



Title	複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds
Author(s)	鈴木, 治夫
Description	1990年7月23日~25日 北海道大学研究集会報告書
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 19, 1
Issue Date	1990-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/5138
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/5453
Type	departmental bulletin paper
File Information	19.pdf



複素多様体のトポロジー

Topology of Complex Manifolds

1990年7月23～25日
北海道大学研究集会報告集

鈴木 治夫 編集

Series # 19. December, 1990

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- # 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- # 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- # 4: J. Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- # 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- # 6: T. Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- # 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- # 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- # 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- # 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と $K3$ 曲面, 91 pages. 1988.
- # 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- # 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), “特異点論とその応用” 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium “Singularity Theory and its Applications,” 317 pages. 1989.
- # 13: M. Suzuki, “駆け足で有限群を見てみよう” 1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- # 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989.
- # 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- # 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. I, 258 pages. 1990.
- # 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. II, 235 pages. 1990.
- # 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

目次

	ページ
序文	v
参加者リスト	vii
Classification of germs of contracting maps and classification of compact complex surfaces Georges Dloussky	1
Liouville surfaces 清原 一吉 (Kazuyoshi Kiyohara)	11
On intrinsic measures of complex manifolds 小林 昭七 (Shoshichi Kobayashi)	21
Mapping class group の表現と 3 次元多様体の不変量 河野 俊丈 (Toshitake Kohno)	31
Bidegree (4,4) の実代数曲線で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆の coarse projective classification 松岡 幸子 (Sachiko Matsuoka)	39
Symplectic double groupoids of $(ax + b)$-groups 三上 健太郎 (Kentaro Mikami)	53
Geometric construction of canonical stratification of smooth mappings: The canonical stratification of jet space 中居 功 (Isao Nakai)	63
Geometrically tame 群について 大鹿 健一 (Kenichi Ohshika)	91
Rigidity problem for fiber spaces of Abelian varieties 斎藤 政彦 (Masa-Hiko Saito)	99
A relation of CFT to the theory of genera 清水 勇二 (Yuji Shimizu)	109
共形構造と Lie 接触構造について 山口 佳三 (Keizō Yamaguchi)	121

序

1990年度科学研究費補助金 総合研究(A)、位相幾何学の総合的研究(研究代表者 加藤十吉氏)によるプロジェクトの一つとして研究集会「複素多様体のトポロジー」が1990年7月23日から25日まで北海道大学理学部数学教室で開催された。本報告はその内容を記録するものである。

研究集会は複素多様体論とトポロジーとの直接、間接的な関連を考察することを動機とした。小林昭七氏、G. Dloussky氏、斎藤政彦氏の仕事は複素多様体、代数多様体を主体とするもの、河野俊丈氏、清水勇二氏、大鹿健一氏、中居 功氏、松岡幸子氏の仕事はトポロジーに強く関係しているもの、三上健太郎氏、山口佳三氏、清原一吉氏の仕事はシンプレクティック構造、接触構造に関係するものである。本研究集会において、複素多様体とトポロジーの両方のかかわりの重要性に対する認識を一層深めることが出来た。

貴重な話題を提供して下さった講演者各位、研究代表者 加藤十吉氏、及び会場の準備等で協力を頂いた北海道大学理学部数学教室の方々に謝意を表したい。

1990年12月19日

プロジェクト代表

鈴木治夫

参加者リスト

Georges Dloussky

福井 昌樹
二木 昭人
儀我 美一
清原 一吉
小林 昭七

河野 俊丈
小宮山晴夫
松岡 幸子
松田 晃一
三上健太郎
森 博
森本 徹
中居 功
中村 郁
西森 敏之
大森 常住
大鹿 健一
大矢 正義
斎藤 政彦
佐藤 穂
志賀 潔
清水 勇二
鈴木 治夫
諏訪 立雄
渡邊 誠
山口 佳三

Université de Provence

北海道教育大学（旭川）
東京工業大学
北海道大学
北海道大学

University of California Berkeley

北海道大学
九州大学
岩手大学
北海道大学
北海道大学
秋田大学
上越教育大学
北海道大学
北海道大学
北海道大学
北海道大学
北海道教育大学（岩見沢）
東京工業大学
東京電気大学
北海道大学
東京電気大学
岐阜大学
東北大学
北海道大学
北海道大学
北海道大学
北海道大学

**Classification of germs of contracting maps and
classification of compact complex surfaces**

GEORGES DLOUSSKY

University of Provence

Introduction:

The study of Hopf surfaces is based on the classification of germs of invertible contracting holomorphic mappings, i.e. of germs

$$f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

which are invertible and s.t. $Df(0)$ has eigenvalues a, b satisfy

$$0 < |a| \leq |b| < 1$$

the following theorem gives normal forms of these germs i.e. the simplest elements of the equivalence classes by the equivalence relation

$$(*) \quad f \sim f' \Leftrightarrow \exists \varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \text{ which is invertible and } \varphi f = f' \varphi$$

Theorem 0.1: If $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ is a germ of mapping such that $Df(0)$ has eigenvalues a, b with condition

$$0 < |a| \leq |b| < 1$$

then there exist an invertible germ $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, an integer $m \in \mathbb{N}^*$ and $t \in \mathbb{C}$ s.t.

$$g(z) := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = (az_1 + tz_2^m, bz_2) \text{ and } (b^m - a)t = 0.$$

These normal forms give immediately geometric properties of the primary Hopf surface associated to g , for example the existence of elliptic curves, and it is shown in [11,12] that

if we replace φ by $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ where $\phi_i \in \mathbb{C}[[z_1, z_2]]$ and ϕ has a formal inverse, the formal classification and the convergent classification are the same.

Definition 0.2: Let S a complex manifold of dimension n

1) Let $\Sigma = \partial B^n$ the sphere of radius 1 in \mathbb{C}^n and $f : (\mathbb{C}^n, \Sigma) \rightarrow S$ a germ of a holomorphic map from a neighbourhood of Σ to S which is biholomorphic on its image. We shall call such a germ a spherical shell and we shall say that f is a global spherical shell (G.S.S.) if $S \setminus f(\Sigma)$ is connected.

2) Let Σ be a smooth real compact hypersurface of S , Σ is called a strictly pseudoconvex hypersurface (S.P.H.) if there exist a neighbourhood N of Σ , and a strictly pseudoconvex function Ψ of class C^2 on N such that $\Sigma = \{\Psi = 0\}$. We shall say that Σ is a global strictly pseudoconvex hypersurface (G.S.P.H.) if moreover, $S \setminus \Sigma$ is connected.

3) A S.P.H. $\Sigma \subset S$ is the boundary of a Stein space, if there exists a neighbourhood N of Σ , an open embedding

$$i : N \hookrightarrow X$$

in a complex space such that $i(\Sigma)$ is the boundary of a relatively compact open set.

Remark: This last condition is sufficient to show that $i(\Sigma)$ is the boundary of a relatively compact open Stein normal space.

Now suppose that S is a compact surface of the VII_0 -class of Kodaira i.e. S is a minimal surface with first Betti number $b_1(S) = 1$. Suppose moreover that $\underline{b_2(S) > 0}$, and consider the following conditions:

- i) S contains a G.S.S.
- ii) S contains a G.S.P.H. which is the boundary of a Stein space
- iii) S contains a G.S.P.H.

We have i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) and ii) \Rightarrow i) by [8]. Till now there is no example of a compact minimal surface satisfying $b_1(S) = 1$ and $b_2(S) > 0$ and not i), nevertheless there exist S.P.H. which are not the boundary of a Stein space (see [4,13]).

The basic construction: Denote by $B_\epsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| < 1 + \epsilon\}$, $B := B_0 = B^2$.

Denote by $\pi = \Pi_1 \cdots \Pi_n : B_\epsilon^\Pi \rightarrow B_\epsilon$ the composition of n blowing-ups over the ball B_ϵ in \mathbb{C}^2 , and $\sigma : \bar{B} \rightarrow B_\epsilon^\Pi$ a holomorphic mapping defined on a neighbourhood of \bar{B} , biholomorphic on its image, and

$$A_\epsilon := B_\epsilon^\Pi \setminus \sigma(\bar{B}_{-\epsilon})$$

Since $\sigma\pi$ defines a biholomorphic mapping between neighbourhoods of $\Sigma = \partial B$ and $\sigma(\Sigma)$ we obtain by gluing these neighbourhoods a compact surface $S(\Pi, \sigma)$ which admits by construction a G.S.S.

$$f(\Pi, \sigma) : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S(\Pi, \sigma)$$

If $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is an infinite sequence of copies of A_ϵ , we may glue A_i with A_{i+1} thanks to $\sigma\pi$ to obtain the universal covering space $(\tilde{S}, \tilde{\omega}, S)$ of $S = S(\Pi, \sigma)$ with an automorphism $\tilde{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ which sends a point $z_i \in A_i$ on the same point z_{i+1} of A_{i+1} .

Theorem 0.3 [7]: If S contains a G.S.S. $f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$, there exists (Π, σ) and an isomorphism $\alpha : S \xrightarrow{\sim} S(\Pi, \sigma)$ such that the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc}
 & & S \\
 & f & \\
 & \nearrow & \\
 (\mathbb{C}^2, \Sigma) & & \downarrow \alpha \\
 & \searrow & \\
 & f(\Pi, \sigma) & \\
 & & S(\Pi, \sigma)
 \end{array}$$

In order to obtain surfaces $S(\Pi, \sigma)$ without exceptional curves of the first kind we suppose in the following that:

- 1) $\Pi = \Pi_1 \cdots \Pi_n$ is the composition of n blowing ups over $0 \in B^2$ s.t. for every $i \geq 2$, Π_i is the blowing-up of a point $0_{i-1} \in C_{i-1}$ and $C_{i-1} : \Pi_{i-1}^{-1}(0_{i-2})$
- 2) $\sigma(0) = 0_n \in C_n$.

Now, $F = \Pi\sigma$ is a non invertible contracting mapping from B^2 to B^2 and it can be easily seen that the holomorphic structure on the surface associated to (Π, σ) depends only on the germ $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$

Problem: Classify all such germs by the equivalence relation (*) or more simply by the formal equivalence, and find normal forms.

I) Surface containing a global spherical shell with positive second Betti number

The following proposition show that the rational curve of the universal covering space have a canonical order induced by the order of creation in each annulus A_s , that for each curve C , all the curves $C' > C$ may be collapsed on a point of C , and so on S , if $n = b_2(S)$, there are n families of G.S.S. The following construction is independent of the choice of a G.S.S.

Proposition 1.1 [1]: "Intrinsic collapsing of the universal covering space on a curve"

1) For every compact curve $C \subset \tilde{S}$, there exist (\hat{S}_C, p_C) where \hat{S}_C is a manifold with one end denoted by ∞ , and

$$p_C : \tilde{S} \rightarrow \hat{S}_C$$

is an isomorphism from $\tilde{S} \setminus p_C^{-1}(\hat{0}_C)$ on $\hat{S}_C \setminus \{\hat{0}_C\}$ such that $\hat{C} := p_C(C)$ is an exceptional curve of the first kind.

2) We have an order relation on the set of the curves of \tilde{S}

$$C \leq C' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{the exists } \Pi_{C'}^C : \hat{S}_{C'} \rightarrow \hat{S}_C \text{ which is the composition} \\ \text{of blowing-ups uniquely determined by } C \text{ and } C' \text{ such that} \\ \begin{array}{ccc} & \tilde{S} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \hat{S}_{C'} & \xrightarrow{\Pi_{C'}^C} & \hat{S}_C \\ \text{is commutative} & & \end{array} \end{array} \right.$$

We denote by $C + 1$ (resp. $C - 1$) the curve which follows (resp. precedes) C .

3) For every C , there exists a unique isomorphism $\sigma_C^{C+n} : \hat{S}_C \rightarrow \hat{S}_{C+n}$ such that the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{S} \\ p_C \downarrow & & \downarrow p_{C+n} \\ \hat{S}_C & \xrightarrow{\sigma_C^{C+n}} & \hat{S}_{C+n} \end{array}$$

is commutative.

Definition 1.2: We call the family

$$F_C := \Pi_{C+n}^C \sigma_C^{C+n} : (\hat{S}_C, \hat{0}_C) \rightarrow (\hat{S}_{C+n}, \hat{0}_{C+n})$$

the family of germs associated to S .

Lemma and Definition 1.3 [1]: We have for every C

$$0 \leq |\text{tr} DF_C(\hat{0}_C)| < 1$$

This number is independent of the choice of C therefore we call the number

$$\text{tr}(S) := \text{tr} DF_C(\hat{0}_C)$$

the trace of S

It is easy to see that if in a sequence of n blowing-ups $\pi = \Pi_1 \cdots \Pi_n$ we want that $C_1^2 = -4$ then necessarily $C_2^2 = -2$. More generally if we want that $C_1^2 = -(k+2)$, necessarily $C_2^2 = \cdots = C_n^2 = -2$. After such a sequence, we can blow up a generic point or repeat such type of sequence. If $n = b_2(S)$ the sequence of self-intersections of curves in \tilde{S} is periodic of period n . That is the reason why we introduce the following notations:

Notation: If $(C_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ is the sequence of rational curves of the universal covering space \tilde{S} of S , ordered in the canonical way we denote by

$$a(S) = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (-C_i^2)_{i \in \mathbb{Z}}$$

the sequence of opposite self-intersections of curves.

We call the sequence $s_k := (k + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{k-1})$ a singular sequence and $r_k := (\underbrace{2, \dots, 2}_k)$ a regular sequence. A period of $a(S)$ can be written uniquely up to a circular permutation as

$$\sigma_0 \cdots \sigma_{m-1}$$

where $\sigma_i = s_{k_i}$ or $\sigma_i = r_{k_i}$ and if σ_i is regular, σ_{i+1} is singular (mod. m).

We denote

$$a(S) := (\overline{\sigma_0 \cdots \sigma_{m-1}})$$

$$\sigma_n(S) := \sum_{i=j}^{j+n-1} a_i$$

We have [1]

$$2n \leq \sigma_n(S) \leq 3n$$

the sequence $a(S)$ determines completely the intersection matrix of rational curves of S [1 or 9]

Definition 1.4: A minimal surface with $n = b_2(S) \geq 1$ containing a G.S.S. is called generic (or parabolic) if $\sigma_n(S) = 2n$ and is called of Inoue-Hirzebruch if $\sigma_n(S) = 3n$.

We have:

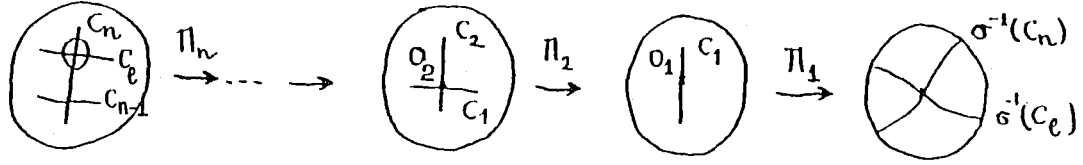
Proposition 1.5 [1]: S is generic if and only if $tr(S) \neq 0$

II) Inoue-Hirzebruch germs and Inoue-Hirzebruch surfaces

A construction of Inoue-Hirzebruch surfaces:

A germ $F = \Pi\sigma = \Pi_1 \cdots \Pi_n\sigma$ gives a I.H. surface if and only if

- i) For $2 \leq i \leq n$ 0_i is the intersection of 2 rational curves
- ii) If $0_n = \sigma(0) = C_n \cap C_l$, 0_1 belongs to one of the strict transforms by π_1 of $\sigma^{-1}(C_n)$ or $\sigma^{-1}(C_l)$.



We call a such germ of mapping a *germ of I.H.* We associate to $F = \Pi\sigma$ the surface of I.H. $S(\Pi, \sigma)$ and we choose the numbering of the rational curves in the universal covering space such that if $a(S) = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, we have $a_1 = -C_1^2$.

Denote by A' and A'' the matrices

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

We associate to F the matrix

$$A(F) = A_1 \cdots A_n$$

where

$$A_i = \begin{cases} A' & \text{if } a_{i-1} = 2 \\ A'' & \text{if } a_{i-1} > 2 \end{cases}$$

Theorem 2.1 [2]: Let $F = \Pi\sigma$ a germ of mapping of Inoue-Hirzebruch and let

$$A(F) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

be the matrix associated to F . Then F is isomorphic to the germ

$$H_a : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (z_1, z_2) \rightarrow (z_1^p z_2^q, z_1^r z_2^s)$$

where $a = a(S)$.

Theorem 2.2 [2,3]: 1) Let S and S' two surfaces of I.H. such that $b_2(S) = b_2(S')$. The following conditions are equivalent

- i) S is isomorphic to S'
- ii) $a(S) = a(S')$

iii) S and S' have the same intersection matrix.

2) The Inoue-Hirzebruch surface are those constructed in [6] denoted by S_ω and \hat{S}_ω .

Remarks: 1) The theorem 2.1 gives the normal form of the germs of I.H. and shows that the formal classification is equivalent to the convergent classification.

2) If S is not supposed to contain a G.S.S. but has $b_2(S)$ curves which form one or two cycles, S is an I.H. surface by [9]. See [10] for more general situation.

III) Germs and surfaces of trace different from zero.

Denote by \mathbb{C}_∞^2 the formal neighbourhood of $0 \in \mathbb{C}^2$ i.e. $\mathbb{C}_\infty^2 = (0, \mathbb{C}[[z_1, z_2]])$. We say that two endomorphisms $F, F' : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ are formally isomorphic if there exists an automorphism $\phi : \mathbb{C}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty^2$ such that

$$F\phi = \phi F'$$

Lemma 3.1 [1]: Let F and F' two germs formally isomorphic then the formal neighbourhood D^∞ and D'^∞ of the union of the rational curves are isomorphic.

Example 3.2: Let $N_t(z_1, z_2) := (t^n z_1 z_2^n, t z_2)$ with $0 < |t| < 1$. We have $N_t = \Pi\sigma$ where $\sigma(z_1, z_2) = (z_1, t z_2)$ and $\pi(u, v) = (u v^n, v)$. The surface associated to N is the Inoue Surface S_t^n . The curve $\{z_1 = 0\}$ is invariant by N and gives an elliptic curve in S_t^n .

Theorem 3.3 [1]: Let $F = \Pi\sigma : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, where π is composed of n blowings-ups and $t = \text{tr}DF(0) \neq 0$.

Then :

- 1) F is formally isomorphic to N_t . In particular F has an invariant formal curve.
- 2) The following properties are equivalent
 - i) F is isomorphic to N_t
 - ii) The invariant formal curve of F is convergent

The complete classification of germs with trace $\neq 0$ has been obtained by Enoki:

Theorem 3.4 [5]: Let $F = \Pi\sigma : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ where π is composed of n blowing-ups and $t = \text{tr}DF(0) \neq 0$. Then there exist complex numbers a_1, \dots, a_n s.t. F is isomorphic to the germ

$$E_t^a(z_1, z_2) = (t^n z_1 z_2^n + \sum_{i=1}^n a_i t^i z_2^i, tz_2)$$

Corollary 3.5: If $n = 1$ there are 3 classes of germs :

$$N(z) := (tz_1 z_2, tz_2) \quad \text{Inoue surface}$$

$$G(z_1, z_2) = ((z_1 + \alpha)tz_2, tz_2) \quad \text{for any } \alpha \neq 0 \text{ "generic case"}$$

$$H(z_1, z_2) = (z_1 z_2, z_1) \quad \text{Inoue-Hirzebruch surface.}$$

For a proof see also [9]. A direct proof can be obtained by deformation of germs.

Example 3.6: If Ψ satisfies $\Psi^{-1}G\Psi = N$ then there exists $a \neq 0$ s.t.

$$\Psi(z) := (az_1 + \alpha \sum_{k \geq 1} z_2^k t^{-k(k-1)/2}, z_2)$$

Ψ is never convergent since $|t| < 1$.

This example shows that when the trace is $\neq 0$ formal equivalence does not imply convergent equivalence.

Conjecture 1: If $F = \Pi\sigma$ then F is isomorphic to a germ

$$E_t^a(z) = \Pi\sigma$$

where $\pi = \Pi_1 \dots \Pi_n$ is composed of the blowing-ups

$$\pi_i : (u, v) \mapsto (uv + a_{i-1}, v) \text{ or } (u', v') \mapsto (v' + a_{i-1}, u'v') \quad 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } \sigma(z_1, z_2) = (z_1 + a_n, tz_2)$$

Conjecture 2: If two germs with vanishing trace are formally isomorphic, then they are isomorphic.

REFERENCES

1. Dloussky G., *Structure des surfaces de Kato*, Mémoire de la Soc. Math. de France, Nouvelle série no 14 (1984).
2. Dloussky G., *Sur la classification des germes d'applications holomorphes contractantes*, Math. Ann. 280 (1988), 649-661.
3. Dloussky G., *Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch*, Math. Ann. 280 (1988), 663-682.
4. Dloussky G., *Colmatage de surfaces holomorphes*, preprint.
5. Enoki I., *Surfaces of class VII_0 with curves*, Tohoku Math. J. 33 (1981), 453-492.
6. Inoue M., *New surfaces with no meromorphic functions II*, Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami Shoten Publ., Tokyo (1977).
7. Kato Ma., *Compact complex manifold containing "global spherical shells"*, Proceeding of the Int. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977, Kinokuniya Book Store, Tokyo (1978).
8. Kato Ma., *Compact complex surfaces containing global strongly pseudoconvex hypersurfaces*, Tôhoku Math. J. 31 (1979), 537-547.
9. Nakamura I., *On surfaces of class VII_0 with curves*, Invent. Math. 78 (1984), 393-443.
10. Nakamura I., *On surfaces of class VII_0 with curves II*, Tohoku Math. J. (to appear).
11. Reich L., *Das Typen problem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt*, Math. Ann. 179 (1969), 227-250.
12. Reich L., *Normalformen biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt*, Math. Ann. 180 (1969), 223-255.
13. Rossi H., *Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary*, Proc. of the conference on complex Analysis, Minneapolis 1964, Springer-Verlag (1964), 242-256.

Liouville Surfaces

清原 一吉 (北大・理)

§0. ここでは リウヴィル曲面 及び その高次元化について話す.
 (M, g) を n 次元リーマン多様体とし, $E \in C^\infty(T^*M)$ を対応する
エネルギー関数 とす. ($E(\lambda) = \frac{1}{2}\|\lambda\|^2$, $\lambda \in T^*M$.) $f \in C^\infty(T^*M)$
が その測地流の第一積分であるとは Poisson bracket $\{E, f\} = 0$
の時を云う ($T^*M = T^*M - \{0\}$). もし殆んど互に所独立な n 個の
積分 f_1, \dots, f_n が $\{f_i, f_j\} = 0$ なるものがあるならば 上の測地流は完全
積分可能と云われた. 次の問題を考えよう.

問題: 完全積分可能な測地流で その第一積分 f_1, \dots, f_n が fibrewise
に多項式であるようなものは どの様なものか?

良く知られていいる様に (M, g) が リンク・ベクトル場 を持つならば
fibrewise に linear な第一積分を定義する. 等長群が十分
大であれば 知れず完全積分可能になることもある (cf. [3]).

一方群作用が丁度よい第一積分をもつ測地流の例は
楕円体の場合の他に あまり知られていないのでは ないかと思う.
これも又良く知られていいる様に 主軸の長さが互に異なる n 次元
楕円体の測地流は n 個の互いに可換な, fibrewise に 2次の
同次多項式であるような第一積分をもち, 完全積分可能である.
ここでは コンパクトな多様体において, fibrewise に 2次の同次多項式
であるような第一積分をもち, 完全積分可能な測地流について話を
したい. 話を次元 $n=2$ と $n \geq 3$ の場合に分ける. まず $n=2$ の
場合は ある意味で 完全な分類がなされた. 又応用として 互いに
シンプレクティック同型な測地流を持つような等長的な曲面の
例が見出された. 特に S^2 上に新しい C_c -行量の具体例が与えら
れた. $n \geq 3$ の場合は 局所的な話と 大域的な例について

述べた。この場合も S^1 に新しい C_0 -計量が構成された。

§1. 2次元の場合.

2次元コンパクト多様体 S , S 上のリーマン計量 g , $\bar{h} \in C^0(T^*S)$ からなる3つ組 (S, g, \bar{h}) の次の条件をみたすものを考える。 E を対応するエネルギー関数として,

(i) $\langle E, \bar{h} \rangle = 0$

(ii) $\bar{h}_p := \bar{h}|_{T_p S}$ は $\forall p \in S$ に対し 2次の同次多項式

(iii) \bar{h} は $rH + sE$ の形をしており、但し $r, s \in \mathbb{R}$, H は fibrewise に線形関数の2乗.

条件 (ii) は \bar{h} が1つの(局所)キリングベクトル場から来していることを意味している。 $p_0 \in S$ とし、(iii)の代わりに

(iii)' $\bar{h}_{p_0} \notin RE_{p_0}$.

を考えると次のことが成立する。

命題 1 (Darboux [2]). p_0 の近傍で (i)(ii)(iii)' が成立しているとする。 p_0 の回りに座標系 (x_1, x_2) と関数 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ が本質的に一意にとれて

$$g = (f_1(x_1) + f_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2), \quad \bar{h} = \frac{f_2(x_2)\xi_1^2 - f_1(x_1)\xi_2^2}{f_1(x_1) + f_2(x_2)}$$

とかけた。 \square

この命題に 対応する形の計量は 古典的にリウヴィル線素と呼ばれてきた。 したがって上記 (i)(ii)(iii) をみたす3つ組 $(S, g, \bar{h}) \in$ (コンパクト) リウヴィル曲面と呼ばれることになる。

2つのリウヴィル曲面 (S_i, g_i, \bar{h}_i) ($i=1, 2$) が同値であるとはある isometry $\varphi: (S_1, g_1) \rightarrow (S_2, g_2)$ とある $r, s \in \mathbb{R}$ があつて $\bar{h}_2 \circ (\varphi^*)^{-1} = r\bar{h}_1 + sE_1$ が成立すると言えよう。 我々は この

同値類を分類した。部分集合 $N \subset S$ を

$$N = \{ p \in S \mid \bar{p} = r \bar{E}_p \text{ for some } r \in \mathbb{R} \}$$

で定義すると \bar{p} が一段階として次のことがわかった。

命題 2. N に含まれる点の数 $\#N$ は 0 か 2 か 4 である。

$\#N = 4$ のときは S は S^2 に diffeo. であり、この時 $N \subset L$ なる単一閉曲線 L が一意的に存在して、 L に $\#N$ の点を p_1, \dots, p_4 と名付けたと $\text{Cut}(p_i) = \{p_{i+2}\}$ (i は mod 4 で考えよ)。 $\#N = 2$ の時は S は $\mathbb{R}P^2$ に diffeo. で covering をとると $\#N = 4$ の case になる。
 $\#N = 0$ のときは S は トーラス か フライントールに diffeo. \square

証明は N の点を通る測地線の動きを調べることにして行った。以下 S を S^2 に diffeo. なる場合 ($\#N = 4$ の場合) について考えよう。 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ を固定し、トーラス

$$T = \mathbb{R}^2 / \Gamma, \quad \Gamma = (\alpha_1, 0)\mathbb{Z} + (0, \alpha_2)\mathbb{Z},$$

を作る。 τ を $(x_1, x_2) \rightarrow (-x_1, x_2)$ で定義された T の involution とし $R := T / \{1, \tau\}$ とする。 τ の固定点は 4 点あり、例えば $(0, 0)$ の像の近傍では座標系 $(x_1 - x_2, 2x_2)$ をとるとこれにより R は S^2 に diffeo. になる。 $f_i(x_i)$ ($i=1, 2$) を \mathbb{R}^+ の周期 α_i の C^∞ 周期関数で次の条件をみたすものとする：

$$(*) \begin{cases} f_i(-t) = f_i(t), \quad f_i''(0) > 0, \quad f_i(0) = f_i(\frac{\alpha_i}{2}) = 0, \\ t \neq 0, \frac{\alpha_i}{2} \pmod{\alpha_i \mathbb{Z}} \Rightarrow f_i(t) > 0 \quad (i=1, 2); \\ [f_1]_0(t) = [f_1]_{\frac{\alpha_1}{2}}(t + \frac{\alpha_1}{2}) \\ = -[f_2]_0(\sqrt{t}) = -[f_2]_{\frac{\alpha_2}{2}}(\sqrt{t} + \frac{\alpha_2}{2}). \end{cases}$$

よって $[f_i]_0(t) = \sum_k a_k (t - t_0)^k$ は形式的テイラー展開を表す。

このとき

$$g = (f_1(x_1) + f_2(x_2))(dx_1^2 + dx_2^2), \quad \bar{f} = \frac{f_2(x_2)\xi_1^2 - f_1(x_1)\xi_2^2}{f_1(x_1) + f_2(x_2)}$$

は商写像 $T \rightarrow R$ を通じて各々 R 上の C^∞ リーマン計量 及び T^*R 上の C^∞ 関数を定義し, (R, g, \bar{f}) は リウヴィル曲面となる.

上記の豫に 4 つ組 $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, f_i, f_{i+1})$ の全体を \mathcal{Q} とかく. 今 2 つの 4 つ組 $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, f_i, f_{i+1})$ と $(\beta_j, \beta_{j+1}, f_j, f_{j+1})$ が同値であることを, ある $c > 0$ と $\nu_i \in (0, \frac{\alpha_i}{2})$ ($i=1, 2$) があり, 2 つの 2 つの条件の 1 つだけが成立している事とす:

$$(1) \beta_i = c\alpha_i, \quad c^2 h_i(ct) = f_i(t + \nu_i) \quad (i=1, 2);$$

$$(2) \beta_i = c\alpha_j, \quad c^2 h_i(ct) = f_j(t + \nu_j) \quad ((i,j) = (1,2), (2,1)).$$

このとき次の定理が成り立つ.

定理 3. 上の構成によつて \mathcal{Q} の同値類と リウヴィル曲面 (S^2, g, \bar{f}) の同値類の間に 1 対 1 の対応が得く \square

証明は逆対応を構成することに於てなされたが $S^2 - N$ の各点の近傍に可丁の標準座標系の存在 (命題 1) と 命題 2 の L の存在を保つてなされた.

次に リウヴィル曲面 (S^2, g, \bar{f}) のある特殊なクラスについて述べる.
 $R^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2 = \{(\theta_1, \theta_2)\}$ 上に次の対応 2-形式 g を考える:

$$g = ((1-\beta)\alpha \sin^2 \theta_1 + \beta \alpha \sin^2 \theta_2) \left(\frac{A_1(\sqrt{1-\beta} \cos \theta_1)^2}{\beta \alpha^2 \theta_1 + \alpha^2 \theta_2} d\theta_1^2 + \frac{A_2(\sqrt{\beta} \cos \theta_2)^2}{(1-\beta)\alpha^2 \theta_2 + \alpha \sin^2 \theta_2} d\theta_2^2 \right)$$

ここで $\beta \in (0, 1)$ は定数. $A_1(t), A_2(t)$ は 各々 $|t| \leq \sqrt{1-\beta}, |t| \leq \sqrt{\beta}$ で定義された正値 C^∞ 関数で 次のテイラー展開に関する条件を可成す:

$$(**) \begin{cases} A_1(t) \sim A_1(-t) & (t \rightarrow \sqrt{1-\beta}) \\ A_2(t) \sim A_2(-t) & (t \rightarrow \sqrt{\beta}) \\ A_1(t) \sim A_2(\sqrt{1-t^2}) & (t \rightarrow \sqrt{1-\beta}) \end{cases}$$

このとき変数変換 $\theta_i \rightarrow x_i$ ($i=1, 2$) を

$$x_1 = \int_0^{\theta_1} \frac{A_1(\sqrt{1-\beta} \cos r)}{\sqrt{\beta \cos^2 r + \sin^2 r}} dr, \quad x_2 = \int_0^{\theta_2} \frac{A_2(\sqrt{\beta} \cos r)}{\sqrt{(1-\beta) \cos^2 r + \sin^2 r}} dr$$

と行なう, $\theta_i = 2\pi \iff x_i = \alpha_i$ ($i=1, 2$) とし

$$f_1(x_1) = (1-\beta) \sin^2 \theta_1, \quad f_2(x_2) = \beta \sin^2 \theta_2$$

とすると $(\alpha_1, \alpha_2, f_1, f_2) \in \mathbb{Q}$ と取り, リウヴィル曲面 (S^2, g, F) が与えられる. 例えば $A_1 = A_2 = 1$ とすると曲率 1 の球面を表し, $b_1 > b_3 > b_2 > 0$ とし $\beta = (b_3 - b_2) / (b_1 - b_2)$,

$$A_1(t) = \sqrt{b_1 - (b_1 - b_2)t^2}, \quad A_2(t) = \sqrt{b_2 + (b_1 - b_2)t^2}$$

とすると主軸の長さ b_1, b_3, b_2 の楕円面を表す (cf. Klingenberg [7]).

