１９８９年度談話会アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by A. Arai

Series ♯ 18. June, 1990

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.

♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.

♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.

♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.

♯ 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.

♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.

♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何 " 研究集会報告集,1988.

♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.

♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.

♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.

♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.

♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.

♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

1989年度 談話会アブストラクト

Fixed point theory for surface maps.

Boju Jiang

Abstract of a talk at Hokkaido Univ.

Dimension 2 is a special dimension in fixed point theory. For self-maps of compact manifolds of other dimensions, the Nielsen fixed point theory gives us the best lower bound for the number of fixed points in the homotopy class, while counter-examples exist on surfaces.

After brief introduction to Lefschetz and Nielsen fixed point theory, the special difficulty in dimension 2 is discussed, as a typical phenomenon in low dimensional topology. Braids are used to convert the problem into an algebraic one. Some ad hoc examples are exhibited. A general consideration using commutator analysis shows that in dimension 2 the classical Nielsen theory invariants are only the first obstructions.

（談話会）　川又雄二郎

3次元代数多様体の極小モデルの存在定理の証明が最近完成した：任意の $\mathbb{C}$ 上の3次元代数多様体に対してそれと双有理同値な射影多様体 X で次の条件をみたすものが存在する

(1) X は高々 $\mathbb{Q}$-分解的末端特異点のみをもつ

(2) K_X は数値的に非負となるか，又は2次元以下の射影多様体 Y への全射正則写像 $f: X \to Y$ で $-K_X$ が f-豊富かつ $\rho(X/Y)=1$ となる。

この講演ではこの定理の意味，応用および関連する未解決問題などについて述べてみたい。

Some Remarks on the Poisson Kernels

By Weiping Yin

I. Poisson Kernel is Annihilated by an Invariant Differential Operator which is Different From the Laplace-Beltrami Operator

If D is a bounded homogeneous domains in $\mathbb{C}^n$, Δ - the Laplace-Beltrami operator with Bergman metric, $P(\zeta, u)$ - the Poisson kernel of D. It is well known that $\Delta P(\zeta, u) = 0$ iff D is symmetric. But for the non-symmetric homogenous domains, we can find an invariant differential operator (different from the Laplace-Beltrami operator) such that the Poisson kernel is annihilated by this operator.

For example, let

$$V=\left\{X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \,\middle|\, X>0,\ x_{ij}\in\mathbb{R}\right\},\quad D(V)=\left\{Z=\begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & 0 \\ \zeta_{13} & 0 & \zeta_{33} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathrm{Im}\, Z\in V\right\}$$

Then domain $D(V)$ is a non-symmetric homogeneous domain in $\mathbb{C}^5$.

The Poisson kernel of $D(V)$ is

$$P_*(Z, U)=\frac{|\zeta_{22}-u_{22}|\,|\zeta_{33}-u_{33}|\,\det(Z-\bar{Z})^2}{|\det(Z-U)|^4(\zeta_{22}-\bar{\zeta}_{22})^{1/2}(\zeta_{33}-\bar{\zeta}_{33})^{1/2}}$$

and

$$\Delta^*=a(Z)\left[\frac{\zeta_{11}-\bar{\zeta}_{11}}{2i}\frac{\partial^2}{\partial\zeta_{11}\partial\bar{\zeta}_{11}}+\frac{\zeta_{22}-\bar{\zeta}_{22}}{8i}\frac{\partial^2}{\partial\zeta_{12}\partial\bar{\zeta}_{12}}+\frac{\zeta_{12}-\bar{\zeta}_{12}}{4i}\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta_{11}\partial\bar{\zeta}_{12}}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{\zeta}_{11}\partial\zeta_{12}}\right)+\frac{\zeta_{13}-\bar{\zeta}_{13}}{4i}\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta_{11}\partial\bar{\zeta}_{13}}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{\zeta}_{11}\partial\zeta_{13}}\right)\right],$$

where

$$a(Z)=\frac{\zeta_{11}-\bar{\zeta}_{11}}{2i}-\frac{(\zeta_{12}-\bar{\zeta}_{12})^2}{2i(\zeta_{22}-\bar{\zeta}_{22})}-\frac{(\zeta_{13}-\bar{\zeta}_{13})^2}{2i(\zeta_{33}-\bar{\zeta}_{33})},$$

is an invariant differential operator. But we have

$$\Delta^* P_*(Z, U)=0, \quad \text{for } Z\in D(V),\ U\in \text{Silov boundary of } D(V)$$

II. The Characterizations of Bounded Symmetric Domains By Means of the Poisson Kernels

Let D be the bounded homogeneous domain in $\mathbb{C}^n$, $T(z,\bar{z})$ the Bergman metric matrix, $P(z,u)$ Poisson kernel of D. and let

$P_j = [P(z,u)]^{1/j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$L(u) = T^{-1}(z,\bar{z})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right),$$

then we have

1. $L_j(u) = \{$the sum of all principle minors of degree j for $L(u)\}$ is the invariant differential operator under the group $Aut(D)$,
2. $L_j(P_j) = 0$ iff D is symmetric for any fixed j $(1 \le j \le n)$

III. Poisson Kernels on the Exceptional Cartan Domains

For the exceptional Cartan domains of dimension 16 and 27. We obtain the Bergman kernels, Cauchy kernels and Poisson kernels for them.

横断的な方向に幾何構造をもった余次元1葉層について

千葉大・教養　稲葉尚志

余次元1葉層の定性理論（葉が他の葉に巻き付く様子を調べること）は，'80年代前半までに 西森，土屋，Hector，Cantwell-Conlon らによって非常によく整備された。現在では，<u>例外葉</u>（exceptional leaf）及び<u>弾性葉</u>（resilient leaf）の構造の解明のみが，難解さの故に残されているという状況になっている。例外葉とは，横断的曲線によって，その閉包を切ると Cantor 集合になる葉のことであり，弾性葉とは，自身のホロノミーで自分自身を巻き込む葉のことである。

これらの構造に立ち入るには，今迄の手法だけでは限界があり，新しい見地の開拓が強く望まれる。私としては，それを次のような候補の中から模索中である。

方法1．トポロジー外から強力な道具を導入する。—— 例えば C^*-代数，微分幾何などから。

方法2．（楽観的）予想をたて，それの解決に努力する。—— 例えば，例外極小集合のマルコフ性．

方法3．制限された（或いは今迄とは異なった）葉層の族の中で考える。—— transversely geometric foliations, transversely PL foliations.

今日の話は，方法3に相当しますが，残念ながら現時点では，まだ足場固めの段階にしか至っていません．

<u>定義</u>．C^ω多様体 X にリー群 G が効果的，推移的，C^ωに作用する時，対 (G, X) を<u>幾何</u>（geometry）という（Thurston）.

葉層 $\mathcal{F}$ の，横断的方向の局所モデルが幾何であるとき，$\mathcal{F}$ は <u>transversely geometric</u> という.

1次元の幾何は，ユークリッド，アフィン，射影幾何の3通りに限られる(Lie)ので，それに応じて余次元1の transversely geometric 葉層は，transversely euclidean, transversely affine, transversely projective の3種である。

一般に，M上に transversely geometric 葉層 $\mathcal{F}$ があると，ホロノミー表現 $H_{\mathcal{F}} : \pi_1(M) \longrightarrow G$ が定まる．その像 $\Gamma_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の大域ホロノミー群という。$\pi_1(M)$ や $\Gamma_{\mathcal{F}}$ の代数的性質から，例外葉や弾性葉に関する情報がどの程度得られるかについて，以下のような結果を得た。

例外葉について

Example (Hector, I) 閉3多様体上の transversely affine 葉層で，例外葉をもつものがある．

Theorem (Levitt, 松元-I) $\mathcal{F}$ を閉多様体 M 上の transversely projective 葉層とするとき，　$\mathcal{F}$ が例外葉をもつ $\Longrightarrow \pi_1(M) \supset \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

弾性葉について

Theorem (I) $\mathcal{F}$ を閉多様体上の transversely affine 葉層とするとき，
$\Gamma_{\mathcal{F}}$: non abel $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ は弾性葉をもつ．

Theorem (松元-I) $\mathcal{F}$ を閉多様体上の transversely projective 葉層とするとき，
$\Gamma_{\mathcal{F}}$: non solvable $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ は弾性葉をもつ．

Example (松元-I) ある閉3多様体上の transversely projective 葉層 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ で次を満たすものがある．

1) $H_{\mathcal{F}_1} = H_{\mathcal{F}_2}$
2) $\mathcal{F}_1$ は弾性葉をもち，$\mathcal{F}_2$ はもたない．

Lecture

Distortion function and boundary values problem for quasiconformal mappings

by

J. Zając

It is well known that a K-quasiconformal mapping (K-qc) of a Jordan domain G onto another Jordan domain G' can be extended as a homeomorphism of their closures. Then we may say that a K-qc mapping of a Jordan domain G onto another Jordan domain G' has homeomorphic extension of their closures which generates a sens-preserving homeomorphism of the boundary G onto the boundary G'.

In view of invariance of quasiconformal mappings under composition with conformal mappings the boundary correspondence problem for planar qc mappings i.e. the problem of characterizing the induced homeomorphism of $\operatorname{fr} G$ onto $\operatorname{fr} G'$ can be reduced, after suitable conformal mappings to the case $G = G' = H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ and admits in this particular case a very simple and elegant solution. Then the boundary correspondence is determined by a monotone continuous function f in this sens that it mapp $(x, 0)$ onto $(f(x), 0)$, where $f = F_{|\mathbb{R}}$, but F is an K-qc automorphism of H. It is sufficiently to consider the case where f is strictly increasing function which satisfies $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$. According to Beurling and Ahlfors [2], f can be extended to an automorphism of $\bar{H}$ which is K-qc in H, if and only if there exists a constant $\varrho = \varrho(K)$ such that

$$(1) \qquad \frac{1}{\varrho} \le \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \le \varrho$$

for all x, $t \geq 0$.

The function f which satisfies (1) is referred to be ϱ-quasisymmetric function, which term is due to Kelingos [4].

Becouse of Mori's distortion theorem [4] the function $g=g(K)=exp(-\pi K)$.

Then we may consider a class of real functions which are continuous and strictly increasing functions satisfying the condition (1) wihtout any connections with quasiconformal mappings (see [5]). It has been proved by J. Väisölä that the problem of existence of a boundary extension for all qc mappings $F: G \to G'$ between n-dimentional Jordan domains, when they are quasiconformally equivalent to the unit ball $B^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. But unlike to the planar case, even a Jordan domain $G \subset \mathbb{R}^n$ homeomorphic to the unit ball B^n is not necesarily quasiconformally equivalent to B^n when $n \geq 3$. Some examples of quasiconformal mappings without boundary extensions for Jordan domains were obtained by Kuusalo (private comunication).

The necessity of the condition (1) was obtained by considering the modules of quadrilaterals arrising from H by distinguishing four points on the boundary, where one is at the infinity. There are, however, two one-parameter configurations involving point on the boundary, the quadrilateral and a punctured Jordan domain with two distinguished points on the boundary curve, cf. [2], p. 70. Therefore we may expect that the boundary correspondence generated by qc automorphism with one fixed interior point may be described in therms of characteristic conformal invariant of the latter configuration which is the harmonic measure. This is quite natural when the problem of the boundary values is considered for unit disc. Let us note that in the case of the upper half-plane we can make any poin $z_0 \in H$ a fixed point of the qc extension without changing the boundary correspondence This can be done by composing F with a suitable affine mapping $g(w) = aw + b\bar{w}$, $a+b=1$, $|a|>|b|$ of H, that keeps the points of $\mathbb{R}$ unchanged.

Different definitions of quasisymmetric functions.

If we start from the definition of ϱ-quasisymmetric function obtained by Beurling and Ahlfors in 1956 but without the name - which was introduced by Kelingos in 1965), then we have

Definition (B-A)

A strictly increasing continuous function f mapping the real line onto itself is said to be ϱ-qs, if $1 \le \varrho' < \infty$ $\varrho = \inf \varrho'$, if

$$(1') \qquad \frac{1}{\varrho'} \le \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \le \varrho'$$

holds for all $x, t > 0$, ϱ - qs. dilatation

This class of functions can also be characterized by certain compactness property (see [2]).

The properties of quasisymmetric functions parallel rather closely those of quasiconformal mappings. However, they have some shortcomings not shared by quasiconformal mappings. But the importance of quasisymmetric functions to the theory of quasiconformal mappings can not be overstated. We may think of them as of 1-dimentional qc mappings. (for the properties see [4]).

Another definition of qs functions was stated by K.P. Goldberg[3] in 1974. He show that (B-A) condition i really a generalization of convexity-concavity condition, and that we can weaken the assumptions in the definition of quasisymmetry significantly without altering the class of such functions. Then he use this to prove that the class of qs functions is closed under the formation of sums, appropriate products, compositions, This Goldberg's definition can be stated as follows

Definition (G)

Let f be nonconstant function defined on $\mathbb{R}$. Then f is λ-qs on $\mathbb{R}$ if and only if

(i) f is linear,

or

(ii) there exist some λ', $\frac{1}{2} < \lambda' < 1$ such that

$$\lambda' f(x_1) + (1-\lambda') f(x_2) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq (1-\lambda') f(x_1) + \lambda' f(x_2) \tag{2}$$

holds for all x_1, x_2, $x_1 < x_2$ (finite) with $\lambda = \inf \lambda'$. This new number λ we call <u>midpoint dilatation.</u>

Using another conformal invariant which is harmonic measure of an open subarc of $fr\,\Delta$, Krzyż[5](1986) gives a definition of qs for the unit circle. If $fr\,\Delta$ denote the boundary of the unit disc Δ and if f is an automorphism of $fr\,\Delta$, i.e a sense-preserving homeomorphism of $fr\,\Delta$ onto itself. If α is an open subarc of $fr\,\Delta$, then $|\alpha|$ will stand for the harmonic measure $\omega(0, \alpha; \Delta)$.

Definition (K)

We say that f is qs on $fr\,\Delta$ if and only if there exists a constant M such that for any pair α_1, α_2 of disjoint adjacent open subarcs of $fr\,\Delta$ with equal measure $|\alpha_1| = |\alpha_2|$ we have

$$|f(\alpha_1)| \,/\, |f(\alpha_2)| \leq M \tag{3}$$

with $M \geq 1$.

As an application of this new characterization of quasisymmetric functions for unit circle he has obtain a new characterization of quasicircles in therms of harmonic measure.

In 1968 S. Agard and J. Kelingos [1] introduced another, but quite complicated definition of quasisymmedry to build up a parametrical representation of qs functions.

