族</u>. 複素多様体 M の複素構造の変形を考える. M の変形全てを考えるのはむずかしいので, まず M に"十分近い"変形のみを考える. 例えば,

$\Delta = \{t \in \mathbb{C}^n \mid |t| < \varepsilon\}$ 上の複素多様体の族

$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ (すなわち, $\mathcal{M}$ も複素多様体で, π は各点でその微分が極大階数の正則写像) があったとき, $M_t = \pi^{-1}(t)$ の複素構造は, $|t|$ が十分小さいとき, $M_0 = \pi^{-1}(0)$ のそれに"近い"とする. 実は, M を一つとめたとき, 集合

$\{M' \mid M'$ の複素構造は M に"十分近い"$\}/\sim$

(ここで"$\sim$"は"同じ複素構造をもつものは, 同一視する"の意味) には, 一般には, よい構造は入らない (自然な位相を入れようとすると Hausdorff にならなかったりする). ところが, 上にあげたような複素多様体の族 $\mathcal{M} \to \Delta$ のうちで普遍的なものが (パラメータ空間 Δ に特異点を許せば) 次のような意味で存在する.

コンパクト複素多様体 M に対し解析空間 S 上の複素多様体の族 $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow S$ で次の性質をもつものが存在する:

・ある点 $0 \in S$ があって、$M_0 = \pi^{-1}(0)$ は M と同型。

・自然な同型 $T_0 S \simeq H^1(M, \Theta_M)$ がある

・任意の M の変形、すなわち複素多様体の族 $\varpi : \mathcal{N} \to \Delta$ で $\varpi^{-1}(0') \cong M$ となるもの、は $\mathcal{M}$ から引きおこされる。すなわち、ある $0' \in \Delta$ の近傍 U と正則写像 $f : U \to S$, $f(0') = 0$, があって $\mathcal{N}_{|U} = f^* \mathcal{M}$ となる。すなわち $\varpi^{-1}(t) \cong \pi^{-1}(f(t))$.

このような族 $\mathcal{M} \to S$ は M の倉西族と呼ばれる。一般に、S は特異点をもつが、

定理 (Tian [13], Todorov [14]). M がコンパクト Kähler 多様体で、$c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$ なら、M の倉西族のパラメータ空間 S は smooth で $\dim_{\mathbb{C}} S = \dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \Theta_M)$.

複素構造の変形のとらえ方はいろいろあるが、ここでは 互一作用素の変形としてとらえる。微分可能多様体 M に複素構造を指定することは、M の各点のまわりで、どの C^∞ 関数がこの複素構造に関して正則であるかを指定することと同値である。さらに、正則関数 f は Cauchy-

Riemann方程式 $\bar{\partial} f = 0$ で特徴づけられる．したがってMの変形 M_t を考えることは，$\bar{\partial}$ の変形 $\bar{\partial}_t$ を考えることと同値となる．$\bar{\partial}_t$ は，M_t の複素構造が M に十分近ければ，M の正則局所座標 を 用いて，

$$\bar{\partial}_t f = \bar{\partial} f - \sum_{\alpha,\beta} \varphi^\alpha_{\bar{\beta}}(z, t) \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} d\bar{z}^\beta$$

とかける。そこで

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha,\beta} \varphi^\alpha_{\bar{\beta}}(z, t) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \otimes d\bar{z}^\beta$$

とおく。φ は TM－値 $(0,1)$－形式である．

さて，一般に偏微分作用素 P が与えられたとき，$Pf = 0$ となる関数 f が 局所座標をなる程度に豊富にあるためには，適当な積分可能条件をみたす必要がある．$\bar{\partial}_t$ に対する条件は，

$$\bar{\partial} \varphi(t) = \frac{1}{2} [\varphi(t), \varphi(t)]$$

となる（ $[\ ,\ ]$ は双線型，定義は後出）．$M_0 = M$ とすれば，$\varphi(0) = 0$ だから，

$$\bar{\partial} \frac{\partial \varphi}{\partial t^\alpha} = 0 , \quad t = (t^1, \ldots, t^l)$$

すなわち，$\partial\varphi/\partial t^\alpha$ は，この変形の 0 における接ベクトルであるが，$\bar{\partial} = 0$ なので Dolbeault コホモロジィ群

$$H^1_{\bar{\partial}}(M, \Theta_M) = \{\bar{\partial}\text{－閉 } TM\text{－値 } (0,1)\text{－形式}\} / \bar{\partial}\{(1,0)\text{－ベクトル場}\}$$

の元を定める. というわけで, $H^1(M, \Theta_M)$ は M の(第一位)無限小変形の空間と呼ばれる.

我々の目的のためには, 任意の無限小変形が, 実際にある変形族の原点における接ベクトルで表現できることを示せばよい. このとき族のパラメタ空間の次元は一次元で充分である. このため $\varphi(t)$ を t に関する巾級数

$$\varphi(t) = \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \cdots$$

として構成する. 積分可能条件は,

$$\text{(a)} \quad \bar\partial \varphi_\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1} [\varphi_i, \varphi_{\mu-i}] \qquad (\mu \geqq 2)$$

である. $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1}$ まで定まったとき, (a)$'$ をみたす φ_μ は一意には定まらない. 我々は L^2-ノルムが最小になるようにとる. すなわち,

$$\text{(b)} \quad \bar\partial^* \varphi_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

(特に φ_1 は調和形式になる.) (a)$'$(b) をみたすように φ_μ をとれば, $\varphi(t)$ は $|t|$ が十分小さいとき適当なノルムで絶対収束し, 変形族を定めることが知られている(小平-Nirenberg-Spencer[10])

簡単のため, M の標準束 $K_M := \wedge^n T^*M$, $n = \dim M$, が自明のときを考える. ω を各点で消えない M 上の

正則 n-形式とし，局所正則座標 $z=(z^1,\dots,z^n)$ を

$$\omega = dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n$$

となるようにとっておく。M には，もちろん Ricci-平坦な Kähler 計量を入れておく。証明のアイデアは ω によりベクトル場と $(n-1)$-形式を同一視し，(a)′(b) を $(n-1,1)$-形式の方程式として解くことにある。

ω を用いて，次の同型を考える

$$j : \mathbb{T}M \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n-1}\mathbb{T}^*M, \quad j(X) = i_X\,\omega,$$

ただし

$$i_{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}}\left(dz^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\beta_p}\right) = \begin{cases} (-1)^{i-1}dz^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dz^{\beta_i}}\wedge\cdots\wedge dz^{\beta_p} & \alpha=\beta_i \text{ のとき}, \\ 0 & \alpha\notin\{\beta_1,\dots,\beta_p\} \text{ のとき}. \end{cases}$$

Part 1 ⑤′により，ω は平行であるから，j は等長になる。j は，C^∞ $\mathbb{T}M$-値 $(0,q)$-形式の空間 $A^{0,p}(\mathbb{T}M)$ にまで拡張される

$$j : A^{0,q}(\mathbb{T}M) \longrightarrow A^{n-1,q},$$

$A^{n-1,q}$ は C^∞ $(n-1,q)$-形式の空間　また $[\ ,\ ]$ は，

$$[\ ,\ ] : A^{0,p}(\mathbb{T}M)\times A^{0,q}(\mathbb{T}M) \longrightarrow A^{0,p+q}(\mathbb{T}M),$$

$$\left[\varphi^\alpha_{\bar J}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\otimes d\bar z^J,\ \psi^\beta_{\bar L}\frac{\partial}{\partial z^\beta}\otimes d\bar z^L\right]$$

$$=\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ J,L}}\left\{\varphi^\alpha_{\bar J}\frac{\partial\psi^\beta_{\bar L}}{\partial z^\alpha}-\psi^\gamma_{\bar L}\frac{\partial\varphi^\beta_{\bar J}}{\partial z^\gamma}\right\}\frac{\partial}{\partial z^\beta}\otimes(d\bar z^J\wedge d\bar z^L)$$

と定義される。j により

$$[\ ,\ ] : A^{n-1,p} \times A^{n-1,q} \longrightarrow A^{n-1,p+q}$$

が定まる

<u>補題</u>　$\xi = j(\varphi)$, $\eta = j(\psi)$,　$\varphi, \psi \in A^{0,1}(TM)$ に対し,

$$[\xi, \eta] = \partial(i_\varphi(\eta)) - (\#(\partial\xi)) \wedge \eta + \xi \wedge \# \partial\eta$$

ここで, $\omega = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$ のとき,

$$\# \partial (j(\varphi^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \otimes d\bar{z}^\beta)) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha_\beta}{\partial z^\alpha} d\bar{z}^\beta.$$

これは, $(1,0)$-ベクトル場 X, Y に対し示せば十分である。$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y$ に注意して, H. Cartan の関係式を, $\mathcal{L}_X(i_Y \omega)$ に用いれば出る。

つぎの補題は, よく知られている(例えば [, p.149])

$\partial\bar{\partial}$-<u>補題</u>　ξ をコンパクト Kähler 多様体 M 上の C^∞ (p,q)-形式とする。ξ が $\bar{\partial}$-閉, ∂-完全なら, C^∞ $(p-1, q-1)$-形式 γ で

$$\xi = \partial\bar{\partial}\gamma, \qquad \bar{\partial}^* \partial \gamma = 0$$

となるものがある。

これは, Kähler 多様体上では, d-ラプラシアンと,

$\bar\partial-$, $\bar\partial-$ラプラシアンが, 定数倍を除いて一致することと, Hodge分解を用いればでる。

<u>定理の証明</u>. まず φ_1 は調和形式とする. f は等長で, $\bar\partial$, $\bar\partial^*$ と可換だから, $\eta_1 = f(\varphi_1)$ も調和 $(n-1,1)-$形式となり, 特に $\partial\eta_1 = 0$. 以下 $(n-1,1)-$形式 η_1, η_2, …… を, (a)(b) に対応する条件