$A_i^+(t) := \frac{1}{2}(A_i(t) + A_i(-t))$ とおくことにより次のことが言える.

定理 4. $\beta \in (0, 1)$ を固定し, 2組の関数 $A_i(t), B_i(t)$ ($i=1, 2$) 上の $(**)$ をみたすとする. 今 $A_i^+ = B_i^+$ ($i=1, 2$) とするとそれぞれ対応するリウヴィル曲面の測地流は互いにシンプレクティック同型である. \square

系 5. $\beta \in (0, 1)$ を任意とし $A_i^+ = 1$ ($i=1, 2$) のとき対応するリウヴィル曲面の計量は C_{2n} -計量である. 逆にリウヴィル曲面でその計量が C_{2n} である様なものはこの形を与えられる. \square

リウヴィル曲面 (S, g, F) で S が $\mathbb{R}P^2$, トラス, ワインホルトに differ. する場合の分類も同様な形で行ったが, 二つの結果として得られた

次の命題を証明して留めよ。

命題 6. Γ を $1 \neq W \in \mathbb{C}$ ($\text{Im} W \neq 0$) で生成された \mathbb{C} の lattice とする. このとき (S, g) が フラット トーラス \mathbb{C}/Γ と 共形同型 とする様
 の リウマン 曲面 (S, g, F) が 存在 する ための 必要十分条件 は
 $\text{Re} W \in \mathbb{R}$, or $|W|^2 + (p+i) \text{Re} W + p^2 = 0$ for some $p, i \in \mathbb{Q}$ とする (= 2) である.
 (\mathbb{Q} は 有理数体.)

§2. 高次元の場合.

リウマン 曲面 の 場合, 計量 g は 局所的 に は リウマン 線素 の 形
 にかいた. 高次元 の 場合 の リウマン 線素 に 対応 する もの は どの
 様な もの で あろう か? 橋 円 体 及 W 単位 球 面 (with 橋 円 座 標) の
 例 から 推 論 すれば され は 次の 形 で ある と 思 われる!

$$(\#) \quad g = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (f_k(x_k) - f_i(x_i)) \cdot dx_i^2}{k \neq i}$$

ここで (x_1, \dots, x_n) は 局所 座 標 系, $f_i(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) は 一変 関数 で,
 定義 域 内 で $f_1(x_1) > f_2(x_2) > \dots > f_n(x_n)$ を 満たす. 実際, (x, ξ)
 を 余 橋 束 上 の 座 標 系, β_1, \dots, β_n を 互いに 異なる 定数 と して

$$\bar{F}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{k \neq i} (f_k - \beta_j)}{\prod_{k \neq j} (\beta_k - \beta_j)} \cdot \frac{(-1)^{n-i} \xi_i^2}{\prod_{k \neq i} (f_k - f_i)} \quad (1 \leq j \leq n)$$

と おくと $\{\bar{F}_i, \bar{F}_j\} = 0$, $\sum_{j=1}^n \bar{F}_j = 2E$ (E は エネルギー 関数)

を みたす. 又 \bar{F}_j の ξ_i^2 の 係数 を f_{ij} とおくと $n \times n$ 行列 (f_{ij}) は
 非退化 なる $\xi_1 \neq 0, \dots, \xi_n \neq 0$ ならば $d\bar{F}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{F}_n \neq 0$ である.

と して $(\#)$ の 形 が 十分 一般 的 か と 云え る はず だが とうとう
 こそ 次の 命題 に およ び かわか

命題 7 $p_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定し, U をその近傍, $f \in U$ の 4 - \mathbb{Z} -計量, $\bar{F}_j \in C^\infty(T^*U)$ ($1 \leq j \leq n$) とし 次の条件をみえ可とする:

(i) \bar{F}_j ($1 \leq j \leq n$) は各 fibre 上 一次独立な 2 次の同次多項式;

(ii) $\{\bar{F}_i, \bar{F}_j\} = 0$, $\sum_{j=1}^n \bar{F}_j = 2E$;

(iii) $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ は各 fibre 上 2 次形式として同時対角化可能.

このとき p_0 の周りの座標系 (x_1, \dots, x_n) と n^2 個の一次関数 $b_{ij}(x_j)$ がとれ (1) $\det(b_{ij}) \neq 0$ かつ p_0 , (2) $(b_{ij})^{-1} = (t_{ij})$ とすると $\bar{F}_i = \sum_j t_{ij} \xi_j^2$, $2E = \sum_j t_{jj} \xi_j^2$, となる. 逆も又正しい. \square

この命題によつて $n \geq 3$ のときは (ii) の形にかつた計量の存在がわかった. 又条件 (iii) は一般の見地からいへば望ましいがその場合の計量の形は良く分かっていない.

以下計量が局所的に (ii) の形をしていゝる場合に S^n 上に大域的な例を構成する. $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, $T = \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}/\alpha_i \mathbb{Z})$ (n 次元トーラス) とし, T 上の変換 σ_j ($1 \leq j \leq n-1$) を

$$\sigma_j(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n) \quad (1 \leq j \leq n-1)$$

と定義する. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $\sigma_i^2 = 1$ となる. (1)

G を $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ で生成された群とすると

補題 8 T/G に自然に C^∞ 多様体の構造が入り S^n に differ. の商写像 $\pi: T \rightarrow T/G$ も C^∞ . \square

同期 α_i の関数 $f_i(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) をある条件 (b) をみえ可のものをもてくる. 条件 (b) は長くなるのでここには書けなから 2次元の場合の条件 (a) とほぼ同じで, mild なものである. その時, 次の定理が成立する.

定理 9. T 上の対称 2-形式

$$g = \sum_{i=1}^n (t_i)^{n-i} \prod_{k \neq i} (t_k - t_i) \cdot dx_i^2$$

は写像 π を通じて $T/G = S^n$ 上のリーマン計量を表す。

又 $T^*(T)$ 上の open dense 部分で定義された関数

$$F_j = \sum_i \frac{\prod_{k \neq i} (t_k - \beta_j)}{\prod_{k \neq j} (\beta_k - \beta_j)} \cdot \frac{(t_i)^{n-i} \xi_i^2}{\prod_{k \neq i} (t_k - t_i)} \quad (1 \leq j \leq n)$$

は T^*S^n 上の C^∞ 関数を導き、 $\sum_j F_j = 2E$, $\{F_i, F_j\} = 0$ をみえる。ここで β_1, \dots, β_n は相異なる定数。□

G の代りに $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ をとって $G' = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle < G$ とすれば T/G' はいくつかの球面の直積になる。例えば

$G' = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$ ならば $T/G' = S^k \times S^{n-k}$ 。各 G' に対して条件 (b) を少し修正したものをみえる。ただし σ をとってあれば定理 9 と同様の計量と第一積分達が任意の球面の直積に定義される。この時の計量は直積の形をしていい。もちろん直積の形の計量で第一積分をわたるものを構成することも簡単にできる。

定理 10. 定理 9 で構成された S^n 上のリーマン計量の中に C_2 -計量の新しい例が (1変数関数 2つ分の自由度で) 存在する。□

その形は 2次元の場合と殆んど同じである。

References

- [1] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer 1978.
- [2] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*,
Livre VI, Chelsea 1972, New York.
- [3] K. Li, S. Watanabe, *Complete integrability of the geodesic flows on symmetric spaces*, *Adv. Studies in Pure Math.* 3 (1984), 105–124.
- [4] K. Kiyohara, *Compact Liouville Surfaces*, preprint.

On Intrinsic Measures of Complex Manifolds

SHOSHICHI KOBAYASHI

University of California, Berkeley

§0. Introduction

We give a brief survey of intrinsic measures on complex manifolds. Since the publication of [3] and [6] in 1970, some progress has been made on the subject. However, intrinsic measures are much harder to work with than intrinsic metrics. So the results obtained so far are not as extensive as the results on intrinsic metrics. Since the first Chern class of a manifold is represented (up to a constant factor) by the Ricci form of a Hermitian metric and since the intrinsic measure seems to be closely related to the Ricci form, the intrinsic measure may possibly play some roles in algebraic geometry of complex manifolds.

§1. Definition and basic properties

Let B^n be the unit ball in \mathbb{C}^n with the invariant volume form μ defined by

$$\mu = \frac{2^n}{(1 - \|z\|^2)^{n+1}} \prod_{j=1}^n \sqrt{-1} dz^j \wedge d\bar{z}^j$$

with respect to the natural coordinate system $z = (z^1, \dots, z^n)$ of \mathbb{C}^n .

Given a complex manifold X of dimension n , we define an intrinsic pseudo-volume form Ψ_X^h by setting

$$(\Psi_X^h)_x = \inf(f^{-1})^*(\mu_0) \quad \text{for } x \in X,$$

where the infimum is taken over all holomorphic maps $f : B^n \rightarrow X$ which send the origin 0 to x and are non-degenerate at 0.

By allowing $f : B^n \rightarrow X$ to be meromorphic, but holomorphic and non-degenerate at 0, in the definition above, we obtain another intrinsic pseudo-volume form, which will be denoted Ψ_X^m , (see [11]).

Then

THEOREM 1.1. *Let X and Y be complex manifolds of dimension n .*

(a) *For the unit ball B^n ,*

$$\mu = \Psi_{B^n}^h = \Psi_{B^n}^m;$$

(b) *If $f : X \rightarrow Y$ is holomorphic (resp. meromorphic), then*

$$f^* \Psi_Y^h \leq \Psi_X^h \quad (\text{resp. } f^* \Psi_Y^m \leq \Psi_X^m);$$

(c) *If v is any pseudo-volume form of X such that $f^*v \leq \mu$ for all holomorphic (resp. meromorphic) mappings $f : B^n \rightarrow X$, then*

$$v \leq \Psi_X^h \quad (\text{resp. } v \leq \Psi_X^m);$$

(d) $\Psi_X^m \leq \Psi_X^h$;

(e) *If $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ is a covering projection, then*

$$\Psi_{\tilde{X}}^h = \pi^* \Psi_X^h \quad \text{and} \quad \Psi_{\tilde{X}}^m = \pi^* \Psi_X^m;$$

(f) *Both Ψ_X^h and Ψ_X^m are upper semi-continuous.*

The last statement can be strengthened as follows. Let \mathcal{M} be a complex manifold of dimension $n + r$, S a complex manifold of dimension r , and $\pi : \mathcal{M} \rightarrow S$ a surjective holomorphic map of maximal rank r everywhere. Set

$$X_s = \pi^{-1}(s) \quad \text{for } s \in S.$$

Then each X_s is a complex submanifold of dimension n in \mathcal{M} . We consider $\{X_s\}$ as a family of complex manifolds parametrized by $s \in S$.

Let $V\mathcal{M}$ denote the subbundle of the tangent bundle $T\mathcal{M}$ consisting of vertical vectors, i.e., vectors which are annihilated by π ; it is a vector bundle of rank r over \mathcal{M} . Let $V^*\mathcal{M}$ be its dual bundle, and $\Lambda^{n,n}V^*\mathcal{M}$ the bundle of (n, n) -forms along the fibers.

The intrinsic pseudo-volume form $\Psi_{X_s}^h$ of X_s , as it varies with $s \in S$, defines a (possibly discontinuous) section of $\Lambda^{n,n}V^*\mathcal{M}$.

THEOREM 1.2. As sections of $\Lambda^{n,n}V^*\mathcal{M}$, both $\{\Psi_{X,\epsilon}^h\}_{\epsilon \in S}$ and $\{\Psi_{X,\epsilon}^m\}_{\epsilon \in S}$ are upper semi-continuous on \mathcal{M} .

Although $\Psi_X^m \leq \Psi_X^h$ in general, the equality holds in some cases. In such cases, we write Ψ_X for Ψ_X^h and Ψ_X^m .

THEOREM 1.3. The equality $\Psi_X^m = \Psi_X^h$ holds in the following cases;

- (a) X is Stein;
- (b) X is hyperbolic.

In the definition of Ψ_X^h and Ψ_X^m we could use the polydisk D^n and its invariant volume element instead of (B^n, μ) . However, in order to have the following product formula (see [4]), we have to use (B^n, μ) with the specified normalization for μ .

THEOREM 1.4. For two complex manifolds X and Y , we have

$$\Psi_{X \times Y}^h = \Psi_X^h \wedge \Psi_Y^h \quad \text{and} \quad \Psi_{X \times Y}^m = \Psi_X^m \wedge \Psi_Y^m.$$

From this product formula, we obtain

$$\Psi_{D^n} = 2^n \prod_{j=1}^n \frac{\sqrt{-1} dz^j \wedge d\bar{z}^j}{(1 - |z^j|^2)^2}$$

$$\Psi_{(D^*)^n} = 2^n \prod_{j=1}^n \frac{\sqrt{-1} dz^j \wedge d\bar{z}^j}{(|z^j| \log |z^j|^2)^2}$$

§2. Examples

We consider a few simple examples.

Ex.1. $\Psi_{\mathbb{C}} = 0$.

Ex.2. $\Psi_{\mathbb{C} \times X} = 0$ for any complex manifold X . (use Theorem 1.4 and Ex.1).

Ex.3. If the group \mathbb{C} acts holomorphically on X , then Ψ_X^h and Ψ_X^m vanish at any point x that is not fixed by \mathbb{C} . (Imbed B^{n-1} into X transversal to the \mathbb{C} -orbit through x , and apply (b) of Theorem 1.1 and Ex.2 to the induced mapping $f : \mathbb{C} \times B^{n-1} \rightarrow X$).

Ex.4. (See [4]). Let

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |zw| < 1\}.$$

Then $\Psi_X = 0$ on $X - \{(0, 0)\}$, but $\Psi_X > 0$ at $(0, 0)$. (The first half follows from Ex.3 applied to the \mathbb{C} -action $t : (z, w) \rightarrow (e^t z, e^{-t} w)$, $t \in \mathbb{C}$).

Ex.5. Let Y be the space obtained from $D \times \mathbb{C}$ by blowing up its origin. Then

$$\Psi_Y = 0.$$

(The problem is to show that Ψ_X vanishes at the exceptional curve. This can be achieved by considering the following two \mathbb{C} -actions:

$$t : (z, w) \rightarrow (z, e^t w),$$

$$t : (z, w) \rightarrow (z, tz + w).$$

The first (resp. second) induces a \mathbb{C} -action on Y with one fixed point, namely the point on the exceptional curve corresponding to the direction $w = 0$ (resp. $z = 0$).

Let X be as in Ex.4 and $p : X \rightarrow D \times \mathbb{C}$ be the map defined by $p(z, w) = (zw, w)$. The map p collapses the complex line $\mathbb{C} \times \{0\}$ to $(0, 0)$, and X can be realized as a domain in Y so that $\mathbb{C} \times \{0\}$ becomes part of the exceptional curve. Since $\Psi_X > 0$ at 0 , Ex.5 is not as trivial as it looks.

Ex.6. For each $s \in D$, let

$$X_s = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1, |zw| < 1\} \cup \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < |s|\}.$$

with the understanding that

$$X_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1, |zw| < 1\}.$$

Then

$$\begin{aligned} \Psi_{X_0} &\geq \frac{2^2 |z|^2 dz \wedge dw \wedge d\bar{z} \wedge d\bar{w}}{(1 - |z|^2)^2 (1 - |zw|^2)^2}, \\ (\Psi_{X_0})_{(0, w_0)} &\geq \frac{1}{(1 + |w_0|)^2} dz \wedge dw \wedge d\bar{z} \wedge d\bar{w}. \end{aligned}$$

On the other hand, for $s \neq 0$, Ψ_{X_s} vanishes on $\{(z, w); |z| < |s|\}$. This sharpens an estimate in [4].

Ex.7. For each $s \in D$, let

$$X_s = \{z \in \mathbb{C}; |zs| < 1\}.$$

Then $\Psi_{X_0} = 0$ while $\Psi_{X_s} > 0$ for $s \neq 0$.

Examples of compact manifolds are harder to construct.

Ex.8. Let T be a complex torus of dimension n . Then $\Psi_T = 0$. Let ι be the involution of T sending $t \in T$ to $-t$. The quotient space T/ι has 2^{2n} singular points corresponding to the fixed points of ι , and $\pi : T \rightarrow T/\iota$ is a double covering ramified at these singular points. Let X be the complex manifold obtained by blowing up the singular points of T/ι . Then, Ψ_X^m vanishes except possibly at the exceptional divisors. We do not know if it vanishes everywhere on X . We do not know the behavior of Ψ_X^h on X . When $n = 2$, X is called the Kummer surface associated to the torus T . The Kummer surfaces form a dense subclass in the space of $K3$ surfaces. We can ask if Ψ_X^m vanishes on a $K3$ surface X except possibly along a closed analytic subset.

Interesting examples of compact complex manifolds X with non-trivial Ψ_X^m are provided by algebraic manifolds of general type, which will be discussed in the next section.

§3. Algebraic manifolds of general type.

Let v be a smooth pseudo-volume form on an n -dimensional complex manifold X . In terms of a local coordinate system z^1, \dots, z^n of X , v can be written as

$$v = V \prod_{j=1}^n \sqrt{-1} (dz^j \wedge d\bar{z}^j),$$

where V is a (locally defined) non-negative function. The Ricci form $\text{Ric}(v)$ of v is defined by

$$\text{Ric}(v) = -dd^c \log V = 2\sqrt{-1} \sum R_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k,$$

where

$$R_{j\bar{k}} = -\frac{\partial^2 \log V}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}.$$

We note that $\text{Ric}(v)$ is defined only where $v > 0$. We say that $\text{Ric}(v)$ is negatively bounded if it is negative (i.e., $(R_{j\bar{k}})$ is negative) and if

$$K_v := \frac{(-\text{Ric}(v))^n}{n!(n+1)^n v} \leq c < 0.$$

If it is negatively bounded, we can normalize v (by multiplying it with a positive constant) so that $K_v \leq -1$. Then the generalized Schwarz lemma says:

$$f^*v \leq \mu \quad \text{for every meromorphic } f : B^n \rightarrow X.$$

From this and from (c) of Theorem 1.1 we obtain

THEOREM 3.1. *If a complex manifold X admits a pseudo-volume form v with negatively bounded $\text{Ric}(v)$, normalized so that $K_v \leq -1$, then*

$$v \leq \Psi_X^m \leq \Psi_X^h.$$

An example satisfying the condition of Theorem 3.1 is provided by an algebraic manifold of general type. The following characterization is due to B. Totaro.

THEOREM 3.2. *A projective algebraic manifold X is of general type if and only if it admits a pseudo-volume form v with at most holomorphic degeneracy (i.e., v is locally of the form $v = a^{2q}w$, where a is a holomorphic function, w is a volume form and q is a rational number) such that $\text{Ric}(v) < 0$.*

We note that in this case $\text{Ric}(v) = \text{Ric}(w)$ is defined everywhere.

THEOREM 3.3. *For a projective algebraic manifold X , consider the following conditions:*

- (a) *Its canonical bundle K is ample;*
- (b) *It admits a volume form v with $\text{Ric}(v) < 0$;*
- (c) *$\Psi_X^m > 0$ everywhere;*
- (d) *$\Psi_X^h > 0$ everywhere;*

- (a') It is of general type;
- (b') It admits a pseudo-volume form v which is positive outside an analytic subset Δ and has negatively bounded $\text{Ric}(v)$ (outside Δ);
- (c') $\Psi_X^m > 0$ outside an analytic subset Δ ;
- (d') $\Psi_X^h > 0$ outside an analytic subset Δ .

Then we have the following implications between these conditions:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a) & \longleftrightarrow & (b) & \longrightarrow & (c) & \longrightarrow & (d) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (a') & \longrightarrow & (b') & \longrightarrow & (c') & \longrightarrow & (d')
 \end{array}$$

The vertical implications are all sharp. The equivalence $(a) \leftrightarrow (b)$ is due to Kodaira. We do not know if any of the other horizontal implications is an equivalence. Theorem 3.2 does not quite say $(b') \rightarrow (a')$, but it comes very close to it. The three conditions (a') , (b') and (c') are bimeromorphically invariant. But it is not clear if (d') is also bimeromorphically invariant.

The group of holomorphic automorphisms of an algebraic manifold of general type is known to be finite, [10]. Example 3 in the preceding section shows that the group of holomorphic automorphisms of a compact complex manifold X is discrete if $\Psi_X^h > 0$ on a nonempty subset of X . In particular, (d') in Theorem 3.3 implies that the group of holomorphic automorphisms is discrete. Since we are unable to prove any of the implications $(d') \rightarrow (c') \rightarrow (b') \rightarrow (a')$ at the moment, it would be of some interest to find out if any one of (b') , (c') and (d') implies that the automorphism group is finite.

§4. The volume element induced by the intrinsic metric.

Let X be a complex manifold of dimension n . We define a function F_X^* on the cotangent bundle T^*X by setting

$$F_X^*(\lambda) = \sup \|f^*\lambda\| \quad \text{for } \lambda \in T_x^*X,$$

where $\|f^*\lambda\|$ is the length of the cotangent vector $f^*\lambda \in T^*D$ measured by the Poincaré metric of the unit disk D , and the supremum is taken over all $f \in \text{Hol}(D, X)$ with $x \in f(D)$.

For some λ we may have $F_X^*(\lambda) = \infty$. On the other hand, we always have

$$F_X^*(\lambda) > 0 \quad \text{for} \quad 0 \neq \lambda \in T_x^*X.$$

We can also easily verify the convexity property

$$F_X^*(\lambda + \mu) \leq F_X^*(\lambda) + F_X^*(\mu).$$

We define a dual pseudo-norm \hat{F}_X on T_xX by setting

$$\hat{F}_X(v) = \sup_{F_X^*(\lambda) \leq 1} |\lambda(v)| \quad \text{for} \quad v \in T_xX.$$

Then $\hat{F}_X(v)$ is always finite and

$$\hat{F}_X(v + v') \leq \hat{F}_X(v) + \hat{F}_X(v').$$

Thus, \hat{F}_X is an upper semicontinuous Finsler pseudo-metric. It is the double dual of the usual intrinsic infinitesimal pseudo-metric F_X . For details, see [8].

For the unit disk D , $\hat{F}_D = F_D$ is the Poincaré metric. For any holomorphic map $f : D \rightarrow X$, we have

$$f^* \hat{F}_X \leq F_D,$$

and \hat{F}_X is the largest Finsler pseudo-metric with the property above.

Using \hat{F}_X , we define a pseudo-volume form Ω_X on X by

$$\Omega_X(\xi \wedge \bar{\xi}) = \inf(\hat{F}_X(v_1) \cdots \hat{F}_X(v_n))^2 \quad \text{for} \quad \xi \in \Lambda^n T_xX$$

where the infimum is taken over all possible way to write $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ with $v_1, \dots, v_n \in T_xX$. Then Ω_X is an upper semicontinuous pseudo-volume element. Since $f^* \hat{F}_Y \leq \hat{F}_X$ for every holomorphic (or meromorphic) map $f : X \rightarrow Y$, correspondingly $f^* \Omega_Y \leq \Omega_X$ for every holomorphic (or meromorphic) map $f : X \rightarrow Y$ between two manifolds of dimension n . For the unit ball B^n , \hat{F}_{B^n} is the ordinary invariant metric (i.e., the Bergman metric), and $\Omega_{B^n} = \mu$. Hence,

$$\Omega_X \leq \Psi_X^m \leq \Psi_X^h.$$

It follows that if X is hyperbolic so that $F_X > 0$, then $\Psi_X^m > 0$. In particular, if X is a compact Hermitian manifold of negative holomorphic sectional curvature, then $\Psi_X^m > 0$. This raises the following differential geometric question, (see the comments following Theorem 3.3). Is the canonical line bundle of a compact Kähler manifold with negative holomorphic sectional curvature ample ?

REFERENCES

1. J.Bland and I.Graham, *On the Hausdorff measures associated to the Carathéodory and Kobayashi metrics*, Annali. Scuola Norm. Pisa **12** (1985), 503-514.
2. H.Busemann, *Intrinsic areas*, Ann. of Math. **48** (1947), 234-267.
3. D.A.Eisenman, *Intrinsic Measures on Complex Manifolds and Holomorphic Mappings*, Mem. Amer. Math. Soc. no.96 (1970).
4. I.Graham and H.Wu, *Some remarks on the intrinsic measures of Eisenman*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 173-198.
5. M.Green and P.Griffiths, *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chern Symposium 1979, Springer-Verlag (1980), 41-74.
6. S.Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker (1970).
7. S.Kobayashi, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1972), 357-416.
8. S.Kobayashi, *A new invariant infinitesimal metric*, International J. Math. **1** (1990), 83-90.
9. S.Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag (1972).
10. M.N.L'vovskii, *Integral representations of hyperbolic volumes*, Moscow Univ. Math. Bull. **31** (1976), 76-81.
11. S-T., Yau, *Intrinsic measures of compact complex manifolds*, Math. Ann. **212** (1975), 317-329.

Mapping class group の表現と 3次元多様体の不変量

河野俊又 (九大理)

最近, Riemann 面上の共形場理論の holonomy としてあらわれる. mapping class group の表現を用いて, 3次元多様体の位相不変量が, いくつか構成されている. ここでは, 主に $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten model, 及び $U(1)$ gauge theory に伴随して得られる不変量について報告する. 前者については, [1] を参照されたい. またこれは, $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ の q が 1 の中根の表現論と, リンクの Dehn surgery を用いた, Reshetikhin-Turaev [2] の構成と密接に関係している. 後者は, 牛腸氏による geometric construction に基づいていて, ここでは, 不変量の Dehn surgery による記述について考察する.

1. $SU(2)$ level K WZW-model に伴随した mapping class group の表現

Σ_g は compact orientable surface of genus g
 \mathcal{M}_g は mapping class group $\pi_0 \text{Diff}^+ \Sigma_g$ とする. Σ_g の pants decomposition について, そ

の dual graph γ を fig.1 のように対応させる。

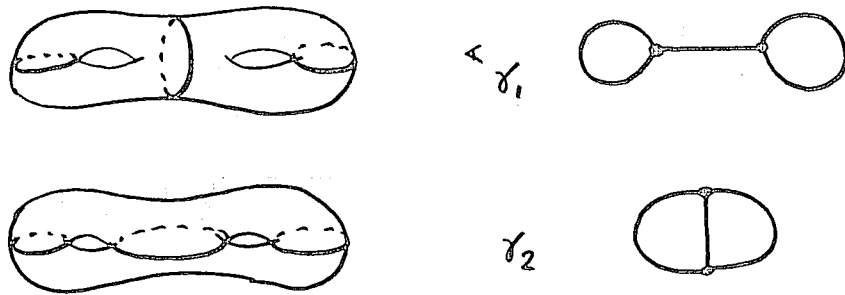


fig.1

Σ_g , そのある dual graph γ , positive integer K (level) について, complex vector space $Z_K(\Sigma_g, \gamma)$ を次のように対応させる. $Z_K(\Sigma_g, \gamma)$ の基底 $\{e_f\}$ は, $f: \text{edge}(\gamma) \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{K}{2}\}$ で, 各 vertex にあつまる 3 辺 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ について 次の admissibility condition をみたすものと 1 対 1 K 対 1 対応しているとする. $f(\Gamma_i) = j_i$ とかくと

$$\begin{cases} |j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{Z} \\ j_1 + j_2 + j_3 \leq K \end{cases}$$

つまり, 上のように与えた "重みつき" のグラフと, 基底が 1 対 1 K 対応するように $Z_K(\Sigma_g, \gamma)$ を構成する.

[3] では affine Lie algebra の表現を用いて, stable curves の moduli space 上に projectively flat connection をもつ vector bundle が構成されている. その fibre を combinatorial に記述したものが, 上の vector space である. この空間は, 共形場理論において conformal blocks とよばれるものである.

上記の admissibility のもつ affine Lie algebra の表現論における意義については [3] を参照されたい。また、これは、 $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ の q が 1 の巾根における表現論にも登場する条件である (see [2])。

実は、vector space $Z_k(\Sigma_g, \gamma)$ の次元は graph γ の選び方にはよらず、一定であることがわかる。また異なる graph γ_1, γ_2 に対応した vector space の同型は 共形場理論における 4 点関数の fusing matrix によって与えられ、fusing matrix の pentagon relation より 同型 $Z_k(\Sigma_g, \gamma_1) \cong Z_k(\Sigma_g, \gamma_2)$ は、 γ_1 から γ_2 へ至る sewing の組みかえの方法にはよらないことが知られている。

我々は vector space $Z_k(\Sigma_g)$ への mapping class group M_g の作用を考察する。次のように combinatorial に定義される projectively linear representation

$$\rho_k : M_g \longrightarrow GL(Z_k(\Sigma_g)) / \Gamma_k$$

が得られる。ここで Γ_k は $\exp 2\pi i T \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{3k}{k+2}$ で生成される finite cyclic group を示す。この表現 ρ_k の構成法について概略を説明する。

M_g は、fig. 2 に示すような Dehn-Lickorish twist によって生成されることが知られている。この generator system について ρ_k の image を次のように定義する。

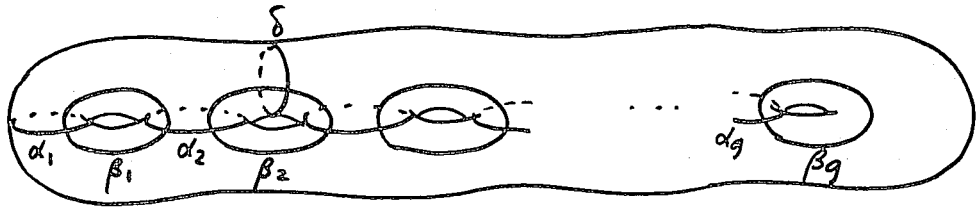


fig. 2

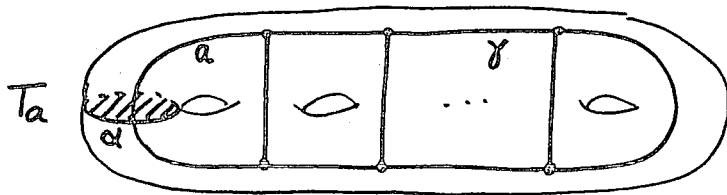


fig. 2'

fig 2' のように Riemann 面 Σ graph γ a regular nbd
 a boundary として実現し δ a edge a ϵ , a ϵ transverse
 κ 交わる disc Σ bound する circle α κ して. operator
 T_a on $Z_\kappa(\Sigma, \gamma)$ ϵ

$$T_a e_f = \exp 2\pi i (\Delta_{f(a)} - \frac{c}{24})$$

ここで $\Delta_j = \frac{j(j+1)}{k+2}$, $c = \frac{3k}{k+2}$ で定義する. base
 $\{e_f\}$ κ して, κ して diagonal matrix ϵ なる. κ
 方法によつて $P_\kappa(\alpha_i)$, $1 \leq i \leq g$, ϵ 対応する T_{α_i}
 で定義する. (δ についても同様) κ graph ϵ たり
 κ えたとき. vector space ϵ fusing matrix ϵ して
 同一視する. β_1, \dots, β_g の行き先 ϵ 定めるため

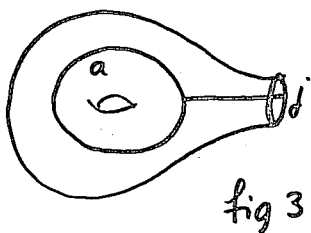


fig 3

κ fig 3 のような. 1-holed torus
 a conformal block κ 作用する
 operator $S(j)$ ϵ . 次の性質
 ϵ みたすものが必要となる

$$\begin{cases} S(j)^2 = (-1)^j \exp(-\pi\sqrt{-1} \Delta_j) \cdot \text{id} \\ (S(j)T_a)^3 = S(j)^2 \end{cases}$$

$S(j)$ は、ある S^3 内の graph の invariant から構成できることか [5] で、とくに $j=0$ のとき $S(0)$ の p, q 成分は

$$S(0)_{pq} = \sqrt{\frac{2}{K+2}} \sin \frac{(2p+1)(2q+1)\pi}{K+2}$$

, $0 \leq p, q \leq K/2$ で与えられる (see [1]). これは $A_1^{(1)}$ type の affine Lie algebra の integrable highest weight modules of level K の character χ_j , $0 \leq j \leq \frac{K}{2}$ の modular 変換 $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ に関する変換則としても知られる。大雑把に、は行列 TST により β_i の image を定義する。

上のよう、代数的に構成した表現 P_K から 3次元多様体の位相不変量を構成する方法について述べる。 M は compact, closed, oriented 3-manifold とすると M は genus g の handlebodies V_1, V_2 を用いてその境界を $h: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ によりあわせることにより得られる。これを Heegaard 分解とよぶ。以降 h を M_g の元と考えることにする。

vector space $Z_K(\Sigma_g)$ には weight \neq :

edge $\rightarrow \{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k}{2}\}$ で可なり edge a について $f(a) = 0$ をみれば vector があるのて、これを v_0 とかく。

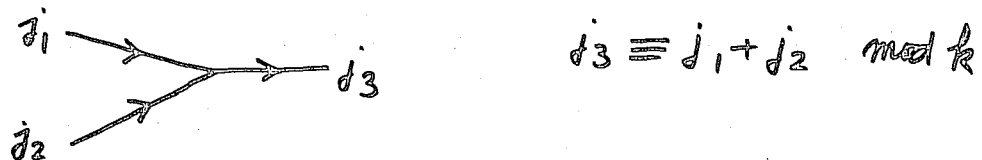
$$\phi_k(M) = \left(\sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \frac{\pi}{k+2} \right)^{-g} \langle v_0, P_k(h)v_0 \rangle$$

とみると、 $\phi_k(M)$ は M の位相不変量となる；
 とが示される (KKL modulo Γ_k で well-defined)
 証明は Reidemeister-Singer's stabilization theorem に基づいている。詳細は [1] を参照されたい。

2. $U(1)$ -gauge theory に基づく不変量

ここでは $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ の group algebra を fusion algebra としてもつ 1 と同様の理論について考える。前節と同様に Σ_g に対して dual graph γ を考える。各 edge には向きがつけられているとする。

$f: \text{edge } \gamma \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ で admissibility としては



とかが、(edge の向きを反対にするときは weight j を $k-j$ でおきかえる)。

今度の model では $Z(\Sigma_g, \gamma)$ は dimension が k^g となることがわかる. この vector space に Mg の作用を定義するのであるが. data として matrix S , conformal dimension Δ_j , central charge C が必要となる. これらに次のように定める.

$$S_{\ell\ell'} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k} \ell\ell'\right) & k: \text{odd} \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k} \ell\ell'\right) & k: \text{even} \end{cases} \quad 0 \leq \ell, \ell' \leq k-1$$

$$\Delta_\ell = \begin{cases} \frac{\ell^2}{k} & k: \text{odd} \\ \frac{\ell^2}{2k} & k: \text{even} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C \equiv 0 \pmod{8} & \text{if } k \equiv 1 \pmod{4} \\ C \equiv 2 \pmod{8} & \text{if } k \equiv 3 \pmod{4} \\ C \equiv 1 \pmod{8} & \text{if } k \text{ even} \end{cases}$$

これらの data を用いて fusing matrix $\equiv 1$ とする. これにより 前節と同様に Mg の projectively linear representation が定義され 実はこれは $Sp(2g, \mathbb{Z})$ を factor する. この表現から, Heegaard decomposition を入て, 3-manifold の不変量を構成することが可能で, k odd のとき Siegel upper half plane 上の vector bundle の構成を用いて, 牛嶋氏により参考されたいのである.