If we denote by $C(0,1,\infty)$ the extended z-plane minus the three points $0, 1, \infty$ and by $z = z(w)$ we denote the familiar elliptic modular function, which maps the upper half-plane H onto $C(0,1,\infty)$ then the hyperbolic density $\rho(z)$ in $C(0,1,\infty)$ is invariantly defined by the relation

$$\rho(z)\,|dz| = |dw| / \operatorname{Im} w .$$

The hyperbolic distance in $C(0,1,\infty)$ is then defined as

$$\rho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \rho(z)\,|dz|$$

where the infimum is taken over all arcs γ jointng z_1 and z_2 in $C(0,1,\infty)$ for which the integral has meaning.

Suppose now that $u = f(x)$ is a sense-preserving automorphism of the real line. Let $x_1 < x_2 < x_3$ and $u_i = f(x_i)$, $i = 1,2,3$. Set

$$a = (\infty, x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1},$$

$$a' = (\infty, u_1, u_2, u_3) = -\frac{u_3 - u_2}{u_2 - u_1}$$

Given $K' \geq 1$, we say that K' is admissible for f if

$$(4) \qquad -\log K' \leq \int_{a}^{a'} \rho(x)\,dx \leq \log K',$$

for all $x_1 < x_2 < x_3$ but $K = \inf K'$ - max. dilatation of f.

Since a and a' are negative, and since the negative real axis is a geodesic line for the hyperbolic density in $C(0, 1\ \infty)$, condition (4) is equivalent to

$$\sigma(a, a') \le \log K . \tag{5}$$

It is easy to show that

$$\sigma(a, a') = \left| \log \frac{\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-a'}}\right)}{\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)} \right|$$

where $\mu(r)$, $0<r<1$, denotes as usual conformal modulus of the unit disc Δ slit along the real axis from 0 to r. This function μ is a continuous, strictly decreasing function wit limits ∞ at 0 and 0 at 1 respectively.

Definition (A-K)

A strictly increasing. continuous function f mapping the real line onto itself is said to be K-qs, if there exists $K', K' \geq 1$ $K = \inf K'$, if it satisfies the condition (5) for all $x_1 < x_2 < x_3$.

This definition brings us some advantages, however it is not easy to vork with it.

When using another conformal invariant, which is a modified cross-ratio, we introduce a new characterization of quasisymmetry sharing all the group properties, like in the case of quasiconforma mappings. Let us note that the form of (1) indicates that the difficulty with (B-A) definition is requirement that $(x_3-x_2)/(x_2-x$ $=1$. This observation that cross-ratios of this type are certain cross-ratio leads us to new definition of quasisymmetry which is good for H and for Δ as well.

The main result

Suppose now that x_1, x_2, x_3, x_4 are points of the real line R or the unit circle $c = \partial\Delta$, which are positively ordered. Then, consider the expression

$$[x_1,x_2,x_3,x_4] = \{[(x_3-x_2)/(x_3-x_1)] : [(x_4-x_2)/(x_4-x_1)]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

THEOREM 1. The expression defined by (6) is invariant under a homography and its values range over $(0,1)$ for each group of four positively oriented points x_1, x_2, x_3, x_4 from the real line or the unit circle.

Proof. When using the well-known decomposition of a homography, we can easily see that it is invariant under a homography in both of the cases considered above. As for the second part of the proof, we may confine ourselves to the case of real and positively ordered x_1, x_2, x_3, x_4. Then there exists a homography of the upper half-plane onto itself such that these points go onto x_1', x_2', x_3', ∞. Since

$$(x_3-x_2)/(x_3-x_1)] : [(x_4-x_2)/(x_4-x_1)] = [(x_3'-x_2')/(x_3'-x_1')], \tag{7}$$

we can see that the values of the last expression belong to the interval $(0,1)$, which completes the proof.

In view of the invariance of $[x_1,x_2,x_3,x_4]$ with respect to a homography, we may replace the disc by the upper half-plane and, without any loss of generality, confine ourselves to the case of this half-plane. Then the boundary correspondence is determined by a strictly increasing continuous function f. Thus we can prove

THEOREM 2. Suppose that F is a K-quasiconformal self-mapping of the upper half-plane onto itself, which preserves the point at infinity and whose boundary function is denoted by f. Then, for each group of four positively oriented points x_1, x_2, x_3, x_4 from the real line R

$$(7) \qquad \phi_{1/K}([x_1,x_2,x_3,x_4]) \le [f(x_1),f(x_2),f(x_3),f(x_4)]$$
$$\le \phi_K([x_1,x_2,x_3,x_4]),$$

where $\phi_K(t)$ is the distortion function on the interval $(0,1)$ defined as $\phi_K(t) = \mu^{-1}(\frac{1}{K}\mu(t))$. The function $\mu(t)$ denotes, as usual, the conformal modulus of the unit disc slit along the real line from 0 to t and is strictly decreasing with the limits ∞ and 0 at 0 and 1, respectively.

Proof. Let F be a K-quasiconformal mapping of the upper half-plane, which preserves the point at infinity and let $-\infty < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \le \infty$ be the given four points of the real line. Then the upper half-plane together with these four points form a quadrilateral $D = U(x_1,x_2,x_3,x_4)$ with a-sides as $\langle x_1,x_2\rangle$ and $\langle x_3,x_4\rangle$, mapped by F onto $D' = U(f(x_1),f(x_2),f(x_3),f(x_4))$. By the definition of K-quasiconformal mappings,

$$(8) \qquad \frac{1}{K} M(D) \le M(D') \le KM(D),$$

where $M(D)$ denotes the conformal modulus of the quadrilateral D. Let h_1 and h_2 be homographies of the upper half-plane onto itself such that $h_1(x_4) = h_2(f(x_4)) = \infty$. Then

$$(9) \qquad M(D) = M(h_1(D)) = \frac{2}{\pi}\mu([h_1(x_3)-h_1(x_2)]/[h_1(x_3)-h_1(x_1)])$$
$$= \frac{2}{\pi}\mu([h_1(x_1),h_1(x_2),h_1(x_3),\infty]) = \frac{2}{\pi}\mu([x_1,x_2,x_3,x_4]),$$

and, similarly,

$$(10) \qquad M(D') = \frac{2}{\pi}\mu([f(x_1),f(x_2),f(x_3),f(x_4)]).$$

When introducing these expressions to (8), we have

$$(11) \qquad \frac{1}{K}\mu([x_1,x_2,x_3,x_4]) \le \mu([f(x_1),f(x_2),f(x_3),f(x_4)])$$
$$\le K\,\mu([x_1,x_2,x_3,x_4]).$$

By composing (11) with μ^{-1} we arrive at (7).

Now, suppose that f is a strictly increasing continuous function of the real line R, which satisfies the inequality (7) for each $-\infty < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \le \infty$. Let us put $x_1 = x - t$, $x_2 = x$, $x_3 = x - t$, and $x_4 = \infty$, $t > 0$. Then, by (6) we have

$$\phi_{1/K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 1/\sqrt{1 + [f(x)-f(x-t)]/[f(x+t)-f(x)]} \le \phi_K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{12}$$

by which

$$\phi_K^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \le [f(x)-f(x-t)]/[f(x+t)-f(x)] \le \phi_{1/K}^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1.$$

Since $\phi_K^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \lambda(K)$, then

$$\frac{1}{\lambda(K)} \le [f(x+t)-f(x)]/[f(x)-f(x-t)] \le \lambda(K). \tag{13}$$

It means that f is a $\lambda(K)$-quasisymmetric function in the sense of Beurling and Ahlfors. Such a function can be extended to a K'-quasiconformal mapping of the upper half-plane onto itself, where K' depends only on K.

Let us denote by $\mathcal{N}(K)$ the class of all continuous, strictly increasing functions f of the real line R onto itself, which satisfies the inequality (7) for each group of four positively oriented points x_1, x_2, x_3, x_4 with a constant $K > 1$.

<u>Remarks</u>

The trivial consequence of this definition is that if:

(a) $f_1 \in \mathcal{N}(K_1)$ and $f_2 \in \mathcal{N}(K_2)$, then $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{N}(K_1 K_2)$;

(b) $f \in \mathcal{N}(K)$, then $f^{-1} \in \mathcal{N}(K)$;

(c) $f \in \mathcal{N}(K)$ and $f(\infty) = \infty$, then $f \in N(\rho)$ with $\rho = \lambda(K)$;

(d) $f \in N(\rho)$, then $f \in \mathcal{N}(K)$, where $K \le \min\{\rho^{\frac{3}{2}}, 2\rho - 1\}$;

(e) $f \in N(\rho)$, then $f^{-1} \in N(\rho')$, where $\rho' \le \lambda(\min\{\rho^{\frac{3}{2}}, 2\rho - 1\})$;

(f) $f_1 \in N(\rho_1)$ and $f_2 \in N(\rho_2)$, then $f_1 \circ f_2 \in N(\rho')$, where $\rho' \le$ $\le \lambda(\min\{\rho_1^{\frac{3}{2}}, 2\rho_1 - 1\} \cdot \min\{\rho_2^{\frac{3}{2}}, 2\rho_2 - 1\})$.

Another fact is that the total collection of quasisymmetric functions remains the same under either Definition (B-A) or (7). It follows from the observation that $K(f)$, as the infimum of all numbers K for which (7) holds, remains finite if and only if $\rho(f) < \infty$. Now it is easy to note that we have other advantages which are a consequence of our definition. Some of the problems which are very important in the investigation of the class $N(\rho)$ have trivial solutions when investigating the class $\mathcal{N}(K)$. Several properties of the function of the class $N(K)$ are immediate consequences of the well-known properties of the distortion function $\phi_K(t)$. Moreover, the investigation of the class $N(K)$ whether on the real line or on the unit circle makes no difference.

References

[1] AGARD, S., J.A. KELINGOS, On parametric representation for quasisymmetric functions, Mich. Math. J. (1968), 446-456.

[2] BEURLING, A., L.V. AHLFORS, The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math. 96 (1956), 125-142.

[3] GOLDBERG, K.P., New definition for quasisymmetric functions, Mich. Math. J. (1974), 49-62.

[4] KELINGOS, J.A., Boundary correspondence under quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A.I] 413 (1966), 1-15.

[5] KRZYŻ, J.G., Boundary correspondence under quasiconformal mappings revisited, to appear.

[6] LEHTINEN, M., Remarks on the maximal dilatation of Beurling-Ahlfors extension, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A.I.] 9 (1984).

[7] PARTYKA, D., J. ZAJAC, An estimate of the integral of quasisymmetric functions, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska Sectio A, Vol. XL 18 (1986), 171-183.

On the Yamabe Problem

by

Patricio Aviles[1]

Abstract: We give an account of the Yamabe problem in Riemannian manifolds.

A basic question in Riemannian geometry is whether a Riemannian manifold (compact with or without boundary or complete) may be conformally deformed to achieve constant scalar curvature. In the case of compact manifolds this is known as the Yamabe Problem because Yamabe claimed in 1960 to have proven the result. In the late 60's N. Trudinger found a deficiency in Yamabe's original proof, namely the following. We consider the conformal deformation of the form $g' = \phi^{4/(n-2)}g$ and assume the scalar curvature of g' is constant, then $\phi > 0$ satisfies the equation

$$(1) \qquad 4(n-1)/(n-2)\Delta\phi + R\phi = c\phi^{(n+2)/(n-2)}.$$

To solve (1), Yamabe used the variational method, he considered the functional for $2 \le q \le \frac{2n}{(n-2)}$,

[1]Partially supported by an NSF grant.

(2) $$J_q(\phi) = [4\,\frac{(n-1)}{(n-2)}\int_M \nabla^i\phi\nabla_i\phi dv + \int_M R(x)\phi^2 dv]\,\|\phi\|_q^{-2}$$

where $2 \leq q \leq N = \frac{2n}{(n-2)}$ and M is the manifold into consideration. He then considered $\mu_q = \inf J_q(\phi)$ for all $\phi \geq 0$, $\phi \not\equiv 0$ that belongs to $H^1(M)$.

Then Yamabe proved that for $2 < q < N$, there exists a C^∞ strictly positive function ϕ_q satisfying

(3) $$4\,\frac{(n-1)}{(n-2)}\,\Delta\phi_q + R\phi_q = \mu_q\phi_q^{q-1}, \|\phi_q\|_q = 1.$$

He then claimed the inequality $\|\phi_q\|_{q_n} \leq c\|\phi_q\|_{q_1}$, which will show by letting $q_n \to \infty$ that ϕ_q are uniformly bounded and hence we can let $q \to N$ to achieve the result. However for the sphere the inequality is wrong. In the negative case $\mu_q < 0$ Trudinger [T] overcame the mistake. In the positive case, $\mu_q > 0$, the problem is more difficult.

Aubin in the late 70's showed one important case of the Yamabe problem by examining the local geometry. His result can be stated as follows.

<u>Theorem</u> 1 (Aubin [Au]). If M_n $(n \geq 6)$ is a compact non-locally conformally flat Riemannian manifold, then (1) has a C^∞ nontrivial solution with $c > 0$.

The remaining cases were open for several years, until R. Schoen [S1] in 1984 by a delicate study of the global geometry solved them. His theorem can be stated as follows.

Theorem 2 (Schoen [S1]). If M_n $(n = 3,4,5)$ is any compact manifold then (1) has C^∞ nontrivial solution with $c > 0$. The same holds if $n \geq 6$ and M is a locally conformally flat Riemannian manifold.

In the case of manifolds with boundary, the main difficulty in understanding (2), when $q = N$, is that the conformal change has to be compatible with the boundary conditions imposed. A set of natural boundary conditions were studied recently by J. Escobar [E]. His result reads as follows. Consider the functional

$$Q_g(\phi) = \frac{\int_M (|\nabla\phi|^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} R\phi^2)dv + \frac{n-2}{2}\int_{\partial M} h\phi^2 d\sigma}{(\int_M \phi^{\frac{2n}{n-2}} dv)^{\frac{n-2}{n}}}$$

where dv and $d\sigma$ are the Riemannian measure on M and the induced Riemannian measure in ∂M with respect to the metric g, R is the scalar curvature of M and h is the mean curvature of ∂M. Let $Q_g(M)$ be then defined by

$$Q_g(M) = \inf\{Q_g(\phi),\ \phi \not\equiv 0 \in H^1(M)\}.$$

Then it is shown that by proving that the infimum is achieved (when M is not conformally equivalent to S^n_+ with its standard metric)

Theorem 3 (Escobar [E]). Any compact Riemannian manifold with boundary and dimension 3, 4 or 5 is conformally equivalent to one of constant scalar curvature where the boundary is minimal with respect to the new metric. When $n \geq 6$ (i) there exists a non-umbilic point at ∂M, or (ii) the boundary is umbilic and M is locally conformally flat, or (iii) the boundary is umbilic and the Weyl tensor does not vanish identically, the same holds.