(a)′ $\quad \bar\partial\eta_\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1}[\eta_i, \eta_{\mu-i}]$,

(b)′ $\quad \bar\partial^*\eta_\mu = 0$, $\qquad \mu \geq 2$,

に加え

(c) $\quad \partial\eta_\mu = 0$

をみたすようにとれることを示す($\varphi_\mu = f^{-1}(\eta_\mu)$) が (a)(b) をみたす). (a)′(b)′(c) をみたす $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{\mu-1}$ が定まったとする.

$$\xi_\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mu-1}[\eta_i, \eta_{\mu-i}]$$

とおく。

$$\bar\partial\xi_\mu = \frac{1}{2}\sum\left\{[\bar\partial\eta_i, \eta_{\mu-i}] - [\eta_i, \bar\partial\eta_{\mu-i}]\right\}$$

となるが, 各 $\bar\partial\eta_i$, $\bar\partial\eta_{\mu-i}$ に (a)′ を用いると (本質的には, [,] の Jacobi 恒等式により.) $\bar\partial\xi_\mu = 0$ がわかる. また最初の補題と (c) により, ξ_μ は $\bar\partial-$完全となる. $\partial\bar\partial-$補題により

$$\xi_\mu = \bar\partial\partial\gamma_\mu, \qquad \bar\partial^*\partial\gamma_\mu = 0$$

となる $(m-2, 1)$−形式 γ_μ があるから, $\eta_\mu = \partial\gamma_\mu$ とおけば $\eta_1, \dots, \eta_\mu$ は (a)′(b)′(c) をみたす.

一般の場合, すなわち M の標準束 K_M が自明とは限らない場合には, 同型

$$\iota : \Theta M \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{m-1}\Theta^* M) \otimes K_M^{-1}$$

を考える. $c_1(K_M)_{\mathbb{R}} = 0$ なので, K_M は曲率 $\equiv 0$ の計量をもつ (Ricci平坦な Kähler 計量から引きおこされる計量). このとき, K_M^{-1}−値 (p,q)−形式に対し, $\bar\partial$, ∂, d が定義され $\partial\bar\partial$−補題も成り立つ。最初の補題もそのまま成り立つので, 上の議論はそのまま通用する.

2.2. <u>Weil-Peterson計量</u> M を, $c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$ なコンパクト Kähler 多様体とし $\mathfrak{M} \xrightarrow{\pi} S$ をその変形族とする. $T_t S$ は $H^1(M_t, \Theta_{M_t})$ と同一視された ($M_t = \pi^{-1}(t)$). この空間に計量を入れたい. まず, $\mathfrak{M}$ は微分可能多様体の族としては自明なので, $H^2(M_t, \mathbb{R}) = H^2(M_0, \mathbb{R})$. M_t 上の Kähler 形式 Φ_t を,

$$[\Phi_t] = [\Phi_0] \quad \text{in } H^2(M_t, \mathbb{R}) = H^2(M_0, \mathbb{R})$$

対応する計量 g_t は Ricci 平坦, M_t の体積は 1 となるようにとる. 各 $\alpha, \beta \in H^1(M_t, \Theta_{M_t})$ をこの計

量に関する調和 ΘM_t－値 $(0,1)$－形式 φ, ψ で代表させる。

$$g_{WP}(\alpha,\beta) = \int_{M_t} \langle \varphi, \psi \rangle_t \ \Phi_t^{\,n}$$

と定義する（$\langle\ ,\ \rangle_t$ は g_t による内積） Riemann 面の変形のときの Weil-Petersson 計量の一般化である。

2.1 のときと同様に，まず M の標準束 K_M が自明のときを考える．Part 1 の結果により，このとき各 M_t の標準束も自明となる．そこで 2.1 で行ったように φ, ψ を $(n-1,1)$－形式と対応させて考える．ω を M 上の各点で消えない正則 n－形式とする。

$$\omega = a(z)\, dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n$$

$$\varphi = \sum \varphi^{\alpha}_{\beta} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} d\bar{z}^\beta$$

に対し，

$$j(\varphi) = \sum (-1)^{\alpha-1} \varphi^{\alpha}_{\beta}\cdot a\ dz^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dz^\alpha}\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^\beta$$

であった．

命題　φ, ψ が調和 ΘM－値 $(0,1)$－形式のとき，

$$g_{WP}([\varphi],[\psi]) = -\int_M j(\varphi)\wedge\overline{j(\psi)} \Big/ \int_M \omega\wedge\bar{\omega}.$$

これを用いると，次が出る．

<u>定理</u>　標準束が自明なコンパクトKähler多様体の偏極族のWeil-Petersson計量は，Kähler計量となり，その正則断面曲率は負．

実際，ω_t を M_t 上の正則 n-形式で，t に関し正則に動くとすると，Weil-Petersson計量のKähler形式は，

$$\sqrt{-1}\,\bar\partial\partial \log (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(\sqrt{-1})^n\int_{M_t}\omega_t\wedge\overline{\omega_t}$$

で与えられる．くわしくは，Tian[13]またはTodorov[14]を．

References

1 Berger. Sur les groupes d'holonomie ...
Bull. Soc. Math. France 83 (1955), 279-330

2. Bochner Vector fields and Ricci curvature,
Bull. Amer. Math. Soc 52 (1946), 776-797

3 Bogomolov, On the decomposition of Kähler manifolds ...
Math. USSR Sb 22 (1974) (英訳) 580-583

4 —, Hamiltonian Kähler manifolds,
Soviet Math. Dokl. 19 (1978) (英訳), 1462-1465

5 Calabi On Kähler manifolds with vanishing canonical ...
Algebraic Geometry and Topology, Princeton Univ. Press 1957

6 Cheeger-Gromoll, The splitting theorem for manifolds ...
J. Diff. Geometry 6 (1971), 119-128.

7 Griffiths-Harris "Principles of Algebraic Geometry"
John Wiley & Sons, 1978

8 Kawamata, Minimal models and the Kodaira dimension ...
J. Reine Angew. Math 363 (1985), 1-46

9 Kobayashi-Nomizu, "Foundation of Differential
Geometry", John Wiley & Sons, 1963

10 Kodaira-Nirenberg-Spencer On the existence of deformation ...

Ann. Math. 67 (1958), 450-459

11 Matsushima Holomorphic vector fields and the first ...

J. Diff. Geometry 3 (1968), 477-480.

12 Michelsohn Clifford and spinor cohomology of Kähler ...

Amer. J. Math. 102 (1980), 1083-1146

13 Tian Smoothness of the universal deformation space ...

in "Mathematical Aspects of String Theory"

World Scientific, 1987

14. Todorov The Weil-Petersson Geometry of the moduli ...

MPI preprint, 1987 #33

15 Weyl "The classical groups"

Princeton Univ. Press 1939

16 Yau On the Ricci curvature of a compact Kähler ...

Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411

無限次元リー代数の指標のみたす微分方程式

東大理　大栗博司

江口徹氏との共同研究にもとづく話

- Virasoro 代数　$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}$
- Kac-Moody代数 (SU(2))　$[J_n^a, J_m^b] = i\epsilon^{abc} J_{n+m}^c + \frac{k}{2} n \delta_{n+m,0}$

$(c,\ k \in \mathbb{R})$

$L_n = \frac{1}{k+2}\sum_m :J_{n-m}^a J_m^a:$ とおくと

L_n は Virasoro 代数 $\left(c = \frac{3k}{k+2}\right)$ をみたす.

ただし　$:J_n^a J_m^b: = \begin{cases} J_n^a J_m^b, & m>n \\ J_m^b J_n^a, & m \le n \end{cases}$

最高ウェイト表現

Virasoro代数　$|h\rangle$: 最高ウェイトベクトル $\begin{cases} L_n|h\rangle = 0 & (n \ge 1) \\ L_0|h\rangle = h|h\rangle \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ユニタリ表現;}\quad c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \quad (m = 3, 4, 5, \cdots) \\ \qquad h_{r,s} = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)} \quad (1 \le s \le r \le m-1) \\ \qquad m : \text{given} \longrightarrow \#\{h_{r,s}\} = \frac{1}{2}m(m-1) \end{array}\right]$$

既約表現空間 $V_{r,s} = \{ L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots L_{-n_N} |h\rangle \}_{\text{既約部分}}$

例

$c = 1/2 \quad (m=3)$, $\quad h_{2,1} = 1/2$

$|\Psi\rangle = \left(\frac{3}{4}(L_{-1})^2 - L_{-2} \right) |h_{2,1}\rangle$

$\hookrightarrow \quad L_n |\Psi\rangle = 0 \quad (n \geq 1), \quad L_0 |\Psi\rangle = \frac{5}{2} |\Psi\rangle$

$|\Psi\rangle = 0$ という条件を課さないと, 表現が可約になる.

grading ; (L_0 の固有値) $- h$

$|h\rangle$: grade $= 0$

$L_{-1}|h\rangle$: grade $= 1$ etc.