τ は、この不変量の Dehn surgery による
 記述を与えらる。 $L = L_1 \cup \dots \cup L_m$ は
 (oriented)
 framed link $a_{ij} = lk(L_i, L_j)$ は linking
 matrix, w_i は L_i の writhe number
 とす。 L の colour として写像 $\lambda: \{1, \dots, m\}$
 $\rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ を用いる。 M はこの
 framed link の Dehn surgery により得られる
 3-manifold とす

$$\left\{ \begin{array}{l}
 W(\ell, \ell') = \exp \pi \sqrt{-1} (\Delta_{\ell+\ell'} - \Delta_{\ell} - \Delta_{\ell'}) \\
 G_k = \begin{cases} 1 & k \equiv 1 \pmod{4} \\ \sqrt{-1} & k \equiv 3 \pmod{4} \\ e^{\frac{\pi \sqrt{-1}}{4}} & k: \text{even} \end{cases} \\
 \sigma_-(L) = \# \text{ of negative eigenvalues of } (a_{ij})
 \end{array} \right.$$

とす

$$I_k(M) = G_k^{2\sigma_-(L)-m} \sum_{\lambda} \prod_i W(\lambda(i), \lambda(i))^{w_i + a_{ii}} \\
 \times \prod_{i < j} W(\lambda(i), \lambda(j))^{2a_{ij}}$$

は、 M の topological invariant τ と Heegaard
 decomposition による不変量と一致する。

References

- [1] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I
- [2] Reshetikhin-Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups
- [3] Tsuchiya-Veno-Yamada, Conformal field theory on universal family of stable curves, with gauge symmetry

bidegree (4,4) の実代数曲線で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2重被覆
の coarse projective classification

北大理 松岡幸子

(Hokkaido Univ., Sachiko MATSUOKA)

§1 bidegree (4,4) の実代数曲線の配置についての制限

bidegree (4,4) の実斉次多項式 F の $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ における零点集合 RA の $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ における配置を調べる。 F の $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ における零点集合 A は非特異であると仮定しておく。 A の種数は 9 であり、そのことから RA の連結成分の総数 λ_A について

$$\lambda_A \leq 10$$

が知られている。 $\lambda_A = 10$ であるとき RA は M-curve であるといふ。 $\lambda_A = 10 - i$ であるとき M-i curve といふ。 RA の各連結成分は S^1 に diffeo であるが、 $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ において contractible であるとき oval とよび、そうでないとき non-trivial component とよぶ。nontrivial compo の総数を l'' とおく。
nontrivial component E に対して $[E] = s[\infty \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1] + t[\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \infty]$ (in $H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1; \mathbb{Z})$) とおくと、整数の組 (s, t) は RA のすべての nontrivial components に対して一定である。(符号を同時に付けることをのぞいて。) 今、 s, t はともに ≥ 0 の場合だけ考えるとしてよいだろう。また、 s と t を入れ替えて同じになるときはその一方の組のみ考えるとする。さて、oval が $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ の中で bound する disk を oval の 内部 とよんで、次の記号を導入する。 $\frac{m}{1}n$ は、 $(1+n)$ 個の ovals が互いに他の内部にはなく、そのうち 1 個の oval が内部に m 個の ovals を含み、それらの m 個は互いに他の内部にはないといふことを意味する。また、 $l'' = 2$, $(s, t) = (1, 0)$ のとき、 $\frac{m}{n}$ は、2 個の nontrivial component が分ける $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ の 2 つの領域の一方に m 個の ovals があり、それらは互いに他の内部にはなく、もう一方の領域に n 個の ovals があり、それらも同様であることを意味する。

$l'' = 2, (S, t) = (1, 1)$ のとき $\frac{m}{n}$ を同様に定める。

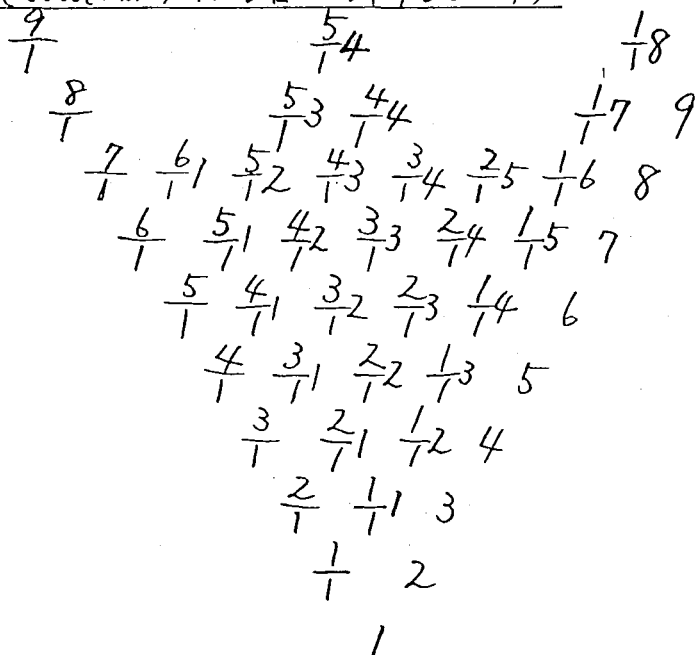
すると bidegree $(4, 4)$ の曲線 RA の $RP^1 \times RP^1$ における配置は、表 1 に
 示された 99 とおりに制限されるというのが [Ma1] の結果である。これらは
 制限にすぎず、それぞれの配置が bidegree $(4, 4)$ の曲線で実現されるかどうか
 を調べていじめて分類が完成することになる。

§2 bidegree $(4, 4)$ の実代数曲線で分岐する $P^1 \times P^1$ の 2 重被覆

曲線 RA の $RP^1 \times RP^1$ における配置を調べる時、その曲線の複素化 A
 で分岐する $P^1 \times P^1$ の 2 重被覆を考えるという方法がある。 $P^1 \times P^1$ 上の complex
 conjugation は、2 重被覆 X 上の 2 つの anti-holomorphic involution T^\pm
 に持ち上げられる。 T^\pm の fixed point set RX^\pm は、 $B^\pm := \{\pm F \geq 0\}$ (\subset
 $RP^1 \times RP^1$) の double とみなせる。([Ma1]) したがって closed 2-mfds
 RX^\pm の位相型は、 RA の $RP^1 \times RP^1$ における配置についての情報を与える。たとえ
 ば、 RA の配置が $\frac{1}{8}$ ならば、ovals の外側で $F < 0$ なるよ F をえらぶ
 ことにより $RX^- \underset{TOP}{\sim} \Sigma_{10} \amalg S^2$ かつ $RX^+ \underset{TOP}{\sim} T^2 \amalg 8S^2$ である。この場合
 「逆」も成り立つ。すなわち、「 RX^+ か RX^- の一方について $\underset{TOP}{\sim} \Sigma_{10} \amalg S^2$ ならば、
 その曲線の配置は $\frac{1}{8}$ である。」これはいつもなりたつことではなく、逆を考
 えるために、新たな不変量をあとで導入する。

さて、よく知られるように、非特異 $(4, 4)$ 次曲線で分岐する $P^1 \times P^1$ の 2 重被
 覆は K3 曲面である。逆に非特異 K3 曲面が $P^1 \times P^1$ の 2 重被覆であれば、
 branch locus の bidegree は $(4, 4)$ である。K3 曲面とその上の anti-holo-
 morphic involution の対を 実 K3 曲面 といふことにすれば、上の (X, T^\pm) は
 まさにそれである。real projective K3 surface の“実部”の位相型については、
 各次数毎に、[Ni1] に、完全に調べ挙げられている。もっと正確にいえば、各次数
 毎に real projective K3 surfaces の “coarse projective classes” 全体
 と、 h^2 がその次数である “polarized integral involutions (L, φ, h)
 (ここで L は even (unimodular) で 指数 $(3, 19)$, $t(h) = 1$ (あとで定義する))
 の isomorphism classes 全体が bijective に対応していて、real proj.

$l''=0$ (ovalのみ)の場合 (計46とおり)



$\frac{1}{1} \frac{1}{1} (00)$

ϕ (空集合)

$l''=2, (s,t)=(1,0)$ の場合 (計25とおり)

$$\frac{m}{n} \quad (m \geq n \geq 0, m+n \leq 8)$$

$l''=2, (s,t)=(1,1)$ の場合 (計25とおり)

$$\frac{m}{n} \quad (m \geq n \geq 0, m+n \leq 8)$$

その他の場合 (3とおり)

4(1,0) $(s,t)=(1,0)$ なる nontrivial compo 4個)

4(1,1) $(s,t)=(1,1)$ なる nontrivial compo 4個)

2(2,1) $(s,t)=(2,1)$ なる nontrivial compo 2個)

表1. RAの配置の, お=1)の型 ([Ma1])

$K3$ surface のいくつかの位相的性質が対応する (L, φ, h) についての不変量を用いて述べられるのである。我々の $P^1 \times P^1$ の 2重被覆の場合、 $h := \text{preimage of } ([\infty \times P^1] + [P^1 \times \infty])$ という偏極を考へることにより、次数 4 なので、 $h^2 = 4$, L : even で指数 $(3, 19)$, $t_{(+)} = 1$ であるような polarized integral involution (L, φ, h) たちの genus たち (isomorphism classes より少し粗い分類) を, [Ni1] の Theorem 3.4.3 を使って、すべて書き挙げてみよう。これらは、5 個の不変量 $(t_{(-)}, a, \delta_h, \delta_\varphi, \delta_{\varphi, h})$ によって記述することができる。(表 2 及び表 3 を見よ。)

注意 $1 \leq t_{(-)} \leq 17 - \delta_h$ なる genus は、isomorphism class を決める。([Ni1] の Th 3.3.1) さらに P^3 の非特異実 4 次曲面に限るならば、genus (つまり表 2, 表 3 の 5 個の不変量 $(t_{(-)}, a, \delta_h, \delta_\varphi, \delta_{\varphi, h})$) は、つねに isomorphism class を決める。つまり表 2, 表 3 は実 4 次曲面の coarse projective classification を与えている。([Ni1] の Remark 3.10.9)

Definition 2.1 triple (L, φ, h) が polarized integral involution であるとは、 L が unimodular lattice, φ は L の involution, $h \in L$, $\varphi(h) = \pm h$ なることである。この稿では、特に、次を仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} L \text{ は even, } h^2 = 4, \varphi(h) = -h, h \text{ は primitive in } L \\ L \text{ の signature は } (3, 19) \quad t_{(+)} = 1 \text{ (あとで定義)} \end{array} \right\} (1)$$

さて、記号の定義をする。

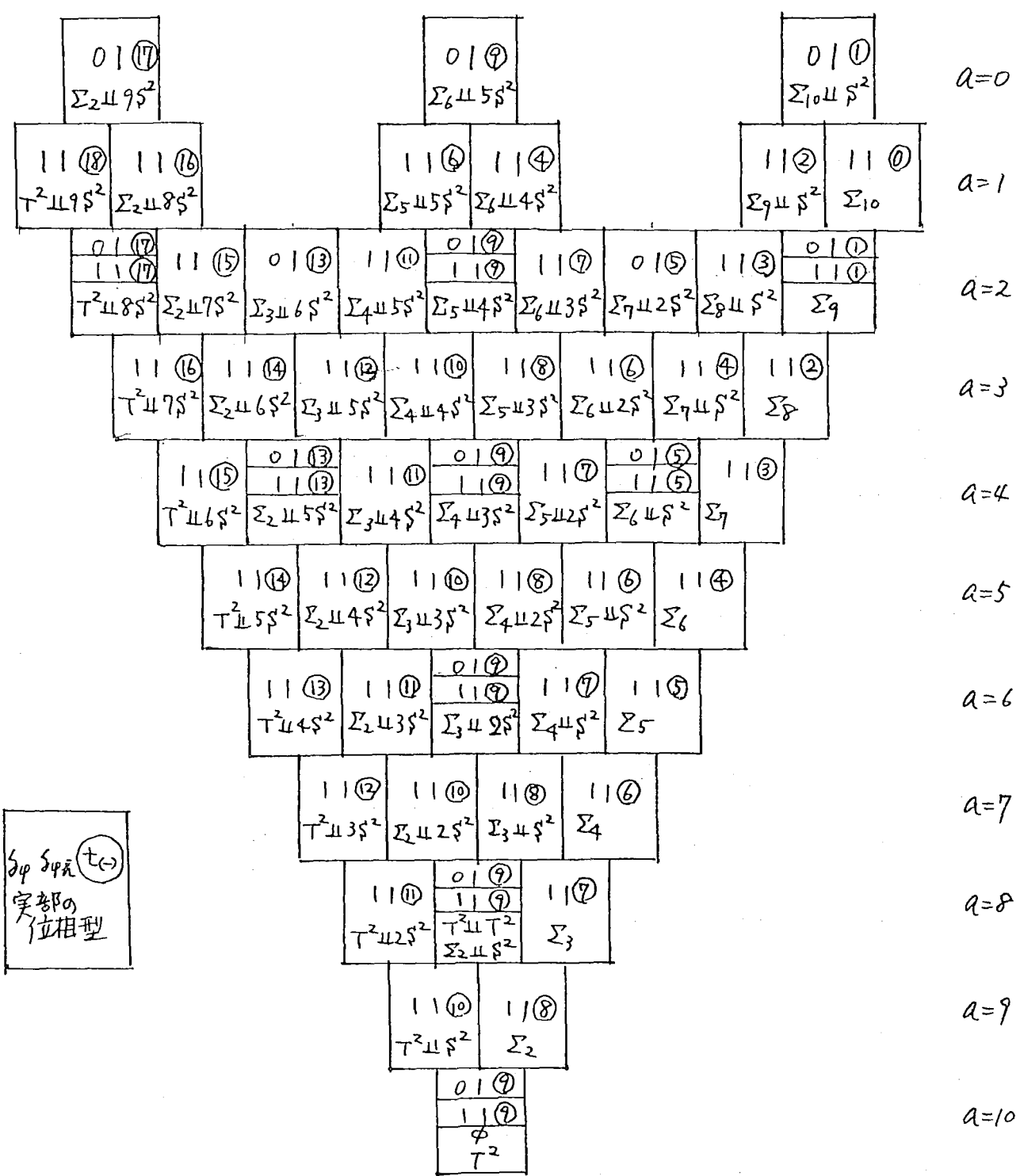
$(t_{(+)}, t_{(-)})$ は $L^\varphi := \{x \in L \mid \varphi(x) = x\}$ の signature とする。

$(L^\varphi)^*/L^\varphi \cong (\mathbb{Z}/2)^a$ が成り立つので、この式により a を定める。言いかえると、 $2^a = |(L^\varphi)^* : L^\varphi| = |\text{discr } L^\varphi|$ (L^φ の行列式の絶対値)

$$\delta_h := \begin{cases} 0 & \text{if } h \cdot x \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall x \in L^\varphi := \{x \in L \mid \varphi(x) = x\} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta_\varphi := \begin{cases} 0 & \text{if } x \cdot \varphi(x) \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall x \in L \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\delta_{\varphi, h} := \begin{cases} 0 & \text{if } x \cdot \varphi(x) \equiv x \cdot h \pmod{2} \quad \forall x \in L \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$



polarized integral involution $(L, \varphi, h) \tau^n$
 L が even, $h^2 = 4$, $\varphi(h) = -h$, h は primitive in L ,
 L の signature は $(3, 19)$, $t(+)=1$ であるものの、genus による分類。

表2 $\delta_h = 1$ の場合

(この場合 $1 \leq t(-) \leq 16$ に対しては、genus は isomorphism class を決める。)

10(19)	01(17)	10(5)	01(13)	10(11)	01(9)	10(7)	01(5)	10(3)	01(1)	a=2
$10S^2$	$T^2 \cup 8S^2$	$\Sigma_2 \cup 7S^2$	$\Sigma_3 \cup 6S^2$	$\Sigma_4 \cup 5S^2$	$\Sigma_5 \cup 4S^2$	$\Sigma_6 \cup 3S^2$	$\Sigma_7 \cup 2S^2$	$\Sigma_8 \cup S^2$	Σ_9	
11(18)	11(16)	11(14)	11(12)	11(10)	11(8)	11(6)	11(4)	11(2)	a=3	
$9S^2$	$T^2 \cup 7S^2$	$\Sigma_2 \cup 6S^2$	$\Sigma_3 \cup 5S^2$	$\Sigma_4 \cup 4S^2$	$\Sigma_5 \cup 3S^2$	$\Sigma_6 \cup 2S^2$	$\Sigma_7 \cup S^2$	Σ_8		
01(17)	10(15)	01(13)	10(11)	01(9)	10(7)	01(5)	10(3)	a=4		
11(17)	11(15)	11(13)	11(11)	11(9)	11(7)	11(5)	11(3)			
$8S^2$	$T^2 \cup 6S^2$	$\Sigma_2 \cup 5S^2$	$\Sigma_3 \cup 4S^2$	$\Sigma_4 \cup 3S^2$	$\Sigma_5 \cup 2S^2$	$\Sigma_6 \cup S^2$	Σ_7			
11(16)	11(14)	11(12)	11(10)	11(8)	11(6)	11(4)	a=5			
$7S^2$	$T^2 \cup 5S^2$	$\Sigma_2 \cup 4S^2$	$\Sigma_3 \cup 3S^2$	$\Sigma_4 \cup 2S^2$	$\Sigma_5 \cup S^2$	Σ_6				
11(15)	01(13)	10(11)	01(9)	10(7)	11(5)	a=6				
$6S^2$	11(13)	11(11)	11(9)	11(7)						
	$T^2 \cup 4S^2$	$\Sigma_2 \cup 3S^2$	$\Sigma_3 \cup 2S^2$	$\Sigma_4 \cup S^2$	Σ_5					
11(14)	11(12)	11(10)	11(8)	11(6)	a=7					
$5S^2$	$T^2 \cup 3S^2$	$\Sigma_2 \cup 2S^2$	$\Sigma_3 \cup S^2$	Σ_4						
11(13)	10(11)	01(9)	10(7)	a=8						
$4S^2$	11(11)	11(9)	11(7)							
	$T^2 \cup 2S^2$	$T^2 \cup S^2$	Σ_3							
11(12)	11(10)	11(8)	a=9							
$3S^2$	$T^2 \cup S^2$	Σ_2								
10(11)	01(9)	a=10								
11(11)	11(9)									
$2S^2$	ϕ_2									
11(10)	a=11									
S^2										

$\delta_4 \delta_{4k} (t_{-1})$
 尖部の
 位相型

表3 $\delta_k = 0$ の場合

(この場合 $1 \leq t_{(-)} \leq 17$ に対しては genus は isomorphism class を決める。)

Theorem 2.2 ([Ni1]のTheorem 3.10.5 & 3.10.6)

次数4の実射影K3曲面 (X, T) に対し、対応する polarized integral involution $(H_2(X; \mathbb{Z}), T_*, h)$ (h は偏極) の5つの不変量 $(t(-), a, \delta h, \delta \varphi, \delta \varphi, h)$ を考える。(Def. 2.1) すると次が成り立つ。

(i) $(t(-), a, \delta \varphi) = (9, 10, 0)$ ならば "実部について $RX = \emptyset$ ではない場合、 $RX \neq \emptyset$ で、

$$\widetilde{\text{Top}} \begin{cases} T^2 \amalg T^2 & \text{if } (t(-), a, \delta \varphi) = (9, 8, 0) \\ \Sigma_g \amalg kS^2 & \text{in the remaining cases} \\ (\text{ここで } g = \frac{21 - t(-) - a}{2}, k = \frac{1 + t(-) - a}{2}) \end{cases}$$

(ii) $RX \neq \emptyset$ のとき、

$\delta h = 0 \iff$ odd $m \in \mathbb{N}$ に対し、linear system $|mh|_R$ が RX 上で、homologous to 0 in $H_1(RX, \mathbb{Z}/2)$ な cycle を cut out する。

(iii) $\delta \varphi = 0 \iff [RX] = 0$ in $H_2(X, \mathbb{Z}/2)$

(iv) $\delta \varphi h = 0 \iff [RX] \sim h$ in $H_2(X, \mathbb{Z}/2)$

上の結果(i)を用いて、表2, 表3では、各genusに対して、対応する実射影K3曲面 X の実部 RX の位相型を書いた。

さて、表2表3も、bidegree(4, 4)の実代数曲線で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の2重被覆についての制限を与えているにすぎないことに注意する。

どのgenusがbidegree(4, 4)の実代数曲線で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の2重被覆によって実現されるだろうか。次のひとつの十分条件がある。

Theorem 2.3 ([Ma2]のCorollary 7をもっと精密にのべたもの)

(X, t) : 実K3曲面とし、

$L_t := \{x \in H^2(X; \mathbb{Z}) \mid t^*(x) = -x\}$ とおく。

L_t が $V \oplus V$ を sublattice とするならば、(ただし $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

bidegree (4, 4) の非特異実代数曲線で分岐する $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2重被覆 $\Phi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ があり、次を満たす。

(i) complex conjugation の持ち上げの一方 T について $\text{Fix } T \stackrel{\text{diffeo}}{\cong} \text{Fix } t$ 。

(ii) $h := \Phi^*([\infty \times \mathbb{P}^1] + [\mathbb{P}^1 \times \infty])$ とおくと、 $(H^2(Y), T^*, h)$ に対して、 $\delta h = 1$ である。すなわち、

$$\exists x \in L_{T^*}, \quad h \cdot x \not\equiv 0 \pmod{2} \quad (\text{cf. Def 2.1})$$

(iii) $h_1 := \Phi^*([\infty \times \mathbb{P}^1])$, $h_2 := \Phi^*([\mathbb{P}^1 \times \infty])$ とおくと、

$$\exists x_1 \in L_{T^*}, \quad h_1 \cdot x_1 \not\equiv 0 \pmod{2} \quad \text{であり、また、}$$

$$\exists x_2 \in L_{T^*}, \quad h_2 \cdot x_2 \not\equiv 0 \pmod{2} \quad \text{である。}$$

Lemma 2.4

bidegree (4, 4) の非特異実代数曲線 $\overset{A}{\text{で分岐する}} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2重被覆 $\Phi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対し、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の complex conjugation の持ち上げ T をひとつとる。 $h := \Phi^*([\infty \times \mathbb{P}^1] + [\mathbb{P}^1 \times \infty])$, $h_1 := \Phi^*([\infty \times \mathbb{P}^1])$, $h_2 := \Phi^*([\mathbb{P}^1 \times \infty])$ とおく。 $\delta h_1, \delta h_2$ を次のように定義する。

$$\delta h_i = \begin{cases} 0 & \text{if } h_i \cdot x \equiv 0 \pmod{2} \quad \forall x \in L_{T^*} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

次の成り立つ (T に対し $\mathbb{R}Y \neq \emptyset$ と仮定する)

(i) $\delta h = 0 \iff \mathbb{R}A$ は oval のみからなり、 $\mathbb{R}Y (= \text{Fix } T)$ は $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{R}A$ のおととも外側の component の double を含まない。

または、

$\mathbb{R}A$ は non trivial component をもち、 $(s, t) = (1, 1)$

(ii) $\delta h_1 = 0 \iff \mathbb{R}A$ は oval のみからなり、 $\mathbb{R}Y (= \text{Fix } T)$ は $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{R}A$ のおととも外側の component の double を含まない。

または、

$\mathbb{R}A$ は non trivial component をもち $(s, t) = (1, 0)$ or $(1, 2)$ 。
(s, t は順序も考へる。)

(iii) $\delta h_2 = 0 \iff \mathbb{R}A$ は oval のみからなり、 $\mathbb{R}Y$ は $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{R}A$ のおととも外側の component の double を含まない。

または、

RA は non trivial component をもち、 $(s, t) = (0, 1)$ or $(2, 1)$ 。
(s, t は順序を考へる。)

(証明) (i) の右側の条件は、linear system $|h|_{\mathbb{R}}$ が RY 上で homologous to 0 in $H_1(RY, \mathbb{Z}/2)$ なる cycle を cut out する ことと同値であるから、Theorem 2.2 (ii) より $\delta h = 0$ と同値。

(ii) の右側の条件は linear system $|h_1|_{\mathbb{R}}$ が RY 上で homologous to 0 in $H_1(RY, \mathbb{Z}/2)$ なる cycle を cut out する ことと同値。(iii) の右側の条件は、今いたことの h_1 を h_2 に替えたものに同値。したがって次の Lemma を示せばよい。(終)

Lemma 2.5

Lemma 2.4 の仮定のもとで、 $i=1, 2$ に対し、
 $\delta h_i = 0 \iff$ linear system $|h_i|_{\mathbb{R}}$ が RY 上で homologous to 0 in $H_1(RY; \mathbb{Z}/2)$ なる cycle を cut out する。

(証明) $RY \cap h_i = 0$ in $H_1(RY; \mathbb{Z}_2)$ とすると、[Kha1] Remark 2.2 より [Kha1] Lemma 2.3 が使えて、class $h_i \pmod{2} \in H_2(Y; \mathbb{Z}_2)$ は $\text{Im } \alpha_2$ に直交する。よって α_2 は Smith exact sequence の中の準同型 α_2 :

$$H_2(Y/T, \mathbb{R}Y; \mathbb{Z}_2) \oplus H_2(\mathbb{R}Y; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_2(Y; \mathbb{Z}_2) \text{ である。}$$

$E = \{x \in H_2(Y; \mathbb{Z}_2) \mid T_*(x) = x\}$ とおくと Smith theory より $E \subset \text{Im } \alpha_2$ であつた。

$$\begin{aligned} \#E = \dim \frac{H_2(Y; \mathbb{Z}_2)}{\text{Im } \alpha_2} &\leq \frac{1}{2} (\dim H_*(Y; \mathbb{Z}_2) - \dim H_*(\mathbb{R}Y; \mathbb{Z}_2)) \\ &= \frac{1}{2} (24 - (24 - 2 \dim \frac{(L^{T^*})^*}{L_{T^*}})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(RY } \neq \emptyset \text{ より [Ni1] Th 3.10.5 より。)} \\ &= \dim \frac{(L^{T^*})^*}{L_{T^*}} \end{aligned}$$

$$= \dim \frac{H_2(Y; \mathbb{Z}_2)}{L_{T^*} \oplus L_{T^*}}$$

$$= \dim H_2(Y; \mathbb{Z}_2) / E$$

$\therefore \dim \text{Im } \alpha_2 \geq \dim E \quad \therefore E = \text{Im } \alpha_2 \quad \therefore h_i \pmod{2}$ は E に直交する。

$\therefore h_i \cdot x \equiv 0 \pmod{2}$ for $\forall x \in L^{T^*} \oplus L_{T^*}$

特に $\forall x \in L_{T^*}$

(証明終)

注意 Lemma 2.5 の逆も成立すると予想しているが、まだ証明していない。証明できれば、Lemma 2.4 の (ii) (iii) の逆も成立。

Lemma 2.6 ([Kha2] など参照.)

不変量 $(t(-), a, \delta_R, \delta_\varphi, \delta_{\varphi_R})$ について、(Def 2.1 を見よ.)

