１９９０年度談話会アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by Y. Giga & Y. Watatani

Series ♯ 21. June, 1991

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何 " 研究集会報告集,1988.
♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.
♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989
♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.
♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.
♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

1990年度 談話会アブストラクト

経済時系列の因果解析

滋賀大経済　中野裕治

1 検定 (S)

経済構造は時間の推移とともに変化していくといわれる．その変化のパターンは多岐にわたると考えられるが，数学的現象としてとらえた場合，最初定常状態にあったものが時間の経過と共に崩れていくのも一つの側面といえる．このことを時系列解析の立場からみれば，ある有限時間内では弱定常過程の実現値とみなせる経済データが，内部からの変化だけでなく外部からなんらかのインパクトが加わったりして，弱定常過程の実現値とみなせなくなることを意味する．

一方通常の時系列解析は **ARIMA-model** を仮定するが，このことはとりもなおさず最初からデータの弱定常性を無条件に認めて議論を展開しているのとおなじである．

従って時系列解析，とりわけ経済時系列解析でまず重要なことは，有限個の時系列データが与えられたとき，それらが弱定常過程の実現値と見なせるかどうかを検定することである．私達は KM_2O-ランジュバン方程式の応用として，この問題に対する回答として検定 (S) を提案する．

2 因果解析

ある経済時系列どうしが互いに影響しあったり，あるいはその影響が一方的であったりすることは，経済学者の間で経験的に論じられている．またそのことに関する定義は C.W.J. Granger [1] によって与えられた．この定義は，弱定常過程の場合は KM_2O-ランジュバン方程式の応用として定理の形で与えることが出来る．

しかしながら，Granger の定義自体は時系列間の因果の定義そのものではなく，それは Y. Okabe and A. Inoue [4] によって与えられている．それと同時にそのための判別定理も用意されている．

経済時系列間で因果関係を捉えることは容易ではなく，

(1) Y. Okabe and A. Inoue の判別定理

(2) KM_2O-ランジュバン方程式の応用としての時系列どうしの影響の評価

によって分析をすすめたらよいと考える．

ところで，経済時系列では一つの変量に複数の変量がそれぞれ影響を与えることがある．この時どの変量が一番強い影響を与えているであろうか．この問題については，Y. Okabe [3] によって見本エントロピーの概念の立場から詳しく研究されている．

3 実証分析

経済時系列として特に重要な，円－ドル交換レート，卸売物価指数，公定歩合に上記の理論を応用した．データの期間は1978年7月から1986年11月までの101ケ月の月次データである．

以下の結果を得た（ただし，データの期間を少しずらしても結論は変わらない）．

［1］一階の階差をとったデータは，それぞれのペアが2次元の時系列データとして，弱定常過程の実現値になっていることが統計的に検定できる．

［2］円－ドル交換レートは卸売物価指数に影響を与えるが，逆の関係はない．

［3］卸売物価指数は公定歩合に影響を与えるが，逆の関係はない．

［4］公定歩合と円－ドル交換レートは互いに影響を与えあう．

［5］卸売物価指数の方が，円－ドル交換レートより公定歩合に強く影響を与える．

以上の結果は日本経済における，3変量の位置を合理的に説明している．特に公定歩合がそれほど強い変量でなく，間接的に卸売物価指数に影響を与えていることが，与えられたデータの枠組の中で客観的に推論される．

参考文献

[1] Granger, C.W.J., *Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods* , Econometrica. 37(1969) , 424-438.

[2] Okabe, Y. and Nakano, Y., *The theory of* KM_2O*- Langevin equations and its applications to data analysis* (I), to appear in H.M.J..

[3] Okabe, Y., ランダム現象の定常性，因果性と異常性，　日本数学会予稿集(1988).

[4] Okabe, Y. and Inoue, A., *The theory of* KM_2O*- Langevin equations and its applications to data analysis* (II), to appear.