$d_{r,s}(n)$; $V_{r,s}$ の中で grade $-n$ の部分空間の次元

例 $\quad c = 1/2, \quad h_{2,1} = 1/2$

$d_{2,1}(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |h=1/2\rangle$

$d_{2,1}(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L_{-1}|h=1/2\rangle$

$d_{2,1}(2) = 2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (L_{-1})^2|h=1/2\rangle, \; L_{-2}|h=1/2\rangle$

$= 1$ ただし $\left(\frac{3}{4}(L_{-1})^2 - L_{-2}\right)|h\rangle = 0$

指標

$$\chi_{r,s}(\tau) = q^{-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} d_{r,s}(n)\, q^{n+h_{r,s}} = q^{-c/24}\, \mathrm{tr}_{V_{r,s}}\!\left(q^{L_0}\right)$$

$$(q = e^{2\pi i \tau})$$

もし既約性のための条件（上の例ではたとえば $|\Psi\rangle = 0$）
を課さなければ $d_{r,s}(n) = p(n)$ （nの分割数）

$$\chi_{r,s}(\tau) = q^{-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \frac{q^{-c/24}}{q^{1/24}\,\eta(\tau)}$$

実際には $d_{r,s}(n) \leqq p(n)$

$$\chi_{r,s}(\tau) = \frac{\Theta_{(m+1)r-ms,\, m(m+1)}(\tau) - \Theta_{(m+1)r+ms,\, m(m+1)}(\tau)}{\eta(\tau)}$$

$$\left(\Theta_{n,N}(\tau) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{N\left(j+\frac{n}{2N}\right)^2} \right)$$

SU(2) Kac-Moody 代数．　最高ウェイトベクトル $|l\rangle$

$$J_n^a |l\rangle = 0 \ (n \geq 1), \quad J_0^+ |l\rangle = 0, \quad J_0^3 |l\rangle = l\,|l\rangle$$

$$(J_n^{\pm} := J_n^1 \pm i J_n^2)$$

$$l = 0, 1/2, 1, \cdots, k/2$$

$$k : \text{given} \longrightarrow \#\{l\} = k+1$$

$$\left(\begin{array}{c} L_n = \dfrac{1}{k+2} \displaystyle\sum_m :J_{n-m}^a J_m^a: \qquad \left(c = \dfrac{3k}{k+2} \right) \\ \Downarrow \\ L_n |l\rangle = 0, \quad L_0 |l\rangle = \dfrac{l(l+1)}{k+2} |l\rangle \end{array} \right)$$

既約表現空間 $U_\ell = \{ J_{-m_1}^{a_1} \cdots J_{-m_N}^{a_N} |\ell\rangle \}$ 既約部分

$$|\Phi\rangle = (J_{-1}^{+})^{k+1-2\ell} |\ell\rangle$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} J_n^a |\Phi\rangle = 0 \ (n \geq 1), \quad J_0^+ |\Phi\rangle = 0 \\ J_0^3 |\Phi\rangle = (k+1-\ell) |\Phi\rangle \end{cases}$$

$|\Phi\rangle = 0$ とおかないと既約性に反する.

<u>指標</u>

$$\chi_\ell(\tau; \underset{SU(2)}{\underset{\cap}{e^\gamma}}) = \sum_{n,\ell'} d(n,\ell') \chi_{\ell'}(e^\gamma) q^{n+h-c/24}$$

$$= q^{-c/24} \operatorname{tr}_{U_\ell} (e^\gamma q^{L_0})$$

$$\left(\begin{array}{ll} d(n,\ell') : & \text{grade } n \text{ で } SU(2) \text{ のスピン } \ell' \text{ 表現} \\ & \text{が何個あるか.} \\ \chi_{\ell'}(e^\gamma) : & SU(2) \text{ のスピン } \ell' \text{ 表現の指標.} \end{array} \right.$$

モジュラ変換　$\tau \to \tau+1$, $\tau \to -\frac{1}{\tau}$

$\underline{\tau \to \tau+1}$

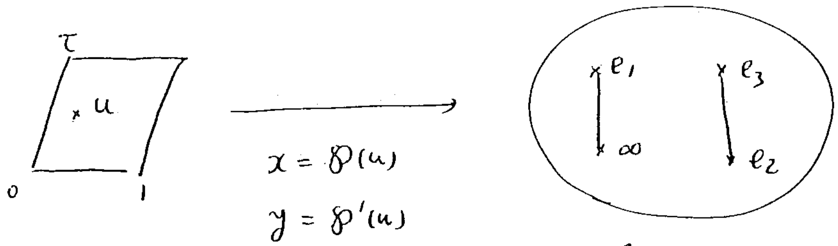
$$\begin{cases} \chi_{r,s}(\tau+1) = e^{2\pi i\left(h_{r,s} - \frac{c}{24}\right)} \chi_{r,s}(\tau) \\ \chi_\ell(\tau+1; e^\gamma=1) = e^{\frac{2\pi i}{k+2}\left(\ell(\ell+1) - \frac{k}{8}\right)} \chi_\ell(\tau; e^\gamma=1) \end{cases}$$

$\underline{\tau \to -1/\tau}$

$$\chi_{r,s}(-1/\tau) = \sum_{1\le s'\le r'\le m-1} M_{rs;r's'}\, \chi_{r's'}(\tau)$$

$$\chi_\ell(-1/\tau; e^\gamma=1) = \sum_{0\le \ell'\le k/2} N_{\ell\ell'}\, \chi_\ell(\tau; e^\gamma=1)$$

λ: algebraic modulus.　$\lambda = 16\, q^{1/2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+q^n}{1+q^{n-1/2}} \right)^8$



$$y^2 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

$$\lambda = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

モジュラ変換　$\tau \to \tau+1 \iff \lambda \to 1-\lambda$

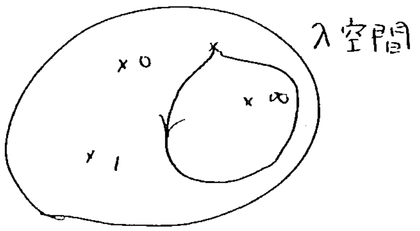
$\tau \to 1/\tau \iff \lambda \to \dfrac{1}{1-\lambda}$

$\chi_{r,s}(\tau)$, $\chi_\ell(\tau)$ のモジュラ変換性

$\Downarrow$

$\tilde{\chi}_{r,s}(\lambda) \doteqdot \chi_{rs}(\tau(\lambda))$ のモノドロミ性

$\tilde{\chi}_\ell(\lambda) \doteqdot \chi_\ell(\tau(\lambda))$



Riemann-Hilbert 対応

λについてのモノドロミ性

$\Downarrow$

$\exists$ Fuchs型常微分方程式.

モジュラ変換性から ~~微分~~ 指標が微分方程式をみたすことが期待される。

それでは, そのような微分方程式は表現論的にどのような意味を持つのか.

Virasoro 代数の場合

一般に

ϕ_m ; $[L_n, \phi_m] = (n(h-1)-m)\,\phi_{n+m}$

$\Downarrow$

$\phi(z) \equiv \sum_m \phi_m z^{-m-h}$; $[L_n, \phi(z)]$

$$= \left(z^{n+1}\frac{d}{dz} + (n+1)h z^n\right)\phi(z)$$

$$\begin{cases} L_n \ : \ \text{座標変換} \quad z \to z + \varepsilon z^{n+1} \ (|\varepsilon| \ll 1) \ \text{の生成子} \\ \phi(z) \ : \ h\text{-形式} \quad \phi(z)(dz)^h \end{cases}$$

これと比較すると

$$L_m \ ; \ [L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \underbrace{\frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m}}$$

$\Downarrow$

$T(z) \equiv \sum_m L_m z^{-m-2}$; ほとんど 2 形式

$$z \to w = f(z) \ ; \ T(w)(dw)^2 = \left(T(z) - \frac{c}{12}\{f, z\}\right)(dz)^2$$

$$\left(\{f, z\} \equiv \frac{d^3f}{dz^3}\Big/\frac{df}{dz} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2f}{dz^2}\Big/\frac{df}{dz}\right)^2\right)$$

以下では

$q^{-c/24}\mathrm{tr}_{V_{r,s}}(q^{L_0}\,T(z_1)\cdots T(z_N))$ を計算する.

まず計算をする前に

<u>observation</u>

$$\mathrm{tr}(q^{L_0} L_n T(z_1)\cdots T(z_N)) = \mathrm{tr}(q^{L_0} T(z_1)\cdots T(z_N)\, q^{-n} L_n)$$

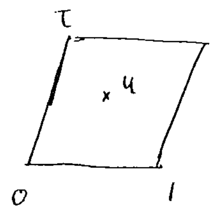
$$\Big\downarrow \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} \times$$

$$\mathrm{tr}(q^{L_0} T(z) T(z_1)\cdots T(z_N))$$
$$= \mathrm{tr}(q^{L_0} T(z_1)\cdots T(z_N)\, q^2 T(qz))$$

周期性 ; $T(qz) = q^{-2} T(z)$

$T(e^{2\pi i} z) = T(z)$

$z = e^{2\pi i u}$ とおくと $\begin{cases} z \to qz \Leftrightarrow u \to u+\tau \\ z \to e^{2\pi i} z \Leftrightarrow u \to u+1. \end{cases}$



u : トーラス上の座標とみなせる.