(i) $t(-)=1, a=0 \iff L_\varphi \cong U \oplus U \oplus (-E_8) \oplus (-E_8)$

(ii) $t(-)=9, a=0 \iff L_\varphi \cong U \oplus U \oplus (-E_8)$

(iii) $t(-)=17, a=0 \iff L_\varphi \cong U \oplus U$

表 2 ($\delta_R=1$) において、

(iv) $t(-)=16, a=1 \implies L_\varphi$ は $U \oplus U$ を sublattice とする。

(v) $t(-)=15, a=2 \implies L_\varphi \cong U \oplus U \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle -2 \rangle$

(vi) $t(-)=13, a=2 \implies L_\varphi$ は $U \oplus U \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle -2 \rangle$ を sublattice とする。

(vii) $t(-)=14, a=3 \implies L_\varphi$ は $U \oplus U$ を sublattice とする。

(証明)

Lemma 2.6 の (i)(ii)(iii) は even unimodular lattice についてよく知られていることである。(iv) — (vii) については $t(-) \leq 16$ であるから、各 genus は isomorphism class を定めているのであった。 $\uparrow \cong$ したがって各 genus に属する polarized integral involution は、ある実 4 次曲面から定まる polarized integral involution に同型である。(Def 2.1 の前の注意を参照。) [Kha2] は (iv) — (vii) それぞれについて両側の条件をみたす実 4 次曲面の存在を示している。結局 (iv) — (vii) それぞれの isomorphism class に属するすべての polarized integral involution は、右側の条件をみたすことになる。特に (vi) についてはまったく代数的に証明できる。([Kha2]) (終)

Corollary 2.7

次の配置は bidegree (4, 4) の実代数曲線で実現される。

$$\underbrace{\frac{1}{8}, \frac{5}{4}, \frac{9}{1}}_{M\text{-curve}}, \underbrace{\frac{8}{1}}_{M-1}, \underbrace{\frac{7}{1}, \frac{6}{1}}_{M-2}, \underbrace{\frac{6}{1}}_{M-3}$$

(証明) Lemma 2.6 と Theorem 2.3 より、表 2 を参照すると、 $\Sigma_{10} \sqcup S^2$,
 $\Sigma_6 \sqcup 5S^2$, $\Sigma_2 \sqcup 9S^2$, $\Sigma_2 \sqcup 8S^2$, $\Sigma_2 \sqcup 7S^2$, $\Sigma_3 \sqcup 6S^2$,
 $\Sigma_2 \sqcup 6S^2$ は (4,4) 次曲線で分岐する 2 重被覆の実部として実現
される。(しかも Th 2.3 は、 $\delta_h = \delta_{h_1} = \delta_{h_2} = 1$ として実現できることまで主
張している。) したがって $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{8}{1}$ 型の (4,4) 次曲線は
存在する。(位相型が $\Sigma_2 \sqcup 7S^2$, $\Sigma_3 \sqcup 6S^2$, $\Sigma_2 \sqcup 6S^2$ とい) だけでは
 $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ における ^{実部の}配置は一意に定まらないが、 $\delta_h = \delta_{h_1} = \delta_{h_2} = 1$ であること
から、これらの配置は、 $\frac{7}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{6}{1}$ と結論できる。(Lem 2.4 より) (終)

Corollary 2.7 の証明に出てきたように、実部の位相型が $\Sigma_2 \sqcup 7S^2$ で
あるような 2 重被覆は、branch locus の (4,4) 次曲線の配置が、
 $\frac{7}{1}$, $\frac{7}{1}$, $1/1$ の 3 とおりである。しかし、 $\frac{7}{1}$ は存在しないこと
が次のように証明できる。

Lemma 2.8

$\frac{7}{1}$ 型の (4,4) 次曲線は存在しない。

(証明) もし存在するならば、2 重被覆の実部は $\Sigma_2 \sqcup 7S^2$ で、Lemma
2.4 より $\delta_h = 1$ なので、対応する polarized integral involution は、
表 2 の $t(-1) = 15$, $a = 2$ の isomorphism class に入る。したがって
Lemma 2.6 より $L_\varphi \cong V \oplus V \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle -2 \rangle$ ($L_\varphi = L_T^*$)
Lemma 2.4 (ii) (iii) より、 h_1 の方にだけ $\delta_{h_1} = 0$ と考えてよい。
 L_φ の basis e_1, \dots, e_6 を、lattice $\alpha \cong (i_6) \oplus (i_6) \oplus \langle -2 \rangle \oplus \langle -2 \rangle$ で表されるようにとる。
 $h_1 = C_1 e_1 + \dots + C_6 e_6$ ($C_i \in \mathbb{Z}$) とおく。 $\delta_{h_1} = 0$ より、
 $C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0 \pmod{2}$ である。他方 h_1 は primitive であるから、
 C_5 と C_6 は odd. C_5 が odd であるとしてよい。 $\varphi = \tau$,
 $h_1 = 2(A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_4 e_4) + C_5 e_5 + C_6 e_6$
とくと、

$$0 = h_1^2 = 8(A_1A_2 + A_3A_4) - 2C_5^2 - 2C_6^2$$

したがって $4(A_1A_2 + A_3A_4) = C_5^2 + C_6^2$ (したがって C_6 も odd とい) ことになるが、 $(\text{奇数})^2 + (\text{奇数})^2$ は 4 の倍数にならないので矛盾

(証明終)

§3. quadratic transformation $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ による bidegree (4, 4) の実代数曲線の構成

1990年9月、O. Ya. Viro氏が北大に来られ、すでに多くの(4, 4)次曲線が、 $\mathbb{R}P^2$ 上の特異6次曲線を quadratic transformation で $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ にうつすことにより構成されていることを教えて下さった。その方法を使えば、 $K3$ 曲面の変形理論や、bilinear formの理論を用いなくとも、 $\frac{7}{1}$ 型の(4, 4)次曲線が得られる。([Vi] [Gu2]参照。) また、私の Lemma 2.8 である、 $\frac{7}{1}$ 型の(4, 4)次曲線の非存在も [Gu2] に示されていた。[Gu2] では、 $\frac{7}{1}$ 型(4, 4)次曲線が存在すれば、quadratic transformation により、 $\frac{2}{1}$ 型の6次曲線が存在することになり、矛盾であると導く。それでは、 $\frac{2}{1}$ 型の6次曲線はなぜ存在しないかといえは、それは、Rokhlinの指数定理に矛盾するからである。(ここでは、bilinear formの理論と結びついた4次元トポロジーが使われている。[Ro]参照。) 実代数曲線、曲面の構成に、 $K3$ 曲面の変形と周期写像の(局所)全射性を用い始めたのは [Kha2] である。それによつて、[Kha2] は、ある種の位相型の実4次曲面の存在性を示した。(私の、 $\frac{7}{1}$ 型の(4, 4)次曲線の存在の証明法も [Kha2] に動機がけられる。) その後、その位相型の実4次曲面は、[Vi] により、もっと elementary に(直接的に)構成された。その時に、(4, 4)次曲線が使われているのである。(4, 4)次曲線はここでは、 $\mathbb{R}P^3$ 内の one sheet hyperboloid と 4次曲面の intersection としてあらわされる。求める配置の(4, 4)次曲線を得るために、 $\mathbb{R}P^2$ 内の特異6次曲

線を用意し、それに quadratic transformation を施すのであるが、それには、[Gu1][Po] で構成された 6 次曲線が非常に役立っている。

[Gu2] は、 \mathbb{RP}^3 内の ^{one sheet} hyperboloid 上の order δ の curve を扱っている。これは $(4, 4)$ とは限らぬので、ここで構成されているものが $(4, 4)$ であるかどうか調べるつもりである。

§4 最後に。

表2, 表3 は [Ni1] から書き下したものであるが、この分類は、我々の求める $(4, 4)$ 次曲線の配置の分類より、明らかに粗い。たとえば、表2の isomorphism class $(t(-), a, \delta_R, \delta_F, \delta_{FR}) = (10, 3, 1, 1, 1)$ は、 $\frac{4}{1}$ 型 $\frac{4}{3}$ 型 両方を含む。(両者は存在する。) そこでこれらを区別するためには、Lemma 2.4 で導入した不変量 δ_1, δ_2 を使えばいいのではないかと考えている。[Ni2] で扱われている "integral involution with conditions on a sublattice"

$$(L, \varphi, (S, \theta))$$

の分類が関連すると思われる。

参考文献

- [Gu1] D. A. Gudkov, Construction of a new series of M-curves, Soviet Math. Dokl. 12 (1971), 1559—1563.
- [Gu2] D. A. Gudkov, On the topology of algebraic curves on a hyperboloid, Russian Math Surveys (1979), 27—35.
- [Kha1] V. M. Kharlamov, Additional congruences for the Euler characteristic of real algebraic manifolds of even dimensions, Funct. Anal Appl. 9 (1975), 134—141.
- [Kha2] V. M. Kharlamov, The topological types of nonsingular surface of degree 4 in \mathbb{RP}^3 , Funct. Anal Appl. 10 (1976), 295—305.

- [Ma1] S. Matsuoka, Nonsingular algebraic curves in $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$,
Trans. Amer. Math. Soc. (1990) (to appear).
- [Ma2] S. Matsuoka, The configurations of the M -curves of degree $(4,4)$
in $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ and periods of real $K3$ surfaces, Hokkaido
Math. Journal (1990).
- [Ni1] V. V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and
some of their applications, Math USSR Izv. 14 (1980),
103 - 167.
- [Ni2] V. V. Nikulin, Involutions of integral quadratic forms
and their applications to real algebraic geometry,
Math. USSR Izv. 22 (1984), 99 - 172.
- [Po] G. M. Polotovskii, A catalogue of M -reducible curves of
order 6, Soviet Math Dokl 18 (1977), 1241 - 1245.
- [Ro] V. A. Rokhlin, "Congruences modulo 16 in Hilbert's six-
teenth problem, Funct. Anal Appl. (1972), 301 - 306.
- [Vi] O. Ya. Viro, Construction of multicomponent real algebraic
surfaces, Soviet Math Dokl 20 (1979), 991 - 995.

Symplectic double groupoids of $(ax + b)$ -groups ¹

三上 健太郎 (秋田大学・教育)

序に代えて：

Lagrange 力学	接束の幾何
Hamilton 力学	余接束の幾何
	symplectic manifolds
	↓ 一般化
	Poisson manifolds
	↓ 一般化
	局所 Lie 代数構造
	(Jacobi manifolds, bundles)

A. Weinstein, M. V. Karasev の (発見した?) 斜交重群 (symplectic groupoid) によると, Poisson manifold は symplectic manifold の中に lagrangian submanifold として取り込まれていると解釈できる (cf. Symplectic creed: *Everything is a lagrangian submanifold!*).

次の問題が自然に起る：

問 1) Poisson manifold はいつでも symplectic manifold の中に取り込めるか? (問題意識としてリー-の第 3 問題 (定理) の類似. また別の乱暴な言い方で symplectic geometry $\stackrel{?}{=} \text{Poisson geometry}$)

問 2) 取り込まれた Poisson manifold の如何なる性質が symplectic manifold の中どの様に反映するか?

問 1) に対する答えは否: 即ち或る Poisson manifold (eg. $S^2 \times \mathbf{R}$ with $\pi = (1 + t^2)(\text{vol}_{S^2})^{-1}$) に対して symplectic groupoid を作れない (cf. Weinstein[11])². そこで次なる問題は

問 1') どんな Poisson manifold が symplectic manifold の中に取り込めるか?

ここでは非常に具体的な Poisson manifold $(ax + b)$ -group について問題 1', 2) に関して実験し得られた結果を紹介したい.

¹1990 年 7 月 23 日に [8] を基に口頭発表.

²後に P. Dazord[1] は symplectic leaves の cohomology 類から symplectic groupoid 構成の obstruction を研究した.

本論 : Symplectic groupoid の定義の復習から :

定義 1 (Weinstein[10], Karasev[4]) Symplectic groupoid とは可微分 groupoid 構造を備えた symplectic manifold (M, Ω) で, symplectic と groupoid の 2 つの構造は次の意味で共存していることを要求する: 乗法の graph は $M \oplus M \ominus M (= M \times M \times M$ with $\Omega \oplus \Omega \ominus \Omega)$ の lagrangian submanifold である.

可微分 groupoid とは次の組のこと:

- differentiable manifolds M, Q (= space of units),
- submersions $\alpha, \beta: M \rightarrow Q$,
- embedding $\varepsilon: Q \rightarrow M$ with $\alpha \circ \varepsilon = id.$ and $\beta \circ \varepsilon = id.$ (i.e., ε is the section of α and β)
- 部分的に定義された乗法
 $m: \{(x, y) \in M \times M \mid \beta(x) = \alpha(y)\} \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in M$
- the inversion $\iota: M \ni x \mapsto x^{-1} \in M$,
- 演算可能条件のもとで $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
 $x \cdot x^{-1} = \varepsilon \circ \alpha(x)$ そして $x^{-1} \cdot x = \varepsilon \circ \beta(x).$

例 1 Symplectic groupoid の (一番) 簡単な例: 多様体 Q の canonical symplectic 構造を持った cotangent bundle T^*Q は $\alpha = \beta =$ bundle projection, $\varepsilon =$ the zero section, $m =$ fibre-wise addition なる構造を持つ Q 上の symplectic groupoid である.

Symplectic groupoid の定義から直接導かれる基本性質:

1. $\varepsilon(Q)$ は M の lagrangian submanifold である.
2. Q に α が Poisson map で β が anti-Poisson map なる Poisson 構造が一意に決まる.

性質 (2) を知ると, その逆はどうなのか知りたくなる. それが最初に紹介した問 1) である. 再度述べると:

問 1) 与えられた Poisson manifold (Q, π) 上に symplectic groupoid を, 基本性質 2 の意味で誘導された Poisson 構造が元の Poisson 構造 π と一致するように作れるか?

ところが反例が見つかったので問題を次のように修正せざるを得なかった.

問 1') どんな種類の Poisson manifold が symplectic groupoid を許容するか?

問題 1') へのコメント:

1. Zero Poisson manifold に対しては必ず symplectic groupoid が存在する (cf. 例 1).
2. Symplectic manifold に対しては必ず symplectic groupoid が存在する (粗い groupoid³, or fundamental groupoid).
3. Pre-quantizable symplectic manifold に \mathbf{R} を直積して得られる Heisenberg-Poisson manifold⁴ に対し symplectic groupoid が存在する (cf. Weinstein[13]).

Poisson manifolds の category の中に Poisson Lie groups の subclass がある.

定義 2 (Drinfel'd[2]) Lie group G の Poisson 構造が乗法的とは群 G の積演算が Poisson map であるとき. Poisson tensor の言葉では

$$\pi(ab) = (Tl_a)\pi(b) + (Tr_b)\pi(a) \quad a, b \in G$$

が成立するとき. 乗法的 Poisson 構造を備えた Lie group を Poisson (Lie) group と呼ぼう. 乗法的 Poisson 構造はリ-環 \mathfrak{g} の dual space \mathfrak{g}^* に Lie algebra 構造を次のような対応で定める (Lie bialgebra). π を連結 Lie 群 G の $\pi(e) = 0$ なる *bi-vector field* とする.

	縦方向に同値	縦方向に同値
$\pi: G \rightarrow \wedge^2 TG$	乗法的	Poisson
$\pi_r: G \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$	1-cocycle of Ad-rep. ⁵	
$d_e \pi_r: \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$	1-cocycle of ad-rep. ⁶	
$(d_e \pi_r)^*: \mathfrak{g}^* \leftarrow \wedge^2 \mathfrak{g}^*$		Jacobi 律

G^* をリ-環 \mathfrak{g}^* の単連結 Lie group とすれば G^* にただ一つ乗法的 Poisson 構造 π' が \mathfrak{g} の Lie algebra 構造を定めるように存在する. (G^*, π') を (G, π) の *dual* と呼ぶ.

例 2 Lie-Poisson 構造 (括弧):

G を Lie group とする. Lie-Poisson 構造とは多様体 \mathfrak{g}^* 上の次で定義される Poisson 括弧のこと:

$$\{F, H\}_{\pm}(\mu) = \pm \left\langle \mu, \left[\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta H}{\delta \mu} \right] \right\rangle.$$

これは \mathfrak{g}^* の加法に関して乗法的である. $(\mathfrak{g}^*, \{, \}_{\pm})$ は (G, zero) の dual Poisson Lie group である.

³ $(x, y) \cdot (z, w) = (x, w)$ if $y = z$

⁴Poisson tensor is defined by $\pi = t\pi_Q$, where $t \in \mathbf{R}$.

⁵ $\Gamma: G \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$, $\Gamma(ab) = \Gamma(a) + \text{Ad}_a \cdot \Gamma(b)$, $\text{Ad}_a \cdot (x \wedge y) = \text{Ad}_a x \wedge \text{Ad}_a y$.

⁶ $\gamma: \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$, $\gamma([u, v]) = \text{ad}_u \cdot \gamma(v) - \text{ad}_v \cdot \gamma(u)$, $\text{ad}_u \cdot (x \wedge y) = (\text{ad}_u x) \wedge y + x \wedge (\text{ad}_u y)$.

例 2 の Poisson manifold に問 1') を科すと

例 3 Lie-Poisson 構造の symplectic groupoid として再び cotangent bundle T^*G を得る. 但し, groupoid 構造は例 1 のそれとは若干異なる. Source 及び target maps は G の right and left actions の equivariant momentum maps である. Right translation によって T^*G と $\mathfrak{g}^* \times G$ を同一視するとき, 上の groupoid 構造は coadjoint representation の transformation groupoid⁷ そのものである.

Lie group G の cotangent bundle T^*G は 2 種類の symplectic groupoid 構造を持つ. しかもそれ等は double groupoid を成し, 対応する Poisson Lie group は互いに dual である. 以上の例から非常に楽観的ではあるが次の問 (予想) を考えてみる.

問題: 各 Poisson Lie group とその dual (もし必要なら単連結を仮定して) は symplectic double groupoid を持つか?

この問題を非可換なものの中で最も簡単であり, しかも半単純 (semi-simple) でない $(ax + b)$ -group の場合に実験してみた.

主張: $(ax+b)$ -group の各乗法的 Poisson 構造 (必ずしも dual でなくとも) は symplectic double groupoid を持つ.

変数変換して, 以下 $(ax + b)$ -group と言えば \mathbb{R}^2 で群構造が次で与えられるものとしよう:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, e^{cx_1/2}y_2 + e^{-cy_1/2}x_2)$$

もし $c = 0$ なら, これはアーベル群であり, $c \neq 0$ なら, 群として同型である.

まず $(ax + b)$ -group の乗法的 Poisson 構造を全て捜そう. 我々の多様体は 2 次元だから, 全ての 2-vector field は自動的に Poisson tensor である. 従って, multiplicativity condition

$$\pi(ab) = (T\ell_a)\pi(b) + (Tr_b)\pi(a) \quad a, b \in G$$

だけを確認すれば良い: 直接の計算によって

$${}^7(x, a) \cdot (y, b) = (x, ab) \quad \text{if } x \cdot a = y$$

命題 1 (1) 乗法的 Poisson 構造は次に尽きる:

$$\{x_1, x_2\} = \frac{2k_1}{c} \sinh \frac{cx_1}{2} + k_2 x_2 \quad (k_1, k_2 \text{ は定数}).$$

(2) 乗法的 Poisson 構造を group automorphisms⁸で類別すると同値類は次で与えられる:

$$\{(0, 0)\}, \quad \{(k_1, 0) | k_1 \neq 0\}, \quad \{(k_1, k_2) | k_1 \in \mathbf{R}\}_{k_2} \quad (k_2 \neq 0).$$

$(\mathbf{R}_c^2, (0, 0))$ の dual は $(\mathbf{R}_0^2, (0, c))$, $(\mathbf{R}_c^2, (k_1, 0))$ の dual は $(\mathbf{R}_{k_1}^2, (c, 0))$, そして $(\mathbf{R}_c^2, (0, k_2))$ の dual は $(\mathbf{R}_{k_2}^2, (0, c))$ である. 但し $k_1, k_2 \neq 0$.

(3) 乗法的 Poisson 構造を diffeomorphisms の範ちゅうで類別すると同値類は zero と non-zero の 2 つの Poisson 構造だけである⁹.

命題 1(3) は Poisson manifolds の category の中で non-zero 乗法的 Poisson 構造は皆同じであると言う. 他方, (2) によるとそれ等は Poisson Lie groups の category の中では等しくないこともある. どんな “違い” があるだろうか?

補足:

1. r -matrix¹⁰から定義される乗法的 Poisson 構造は $\{x_1, x_2\} = \frac{2k_1}{c} \sinh(cx_1/2)$ に限る, 但し, $(c \neq 0)$.

2. Drinfel'd[3] の意味で *non-degenerate*¹¹なものは

$$\{x_1, x_2\} = \frac{2k_1}{c} \sinh(cx_1/2) + k_2 x_2 \quad (k_2 \neq 0)$$

である.

3. $(\mathbf{R}_c^2, (0, k_2))$ の double Lie algebra¹²は $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$, $(\mathbf{R}_c^2, (k_1, 0))$ の double Lie algebra は半直積 $\mathbf{R} \times \mathfrak{h}_3$ である. ここで, \mathfrak{h}_3 は 3次元 Heisenberg Lie algebra, $k_1 \cdot k_2 \neq 0$.

$$^8 \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = p \sinh(cx_1/2) + qx_2 \quad (p, q \text{ 定数}, q \neq 0) \end{cases}$$

⁹例えば $y_1 = x_2, y_2 = -\frac{k_1}{k_2} x_1 \theta(cx_2)$, 但し, $\theta(t) = \sinh(t/2)/(t/2)$.

$$\text{その時 } \{x_1, x_2\} = k_2 x_2 \iff \{y_1, y_2\} = \frac{2k_1}{c} \sinh \frac{cy_1}{2}$$

¹⁰ $\mathbf{r} \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ に対し $\pi(a) = Tl_a \mathbf{r} - Tr_a \mathbf{r} \quad a \in G$ は自動的に乗法的である. 更に, π が Poisson tensor になる必要かつ十分条件は $[\mathbf{r}, \mathbf{r}]$ が \mathfrak{g} の adjoint-action で不変であること. 特に $[\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0$ ならば π は乗法的 Poisson 構造を与える. $[\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0$ は classical Yang-Baxter equation と同じ, かかる \mathbf{r} を r -行列と呼ぶ. 但し, $[\ , \]$ は Schouten bracket.

¹¹Lie 括弧と $d_e \pi_r: \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$ を合成した $\wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$ が nondegenerate のとき (有限 4 次元以上ではいつも退化).

¹²Double Lie algebra (別称 Manin triple) とは次の Lie algebra 構造を持つ $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ のこと: \mathfrak{g} と \mathfrak{g}^* は $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ の subalgebra, そして各 $\xi \in \mathfrak{g}, \mu \in \mathfrak{g}^*$ に対して $[\xi, \mu] = \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) - \mu_{\mathfrak{g}}(\xi)$.

我々は既に次の図式を知っている：

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xleftarrow{\text{proj}} & \mathbb{R}^4 \\
 \alpha \downarrow \downarrow \beta & & \Omega_0 = -dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4 \\
 \mathbb{R}^2 & & \alpha(x) = (x_1 + x_2 x_4/2, x_2 \exp(-x_3/2)) \\
 & & \beta(x) = (x_1 - x_2 x_4/2, x_2 \exp(x_3/2)) \\
 & & \varepsilon(x) = (x_1, x_2, 0, 0)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y)_1 &= x_1 - y_2 y_4/2 (= y_1 + x_2 x_4/2) \\
 (x \cdot y)_2 &= x_2 \exp(y_3/2) (= y_2 \exp(-x_3/2)) \\
 (x \cdot y)_3 &= x_3 + y_3 \\
 (x \cdot y)_4 &= x_4 \exp(x_3/2) + x_3 \exp(-y_3/2) \\
 x^{-1} &= (x_1, x_2, -x_3, -x_4)
 \end{aligned}$$

次の簡単な観察は亜群の演算を変えることなしに底空間の Poisson 構造を変形 (外見的に) する方法を教えてくれる。

命題 2 $((M, \Omega), (Q, \pi), \alpha, \beta, m, \iota)$ を symplectic groupoid とする。もし $\varphi: (Q, \pi) \rightarrow (Q', \pi')$ が Poisson diffeomorphism であるならば (M, Ω) は次によって (Q', π') の symplectic groupoid である。

$$\begin{array}{ccc}
 (M, \Omega) & & \alpha' = \varphi \circ \alpha, \quad \beta' = \varphi \circ \beta, \\
 \alpha \downarrow \downarrow \beta & & m' = m, \quad \iota' = \iota, \\
 (Q, \pi) & \xrightarrow{\varphi} & (Q', \pi') \quad \varepsilon' = \varepsilon \circ \varphi^{-1}.
 \end{array}$$

命題 2 と **命題 1 (3)** を上で述べた double groupoid picture に適用して次が分かる：

1. 各 Poisson $(ax + b)$ -group に対し symplectic groupoid が存在する。
2. 各 non-zero 乗法的 Poisson 構造と zero Poisson 構造に対して symplectic double groupoid が存在する。

我々の主張を完成させるためには 2 つの **non-trivial** symplectic groupoids の対から成る symplectic double groupoid が必要である。

Hamilton-Jacobi 法により,

定理 3 $(ax + b)$ -group \mathbb{R}^2 の乗法的 Poisson 構造

$$\{x_1, x_2\} = x_2, \quad \{x_3, x_4\} = -x_4$$

に対し前に述べた symplectic groupoid と, 次で決まる symplectic groupoid (\mathbf{R}^4, Ω_0) から成る symplectic double groupoid が存在する.

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= (x_3 + x_2x_4/2, x_4 \exp(-x_1/2)\theta(x_2x_4)), \\
\mu(x) &= (x_3 - x_2x_4/2, x_4 \exp(x_1/2)\theta(x_2x_4)), \\
\varepsilon'(x_3, x_4) &= (0, 0, x_3, x_4), \\
x^{-1} &= (-x_1, -x_2, x_3, x_4), \\
(x * y)_1 &= x_1 + x_2, \\
(x * y)_2 &= \theta(x_2x_4 + y_2y_4)\{x_2 \exp(-y_1/2)/\theta(x_2x_4) \\
&\quad + y_2 \exp(x_1/2)/\theta(y_2y_4)\}, \\
(x * y)_3 &= x_3 - y_2y_4/2, \\
(x * y)_4 &= x_4 \exp(y_1/2)\theta(x_2x_4)/\theta(x_2x_4 + y_2y_4).
\end{aligned}$$

証明の概略 : 我々は *dual* symplectic groupoid を作る一般的な方法 (Weinstein[12]) を知っている. しかし, それは local theory である. 大域的な結果を得るには何らかの幸運が必要であらう.

第1段階 : group の乗法の graph を \mathcal{C}_0 と置く. \mathcal{C}_0 は $G \oplus G \ominus G$ の coisotropic submanifold¹³である. $\mathcal{C} := (\alpha \times \alpha \times \alpha)^{-1}(\mathcal{C}_0)$ と置く. \mathcal{C} は $M \oplus M \ominus M$ の coisotropic submanifold である. \mathcal{L} を TC^1 から決まる $(\varepsilon \times \varepsilon \times \varepsilon)(\mathcal{C}_0)$ を通る foliated manifold とする. それは $M \oplus M \ominus M$ の lagrangian submanifold である. 一般に, この空間が embedd されているかまたは graph であるか定かでない. 今扱っている非常に特別な場合ですら不明である.

第2段階 : \mathcal{C} は次の2つの関数 h_1, h_2 によって $\mathcal{C} = h_1^{-1}(0) \cap h_2^{-1}(0)$ と定まっている.

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, z) &= (x_1 + x_2x_4/2) + (y_1 + y_2y_4/2) \\
&\quad - (z_1 + z_2z_4/2), \\
h_2(x, y, z) &= y_2 \exp(x_1/2 + x_2x_4/2 - y_3/2) \\
&\quad + x_2 \exp(-y_1/2 - y_2y_4/2 - x_3/2) \\
&\quad - z_2 \exp(-z_3/2).
\end{aligned}$$

次の $\mathbf{R}^2 \times \mathcal{C}$ から \mathbf{R}^{12} への局所微分同相写像を考えよう :

$$(s, t, u, v, w) \mapsto (x, y, z) := \exp sX_{h_1} \circ \exp tX_{h_2}(u, v, w).$$

¹³線形代数のレベルでの定義 : V の Poisson tensor π とは $\pi \in \wedge^2 V$. 部分空間 W が coisotropic とは, W の消滅双対空間 W^0 が isotropic である, i.e., $\langle \pi, W^0 \wedge W^0 \rangle = 0$

$y = z$ と仮定する。短い時間で観測して次が分かる。

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = y_3 + y_2 y_4 / 2, \quad x_4 = y_4 \exp(-y_1 / 2) \theta(y_2 y_4).$$

もし \mathcal{L} が新しい groupoid の乗法のグラフならば、これらは source map のはずである。同様に、 $x = z$ と置いて、target map の候補として次を得る：

$$y_1 = y_2 = 0, \quad y_3 = x_3 - x_2 x_4 / 2, \quad y_4 = x_4 \exp(x_1 / 2) \theta(x_2 x_4).$$

これらは $\mathbb{R}^2 = \{(0, 0, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ への submersion かつ projection である。簡単な計算によって

$$\begin{aligned} \{\lambda_3, \lambda_4\} &= -\lambda_4, & \{\lambda_3, \mu_3\} &= 0, & \{\lambda_3, \mu_4\} &= 0, \\ \{\lambda_4, \mu_3\} &= 0, & \{\lambda_4, \mu_4\} &= 0, & \{\mu_3, \mu_4\} &= \mu_4. \end{aligned}$$

を得る。

上の関係式は λ, μ をそれぞれ source, target map とする symplectic groupoid がもし存在するならば、底空間に非零 Poisson 構造を誘導する事を教えてくれる。

第3段階： λ, μ を備えた groupoid を見付けたい。そこで、見付かったと仮定しよう。即ち、 $\mu(x) = \lambda(y)$ なる条件の下、 $x * y = z$ なる groupoid 構造の演算 “*” が定義できたと仮定しよう。そうすると我々は6個の等式を得る：

$$\lambda(x) = \lambda(z), \quad \mu(y) = \mu(z), \quad \mu(x) = \lambda(y).$$

具体的には

$$\begin{aligned} (z_3 + \frac{z_2 z_4}{2}) - (x_3 + \frac{x_2 x_4}{2}) &= 0, \\ z_4 \theta(z_2 z_4) \exp(-\frac{z_1}{2}) - x_4 \theta(x_2 x_4) \exp(-\frac{x_1}{2}) &= 0, \\ (z_3 - \frac{z_2 z_4}{2}) - (y_3 - \frac{y_2 y_4}{2}) &= 0, \\ z_4 \theta(z_2 z_4) \exp(\frac{z_1}{2}) - y_4 \theta(y_2 y_4) \exp(\frac{y_1}{2}) &= 0, \\ (x_3 - \frac{x_2 x_4}{2}) - (y_3 + \frac{y_2 y_4}{2}) &= 0, \\ x_4 \theta(x_2 x_4) \exp(\frac{x_1}{2}) - y_4 \theta(y_2 y_4) \exp(-\frac{y_1}{2}) &= 0. \end{aligned}$$

z の決まり方は、残念ながらというべきか当然というべきかグラフではない。そこでグラフになるようにこれらの式を少し修正する。

$$f_1 = z_1 - (x_1 + y_1),$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{z_2}{\theta(z_2 z_4)} - \left(\frac{x_2}{\theta(x_2 x_4)} \exp(-y_1/2) + \frac{y_2}{\theta(y_2 y_4)} \exp(x_1/2) \right), \\
f_3 &= z_3 - \left(x_3 - \frac{y_2 y_4}{2} \right), \\
f_4 &= z_4 \theta(z_2 z_4) - x_4 \theta(x_2 x_4) \exp(y_1/2), \\
f_5 &= \left(x_3 - \frac{x_2 x_4}{2} \right) - \left(y_3 + \frac{y_2 y_4}{2} \right), \\
f_6 &= x_4 \theta(x_2 x_4) \exp\left(\frac{x_1}{2}\right) - y_4 \theta(y_2 y_4) \exp\left(-\frac{y_1}{2}\right).
\end{aligned}$$

新たな6個の等式 $f_1 = \dots = f_6 = 0$ が groupoid 構造を定義することは具体的な式を具体的に確かめることによりいえる。また、それらの differential が1次独立であり、共通ゼロ集合が coisotropic, i.e., 乗法のグラフが lagrangian であることも確かめられる。以上により新たに symplectic groupoid が構成できた。新旧2つの groupoid 構造が共存することも直接の計算からわかる。

$\{h_i, f_j\} \equiv 0 \pmod{(f_1, f_2, \dots, f_6)}$ であることから, $\mathcal{L} \subset \text{the graph of new groupoid multiplication}$ であることだけは分かる。

[補]

1. H.-J. Lu[5] は, 任意の単連結 complete Poisson Lie 群¹⁴は必ず symplectic double groupoid を持つことを示した。
2. H.-J. Lu と A. Weinstein[7] によると, complete を仮定しない任意の単連結 Poisson Lie 群も必ず symplectic double groupoid を持つ。
3. Szymczak と Zakrzewski[9] は, Heisenberg 群の乗法的ポアソン構造を全て調べあげ, 或るタイプのポアソン構造に対し symplectic groupoid を構成した。(以下 [9] の Abstract から引用: A geometric quantization procedure is applied to the resulting symplectic pseudogroups and a wide class of pre-C*-algebra with comultiplication, corresponding to quantum deformations of the Heisenberg group is obtained.)

¹⁴各 infinitesimal dressing transformation が complete であることを求める。(G, π) を Poisson Lie 群とし, $\tilde{\pi}: T^*G \rightarrow TG$ を $\tilde{\pi}(\sigma) = \pi(\sigma', \sigma)$ とする。 $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{left}} T^*G \xrightarrow{\tilde{\pi}} TG$ は Lie alg. anti-homo. $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{right}} T^*G \xrightarrow{-\tilde{\pi}} TG$ は Lie alg. homo. である。この各 image element を left (or right) infinitesimal dressing transformation (dressing vector field) という。

参考文献

- [1] P. Dazord, Obstruction à un troisième théorème de Lie non linéaire pour certaines variétés de Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **306**(1988),273–278.
- [2] V. G. Drinfel'd, Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equations, *Soviet Math. Dokl.*, **27** (1983),68–71.
- [3] V. G. Drinfel'd, Quantum groups, *Proc. ICM'86* (1986),798–820.
- [4] M. V. Karasev, Analogues of objects of the theory of Lie groups for nonlinear Poisson brackets, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **50** (1986),508–538.
- [5] J.-H. Lu, Multiplicative and affine Poisson structures on Lie groups, *Ph.D. Thesis, Univ. of California, Berkeley*(1990).
- [6] J.-H. Lu and A. Weinstein, Poisson Lie groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions, *J. Differential Geometry*, **31**(1990),501–526.
- [7] J.-H. Lu and A. Weinstein, Groupoïdes symplectiques doubles des groupes de Lie-Poisson, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **309**(1989),951–954.
- [8] K. Mikami, Symplectic double groupoids over Poisson $(ax + b)$ -groups, *Math. Sci. Research Inst. preprint*(1989), to appear in *Trans. A.M.S.*
- [9] I. Szymczak and S. Zakrzewski, Quantum deformations of the Heisenberg group obtained by geometric quantization, *preprint* (1990).
- [10] A. Weinstein, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **16** (1987),101–104.
- [11] A. Weinstein, The geometry of Poisson brackets, *Surveys in Geometry, Dep. of Math. University of Tokyo* (1987).
- [12] A. Weinstein, Coisotropic calculus and Poisson groupoids, *Journal of Math. Soc. Japan*, **40**(1988),705–727.
- [13] A. Weinstein, Blowing up realization of Heisenberg–Poisson manifolds, *Math. Sci. Research Inst. preprint*(1989).