It is natural then to study solutions of (1) with higher index (that is no minima solutions). Schoen [S2] has been recently studying the structure of this space. For equations somewhat related to (1) Bahri and Coron [BC] has obtained a nice existence result of solutions with higher index.

The Yamabe problem in noncompact Riemannian manifolds is in general a very subtle problem which seems to have been posed for the first time by Yau [Y] and Kazdan [K] . One reason that makes the problem very non-standard is the fact that the interplay between the structure of the manifold at infinity and the analysis needed to solve the problem is very unclear. For instance if we consider the Sobolev quotient

$$J(\phi) = 4\,\frac{(n-1)}{(n-2)} \int_M |\nabla\phi|^2 dv + \int_M R(x)\phi^2 dv / \left(\int_M \phi^{2n/(n-2)} dv\right)^{\frac{(n-2)}{n}}$$

and defined $\mu = \inf J(\phi)$ for all $\phi \geq 0$, $\phi \not\equiv 0$, $\phi \in H^1(M)$, the necessary embedding and compactness theorems are not available, and even if they were the necessary analysis to solve it in the positive case seems difficult.

In collaboration with R. McOwen [A-MO,I] we have studied the negative case in a general complete non-compact Riemannian manifold. This reduces to study the semilinear elliptic equation

$$(4) \qquad 4\,\frac{(n-1)}{(n-2)}\,\Delta_g u - u^{(n+2)/(n-2)} = Ru$$

where Δ_g and R denote the Laplace-Beltrami operation and scalar curvature respectively for the Riemannian manifold (M,g), with $\dim M = n > 2$.

Our results are close to best possible and they summarize as follows.

<u>Theorem</u> 4. If (M,g) is a complete Riemannian manifold with non-positive scalar curvature R satisfying

$$(5) \qquad R(x) \leq -\epsilon < 0$$

for $x \in M \setminus M_0$, where M_0 is a compact set, then there is a complete conformal metric $\bar{g}$ with scalar curvature $\bar{R} \equiv -1$.

Suppose now that R vanishes at infinity. Even if $R < 0$ on M, it may not be possible to solve (4). Indeed Ni in [N] constructed metrics g in $\mathbb{R}^n$ which are uniformly equivalent and conformal to the Euclidean metric, with $R < 0$,

$$|R(x)| = 0(|x|^{-\ell}) \qquad |x| \to \infty$$

and $\ell > 2$. If $\bar{g}$ were conformal to g with $\bar{R} \equiv -1$, then $\bar{g}$ would also be conformally Euclidean. Then we write $\bar{g} = v^{4/(n-2)}dx^2$ to find

$$4\,\frac{(n-1)}{(n-2)}\ \Delta v - v^{(n+2)/(n-2)} = 0$$

in $\mathbb{R}^n$; hence $v = 0$ (see [AvI]).

Thus some negativity condition on R is required to achieve $\bar{R} \equiv -1$. It is natural to impose

$$(6) \qquad R(x) \leq -Cr(x)^{-\ell} \quad \text{for } x \in M \setminus M_0$$

where $0 < \ell < 2$ and $r(x)$ is the geodesic distance to a fixed point x_0 in the interior of M_0. This condition is indeed sufficient, at least if we add an assumption (also natural) on the Ricci curvature

$$(7) \qquad \mathrm{Ric}\ (\nu,\nu) \geq Cr(x)^{-2a}, x \in M$$

where $\nu = \frac{\partial}{\partial r}$ at x (whenever defined).

<u>Theorem</u> 5. If (M,g) is a complete Riemannian manifold with non-positive scalar curvature $R(x)$ satisfying (6) and Ricci curvature satisfying (7) where $0 \leq a < 1$ and $2a \leq \ell < 1 + a$, then there is a complete conformal metric $\bar{g}$ with $\bar{R} \equiv -1$.

An important observation is the fact that unrestricted non-negativity of the scalar curvature R in M_0 in the above two results is not possible. In [A-MO,I] we have given an example that shows this fact. In general if one allows unrestricted non-negativity of the scalar curvature R on compact positions of M we have

<u>Theorem</u> 6. If (M,g) is a complete Riemannian manifold so that the conformal Laplacian, $-\Delta + (n-2) / 4(n-1)R$ has negative first eigenvalue for zero Dirichlet conditions on some compact set. Then there is a conformal metric $\bar{g}$ with $\bar{R} = -1$. Moreover, $\bar{g}$ is complete if (5) holds for $x \in M / M_0$ where M_0 is a compact set or if (6) and (7) hold with $0 \leq a < 1$ and $2a \leq \ell < 1 + a$.

It should be pointed out that it is possible to construct a complete Riemannian manifold so that there are not complete conformal equivalent metrics of constant scalar curvature (of any sign). <u>Therefore the Yamabe</u>

problem is in general false in complete Riemannian manifolds. As it was pointed out earlier, to find reasonable good topological conditions which guarantee the existence of a complete conformal metric of constant positive scalar curvature seems to be a very difficult problem.

There is one basic and important case of the Yamabe problem in complete Riemannian manifolds which has recently been studied for both signs of the scalar curvature. It can be described in the following way. Let (M,g) be a compact manifold. Let Γ be a closed set in M and consider the complete manifold $(M\backslash\Gamma,\hat{g})$ $\hat{g} = \delta^{-2}g$ where δ is the regularized distance to Γ. Then building upon the earlier work of Loewner and Nirenberg [LN] in the standard sphere the author and McOwen showed the following.

Theorem 7 ([A-MO,II]). Suppose (M,g) is a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 3$ and let Γ be a closed smooth submanifold of dimension d. Then there is a complete conformal metric to $\hat{g}$ on $\hat{M} = M \setminus \Gamma$ with constant negative scalar curvature if and only if $d > (n-2)/2$.

The corresponding result for positive scalar curvature, which is, of course, a very different theorem has been studied by R. Schoen [S3] in the case of the standard sphere S^n. His surprising result can be stated as follows.

Let $u > 0$, $u \in C^\infty(S^n - \Gamma) \cap L^p(S^n)$ and suppose u satisfies

$$Lu + \frac{n(n-2)}{4} u^p = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(S^n) \tag{8}$$

where $p = \frac{n+2}{n-2}$, $Lu = \Delta_{g_0} u - \frac{n(n-2)}{4} u$, g_0 denotes the standard metric on S^n.

Theorem 8 (Schoen [S3]). There are closed sets Γ (of Hausdorff dimension $< \frac{n-2}{2}$), which includes for example Cantor type sets of Hausdorff dimension less than $\frac{n-2}{2}$, a collection of finite number of points etc., so that the metric $g = u^{4/(n-2)}g_0$ defined a complete Riemannian metric of constant positive scalar curvature, where u is a solution of (8).

Other very interesting results have been obtained by Schoen and Yau [SY].

I shall finally mention that from a more analytical point of view the problem of understanding metrics "at infinity" is related to the study of the singularities of positive solutions of scalar equations. That is, let $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, n \geq 3\}$ and let Γ be a closed set contained in B. Suppose $u \in C^\infty(B\backslash\Gamma)$ is a non-negative solution of the semilinear elliptic equation

$$\Delta u + u^q = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(B)$$

$$\frac{n}{n-2} \leq q \leq \frac{n+2}{n-2} .$$

An important and difficult problem is to understand the behavior of u in Γ. This is in general a quite difficult problem which is only understood in the case that Γ is a single point, that is when u has an isolated singularity. The main known results can be stated as follows.

Theorem 9. Let $u \in C^\infty(B \mid \{0\})$ be a non-negative solution of the semilinear elliptic equation

$$\Delta u + u^q = 0 \quad \text{in} \quad B \mid \{0\}.$$

Then u has a removable singularity at $\{0\}$ or

(a) $$\lim_{|x|\to 0} |x|^{n-2}(-\ell n|x|)^{\frac{(n-2)}{2}} u(x) = \left(\frac{n-2}{4}\right)^{n-2}$$

when $q = \frac{n}{n-2}$, see Aviles [Av II].

(b) $$\lim_{|x|\to 0} |x|^{2/(q-1)} u(x) = \frac{2(n-2)}{(q-1)^2}\left(q - \frac{n}{n-2}\right)^{\frac{1}{q-1}}$$

when $\frac{n}{n-2} < q < \frac{n+2}{n-2}$, see Gidas and Spruck [GS], and Aviles [AV,II].

(c) If $q = \frac{n+2}{n-2}$, then

$$u(x) = (1 + 0(1))\psi(|x|) \quad \text{as} \quad |x| \to 0$$

where $\psi(r) = \psi_D(\log r) / r^{\frac{n-2}{2}}$, $0 \geq D \geq -\frac{2}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)$ where ψ_D are solutions of

$$\psi''(t) - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \psi'(t) + \psi^{\frac{n+2}{n-2}}(t) = 0 \qquad 0 < t < \infty,$$

see Caffarelli, Gidas and Spruck [CGS].

I would like to close this note by mentioning that we have recently been studying the case in which Γ is not a single point. The results will appear in a forthcoming paper [AV,III].

Acknowledgment

I would like to thank the Japan Association for Mathematical Sciences for their kind support which made it possible for me to visit Japan, in particular Hokkaido University. I would also like to thank Professor Y. Giga for his kindness and many attentions to me and my family.

References

[AV,I] Aviles, P., Phragmén-Lindelöf theorems for nonlinear elliptic equations II, Arch. for Rat. Mech. & Analysis Vol. 97, No. 2(1987), 141-170.

[AV,II] Aviles, P., Local behavior of solutions of some elliptic equations, Commun. Math. Phys. 108(1987), 177-192.

[AV,III] Aviles, P., In preparation.

[A-MO,I] Aviles, P., & McOwen, R., Conformal deformation to constant negative scalar curvature on non-compact Riemannian manifolds, J. Diff. Geometry, Vol. 27, No. 2(1988), 225-239.

[A-MO,II] Aviles, P., & McOwen, R., Complete conformal metrics with negative scalar curvature on compact Riemannian manifolds, Duke Math. Journal, Vol. 56, No. 2(1988), 395-398.

[Au] Aubin, T., Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, New York Heidelberg, Berlin 1982.

[BC] Bahri, A., & Coron, J.M., On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent; the effect of the topology of the domain CPAM Vol. 41 (3), (1988), 253-294.

[CGS] Caffarelli, L., Gidas, B., & Spruck, J., Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth, CPAM Vol. 42 (3), (1989), 229-334.

[E] Escobar, J., The Yamabe problem in manifolds with boundary, Journal of Differential Geometry, to appear.

[GS] Gidas, B., & Spruck, J., Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations CPAM 4(1981), 525-598.

[K] Kazdan, J., Prescribing the curvature of a Riemannian manifold, Amer. Math. Soc. Providence, RI 1985.

[LN] Loewner, C., & Nirenberg, L., Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, Contributions in Analysis Academic Press, New York 1974, 245–272.

[N] Ni, W.-M., On the elliptic equation $\Delta u + k(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, Indiana Univ. Math. J. 31(1982), 493–529.

[S 1] Schoen, R., Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geometry 20(1984), 479–495.

[S 2] Schoen, R., In preparation.

[S 3] Schoen, R., The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equation, CPAM 41(1988), 317–392.

[SY] Schoen, R., & Yau, S.T., Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature, Inv. Math. 1988.

[T] Trudinger, N., Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22(1968), 265–274.

[Y] Yau, S.T., Seminar on differential geometry, Problem section, Annals of Math. Studies No. 102, Princeton University Press, Princeton, NJ 1982.

Patricio Aviles
Department of Mathematics
University of Illinois at Urbana-Champaign
Urbana, Illinois 61801

Oblique 問題について

石井仁司（中大・理工・数）

二階楕円型方程式に対する境界値問題

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ B(x, u, Du) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を考える。ここで，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は開集合，$u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は未知関数，F と B は実数値関数とする。$Du = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$，$D^2u = (\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)_{1 \le i,j \le N}$ とする。N 次実対称行列の全体を $\mathcal{S}^N$ で表わす。$F(x, u, Du, D^2u) = 0$ が楕円型であるとは

$X, Y \in \mathcal{S}^N$，$X \le Y$ ならば $F(x, r, p, X) \geqq F(x, r, p, Y)$

が成り立つことを意味する。但し，$X \le Y$ とは，$\langle X\xi, \xi\rangle \le \langle Y\xi, \xi\rangle$ が $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$ に対して成り立つことである。境界条件 $B(x, u, Du) = 0$ が oblique であるとは

$x \in \partial\Omega$ のとき，$\langle n(x), D_p B(x, r, p)\rangle > 0$

が成り立つことである。但し，$n(x)$ は x における Ω の外向き単位法ベクトルを表わす。

Crandall と Lions によって導入された弱解 = viscosity solution の一意存在について，次の結果が得られた。

<u>定理</u>：後で述べる仮定 (Ω. 1-2)，(B. 1-3)，(F. 1-4) の下で次が成り立つ。

(i) u が subsolution で，v が supersolution ならば，$u \le v$ on $\overline{\Omega}$.

(ii) (1) の解 $u \in C(\overline{\Omega})$ が存在する。

仮定を列挙する。

(Ω.1) Ω は有界.

(Ω.2) $\partial\Omega$ は C^1 クラスである.

(B.1) $\qquad B \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

(B.2) $\qquad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall z \in \partial\Omega$ に対して，z の近傍 U がとれて，

(i) $\qquad \hat{B} = B(\cdot, r, \cdot) \in C^{1,1}(U \times \mathbb{R}^N)$,

(ii) $\qquad x \in U$ ならば，$\langle n(z), D_p \hat{B}(x, p)\rangle \geqq 1$,

(iii) $\qquad C > 0$ がとれて，

$$|\hat{B}(x,p)| \vee |D_x \hat{B}(\cdots)| \vee \|D_x^2 \hat{B}(\cdots)\| \leqq C(|p|+1),$$

$$|D_p \hat{B}(\cdots)| \vee \|D_x D_p \hat{B}(\cdots)\| \leqq C, \quad \|D_p^2 \hat{B}(\cdots)\| \leqq \frac{C}{|p|+1} \quad a.e.$$

となる。

(B.3) $\qquad r \mapsto B(x, r, p)$ は非増加関数である.

(F.1) $\qquad F \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}^N)$.

(F.2) $\qquad \lambda > 0$ がとれて，$r \mapsto F(x, r, p, X) - \lambda r$ は非増加関数である.