そこで T を u で書いてみる

$$T(z)(dz)^2 = \Big(T(u) - \frac{c}{12}\underbrace{\{z, u\}}_{-(2\pi i)^2/2}\Big)(du)^2.$$

$$T(u) = (2\pi i)^2\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n e^{2\pi i n u} - \frac{c}{24}\Big)$$

$\langle T(u_1)\cdots T(u_N)\rangle \equiv q^{-c/24}\mathrm{tr}_{V_{r,s}}\left(q^{L_0}\,T(u_1)\cdots T(u_N)\right)$ の計算

<u>$N=0$</u> $\quad \langle 1\rangle = q^{-c/24}\mathrm{tr}(q^{L_0}) = \chi_{r,s}(\tau)$

<u>$N=1$</u> $\quad \langle T(u)\rangle$

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(q^{L_0}L_n) = q^{-n}\mathrm{tr}(q^{L_0}L_n) = 0 \quad (n\neq 0) \\ \mathrm{tr}(q^{L_0}L_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{tr}(q^{L_0}) \end{cases}$$

$$\therefore\ q^{-c/24}\mathrm{tr}\left(q^{L_0}T(u)\right) = q^{-c/24}\mathrm{tr}\left(q^{L_0}(2\pi i)^2(L_0 - c/24)\right)$$

$$= 2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\chi_{r,s}(\tau)$$

$$\langle T(u)\rangle = 2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\chi_{r,s}(\tau)$$

<u>$N=2$</u> $\quad \langle T(u)\,T(v)\rangle$

$$\mathrm{tr}(q^{L_0}L_nL_m) = q^{-n}\mathrm{tr}(q^{L_0}L_mL_n)$$

$$= q^{-n}\mathrm{tr}\Big[q^{L_0}\Big(L_nL_m + (m-n)L_{n+m} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n}\Big)\Big]$$

$\therefore\ n\neq 0$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\, q^{L_0}L_nL_m = \delta_{n+m,0}\frac{q^n}{1-q^n} \times \mathrm{tr}\, q^{L_0}\Big(2nL_0 + \frac{c}{12}(n^3-n)\Big)$$

$$= \delta_{n+m,0} \frac{q^n}{1-q^n}$$

$$\times \left(2n \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \right) \operatorname{tr} q^{L_0}$$

$n = m = 0$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tr} (q^{L_0} L_0 L_0) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \operatorname{tr} q^{L_0}$$

$\therefore \langle T(u)\, T(v) \rangle$

$$= \left[(2\pi i)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2 (\wp'(u-v) + 2\eta_1)\, 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{c}{12} \wp''(u-v) \right] \chi_{r,s}(\tau)$$

$$\left(\Rightarrow \quad u \sim v \; ; \quad T(u)\, T(v) \sim \frac{c/2}{(u-v)^4} \right)$$

一般に

$\langle T(u)\, T(v_1) \cdots T(v_N) \rangle$

$$= \left[2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{m=1}^{N} \left(2(\wp'(u-v_m) + 2\eta_1) + (\zeta(u-v_m) + 2\eta_1 v_m) \frac{\partial}{\partial v_m} \right) \right]$$

$$\times \langle T(v_1) \cdots T(v_N) \rangle$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \frac{c}{12} \wp''(u-v_m) \langle T(v_1) \cdots \widehat{T(v_m)} \cdots T(v_N) \rangle$$

$$\left(\Rightarrow \quad T(u)\, T(v) \simeq \frac{c/2}{(u-v)^4} + \left(\frac{2}{(u-v)^2} + \frac{1}{u-v} \frac{\partial}{\partial v} \right) T(v) + \cdots \right)$$

$^\forall v$：トーラス上の座標，$T(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_n \cdot (u-v)^{-n-2}$

とすると

$$[\ell_n, \ell_m] = (n-m)\,\ell_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\,\delta_{n+m,0}$$

cf. $T(u) = (2\pi i)^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n e^{2\pi i n u} - \frac{c}{24} \right)$

$\{\ell_n\}$ と $\{L_n\}$ とは複雑な関係式で結びついているにもかかわらず全く同じ代数をみたす。

（Virasoro 代数の内部自己同型）

$$\langle T(u_1) \cdots T(u_N) \rangle = \sum_{n_1 \cdots n_N} \langle \ell_{n_1} \cdots \ell_{n_N} \rangle (u_1-v)^{-n_1-2} (u_2-v)^{-n_2-2} \cdots (u_N-v)^{-n_N-2},$$

$u_i \sim u_j$ 以外では正則

$\Rightarrow \quad \ell_n = 0 \quad (n \geq -1)$

$\ell_n = 0 \ (n \geq 0)$ は指標 $\chi_{r,s}(\tau)$ が

Virasoro 代数の $h=0$ 表現

$(L_n|h=0\rangle = 0 \ (n \geq 1),\ L_0|h=0\rangle = 0)$

を実現することを意味する.

一般に $\quad h_{r,s} = \dfrac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)}$

$\downarrow$

grade $r \cdot s$ に特別なベクトルが存在して、

これを 0 とおかないと表現が既約にならない

(たとえば $c = 1/2$, $h_{2,1} = 1/2$ では grade 2×1 で

そのようなことがおこった)

$\forall m \;;\quad h_{1,1} = h_{m-1,m} = 0$

$\Downarrow$

grade 1 と $m(m-1)$ に特別なベクトルが存在する

$$\begin{cases} L_{-1} | h=0 \rangle = 0 \\ (L_{-m(m-1)} + \cdots) | h=0 \rangle = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

指標 $\quad \chi_{r,s}(\tau) = q^{-c/24}\, tr(q^{L_0})$ について

$$\begin{cases} q^{-c/24}\, tr(\ell_{-1}) = 0 & \Leftarrow \text{自明な式} \\ q^{-c/24}\, tr(\ell_{-m(m-1)} + \cdots) = 0 & \Leftarrow \text{微分方程式になる} \end{cases}$$

例　$c = 1/2 \ (m=3)$，　$m(m-1) = 6$

$$\langle 64 (l_{-2})^3 + 93 (l_{-3})^2 - 264\, l_{-4} l_{-2} - 108\, l_{-6} \rangle$$

$$= 64 \left[(2\pi i)^3 \frac{d^3}{d\tau^3} + 12\,\eta_1 (2\pi i)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} + \left(24\,\eta_1 - \frac{25}{64} g_2\right) 2\pi i \frac{d}{d\tau} - \frac{23}{4\times 64} g_3 \right] \chi_{r,s}(\tau)$$

$$= -64\times 8\,(e_1 - e_2)^3 \lambda^3 \times \left[\frac{d^3}{d\lambda^3} + \frac{2(2\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)} \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{391(\lambda^2-\lambda)+7}{8\times 24\,\lambda^2(\lambda-1)^2} \frac{d}{d\lambda} - \frac{23(\lambda-2)(\lambda+1)(2\lambda-1)}{24^3 \lambda^3 (\lambda-1)^3} \right] \times \chi_{r,s}(\tau(\lambda))$$

$$= 0$$

Fuchs型常微分方程式

$\lambda = 0, 1, \infty$ ：　確定特異点

解空間 3次元 $\Leftrightarrow$ 最高ウェイト表現 $\frac{1}{2} m(m-1)$ $\overset{\shortparallel}{}$ 3個

一般に方程式の次数は $\frac{1}{2} m(m-1)$ で最高ウェイト表現の数と一致．

Kac-Moody 代数の場合

$$\langle J^{a_1}(u_1)\cdots J^{a_N}(u_N)\rangle := q^{-c/24}\,\mathrm{tr}\,(e^{\gamma} q^{L_0} J^{a_1}\cdots J^{a_N})$$

$$J^a(u) = 2\pi i \sum_n J_n{}^a\, e^{2\pi i m u}.$$

$$\langle 1\rangle = \chi(\tau, e^{\gamma}) \qquad e^{\gamma}\in SU(2)$$

$$\langle J^a(u)\rangle = 2\pi i\, \mathcal{L}^a \chi(\tau, e^{\gamma})$$

$\mathcal{L}^a$: 群多様体上の
リー微分

一般に

$$\langle J^a(u)\, J^{b_1}(v_1)\cdots J^{b_N}(v_N)\rangle$$

$$= 2\pi i\,\mathcal{L}^a \langle J^{b_1}(v_1)\cdots J^{b_N}(v_N)\rangle$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\langle J^{b_1}(v_1)\cdots J^{b_{n-1}}(v_{n-1})$$

$$\times\left(\frac{k}{2}\partial_{v_n} G(u,v_n)^{ab_n} + G(u,v_m)^{ac}\, i\,\epsilon^{cb_m c'} J^{c'}(v_m)\right)$$

$$\times J^{b_{m+1}}(v_{m+1})\cdots J^{b_N}(v_N)\rangle$$

ただし

$$G(u,v) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i(u-v)}-1}$$

$$+\, 2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{q^n}{e^{\gamma}-q^n}\, e^{-2\pi i(u-v)n} + \frac{q^n}{e^{-\gamma}-q^n}\, e^{+2\pi i(u-v)n}\right]$$

菅原形式 $L_n = \frac{1}{k+2} \sum_m :J_{n-m}^a J_m^a:$

$\Downarrow$

$$T(u) = \frac{1}{k+2} :J^a(u) J^a(u):$$

$$2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} \chi = \langle T(u) \rangle = \frac{1}{k+2} \langle :J^a(u) J^a(u): \rangle$$

$\Downarrow$

群多様体上の熱方程式

$$2\pi i \, \Delta_G (\Pi \chi) = (k+2) \frac{\partial}{\partial \tau} (\Pi \chi)$$

ただし $\Delta_G = \mathcal{L}^a \mathcal{L}^a$

$$\Pi = q^{c/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{\gamma} q^n)$$

$$J^a(u) = 2\pi i \sum_n J_n^a e^{2\pi i n u}$$

$$= \sum_n j_n^a (u-w)^{-n-1}.$$

$$[j_n^a, j_m^b] = i \epsilon^{abc} j_{n+m}^c + \frac{k}{2} n \delta_{n+m,0}$$

($\{J_n^a\}$ と $\{j_n^a\}$ とは同じ代数をみたす)