Geometric construction of canonical stratification of smooth
mappings: The canonical stratification of jet space

Isao Nakai

Hokkaido University

Let $(N, \mathcal{A}), (P, \mathcal{B})$ be real analytic manifolds with subanalytic stratifications. We construct a canonical stratification for generic proper C^r smooth mappings of N to P refining the stratifications \mathcal{A}, \mathcal{B} by a purely geometric method without the use of Thom-Mather calculus. We prove also the topological stability theorem for smooth mappings of stratified manifolds.

Canonical stratification for smooth mappings has been one of fundamental tools in the singularity theory of mappings since it was initiated by Thom [17,18,19]. The stratification was constructed by Mather [10] for generic smooth mappings by using his differential calculus with the preparation theorem for smooth functions in a series of papers. However no further advanced studies on this method have been developed since ever.

In this note the method of *universal jet section* due to Fukuda [2,3] plays allover role of Thom-Mather theory to construct the canonical stratification of jet space. And it realizes the idea due to Thom, which goes back three decades to the papers [17,18] where the singularity theory of smooth mappings was initiated.

The rough idea of our construction can be seen already in the papers [17,18], where Thom showed a program for a topological stabilization (determinacy) theorem for map germs as well as varieties, and he introduced many original ideas such as the use

of Malgrange's preparation theorem, Thom-Bordman symbols, regular stratifications, the isotopy theorems (Theorems 1,2 [18]), including a certain universality of the jet section denoted J^k (Lemma B) in this paper. And in the final section of the paper [18] he indicated a sketch to construct a *canonical stratification of jet space* by the stabilization procedure.

Although the idea presented by Thom [18] is realized by our results on the whole, we need to follow an apparently different way to prove the various properties and obtain the generality for mappings of subanalytic stratified sets. We view the basic program briefly in a slightly simplified form. For simplicity we discuss the canonical stratification of the infinite jet space $J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ of mappings of $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ to \mathbb{R}^p with a semialgebraic stratification \mathcal{A} .

Consider the unfolding $F : \mathbb{R}^n \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^p \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ defined by $F(x, z) = (f_z(x), z)$ with the polynomial representatives f_z of z . Using the stratification theory of semialgebraic sets due to Łojasiewicz [8], construct a "natural" stratification of F refining $\mathcal{A} \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

$$F : \mathbb{R}^n \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) , \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathbb{R}^p \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) , \mathcal{G}_p$$

which is A_F -regular at generic points. Identify the k -jet space $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ with the diagonal sets of those $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $(y, z) \in \mathbb{R}^p \times J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ with x, y the source and the target of z . Define the semialgebraic stratification \mathcal{G}^k of the k -jet space by the "stratification type" of $\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_p$ of the germs in the diagonal sets, in the source and the target, in other words, by the "stratification type" of polynomial representatives f_z of the jets z in $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. (This is constructed locally and stepwisely from

the strata with smaller codimension.)

A k -jet z is said to be sufficient if there exists a neighbourhood U of z in the k -jet space such that the restrictions of \mathcal{g}^{ℓ} to the preimages $\pi_{\ell,k}^{-1}(U)$, $k \leq \ell$ by the natural projections $\pi_{\ell,k}: J^{\ell}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ are induced from \mathcal{g}^k . Call the smallest of such k the order of sufficiency for z . Denote by Σ^k the set of non-sufficient k -jets and denote by \mathcal{g}^k the restriction of \mathcal{g}^k to the complement of Σ^k . Then \mathcal{g}^{k+1} extend the preimages of \mathcal{g}^k by the projection of the jet spaces successively for $k = 1, 2, \dots$ and define the stratification \mathcal{G} of the infinite jet space of finite type (locally defined in finite jet space) off the projective limit Σ of Σ^k , which is a refinement of the stratification of $J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ induced from \mathcal{A} . It is proved that the codimension of Σ^k increases to infinity and hence the codimension of Σ is infinite.

We call the resulting stratification \mathcal{G} the first canonical stratification. The stratification \mathcal{G} is locally but not globally semialgebraic since the order of sufficiency for jets in connected strata may not be bounded (see Proposition 5.1). The above method is generalized for subanalytic \mathcal{A} in §§4-6.

For real analytic manifolds N , P and a subanalytic stratification \mathcal{A} of N , the canonical stratification \mathcal{G} of $J(N, P)$ is constructed by glueing the above local models for coordinate charts of N , P with the RL-equivalence (Theorems 3, 4).

The stratification \mathcal{G} possesses the following property. Let $f: N \rightarrow P$ be a smooth mapping (or map germ) such that the jet section $Jf: N \rightarrow J(N, P)$ is multi transversal to \mathcal{G} and does not meet Σ . Then f admits the canonical A_f -regular and B-regular stratification refining \mathcal{A}

$$f : N, \mathcal{G}_f \cap f^* f_* \mathcal{G}_f \longrightarrow P, f_* \mathcal{G}_f$$

where $\mathcal{G}_f = Jf^{-1}\mathcal{G}$ refines \mathcal{A} and $f_* \mathcal{G}_f$ is the direct image of \mathcal{G}_f defined similarly to that in sheaf theory. Topological stability of such proper f follows from that of the canonical stratification and the second isotopy theorem.

We first construct the restriction \mathcal{G}_t of \mathcal{G} to the set of transversal jets (correct + transversality condition in the terms used in [18]), of which the complement has codimension $> n$ (§§4-6), and extend it to \mathcal{G} as follows. The restriction \mathcal{G}_t is semialgebraic and defined in a finite jet space by the construction in §§4,5, which we call pre canonical stratification.

It is remarkable that the geometric construction induces the RL-invariance and the S (= contact)-invariance (Theorem 3) of the canonical stratification which were proved for $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ with trivial stratification by Mather [9] using deep calculus with the preparation theorem. By a argument using the universal jet section, we can show that if a germ of unfolding $F = (f_u, u): \mathbb{R}^{n+s}, (x, o) \rightarrow \mathbb{R}^{p+s}, (y, o), u \in \mathbb{R}^s$ has a jet $Jf_o(x)$ in \mathcal{G}_t , then $JF(x, o)$ is in pre canonical stratification \mathcal{G}_t of $J(\mathbb{R}^{n+s}, \mathbb{R}^{p+s})$ and the natural inclusions $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+s}, \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{p+s}$ are transversal to "canonical" stratifications of F and induce those of f_o . This together with the RL-invariance gives the S-invariance, since the contact equivalence relation is generated by the RL-equivalence and the equivalence $f_o \sim F$ of unfoldings of arbitrary dimensions.

Consider the inclusions

$$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \subset J^k(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{p+1}) \subset \dots \subset J^k(\mathbb{R}^{n+s}, \mathbb{R}^{p+s}) \subset \dots$$

defined by the trivial suspension (unfolding). By the S-invariance pre

canonical stratifications of $J^k(\mathbb{R}^{n+s}, \mathbb{R}^{p+s})$ induce stratifications $\mathcal{G}(s)$ of $J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ off a subset $\Sigma(s)$ with codimension $> n + s$ for $s = 1, 2, \dots$. These $\mathcal{G}(s)$ fill up the complement Σ_t to form the first canonical stratification \mathcal{G} .

The stabilization theorem in [18] gives, roughly stating, a natural stratification of generic map germs and a decomposition of infinite jet space of finite type by stratification (topological)-type of map germs. This leads to the first step toward a geometric construction of a canonical stratification of jet space.

Fukuda constructed a canonical Whitney A-regular stratification for unstable map germs by a certain stabilization procedure (the first stabilization) of jets using the universality of ${}_s J^k$ and Mather's canonical stratification, and he proved the stabilization theorem with the isotopy theorem with "carpeting function" (see [18]). although the quest for the canonical stratification was abandoned.

Independently of this tautological link of Thom-Mather theory and the various works following after Thom's original ideas, Varchenko [21] had already given a similar stabilization theorem for map germs by using the stratification theory of varieties. However it is not clear that his stratification gives natural stratification to lead the topological stability theorem for global mappings.

The purpose of this note is to generalize the method used by Fukuda to construct canonical stratifications of all map germs as it was originally introduced by Thom [17,18]. In our construction the universality of ${}_s J^k$ replaces allover role of the universal unfolding used by Mather. This method unifies and generalizes the

above individual results.

To achieve the Whitney B-regularity for the stratifications of mappings in our geometric construction, we apply a further stabilization procedure, namely the second stabilization (§5).

The full account of the proofs of the results will appear elsewhere.

§ 1. Stratification of global mappings

In this note manifolds are paracompact, real analytic, possibly with corners (see §6), stratification are locally finite, subanalytic: locally a finite union of differences of images of proper analytic mappings; and regular means the Whitney B-regularity unless otherwise mentioned. The supports of stratifications (the closure of the union of strata with positive codimension) are assumed to be compact for simplicity. The readers are suggested to refer to the book [4], the paper [10], and for subanalytic sets, the paper [6].

We say families of mappings $f_u, g_u: (N, \mathcal{A}) \rightarrow (P, \mathcal{B})$ of stratified manifolds with the parameter u in a manifold Q are topologically conjugate (topologically equivalent) if there exist continuous families of homeomorphisms ϕ_u of (N, \mathcal{A}) , ψ_u of (P, \mathcal{B}) and a λ of Q such that $\psi_u \circ f_u = g_{\lambda(u)} \circ \phi_u$ for all u . We say a family f_u is topologically trivial if it is topologically conjugate with a trivial family f'_u such that $f'_u = f_{u_0}$ for an $u_0 \in Q$. We say an $f \in C^r(N; P)$ is topologically stable if the topological equivalence class $\mathcal{O}(f)$ is a neighbourhood of f in the Whitney topology, and f is homotopically stable if there exists a neighbourhood \mathcal{O} of f such

that any family g_u , $g_{u_0} = f$ within \mathcal{O} is topologically trivial.

A stratification of a mapping $f: N \rightarrow P$ is a pair $(\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_P)$ of stratifications of N, P such that f restricts on each stratum X of \mathcal{G}_N to a submersion into some stratum Y of \mathcal{G}_P . When N, P are initially stratified by \mathcal{A}, \mathcal{B} , we suppose that $\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_P$ refine \mathcal{A}, \mathcal{B} respectively. We say \mathcal{G}_N as well as the pair $(\mathcal{G}_N, \mathcal{G}_P)$ is A_f -regular if the following condition is satisfied : if a sequence y_i in a stratum $Y \in \mathcal{G}_N$ is convergent to an x in another $X \in \mathcal{G}_N$ and $\ker d(f|Y)_{y_i}$ is convergent to a subspace $T \subset T_x N$, then $\ker d(f|X)_x \subset T$. This regularity condition says that roughly the fibers of f are "almost parallel" in a certain sense so that f possesses an analogy of the covering homotopy property respecting the stratifications.

For a stratification \mathcal{A} of N and a mapping $f : N \rightarrow P$, we define the singular point set $\Sigma(f|\mathcal{A})$ to be the set of those x in strata X of \mathcal{A} where the restriction of f to X is not a submersion. If \mathcal{A} is Whitney A -regular, $\Sigma(f|\mathcal{A})$ is closed. The main global theorem is

Theorem 1 (Topological stability theorem). Let $(N^n, \mathcal{A}), (P^p, \mathcal{B})$ be subanalytic stratified manifolds and assume the supports of \mathcal{A} is compact. Then there exist a positive integer $k = k(N, \mathcal{A}, P) \leq \infty$ and an open dense subset \mathcal{F} in the proper C^r mapping space $C_{pr}^r(N, P)$, $k + 1 < r$ in the Whitney topology with the following properties. For any C^r smooth family f_u in \mathcal{F} parametrized by u in a manifold Q , the map $F = (f_u, u) : N \times Q \rightarrow P \times Q$ admits a C^{r-k} smooth, A_f -regular and Whitney B -regular stratification $(\mathcal{G}_{N \times Q}, \mathcal{G}_{P \times Q})$ refining $\mathcal{A} \times Q, \mathcal{B} \times Q$ such that the second projection of $P \times Q$ onto Q is a stratified submersion. And the singular point set $\Sigma(F|\mathcal{A} \times Q)$ is the union of the strata X of $\mathcal{G}_{N \times Q}(F)$ embedded in strata C of \mathcal{A} with positive

codimension in C and the strata of \mathcal{A} with dimension $< p$. In particular mappings in \mathcal{F} are homotopically stable with respect to \mathcal{A} and \mathcal{B} by the second isotopy lemma [4,10,19].

Subanalytic subsets admit subanalytic stratifications. So we obtain

Corollary 2 (Topological stability theorem for mappings of subanalytic sets). Let $X \subset N^n$, $Y \subset P^p$ be subanalytic subsets of real analytic manifolds and X compact. Then there exists an open dense subset $\mathcal{F} \subset C_{pr}^\infty(N,P)$ such that C^∞ smooth families $f_u: N \rightarrow P$, $u \in Q$ in \mathcal{F} admit C^∞ smooth A_F -regular and B -regular stratifications $(\mathcal{G}_{N \times Q}, \mathcal{G}_{P \times Q})$, $F = (f_u, u)$, and $X \times Q$, $Y \times Q$ are unions of strata, and the second projection of $\mathcal{G}_{P \times Q}$ onto Q is a submersion. In particular f in \mathcal{F} are homotopically stable with respect to X and Y : any family f_u close to the trivial family $f'_u = f$ is conjugate with f'_u by continuous families of homeomorphisms of N , P respecting X and Y .

The above theorem follows from the local properties of pre canonical stratification of jet space in Theorems 3,4 together with an elementary argument of the transversality of multi jet sections.

§ 2 Pre canonical and the first canonical stratifications

Let \mathcal{A} , \mathcal{B} be stratifications of manifolds N , P . We say map germs $f: N, x \rightarrow P, y$ and $g: N, x' \rightarrow P, y'$ are RL-equivalent with respect to \mathcal{A} , \mathcal{B} if there exist germs of real analytic diffeomorphisms $\varphi: N, x \rightarrow N, x'$, $\psi: P, y \rightarrow P, y'$ such that $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$,

$\psi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ and $\varphi \circ f = g \circ \psi$. We define the S-equivalence relation of map germs of $(N \times \mathbb{R}^s, \mathcal{A} \times \mathbb{R}^s)$ to $(P \times \mathbb{R}^s, \mathcal{B} \times \mathbb{R}^s)$ for $s = 0, 1, \dots$ to be generated by the RL-equivalence relations with respect to $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^s, \mathcal{B} \times \mathbb{R}^s$ and the relation $F \sim (F_u, u)$ of unfoldings

$$F: N \times \mathbb{R}^s \rightarrow P \times \mathbb{R}^s,$$

$$(F_u, u): N \times \mathbb{R}^{s+t} \rightarrow P \times \mathbb{R}^{s+t}, \quad u \in \mathbb{R}^t$$

with $F_0 = F$ and arbitrary $t > 0$. By definition the S-equivalence class of an unfolding $(f_u, u): N \times \mathbb{R}^s \rightarrow P \times \mathbb{R}^s$ is determined by that of $f_0: N \rightarrow P$. It is worth to note that the S-equivalence relation coincides with the contact (\mathcal{X} -) equivalence defined by Mather when the stratifications are trivial at least for \mathcal{X} -finite germs.

We say germs of stratifications $(\mathcal{A}, x), (\mathcal{A}', x')$ of manifolds N, N' are S-equivalent if the germs of $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^s, \mathcal{B} \times \mathbb{R}^{s'}$ at $(x, 0), (x', 0)$ are real analytically diffeomorphic for some positive s and s' .

We say r -jets $z, z' \in J^r(N, P)$ are RL-equivalent (respectively S-equivalent) if they are represented by C^r smooth germs which are RL-equivalent (resp. S-equivalent) in the above sense with real analytic diffeomorphisms.

In this note we assume that the restriction of f to the singular point set is finite-to-one for map germs $f: N, x \rightarrow P, y$ as well as global mappings. This condition is satisfied when f is multi transversal with respect to a stratification of N, x , for example the trivial stratification or the canonical stratification $\mathcal{G}_f = Jf^{-1}(\mathcal{G}_t)$ in Theorems 3, 4. Such a map germ admits a representative $\tilde{f}: U \rightarrow V$ defined on open neighbourhoods U, V of x, y such that the restriction $\tilde{f}|_{\Sigma(\tilde{f}|\mathcal{A})}$ is proper, finite-to-one and $\Sigma(\tilde{f}|\mathcal{A}) \cap \tilde{f}^{-1}(0) = x$ (or empty). The image $\tilde{f}(\Sigma(\tilde{f}|\mathcal{A}))$ is then

closed and its germ at y is independent of the choice of the representative, so denoted $f(\Sigma(f|\mathcal{A}))$. By Theorems 3,4, if Jf is transversal to the canonical stratification \mathcal{G} , $\Sigma(f|\mathcal{A})$ is a union of some strata of \mathcal{G}_f such that, on each stratum of \mathcal{G}_f , f restricts to an immersion.

The direct image $f_*\mathcal{G}_f$ for such map germ f is defined to be the germ of partition of P at y characterized similarly to those of constructible sheaves as follows. The germ Y_y , at y' of the stratum $Y \in f_*\mathcal{G}_f$ containing y' is the intersection $Y_y = \bigcap_{f(X_x)=y'} f(X_x)$. Here X_x stands for the germ at x' of the stratum X containing x' , on which f restricts to an immersion.

In this paper $J(N,P)$ denotes the infinite jet space and $\pi: J(N,P) \rightarrow J^k(N,P)$, $\pi_{k\ell}: J^k(N,P) \rightarrow J^\ell(N,P)$ denote the natural projections. We denote the project $\pi_k(\tilde{z})$ of infinite jets \tilde{z} by z^k . The topology of $J(N,P)$ is projectively induced by the projections π_k .

Definition A stratification \mathcal{G} of complement of a subset $\Sigma \subset J(N,P)$ is of finite type if there exists an upper semicontinuous function $0 < k$ (possibly $k = \infty$ on Σ) called the order of \mathcal{G} with the following properties.

\mathcal{G} , Σ are k -sufficient : for any $\tilde{z} \in J(N,P)$ there exist a neighbourhood U of $z^{k(\tilde{z})}$ in $J^{k(\tilde{z})}(N,P)$, a stratification \mathcal{G}' of complement of a subset $\Sigma' \subset U$ and a function k' on U such that the restrictions of \mathcal{G} , Σ , k to $\pi_{k(\tilde{z})}^{-1}(U)$ are respectively induced from \mathcal{G}' , Σ' , k' via $\pi_{k(\tilde{z})}$.

We call the r -jet term z^r of an infinite jet \tilde{z} a sufficient r -jet if $k(\tilde{z}) \leq r$, and define $k(z^r)$ by $k(\tilde{z})$. We denote

also the project of the germs of \mathcal{G} to r -jet space simply by the \mathcal{G} and $z^r \in \mathcal{G}$. By the above sufficiency condition the transversality of jet sections Jf to a stratum X at a jet \tilde{z} makes a sense for $C^{k(\tilde{z})+1}$ smooth mappings as their $k(\tilde{z})$ -jet sections are C^1 smooth. Then we say simply, Jf is transversal to X in this paper without references.

Theorem 3 (Pre canonical stratification) Let $(N, \mathcal{A}), (P, \mathcal{B})$ be subanalytic stratified manifolds. Then there exist a subanalytic subset $\Sigma_t \subset J^\omega(N, P)$ of codimension $\geq n + 1$ and a subanalytic stratification \mathcal{G}_t of the complement of finite type, which possess the following properties.

(1) \mathcal{G}_t, Σ_t are RL-invariant : Let z, z' be sufficient r -jets and RL-equivalent. Then $k(z) = k(z') \leq r$ and the equivalence induces a real analytic diffeomorphism of r -jet space which sends the germs of \mathcal{G}_t, Σ_t at z to those at z' .

(2) \mathcal{G}_t is partially S-invariant : Let $z, z' \in \mathcal{G}_t$ be sufficient r -jets and S-equivalent. Then the germs of \mathcal{G}_t at z, z' and \mathcal{A} at the sources, \mathcal{B} at the targets of z, z' are respectively S-equivalent.

(3) Let $f_u : N, x \rightarrow P, y, u \in \mathbb{R}^S$ be a C^r smooth unfolding with a sufficient jet $z = J^r f_o(x)$ in a stratum X of $\mathcal{G}_t, k(z) < r$ and let $F = (f_u, u) : N \times \mathbb{R}^S \rightarrow P \times \mathbb{R}^S$. Then the family of jet sections $\bar{J}F = (Jf_u) : N \times \mathbb{R}^S \rightarrow J(N, P)$ is transversal to \mathcal{G}_t at (x, o) and the induced stratification $\mathcal{G}_F = \bar{J}F^{-1}(\mathcal{G}_t)$ is a Whitney regular $C^{r-k(z)}$ smooth stratification refining $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^S$. The singular point set $\Sigma(F|\mathcal{A} \times \mathbb{R}^S)$ is the union of the strata X of \mathcal{G}_F embedded in some $C \times$

\mathbb{R}^S , $C \in \mathcal{A}$, with positive codimension in $C \times \mathbb{R}^S$ and the strata $C \times \mathbb{R}^S$ with dimension $< p$. On those strata F restricts to immersions, and the images are in general position, i.e. F is multi transversal with respect to \mathcal{G}_F . And F admits the following $C^{r-k(z)}$ smooth, A_F -regular and B -regular stratification

$$(i) \quad F : \mathcal{G}_F \cap F^* F_* \mathcal{G}_F \longrightarrow F_* \mathcal{G}_F .$$

The direct image $F_* \mathcal{G}_F$ is transversal to $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^S$ and the transversal intersection

$$(ii) \quad F : \mathcal{G}_F \cap F^*(F_* \mathcal{G}_F \cap \mathcal{B} \times \mathbb{R}^S) \longrightarrow F_* \mathcal{G}_F \cap \mathcal{G} \times \mathbb{R}^S$$

is A_F -regular and B -regular. Denote $\bar{J}F^{-1}(X) = X(F)$. The restriction $F|F(X)$ is an immersion, $\Sigma(F|\mathcal{A} \times \mathbb{R}^S) \cap F^{-1}FX(F) = X(F)$, and $X(F)$, $FX(F)$ are the strata containing $(x,0)$, $(f_0(x),0)$. The second projections of the stratifications in (ii) onto \mathbb{R}^S are stratified submersions and induce the stratification

$$f_u : \mathcal{G}_{f_u} \cap f_u^*(f_{u*} \mathcal{G}_{f_u} \cap \mathcal{B}) \rightarrow f_{u*} \mathcal{G}_{f_u} \cap \mathcal{B}$$

of f_u on the fibers $N \times u$, $P \times u$ for each $u \in \mathbb{R}^S$ (see also Proposition 5 for the property of the order k).

By definition an S -equivalence class of an unfolding $F = (f_u, u) : N \times \mathbb{R}^S \rightarrow P \times \mathbb{R}^S$ at $(x,0)$ is determined by that of f_0 at x . By the S -invariance, the germ of $\mathcal{G}_t(N \times \mathbb{R}^S, P \times \mathbb{R}^S)$ at $JF(x,0)$ induces a germ of stratification of $J(N,P)$ at $Jf_0(x)$ denoted $\pi_* \mathcal{G}_t(N \times \mathbb{R}^S, P \times \mathbb{R}^S)$. These germs for $s = 1, 2, \dots$ glue up to extend the $\mathcal{G}_t(N,P)$ to the stratifications $\mathcal{G}(s)$ successively and define the first canonical stratification \mathcal{G} in the following theorem.

Theorem 4 (the first canonical stratification of jet space) Let

$(N, \mathcal{A}), (P, \mathcal{B})$ be subanalytic stratified manifolds. Then there exist subanalytic stratifications $\mathcal{G}(s)$ of finite type with order k_s of complements of subanalytic subsets $\Sigma(s) \subset J^\infty(N, P)$ with codimension $\geq n + s + 1$ for $s = 0, 1, \dots$, which possess the following properties.

(1) $(\mathcal{G}(0), \Sigma(0))$ is pre canonical stratification. The order k_s is increasing on s , and on a neighbourhood of a sufficient jet z of $\mathcal{G}(s+1)$, $\Sigma(s+1)$ in $k_{s+1}(z)$ -jet space, the inclusion holds

$$\Sigma(s+1) \subset \pi_{k_{s+1}(z)k_s(z)}^{-1}(\Sigma(s))$$

And $\mathcal{G}(s+1)$, k_{s+1} extend the stratification and the function induced from $\mathcal{G}(s)$, k_s respectively on a neighbourhood of z for all sufficient sets z and $s = 0, 1, \dots$.

(2) (i) $\mathcal{G}(s)$, $\Sigma(s)$ are RL-invariant : Let z, z' be sufficient r -jets and RL-equivalent. Then $k_s(z) = k_s(z')$ and the germs of $\mathcal{G}(s)$, $\Sigma(s)$ at z, z' , \mathcal{A} at the sources, \mathcal{B} at the targets of z, z' are respectively real analytically diffeomorphic.

(ii) $\mathcal{G}(s)$ are partially S-invariant : Let r -jets z, z' be S-equivalent, $z \in \mathcal{G}(s)$ sufficient. Then z' is also a sufficient r -jet in an $\mathcal{G}(s+t)$, $0 \leq t$ and the germs of $\mathcal{G}(s+t)$ at z, z' and \mathcal{A} at the sources, \mathcal{B} at the targets of z, z' are S-equivalent respectively.

(3) If a family of jet sections $\bar{J}F = (Jf_u): N \times \mathbb{R}^s \rightarrow J(N, P)$ of a C^r smooth family $f_u: N, x \rightarrow P, y_u$, $u \in \mathbb{R}^t$ meets transversal to $\mathcal{G}(s)$ at sufficient jet z for $(x, 0)$ and $k(z) + 1 < r$, then the properties of the stratification in Theorem 3, (3) holds (except for the final paragraph on k -sufficiency).

(4) The projective limits of $\Sigma(s)$, $\mathcal{G}(s)$, as s tends to infinity, give a (pro-locally subanalytic) subset Σ of $J(N,P)$ with infinite codimension and a (locally) subanalytic stratification \mathcal{G} of the complement of finite type with the order k which is infinite on Σ by Property (2).

(5) \mathcal{G} is S-invariant : Let $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \mathcal{G}$ be S-equivalent infinite jets. Then $k(\tilde{z}) = k(\tilde{z}') (= k)$ and the germs of \mathcal{G} at z^k, z'^k , the germs of \mathcal{A} at the sources, \mathcal{B} at the targets of \tilde{z}, \tilde{z}' are respectively S-equivalent. In particular \mathcal{G} is locally analytically trivial over P when \mathcal{B} is trivial, and trivial over $N \times P$ if \mathcal{A} is also trivial.

(6) Let \mathcal{G}^n denote the union of the strata of \mathcal{G} with codimension $\leq n$. Then \mathcal{G}^n is of finite type and the set T of those $\tilde{z} \in \mathcal{G}^n$ such that, for any representative f of \tilde{z} , the jet section Jf is transversal to \mathcal{G}^n (hence to \mathcal{G}) is an open dense subset of $J(N,P)$. On the set T , \mathcal{G}^n restricts to give pre canonical stratification $\mathcal{G}_t(N, \mathcal{A}, P, \mathcal{B})$.

We call the above stratification \mathcal{G} in (4) the first canonical stratification. The statement (5) follows from the partial S-invariance (1),(ii).

§ 3. Preliminaries and Lemmas A, B.

For a smooth map germ $f : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p, f(x)$ let $\tau_x^{\mathcal{Q}} f$ denote the Taylor polynomial mapping of f of degree \mathcal{Q} at x .

Let m, q be positive integers. The m-universal q-jet section

$${}_m J^q : (\mathbb{R}^n)^m \times J^\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \longrightarrow J^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)^m$$

is defined by ${}_m J^q((x_i), J^\ell f(x)) = (J^q \tau_x^\ell f(x_i))_{i=1, \dots, m}$. For a subset Σ of $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $k \leq \ell$ let $(\mathbb{R}^{n-*})^{m-\Delta}(\mathbb{R}^n)^m \times_* \pi_{\ell k}^{-1}(\Sigma)$ denote the fibre product of the bundle over \mathbb{R}^n with the fibre $(\mathbb{R}^{n-x})^{m-\Delta}(\mathbb{R}^n)^m$ on $x \in \mathbb{R}^n$ and the projection of $\pi_{\ell k}^{-1}(\Sigma)$ onto the sources, $\Delta(\mathbb{R}^n)^m$ being the generalized diagonal set of $(\mathbb{R}^n)^m$. We denote the restriction of ${}_m J^q$ to the fibre product by ${}_m \bar{J}^q$.

Lemma A (due to Fukuda [2,3]) If $k + m(q+1) \leq \ell$, then ${}_m \bar{J}^q$ is a submersion for any submanifold $\Sigma \subset J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Lemma B (The universality of ${}_m J^q$ due to Fukuda [1,2] and Thom [18]) Let $f_u : \mathbb{R}^n, x_u \rightarrow \mathbb{R}^p, y_u$, $u \in \mathbb{R}^s$ be a C^r smooth family of map germs and $\ell = k + m(q+1) \leq r$. Then there exists a $C^{r-\ell}$ smooth family of sections

$$\Omega_{f_u} : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow (\mathbb{R}^n)^m \times \pi_{\ell k}^{-1}(J^k f_u(x_u)),$$

$\Omega_{f_u}(x_u, \dots, x_u) = (x_u, \dots, x_u, J^\ell f_u(x_u))$ of which the second factor is invariant under the permutations of the sources $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$, such that the following diagram commutes,

$$\begin{array}{ccc} {}_m J^q : (\mathbb{R}^n)^m \times J^\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \longrightarrow & J^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)^m \\ \uparrow & \Omega = (\Omega_{f_u}) & \nearrow \\ (\mathbb{R}^n)^m & & \\ \downarrow & & \\ ({}_m J^q f_u) : (\mathbb{R}^n)^m \times \mathbb{R}^s & & \end{array}$$

§ 4. The first stabilization

Let $\tilde{z}_0 \in \Sigma_{a+1}$ and $k_a = k_a(\tilde{z}_0)$ the sufficient order for \mathcal{G}_a , Σ_{a+1} at \tilde{z}_0 . We construct a germ of a stratum $X_A \in \mathcal{G}_t$ in terms of ℓ -jets at $z_0^\ell = \pi_\ell(\tilde{z}_0)$ with an $\ell > k_a$.

We first assume that $N = \mathbb{R}^n$, $P = \mathbb{R}^p$ with trivial stratifications. The construction falls into the steps of induction on the hierarchy of the strata. Namely assume that there exist a semialgebraic subset $\Sigma_{a+1} \subset J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $0 \leq a + 1 < p$ with codimension $\geq \max\{0, n-p\} + a + 1$ and a semialgebraic stratification \mathcal{G}_a of the complement of finite type (for definition see the paragraph before Theorem 3) by strata with codimension 0 and $\max\{0, n-p\} + i$, $i = 1, \dots, a$ which possess the properties in Theorem 3. We then seek to construct a stratum X_A (possibly a union of disconnected components) open dense in each connected component of $\Sigma_{a+1} - \text{sing } \Sigma_{a+1}$ of codimension $\max\{0, n-p\} + a + 1$. We define \mathcal{G}_{a+1} by the union of \mathcal{G}_a and those strata, and define Σ_{a+2} by its complement (for the details see §5). Here $\text{sing } Y$ denotes the set of those $y \in Y$ where Y is not an analytic submanifold of maximal dimension. ($\text{sing } Y$ is semialgebraic for semialgebraic Y . For subanalytic Y , see Tamm [15].) The induction begins with the set $\Sigma_{\max\{1, p-n+1\}}$ of singular (non-full rank) jets in $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ and the complement $\mathcal{G}_{\max\{0, p-n\}}$, and stops when \mathcal{G}_p is constructed. We then define $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_p$.

From now on we denote $k_a = k_a(\tilde{z}_0)$ and $z_0 = \pi_{k_a}(\tilde{z}_0)$. Let \mathcal{G}'_{aU} be the stratification of the neighbourhood U of z_0 off Σ'_{a+1U} in the k_a -jet space, from which \mathcal{G}_a and Σ_{a+1} are respectively induced on $\pi_{k_a}^{-1}(U)$. And let \mathcal{G}^ℓ_{aU} , Σ^ℓ_{a+1U} denote the pull backs of \mathcal{G}'_{aU} and Σ'_{a+1U} by the projection $\pi_{\ell k}$ of ℓ -jet space onto k -jet space. We begin with a connected component $X_{a+1U}^{k_a}$ of $\Sigma'_{a+1U} - \text{sing } \Sigma'_{a+1U}$ of

codimension $\max\{0, n-p\} + a + 1$, and construct the subanalytic stratum X_{AU}^ℓ in the preimage $X_{a+1U}^\ell = \pi_\ell^{-1} k_a^{k_a}(X_{a+1U}^k)$. (Here z_0 is not necessarily contained in the component X_{a+1U}^k but in its closure.) And we show that those X_{AU}^ℓ glue together to form a global subanalytic stratum X_A in infinite jet space.