(F.3) $\qquad m \in C[0, \infty)\ (m(0) = 0)$ がとれて，

$\alpha > 1,\quad X, Y \in \mathcal{S}^N,\quad -\alpha\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leqq \alpha\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$ ならば，

$$F(x, r, p, X) - F(y, r, p, -Y) \geqq -m(|x-y|(|p|+1) + \alpha|x-y|^2)$$

となる。

(F.4) $\qquad \partial\Omega$ の近傍 V と $m \in C[0, \infty)\ (m(0) = 0)$ がとれて，

$x \in V \cap \overline{\Omega}$ ならば，$|F(x, r, p, X) - F(x, r, q, Y)| \leqq m(|p-q| + \|X - Y\|)$

となる。

Quantization of a Poisson algebra and polynomials associated to links.

小沢哲也(名大.理)

リーマン面の基本群のLie群への表現類空間は、Teichmuller空間などの場合にみられるように、Riemann面に関するいろいろな幾何学と関連していて、古くから興味をもたれてきました。

この表現類空間上には(regular partには)自然なsymplectic structureがはいり、それに関する古典力学(Hamilton系)についてのWolpertやGoldmanたちの研究がありました。

さて「その量子化は?」という問いが自然に生じますが、最近Turaevによって、Wolpert-Goldmanの無限次元Lie環の量子化(≒非可換化)があたえられました。この量子化は少し形式的なものではありますが、そこで作られるideaは幾何学的なもので、3次元多様体内のリンクのトポロジーと深く関係しています。

この講演の目的は、Turaevの量子化と関連においてリンクの1つの多項式不変量を定義しその性質について述べることにあります。

Yang-Baxter方程式を通して、量子群とリンクの不変量を結びつける仕事や、conformal field theoryを使ったリンクや多様体の不変量を求める仕事などが最近話題になっていますが、それらとの関連を調べることは興味ある問題と思われます。

「素数の分布について」

理工学部数学物理学科教授　土　井　公　二

米国ニュージャージー州にプリンストンというそれはそれは美しい大学町があって、その Princeton 大学に志村五郎教授(1930年２月23日生れ)という大数学者がおられる。1988年夏に日本アイビーエム株式会社が発刊している「無限大」という刊行物No. 78に志村教授は「少年は大志を抱いたか」と題するエッセイを深い洞察とあふれるばかりの知識をもって発表され、一般読者に強烈なる啓（けい）もうを与えられた（必要があればいつでもコピーしてさし上げます）。その中のほんの一文をここで引用させていただくことにしよう。曰く、「数学的生涯の出発点にある少年達は数学の多様性と深さについて十分に知らされるべきであり、その知識の上で方向を選ぶことが望ましい。なお趣味という言葉の他につけ加えるならば、「現状に対する居心地の悪さ」というものがある。つまり既成の理論・方法に完全には満足できない気持、何かよりよい原理があるはずだという漠然たる予感などを持ち得るか否かである。これは物理学でなら、理論と実際との食い違いなどから普通に言われるであろうが、数学でも重要である。理論・方法・原理などという言葉を様式・技法・理念等に置きかえれば、「居心地の悪さ」は芸術にもあてはまるだろう。ポアンカレ予想のような世間周知の問題について言うならば、その問題をそのままの形で受け入れるのではなく、別の視点から見ようという態度である。そして、居心地の悪さを居心地のよいものにしようという気持をアンビションのうちに入れることができよう。私には、この種のアンビションが数学では、そして多分他の科学でも、もっとも自然で、また実り多きもののように思われる。

別種のアドバイスとして、どこかで読んだ中国の話をここにいれておこう。昔ある男が鳥を鉄砲で撃って捕りたかったがいくら試みても当らなかった。そこで鉄砲撃ちの名

人に弟子入りして修行した。数年を経て少しも進歩しないので、ついにあきらめて故郷に帰ることにした。そこで、名人が男にさとしていった。「君もここにいる間には物にならなかったが、あきらめるのは早い。うちに帰ったら、高くて広い壁に向かって鉄砲を撃ちなさい。いくらなんでもどこかに当るだろう。そうしたら穴のまわりに好きな鳥の画を描きなさい。」

これは元来政治的な諷刺であると思われるが、数学者などへの忠言としても意味がある。

以上が先にのべた「少年は大志を抱いたか」の一部分である。さて26年前、佐藤幹夫教授（現在京大数理解析研究所長）が阪大教授に赴任されたとき、私は助手として東京からつれてきていただいたのだが、阪大の数学教室で顔をみかけられるやいなや「君は志村理論を勉強したいとゆうことであるが、それでは保型形式にはかなり精通しておられるのでしょうな」と言われて「いえ、ほとんど何も知りません。」すると「明日10時までに、

$$x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{n})^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)x^{n}$$

を展開して $a(1)$～$a(50)$ ぐらいまで係数 $a(n)$ を計算して持ってきておみせなさい、それから先はその後で…。」その夜もちろん一睡もできなかったが、$\prod_{n=1}^{\infty}$ というものでも x、x^2、x^3、x^4、… の係数が次々に手で求められるものだということをこの時始めて知り、同時に $a(n)$ とはまことに神秘的であるという予感を体得した。26年経て現在、志村五郎教授の画はまことにまことに大きくなって、ただただ圧倒されるばかりの今日このごろではあるが、少年の時に持った夢だけは正しかったという誇りを捨てきれない。最後に、$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$（リーマンのゼータ関数と呼ばれる）に対し、上でのべた $a(n)$ について

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a(n)^{2}n^{-s}\right)/\zeta(s-11)$$

は複素変数 s に関して整函数であるという事実が1975年志村五郎教授によって示されたことを附言する。

微分方程式の解析的分類と不変量

真島秀行（一橋大）

1989年11月24日

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(A_0+\frac{A_1}{z}\right)\frac{du}{dz}+\left(B_0+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}\right)u=0$$

一般合流型超幾何方程式

$z=\infty$ のところで次のような形の解をもつ.

$$u=C_1e^{\rho_1 z}z^{\kappa_1}\varphi_1(z)+C_2e^{\rho_2 z}z^{\kappa_2}\varphi_2(z)$$

$\rho_1,\ \rho_2$ は $\rho^2+A_0\rho+B_0=0$ の根. $\rho_1\neq\rho_2$ とする.

$$\kappa_i=\frac{A_1\rho_i+B_1}{2\rho_i+A_0}\qquad(i=1,2)$$

$$\varphi_i(z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(\rho_i)z^{-j}$$

$$c_{k+1}(\rho_i)=\frac{(\kappa_i+k)(\kappa_i+k+1)-A_1(\kappa_i+k)+B_2}{(2\rho_i+A_0)(\kappa+k+1)-(A_1\rho_i+B_1)}c_k(\rho_i)$$

α,β を $t^2-(3-A_1)t+(2-A_1+B_2)=0$ の根とする

$$\gamma_i=2-\kappa_i$$

$$c_{k+1}(\rho_i)=\frac{(\alpha-\gamma_i+1+k)(\beta-\gamma_i+k+1)}{(2\rho_i+A_0)(k+1)}c_k(\rho_i)$$

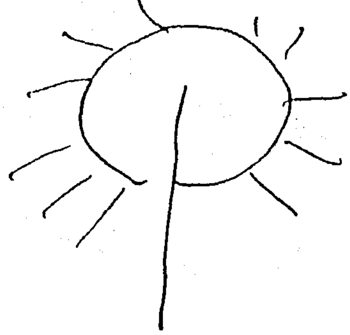
$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}u\\ \frac{du}{dz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0, & 1\\ -\left(B_0+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}\right), & -\left(A_0+\frac{A_1}{z}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \frac{du}{dz}\end{bmatrix}\quad\cdots①$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_1(z), & \phi_2(z)\\ \psi_1(z), & \psi_2(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$ (形式変換) ②

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} p_1+\frac{\kappa_1}{z}, & \\ , & p_2+\frac{\kappa_2}{z}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \quad \text{- - - -} ③$$

$z=\infty$ で1級の不確定特異点をもつ方程式①は
形式変換②で対角型標準方程式③に変換される
このとき漸近展開の理論より

$S(-\frac{\pi}{2}-\theta, \frac{3}{2}\pi-\theta)$ 上で $\begin{bmatrix}\phi_1(z), & \phi_2(z)\\ \psi_1(z), & \psi_2(z)\end{bmatrix}$ に漸近展開可能な
正則関数行列.

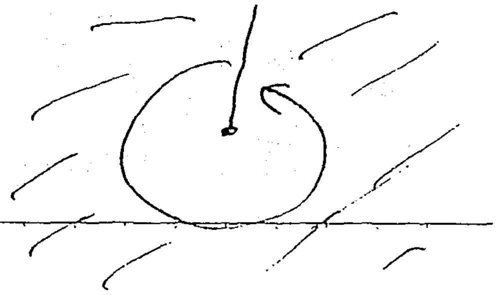


$$\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1^1(z), & \tilde{\phi}_2^1(z)\\ \tilde{\psi}_1^1(z), & \tilde{\psi}_2^1(z)\end{bmatrix} = \tilde{\Phi}_1(z)$$ があって.

$$\Phi_1(z)\begin{pmatrix} e^{p_1 z} z^{\kappa_1} & 0\\ 0 & e^{p_2 z} z^{\kappa_2}\end{pmatrix}$$ が $S(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, r)$ 上の

①の解の基本行列になる.

$$S\left(\frac{\pi}{2}-\theta, \frac{5}{2}\pi-\theta\right) \longrightarrow \Phi_2(z)$$



$\theta = \arg(P_1 - P_2)$

$$S\left(-\frac{\pi}{2}-\theta,\ \frac{1}{2}\pi-\theta;\ r\right) \cap S\left(\frac{\pi}{2}-\theta,\ \frac{5}{2}\pi-\theta;\ r\right) = S\left(\frac{\pi}{2}-\theta,\ \frac{1}{2}\pi-\theta;\ r\right) = \emptyset$$

$$\left[\quad \tilde{\Phi}_1(z)\begin{pmatrix} e^{P_1 z} z^{K_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{K_2} \end{pmatrix} = \tilde{\Phi}_2(z)\begin{pmatrix} e^{P_1 z} z^{K_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{K_2} \end{pmatrix}\right]$$

$$\times \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}_2^{-1}(z)\,\tilde{\Phi}_1(z) = \begin{bmatrix} e^{P_1 z} z^{K_1} & 0 \\ 0 & e^{P_2 z} z^{K_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \text{Stokes 係数}} \begin{bmatrix} e^{-P_1 z} z^{-K_1} & 0 \\ 0 & e^{-P_2 z} z^{-K_2} \end{bmatrix}$$

漸近 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow\ C_{11} = C_{22} = 1,$

$C_{12} = 0,\quad C_{21}$

(いずれも
0 [illegible])

$$\frac{\pi}{2} - \arg(P_1 - P_2) < \arg z < \frac{3}{2}\pi - \arg(P_1 - P_2)$$

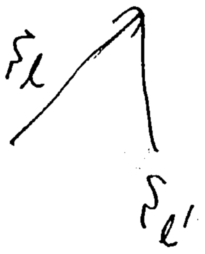
$$\frac{\pi}{2} < \arg z(P_1 - P_2) < \frac{3}{2}\pi$$

$$\mathrm{Re}\ z(P_1 - P_2) > 0$$

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{d}{dz}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + \frac{K_1}{z} & \\ & P_2 + \frac{K_2}{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dz} \end{bmatrix} = \Phi(z)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_\ell(z)\, e^{\begin{pmatrix} \rho_1 + (\ell, z)\kappa_1 & \\ & \rho_2 + (\ell, z)\kappa_2 \end{pmatrix}}$$



$$= \Phi_{\ell'}(z)\, e^{\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}} \quad \underline{C_{\ell\ell'}}$$

(一般に) Stokes 係数

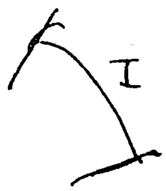
$$\Xi = \Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell'}(z) = e^{\square} C_{\ell\ell'}\, e^{-\square}$$

が

$$(*) \quad \frac{d}{dz}\Xi = \begin{pmatrix} \rho_1 + \frac{\kappa_1}{z} & \\ & \rho_2 + \frac{\kappa_2}{z} \end{pmatrix}\Xi - \Xi\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

とおく. $\Xi \sim \mathbb{I}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Lambda_{(\rho_1,\kappa_1,\rho_2,\kappa_2)}(I;r) = \{$ の解で $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ に漸近展開可能 $\}$



$\to$ 方向集合の全体 S^1 上の層 $\Lambda_{(\rho_1,\kappa_1,\rho_2,\kappa_2)}$

$$\{\Phi_\ell^{-1}\Phi_{\ell'}\} \in H^1(S^1, \Lambda_{(\rho_1,\kappa_1,\rho_2,\kappa_2)})$$

$$\cong \mathbb{C}^{\mathrm{In}(*)}.$$

$$\cong \mathbb{C}^2.$$

$$U_0 = \{ e^{i\cancel{\theta}\tau} \mid -\tfrac{\pi}{2} - \theta < \tau < \tfrac{3}{2}\pi - \theta \}$$

$$U_1 = \{ e^{i\tau} \mid \tfrac{\pi}{2} - \theta < \tau < \tfrac{5}{2}\pi - \theta \}$$

$$H^1(\mathcal{U}', \Lambda_{(\rho_1, \kappa_1; \rho_2, \kappa_2)}) = H^1(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{(\rho_1, \kappa_1, \rho_2, \kappa_2)})$$

$$= C^1(\{U_0, U_1\}, \Lambda_{(\rho_1, \kappa_1, \rho_2, \kappa_2)})$$

$$= \Lambda_{(\rho_1, \kappa_1, \rho_2, \kappa_2)}(U_-) \oplus \Lambda_{(\rho_1, \kappa_1, \rho_2, \kappa_2)}(U_+)$$

$$= \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

$$U_0 \cap U_1$$

$$= \{ e^{i\tau} \mid -\tfrac{\pi}{2} - \theta < \tau < \tfrac{\pi}{2} - \theta \}$$

$$\cup \{ e^{i\tau} \mid \tfrac{\pi}{2} - \theta < \tau < \tfrac{3}{2}\pi - \theta \}$$

$$= U_- \cup U_+$$

$$z^{\kappa_1} \varphi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho_i) z^{-k+\kappa_1}, \quad (i = 1, 2)$$

Borel 変換

$$B(z^{\kappa_1} \phi_i(z))(\zeta) = \sum \frac{c_k(\rho_i)}{\Gamma(k+\kappa_i)} \zeta^{\cancel{k+\kappa_i}\,k-1} \quad (i = 1, 2)$$

$$\parallel$$

$$\Phi_i(\zeta)$$

$\Phi_1(\zeta)$ と $\Phi_2(\zeta)$ との接続関係は!