既約性の条件 $(j^{+}_{-1})^{k+1}|l=0\rangle=0$

$\Downarrow$

$$(\mathcal{L}^{-})^{k+1}\langle(j^{+}_{-1})^{k+1}\rangle\Big|_{e^{\sigma}=1}=0$$

熱方程式とくみあわせると．

指標 $\chi_l(\tau, e^{\sigma}=1)$ についての常微分方程式になる．

<u>例</u>　$k=1$.

$$(\mathcal{L}^{-})^{2}\langle(j^{+}_{-1})^{2}\rangle$$

$$=\frac{24}{5}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\frac{4}{2\pi i}\eta_1\frac{d}{d\tau}-\frac{5}{48}\frac{g_2}{(2\pi i)^2}\right)\chi_l(\tau)$$

$$=\frac{24\times 4(e_1-e_2)^2\lambda^2}{5(2\pi i)^2}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}+\frac{2(2\lambda-1)}{3\lambda(\lambda-1)}\frac{d}{d\lambda}-\frac{5}{12\times 12}\frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2(\lambda-1)^2}\right]$$

$$\cdot\chi_l(\tau(\lambda))$$

$=0$　　超幾何型微分方程式．

一つの解

$$\lambda^{-1/12}(1-\lambda)^{-1/12}\,F(-1/4, 1/4, 1/2;\lambda)$$

$$=\frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}=\chi_{l=0}(\tau)$$

$\chi_{l=1/2}(\tau)$ がもう一つの解になっている．

まとめ

Virasoro 代数，Kac-Moody 代数の指標 $\chi_{r,s}(\tau)$, $\chi_\ell(\tau, \underset{SU(2)}{\overset{\cap}{e^\gamma}})$

は，モジュラ群の有限次元表現をなす

$\Downarrow$

$\chi_{r,s}(\tau(\lambda))$, $\chi_\ell(\tau(\lambda), e^\gamma=1)$ は Fuchs 型常微分方程式の解

一方．

$\chi_{r,s}(\tau) = tr_{V_{r,s}}(g^{L_0})$, $\chi_\ell(\tau, e^\gamma) = tr_{U_\ell}(e^\gamma g^{L_0})$

という表示と，代数の内部自己同型を使うと

$\begin{cases} \chi_{r,s}(\tau) \text{ が Virasoro 代数の } h=0 \text{ 表現} \\ \chi_\ell(\tau, e^\gamma) \text{ が Kac-Moody 代数の } \ell'=0 \text{ 表現} \end{cases}$

を実現することがわかる

$\Downarrow$

表現の既約性の条件が

モジュラ変換性から期待される

微分方程式になる．

hyperkähler manifold と hyperkähler quotient

阪大 理　新田貴士

以下の論説は、N.J. Hitchin, A. Karlehede, U. Lindstrom and M. Rock, "Hyperkähler metrics and supersymmetry" * の中の hyperkähler quotient について紹介するものである。Riemannian manifold が hyperkähler とは その holonomy group が $Sp(n)$ の部分群になる時をいう。今までの所 hyperkähler manifold はあまり例が知られていない。hyperkähler quotient とは、Lie 群の作用している hyperkähler manifold がある時, その manifold を基にして新しい hyperkähler manifold を構成する手法を与えるものである。以下に沿って述べる。

1. hyperkähler manifold の一般論
2. hyperkähler manifold の twistor space
3. symplectic quotient
4. hyperkähler quotient

*) H. K. L. R. Hyperkähler metrices ..., Commun. Math. Phys. 108, 535-589 (1987)

1. hyperkähler manifold の一般論

Def. Riemannian manifold (M, g) が hyperkähler とは、(M, g) が次の条件を満たす3つの complex structure I, J, K を持つ時をいう。

① ∇を(M, g)の Levi-Civita connection とする。その時，I, J, K は metric gについて anti-symmetric で，∇について parallel (i.e., $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$) である。

② $I^2 = J^2 = K^2 = -id$,

$IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$, $KI = -IK = J$。

つまり，各 tangent space $T_m M$ $(m \in M)$ に $\mathbb{H} = \mathbb{R}id + \mathbb{R}I + \mathbb{R}J + \mathbb{R}K$ が act している。その act の下で $T_m M$ は $\mathbb{H}$-module である。また上の定義は次と同値である。

。(M, g) の holonomy group が $Sp(n)$ に reduce する。（holonomy group の定義については，[N. page 50] を参照せよ。）

hyperkähler manifold の例を述べよう。

(i). 最も standard なものは

$$(M, g) = (\mathbb{H}^n, \text{flat metric})$$

である。

(ii) $M = K3$ surface とする。つまり、$c_1 = 0$ かつ $h^{1,0} = 0$ なる complex surface である。今 $c_1 = 0$ より Yau の Theorem を用いて M はある Einstein-Kähler metric g を持つ。しかも、M は compact で $c_1 = 0$ より (M, g) の holonomy group は $SU(2)$ の部分群である。$SU(2) = Sp(1)$ より (M, g) は hyperkähler manifold である。

2. hyperkähler manifold の twistor space

hyperkähler manifold は twistor space と呼ばれる complex manifold を $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-bundle として持つ。以下で twistor space Z を解説しよう。

Def. hyperkähler manifold (M, g) の twistor space Z とは、

$$Z := \{ aI + bJ + cK \in End(TM) \mid a^2+b^2+c^2=1 \}$$

である。

つまり、Z は M 上の S^2-bundle である。その projection を $p: Z \to M$ と書こう。

$Z = M \times S^2$ より その tangent bundle は

$$TZ = TM \oplus TS^2$$

なる分解をうける。Z は、次の様な almost complex structure J_Z をもつ。$\zeta \in Z$ を任意にひとつ fix する。ここで Z から S^2 への projection

を $q: Z \to S^2$ と書こう。すると、

$$T_z Z = T_{p(z)} M \oplus T_{q(z)} S^2$$

である。z は $T_{p(z)} M$ の almost complex structure を与える。さらに、(I, J, K) で S^2 に orientation を定めて S^2 を $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ と同一視すると、S^2 に complex structure が入る。J_2 はその2つの almost complex structure を合わしたものである。

complex manifold に対して antiholomorphic involution を real structure と呼ぶと twistor space Z は次の real structure τ を持つ。

$$\begin{array}{ccccc} \tau: & Z & \to & Z \\ & \cup & & \cup \\ & M \times S^2 \ni (x, v) & \longmapsto & (x, -v) \in M \times S^2 \end{array}$$

Z の complex structure の入れ方から τ が antiholomorphic なる事が容易にわかる。

注. hyperkähler manifold よりもう少し一般的な概念である quaternionic Kähler manifold に対してもその twistor space がもっと一般的に定義できる。

3. symplectic quotient

hyperkähler quotient を説明するために symplectic quotient を説明する。まず最初に symplectic manifold, moment map を説明する。

以下 N を (connected) C^∞-manifold としよう。
Def. Ω が N 上の symplectic form であるとは、Ω は non-degenerate 2-form で d-closed (i.e., $d\Omega = 0$) の時をいう。

例えば Kähler manifold 上の Kähler form は sympectic form である。

(N, Ω) の組を symplectic manifold という。

そこで Lie group G が (N, Ω) に act しているとする。つまり G は N に C^∞ に act して symplectic form Ω を保つ。G の Lie algebra $\mathrm{Lie}\, G$ を $\mathfrak{g}$ と書こう。

$\xi \in \mathfrak{g}$ とする。GはNにact しているので、ξ は N上の vector field ξ_N を定義する。つまり $(\xi_N)_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(\xi)\cdot x \quad (x \in N)$ である。そこで、Gは Ω を保っているので Ω の ξ_N による Lie 微分 $L_{\xi_N}\Omega$ は 0 である。

$$L_{\xi_N} = d \circ i_{\xi_N} + i_{\xi_N} \circ d \quad \text{より}$$

$$(d \circ i_{\xi_N})\Omega + (i_{\xi_N} \circ d)\Omega = 0.$$

今 $d\Omega = 0$ より

$$d(i_{\xi_N}\Omega) = 0$$ 即ち $i_{\xi_N}\Omega$ は d-closed である。

$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の dual space とする。

Def. N から $\mathfrak{g}^*$ への C^∞-map $\psi : N \to \mathfrak{g}^*$ が action $G \curvearrowright (N, \Omega)$ の moment であるとは、

$$d(\psi(\xi)) = i_{\xi_N}\Omega \quad (\xi \in \mathfrak{g})$$

の時をいう。

注 これは、古典力学の運動量、角運動量の一般化である。(くわしくは [Ar. appendix 5] を見よ.)

moment は、constant を除いて

一意的に決まる事がその definition だけからわかる。実際，ψ, ψ' を moment とすると，

$$
\begin{aligned}
d((\psi-\psi')(\xi)) &= d(\psi(\xi)) - d(\psi'(\xi)) \\
&= i_{\xi_N}\Omega - i_{\xi_N}\Omega \\
&= 0 \qquad \text{for each } \xi \in \mathfrak{g} .
\end{aligned}
$$

従って $d(\psi-\psi')=0$ かつ N は connected なので $\psi-\psi'$ は constant である。

具体的な計算により G の N への act と G の $\mathfrak{g}^*$ への coadjoint action は ψ を通じて可換である。

μ を image of ψ とする。G_μ を G の coadjoint action の μ での isotropy subgroup とする.

Def. $P_\mu = \psi^{-1}(\mu)/G_\mu$ を reduced phase space という。

次が成り立つ.

$\mu \in$ image of ψ が次の3つの条件を満たすとする.