Let ${}^1X_{a+1U}^\ell \subset X_{a+1U}^\ell$ be the set of those jets $z \in X_{a+1U}^\ell$ such that

(i) \mathcal{G}_{AU}^ℓ is Whitney regular over X_{a+1U}^ℓ on a neighbourhood of z

(This can be omitted, and the regularity may be replaced with the regularity condition for Lipschitz triviality in [12].)

(ii) for any representative f of z , the jet section $J^{k_a} f$ is transversal to X_{a+1U}^k and

(iii) $f|X_{a+1}(f)$ is an immersion

where $X_{a+1}(f) = (J^{k_a} f)^{-1}(X_{a+1U}^k)$. We see that ${}^1X_{a+1U}^\ell$ is defined by a condition on k_a+1 jets, and by the transversality theorem due to Mather (Theorem 6.1 [9]), $\text{codim } X_{a+1U}^\ell < \text{codim } X_{a+1U}^k - {}^1X_{a+1U}^\ell$.

Let $Y = Y_1 \times_{\mathbb{R}^p} \dots \times_{\mathbb{R}^p} Y_m$ be an m -fold fibre product of strata Y_i of \mathcal{G}'_{AU} (Y_i are possibly X_{a+1U}^k itself). By the RL-invariance Y_i are locally trivial over \mathbb{R}^p , so the Y is smooth and by Lemma A the universal jet section

$${}_m \bar{J}^{k_a}: (\mathbb{R}^{n-*})^{m-\Delta} \times_* {}^1X_{a+1U}^\ell \longrightarrow J^{k_a}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)^m$$

is transversal to Y for an $\ell \geq \ell(Y) = k_a + m(k_a+1)$. We define the stratum X_{AU}^ℓ open dense in ${}^1X_{a+1U}^\ell$ by

$$(iv) \quad X_{AU}^{\ell} = \bigcup_Y \bar{B} \left(X_{a+1,m}^{\ell}, \left(\bar{J}^k \right)^{-1}(Y) \right)$$

Here $\bar{B}(V,W)$ denotes the closure of the set $B(V,W)$ of those $x \in V$ where W is not Whitney B-regular over V , $X_{a+1,m}^{\ell}$ denotes the set of those $(x, \dots, x, z) \in (\mathbb{R}^n)^m \times X_{a+1U}^{\ell}$ (x being the source of z), which is naturally identified with X_{a+1U}^{ℓ} , and Y runs over the finite set of fibre products Y satisfying one of the following conditions

$$(1) \quad (\text{accessible}) \quad \text{codim } Y_i = \max\{0, n-p\} + c_i, \quad \sum c_i < a+1, \quad X_{a+1U}^k \subset \bar{Y}_i$$

$$(2) \quad (\text{weakly accessible}) \quad 2 \leq m, \quad a+1 \leq \sum c_i, \quad X_{a+1U}^k \subset \bar{Y}_i \text{ and any partial sum } \sum' c_i \text{ is strictly smaller than } a+1$$

$$(3) \quad (\text{Weakly accessible}) \quad m = 2, \quad Y_i = X_{a+1U}^k, \quad c_j < a+1, \quad X_{a+1U}^k \subset \bar{Y}_j, \quad i \neq j.$$

The order $\ell = \ell(z_0)$ used in the above construction is defined to be the maximum of $\ell(Y)$ for those Y , and all connected components X_{a+1U}^k of $\Sigma'_{a+1U} - \text{sing } \Sigma'_{a+1U}$.

§ 5. The second stabilization and the global strata

We can show that when germs f have jets jets in X_{AU}^{ℓ} , f admit the canonical A-regular stratifications $(\mathcal{G}_f \cap f^* f_* \mathcal{G}_f, f_* \mathcal{G}_f)$. We now impose the B-regularity on it stabilizing the jets in X_{AU}^{ℓ} further in a higher jet space of order $\ell' > \ell$ in the same manner as the first stabilization.

We begin the second stabilization with the pre image $X_{AU}^{\ell'} = \pi_{\ell', \ell}^{-1}(X_{AU}^{\ell})$ and define the germ of the stratum $X_U^{\ell'}$ open dense in $X_{AU}^{\ell'}$

at an ℓ' -jet $z_0^{\ell'} (\pi_{\ell', \ell}(z_0^{\ell'}) = z_0^\ell \in \Sigma_{a+1U}^\ell)$ by deleting "non-stabilized" jets from $X_{AU}^{\ell'}$. (The order ℓ' is a function of the ℓ -jet z_0^ℓ .)

The polynomial representatives $f_{z^{\ell'}}$ of ℓ' -jets $z^{\ell'} \in X_{AU}^{\ell'}$ restrict to proper and finite-to-one mappings on the singular point sets $\Sigma(f_{z^{\ell'}} | \mathcal{A})$ when $f_{z^{\ell'}}$ are restricted to suitable neighbourhoods of the source and the target of $z^{\ell'}$ because $f_{z^{\ell'}}$ admits the A - and A_f -regular canonical stratification with the properties in Theorem 3. So the canonical stratifications for $f_{z^{\ell'}}$ are semialgebraic and the totality of those form a semialgebraic canonical stratification $(\mathcal{G}_F \cap F^*F_*\mathcal{G}_F, F_*\mathcal{G}_F)$ of the unfolding $F = (f_{z^{\ell'}}, z^{\ell'}): \mathbb{R}^n \times X_{AU}^{\ell'} \rightarrow \mathbb{R}^p \times X_{AU}^{\ell'}$. Define the diagonal sets $X_{As}^{\ell'}$, $X_{At}^{\ell'}$ respectively in the source and the target of F by the sets of those $(x, z^{\ell'})$, $(y, z^{\ell'})$ with $z^{\ell'} \in X_{AU}^{\ell'}$, x, y being the source and the target of $z^{\ell'}$. These sets are naturally identified with $X_{AU}^{\ell'}$. Define the germ $X_U^{\ell'}$ at $z_0^{\ell'}$ by

$$(v) \quad X_U^{\ell'} = X_{AU}^{\ell'} - \bar{B}(X_{As}^{\ell'}, \mathcal{G}_F \cap F^*F_*\mathcal{G}_F) - \bar{B}(X_{At}^{\ell'}, F_*\mathcal{G}_F)$$

and define the germs of $\Sigma_{a+2U}^{\ell'}$ at $z_0^{\ell'}$ by the union of the complement of $X_U^{\ell'}$ in $X_{AU}^{\ell'}$ for all connected component X_{a+1U}^k . Define the germ of $\mathcal{G}_{a+1U}^{\ell'}$ at $z_0^{\ell'}$ by the union of the pull back of $\mathcal{G}_{aU}^{\ell'}$ to ℓ' -jet space and the stratum $X_U^{\ell'}$ above defined.

These $\mathcal{G}_{a+1U}^{\ell'}$ and $\Sigma_{a+2U}^{\ell'}$ define the stratification \mathcal{G}_{a+1} and the subset Σ_{a+2} in infinite jet space on a preimage of a neighbourhood of $z_0^{\ell'}$ by $\pi_{\ell'}$.

The order $k_{a+1}(\tilde{z}_0)$ for \mathcal{G}_{a+1} at \tilde{z}_0 is defined to be the ℓ' used in the above construction.

To make the construction explicit at this stage, it is worth

to present here an alternative way. The equivalence of these definitions is discussed in the following remark.

let $\tilde{Y} = (\bar{J}_m^{k_a})^{-1}(Y) \subset (\mathbb{R}^n)^m \times X_{AU}^{\ell'}$ be as in the first stabilization and consider the strata $Y(F) = P(\tilde{Y}) \subset \mathbb{R}^n \times X_{AU}^{\ell'}$, $FY(F) \subset \mathbb{R}^p \times X_{AU}^{\ell'}$ of the above stratification of F , where $P : (\mathbb{R}^n)^m \times X_{AU}^{\ell'} \rightarrow \mathbb{R}^n \times X_{AU}^{\ell'}$ is given with the projection onto the first \mathbb{R}^n . The germ of stratum $X_U^{\ell'}$ is the set of those $z^{\ell'} \in X_{AU}^{\ell'}$ for which $Y(F)$ is regular over $X_{As}^{\ell'}$, $FY(F)$ is regular over $X_{At}^{\ell'}$ respectively on neighbourhoods of $z^{\ell'}$ for the strata Y accessible as well as weakly accessible to X (see Conditions (i) - (iii) in §4).

Consider the strata $X_A(F) = (\bar{J}_{aF}^{k_a})^{-1}(X_A^k)$, $FX_A(F) = (\bar{J}_{aF}^{k_a})^{-1}(FX_A^k)$ denotes the family of jet sections $J_{z^{\ell'}}^{k_a}$, $z^{\ell'} \in X_{AU}^{\ell'}$ of the above canonical stratification of F . Theorem 3 applies to the germs of F at $(x, z^{\ell'}) \in X_A(F)$ (x being the source of $z^{\ell'}$) to say that the stratification is regular over $X_A(F)$, $FX_A(F)$ at $(x, z^{\ell'})$, $F(x, z^{\ell'})$. It is easily seen that this implies the regularities used in the second presentation of the stratum.

The above construction uses the indefinite ℓ' . The ℓ' is given by the various Łojasiewicz inequalities, and bounded and semicontinuous with respect to the ℓ -jet z^{ℓ} . Here we observe that the resulting strata are independent of the ℓ' in the following remark.

To show the independence of the stratum of the order ℓ' above used, let $\ell_2 > \ell_1 = \ell'$ and consider two unfolding F_i with the parameter spaces $X_{AU}^{\ell_i}$ and the stratifications $(\mathcal{G}_{F_i} \cap F_i^* F_i, F_i^* \mathcal{G}_{F_i})$. Theorem 3 tells that if the

stratification is regular for $i = 1$ then it is also for $i = 2$. Conversely assume the regularity for $i = 2$. The natural inclusions $\mathbb{R}^n \times X_{AU}^{\ell_1} \subset \mathbb{R}^n \times X_{AU}^{\ell_2}$, $\mathbb{R}^p \times X_{AU}^{\ell_1} \subset \mathbb{R} \times X_{AU}^{\ell_2}$ are respectively transversal to the stratifications of F_2 on the source and the target, and induce the stratification of F_1 . Thus the regularity holds for $i = 1$. This proves the independence.

By the above independence and the upper semicontinuity of the order ℓ' , the germs of the stratum $X_U^{\ell'}$ above constructed glue up together to give a global stratum X of finite type in the infinite jet space.

Let k be the order for the resulting stratification \mathcal{G}_t . Then we obtain

Proposition 5.1 The order k for the stratification $\mathcal{G}_t(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}, \mathbb{R}^p)$ is bounded on the fibres of the projection of $J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ onto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Proof. Define the action μ of positive numbers λ to $J(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ by

$$\mu(\lambda, Jf(x_0)) = J\{\lambda(f-f(x_0)) + f(x_0)\}(x_0)$$

By the RL-invariance the stratification $(\mathcal{G}_t, \Sigma_t)$ and the order k is invariant under this action. Let 0_{y_0} denote a jet of a constant map $f = y_0$ at x_0 . Then, by the upper semicontinuity, the order k is bounded by $k(0_{y_0})$. (Note that the z_0 is not necessarily contained in X_{a+1U}^k but in Σ'_{a+1U} in the first and second stabilizations. So the construction proceeds replacing $z_0^{\ell'}$ by the jet 0_{y_0} .)

By the proposition we obtain

Corollary 5.2 The order k is bounded if $N = \mathbb{R}^n$, $P = \mathbb{R}^p$ and the support of \mathcal{A} is compact, and then, the stratification is globally constructed in a finite jet space.

This holds also for semialgebraic \mathcal{A} in \mathbb{R}^n as Łojasiewicz exponent for semialgebraic sets is bounded. See also the next section for the case of non-compact \mathcal{A} .

Finally Let N, P be real analytic manifolds and $\{U_i\}, \{V_j\}$ be coordinate open neighbourhoods. The first and the second stabilization procedures are compatible with analytic coordinate changes of the source and the target, so the stratifications of $J(U_i, V_j)$ glue up and give a global stratification \mathcal{G}_t of $J(N, P)$ of finite type. By Corollary 5.2 we obtain

Corollary 5.3 The order k is bounded if the support of $\mathcal{A} \subset N$ is compact.

§ 6. Non trivial \mathcal{A}, \mathcal{B}

For non trivial subanalytic stratifications \mathcal{A}, \mathcal{B} , subanalyticity replaces the role of semialgebraicity in the previous sections.

First we show the reduction to the case of trivial \mathcal{B} . Let \mathcal{A}, \mathcal{B} be subanalytic stratifications of N, P and let $\mathcal{G}_t(N, \mathcal{A}, P)$ be the stratification with the properties in Theorem 3 for trivial \mathcal{B} .

Then by the RL-invariance (Theorem 3 (2)), \mathcal{G}_t is trivial over P , so the set \mathcal{F} of mappings f of N to P for which Jf is transversal to $\mathcal{G}_t \cap \mathcal{B}$ (in other words $f \mid Jf^{-1}(\mathcal{G}_t)$ is transversal to \mathcal{B}) is open dense in the mappings space. Since the strata of \mathcal{G}_t are locally defined in k -jet space, the transversality at $x \in N$ depends only on the $k(Jf(x))+1$ -jets of f at x . We denote the set of those transversal $k+1$ -jets by \mathcal{O} , which is subanalytic and open dense in \mathcal{G}_t by the density of \mathcal{F} . We define $\mathcal{G}_t(N, \mathcal{A}, P, \mathcal{B})$ by the restriction of \mathcal{G}_t to \mathcal{O} , and $\Sigma_t(N, \mathcal{A}, P, \mathcal{B})$ by its complement. By the density of \mathcal{F} , $\text{codim } \Sigma_t$ exceeds n .

By the RL-invariance (Theorem 3 (2)), it is enough to construct for $N = \mathbb{R}^n$, $P = \mathbb{R}^p$ and subanalytic stratification \mathcal{A} of \mathbb{R}^n . The construction uses the same induction as in §§4-6. So assuming that there exists the stratification \mathcal{G}_a of the complement of Σ_{a+1} refining \mathcal{A} , we construct the strata X open dense in the connected components of smooth parts of $\Sigma_{a+1} \cap C$, $C \in \mathcal{A}$ with codimension $\max\{0, n-p\} + a + 1$.

The first stabilization remains the same form as for trivial \mathcal{A} .

In the second stabilization we use the orders given by Łojasiewicz exponents of the various tangent spaces of the stratification of the unfolding F with the parameter space $X_A^{\mathcal{A}}$. Those orders are similarly defined for semialgebraic \mathcal{A} by the well-known result due to Łojasiewicz [8], and the stratification \mathcal{G}_t is constructed in a finite jet space. For subanalytic \mathcal{A} , those orders are given by the generalization of the exponent for subanalytic sets due to Bochnak for subanalytic sets due to Bochnak and Risler [1].

§ 7. A generalization

The essential conditions used in our construction in the preceding sections and the proofs of the invariances in Theorems 4,5 are the subanalyticity of \mathcal{G}_a , Σ_{a+1} as well as the independence of the singular point set $\text{sing } \Sigma_{a+1}$ from the choice of local coordinates of N, P . Now define $\text{sing}^i \Sigma_{a+1}$ to be the set of those $z \in \Sigma_{a+1}$ where Σ_{a+1} is not a C^i smooth submanifold of codimension $\max\{0, n-p\} + a + 1$. Clearly this set is invariant under C^i smooth coordinate transformations of jet space hence also under $C^{k_a(z)+i}$ smooth coordinate transformations of N, P . By Tamm [15] it is known that $\text{sing}^i \Sigma_{a+1}$ is subanalytic when Σ_{a+1} is so, and then we can define the stratum X open dense in $\Sigma_{a+1} - \text{sing}^i \Sigma_{a+1}$ by the same stabilization procedures in §§4,5. Denote the resulting pre canonical stratification by \mathcal{G}_t^i . By the above invariance of $\text{sing}^i \Sigma_{a+1}$ and the RL-invariance of the stabilization procedures, the stratification \mathcal{G}_t^i is invariant under C^{k+i} smooth local coordinate transformations of \mathcal{A}, \mathcal{B} , where k is the order for \mathcal{G}_t . This invariance suggests to generalize the notion of subanalytic stratified manifolds as follows.

We call a subset $X \subset M$ of a C^r smooth manifold is locally subanalytic if there exists a coordinate open covering $\{U_i\}$ of M such that each intersection $X \cap U_i$ is subanalytic. And then we suppose that the coordinate system $\{U_i\}$ is fixed and that of $J^k(N,P)$ is induced from those of N, P . Let $(N, \mathcal{A}), (P, \mathcal{B})$ be pre subanalytic stratified C^r manifolds, and $\{U_i\}, \{V_j\}$ the coordinate systems. By the above invariance the stratification $\mathcal{G}_t(U_i, \mathcal{A} | U_i, V_j, \mathcal{B} | V_j)$ glue together by C^r transition function if $k(z)$

+ $i \leq r$ for all jet $z \in J(U_i, V_j)$ and all i, j . (The order k depends only on \mathcal{A} .) If \mathcal{A} has compact support and $\mathcal{A}|_{U_i}$ are semialgebraic, the order k is bounded and we allow finite r . For general \mathcal{A} , we require $r = \infty$.

The resulting stratification \mathcal{G}_t of $J^r(N, P)$ possesses properties similar to those in Theorems 3, 4. The important difference arising here is that the strata are locally subanalytic and C^i smooth but not real analytic.

References

- [1] J. Bochnak, J.J. Risler : Sur les exponents de Łojasiewicz. Comment. Math. Helv. 50 (1975) 493-507.
- [2] T. Fukuda : Local topological properties of differentiable mappings. Inv. Math. 65 (1981) 227-250.
- [3] _____ : The same title as above, written in Japanese. RIMS Kokyuroku No 23 (1976).
- [4] C. Gibson et al: Topological stability of smooth mappings. Lecture notes in Math., Vol 552 Springer-Verlag, 1976.
- [5] R.M. Hardt : Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps. Inv. Math. 38 (1977) 207-217.
- [6] H. Hironaka : Subanalytic sets; Number theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Volume in honour of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo (1973) 453-493.
- [7] M.G. Lassalle : Une demonstration du theoreme de division

- pour les fonctions différentiables. *Topology* 12 (1973) 4-62.
- [8] S. Łojasiewicz : Ensembles semi-analytiques. Mimeographed notes, IHES. 1965.
- [9] J. Mather : Stability of C^∞ mappings : V. Transversality. *Adv. Math.* 4 (1970) 301-336.
- [10] _____ : Stratifications and mappings. *Salbador Symposium on Dynamical systems*, ed. M. Peixoto (1973) 195-232.
- [11] R. Milman : The Malgrange division theorem. *Topology* 16 (1977) 393-401.
- [12] T. Mostovsky : Regular projections for subanalytic sets. *C.R.A.S., t.307, Série 1* (1988) 343-347.
- [13] I. Nakai : The second part of this series. Preprint in Liverpool University (1988).
- [14] A. du Plessis : On the determinacy of topological finite determined map-germs. *Topology* 21 (1981) 131-156.
- [15] M. Tamm : Subanalytic sets in the calculus of variations. *Acta Math.* 146 (1981) 167-199.
- [16] B. Teissier : Sur la Triangulation des Morphismes Sous-analytiques. Preprint Ecole Normale Supérieure 1987.
- [17] R. Thom : Les singularités des applications différentiables, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 6 (1955-56) 43-87.
- [18] _____ : Local topological properties of differentiable mappings. *Differential Analysis, Bombay Colloquium*, Oxford Univ. Press, London, (1964) 192-202.
- [19] _____ : Ensembles et Morphismes Stratifiés. *Bull. of Math.* 75 (1969) 240-284.
- [20] D. Trotman : Comparing regularity conditions on stratifications, *Proceedings of symposia in pure math.* Vol.40 (1983), Part 2, pp575-586.

[21] A.N. Varchenko : Local topological properties of
differentiable mappings. Math. USSR - Izv. 8 (1974)
1033 - 1082.

Geometrically Tame 群 について

東工大理 大鹿 健一

私達の研究の対象は Klein 群である。
まず, Klein 群の定義から始めよう。

定義 Klein 群とは $PSL_2\mathbb{C} = SL_2\mathbb{C}/\{\pm I\}$ の離散部分群のことである。

私達の扱うのは, 特に有限生成, torsion-free な Klein 群に限る。ここで有限生成という仮定は本質的であり, 無限生成 Klein 群では有限生成の時には生じ得ない諸々の現象が現出し得る。一方 torsion-free という仮定は本質的でなく, 話を単純にせしめる為のものである。実際 Selberg の定理により torsion を持つ Klein 群も, 有限指数部分群をとれば torsion-free になる。

さて, $PSL_2\mathbb{C}$ は一次分岐変換の群と見做すことができる。 S^2 の Conformal automorphisms 全体の群と一致する。又, H^3 を hyperbolic 3-space とすれば $Isom^+(H^3)$ とも同一視することができる。 S^2 の等角同型の群として捉えると, Klein 群の理論は函数論的手法により扱うことができる。一方 $Isom^+(H^3)$ の部分群として

捉えらると, Klein群 Γ に対して hyperbolic 3-manifold \mathbb{H}^3/Γ を対応させることにより, 微分幾何的, 及び位相幾何的考察の対象となる。

次に私達の研究主題と密接な関係をもつ重要な予想である, Ahlfors 予想を述べよう。Klein群 Γ に対し, Γ の各元の S^2 への作用に関する固定点全体の集合の閉包を Γ の limit set といい, Λ_Γ と表す。

Ahlfors 予想 有限生成 Klein群 Γ に対し, Λ_Γ は S^2 の Lebesgue measure 0 の集合であるか, S^2 全体であるかのいずれかであろう。

Ahlfors 自身はこの自らの予想を Klein群 Γ が geometrically finite と呼ばれる category に属するときに正しいことを証明している。Geometrically finite という概念は重要であるので以下に私達に convenient な形で定義を述べよう。

\mathbb{H}^3 に於ける Λ_Γ の convex hull を $C(\Lambda_\Gamma)$ と表そう。

定義 有限生成 Klein群 Γ が geometrically finite であるとは, $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ が有限体積であることである。

Γ が Fuchs 群, すなわち $PSL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群であるときは $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ は 2次元に退化するが, このときも体積 0

と見做し, geometrically finite に含める。

さて, $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ は \mathbb{H}^3/Γ の部分多様体で, \mathbb{H}^3/Γ の deformation retract になっている。一般に non compact 3-manifold $(M, \partial M)$ に対して, compact 3-submanifold $(N, \partial_0 N) \subset (M, \partial M)$ ($\partial N_0 \subset \partial N$) で, relative な deformation retract になっているようなものを $(M, \partial M)$ の core という。 Γ が geometrically finite であるとき, \mathbb{H}^3/Γ から cusp の近傍を除いたもの $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ に対して $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma \cap (\mathbb{H}^3/\Gamma)_0 = C(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ は $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の core になっている。(convex core と呼ぶ。)

Γ が geometrically finite でない時にも topological には P. Scott の定理により, $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の core が存在する。以降これを $C_\Gamma(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ と表そう。

さて, geometrically finite でないような Klein 群は勿論存在するのであるが, そのような例は最初 Bers によって構成された。Bers の構成した群は, degenerate boundary group と呼ばれるもので, quasi-Fuchsian groups (つまり Fuchs 群を quasiconformal 変形して得られる群) の代数的な極限として表れる群である。(元の Fuchs 群は有限面積の Riemann 面に対応するものである。)

Bers の degenerate group は geometrically infinite であるが, 実は以下に述べる意味で geometrically tame であることが Thurston により示された。以下で Thurston による (私達が後に定義するよりは狭い意味での) geometrically tame 群の定義を扱うが, ここでは意味を明確にする為 Bonahon による定式化によって述べることにする。

Bonahon は次のような仮定を満たす Klein 群 Γ を扱った。

Bonahon の (*) 条件 $\Gamma = A * B$ という具合に Γ が non-trivial な free product に分解したとする。すると A の元にも B の元にも共軛でない Γ の parabolic element があふ。

勿論この条件は対象を制限するこゝになつていふ。例之は有名な Schottky 群はこの (*) 条件を満たさない。

(*) 条件を満たす群 Γ に対して $C_T(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ を考えると, $\text{Fr } C_T(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ ($C_T(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ での relative boundary) の各 component は incompressible surface になる。(即ち各 component S_i に対して $\pi_1(S_i) \rightarrow \Gamma$ なる準同型が定まるが, これが単射になる。) この状況下で geometric tameness を次のように定義する。

Thurston-Bonahon による geometric tameness の定義:

$\text{Fr } C_T(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の各 component S_i に対して対応する $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の end を $e(S_i)$ と表す。 $e(S_i)$ の近傍で closed geodesics を含まないものがあるとき, $e(S_i)$ を geometrically finite end という。 S_i の単純閉曲線の引 $\gamma: \gamma$ があつて $\gamma: \gamma$ は homotopic な closed geodesic $\gamma_i^* \subset (\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ が $i \rightarrow \infty$ につれて $e(S_i)$ に向かうとき, $e(S_i)$ を geometrically infinite tame end という。 $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の各 end が geometrically finite か geometrically infinite tame のとき, Γ を geometrically tame という。

Bonahon は Γ が (*) 条件を満たせば必ず "geometrically tame" になることを示した。

又, Thurston は geometrically tame 群については, Ahlfors 予想が成立することを示した。

このように上の geometrically tame 群という category はよい性質をもっているうえに広範な Klein 群を cover している。しかし (*) 条件を課するのは対象を狭め過ぎている。そこで geometrically tame という概念を (*) 条件を満たさない Klein 群に広く拡張することを考える。その為にはまず Masur domain なるものを定義する。

定義 S を 3次元多様体 M の境界内の曲面とする。 $M\mathcal{L}(S)$ を S の measured lamination 全体の空間, $P\mathcal{L}(S)$ を $M\mathcal{L}(S)$ を projectivise したものをとする。 $\mathcal{C}(S)$ を S の simple closed curve c が M で disk を bound し, essential なもの全体の集合とする。 $\mathcal{C}(S) \subset M\mathcal{L}(S)$ とする。 $M(S) = \{ \lambda \in M\mathcal{L}(S) \mid \forall c \in \mathcal{C}(S) : i(\lambda, c) \neq 0 \}$ とおき, これを S の Masur domain という。 $M(S)$ の $P\mathcal{L}(S)$ での像を $PM(S)$ と表す。

ここで geometric tameness の一般化が行える。

定義 (一般化した geometric tameness)

Klein 群 Γ について $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の topological cover $G_\Gamma(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ で以下の性質をもつようなものが存在するとき Γ を geometrically tame 群という。

$(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の各 end e は前の意味で "geometrically finite end" であるか 或いは以下を満たす。

e に対面する $F_\Gamma(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の component を S とする。 S の simple closed curves の列 $\{\gamma_i\}$ で $[\gamma_i]$ が $\phi(S)$ で $\phi M(S)$ の元に収束するようなもので、 γ_i は homotopic な $(\mathbb{H}^3/\Gamma)_0$ の closed geodesics γ_i^* が $i \rightarrow \infty$ に向けて e に向かうようなものが存在する。

(*) 条件を課した時との相違点は simple closed curves が asymptotically Masur domain の中に入っているという条件を加えていることである。この条件を加えないと、(*) 条件を満たさない Klein 群については、geometrically tame 群がもつべきいい性質が導かれない。

この一般化された定義による geometrically tame 群についても、Ahlfors 予想が成立することがわかる。

予想としては 全ての有限生成 Klein 群は geometrically tame である と思われる。

而して (4) 条件を満たさないような geometrically tame 群を具体的に構成することは容易ではない。以下そのような群が geometrically finite 群の代数的極限として構成できることを見る。

定義 geometrically tame end に対して $[\gamma_i]$ が $\phi(S)$ で収束する先の projective lamination

の support を その end の ending lamination と呼ぶ。

私達の主定理を叙述を単純化する為には少し一般性を犠牲にした形で述べると以下のようになる。

定理 Γ を parabolic 元を持たない geometrically finite 群とする。 C を \mathbb{H}^3/Γ の convex core とする。

S を $\text{Fr}(C)$ の Component とし、 λ を $M(S)$ の measured lamination とするとき、以下のような Klein 群 G が存在する

- (1) G は geometrically tame
- (2) G は Γ の quasiconformal 変形の代数的極限
- (3) 上で定まる Γ と G の同型と compatible な homeomorphism $\Phi: \mathbb{H}^3/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}^3/G$ がある
- (4) \mathbb{H}^3/G は 唯一つの geometrically infinite tame end をもち その ending lamination として、 $\Phi(\lambda)$ がとれる。

—

一般に Klein 群は必ず geometrically tame であることを示すのは非常に困難だと思われる。

次の段階としては geometrically finite 群の代数的極限として得られる群が geometrically tame であることを示せることを期待している。

以上

Rigidity Problem for Fiber Spaces of Abelian Varieties

Masa-Hiko SAITO

Hokkaido University and The Johns Hopkins University

§0 Introduction

Let us fix a smooth connected quasiprojective variety S over \mathbf{C} . A fiber space of Abelian varieties (resp. curve) over S is a pair $(f : X \rightarrow S, \mathcal{L})$ consisting of:

- (i) a smooth quasiprojective variety X ,
- (ii) a smooth projective morphism f from X to S with connected fibers, and

(iii) a relatively ample line bundle \mathcal{L} on X , such that for every $s \in S$ the fiber $X_s = f^{-1}(s)$ is an Abelian variety (resp. curve). Moreover we always assume that there exists a section $s : S \rightarrow X$ of f .

Let g be a positive integer, and let $\mathcal{A}_g(S)$ and $\mathcal{C}_g(S)$ denote the sets of isomorphism classes of fiber spaces over S of principally polarized Abelian varieties of dimension g and curves of genus g respectively.

Arakelov [A] showed the following finiteness theorem for fiber spaces of curves.

Theorem. *Assume that S is a curve and $g \geq 2$. Then the number of non-isotrivial fiber spaces in $\mathcal{C}_g(S)$ is finite.*

(Here we say that a fiber space $f : X \rightarrow S$ is isotrivial if the fibration is locally constant.) This theorem is the so-called Shafarevich conjecture in the function field case. In this report, we will try to generalize this finiteness theorem to $\mathcal{A}_g(S)$. (For the case of fiber spaces of polarized K3 surfaces, see my joint work [S-Z] with S.Zucker.)

The proof of this theorem is divided into two parts:

(i) **Proof of Boundedness:** i.e. $\mathcal{C}_g(S)$ is a quasiprojective variety, in particular, it has only finitely many components,.

(ii) **Proof of Rigidity:** i.e. a non-isotrivial fiber space has no deformations with fixing the base space S , so that each component of $\mathcal{C}_g(S)$ is of dimension 0.

In case of Abelian variety, Faltings [F] proved the boundedness of $\mathcal{A}_g(S)$ by bounding the degree of the Hodge bundle. He also calculated the local deformation of fiber spaces by means of Variation of Hodge Structure on $\mathbb{R}^1 f_* \mathbf{Z}$. Moreover he gave an example of non-rigid fiber space of Abelian varieties which has no isotrivial factors.

On the other hand, Noguchi [N] showed the boundedness of the moduli spaces $\text{Hol}(S, \Gamma \backslash \mathcal{D})$ of holomorphic mappings from S to $\Gamma \backslash \mathcal{D}$, where \mathcal{D} is a hermitian bounded symmetric domain and Γ is a torsion free arithmetic subgroup of $\text{Aut}(\mathcal{D})$. By using the Torelli theorem and the surjectivity of the period mapping of Abelian varieties, we can deduce the boundedness of $\mathcal{A}_g(S)$ from the Noguchi's result.

In this note, we shall mainly discuss the rigidity problem for fiber spaces of Abelian varieties, in particular, we will try to characterize the non-rigid fiber spaces of Abelian varieties. The details will be published elsewhere.

§1 Fiber spaces of Abelian Varieties and VHS.