$\phi_i(\zeta)$

$\downarrow$ Laplace 変換

$$\int_{(*)} e^{-z\zeta}\phi_i(\zeta)\,d\zeta = z^{\kappa_i}\tilde{\phi}_i(z)$$

$e^{\rho_i z} z^{\kappa_i}\tilde{\phi}_i(z)$ が ① の解.

$$\phi_i(\zeta) = \frac{(2\rho_i + A_0)^{\kappa_i - 1}}{\Gamma(\kappa_i)} C_0(\rho)\left(\frac{\zeta}{2\rho_i + A_0}\right)^{1-\gamma_i} F\left(\alpha-\gamma_i+1, \beta-\gamma_i+1; 2-\gamma_i; \frac{\zeta}{2\rho_i+A_0}\right)$$

$(i=1,2)$

超幾何方程式について.

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2} + (c-(a+b+1)\xi)\frac{du}{d\xi} - abu = 0$$

この $\xi=0$ における基本解は

$$\mathbb{F}_0 = \left(F(a,b,c;\xi),\ \xi^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; \xi)\right)$$

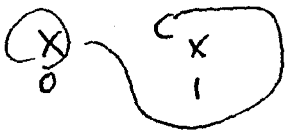
$\xi=1$ 〃

$$\mathbb{F}_1 = \left(F(a,b;1+a+b-c;1-\xi),\ (1-\xi)^{c-a-b}F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-\xi\right.$$

$$\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_1\begin{pmatrix}\Gamma\text{ 関数でかける} \\ \text{定数の行列}\end{pmatrix}$$

$\gamma = c$ が正しい

$$\xi^{1-\gamma} F(1+a-c, 1+b-c; 2-c; \xi) = a_{11} F(a, b, 1+a+b-c; 1-\xi)$$
$$+ a_{12} (1-\xi)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-\xi)$$



$$\phi_1((\xi-1)e^{2\pi i}+1) - \phi_1(\xi) = \underbrace{a_{12}\left(e^{(c-a-b)2\pi i} - 1\right)}_{= C_{21}} \phi_2(\xi - (\rho_1 - \rho_2))$$

Ecalle a resurgent equation.

A_0, A_1, B_0, B_1 を固定すると $\rho_1, \rho_2, \kappa_1, \kappa_2$

B_2 を parameter $\longrightarrow \dfrac{d}{dz} \begin{bmatrix} \rho_1 + \frac{\kappa_1}{z} & 0 \\ 0 & \rho_2 + \frac{\kappa_2}{z} \end{bmatrix}$

$\longrightarrow H'(\xi', \Lambda_1)$

$$(B_2' - B_2 + n)^2 = n^2((A_1 - 1)^2 - 4B_2) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Le 24/11/89.

Local Weierstraß theory in an asymptotic case.

Let $\mathcal{A}_S$ be the ring of germs at the origin of $\mathbb{C}^n$ of holomorphic functions in a polysector S and having in S an asymptotic expansion. For every $\varphi \in \mathcal{A}_S$, $\lim_{x \to 0, x \in S} \varphi(x)$ exist and is denoted by $\varphi(0)$. We have the division theorem in the ring of polynomials $\mathcal{A}_S[Y]$. One of the first proof of the classical preparation theorem for the ring of germs of holomorphic functions at the origin of $\mathbb{C}^n$, was given by L. Stickelberger [1]. And his very simple proof goes over to the asymptotic case.

Let $\mathcal{H}$ be the ring of germs of holomorphic functions in some product $S \times (D = \{y \in \mathbb{C} \; |y| < r\})$ of the form $g = \sum_{m \geq 0} g_m(x) y^m \quad (g_m(x) \in \mathcal{A}_S)$.

The germ g is said of order b if $g_b(0) \neq 0$ and $g_i(0) = 0$ for all $0 \leq i < b$. Now let us state the results.

<u>Preparation theorem</u>. <u>If g is of order b then there exist uniquely determined, an invertible element $e \in \mathcal{H}$, a Weierstraß polynomial of degree b such that</u>

$$g = e\omega$$

$$\omega = Y^b + \omega_1(x) Y^{b-1} + \dots + \omega_b(x) \; ; \; \omega_i(x) \in \mathcal{A}_S, \; \omega_i(0) = 0$$

Division theorem. Let $g \in \mathcal{H}$ of order b. Then every $f \in \mathcal{H}$ can be uniquely written in the form
$$f = qg + r$$
where $r \in A_S[Y]$, $d^\circ r < b$.

As we have division in $A_S[Y]$ we get also

Theorem: $\mathcal{H}$ is Henselian. That is, if $P(x,y) \in A_S[Y]$ with $P(0,y) = \prod_{i=1}^{p} (Y - x_i)^{b_i}$, $x_i \in \mathbb{C}$. $(b = b_1 + \cdots + b_p)$ then
$$P(x,Y) = \prod_{i=1}^{p} P_i(x,Y) \quad , \quad P_i(x,Y) \in A_S[Y]$$
$d^\circ P_i = b_i$ and $P_i(0,Y) = (Y - x_i)^{b_i}$.

As an application of this theory we have the following result. Let $F(x,y) = \sum_{m \geq 0} f_m(x) Y^m$, $f_m(x) \in A_S$, $f_m(x) \underset{S}{\sim} \hat{f}_m(x)$, then each formal solution of
$$\hat{F}(x,y) = \sum \hat{f}_m(x) y^m = \sum_{m+|p| \geq 0} f_{m,p} Y^m x^p$$
is the asymptotic expansion of an actual solution of $F(x,Y) = 0$.

[1]. Über einen Satz des Herrn Noether
Math. Ann. 30, 401-409.

R. GÉRARD
Institut de Recherche Mathématique Alsacien
STRASBOURG France.

Lie-Drach-Vessiot 理論について

熊本大学　梅村 浩

Painlevé の仕事がほぼ解明された現在，代数微分方程式論における最も重要な問題は

一般化の問題A。Lie の夢見た（無限）微分 Galois 理論を実現することは可能か。

詳しく述べると，Lie (1842-99) は代数方程式の Galois 理論を微分方程式に拡張することを目標としていた。一般的には無限次元の理論であるが，彼は有限次元の理論の建設より始めなければならなかった．その過程において Lie 群論，Lie 環論等が生れた．無限次の理論の Lie 全集に占める割合は小さい．フランスの Drach (1871-1941) は Lie の夢の実現を試みた。しかし彼の仕事には，明確でない定義，ギャップのある証明が多く，どのような事情により，このような不完全な仕事が出版されたのか不思議である。Vessiot (1865-1952) はこの Drach の欠陥の多い仕事を見直すのに一生を費した。Vessiot の仕事は Drach の仕事より理解しやすい．しかし，彼の仕事は Lie の求めていたものであろうか．我々は彼の一つのアイディアを発展させて，Lie の夢を実現することを提案する。

一方よく知られたように 19 世紀の終りに有限性の条件が満される場合の Galois 理論（例えば Picard-Vessiot 理論）は

確立された。Kolchinはこの理論を完成した。彼の仕事の集大成と言うべき著作において，考える微分の個数が0個の場合，微分環は単に可換環にすぎない，この意味で微分環論は可換環論（＝代数幾何学）を含むと言えるとKolchinは述べている。ところが，Galois拡大の概念の微分体への拡張である彼の強正規拡大の定義に古典的なGalois拡大は入ってこない。

統一の問題B．何故，古典Galois拡大は必ずしも強正規拡大でなくなってしまうのか．即ち両者を統合する自然な定義はないのか！

問題Bにある定義の不整合性は，以前から非常に不快なものと感じていた。一般化の問題Aを考えていて，その結果統一の問題Bもそこに巻き込まれて来た．標数0ならば統一の問題Bは解決できる．正標数であっても我々の提案する枠組でよいと思われる。

問題Aの解答となる理論には重要な応用があり，又新しい問題を生む．例えばRiemann, Fuchs, Schlesinger, Garnier，さらに近年の佐藤学派の仕事により線型方程式のmonodromy保存変形理論の重要性と豊さが認識されて来た．これに劣らず，微分方程式のGalois群保存変形が大切であろうと思われる．実際DrachはPainlevé方程式が，非線形微分方程式のGalois群保存変形を考えることによって導入できると述べている。上に説明したように彼の微分Galois理論は極めて不完全なものであるので，我々の方法によってDrachの

アイディアを追求するのは興味ある問題である。

Kolchin学派のある人々は，一般化の問題Aと関係して微分代数群を考えた．即ち微分環に対して，微分素イデアル全体Specを考え，それらを張り合せて多様体を定義する．さらに群構造を持った多様体を微分代数群と呼ぶ．

問題C．微分代数群を考える必要はあるのか．

一般化の問題Aに関して言えば，微分代数群を考える必要がないというのが我々の意見である．

ホワイトノイズと回転群

名古屋大学 理学部
飛田武幸

1. <u>ホワイトノイズ</u>は ブラウン運動 $\{B(t),\ t\in R\}$ の時間微分 $\dot{B}(t)=\frac{d}{dt}B(t)$ で与えられる各時点独立な ガウス型定常超過程で, その特性汎関数は

$$C(\xi)=\exp\left[-\tfrac{1}{2}\|\xi\|^2\right],\qquad \xi\in E,$$

である. E : test 関数の空間.

解析的に, 次のように実現される. μ を E^* 上の確率測度で

$$\int_{E^*} e^{i\langle x,\xi\rangle}d\mu(x)=C(\xi)$$

なるものとし (E^*,μ) をホワイトノイズ空間, $(L^2)=L^2(E^*,\mu)$ の元 $\varphi(x)$ をホワイトノイズ汎関数 (又はブラウン汎関数) と呼ぶ.

2. <u>回転群</u> g が $E\longrightarrow E$ の線型な同型写像で, かつ直交 ($\|g\xi\|=\|\xi\|$, $\forall\xi\in E$) 変換であるとき <u>Eの回転</u>という

Eの回転全体 $O(E)$ は群をなす. これをEの回転群という

O_∞ と書くこともある. (H. Yoshizawa)

g の adjoint を g^* とかく.

<u>定理</u> $\quad g^*_\circ\mu=\mu,\quad \forall g\in O(E).$

これから ホワイトノイズ解析の一側面として, $O(E)$ にもとづく "調和解析" が見られる.

3. 超汎関数　$\{\dot{B}(t)\}$ はホワイトノイズ汎関数の変数系とみることができる。従って、$\dot{B}(t)$, $t\in R$, の多項式や指数関数等（何れも"renormalization"を要するが）を含み (L^2) より大きな空間として、超汎関数空間 $(L^2)^-$ が導入される：

$$(L^2)^+ \subset (L^2) \subset (L^2)^- \qquad \text{Sobolev 空間型.}$$

一方，E^* 上の Schwartz 空間型のものとして

$$(S) \subset (L^2) \subset (S)^*$$

による超汎関数空間も考えられる。

4. Causal calculus　各 $\dot{B}(t)$ が変数とみなされることから

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial \dot{B}(t)} \quad \text{及び} \quad \text{adjoint} \quad \partial_t^*$$

が $(L^2)^-$, $(S)^*$ 上の operator として定義される。

定理 i) $\gamma_{s,t} = \partial_s^* \partial_t - \partial_t^* \partial_s$ は回転の generator である。

ii) number operator $N = \int \partial_t^* \partial_t \, dt$ は $\{\partial_t, \partial_s^*\}$ の2次形式で $\gamma_{s,t}$ と可換なものとして特徴づけられる。

iii) Lévy の Laplacian $\Delta_L = \int (\partial_t dt)^2$ も同様な特徴づけが可能である。

$(S)^*$ の元：$\exp\left[c\int \dot{B}(t)^2 dt\right]$ は Δ_L の固有関数として，singular な measure を定義する超汎関数として，種々の応用がある。

［文献］

[1] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, 1951

[2] T. Hida, Analysis of Brownian functionals, Carleton Math. Lecture Notes, no.13 Carleton Univ. 1975.

[3] T, Hida and K. Saito. ed., Bielefeld Encounters in Math. and Physics, BiBoS 400/89.

Blow-up of H^1 Solutions for the Nonlinear Schrödinger Equation

Yoshio TSUTSUMI

Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University

Higashisenda-machi, Naka-ku, Hiroshima 730, Japan

In this note the author introduces the results concerning the blow-up of solutions for the Cauchy problem of the nonlinear Schrödinger equation, which have been obtained in collaboration with Takayoshi Ogawa.

We consider the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation:

$$(1) \qquad i \frac{\partial u}{\partial t} = - \Delta u - |u|^{p-1}u, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(2) \qquad u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

The equation (1) is of physical interest, because it describes the self-foucusing of the laser beam for $n = 2$ and $p = 3$ and the collapse of the one dimensional soliton in the plasma for $n = 1$ and $p = 5$.

Recently, many mathematicians have been studying the behavior near blow-up time of blow-up solutions for (1)-(2). Most of these results are considered in the framework of $H^1(\mathbb{R}^n)$. Nevertheless, the blow-up of solutions for (1)-(2) was showed only in the framework of $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; |x|^2 dx)$ (see R. Glassey [J. Math. Phys., 18(1977), 1794-1797] and M. Tsutsumi [SIAM J. Math. Anal., 15(1984), 357-366]). When we consider the existence and non-existence of global solutions in time for (1)-(2), $H^1(\mathbb{R}^n)$ seems to be more natural than $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; |x|^2 dx)$.

We have the following two theorems.

Theorem 1. Assume that $n \geq 2$ and $1 \leq p \leq \min\{5, \frac{n+2}{n-2}\}$. Let $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ be radially symmetric and let the initial energy $E_0 = \|\nabla u_0\|^2_{L^2} - \frac{2}{p+1}\|u_0\|^{p+1}_{L^{p+1}} < 0$. Then, the solution of (1)-(2) in $H^1(\mathbb{R}^n)$ blows up in finite time, that is, for some finite $T > 0$, $\|\nabla u(t)\|_{L^2} \to \infty$ $(t \to T)$.

Theorem 2. Assume that $n = 1$ and $p = 5$. Let $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ and let the initial energy E_0 be negative. Then, the solution $u(t)$ of (1)-(2) in $H^1(\mathbb{R})$ blows up in finite time, that is, for some finite $T > 0$ $\|\frac{\partial u}{\partial x}(t)\|_{L^2} \to \infty$ $(t \to T)$.

Remark. (1) The unique local existence theorem of solutions for (1)-(2) is already established by Ginibre and Velo [J. Funct. Anal., 32(1979), 1-71]. If $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, for some $T>0$ there exists a unique solution $u(t)$ of (1)-(2) in $C([0,T); H^1(\mathbb{R}^n))$ satisfying two conservation laws of the L^2 norm and the energy:

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2},$$

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} - \frac{2}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}} = E_0.$$

Moreover, $T = \infty$ or else $T < \infty$ and $\lim_{t\to T}\|\nabla u(t)\|_{L^2} = \infty$.