A General Class of Infinite Dimensional Dirac Operators and Infinite Dimensional Analysis

Asao Arai

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

We present a general framework for infinite dimensional analysis, which is given by a quintuple $\{E, H, \mu, K, A\}$ consisting of a real locally convex topological vector space E, a real separable Hilbert space H densely and continuously embedded in E (we denote by H_c its complexification), a probability measure μ on E, a real separable Hilbert space K, and a densely defined closed linear operator $A : H_c \to K_c$ such that H reduces the self-adjoint operator A^*A. Let $\wedge^p(K_c)$ be the p-fold antisymmetric tensor product ($\wedge^0(K_c) = \mathbb{C}$). For each p, we first define a de Rham type operator $d_{A,p} : L^2(E, d\mu; \wedge^p(K_c)) \to L^2(E, d\mu; \wedge^{p+1}(K_c))$ satisfying $d_{A,p+1}d_{A,p} = 0$. The Laplacians associated with these de Rham operators are defined. Some decomposition theorems of de Rham-Hodge-Kodaira type can be proved concerning these de Rham operators. In terms of the de Rham operator lifted to the Hilbert space

$$\wedge(E, K) = L^2(E, d\mu; \oplus_{p=0}^{\infty} \wedge^p (K_c)),$$

we define operators of Dirac type in $\wedge(E, K)$. Moreover we generalize these Dirac operators. In application to physics, the general class so defined gives a unified description for some supersymmetric quantum field models such as Wess-Zumino models. We discuss also the path integral representation of the Fredholm index of the Dirac operators restricted to the "even forms".

References

1. A. Arai, *Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold*, J.Funct.Anal. **82** (1989), 330-369.

2. A. Arai, *A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index*, Hokkaido Univ. Preprint Ser. in Math. **61** (1989).
3. A. Arai and I. Mitoma, *De Rham-Hodge-Kodaira decomposition in ∞-dimensions*, Hokkaido Univ. Preprint Ser. in Math. **76** (1990).

Diffeomorphisms of $\mathbb{C},0$

– SEPARATERIX FOR CONFORMAL TRANSFORMATION GROUPS OF $\mathbb{C},0$ –

ISAO NAKAI

Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060 Japan

The topology of germs of holomorphic diffeomorphisms of at the origin is regarded from many different view points such as the moduli of differential equations [4], the projetive holonomy of singular 1-forms [5,12], the nonisolated singularities of map germs [15], the groups generated by involutions [18] and algebraic correspondences. Recently Il'yaashenko and Shcherbakov [9,17] pointed out that solvable groups acting on ,0 possess special topological properties. The purpose of this paper is to investigate some topological properties of orbits. A *separaterix* $\Sigma(G)$ for a group G of germs of holomorphic diffeomorphisms of ,0 is a union of finite jordan arcs with the end 0 such that generic orbits are dense or empty in each connected component of $-\Sigma(G)$ nearby 0. We prove the existence and uniqueness of the separaterix for nonsolvable groups. Extending the method we prove the topological rigidity theorem which asserts that topological and holomorphic classifications are the seme for generic group actions.

In this paper we consider pseudogroups Γ consisting of diffeomorphisms $f : U_f, 0 \to f(U_f), 0$ of open neighbourhoods U_f of the complex plane respecting 0. We call the group Γ_0 of the germs of those $f \in \Gamma$ the germ of Γ, and call Γ a representative of Γ_0.

Let Γ' be a pseudogroup and Γ'_0 the germ of Γ'. We say that Γ and Γ' are *topologically conjugate* (respectively *holomorphically conjugate*) if there exists a homeomorphism (resp. holomorphic diffeomorphism) h : $U, 0 \to h(U), 0$ of open neighbourhoods of the origin such that $U_f \subset U, U_g \subset h(U)$ for $f \in \Gamma, g \subset \Gamma'$ and a bijection of $\phi : \Gamma \to \Gamma'$ inducing a group isomorphism of their germs at 0 such that $U_{\phi(f)} = h(U_f)$ and $h \circ f = \varphi(f) \circ h$ hold for $f \in \Gamma$. We call h a *linking homeomorphism* (resp. *linking diffeomorphism*). We say that the germ Γ_0, Γ_0' are *topologically* (resp. *holomorphically*) *conjugate* if they admit representatives, which are so.