Let $(f : X \rightarrow S, \mathcal{L})$ be a fiber space of abelian varieties of relative dimension g over S . Then we have a polarized Variation of Hodge Structure (abbreviated to VHS) of weight 1 over S as follows:

- (i) $V := \mathbb{R}^1 f_* \mathbf{Z}$; a local system of free \mathbf{Z} -module of rank $2g$,
- (ii) $\mathcal{F}^1 := f_* \Omega_{X/S}^1$: a holomorphic subbundle in $V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S$ of rank g such that

$$\mathcal{F}^1 \oplus \overline{\mathcal{F}^1} \simeq V \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{O}_S,$$

- (iii) a flat skew symmetric bilinear form

$$Q : V \times V \longrightarrow \mathbf{Z}$$

defined by the formula

$$Q(u, v) = \int_{X_s} u \wedge v \wedge c_1(\mathcal{L}|_{X_s})$$

for $u, v \in V_s$. This satisfies the Riemann-Hodge bilinear relations:

$$Q(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^1) = 0,$$

and for $0 \neq u \in \mathcal{F}^1$,

$$-1/(2\pi\sqrt{-1})Q(u, \bar{u}) > 0.$$

We moreover assume that \mathcal{L} gives a principally polarization, i.e. Q induces the identification of V with its dual, i.e. $V^* \simeq V$. If we denote by $\text{VH}_g^1(S)$ the set of isomorphism classes of principally polarized VHS of rank $2g$ of weight 1 over S , we have a natural transformation

$$\Phi : \mathcal{A}_g(S) \longrightarrow \text{VH}_g^1(S).$$

Deligne [D] showed the following

Theorem 1.1. *The map Φ induces an isomorphism between $\mathcal{A}_g(S)$ and $\text{VH}_g^1(S)$.*

Let $\mathcal{A}_g = \mathcal{A}_g(pt)$ denote the moduli of principally polarized Abelian varieties. It is well-known that

$$\mathcal{A}_g = Sp_{2g}(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{H}_g$$

where

$$\mathcal{H}_g = \{Z \in M_g(\mathbf{C}) \mid Z = {}^t Z, \text{Im} Z \gg 0\}$$

is the Siegel upper half plane of genus g , and

$$Sp_{2g}(\mathbf{Z}) = \{\gamma \in GL_{2g}(\mathbf{Z}) \mid {}^t \gamma J \gamma = J\}$$

with $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$. We can write an element $\gamma \in Sp_{2g}(\mathbf{Z})$ as:

$$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2g}(\mathbf{Z})$$

such that $A \cdot^t B = B \cdot^t A, C \cdot^t D = D \cdot^t C, A \cdot^t D - B \cdot^t C = I_g$. The action of $Sp_{2g}(\mathbf{Z})$ on \mathcal{H}_g is defined by the formula;

$$\gamma : Z \longrightarrow (AZ + B) \cdot (CZ + D)^{-1}$$

for γ as above. (Note that \mathcal{A}_g has quotient singularities if $g > 1$.) For $[f] = (f : X \rightarrow S, \mathcal{L}) \in \mathcal{A}_g(S)$, we get a natural holomorphic mapping

$$m_f : S \longrightarrow \mathcal{A}_g$$

which has a lifting $\tilde{m}_f : \tilde{S} \longrightarrow \mathcal{H}_g$ where \tilde{S} denotes the universal covering of S . Let us denote by $\text{Hol}(S, \mathcal{A}_g)^l$ the moduli space of holomorphic mappings from S to \mathcal{A}_g which has a lifting to \tilde{S} . Then from the standard argument of the period mapping and Theorem 1.1, we have the following

Theorem 1.2.

$$\mathcal{A}_g(S) \simeq \text{VH}_g^1(S) \simeq \text{Hol}(S, \mathcal{A}_g)^l.$$

§2 Boundedness theorem of Noguchi.

We shall review a result of Noguchi in [N]. Let \mathcal{D} be a symmetric bounded domain, and Γ a *torsion free* arithmetic subgroup of $\text{Aut}(\mathcal{D})^\circ$. Then Noguchi [N] proved

Theorem 2.1. *The moduli space $\text{Hol}(S, \Gamma \backslash \mathcal{D})$ of the holomorphic mapping from S to $\Gamma \backslash \mathcal{D}$ is a smooth quasiprojective variety.*

This theorem is highly non-trivial, because S and $\Gamma \backslash \mathcal{D}$ may be non-compact. The key of his proof is the fact that $\Gamma \backslash \mathcal{D}$ is hyperbolically embedded into its Satake compactification in the sense of Kobayashi.

Though $\Gamma = Sp_{2g}(\mathbf{Z})$ has torsion elements in the case where $\mathcal{D} = \mathcal{H}_g$, using the same argument in [N] or [S-Z], we can show a boundedness

Theorem 2.2. *The moduli space $\text{Hol}(S, \mathcal{A}_g)^l$ is a quasiprojective variety with at most quotient singularities, and so are $\mathcal{A}_g(S)$ and $\text{VH}_g^1(S)$.*

§3 Deformation of VHS.

Let $(f : X \rightarrow S, \mathcal{L})$ be a fiber space in $\mathcal{A}_g(S)$ and $(V, \mathcal{F}^1, \mathbb{Q})$ the polarized VHS over S induced from it. Setting $V_{\mathbb{Q}} := V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, we obtain a \mathbb{Q} -VHS over S . The endomorphism algebra of $V_{\mathbb{Q}}$ is defined to be

$$E = \text{End}(V_{\mathbb{Q}}) = H^0(S, \underline{\text{End}}(V_{\mathbb{Q}})),$$

where $\underline{\text{End}}(V_{\mathbb{Q}})$ denotes the local system of flat endomorphisms of $V_{\mathbb{Q}}$. A flat local endomorphism $a \in \underline{\text{End}}(V_{\mathbb{Q}})$ is called *skew* with respect to \mathbb{Q} if for all local flat section $u, v \in V_{\mathbb{Q}}$ it satisfies the condition

$$\mathbb{Q}(au, v) = -\mathbb{Q}(u, av).$$

Let $\underline{\text{End}}^{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{Q}})$ denote the local subsystem of $\underline{\text{End}}(V_{\mathbb{Q}})$ which consists of all skew flat elements. Then $\underline{\text{End}}(V_{\mathbb{Q}})$ forms a \mathbb{Q} -VHS of weight 0, and $\underline{\text{End}}^{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{Q}})$ becomes a polarized \mathbb{Q} -VHS of weight 0. We moreover set

$$E^{\mathbb{Q}} = H^0(S, \underline{\text{End}}^{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{Q}})) \subset E$$

In [D], Deligne proved the following important

Theorem 3.1.

- (i) *The endomorphism algebra E of \mathbb{Q} -VHS is a semisimple algebra and has a natural \mathbb{Q} -Hodge structure of weight 0.*
- (ii) *The center Z of E is of type $(0,0)$.*

On the other hand, Faltings [F] showed the following

Theorem 3.2. *The local universal deformation space of $(f : X \rightarrow S, \mathcal{L})$ with S and \mathcal{L} fixed is isomorphic to*

$$(E^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{-1,1} / \text{finite group}$$

as a germ of complex spaces.

Corollary 3.3. *A fiber space in $\mathcal{A}_g(S)$ is rigid iff*

$$(E^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{-1,1} = 0.$$

§4 Endomorphism algebra of \mathbb{Q} -VHS.

Let $V_{\mathbb{Q}} = (V_{\mathbb{Q}}, \mathcal{F}^1, \mathbb{Q})$ be a polarized \mathbb{Q} -VHS of weight 1 over S , and $E = \text{End}(V_{\mathbb{Q}})$ the endomorphism algebra of $V_{\mathbb{Q}}$. We moreover assume that $V_{\mathbb{Q}}$ is irreducible as a \mathbb{Q} -VHS. Let Z be the center of E and a a non-zero element of Z . Then by Theorem 3.1, (ii), the kernel of a is also \mathbb{Q} -VHS, and hence $\ker(a)$ must be zero because of the irreducibility of $V_{\mathbb{Q}}$. This implies that Z must be a (commutative) field. By the Deligne's theorem of the semisimplicity of the action of the monodromy group on VHS, we can write $V_{\mathbb{Q}}$ as the direct sum decomposition

$$V_{\mathbb{Q}} = (V_1)^{l_1} \oplus \cdots \oplus (V_t)^{l_t}$$

where V_i are irreducible local systems of \mathbb{Q} -vector spaces which are not mutually isomorphic. If we set $D_i = \text{End}(V_i)$, by Schur's lemma, D_i is a division algebra. Then we have

$$E = \text{End}(V_{\mathbb{Q}}) = M_{l_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{l_t}(D_t),$$

while the center Z is a field. Hence we have

Lemma 4.1. *An irreducible \mathbb{Q} -VHS $V_{\mathbb{Q}}$ is primary, i.e. it has a direct sum decomposition*

$$V_{\mathbb{Q}} = (V_1)^{\oplus l}$$

where V_1 is an irreducible local system. Moreover we have

$$E = M_l(D)$$

where $D = \text{End}(V_1)$ is a division algebra.

Let s be a point of S , and consider the fiber $V = V_{\mathbb{Q},s}$. The polarization \mathbb{Q} induces an involution $*$ on E by the adjoint action, i.e.

$$\mathbb{Q}(au, v) = \mathbb{Q}(u, a^*v).$$

By the same argument in [D] (4.4.7), or [S-Z] (2.4.1), one can show that

$$\text{Tr}(a^*a) > 0 \text{ for } 0 \neq a \in Z.$$

From the Albert classification of fields with positive involutions, we have the following

Lemma 4.2. *Let Z denote the center of the endomorphism algebra E of an irreducible \mathbf{Q} -VHS. Then Z is*

- (i) *a totally real number field and $*$ = id, or*
- (ii) *a quadratic purely imaginary extension over a totally real number field and $*$ = complex conjugation.*

§5 Non-Rigid VHS of weight 1.

Let $V_{\mathbf{Q}} = (V_{\mathbf{Q}}, \mathcal{F}^1, \mathbf{Q})$ be an irreducible \mathbf{Q} -VHS of weight one, and write it as

$$V_{\mathbf{Q}} = (V_1)^{\oplus l},$$

and set $D = \text{End}(V_1)$ and $Z = \text{Center of } D$ as before.

By using a Deligne's theorem in [D], we have the following

Theorem 5.1. *Notation being as above, assume that $V_{\mathbf{Q}}$ has no non-isotrivial \mathbf{Q} -subvariation of Hodge structure, Z is totally real, and*

$$(E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^{-1,1} \neq 0.$$

Then we have

$$E = M_l(D)$$

where D is a quaternion division algebra over Z with

$$D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \simeq \underbrace{M_2(\mathbf{R}) \times \cdots \times M_2(\mathbf{R})}_n \times \underbrace{\mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}}_{d-n}.$$

Here \mathbf{K} denotes the Hamiltonian and $1 \leq n < d = [Z : \mathbf{Q}]$.

Corollary 5.2. *Let k denote the rank of V_1 as D -module. Under the same assumption of Theorem 5.1, we have*

$$\text{rank}_{\mathbf{Q}} V_{\mathbf{Q}} = 4dlk$$

with $d \geq 2$.

§6 Examples of Non-Rigid VHS of weight 1.

Deligne [D] proved that if a fiber space of abelian varieties has no non-trivial factors and relative dimension $g \leq 3$, one has $E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C} = (E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^{0,0}$, so it is rigid. On the other hand, in [F], Faltings gave the following example.

Let Z be a real quadratic number field, D a quaternion algebra over Z such that

$$D \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \simeq M_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{K}.$$

We can construct a non-isotrivial polarized \mathbf{Q} -VHS $V_{\mathbf{Q}}$ over a modular curve $S = \Gamma \backslash \mathcal{H}_1$ with the endomorphism algebra $E \simeq D$. It is easy to see that

$$(E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^{-1,1} = \mathbf{C},$$

but

$$(E^{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^{-1,1} = 0.$$

So the associated fiber space of Abelian varieties has no non-trivial deformation with fixing S and the polarization \mathcal{L} . Note that nonzero elements of $(E \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^{-1,1}$ are corresponding to the deformations of the fiber space with fixing S but changing the polarization \mathcal{L} . The deformed fiber space may not be algebraic.

On the other hand, the endomorphism algebra of direct sum of two copies of the above \mathbf{Q} -VHS is

$$E = M_2(D),$$

and it is easy to see that

$$(E \otimes \mathbf{C})^{-1,1} \simeq \mathbf{C}^4 \supset (E^{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^{-1,1} \simeq \mathbf{C}.$$

So \mathbf{Q} -VHS $V_{\mathbf{Q}} \oplus V_{\mathbf{Q}}$ has one dimensional non-trivial deformation as a polarized \mathbf{Q} -VHS over S . The relative dimension of the associated fiber space is 8.

From Theorem 5.1 and with a little more argument, we can prove the following

Theorem 6.1. *Let $(f : X \rightarrow S, \mathcal{L})$ be a fiber space of abelian varieties with no isotrivial factors and relative dimension $g \leq 4$. Then we have*

$$(E^{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{C})^{-1,1} \simeq 0,$$

and so the fiber space is rigid.

References

- [A] A.Arakelov, Families of algebraic curves with fixed degeneracies, (English translation), Math. U.S.S.R. Izvestiya, **Vol.5**, (1971), 1277-1302.
- [D] P. Deligne, Théorie de Hodge, II, Publ. Math. IHES **40**, (1971), 5-57.
- [F] G. Faltings, Arakelov's Theorem for Abelian Varieties, Invent. math. **73**, (1983), 337-347.
- [N] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and local symmetric spaces, Invent. math. **93**, (1988), 15-34.
- [S-Z] M.-H. Saito, S. Zucker, Classification of Non-Rigid Families of K3 surfaces and a Finiteness Theorem of Arakelov type, to appear in Math. Ann.

Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo, 060, Japan

Department of Mathematics
The Johns Hopkins University
Baltimore, Maryland 21218 U.S.A.

A relation of CFT to the theory of genera

Yuji SHIMIZU
Mathematical Institute,
Tohoku University

1 Introduction

In this article, I report on a recent study on the connection between the boson Fock space in conformal field theory (CFT) and the complex cobordism ring [KSU3]. This is a joint work with Toshiyuki Katsura (Ochanomizu Univ.) and Kenji Ueno (Kyoto Univ.).

In this Introduction, let us illustrate a consequence of our results. It is a phenomenon related to the Todd genus.

Todd genus appears usually in the Hirzebruch-Riemann-Roch theorem [Hir] :

$$\chi(X, \mathcal{E}) = ch(\mathcal{E}) \cup Td(X) \cdot [X].$$

Here $ch(\mathcal{E})$ is the Chern character of a holomorphic vector bundle \mathcal{E} on a non-singular projective algebraic variety X of dimension n . The right hand side of this formula means that the class in (say) the cohomology ring of X is evaluated against the fundamental cycle $[X]$.

Todd class of X is defined in the following way :

$$\begin{aligned} Td(X) &= \prod_{i=1}^n \frac{\delta_i}{1 - e^{-\delta_i}} \\ &= \sum_{k \geq 0} Td_k(c_1, \dots, c_k). \end{aligned}$$

Here c_i 's denote the Chern classes of the tangent bundle of X and δ_i 's are their Chern roots :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \delta_i) = 1 + c_1 + \dots + c_n.$$

Then Td_k becomes a homogeneous polynomial in c_i 's of total degree k with respect to $\deg c_i = i$.

Explicit form of Td_k is known ;

$$\begin{aligned} Td_1 &= \frac{1}{2}c_1, \quad Td_2 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), \quad Td_3 = \frac{1}{24}c_1c_2, \\ Td_4 &= \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4), \dots \end{aligned}$$

Let us introduce another set of variables t_i 's :

$$1 + \sum_{i \geq 1} c_i z^i = \exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} t_i z^i\right).$$

$$\begin{aligned} \text{eg. } c_1 &= t_1, \quad c_2 = \frac{1}{2}t_1^2 - t_2, \quad c_3 = \frac{1}{6}t_1^3 - t_1t_2 + t_3, \\ c_4 &= \frac{1}{24}t_1^4 - \frac{1}{2}t_1^2t_2 + t_1t_3 + \frac{1}{2}t_2^2 - t_4, \dots \end{aligned}$$

Now calculate $\log Td(c)$ in terms of t_i 's. Plugging these relation into the following :

$$\begin{aligned} \log Td &= Td_1 + (Td_2 - \frac{1}{2}Td_1^2) + (Td_3 - Td_1Td_2 + \frac{1}{3}Td_1^3) \\ &+ (Td_4 - \frac{1}{2}Td_2^2 - Td_1Td_3 + Td_1^2Td_2 - \frac{1}{4}Td_1^4) + \dots, \end{aligned}$$

we finally get the following :

$$\log Td = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{12}t_2 + 0 - \frac{1}{720}t_4 + \dots$$

We have included the term 0 to indicate that each term of degree i becomes a multiple of t_i .

In conclusion, we have the relation :

$$\begin{aligned} Td(c) &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} b_i t_i\right) \\ \text{with } b_1 &= \frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{720}, \quad \dots \end{aligned}$$

We remark that b_i equals the coefficient of c_i in Td_i .

We will state that this relation is valid for any multiplicative sequence in §4. We might say that this is a tip of iceberg of relations among CFT and several branches of mathematics. The connection in this case comes from (the boson Fock space in) abelian CFT.

2 Theory of genera

Let us briefly recall what is a genus.

A genus with values in a commutative ring A with a unit 1 is a ring homomorphism

$$\varphi : MU^* \rightarrow A.$$

Here MU^* denotes the complex cobordism ring.

Assume hereafter that A is a \mathbf{Q} -algebra. Then φ is equivalent to

$$\varphi : MU_{\mathbf{Q}}^* = MU^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \rightarrow A.$$

This in turn is equivalent to the following formal power series :

$$\ell_{\varphi}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(\mathbf{P}^{n-1})}{n} z^n \in A \otimes \mathbb{Z}[[z]],$$

since we know that

$$MU_{\mathbf{Q}}^* \cong \mathbf{Q}[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots]$$

according to a theorem of Milnor. Here \mathbf{P}^n denotes the cobordism class of the complex projective space \mathbf{P}^n ($n \geq 1$, $\mathbf{P}^0 = 1$) and they are algebraically independent.

This power series $\ell(z)$ would be the logarithm of a 1-dimensional formal group law, cf.[Haz]. It is related to a multiplicative sequence $K(c, z) = K(\sum_{n \geq 0} c_n z^n)$ via its characteristic power series $Q(z)$ by the formulae :

$$Q(z) = \frac{z}{\ell^{-1}(z)}, \quad K(1+z) = Q(z).$$

The multiplicativity of K is just equal to the fact that K is a group homomorphism of $\Lambda(A) = 1+zA[[z]]$ considered as a group by multiplication. For all these material, we refer the reader to [Hir,MiSt,O].

We remind you some examples.

Example 1) (Todd genus)

$$Q(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}}, \quad \ell(z) = -\log(1 - z), \quad \varphi(\mathbf{P}^n) = 1.$$

2) An elliptic genus is a genus whose logarithm is given by the elliptic integral of the following form :

$$\ell(z) = \int^z \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

associated to the elliptic curve given by the equation $y^2 = R(x) = 1 - 2\delta x^2 + \epsilon x^4$.

Then we have :

$$Q(z) = \frac{z}{\operatorname{sn} z}, \varphi(\mathbf{P}^{2n}) = P_n(\delta/\sqrt{\epsilon})\epsilon^{n/2}, \varphi(\mathbf{P}^{2n-1}) = 0,$$

where $\operatorname{sn} z$ is Jacobi's sine function and $P_n(z)$ is the n -th Legendre polynomial ($= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \{(z^2 - 1)^n\}$).

Remark that for $\delta = \epsilon = 1$ φ reduces to the signature. This notion was introduced by Ochanine in order to answer a conjecture of Landweber and Stong. In the context of quantum field theory, Witten reinterpreted it as an index of a certain Dirac operator on loop spaces, cf.[La].

This is a partial stimulus to the story below. But before we state it, we need to explain a little bit about CFT.

3 Conformal field theory

We only intend to recall relevant part of abelian CFT.

Conformal field theory is a kind of 2-dimensional quantum field theory with conformal symmetry. It was initiated by Belavin, Polyakov and Zamolodchikov in 1984 and involves representations of the Virasoro Lie algebra \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \mathbf{C}[z, z^{-1}] \frac{d}{dz} \oplus \mathbf{C} \cdot c,$$

where c is in the center of \mathcal{L} and the other bracket is given by

$$\left[f \frac{d}{dz}, g \frac{d}{dz} \right]_{\mathcal{L}} = (fg' - f'g) \frac{d}{dz} + \frac{1}{12} \operatorname{Res}_{z=0} (f''' g dz) c.$$

The elements $L_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}$ provide usual generators found in the literature, cf.[TK].

In 1987, Friedan and Shenker gave a formulation of CFT in terms of vector bundles (of conformal blocks) with integrable connections over some moduli space of Riemann surfaces. Segal gave a different approach to CFT using the notion of modular functors in 1988. A rigorous mathematical model of CFT was given, for example, by Tsuchiya, Ueno and Yamada for the so-called Wess-Zumino-Witten model. In the last model the symmetry involved is an affine Lie algebra (called "current algebra" in the physics literature). It is an example of non-abelian CFT.

Here we recall a geometric model of abelian CFT.

We wish to realize representations of the Virasoro algebra \mathcal{L} as spaces of global sections of some line bundles in a manner similar to Borel-Weil theory.

Even though there is no group corresponding to \mathcal{L} in the algebraic sense, half of \mathcal{L} does correspond to the group $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[[z]])$.

Following a suggestion by Manin (and I suppose) together with this fact, Beilinson and Kontsevich independently introduced the notion of dressed (or extended) moduli space of algebraic curves $\mathcal{M}_g^{(\infty)}$, cf.[BeSc,KNTY] Its \mathbf{C} -valued point is a triple $\mathcal{X} = (C, Q, t)$ of a projective smooth algebraic curve C , a closed point Q of C , and a formal local parametrization $t : \hat{\mathcal{O}}_{C,Q} \simeq \mathbf{C}[[z]]$.

It is not so difficult to see that the tangent space at a point \mathcal{X} can be expressed as follows :

$$T_{\mathcal{X}}\mathcal{M}_g^{(\infty)} \simeq \mathbf{C}((z)) \frac{d}{dz} / H^0(C, \Theta_C(*Q)).$$

This means that $\mathcal{M}_g^{(\infty)}$ might be considered as an infinitesimal homogeneous space of Virasoro algebra (with central charge 0).

Then it is known that this infinitesimal action of $\mathcal{L}(c=0)$ on $\mathcal{M}_g^{(\infty)}$ lifts to an infinitesimal action of \mathcal{L} on the determinant line bundle \tilde{L} . This \tilde{L} is the pull-back by the natural projection $\mathcal{M}_g^{(\infty)} \rightarrow \mathcal{M}_g$ of the one L on \mathcal{M}_g associated to the theta characteristic $\Omega^{1/2}$ on the universal family $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}_g : L = \det R\pi_*(\Omega^{1/2})$.

A representation of \mathcal{L} , called the boson Fock space, \mathcal{H}_T can be realized geometrically inside $H^0(\mathcal{M}_g^{(\infty)}, \tilde{L})$. Algebraically it is the space

$$\mathbf{C}[t_1, t_2, \dots][u, u^{-1}]$$

with the action of \mathcal{L} given in terms of differential operators of order ≤ 2 in infinitely many variables t_i 's, cf.[KSU3,§2].

This indicates that $\mathcal{M}_g^{(\infty)}$ can be embedded in a projective space of infinite dimension.

Actually this can be carried out in 3 steps : a) Krichever's construction, b) Plücker embedding, c) bosonization.

The first step a) gives a map $\mathcal{M}_g^{(\infty)} \rightarrow \text{Grass}\mathbf{C}((z))$ by

$$\mathcal{X} = (C, Q, t) \mapsto H^0(C, \Omega^{1/2}(*Q)) \hookrightarrow \mathbf{C}((z)) \text{ via } t.$$

This comes from the consideration of commutative subrings of the ring of differential operators of one variable, cf.[Mu,Sh].

The second step b) is an analogue of usual Plücker embedding in infinite dimension. Even though we don't recall the fermion Fock space \mathcal{F} or its completed version $\hat{\mathcal{F}}$ here, we note that $\hat{\mathcal{F}}$ is a semi-infinite wedge product of the space $\mathbf{C}((z))$, cf.[KNTY,KSU1].

The third step c) is an isomorphism $\mathcal{F} \simeq \mathcal{H}_T$ (thus $\hat{\mathcal{F}} \simeq \hat{\mathcal{H}}_T$ also) cf.[DJKM,TK] and means roughly that exterior algebra and symmetric algebra become equivalent in infinite dimension.

We remark that the pull back of the tautological line bundle on $\mathbf{P}(\hat{\mathcal{H}}_T)$ by the composition

$$\mathcal{M}_g^{(\infty)} \xrightarrow{a)} \text{Grass}\mathbf{C}((z)) \xrightarrow{b)} \mathbf{P}(\hat{\mathcal{F}}) \xrightarrow{c)} \mathbf{P}(\hat{\mathcal{H}}_T)$$

is equal to \tilde{L} , cf.[KNTY]. Remark also that the theory of quasi-periodic τ -functions using Jacobian theta functions provides us a section of \tilde{L} .

A consequence of bosonization is a natural \mathbf{Z} -basis of $\mathcal{H}_{T,0}$ $\{\chi_\lambda(t)\}$ consisting of Schur polynomials. Recall that elementary Schur polynomials are defined by

$$\sum_{n \geq 0} p_n(t) z^n = \exp\left(\sum_{n \geq 1} t_n z^n\right).$$

For a partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0$, we put

$$\chi_\lambda(t) = \det(p_{\lambda_i - i + j}(t))_{1 \leq i, j \leq \ell} =: \Delta_\lambda(p).$$

It is known that $\chi_\lambda(t)$ is the character polynomial of the finite dimensional representation of GL_N with highest weight λ (for sufficiently large N).

A final remark is that the above abelian CFT (at least except τ -function) can be constructed over \mathbf{Z} (or $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$). In the process we have to replace the original bosonization by an arithmetic variant, cf.[KSU1,2].

4 Relation of MU^* and $\mathcal{H}_{T,0}$

In this section, we present a basic relation between MU^* and $\mathcal{H}_{T,0}$ giving rise to the phenomenon at the beginning.

In this section, we consider the boson Fock space (of charge 0) over the field \mathbf{Q} :

$$\mathcal{H}_{T,0} = \mathbf{Q}[t_1, t_2, \dots].$$

Let us introduce the ring of universal Chern classes :

$$Ch^* = \mathbf{Q}[c_1, c_2, \dots].$$

The comparison between $MU_{\mathbf{Q}}^*$ and $\mathcal{H}_{T,0}$ is done so that we can compare the natural pairings : Chern numbers and the one used in the theory of KP equations. The definitions are as follows :

$$\begin{aligned} Ch^* \times MU_{\mathbf{Q}}^* &\longrightarrow \mathbf{Q} : \\ (P(c), [M]) &= P(c)[M] = \text{degree dim } M \text{ part of } P(c_1(M), c_2(M), \dots). \end{aligned}$$

for $P(c) = P(c_1, c_2, \dots) \in Ch^*$ and a complex manifold M .

$$\mathcal{H}_{T,0} \times \mathcal{H}_{T,0} \longrightarrow \mathbf{Q} : (f(t), g(t)) := f(\bar{\partial})g(t) |_{t=0}$$

for $f(t), g(t) \in \mathcal{H}_{T,0}$, and we put

$$\bar{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2}, \dots, \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial t_n}, \dots \right).$$

Then we can state our first main result.

Theorem 1 *The following ring homomorphisms*

$$\begin{aligned} K : MU_{\mathbf{Q}}^* &\longrightarrow \mathcal{H}_{T,0} : \mathbf{P}^n \mapsto p_n((n+1)t) \\ K^\dagger : Ch^* &\longrightarrow \mathcal{H}_{T,0} : c_i \mapsto (-1)^i p_i(-t) = q_i(t) \end{aligned}$$

are isomorphisms which preserves the pairings recalled above. Here p_n is the n -th elementary Schur polynomial in §2 and $kt = (kt_1, kt_2, \dots)$ for $k = n+1$ or -1 .

This Theorem is verified by a direct calculation.

Remark 1) The correspondence K^\dagger can be rewritten as

$$K^\dagger(1 + \sum_{i \geq 0} c_i z^i) = \exp\left(\sum_{i \geq 0} (-1)^{i+1} t_i z^i\right),$$

which is used in Introduction.

It is in this form that K^\dagger is originally found. Similarly K was given quite explicitly at first.

2) Morava has a different view-point of the cobordism ring [Mo]. He and the author developed a way of generalization of the elliptic genus

using Krichever's construction in §3 and projective connection on a Riemann surface [MoSh].

Z-structures

We can compare integral structures with respect to K and K^\dagger . Let us consider the following \mathbf{Z} -subspaces :

$$\begin{aligned} Ch^*(\mathbf{Z}) &= \mathbf{Z}[c_1, c_2, \dots] \subset Ch^* \\ \mathcal{H}_{T,0}(\mathbf{Z}) &= \mathbf{Z}[t_1, t_2, \dots] \subset \mathcal{H}_{T,0} \\ \mathcal{H}_0(\mathbf{Z}) &= \mathbf{Z}[p_1(t), p_2(t), \dots] \subset \mathcal{H}_{T,0}. \end{aligned}$$

As to the space $Ch^*(\mathbf{Z})$, it is easy to see from the definition of K^\dagger that

$$K^\dagger(Ch^*(\mathbf{Z})) = \mathcal{H}_0(\mathbf{Z}).$$

Therefore we conclude that

$$K^{-1}(\mathcal{H}_{T,0}(\mathbf{Z})) = MU^*(\mathbf{Z}) := \{x \in MU_{\mathbf{Q}}^*; (P(c), x) \in \mathbf{Z} \text{ for } \forall P(c) \in Ch^*(\mathbf{Z})\}.$$

But to determine the image $K(MU^*)$, we have to use a theorem of Bukhshtaber-Shokurov [BuSh], which in turn relies on a theorem of Hattori-Stong, and a result relating our K and a map appearing in [BuSh]. The result is

$$\begin{aligned} K(MU^*) &= \mathbf{Z}[r_1(t), r_2(t), \dots] \cap \mathcal{H}_0(\mathbf{Z}), \\ r_i(t) &:= \sum_{0 \leq j \leq i} \frac{1}{j+1} p_{i-j}(-(j+1)t). \end{aligned}$$

For detail, cf.[KSU3,§4].

Let us move on to our second result.

Definition Let T be a multiplicative sequence with coefficients in \mathbf{Q} . Put

$$\tau_T(t) := K^\dagger(T(c, 1)),$$

and we call it the τ -function associated to T . So this is an element in $\mathcal{H}_{T,0}$.

After some experimental calculation, we arrived at

Theorem 2 1) $\tau_T(t) = \exp(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} b_i t_i)$,

where b_i is the coefficient of c_i in the polynomial $T_i(c_1, \dots, c_i)$.

(cf. [KSU3, §5] for its meaning), where ξ_0 is the reference frame $(\delta_{i+1,j})_{i \in \mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}_{<0}}$ and $\xi(t) = \exp(\sum_{n \geq 1} t_n \Lambda^n) \cdot \xi$ is the time-evolution of ξ , $\Lambda = (\delta_{i+1,j})_{i,j \in \mathbf{Z}}$.

Because of the identity

$${}^t \xi_0 \cdot \exp\left(\sum_{n \geq 1} t_n \Lambda^n\right) = D(p),$$

we have $\tau(\xi, t) = \det(D(p) \cdot \xi)$.

If we allow minor changes in the time-evolution : $\Lambda \mapsto -\Lambda, t \mapsto -t$, then $D(p)$ changes into $D(c)$ under the identification K^\dagger , and $\tau_T(t)$ can be seen as a τ -function in this sense.

Finally we remark that these functions $\tau_T(t)$ for varying T form an orbit of the group

$$1 + \partial_x^{-1} \mathbf{C}[[\partial_x^{-1}]]$$

on $Grass(\mathbf{C}((z)))$. In other word, the time-evolution of $\tau_T(t)$ is just the fiber over the constant operator ∂_x of the natural projection from the set of wave operators to the set of Lax operators in the theory of KP-equations. For the detail, see [KSU3, §5].

References

- [BeSc] A.A.Bellinson and V.A.Schechtman, Determinant bundles and Virasoro algebras, *Commun. Math. Phys.* 118 (1988) 651-701.
- [BuSh] V.M.Bukhshtaber and A.V.Shokurov, The Landweber-Novikov algebra and formal vector fields on the line, *Funct. Anal. Appl.* 12 (1978) 159-168.
- [DJKM] E.Date, M.Jimbo, M.Kashiwara and T.Miwa, Transformation groups for soliton equations, *Proceedings of RIMS Symposium Non-linear Integrable Systems - Classical Theory and Quantum Theory*, Kyoto, M.Jimbo and T.Miwa eds. World Scientific (1983) 39-119.
- [Haz] M.Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Academic Press (1978).
- [Hir] F.Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd ed. Springer-Verlag (1966).