(2) It follows from the uniqueness of solutions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ that if $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ is radially symmetric, the solution $u(t)$ is

also radially symmetric.

(3) The advantage of considering the blow-up problem in $H^1(\mathbb{R}^n)$ is the following. The upper bound of the blow-up time T obtained in the previous papers depends on $\|u_0\|_{H^1}$, E_0 and $\|xu_0\|_{L^2}$, but the proofs of Theorems 1 and 2 give the upper bound of T depending only on $\|u_0\|_{H^1}$ and E_0.

10 January 1990

北海道大学理学部数学教室談話会

《高温超伝導の電子メカニズム》

東大理学部　青木秀夫

要旨

酸化物高温超伝導体の理論は、舞台としては、電子の多体問題（強く相関した電子系）への収束をみせているが、具体的な超伝導メカニズムに対しては、多体問題の難しさの故に、今だに百家争鳴の渦中にある。それでも、強相関電子系のモデルであるハバード模型や、それに電子を付け加えたり取り去ったりしたドープされたハバード模型に対し、色々興味深いことが分かってきた。理論の現状は、実際の酸化物に即応して、銅および酸素の軌道を取り入れた模型（例えば2バンド・ハバード模型）における超伝導の研究、時間反転対称性が破れた状態やカイラリティーが有限の状態が基底状態ではないかという提案、さらには、場の理論的な研究で、分数量子ホール効果におけるような分数統計粒子（エニオン）気体を考え、この基底状態が超流動とするようなファンシーな理論に至るまで多彩なスペクトルを提している。この様な精力的な理論的探索の一断面を、講演者自身の理論（および量子モンテ・カルロ計算）の結果も含めて、分かり易く紹介したい。

題名　Gauge orbit に対する平均曲率

講演者　前田 吉昭（慶応大学 理工学部）

対称性をもつ変分問題を幾何学的に理解しようという試みは、かなり古くから行なわれている。特に、Mが compact riemannian manifold，Gが compact Lie group とし，GがMに isometry group として act するものとする。Fが，M上の C^∞ 関数で，Gの作用で不変なものを考える。多くの場合，Fの臨界点と，その点を通る G-orbit の極小性（G-orbit の volume について）が期待される。

この話では，以上を一般化して，GやMが無限次元の場合について，試みを行ってみる。例として，接続空間 $\mathcal{C}$ を考える。今 M は C^∞ compact manifold とし，G を compact Lie group（$CU(N)$ or $O(N)$）とし，P を M上の G-principal bundle とする。Gの表現 ρ をとり，ρ による associated vector bundle E を考える。$\mathcal{C}$ は E上の connection 全体の集合である。これは無限次元（といっても affine 空間になっている）多様体と考えられる。$\mathcal{C}$ にはゲージ群 $\mathcal{G}$ と呼ばれる無限次元 Lie 群が作用して，$\mathcal{C}$ に自然に入れた L^2 内積に関して isometry として $\mathcal{G}$ が作用する。$\mathcal{C}$ の点 ∇ におけるゲージ群の軌跡 $\mathcal{G}_\nabla$ の"平均曲率"を考えてみたい。一方 $\mathcal{C}$ の上には Yang-Mills 汎関数と呼ばれる変分関数 $ym(\nabla) = \int_M |F^\nabla|^2 dv_g(x)$ がある。ここで，F^∇ は ∇ の曲率テンソルである。この汎関数の臨界点は Yang-Mills 接続と呼ばれる。我々が知りたいのは，この汎関数の臨界点と，$\mathcal{G}_\nabla$ の"平均曲率"との関係を調べたい。

∇が特に irreducible のとき，接空間 $T_\nabla\mathcal{C}$ は $(\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla)\oplus(\mathrm{Im}\,d^\nabla)$（$d^\nabla$ は ∇ による外微分，δ^∇ は formal dual）に直交分解され，特に，$T_\nabla\mathcal{G}_\nabla = \mathrm{Im}\,d^\nabla$ で与えられる。しかも，∇ の irreducibility から $T_\nabla\mathcal{G}_\nabla \cong \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ と見なせる。（$\mathfrak{g}_E$ は E の endomorphism bundle）。一般に $\mathcal{C}$ 上のベクトル場 X,Y に対して，共変微分 $D_XY(\nabla) = \frac{d}{dt}Y(\nabla + tX(\nabla))\big|_{t=0}$ で定義すると，$\mathcal{C}$ 上の metric connection を定める。今，$\mathcal{G}_\nabla$（$\nabla\in\mathcal{C}$；irreducible）の ∇ における法ベクトル N をとり固定する。N を $\mathcal{G}_\nabla$ の法ベクトル場に拡張して，$\mathcal{G}_\nabla$ の接ベクトル X への共変微分を考えると次の様な線型写像

$$A_N : T_\nabla\mathcal{G}_\nabla \longrightarrow T_\nabla\mathcal{G}_\nabla, \qquad A_N(X) = D_XN(\nabla)$$

が得られる。ここで $T_\nabla\mathcal{G}_\nabla \cong \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ を用いると，$\tilde{A}_N : \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \to \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ なる

線形写像が決まる。$\tilde{A}_N$ が曲面 $(g_E$ の D における不二基本量と考えられる。この trace をとりたいが、実際には、$\tilde{A}_N$ の trace が定まらない。しかし、一般には、$\tilde{A}_N$ は、核関数 $a_N(x,y)$ が存在して、

$$a_N(x,y) \sim \sum_{j=0} r^{-2\tau+2j-2} U_j^N(x,y) + \log r^2 V_0^N(x,y) + E_0^N(x,y)$$

$(U_j^N, V_0, E_0$ は C^∞ 関数$)$ の様に書ける。ここで U_j が満たす性質として

$$\mathrm{tr}\, U_0^N(x,x) = \mathrm{tr}\, U_1^N(x,x) = 0, \quad \mathrm{Tr}\, U_2^N(x,x) = \frac{-2n}{n-4}\langle \delta^D F^D, N\rangle_x$$

$($n は十分大の所を調べている$)$。$\mathrm{Tr}\, U_2^N(x,x)$ に y_m の臨界点を示す量が入っている事が分る。

計算はより複雑だが、compact manifold 上の rieman 計量全体と微分同相の群，及び スカラー曲率の汎関数に対しても同様の計算が行なえる。これは、まだ試みの計算だが、よりよい formulation を行うことにより、anormaly の説明を行うのに役立つことが期待できるのではないか。

以上

The structure of non isolated singularities of morphisms

Isao Nakai Nagasaki Univ.

Map germs f, g: $\mathbf{C}^n,0 \to \mathbf{C}^p,0$ are topologically equivalent if there exist germs of homeomophisms φ of $(\mathbf{C}^n,0)$, ψ of $(\mathbf{C}^p,0)$ such that $g\varphi = \psi f$ holds. When f has non isolated singularities along the fibre $f^{-1}(0)$ the fibres $f^{-1}(u)$ infinitesimally nearby $f^{-1}(0)$ determine a rich geometric structure on $f^{-1}(0)$, the so-called generalised web structure. For such a structur the topological rigidity theorem for webs aplies in some cases and says that topological type of f determine holomorphic type of the fibre $f^{-1}(0)$ as well as the web on it. This phenomenon makes a remarkable contrast to the fact that functions f: $\mathbf{C}^n,0 \to \mathbf{C},0$ with isolated singularities are topologically determined by their monodromy of vanishing cycles.

To explain the web structure for map germs, consider, for example, the pinching map f: $\mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ defined by $f(x,y,z) = (xz^3+yz,\ x,\ y)$. The map is linear with x, y, $f^{-1}(0)$ = Z-axis, finite-to-one off $f^{-1}(0)$, and the preimages $f^{-1}(C)$ of curves C (possiblly singular) passing through the origin in the target are three-curves meeting $f^{-1}(0)$ at three points. Those are depending only on the tangent direction $v \in \mathbf{P}^2$ of C at the origin and denoted D_v. These D_v are all linearly equivalent as divisors and form a "linear system" $L = \mathbf{P}^2$ of degree 3 and dim 2 on the fibre $f^{-1}(0) = \mathbf{P}^1$ (For general pinching map we obtain subvariety W in a linear system). The geometry of this linear system is called the generalised web geometry of f.

The morphism φ: $f^{-1}(0) \to L^\vee$ (dual of L) is defined by the dual $\varphi(z) = H_z^{\vee}$ of the projective line $H_z = \{D_v \in L \mid x \in D_v\}$, and conversely the image $\varphi(f^{-1}(0)) \subset L^{\vee}$ generate the "foliation" by the dual lines H_z paramatrised by $z \in f^{-1}(0)$ on L, the so-called 3-web, for which topological equivalence implies holomorphic equivalence (provided the web in non-hexagonal) (the rigidity).

The structure above explained is interpreted to the following blow-up dyagram with the centre $f^{-1}(0)$ and the origin

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{f} : & \mathbf{C}^3, \ f^{-1}(0) \times \mathbf{P}^1 & \longrightarrow & \mathbf{C}^3, \ \mathbf{P}^2 = L \\
\tilde{\pi} & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & \pi \\
f : & \mathbf{C}^3, \ f^{-1}(0) & \longrightarrow & \mathbf{C}^3 . \ 0
\end{array}$$

where $\tilde{f}$ is the strict transform of f. From the diagram we extract the divergent part

$$f^{-1}(0) \xleftarrow{\tilde{\pi}} f^{-1}(0) \times \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbf{P}^2 = L$$

from which we seek to detect the structure of the non isolated singularity of f concentrated at the fibre.

In a general divergent diagram $\xleftarrow{f} \quad \xrightarrow{g}$ defines a double fibration (foliation) $\mathcal{F}$ on the intermediate space and the direct images $f_*\mathcal{F}$, $g_*\mathcal{F}$ are defined sheaf-theoreticall. The generalised web structure is nothing but the geometry of the direct images.

In the seminar talk, some relations of the web structure of mappings to the various geometries such as algebraic geometry, dunamical system, holomorphic group action on $(\mathbf{C},0)$ etc will be also explained.

ROYDEN COMPACTIFICATIONS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

中井三留　（名古屋工大）

1．Royden コムパクト化の意味．　N次元($N\geq 2$)Riemann多様体R上の関数u の p次($2\leq p\leq N$)のDirichlet積分は

(1)
$$D_p(u)=\int_R |\nabla u|^p dV$$

で与えられる．これを変分とするEuler-Lagrange方程式は

(2)
$$\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$$

である．R上のp次Royden代数 $M_p(R)$とはノルム $\sup_R|u|+(D_p(u))^{1/p}$ が有限な $u\in C^\infty(R)$ 全体の完備化のことで，Banach代数となる$M_p(R)$の極大イデアル空間として定まるRのコムパクト化をRのp次Roydenコムパクト化と呼んで $(R)_p^*$ と記す．次の結果が基本的である：

定理 1． 二つのRiemann多様体R_1,R_2に対して，$N>2$では$p=2$（又は$N=2$或は$2<p\leq N$）とするとき次の三条件は同等である：

(a) R_1からR_2上への擬等距離（擬等角）写像が存在する；

(b) $M_p(R_1)$と$M_p(R_2)$は代数的同型である；

(c) $(R_1)_p^*$と$(R_2)_p^*$は同相である．

上の結果と(1)及び(2)を合わせ考えると，次のように言って良い，すなはち，Rの擬等距離構造（但し$N>2$の時，$N=2$なら擬等角構造）はR上のの線型ポテンシャル論（古典ポテンシャル論）を，又Rの擬等角構造（但し$N>2$のとき）はR上の非線型ポテンシャル論を決定する．ここでは古典ポテンシャル論に興味を持つので$p=2$に限定する．よって以下では2次を省略して単にDirichlet積分

(3)
$$D(u)=\int_R |\nabla u|^2 dV=\int_R du\wedge *du=\|du\|^2,$$

Royden代数 $M(R)$，Roydenコムパクト化 R^* 等と記す．

2．Royden調和境界の連結性．　Riemann多様体Rに対するRoyden代数$M(R)$のpotential subalgebra $M_\Delta(R)$の各関数の共通零点としてRのRoyden調和境界

$\varDelta(R) \subset R^{*} \setminus R$ が定められる．ユークリッド空間E^NのN次元相対コムパクト部分多様体S の固有位相によるコムパクト化$\bar{S}$とS^{*}については，S^{*}から$\bar{S}$上への連続写像がある事以外関係は一般によく分からない．E^Nの単位球をB^Nと記すとき，うえの見地からして，次の結果は著しい：

定理 2． $\varDelta(B^2)$は連結である．

此の結果は関数論的（二次限的）方法で得られているが，これを$\varDelta(B^N)(N>2)$へ拡張することを考える．一般に$\varDelta(R)$が連結となることは，R上の調和測度wで$D(w)<\infty$となるものは定数に限る事と一致する．そこでB^Nを更に一般的に考察することにして，一般のRiemann多様体Rを考え，これが単位球的である事を，Rの(N-1)次元de Rham コホモロジー $H^{N-1}(R)=\{0\}$となることで考える事にする．

3．条件 AB(q)． R上のq-形式$(0 \leqq q \leqq N)\alpha$に対してそのノルム

$$N[\alpha]=\sup\{\|d\varphi\wedge\alpha\|/\|d\varphi\|: \varphi\in C_0^{\infty}(R)\setminus\{0\}\} \tag{4}$$

を導入する．0-形式αに対しては$N[\alpha]=\|\alpha\|_{\infty}$（ess.supノルム）だから一般のq-形式αに対しても$N[\alpha]<\infty$はαのある種の有界性を意味する．R上のどんな$(q-1)$-C^{∞}形式αで$\|d\alpha\|<\infty$となるものに対しても，$N[\alpha_n]<\infty$となる$(q-1)$-C^{∞}形式α_nの列$\{\alpha_n\}$で

$$\lim_{n\to\infty}\|\alpha-\alpha_n\|=0$$

となるものが見つかるとき，Rは条件AB(q)を満足すると言うことにする．AB(1)は全てのR（Nにかかわらず）について成立するが，それ以外は成立することもしないこともある．我々の主要な結果は次のものである：