(1) $\psi^{-1}(\mu)\ (\subset N)$ が N の submanifold である.

(ii) 各 $n \in \Psi^{-1}(\mu)$ に対して tangent space $T_n(\Psi^{-1}(\mu)) = \ker(d\Psi)_n$ である.

(iii) G_μ は $\Psi^{-1}(\mu)$ に free かつ proper に act する。

その時すぐわかる事は, (i), (ii), (iii) から reduced phase space $P_\mu = \Psi^{-1}(\mu)/G_\mu$ も C^∞-manifold になるが, P_μ は下の条件 (*) を満たす symplectic form Ω_μ を持ちしかも unique である.

> (*) $i_\mu : \Psi^{-1}(\mu) \hookrightarrow N$ を inclusion,
> $\pi_\mu : \Psi^{-1}(\mu) \longrightarrow P_\mu (= \Psi^{-1}(\mu)/G_\mu)$
> を projection とする時,
> $$\pi_\mu^* \Omega_\mu = i_\mu^* \Omega$$ である.

(∵) $\pi_\mu^* \Omega_\mu = i_\mu^* \Omega$ で Ω_μ が定義できる. 実際, $x \in \Psi^{-1}(\mu)$ とすると, (i),(ii) より

$$T_{\pi_\mu(x)}(P_\mu) \simeq T_x(\Psi^{-1}(\mu))/T_x(G_\mu \cdot x)$$

である。 $v_1 \in T_x(G_\mu \cdot x)$, $v \in T_x(\Psi^{-1}(\mu))$ とすると, $\exists \xi \in \mathfrak{g}$ s.t. $v_1 = (\xi_N)_x$ であり、

$$
\begin{aligned}
\Omega(v_1, v) &= \Omega((\xi_N)_x, v) \\
&= (\iota_{\xi_N}\Omega)(v) \\
&= (d\psi(\xi))(v) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって Ω_μ は well-defined であり P_μ 上の 2-form なる事は明らかである．更に

$$
\begin{aligned}
\pi_\mu^*(d\Omega_\mu) &= d(\pi_\mu^*\Omega_\mu) \\
&= d(i_\mu^*\Omega) \\
&= i_\mu^* d\Omega \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$d\pi_\mu$ は surjective より $d\Omega_\mu = 0$ となるので Ω_μ は P_μ 上の symmplectic form である．

また $d\pi_\mu$ の surjective から (*) の条件を用いて Ω_μ は unique に定まる．

4. hyperkähler quotient

(M, g) を complex structure I, J, K をもつ hyperkähler manifold とする。 Lie group G が metric g, complex structures I, J, K を保って N に act しているとする。 $\omega_1 = g(I, \ )$, $\omega_2 = g(J, \ )$, $\omega_3 = g(K, \ )$ を各々 complex structure I, J, K に対応する Kähler form とすると、G は symplectic structures $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を保って M に act している。

そこで ψ_i を symplectic manifold (M, ω_i) に対する moment (map) とする。ψ を

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : M \to \mathfrak{g}^* + \mathfrak{g}^* + \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{g}^*$$

とする。

$\mu \in$ image of ψ とし、μ が G の coadjoint action で不変とする。(そうでない時には G を μ での isotropy G_μ ととればよろしい。) しかも ψ が section 3 の条件 (i) (ii) (iii) を満たすとする。

$M_u := \Psi^{-1}(u)/G$ とおくと section 3 の考察から M_u は C^∞-manifold であり、次を満たす.

(ア) $m \in \Psi^{-1}(u)$ で $d\Psi$ は full rank である.
つまり $d\Psi_m$ が surjective である。
(イ) $\dim_{\mathbb{R}} M_u = \dim_{\mathbb{R}} M - 4 \dim_{\mathbb{R}} G$.
(ウ) g, I, J, K は自然に M_u におちる。
(エ) その structure の下で M_u は hyperkähler である.

$\because$ (ア) $d\Psi_m$ が surjective なることをいう。

$$V := \{ (\xi_M)_m \in T_m M \mid \xi \in \mathfrak{g} \}$$

とおく。その時 $\ker d\Psi_m = (IV \oplus JV \oplus KV)^\perp$ を言おう。 $v \in \ker d\Psi_m$, $(\xi_M)_m \in V$ とおく.

$$\begin{aligned} g(I(\xi_M)_m, v) &= \omega_1((\xi_M)_m, v) \\ &= d(\Psi_1(\xi))(v) = 0 \end{aligned}$$ である.

以下，　J, K についても同じである．また同様にして $IV \perp JV$, $IV \perp KV$, $\cdots$，を得る。逆に $v \in (IV \oplus JV \oplus KV)^{\perp}$ の時，
$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ より　$d\psi(v) = 0$ となる。
そこで

$$\begin{aligned}\dim(\text{image of } (d\psi)_m) &= \dim M - \dim \ker (d\psi)_m \\ &= \dim M - (\dim M - 3\dim V) \\ &= 3\dim V = 3\dim(\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{g}^*)\end{aligned}$$

である。故に $d\psi_m$ は surjective である．

(イ)　(ア) の証明と同様にして $V \perp (IV \oplus JV \oplus KV)$ より　$V \subset \ker d\psi_m = T_m(\psi^{-1}(u))$ である。
故に，

$$\begin{aligned}\dim M_u &= \dim(\text{image of } d\psi_m) - \dim V \\ &= \dim M - 4\dim V \\ &= \dim M - 4\dim G\end{aligned}$$

を得る．

(ウ)　$T_{\pi_u(m)} M_u \simeq (V \oplus IV \oplus JV \oplus KV)^{\perp}$ の下，$V \oplus IV \oplus JV \oplus KV$ が I, J, K で閉じているので，g, I, J, K は自然に $T_{\pi_u(m)} M_u$

の structures g', I', J', K' を与える。

(エ) $T_{\pi_u(m)} M_u \simeq (V \oplus IV \oplus JV \oplus KV)^\perp$ の下，TM_u 上の connection ∇ を TM の Levi-Civita connection $\hat{\nabla}$ から natural に定義する。つまり上の対応を

$$T_{\pi_u(m)} M_u \ni X \quad \leftrightarrow X^\wedge \in (V \oplus IV \oplus JV \oplus KV)^\perp$$

と書くと，$\nabla_X Y \leftrightarrow \hat{\nabla}_{X^\wedge} Y^\wedge$ である．
$\nabla g' = \nabla I' = \nabla J' = \nabla K' = 0$ は ∇, g', I', J', K' の定義から明らか．しかも

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y - \nabla_Y X &= d\pi_u(\hat{\nabla}_{X^\wedge} Y^\wedge - \hat{\nabla}_{Y^\wedge} X^\wedge) \\
&= d\pi_u([X^\wedge, Y^\wedge]) \\
&= [d\pi_u X^\wedge, d\pi_u Y^\wedge] \\
&= [X, Y] .
\end{aligned}$$

よって ∇ は Levi-Civita connection である．

例1 $M = \mathbb{H}^{m+1} \cong \mathbb{C}^{m+1} \oplus j\,\mathbb{C}^{m+1}$

とし、 M に flat な metric, quaternionic structure I, J, K を与える。 G = S^1 とし

$$G \times \mathbb{H}^{m+1} \left(\simeq (\mathbb{C}^{m+1} \oplus j\mathbb{C}^{m+1}) \right) \ni (e^{it}, (z^1, z^2))$$
$$\mapsto (e^{it} z^1, e^{-it} z^2) \in \mathbb{C}^{m+1} \oplus j\mathbb{C}^{m+1} \simeq \mathbb{H}^{m+1}$$

を G の M への act とすると、この時 moment が自然に定義でき hyperkähler quotient がつくれ それは $T^*\mathbb{P}^{2m+1}\mathbb{C}$ 上の hyperkähler structure を与えている。

References

[N] 野水克己　現代微分幾何入門

[Ar] V. I. Arnold　Mathematical methods of classical mechanics.　Springer.

Intersection Theory on Arithmetic Surfaces

上野健爾

§1. Arithmetic curve.

$$B = \operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{generic point.}}}{(0)},\ \underbrace{2, 3, 5, 7, \cdots}_{\substack{\text{素数全体} \\ \| \\ B_0}} \}$$

$f \in \mathbb{Z}$.

$$B_{(f)} := \{ x \in B \mid f(x) \neq 0 \}.$$

$$= B - \{ p \in B_0 \mid p \mid f \}. \quad \text{open set.}$$

$$B_{(f)} \longrightarrow \mathcal{O}_B(B_{(f)}) = \{ \tfrac{a}{f^m} \mid a \in \mathbb{Z} \}$$

この対応によって $\mathcal{O}_B$, sheaf.

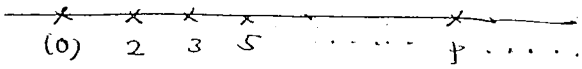
$(B, \mathcal{O}_B)$.

$$\mathcal{O}_{B,0} = \mathbb{Q}$$

$$\mathcal{O}_{B,p} = \mathbb{Z}_{(p)} = \{ \tfrac{b}{a} \mid (p, a) = 1 \}.$$

$\mathbb{Z}_{(p)}$ の maximal ideal $p\mathbb{Z}_{(p)}$

$$\mathbb{Z}_{(p)} / p\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p.$$



Spec $\mathbb{Z}$.

もっと一般に　K　有限次代数体

$K \supset R$　the ring of algebraic integers.