- [KSU1] T.Katsura, Y.Shimizu and K.Ueno, New bosonization and conformal field theory over \mathbf{Z} , *Commun. Math. Phys.* 121 (1988) 603-622.
- [KSU2] T.Katsura, Y.Shimizu and K.Ueno, Formal groups and conformal field theory over \mathbf{Z} , *Advanced Studies in Pure Math.* 19 (1989) 347-366.
- [KSU3] T.Katsura, Y.Shimizu and K.Ueno, Complex cobordism ring and conformal field theory over \mathbf{Z} , Preprint (1990).
- [KNTY] N.Kawamoto, Y.Namikawa, A.Tsuchiya and Y.Yamada, Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, *Commun. Math. Phys.* 116 (1988) 247-308.
- [La] P.Landweber(ed.), *Elliptic curves and modular forms in algebraic topology*, *Lecture Notes in Math.* 1326 Springer-Verlag (1988).
- [Li] D.E.Littlewood, *The theory of group characters and matrix representations of groups*, Oxford Univ. Press (1950).
- [MiSt] J.W.Milnor and J.D.Stasheff, *Characteristic Classes*, *Ann. of Math. Studies* 76, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press (1974).
- [Mo] J.Morava, On the complex cobordism ring as a Fock representation, in *Homotopy Theory and Related Topics*, M.Mimura(ed.), Proceedings, Kinokuniya 1988, *Lecture Notes in Math.* 1418, Springer-Verlag (1988) 184-204.
- [MoSh] J.Morava and Y.Shimizu, A topological generalization of the elliptic genus, Preprint (1990).
- [Mu] D.Mumford, An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non-linear equations, *Proceedings of Int. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977*, Kinokuniya Book Store, Tokyo (1978) 115-153.
- [O] S.Ochanine, Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques, *Topology* 26 (1987) 143-151.
- [S] M.Sato, Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold, *Sūriken-Kōkyūroku* 439 (1981) 30-46.
- [SM] M.Sato, Lectures on KP equations (in Japanese), Notes by M.Mulase.

- [SN] M.Sato and M.Noumi, *Soliton equations and universal Grassmann manifold*, Sophia Univ. Kōkyūroku in Math. 18 (1984).
- [Sh] T.Shiota, Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, *Invent. Math.* 83 (1986) 333-382.
- [TK] A.Tsuchiya and Y.Kanie, Fock space representation of the Virasoro algebra - Intertwining operators, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 22 (1986) 259-327.

共形構造と Lie 接触構造について

山口 佳三 北大 理(教養)

序. この小論では表題の2つの幾何構造の関連について述べる.

共形構造を持つ n 次元多様体 M の接球束 $S(M)$ は M の共形構造から定まる接触構造を持つ. さらに M の共形構造は接球束 $S(M)$ 上に Lie 接触構造を導く ($n \geq 3$). この主題は M 上の標準共形接続からさらに $S(M)$ 上の標準 Lie 接触接続を定める様子を記述することである. 詳細は宮岡礼子(東大), 佐藤肇(北大) 両氏の共著の論文に仰する([6]).

この共形構造と Lie 接触構造の定義をいらい, 両者はともに同値問題に対し Cartan 接続で構成される幾何構造である. Cartan 接続は対象空間と model とする等質空間とのずれ (曲率による) を与えるものである. この両者の model 空間の古典幾何と2つの幾何の関連についての記述から始めよう.

1. X-ヒウス幾何と S^1 -球面幾何 (cf. [1], [2])

◎ 球面 S^n 内の超球面の X-ヒウス幾何

$$\text{単位球面 } S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

を射影空間に埋めこまれたものと考え.

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset P^{n+1}(\mathbb{R})$$

$$S^n = \{ [\hat{x}] \in P^{n+1}(\mathbb{R}) \mid (\hat{x}, \hat{x}) = 0 \} = \text{X-ヒウス空間}$$

$$(\hat{x}, \hat{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

S^n を射影空間に埋め込む利点は、次の1対1対応が得られることにある。

$$P^{n+1}(\mathbb{R}) \ni [\xi] : \text{space-like point} \longleftrightarrow S_{[\xi]}^{n+1} = S^n \cap H_{[\xi]} : S^n \text{内の超球}$$

$$\Downarrow$$

$$(\xi, \xi) > 0 \quad H_{[\xi]} = \{ [\hat{y}] \in P^{n+1}(\mathbb{R}) \mid (\hat{y}, \xi) = 0 \};$$

polar hyperplane

$$\{ \text{space-like points} \} \longleftrightarrow \{ \text{hyperspheres in } S^n \}$$

すなわち S^n 内の超球は、 $P^{n+1}(\mathbb{R})$ 内の space-like points によって parametrize される。

◦ Polarity in Möbius geometry

$$(\xi_1, \xi_2) = 0 \iff S_{[\xi_1]} \text{ and } S_{[\xi_2]} \text{ intersects orthogonally}$$

従って $P^{n+1}(\mathbb{R})$ の polarity を保つ射影変換全体

$$L = PO(n+1, 1) : \text{Möbius group}$$

は Möbius 空間 S^n に共形変換の群として作用する。

L は S^n に推移的に働く。共形構造を考慮する場合、 L のリ-環 \mathfrak{l} の持つ gradation が重要である。

$$S^n = L/L' \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{o}(S) \cong \mathfrak{o}(n+1, 1)$$

対称行列 $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_n & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて \mathfrak{l} の元を表現すると

$$\mathfrak{l} \ni X = \begin{pmatrix} a & \xi & 0 \\ \nu & B & {}^t\xi \\ 0 & {}^t\nu & -a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R} \quad B \in \mathfrak{o}(n) \quad \nu, {}^t\xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$$

$$\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{l}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nu & {}^t\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = V \quad \dim \mathfrak{l}_{-1} = n \\ \mathfrak{l}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \right\} \cong \mathfrak{so}(n) \\ \mathfrak{l}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cong V^* \end{array} \right.$$

◎ 球面 S^n 内の向き付けられた超球面のリー-球面幾何

$S^n \subset P^{n+1}(\mathbb{R})$ を $P^{n+2}(\mathbb{R})$ の hyperplane に埋め込む。

$$\parallel \\ P_0^{n+1}(\mathbb{R}) = \{ [Z] \in P^{n+2}(\mathbb{R}) \mid z_{n+2} = 0 \}$$

$P^{n+2}(\mathbb{R})$ 内には Lie quadric Q^{n+1} を考える:

$$Q^{n+1} = \{ [Z] \in P^{n+2}(\mathbb{R}) \mid \langle Z, Z \rangle = 0 \}$$

$$\langle Z, Z \rangle = -z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 - z_{n+2}^2$$

$S^n = Q^{n+1} \cap P_0^{n+1}(\mathbb{R})$ であり、 $P_0^{n+1}(\mathbb{R})$ の space-like points は二様に Q^{n+1} の点に対応する。

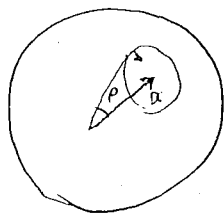
すなわち、次の Q^{n+1} と S^n 内の Kugels = {point spheres} \cup {oriented hyperspheres} との間の一対一対応が得られる。

$$\mathcal{K} = \{ \text{Kugels in } S^n \} \longleftrightarrow Q^{n+1}$$

$$\downarrow \\ \hat{k} = (\mathcal{X}, \rho) \longmapsto \hat{K} = [(\cos \rho, \mathcal{X}, \sin \rho)]$$

$\hat{k} = \{ \mathcal{Y} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y} = \cos \rho \}$: oriented hypersphere with center \mathcal{X} and spherical distance ρ from \mathcal{X} .

$0 \leq \rho < \pi$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \text{ として } S^n \text{ の点 } \mathcal{X} \text{ (point sphere) を表す。} \\ \text{orientation は inward normal である} \end{array} \right.$



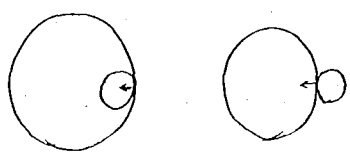
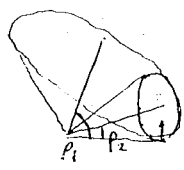
$$\left(\begin{array}{l} Q^{n+1} \text{ の } [Z] \text{ に対して} \\ z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = z_0^2 + z_{n+2}^2 \\ = 1 \text{ として} \\ z_0^2 + z_{n+2}^2 = 1 \text{ (scalar action)} \\ Z_2 = \{ \pm 1 \} \text{-action として} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} z_{n+2} \\ \updownarrow \\ \rho \\ \downarrow \\ z_0 \end{array}$$

◦ Polarity in Lie sphere geometry

$$\langle \hat{k}_1, \hat{k}_2 \rangle = 0 \iff k_1 \text{ and } k_2 \text{ are in oriented contact}$$

実際、

$$\begin{cases} k_1 = (x_1, \rho_1) \\ k_2 = (x_2, \rho_2) \end{cases} \text{ に対して } \langle \hat{k}_1, \hat{k}_2 \rangle = 0 \iff x_1 \cdot x_2 = \cos(\rho_1 - \rho_2)$$



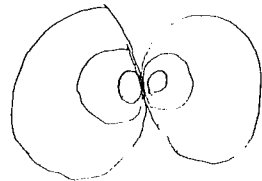
Projective lines on Q^{n+1} and unit tangent vectors in S^n

$$\Lambda = \{ \text{projective lines on } Q^{n+1} \} = \{ 2\text{-dim isotropic subspaces of } (\mathbb{R}^{n+3}, \langle, \rangle) \}$$

を考えると、上記の対応により Λ の元は $S^1 = P(\mathbb{R})$ -family of Kugels を与える

$$\{ S^1\text{-family of Kugels mutually in oriented contact} \} \leftarrow \Lambda$$

$$\langle \hat{k}_1, \hat{k}_2 \rangle = 0 \text{ となる}$$



$$2 \text{ 点 } \hat{k}_1 = [\cos \rho_1, x_1, \sin \rho_1], \hat{k}_2 = [\cos \rho_2, x_2, \sin \rho_2] \text{ の定める}$$

projective line = S^1 -family of Kugels を与える

($(\cos \rho_1, x_1, \sin \rho_1)$ と $(\cos \rho_2, x_2, \sin \rho_2)$ との linear combination を与える)

この family は

unique point sphere $[(1, x, 0)]$: 共通接点

unique geodesic sphere $[(0, y, 1)]$: y は共通 unit normal

を含む。

すなわち

$$T_1(S^n) = \{ (x, y) \in S^n \times S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot x = y \cdot y = 1, x \cdot y = 0 \}$$

に対して

$$T_1(S^n) \longrightarrow \Lambda \text{ は bijective correspondence.}$$

$$(x, y) \longmapsto \text{line through } [(1, x, 0)] \text{ and } [(0, y, 1)]$$

従って $P^{n+2}(\mathbb{R})$ の polarity を保つ射影変換全体

$$G = PO(n+1, 2) : \text{Lie sphere transformation group}$$

は Λ にまた上記の対応により $T_1(S^n)$ に接触変換の群として作用する。

ここで G と Möbius group L との関係に角を付けておく。

$$G_M = \{ \sigma \in G \mid \sigma(P_0^{n+1}(\mathbb{R})) = P_0^{n+1}(\mathbb{R}) \} = \{ \sigma \in G \mid \sigma(S^n) = S^n \} \quad \begin{array}{l} \text{Möbius group} \\ \text{in Lie geometry} \end{array}$$

$$(\because S^n = \mathbb{Q}^{n+1} \cap P_0^{n+1}(\mathbb{R}))$$

もし G の部分群群を考えると L と G_M の関係は次の通りである。

$\forall \tau \in L, \tau: S^n \rightarrow S^n$: conformal 変換は $T_1(S^n)$ の変換として二様に lift する。

$$\tau^\pm: T_1(S^n) \rightarrow T_1(S^n)$$

$$\underline{v} \longmapsto \pm \frac{\tau_*(v)}{\|\tau_*(v)\|}$$

このとき上記の対応の下 $\tau^\pm \in G$ であり

$$G_M = \{ \tau^\pm \mid \tau \in L \} \quad \text{と} \text{ なる。}$$

$G_M^+ = \{ \tau^+ \mid \tau \in L \}$ は L と同型な G_M の open subgroup である。以後 L と G_M^+ を同一視して $L \in G$ の部分群群と考えることにする。

G は Λ に従って $T_1(S^n)$ に推移的に働く。Lie 接触構造を考慮する場合 G のリ-環の持つ gradation が重要である。

$$T_1(S^n) = G/G' = L/\hat{L} \quad \hat{L} = L \cap G'$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(S) \cong \mathfrak{o}(n+1, 2)$$

対称行列 $\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_2 \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて、 \mathfrak{g} の元を表現すると

$$\mathfrak{g} \ni X = \begin{pmatrix} a & {}^t D & f \\ c & B & D \\ e & {}^t c & -{}^t a \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \quad B \in \mathfrak{o}(n-1) \\ c, D \in M(n-1, 2) \quad e, f \in \mathfrak{o}(2) \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \\ \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & +c & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & -^t a \end{pmatrix} \right\} \\ \mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & +D & 0 \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{array} \right.$$

linear isotropy representation $\rho: G' \rightarrow GL(\mathfrak{m}) \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\sigma = \text{Ad}(A)} & \mathfrak{g} \quad G = \text{Ad}(O(\mathbb{S})) \\ \downarrow & & \downarrow \sigma \in G' \\ \mathfrak{m} & \xrightarrow{\rho(\sigma)} & \mathfrak{m} \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} a & D^+ & J^* \\ 0 & B & D \\ 0 & 0 & +^t a^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \rho(A) = \begin{pmatrix} (\det a)^{-1} & 0 \\ \xi & B \otimes a \end{pmatrix}$$

よって $B \otimes a(c) = B c a^{-1}$

$\tilde{G} = \rho(G')$ linear isotropy subgroup

$$\tilde{G} = \left\{ \hat{A} \in GL(\mathfrak{m}) \mid \hat{A} = \begin{pmatrix} (\det a)^{-1} & 0 \\ * & B \otimes a \end{pmatrix} \quad B \in O(n-1) \quad a \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$$

2. 共形構造と Lie 接触構造

◦ 共形構造 (Conformal structure)

n -次元多様体 M 上の共形構造は M の linear frame bundle $F(M)$ の構造群 $GL(n, \mathbb{R})$ の $CO(n)$ への reduction とは与えられる。

$$\begin{array}{c} CO(n) \rightarrow CO(M) \subset F(M) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

すなわち $CO(M)$ は $\forall x \in M$ において $T_x(M)$ の内積を constant mod で定めている。($T_x(M)$ に角度や直交性を定めている)

共形構造の場合、flat (integrable) の model $\mathbb{R}^n \times CO(n)$ (trivial bundle) の infinitesimal automorphism の Lie 環は、よく知られているように (cf [4])

$$V = \mathbb{R}^n \text{ と } \tau$$

$$V \oplus \mathfrak{so}(V) \oplus V^* \cong \mathfrak{L}$$

で与えられる。 $V \oplus \mathfrak{so}(V)$ より \mathfrak{L} を求める操作は prolongation とよばれる。

この操作に対応して $CO(M)$ は M の frame bundle of second order $F^2(M)$ の L' -subbundle Q を定め (ここに L' は isotropy subgroup of

L over $S^n = L/L'$, さらに Q 上の Cartan connection ω_L of type $L/L' = S^n$ を定める (cf [4], [3]).

$$\begin{array}{c} L' \rightarrow Q \subset F^2(M) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

Normal conformal connection ω_L は次の条件により Q 上一意に定まる $\omega_L = \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1$, $\Omega = d\omega_L + \frac{1}{2}[\omega_L \wedge \omega_L]$ 曲率

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \omega_{-1} + \omega_0 \text{ は } Q \subset F^2(M) \text{ の canonical 1-form } (\Leftrightarrow \Omega_{-1} = 0) \\ \text{(ii)} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Omega_0(e_i^*, v^*)(e_i) = 0 \quad \text{for } v \in \mathfrak{l}_{-1} \end{array} \right.$$

$\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$: basis of $V = \mathfrak{l}_{-1}$

$$v^* = \omega_L'(v)$$

Remark (ii) $\Leftrightarrow \partial^* \Omega_0 = 0 \Leftrightarrow \partial^* \Omega = 0$ (ii) of [2])

$\therefore \partial^*$ は Spencer complex の adjoint operator (cf [3])

• Lie 接触構造 (Lie contact structure)

まず接触多様体の定義の復習から始めよう。

(N, D) を $2n-1$ 次元の接触多様体とする。

すなわち N は $2n-1$ 次元の多様体であり

$D \subset T(N)$: contact distribution は接束 $T(N)$ の余次元 1 の部分束であり

$V_p \subset N$ の近傍で D は \exists 1-form ω を用いて

$$D = \{\omega = 0\} \quad \text{と定義され } \omega \wedge (d\omega)^{n-1} \text{ は volume form となる。}$$

従って $d\omega$ は D の各 fibre に symplectic structure を定める。

ω の取り方は nowhere zero 函数 λ の任意性があるから D には conformal symplectic structure が定まるといえる。

この D の conformal symplectic structure は N の linear frame bundle $F(N)$ の subbundle $F_c(N)$: the bundle of adapted frames to (N, D) を次のように定める。

$$F(N) \supset F_c(N) = \{ \mathcal{Z} = (X_0, X_1, \dots, X_{2(n-1)}) \in F(N) : \text{frame at } p = \pi(\mathcal{Z}) \in N \}$$

X_0 is transversal to $D(p)$, $\{X_1, \dots, X_{2(n-1)}\}$ forms a basis of $D(p)$
such that $\omega(X_0) = 1$ is a contact form $\omega \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$

$\{X_1, \dots, X_{2(n-1)}\}$ is symplectic basis of $(D(p), d\omega)$

$$\left(\text{i.e. } \begin{cases} d\omega(X_i, X_{n+i-1}) = 1 & (i=1, 2, \dots, n-1) \\ d\omega(X_i, X_j) = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \}$$

このとき $F_c(N)$ の構造群 C は次で与えられる。

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ * & A \end{pmatrix} \mid \langle A(v), A(w) \rangle = c \langle v, w \rangle \right\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

特に $\tilde{G} \subset C$ である。

接触多様体 (N, D) 上の Lie 接触構造は $F_c(N)$ の構造群 C の \tilde{G} の reduction と呼ばれる。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \longrightarrow & \tilde{P} \subset F_c(N) \\ & & \downarrow \\ & & N \end{array}$$

例: リーマン多様体 (M, g) の単位接束 $T_1(M)$ (次のように metric g から定まる Lie 接触構造を持つ)。

$$\alpha \in T_1(M) \text{ 上の canonical 1-form とする, } \alpha_v(X) = g(v, p_* X) \quad v \in T_1(M)$$

$p: T_1(M) \rightarrow M$

$\alpha = 0$ は $T_1(M)$ 上に contact distribution を定める。

M の orthonormal frame bundle $O(M)$ は $T_1(M)$ 上の $O(n-1)$ -bundle と見做す。

$$\begin{array}{ccc} O(M) & & \\ \downarrow \tilde{u} & \searrow & T_1(M) \\ M & \swarrow & \end{array}$$

$u(e_i) = \partial_i$

$$u: \mathbb{R}^n \rightarrow T_x(M) : \text{isometry}$$

$$e_i \mapsto u(e_i) = \partial_i$$

$$\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \text{ on } B \text{ of } T_x(M)$$

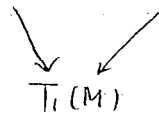
さらに $O(n-1) \rightarrow O(M)$ は、次の様に $F_c(T_1(M))$ の \tilde{G}_0 -subbundle を定める。
 \downarrow
 $T_1(M)$ ($\tilde{G}_0 \cong O(n-1)$)

$\forall u \in O(M)$ に対して $v = u_0 \in T_1(M)$, $p: T_1(M) \rightarrow M$ において
 u_0, \dots, u_{n-1} は $T_x(M)$ の basis であるから

v における horizontal lifts $u_0^H, \dots, u_{n-1}^H \in T_v(T_1(M))$
 vertical lifts $u_1^V, \dots, u_{n-1}^V \in T_v(T_1(M))$

が考えられる。このとき $\gamma(u) = \{u_0^H, u_1^H, \dots, u_{n-1}^H, u_1^V, \dots, u_{n-1}^V\}$ は $T_1(M)$
 の v における adapted frame である。

すなわち $\gamma: O(M) \rightarrow F_c(T_1(M))$ が定まる。



$\gamma(O(M)) = F_0(T_1(M))$ は $F_c(T_1(M))$ の subbundle であり、その構造群
 \tilde{G}_0 は

$$\tilde{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \otimes I_n \end{pmatrix} \mid B \in O(n-1) \right\} \subset \tilde{G}$$

で与えられる。よって構造群 \tilde{G} を拡張して

$$\tilde{D}(T_1(M)) = F_0(T_1(M)) \times_{\tilde{G}_0} \tilde{G}$$

は $T_1(M)$ 上の Lie 接触構造を定める。

Lie 接触構造に対して、その model 空間 $G/G' = T_1(S^n)$ で与え
 られるのは

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{-2} \oplus \mathcal{G}_{-1} \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \quad \mathcal{M} = \mathcal{G}_{-2} \oplus \mathcal{G}_{-1}$$

が $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_0)$ の prolongation であるという代数的事実による。

Lie 接触構造に対して次の回中 [18][19] に与えられた定理に基本的
 である。

定理 ((回中[19]))

接触多様体 (N, D) 上の Lie 接触構造に対して N 上の Cartan
 connection (P, ω) of type $G/G' = T_1(S^n)$ の Normality の下、一意的に (up to isomorphism)
 構成される。

この定理により構成される (P, ω) を Normal Lie contact connection とする。

(P, ω) に対する Normality の条件は次のように与えられる。

曲率 $K = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$ に対して

$K = K(\omega \wedge \omega)$ として K は $\mathfrak{g} \otimes \Lambda^2(M^*)$ に値を持つ P 上の関数と考慮される。

M の \mathfrak{g} 上の表現 $\text{ad}: M \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対して直列 (generalized Spencer) complex $(C^i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \Lambda^i M^*, \partial)$ の adjoint operator ∂^*

$$\partial^*: C^{i+1}(\mathfrak{g}) \rightarrow C^i(\mathfrak{g})$$

と取る。 \mathfrak{g} の gradation を用いて $C^2(\mathfrak{g})$ を和分解して

$$C^{p,2}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_{p-2} \otimes (\mathfrak{g}_{-2}^* \otimes \mathfrak{g}_{-1}^*) \oplus \mathfrak{g}_{p-1} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{g}_{-1}^*$$

と定める。 K は $C^2(\mathfrak{g})$ -valued function であるから

$$C^2(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{p=-1}^4 C^{p,2}(\mathfrak{g}) \quad \text{として}$$

$$K = K^{-1} + K^0 + \dots + K^4$$

と分解する。

このとき (P, ω) の Normal condition は

$$\begin{cases} \text{(i)} & K^{-1} = 0 \\ \text{(ii)} & \partial^* K^p = 0 \quad (p \geq 0) \quad (\Leftrightarrow \text{(i) の } T \text{ 上 } \partial^* K = 0) \end{cases}$$

で与えられる。

Induced Lie contact structure on $S(M)$

M の共形構造から M の接球束 $S(M)$ 上の Lie 接角構造を導く様子を記述しよう。

n -次元多様体 M に共形構造が与えられているとし $S(M)$ を M の接球束とする。

$$S(M) = \dot{T}(M)/\mathbb{R}^\times \xleftarrow{\kappa} \dot{T}(M)$$

$$[\nu] \xleftarrow{\nu} \nu$$

与 \$M\$ の共形構造は \$S(M)\$ の接触構造を次のように定める。

$$\forall [v] \in S(M) \text{ において } x = p(v) \in M$$

$$T_x(M) = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp \quad \text{と直交分解する (この分解は変形構造を決る)}$$

$$\begin{array}{c} \hat{p}_* \uparrow \\ T_{[v]}(S(M)) \supset D([v]) = \hat{p}_*^{-1}(\langle v \rangle^\perp) \\ \text{codim } 1 \end{array}$$

このとき

$(S(M), D)$ は接触多様体となる。

一方、\$M\$ の共形構造は \$M\$ の Frame bundle of second order $F^2(M)$ 内に \$L^1\$-subbundle Q を定める (cf [3])。

$$Q = \left\{ \int_0^2(f) \mid f: (V, 0) \rightarrow (M, f(0)) : \text{local diffeo.} \right. \\ \left. \text{structure preserving to order 1} \right\}$$

Q は \$M\$ 上 second order の構造であるが、以下のように \$S(M)\$ 上の first order の構造を与える。

S^n は変形構造の flat model であるから、

$$\forall z \in Q \text{ に対して}$$

$$z = \int_0^2(f) \quad f: (S^n, 0) \rightarrow (M, f(0)) : \text{local diffeo}$$

によって represent されることになる。

f は local bundle iso

$$\begin{array}{ccc} f_* : T(S^n) & \rightarrow & T(M) & \text{を induce する。} \\ (x, \xi) & \mapsto & (f(x), \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(\xi)) \end{array}$$

よって z は $\forall v \in T_0(S^n)$ への 1-jet $\int_0^1(f_*)$ を定めている。

$$v_0 \in T_1(S^n) \cap T_0(S^n) \text{ を fix するときは}$$

$$f_* : T(S^n) \rightarrow T(M) \text{ はさらに}$$

$$\begin{array}{ccc} T_1(S^n) \subset \dot{T}(S^n) & \xrightarrow{f_*} & \dot{T}(M) \\ \searrow \int_0^1 & \downarrow & \downarrow \\ S(S^n) & \xrightarrow{\hat{f}_*} & S(M) \end{array} \quad \text{を induce する。}$$

このとき z は $\int_{[v_0]}^1(\hat{f}_*)$ (or $\int_{v_0}^1(\hat{f}_* \circ \int_0^1)$) を定めている。

特許に $\hat{\pi}: Q \rightarrow S(M)$ は well-defined
 $z = \int_0^1 \dot{\gamma}(t) \mapsto \hat{\pi}(z) = [\dot{\gamma}_*(v_0)]$: oriented line
 determined by $\dot{\gamma}_*(v_0)$

よって $z = \int_0^1 \dot{\gamma}(t) \in Q$ $f: (S^n, \sigma) \rightarrow (M, \alpha)$: local diffeo
 と $\forall a \in L'$ には $\dot{\gamma}_*(a) = z \cdot a \in Q$ には

$$z \cdot a = \int_0^1 \dot{\gamma}(t) \cdot a \quad (S^n, \sigma) \xrightarrow{a} (S^n, \sigma) \xrightarrow{f} (M, \alpha)$$

と represent される。

従って $\hat{\pi}: Q \rightarrow S(M)$ には $z \in Q$ は $S(M)$ 上の \hat{L} -bundle である。

$$\begin{array}{ccc} \hat{L} & \rightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(M) & & \end{array} \quad \hat{L} = \{ a \in L' \mid [a_*(v_0)] = [v_0] \} : \text{isotropy at } v_0 \in T_1(S^n)$$

すなわち $T_1(S^n) = L / \hat{L}$

さらに $z = \int_0^1 \dot{\gamma}(t) \in Q$ には $\int_{[v_0]} \hat{f}_*$ (or $\int_{v_0} (\hat{f}_* \circ \delta)$) を定めよう。

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & F(S(M)) \\ \hat{\pi} \searrow & & \downarrow \pi \\ & & S(M) \end{array} \quad \mathcal{Z}: Q \rightarrow F(S(M))$$

$$z = \int_0^1 \dot{\gamma}(t) \mapsto \int_{[v_0]} \hat{f}_* \quad \text{を定めている。}$$

このとき $f: (S^n, \sigma) \rightarrow (M, \alpha)$: structure preserving to order 1 であり

$$\mathcal{Z}(Q) \subset F_c(S(M)) \text{ となっている。}$$

よって $\hat{L} = G' \cap L$ は G' の部分群である。

linear isotropy representation $\rho: G' \rightarrow GL(m)$ は \hat{L} に制限して faithful である。すなわち $\hat{L} \cong \rho(\hat{L})$ は \tilde{G} の部分群である。

よって $\mathcal{Z}: Q \rightarrow F_c(S(M))$ は $\rho: \hat{L} \rightarrow GL(m)$ に対応する bundle iso (into) であり従って

$\mathcal{Z}(Q)$ は $S(M)$ 上の $\rho(\hat{L})$ -subbundle $\subset F_c(S(M))$ を定めている。 $\rho(\hat{L}) \subset \tilde{G}$ より 構造群を拡大して Q は

$$\tilde{P}(S(M)) = \mathcal{Z}(Q) \times_{\rho(\hat{L})} \tilde{G}$$

すなわち Lie 接触構造を $S(M)$ 上に定めている。

M に与えられた共形構造 (metric or conformal class \mathcal{G}) に属する metric $g \in \mathcal{G}$ を fix するときは, $O_g(M)$ は Riemann 接続を用いて Q は subbundle として埋めこめる.

$$O_g(M) \xrightarrow{\gamma} Q \xrightarrow{\tau} F_c(S(M))$$

このとき $\kappa: T_1^g(M) \rightarrow S(M)$: contact diffeo に対応して

$$\kappa_*: F_0(T_1^g(M)) \rightarrow F_c(S(M))$$

の像は $O_g(M)$ の τ の像と一致する.

すなわち $\kappa: T_1^g(M) \rightarrow S(M)$ は Lie isomorphism である.

$$\tau(Q) = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \kappa_*(F_0(T_1^g(M)))$$

である (cf. [7]).

4. Conformal contact connection and Normal Lie contact connection on $S(M)$

Normal conformal connection ω_L は $Q \rightarrow M$ 上の Cartan connection of type $L/L' = S^n$ であるから, 構造群を小さくして考えよう.

$$\pi: Q \rightarrow S(M)$$

上定義された Cartan connection of type $L/\hat{L} = T_1(S^n)$ を与える.

これを $S(M)$ 上の Conformal contact connection と呼ぶ.

$\hat{L} = L \cap G' \subset G'$ より 構造群を拡張して

$$P = Q \times_{\hat{L}} G' \rightarrow S(M)$$

この G' -bundle を \mathcal{P} とする.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{l} &= \mathfrak{l}_- \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_+ \\ &= \hat{\mathfrak{m}} \oplus \hat{\mathfrak{l}} \subset \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g} &= \hat{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{g}' = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \hat{\mathfrak{l}}: \text{Lie algebra of } \hat{L} \\ \text{より} \end{array}$$

Normal conformal connection ω_L は P 上の Cartan connection ω of type $G/G' = T_1(S^n)$

に次のように拡張される。

$$\forall u \in P \quad \forall X \in \hat{\mathfrak{m}} \quad \text{に対し} \\ X_u^* = R_{\sigma_*} (Ad(\sigma)X)_z^* \quad \text{と定める.}$$

$$\text{ここに } u = z \cdot \sigma \quad z \in Q \quad \sigma \in G'$$

このとき $\omega(X^*) = X$ と定められる ω は Cartan connection of type $G/G' = T_1(S^n)$ である。

我々の主張は次にある。

Claim

(P, ω) は Normal Lie contact connection on $S(M)$

証明は Conformal contact connection より上記のように構造群を拡張して得られる Cartan connection (P, ω) of type $G/G' = T_1(S^n)$ が Lie contact connection の Normality を満たしていることと、 ω の Normal condition より導くことができる。詳細は [6] を参照のこと。

定理

$S(M)$ 上の Induced Lie contact structure に対して
その Normal Lie contact connection (P, ω) は
 Q 上の conformal contact connection に reduce される。

この定理は宮田 [5] により得られた結果を整理してのことである。この定理は $S(M)$ 上の Induced Lie contact structure の connection までとめて、実質的に M 上の conformal structure まで reduce されることを示している。

References

- [1] W. Blaschke ; *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, vol 3, Springer, Berlin (1929)
- [2] T. Cecil and S. Chern ; *Tautness and Lie Sphere Geometry*, *Math. Ann.* 278 (1987), 381-399
- [3] V. Guillemin ; *The integrability problem for G-structures*, *Trans A.M.S.* 116 (1965), 544-560
- [4] S. Kobayashi ; *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1972)
- [5] R. Miyaoka ; *Lie contact structures and conformal structures*, to appear in *Kodai Math J.*
- [6] R. Miyaoka, H. Sato and K. Yamaguchi ; in preparation
- [7] H. Sato and K. Yamaguchi ; *Lie contact manifolds*
"Geometry of Manifolds (edited by K. Shiohama)", Acad Press, Boston (1989), 191-238.
- [8] N. Tanaka ; *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections*, *Japan. J. Math.* 2 (1976), 131-190
- [9] N. Tanaka ; *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras*, *Hokkaido Math. J.* 8 (1979), 23-84.