定理 3． $H^{N-1}(R)=\{0\}$の時，RがAB(N-1)を満たせば，$\varDelta(R)$は連結である．

特に，Rが二次元ならば，$H^1(R)=\{0\}$なる限り$\varDelta(R)$は連結となる．さて，上の結果に依れば，$\varDelta(B^N)(N\geqq 2)$，又は更に一般に，$N=2$ なら任意の，$N>2$ なら一様楕円型の，Riemann計量dsを与えたときのRiemann多様体(B^N,ds)に対しての$\varDelta(B^N,ds)$ $(N\geqq 2)$，は連結であることが分かる．勿論，$\varDelta(B^N,ds)(N>2)$が連結とならぬ，従ってAB(N-1)が満たされぬ，Riemann計量dsがB^N上に存在する事も示される．

t-design 構成の現状

(大阪教育大学) 鈴木 寛

DEF. V : v-element set

$\binom{V}{r}$: the family of r-element subsets of V

$0 \le t \le k \le v$ integers $\lambda = 1$ のときは $S(t, k, v)$

$\phi \ne \mathcal{B} \subset \binom{V}{k}$: $S_\lambda(t, k, v)$ または t-(v, k, λ) design

$\Leftrightarrow$ $\lambda(\alpha) = \#\{B \in \mathcal{B} \mid \alpha \subset B\} = \lambda$ for $\forall \alpha \in \binom{V}{t}$

$\mathcal{B}$: nontrivial design $\Leftrightarrow$ $0 < t < k < v$, $\mathcal{B} \ne \binom{V}{k}$

よい design : nontrivial で t が大きく ($t \geqq 4$, $\geqq 7$) λ が小さい ($\lambda \doteqdot 1$)

Theorem (L. Teirlinck : 1985) Discrete Math 65, 1987, 301–311

$0 < k \le v$, λ : integers

Suppose $(k!)^{2k-1} \mid \lambda$, $\lambda \mid v-k+1$, let $m = v-k+1/\lambda$

$\Rightarrow$ $\binom{V}{k} \overset{\exists}{=} \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_m$ (disjoint)

s.t. $\mathcal{F}_i$: $S_\lambda(k-1, k, v)$

$t \geqq 7$ の design は Teirlinck のもの以外 知られていない $\lambda \gg 1$

$t = 6$ の design は 〃 有限個しか知られていない $\lambda > 1$

$t = 4, 5$ の design は いくつかの series 知られている

$\lambda = 1$ のものは 有限個 Hanani Alltop

$t = 3$ の design は よく知られ. $\lambda = 1$ のものも いくつかの series つくられている

$t = 2$ の 〃 存在の必要十分条件は 求めようとしている. Wilson

(<u>Construction 0</u> geometrical)

<u>Construction 1</u> 群を使う方法 $G \le S^V \simeq S_v$

$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_e$: $\binom{V}{t}$ の G orbits, $\Delta_1, \cdots, \Delta_f$: $\binom{V}{k}$ の G-orbits.

$\mathcal{B} = \Delta_{i_1} \cup \cdots \cup \Delta_{i_s}$: $S_\lambda(t, k, v)$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{\ell=1}^{s} A_{tk}[\Gamma_j, \Delta_{i_\ell}] = \lambda$ for $\forall\, 1 \le j \le e$ $A_{tk}[\Gamma, \Delta] = \#\{\delta \in \Delta \mid \gamma \subset \delta\}$, $\gamma \in \Gamma$

注. $e = 1$ とすると automatical しかし nontrivial $\rightarrow$ $t \le 5$ ほとんど $t \le 3$

$s = 1$ とすると G は $\binom{V}{[t/2]}$ 上 trans. $t \geqq 11$ では全く無理 おそらく $t \geqq 7$ では無理

- Alltop's $S_5(4,5,2^n+1)$ design, JCT 6, 1969, 320-322

  $q=2^n$, $n \geqq 5$ $(n,2)=1$

  $\Omega = GF(q) \cup \{\infty\}$ $\quad G = \left\{ \omega \to \dfrac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \;\middle|\; \alpha\delta-\gamma\beta \neq 0 \right\}$

  G : 3-transitive on Ω. $\quad \{\infty, 0, 1, \alpha, \alpha^2\}$

  $\alpha \in \Omega^* = \Omega - \{\infty, 0, 1\}$, Let $\Delta(\alpha) = \{\infty, 0, 1, \alpha, \alpha+1\}$

  $\mathcal{B} = \{ \Delta(\alpha)^\sigma \mid \sigma \in G, \ \alpha \in \Omega^* \}$

  とすると $\mathcal{B}$ は $(q-2)/6$ コの orbit のはりあわせで $S_5(4,5,2^n+1)$ となる.

$\boxed{Q}$ Alltop design の variation をつくれないか

  $\lambda < 5$ とか $v = 2^n+1$ をもう少し一般に

  $\mathcal{B}_2 = \{ B \cap \Omega - \{\infty, 0\} \mid B \in \mathcal{B}, \ B \supset \{\infty, 0\} \}$

  とすると $\mathcal{B}_2$ は $S_1(2,3,2^n-1) \cup S_1(2,3,2^n-1) \cup S_3(2,3,2^n-1)$

  たぶんてきとうな n について $\quad \{1,\alpha,\alpha+1\}, \quad \{1,\alpha,1/\alpha\} \quad \{1,\alpha,\alpha/\alpha+1\}\{1,\alpha,\alpha^{-1}\}\{1,\alpha$

  $\mathcal{B} \doteqdot S_1(4,5,2^n+1) \cup S_1(4,5,2^n+1) \cup S_3(4,5,2^n+1)$

  $S_1(3,4,2^n)$

- Bierbrauer $\quad S_\lambda(4,k,2^n+1)$

  いろいろな k, λ について variation をつくっているが $\lambda > 5$

Construction 2 (Orthogonal) array を使う方法

DEF. N : n-element set $\quad Q$: q-element set

$\phi \neq \mathcal{B} \subset Q^N = \{ f : N \to Q \}$: $OA(\lambda; m, n, q)$

$\Leftrightarrow$ for $\forall \alpha \in Q^M \quad M \in \binom{N}{m}$

$\lambda(\alpha) = \#\{ f \in \mathcal{B} \mid f|_M = \alpha \} = \lambda$

注. $\lambda=1$ のものが大切 $\quad |\mathcal{B}| = \lambda q^m$, $OA(m,n,q)$

$\mathcal{B} \ni f = \{ (f(x), x), x \in N \} \subset \binom{Q \times N}{n}$ ともみる

DEF. $V = V(n, q)$: n dimensional row vector space over $GF(q)$ with natural inner product.

C (subspace of V) : $[n, m, d; q]$ code $(\subset V)$

$\Leftrightarrow$ C : m-dim subspace of V.

$d = d(C) = \min\{ wt(c) \mid c \in C - \{0\} \}$

$wt(c) = \#\{ i \mid c_i \neq 0 \}$ $\quad c = (c_1, \cdots, c_n)$

$H = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-m} \end{pmatrix}$: parity check matrix if $\langle a_1, \cdots, a_{n-m} \rangle = C^{\perp}$

d : lin. dep. な H の column の最小数.

C : M.D.S (maximum distance separable) code

$\Leftrightarrow$ $d = n - m + 1$

$\Leftrightarrow$ H の どの $n-m$ 列 も 一次独立

$\Leftrightarrow$ C : $OA(1;\ m,\ n,\ q)$

$\Leftrightarrow$ $C^{\perp}$: $OA(1;\ n-m,\ n,\ q)$

(上は C が linear subspace の場合)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & \cdots & a^{q-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a^{q-m+1} & \cdots & a^{(q-2)(q-m+1)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \langle a \rangle = GF(q)^{\times}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & a^{q-2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 & \cdots & a^{2(q-2)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad q = 2^t$$

RS, RS^1, RS^2, RS^3

$M(m, q) = \max_{n} [n, m, n-m+1; q]$

$\boxed{Q}$ Conjecture :
$$M(m, q) = \begin{cases} q+1 & 2 \leq m \leq q \\ m+1 & q < m \end{cases}$$

except for $M(3, q) = M(q-1, q) = q+2$ if $q = 2^s$

* True for $m \leq 5$, $q \leq 11$, or $q > (4m-9)^2$

Theorem : (NacNesh)

$r = \prod q_j$ $\quad$ q_j : powers of distinct primes

$\Rightarrow \exists OA(1; m, n, r)$ $\quad n = 1 + \max(m, \min q_j)$

① $S(2, q, q^2)$

$\mathcal{B}$: $OA(2, q, q)$: RS^1 q: prime power の時

$\mathcal{B} \subset Q \times Q$ $\quad \mathcal{B}' = \{ Q \times \{a\} \mid a \in Q \}$

$\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \tilde{\mathcal{B}}$: $S(2, q, q^2)$

($\because$ $(x, a), (y, b)$ $\quad a \neq b \rightarrow M = \{a, b\}$ $\quad Q^M$ の元)
$\quad a = b$

実は この場合は $\exists S(2, k, k^2) \Leftrightarrow \exists OA(2, k, k)$

② $S(2, q+1, q^2+q+1)$

$\mathcal{B} \subset \underset{q}{Q} \times \underset{q+1}{R}$, $\quad OA(2, q+1, q)$: RS^2 $\qquad V = Q \times R \cup \{x\}$

$\mathcal{B}' = \{ Q \times \{a\} \cup \{x\} \mid a \in R \}$

$\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \tilde{\mathcal{B}}$: $S(2, q+1, q^2+q+1)$

③ $S(2, k, v)$
$OA(2, k, k-1)$ $\Rightarrow S(2, k, (k-1)v+1)$

④ $\left.\begin{array}{l} S(3, k+1, v+1) \\ S(3, k+1, k^2+1) \\ OA(3, k+1, k) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists S(3, k+1, kv+1)$

k: prime power ?

⑤ $S(3, k, v+1)$
$S(3, k, (k-2)(k-1)+2) \Rightarrow \exists S(3, k, (k-2)v+2)$
$OA(3, k, k-2)$

$k \mid 12$ $\quad k = 4, 6, \overset{?}{12}$ $\qquad \left(\begin{array}{l} S(3, 4, 2^n) \\ S(3, 4, 8) \Rightarrow S(3, 4, 2^{n+1}) \\ OA(3, 4, 2) \end{array} \right.$

Q. 一般の t について この型の (いみのある) construction ができるか.

Construction 3. $\quad$ Extension Theorem.

Theorem (Alltop) $\quad$ JCT (A) 12, 1972

$\exists S_\lambda(t, k, 2k+1) \Rightarrow \exists S_\lambda(t+1, k+1, 2k+2)$
if t: even

Q この型の定理を generalize せよ.

弾性方程式の散乱核について　(1990. 1. 31)

茨城大教育学部　曽我日出夫

弾性体$\Omega(\subset\mathbb{R}^n)$の微小な振動を考え、各点 x の時刻 t における変位ベクトルを $u(t,x) = {}^t(u_1,\dots,u_n)$ とすると、 $u(t,x)$ は次のような形の方程式をみたす。

$$(\partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j})u(t,x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times\Omega.$$

ここで $a_{ij} = (a_{ipjq})$ は $n\times n$ 行列であり、詳しい仮定は以下で述べる。最も典型的な例は次の等方性の場合である。

$$\left[\partial_t^2 - \left\{\mu\Delta + (\lambda+\mu)\begin{pmatrix}\partial_{x_1}\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_1}\partial_{x_n}\\ \cdots\cdots\\ \partial_{x_n}\partial_{x_1}\cdots\partial_{x_n}\partial_{x_n}\end{pmatrix}\right\}\right]u(t,x) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}\times\Omega.$$

さらに Neimann または Dirichlet 型の境界条件を課する。Ωを外部領域とし、上の混合問題に対して次のことを試みる。

(i) 解の存在と一意性を示すこと。

(ii) Lax-Phillips 流 ([2])の散乱論を構成すること。

(iii) 散乱核 $S(s,\theta,\omega)$ に対して Majda [3](Soga [5])のような表現式を得ること。

(iV) $S(s,\theta,\omega)$ の特異点に関して Majda [3] に対応する結果を得ること。

(i) について。 次の条件 (A.1), (A.2) を仮定すると、ある適当な初期値の空間において解の存在と一意性が示せる (Shibata-Soga [4])。

(A.1) $$a_{ipjq} = a_{pijq} = a_{jqip}, \quad i,j,p,q = 1,\dots,n.$$

(A.2) $$\sum_{i,p,j,q=1}^{n} a_{ipjq}\varepsilon_{jq}\overline{\varepsilon}_{ip} \geqq \delta\sum_{i,p=1}^{n}|\varepsilon_{ip}|^2 \quad \text{for any Hermitian matrices } (\varepsilon_{ij}).$$

(ii)について。 (A.1), (A.2) に加えて以下の (A.3) を仮定すると、波動作用素の完全性、初期値の translation 表現等が得られる (Shibata-Soga [4])。

(A.3) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ has eigenvalues of constant multiplicity.

(iii) について。 $\Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j$ の固有値を $\lambda_1(\xi) < \cdots < \lambda_d(\xi)$ とする。$\lambda_i(\xi)$ の固有空間への projection を $P_i(\xi)$ とする。(A.1) ～ (A.3) と

(A.4) Every slowness surface $\{\xi: \lambda_i(\xi) = 1\}$ is strictly convex.

のもとで次のような Majda [3] に相当する散乱核の表現式が得られる (Soga [6,9])。

$$S(s,\theta,\omega) = \sum_{i,j=1}^{d}\lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{4}}\int_{\partial\Omega}\{P_i(\theta)(\partial_t^{n-2}Nv_j)(\lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{2}}\theta\cdot x-s,x;\omega) - \lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot P_i(\theta)(N x\cdot\theta)(\partial_t^{n-1}v_j)(\lambda_i(\theta)^{-\frac{1}{2}}\theta\cdot x-s,x;\omega)\}dS_x \quad (\omega \neq \theta).$$

ここで、$N = \sum \nu_i a_{ij}\partial_{x_j}$ （$(\nu_1,\ldots,\nu_n)$は $\partial\Omega$ の単位外法ベクトル）、v_j は平面波 $-2^{-1}(-2\pi i)^{1-n}\lambda_j(\omega)^{-\frac{1}{4}}\delta(t-\lambda_j(\omega)^{-\frac{1}{2}}\omega\cdot x)P_j(\omega)$を入射させたときの反射波を表す。

<u>(iv)について</u>。 上の表現式を使って、$S(s,\theta,\omega)$ の s に関する support などを調べる。任意の $\omega\in S^{n-1}$ に対して次のことが成立する（Soga [7,9]）。

(a) $\mathrm{supp}\left[P_i(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_j(\omega)\right] \subset (-\infty,\ r_{ij}(\omega)]$, $i,j = 1,\ldots,d$.

(b) $P_i(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_i(\omega)$ is not C^∞ at $s = r_{ii}(\omega)$.