$(\operatorname{Spec} R,\ \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

素数 $\longleftrightarrow$ 素イデアル

例　$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$,　$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$$6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

素因子分解の一意性が成立しない。

$(2) = A^2$　　$A = (2,\ 1+\sqrt{-5})$

$(3) = BB'$　　$B = (3,\ 1+\sqrt{-5})$,　$B' = (3,\ 1-\sqrt{-5})$

$(7) = CC'$　　$C = (7,\ 4+\sqrt{-5})$,　$C' = (7,\ 4-\sqrt{-5})$

$(5) = (\sqrt{-5})^2$.

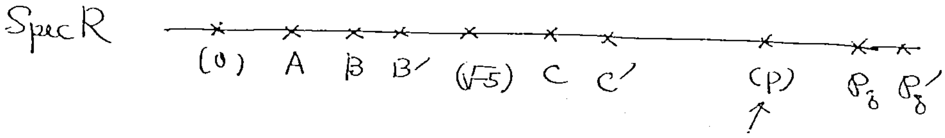
一般に　$p \equiv 1,\ 3,\ 7,$ or $9 \pmod{20}$

$$\Leftrightarrow (p) = \mathfrak{P}_p \mathfrak{P}_p'$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-20}{p}\right) = 1$$

p　上記以外の素数

$\Leftrightarrow$　(p)　R の素イデアル　$\Leftrightarrow \left(\frac{-20}{p}\right) = -1$



$p \not\equiv 1, 3, 7, 9$
$\pmod{20}$

$q \equiv 1, 3, 7, 9$
$\pmod{20}$.

一般に $\mathfrak{p}$ Rの素イデアル

$$\#\left(R/\mathfrak{p}\right) = N(\mathfrak{p}).$$

$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ のとき

$p \not\equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{20}$

$N((p)) = p^2$

$p \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{20}$

$(p) = \mathfrak{p}_p \mathfrak{p}_p' \qquad N(\mathfrak{p}_p) = N(\mathfrak{p}_p') = p.$

Rの有限素点 = Rの素イデアル

無限素点 = $\sigma_\infty : K \subset \mathbb{C}$

特に $\sigma_\infty : K \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
のとき 実素点, そうでないとき虚という.

$R = \mathbb{Z}$ の無限素点　　実素点 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$　1個

$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$　　$\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$

$\sigma_\infty \quad a + b\sqrt{-5} \longmapsto a + b\sqrt{-5}$

$\overline{\sigma_\infty} \quad a + b\sqrt{-5} \longmapsto a - b\sqrt{-5}.$

虚素点　互いにペアになって (complex conjugate で) 出て来る。

$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$

$$R = \left\{ \frac{a+b\sqrt{5}}{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \pmod 2 \right\}$$

無限素点 $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \longrightarrow \mathbb{R}$

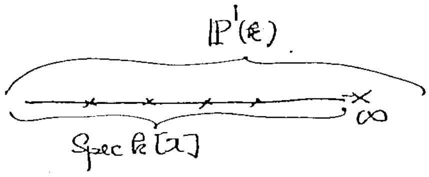
実素点 $\quad \sigma_{\infty_1},\ a+b\sqrt{5} \longrightarrow a+b\sqrt{5}$

$\qquad\qquad \sigma_{\infty_2},\ a+b\sqrt{5} \longrightarrow a-b\sqrt{5}$

$(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}})$ の algebraic geometric な類似物

は $\quad \mathrm{Spec}\, k[x]$, ($k$ 有限体)

これの コンパクト化 $\mathbb{P}^1(k)$.



<u>arithmetic curve</u>

$(\mathrm{Spec}\, R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, R}) + \{$無限素点$\}$.

arithmetic curve 上の line bundle (invertible sheaf) $\qquad$ (metrized line bundle)

$\Longleftrightarrow$

pair $(\mathcal{L}, |\ |_{\sigma_i})$ σ_i 無限素点

$\mathcal{L} \quad (\mathrm{Spec}\, R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, R})$ 上の line bundle

$|\ |_{\sigma_i} \quad \mathcal{L} \otimes_R K_{\sigma_i}$ 上の norm

例). $K=\mathbb{Q}$

$R=\mathbb{Z}$. , $a\in\mathbb{Z}$

$\mathcal{L}_a=(a)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$. $\quad | \ |_{\mathbb{R}}$ 通常の絶対値.

$K_{v_\infty}=\mathbb{R}$ $\quad | \ |_\infty=\alpha_\infty | \ |_{\mathbb{R}}$; $\alpha_\infty>0$.

$(\mathcal{L}, | \ |_{v_i})$ metrized line bundle の degree. (c_1)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{Dfn.}}$ $\alpha\in H^0(\mathrm{Spec}R,\mathcal{L})$

$$\deg(\mathcal{L}\, | \ |_{v_i})=\log\#(\mathcal{L}/R\alpha_{\mathrm{Spec}R})-\sum_i\log|\alpha|_{v_i}$$

注意 $\deg\mathcal{L}$ は α の取り方によらない。(product formula).

$\beta\in H^0(\mathrm{Spec}R,\mathcal{L})$

$\alpha=a\beta$, $\quad a\in K^*=K-\{0\}$.

$$\log\#(\mathcal{L}/R\alpha)-\sum_i\log|\alpha|_{v_i}$$

$$=\log\#(\mathcal{L}/Ra\beta)-\sum_i\log|a\beta|_{v_i}$$

$a\in R$ と仮定すると(この場合に一般の場合は帰着される)

$$=\underbrace{\log N(a)-\sum_i\log|a|_{v_i}}_{=0}+\log\#(\mathcal{L}/R\beta)-\sum_i\log|\beta|_{v_i}$$

例)

$K=\mathbb{Q}$

$R=\mathbb{Z}$ $\quad a\in\mathbb{Z}$

$\mathcal{L}_a=(a)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}R}$ $\quad | \ |_\infty=\alpha_\infty| \ |_{\mathbb{R}}$

$n \in \mathbb{Z}$ に対して　$na \in H^0(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \mathcal{L}_a)$

$$\deg(\mathcal{L}_a, |\ |_\infty) = \log \#(\mathcal{L}/_{\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}} na) - \log \alpha_\infty |na|_{\mathbb{R}}$$

$$= \log \#(\mathcal{L}/\mathbb{Z}a) + \log|n| - \log \alpha_\infty |a|_{\mathbb{R}} - \log|n|$$

$$= -\log \alpha_\infty |a|.$$

以上の例で分かるように　$\mathcal{L}$ が $\mathrm{Spec}\,R$ 上 trivial でも　$|\ |_{\sigma_i}$ の方から Chern class への寄与がある。

ついでに　$\mathcal{L}$ が non-trivial な line bundle の例を与えておく。

例)　$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$

$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$A = (2, 1+\sqrt{-5})$　　R の素イデアル

$\mathcal{L} = A \otimes_R \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,R}$.　　これは non-trivial line bundle.

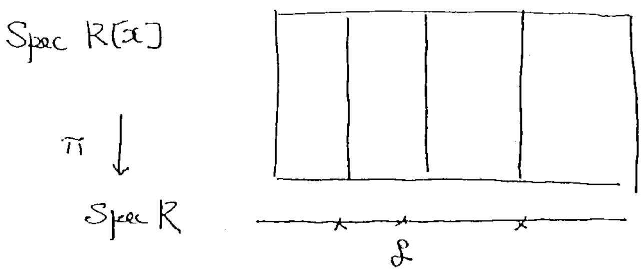
§2 Arithmetic surface.

K alg. number field

$\cup$

R the ring of algebraic integers

$R[x]$. polynomial ring over R.



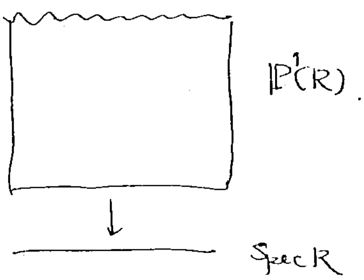
$\mathfrak{p}$ Rの素イデアル

$\pi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}\,(R/\mathfrak{p})[x]$ affine line over $R/\mathfrak{p}$.

これに無限遠をつけ加えたものが $\mathbb{P}^1(R)$.

projective line $/R$. 全体では2次元.

$\mathbb{P}^1(R)$は $\mathrm{Spec}\,R[x]$ $\mathrm{Spec}\,R[y]$ を $x = y^{-1}$ ではり合わせたと考えられる.