ここで $r_{ij}(\omega) = -(\lambda_i(-\omega)^{-\frac{1}{2}}+\lambda_j(\omega)^{-\frac{1}{2}}) \min_{x\in\partial\Omega} x\cdot\omega$ である。山本氏 [10] は、等方性で Dirichlet 境界条件のもとで同種の問題を考察している。

$s = r_{ij}(\omega)$ $(i \neq j)$ が $P_i(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_j(\omega)$の特異点であるか否かは、以下に示すように非常にデリケートな問題である。以後，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial_t^2 - \sum \partial_{x_i}\partial_{x_j}$ は等方性とし、境界条件は Dirichlet とする。等方性のときは $\{\lambda_i(\xi)\} = \{\mu|\xi|^2, (\lambda+2\mu)\cdot|\xi|^2\}$ $(d=2)$となることに注意しよう。これからの結果は川下美潮氏（高知大理）との共同のものである（[1]）。

(c) $\partial\Omega$の平均曲率をHで表し、θ $(\in S^2)$ をωに垂直なベクトルとする。$\{x\in\partial\Omega;\ \min_{y\in\partial\Omega} y\cdot\omega\}$ 上で $\partial H/\partial\theta > 0$（又は$<0$）ならば ${}^t\theta P_1(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_2(\omega)$ は $s = r_{12}(\omega)$ においてC$^\infty$ でない。

(d) $\theta(\in S^2)$ を ωに垂直なベクトルとする。$\{x\in\partial\Omega;\ x\cdot\omega < \min_{y\in\partial\Omega} y\cdot\omega + \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ が有限個の部分に分かれ、各部分が θ に垂直な平面に関して対称であるとする。このとき $s = r_{12}(\omega)$の近傍で ${}^t\theta P_1(-\omega)S(s,-\omega,\omega)P_2(\omega) = 0$ となる。

[1] M. Kawashita and H. Soga: Mode-conversion of the scattering kernel for the elastic wave equation, to appear.
[2] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory. Academic Press, New York (1967).
[3] A. Majda: A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies. Comm. Pure Appl. Math. 30, 165-194 (1977).
[4] Y. Shibata and H. Soga: Scattering theory for the elastic wave equation, to appear in Publ. RIMS Kyoto Univ.
[5] H. Soga: Singularities of the scattering kernel for convex obstacles. J. Math. Kyoto Univ. 22, 729-765 (1983).
[6] H. Soga: On the representation of the scattering kernel for elastic wave equation. Proc. Japan Acad. 64 Ser. A (1988), 65-67.
[7] H. Soga: Asymptotic solutions of the elastic wave equation and their applications. Bull. Fac. Educ. Ibaraki Univ. 37 (1989).
[8] H. Soga: Asymptotic solutions of the elastic wave equation and Reflected waves near boundaries, to appear.
[9] H. Soga: Representation of the scattering kernel for the elastic wave equation and singular support of its kernel, in preparation.
[10] K. Yamamoto: The behavior of scattered plane waves of elastic wave equations and applications to scattering theory, to appear in J. London Math. Soc.

Almost relative projectives と
中山環

大阪市大　原田　学

以下Rは単位元をもつ環 J をそこ根基とする。

$$\bar{R} = R/J = \sum \oplus \bar{e}'_{ij} R$$

よりRのべき等元 e_{ij} で

$$R = \sum \oplus e_{ij} R \quad , \quad \overline{e_{ij}} = \bar{e}'_{ij}$$

となるe_{ij}をlifting idempotentという。この概念を拡張して LPSM (lifting property of simple modules modulo radical)を１９８２年に導入した。これを大城によってlifting moduleという新しい概念へ拡張された　（１９８３年）。　これはdual continuous moduleとして広く研究されたmoduleの重要な性質の１つである。

このlifting module　を別の方向から研究する方法を考察しているうちに　次の様なM-projective（東屋　１９７２年）の概念を拡張したalmost M-projeciveと同値の性質であることが分った。

N.M,をR-modulesとして　任意のdiagram

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & & \downarrow h & & \\ M & \xrightarrow{\nu} & H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して

1) $\hat{h}: N \longrightarrow M$で　$\nu\hat{h} = h$となるものが存在するか

2) Mのnon-zero direct summand M_1 で $\hat{h}: M_1 \longrightarrow N$で $h\hat{h} = \nu|M_1$と成る物が存在する。

この時　Nをalmost M-projectiveという。（１）のみの時が　M-projectiveである）。ここで　Mがloca module eR/Aでなければ almost M-projective は常にM-projectiveとなる。このことよりalmost M-projectiveとM-projectiveとの相違はlocal module　の時に現れる。

MがM_1-projective, M_2-projectiveであればMは常に$M_1 \oplus M_2$-projectiveであるが（東屋）almost M_i-projectiveでは $M_1 \oplus M_2$がLPSMを持つ時に限りMが$M_1 \oplus M_2$-projectiveになる。さらに$M_1 \oplus M_2$がLPSMをもつことは　Rが中山環と同値になる。この様にしてM-projectiveのもつ性質がalmost M-projectiveにも保証される環の特徴として中山環を研究するのが目的である。

次の様な性質は中山環に深く関わる

１）　local modulesは互にalmost relative projectiveである

２）　local mdoules eR/A　がalmsot eR/B-projectiveである（eは原始べき

等元を亘）。

3） almost relative projectivityが直和に関して閉じている。

4） M_0がalmost M_1-projetive, not M_1-projectiveであるとする。M_0がM_2-projectiveであればM_1は常にM_2-projectiveであるが、M_1がalmost M_2-projectiveでは一般にM_1がalmost M_2-projectiveにならない。この事が保証されている。

上において M_i 等をlocal modulesに制限するか否かで環が変ってくる。

On the cohomology of arithmetic groups — W. Casselman

Let

G — real points on a reductive group defined over $\mathbb{Q}$
Γ = an arithmetic subgroup
X = the associated symmetric space $\cong G/K$ if
K = a maximal compact subgroup of G

The cohomology of the group Γ = $H^\bullet(\Gamma, \mathbb{C})$ is the same as that of the manifold $\Gamma\backslash X$ since X is contractible. Since $\Gamma\backslash G \to \Gamma\backslash X$ with fibre K is a principal bundle to which the tangent bundle is associated, it also turns out to be the Koszul relative Lie algebra cohomology $H^\bullet(\mathfrak{g}, K, C^\infty(\Gamma\backslash G))$ (where $\mathfrak{g}$ = Lie algebra of G), the cohomology of the Koszul complex

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C^\infty(\Gamma\backslash G)).$$

If $\Gamma\backslash G$ is compact, then the space $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ may be written as a direct sum $C_0^\infty(\Gamma\backslash G) \oplus$ a complement, where $C_0^\infty(\Gamma\backslash G)$, = the space of functions f on $\Gamma\backslash G$ such that $Xf = 0$ for every $X \in Z(\mathfrak{g})$ ~~such that~~ in the augmentation ideal, and as a generalization of Hodge theory we know that the $(\mathfrak{g},K)$-cohomology of $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ is isomorphic to $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), C_0^\infty(\Gamma\backslash G))$ which is also $\sum \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi)$ if $C_0^\infty \cong \bigoplus \pi$ is a decomposition into irreducible unitary representations. The possible π occurring have been classified by Parthasarathy, Kumaresan, Vogan, Zuckerman (after lots of work by others)

If $\Gamma\backslash G$ is not compact, any description of the cohomology in detail must take into account the continuous spectrum of $\Gamma\backslash G$, the automorphic forms generated by Eisenstein series. The replacement for Hodge theory is a conjecture of Borel that the cohomology of $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ is the same as that of the subspace ~~$C_0^\infty(\Gamma\backslash G)$~~ $A_0(\Gamma\backslash G)$ of automorphic forms ~~annihilated~~ annihilated by some power of $\mathfrak{m}_0$. This is perhaps very close to being proven for all groups Γ. As a consequence one obtains a filtration of $H^\cdot(\Gamma\backslash X)$ indexed by boundary components of the Satake compactification of $\Gamma\backslash X$; the cohomology of ~~each~~ the associated graded complex is calculated in terms of Harish-Chandra tempered forms on the boundary component.

分岐図式の位相型に対する代数的公式

西村尚史（横浜国大・教育）

特異点論の分岐問題への一つの応用を与える。

ワンパラメータ付の C^∞ 写像　$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ の零点集合 $f^{-1}(0)$（分岐図式と呼ばれる）を考える。$f(0,0)=0$ を仮定しておき，U を $(0,0)$ の十分小さな近傍とすると，一般には，$f^{-1}(0) \cap U - \{(0,0)\}$ は空集合もしくは何本かの smooth connected curve の和集合となる。

$$b_+(f) = \#[\text{connected component of } f^{-1}(0) \cap U \text{ which lies in the half region } \lambda > 0]$$
$$b_-(f) = \#[\text{connected component of } f^{-1}(0) \cap U \text{ which lies in the half region } \lambda < 0]$$

とおく。ここに，λ はパラメータである。$b_+(f)$, $b_-(f)$ が $f^{-1}(0)$ の原点 $(0,0)$ での局所位相型を決定することは明らかである。$b_+(f)$, $b_-(f)$ を f から計算できるようにすることが目標である。

local な話なので，C^∞ map germ $f = (f_1, \cdots, f_n) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ を考えればよいが，さらに，逆関数定理が通用しない場合のみを考えれば十分なので，

$$Jf(0,0) = \det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)\right]_{1 \leq i,j \leq n} = 0$$

を仮定しておく。さて，C^∞ map germ f から作られる２つの C^∞ map germs

$$(f, Jf) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0))$$
$$(f, \lambda Jf) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0))$$

と，それらの local algebras $Q(f, Jf)$ 及び $Q(f, \lambda Jf)$ を考える。
$\dim_{\mathbb{R}} Q(f, Jf) \leq \dim_{\mathbb{R}} Q(f, \lambda Jf)$ はすぐわかる。

$g = (f, \lambda Jf)$ 又は $(f, Jf) : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0))$ とすると，
（中山の補題より） $\dim_{\mathbb{R}} Q(g) < \infty$ ならば $g^{-1}(0) = \{0\}$
となるので，この場合は g の写像度 $\deg(g)$ が定義できる。次が我々の主張である。

<u>定理.</u> $f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ C^∞ map germ with $\dim_{\mathbb{R}} Q(f, \lambda Jf) < \infty$ とする。そのとき，

$$b_+(f) + b_-(f) = 2\deg(f, \lambda Jf)$$
$$b_+(f) - b_-(f) = 2\deg(f, Jf)$$

この定理の条件 $\dim_{\mathbb{R}} Q(f, \lambda Jf) < \infty$ は C^∞ map germ $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0,0)) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ に対する generic な条件であることも証明される。
C^∞ map germ の写像度の代数的公式を与えた Eisenbud-Levine の定理 (Ann. of Math., 106 (1977), 19-38) とこの定理を結びつければ，$b_+(f)$ や $b_-(f)$ の代数的公式が得られる。

以上は，福田拓生氏（東工大・理），青木憲二氏（専修大・経営）との共同研究である。

<u>文献.</u>

T. Nishimura, T. Fukuda & K. Aoki : An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 108 (1989), 247-265.

シンプレクティック構造についての1つの話題

大阪大・教養・ 大和健二

(M,ω) を シンプレクティック多様体とする。 この ω に対し，リーマン計量 g と 概複素構造 J で

$$(*)\quad {}^{\forall}X, Y \in TM \quad g(X,Y) = g(JX, JY)$$
$$\omega(X,Y) = g(JX, Y)$$

となるものが存在する。 ω に対して，上の $(*)$ をみたす (g, J) で J が積分可能なものが存在する時，ω は Kählerian という事とする。

よく知られているように，ω は局所的にはいつも標準的な Kählerian シンプレクティック構造 $\sum_i dx_i \wedge dy_i$ と同型である。何らかの不変量により，2つのシンプレクティック構造が，大域的に，同型でない事を見てみたい。

さて，シンプレクティック多様体 (M,ω) に対し，$H^1(M,\mathbb{R})$ の部分集合に値をとるシンプレクティック微分同相に関する不変量 Γ_ω, $\hat{\Gamma}_{[\omega]}$ ($\Gamma_\omega \subset \hat{\Gamma}_{[\omega]}$ である) が Banyaga - Urwin により定義された。 前者 Γ_ω は ω にのみ依存し，$\hat{\Gamma}_{[\omega]}$ は ω のコホモロジー類 $[\omega]$ により決まる不変量である。 これについて，殆んど判っていませんが，Banyagaの問題として

(1) いつも $\Gamma_\omega = \hat{\Gamma}_{[\omega]}$ か？

(2) ω が Kählerian の時，Γ_ω は discrete set という事は判っているが，いつも Γ_ω は discrete set か？

これらには興味があります。

ここでは，(2) について，せめて non-Kählerian なシンプレクティック構造のいくつかの例とその判定法について，話たいと思います。

Quasilinear Reaction–Diffusion Systems

Herbert Amann

We discuss a variety of examples of reaction–deffusion systems, which are all taken from various fields of applications. The common feature of these examples is that they all involve systems of parabolic differential equations, which are either strongly coupled or highly degenerate. We indicate how these examples can be considered as concrete realizations of abstract differential equations of the form

$$\dot{u} + A(u)u = f(u) \tag{$*$}$$

in suitable Banach spaces. Finally we indicate the difficulties in solving $(*)$ and the techniques which are used to overcome these difficulties.

On Tests for Stability.

R. Rautmann

For quasimonoton increasing C^1-vectorfunctions f in $\mathbb{R}^n$ (and even for more general functions) the local asymptotic stability of a critical point x^* of

$$(*)\ \frac{d}{dt} x = f(x)$$

can be checked by an $O(n^3)$-step calculation, if we use that a real Z-matrix is positively stable if and only if it is of monotone type.

In the case of a Lipschitz-continuous quasimonotone increasing vectorfunction f on $\mathbb{R}^n$, the flow-invariance with respect to (*) of axes-parallel closed rectangles $[a^-, a^+] \subset \mathbb{R}^n$ is equivalent to $0 \leq f(a^-)$ and $f(a^+) \leq 0$.

For a continuous quasimonoton increasing vectorfunktion f on $\mathbb{R}^n$, the global asymptotic stability of a critical point x^* of (*) follows from the sufficient condition that x^* is situated on a C^1-curve $X(s) \in \mathbb{R}^n$, which (in the componentwise ordering of $\mathbb{R}^n$) is strictly increasing from $-\infty$ to ∞ and on which

$$0 < f(X(s)) \text{ for } X(s) < x^*, \text{ and } f(X(s)) < 0 \text{ for } x^* < X(s)$$

holds. By the well-known comparison theorems, these results also apply to weakly coupled quasimonoton increasing parabolic systems.