同様に $\mathbb{P}^n_R$ n-dim projective space $/R$ が定義できる。

$\mathbb{P}^2_R$ 内に次の方程式で定義される closed subscheme を考える

$$C_a \qquad \xi_0 \xi_2^2 = \xi_1^3 + a.$$

$$a \in R - \{0\}.$$

$x = \dfrac{\xi_1}{\xi_0}$, $y = \dfrac{\xi_2}{\xi_0}$ を使うと

$$y^2 = x^3 + a.$$

$\mathbb{C}$ 上で考えれば これは elliptic curve を定める。

一方 R 上で考えれば

$$\pi : C_a \longrightarrow \operatorname{Spec} R$$

なる natural morphism があり $\operatorname{Spec} R$ 上の elliptic curves の family (arithmetic elliptic surface) と考えられる。

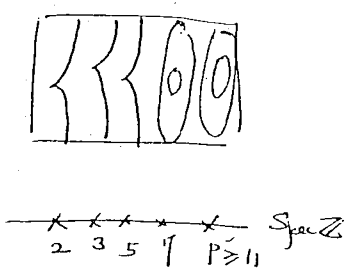
例) $R = \mathbb{Z}$

C_5 : $y^2 = x^3 + 5$.

mod 5 $\quad y^2 = x^3$

mod 3 $\quad y^2 = x^3 + 2$
$\quad = (x+2)^3$

mod 2 $\quad y^2 = x^3 + 1$
$\quad (y+1)^2 = x^3$



C_5 は surface としては regular

以下　R 上の surface $\pi : X \to \mathrm{Spec}\, R$ とは

X　regular 2-dim scheme，π の generic fibre

は smooth curve　かつ π は proper flat of

finite type であるものと仮定する。

上の C_a は　a のとり方によっては必ずしも

regular scheme になるとは限らないが，必ず resolution

によって regular model を作ることができる

Arithmetic surface とは $\pi : X \to \mathrm{Spec}\, R$ を

arithmetic に compact 化したものである。

$$\bar{\pi} : \bar{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R \cup \{無限素点\}$$

無限素点 σ_i 上の fibre　　$X \underset{\mathrm{Spec} R \leftarrow \sigma_i}{\times} \mathrm{Spec}\, K_{\sigma} = X_{\sigma_i}$

（K_{σ_i} 上定義されたリーマン面と考えられる）

$$(X_{\sigma_i}, d\mu_{\sigma_i}) = \bar{\pi}^{-1}(\sigma_i) = F_{\sigma_i}$$

$d\mu_{\sigma_i}$　X_{σ_i} 上の (metric) 正確には Kähler form.

algebraic geometry での曲面論との類似

（正確には adjunction formula）を成立たせる

ためには　$g \geqq 1$ の時のリーマン面 X_{σ_i} の Kähler

form $d\mu_{\sigma_i}$ は　$d\mu_{\sigma_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2g} \sum_{j=1}^{g} \omega_j \wedge \overline{\omega_j}$

ここで $\{\omega_1, \ \ \omega_g\}$ は $H^0(X_{\sigma_i}, \Omega^1_{X_{\sigma_i}})$

の basis で、かつ内積

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \frac{\sqrt{-1}}{2}\int_{X_{\sigma_i}} \omega \wedge \overline{\omega'}$$

に関して正規直交系とする。

<u>Arakelov divisor</u>. D

$$D = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{finite part}}}{D_f} + D_\infty$$

$$D_\infty = \sum_{\sigma_i \in \text{無限素点}} r_{\sigma_i} F_{\sigma_i}$$

Arakelov's principal divisor

$$f \in K(X)$$

$$(f) = (f)_{fin} + \sum_{\sigma_i} v_{\sigma_i}(f) F_{\sigma_i}$$

$$v_{\sigma_i}(f) = \int_{X_{\sigma_i}} -\log|f|_i \, d\mu_{\sigma_i}$$

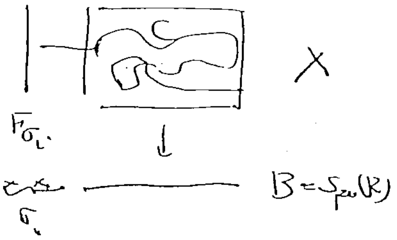
$| \ |_i$ 　 $\overline{K_{\sigma_i}} \cong \mathbb{C}$ の通常の absolute value.

<u>Arakelov intersection theory</u>

° $\langle C, F_{\sigma_i}\rangle = \langle F_{\sigma_i}, C\rangle$ $\quad$ C finite

1) $C \subset \pi$ の fibre

$\langle C, F_{\sigma_i}\rangle = \langle F_{\sigma_i}, C\rangle = 0$



2) $C \not\subset \pi$ の fibre.

$\langle C, F_{\sigma_i}\rangle = m \qquad m = \deg(C \to B)$

$\langle F_{\sigma_i}, F_{\sigma_j}\rangle = \langle F_{\sigma_j}, F_{\sigma_i}\rangle = 0.$

° C_1, C_2 irreducible curves in X.

1) $$\langle C_1, C_2\rangle_{fin} = \sum_{P \in C_1 \cap C_2} \log \#\left(\mathcal{O}_{X,P}/(f_{1,P}, f_{2,P})\right)$$

$C_1 \neq C_2$. $\qquad f_{j,P}$ $\;C_j$ の P の近傍での local equation.

2) $\langle C_1, C_2\rangle_\infty := \sum_{\sigma_i} \langle C_1, C_2\rangle_{\sigma_i}$

C_1 or $C_2 \subset \pi$ の fibre $\Rightarrow \langle C_1, C_2\rangle_\infty = 0$.

C_1 & $C_2 \not\subset \pi$ の fibres. $\qquad$ π の generic fibre

$\downarrow$

generic point of C_i $\qquad$ は $X_0(K(C_i))$ の1点

P_i を定める。 $\sigma_j : K \to \mathbb{C}$ の $K(C_i) \to \mathbb{C}$

への拡張は $[K(C_i) : K]$ 個存在する、

従って P_i は X_{σ_j} 上の $[K(C_i) : K]$ 個の点

$P^\infty_{i,1}, \ldots, P^\infty_{i,g_j}$ を定める

このとき

$$\langle C_1, C_2 \rangle_{\sigma_i} = -\sum_{j,k} \log G_{\sigma_i}(P_{1,j}^{\infty}, P_{2,k}^{\infty})$$

と定義する。　　$G(P, Q)$ はあとで定義する。

<u>Lemma</u>.　$\langle D, (f) \rangle = 0$.

<u>Prop</u> (Arakelov)　　X リーマン面.

P　X 上の点 に対して

次の性質を持つ X 上の函数 $G(P, z)$ が

一意的に定まる.

1)　$G(P, z)$　C^{∞} non-negative real valued function

of z,　$z = P$ で 1位の zero を持つ.

(i.e. $\log G(P,z) - \log|z|$ は $z=P$の近傍で C^{∞})

2)　$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial_z \bar{\partial}_z \log G(P, z) = d\mu$　　$z \neq P$

3)　$\int_X \log G(P, z) = 0$

注)　$-g(P, z) = -\log G(P, z)$ は

$$\frac{\sqrt{-1}}{\pi} \partial\bar{\partial} f = \quad \cdot \Delta f \, d\mu$$

で定まる "Laplacian" Δ の Green function に

なっている。　従って特に $g(P, z) = g(z, P)$

よって　$G(P, Q) = G(Q, P)$ が云える.

例) $X = \mathbb{C}/(1,\tau)$ 周期 $(1,\tau)$ の complex torus.

$$G(z_1, z_2) = \frac{e^{-\pi\{\mathrm{Im}(z_1 - z_2 + \frac{1+\tau}{2})\}^2/\mathrm{Im}\,\tau}\,\theta(\tau, z_1 - z_2 + \frac{1+\tau}{2})}{|\eta(\tau)|}.$$

admissible metrized line bundle $\mathcal{L}$ on an arith. surface $\pi: X \to \mathrm{Spec}\,R$.

line bundle on X + Hermitian metric $\|\ \|_{\sigma_i}$ on $\mathcal{L}$ s.t.

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\bar{\partial}\|s\|_{\sigma_i} = (d\mu_{\sigma_i})\cdot\deg(\mathcal{L}|_{X_{\sigma_i}}).$$

$X_{\sigma_i} \ni P$. $\mathcal{O}_{X_{\sigma_i}}(P)$ の admissible metric $\|\ \|_{\sigma_i}$ として

$$\|1\|_{\sigma_i}(Q) = G(P, Q)$$

(但し 1 は $\mathcal{O}_{X_{\sigma_i}}(P)$ の global section とみた)

を取ることができる。

従って C irreducible curve on X に対して上の intersection theory の時と同様にして $\mathcal{O}_X(C)$ の X_{σ_i} 上の admissible metric を定めることができる。

従って D_{fin} に対して $\mathcal{O}_X(D_{fin})$ の admissible metric が定まる。$D_{fin} + \sum \lambda_{\sigma_i} F_{\sigma_i}$ のときは $\mathcal{O}_X(D_{fin})$ の admissible metric に対して $e^{-\lambda_{\sigma_i}}$ の

factor を かける。これで admissible かくて

{Arakelov Divisor} $\longrightarrow$ {admissible metrized line bundle}

surjective group homomorph が出来, その kernel は Arakelov principal divisor である。よって上述の intersection pairing は admissible metrized line bundle の intersection pairing を与える。

$\mathcal{L}$ admissible metrized line bundle on an arithmetic surface $\pi : X \to \operatorname{Spec} B$ に対して determinant line bundle $\det R\pi_* \mathcal{L}$ $:= \overset{max}{\Lambda} H^0(X, \mathcal{L}) \otimes (\overset{max}{\Lambda} H^1(X, \mathcal{L}))^{-1}$ を $\operatorname{Spec} B$ 上の metrized line bundle として定義したい。そのために次の定理が essential.

<u>Theorem</u> (Faltings) X リーマン面, L line bundle on X with an admissible metric. この時 $\lambda(R\Gamma(X, L))$ 上に次の性質を満たす hermitian metric が unique に定まる.

(1) L_1, L_2 は hermitian line bundles として同型 (共に admissible) $\Longrightarrow$ $\lambda(R\Gamma(X, L_1)) \underset{isometry}{\simeq} \lambda(R\Gamma(X, L_2))$

(2) L の metric が $\alpha > 0$ 倍されると $\lambda R\Gamma(X, L))$ の metric は $\alpha^{\chi(L)}$ 倍される

(3) $D = D_1 + P$. P は X の 1点 とする。このとき

$$\lambda(R\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))) = \lambda(R\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D_1)) \otimes \mathcal{O}(D)[P].$$

(4) $\lambda(R\Gamma(X, \Omega_X^1)) \simeq \Lambda^g \Gamma(X, \Omega_X^1)$ は $\Gamma(X, \Omega_X^1)$ の上述の内積より induce される metric で isometry.