We say that a subset $A \subset$ is *invariant under* Γ if $f(A \cap U_f) = A \cap f(U_f)$ for all $f \in \Gamma$. We call a minimal invariant set an *orbit*. The orbit containing an x is unique and denoted $\mathcal{O}(x)$, which is the set of those $f(x)$ with $x \in U_f, f \in \Gamma$. Let B_f denote the set of those $z \in U_f$ such that $f^{(n)}(x) \to 0$ as $n \to \infty$, where $f^{(n)}$ stands for the n-iteration $f \circ \cdots \circ f$. If f has the identical linear part (*flat* at the origin), $B_f \cup B_{f^{(-1)}}$ is a neighbourhood of 0. The *basin* B_Γ is the set of those z for which the closure of the orbit contains the origin. We can show that the basin is an open neighbourhood of the origin if an $f \in \Gamma$ is flat.

The *separaterix* $\Sigma(\Gamma)$ for Γ is a union of disjoint closed smooth real analytic curves in $B_\Gamma - 0$, which possesses the following properties.

(1) $\Sigma(\Gamma)$ is invariant under Γ

(2) The germ of $\Sigma(\Gamma)$ at 0 is a union of finite curves

(3) Any obrit is dense or empty in each connected component of $B_\Gamma - 0 - \Sigma(\Gamma)$.

(4) Any subunion of the connected components of $\Sigma(\Gamma)$ does not possesses the above properties.

The purpose of this paper is to prove the following theorem.

Theorem 1. (The separaterix theorem). *If the germ Γ_0 of a pseudogroup Γ is non-solvable, then Γ admits a unique separaterix $\Sigma(\Gamma)$. The germ of the separaterix at the origin is a disjoint union of smooth real analytic curves, which have all disjoint tangent directions. Assume that the domains of definition $U_f, f \in \Gamma$ are contained in a neighbourhood U of the origin. For sufficiently small U, the germ of $\Sigma(\Gamma)$ at the origin is determined by the germ Γ_0, and denoted $\Sigma(\Gamma_0)$.*

The theorem is proved by a microscopic observation of the orbit structure nearby the origin. More precisely we observe the local dynamics at a $z \in B_f$ defined by $f^{(-n)} g^{(m)} f^{(n)}$, $m = 0, 1, , \ldots$ with a sufficiently large fixed n. When f, g are respectively i-*flat*, j-*flat*($f(z) = z + az^{i+1} + \cdots, g(z) = z + bz^{j+1} + \cdots$) and

$i < j$, the dynamics is convergent to the identity as $n \to \infty$ but a suitable real scalar multiple $\lambda_n(f^{(-n)}gf^{(n)} - id)$ is convergent to a holomorphic vector field denoted $\chi(f,g)$ defined on B_f. By defintion the trajectory passing through z is arbitrary closely approximated by the orbit of type $f^{(-n)}g^{(m)}f^{(n)}(z), m = 0,1,2,\ldots$ with a sufficiently large n, so the vector field $\chi(f,g)$ is a time-preserving topological invariant. When the germ Γ_0 is non-solvable, Γ admits many dynamics of this type, which generate dense orbits nearby z. The separaterix theorem is proved by this local density of orbits.

When Γ is topologically conjugate with a Γ', the linking homeomorphism h respects those holomorphic vector fields as well as the orbit structure. By the topological rigidity of generic pairs of holomorphic vector fields, we obtain the following theorem.

Theorem 2. (Topological rigidity theorem). *Assume that pseudogroups Γ, Γ' are topologically conjugate and the germs Γ_0, Γ'_0 are non-solvable. Then the restriction of the linking homeomorphism $h : B_\Gamma \to B_{\Gamma'}$ is a holomorphic or anti-holomorphic diffeomorphism respectively whether h is orientation preserving or not.*

By a recent result by Cerveau and Moussu [4], holomorphic classification of non exceptional groups acting on ,0 coinsides with the formal classification. This together with the topoological rigidity theorem suggests that topological properties are determined by the formal conjugacy classes.

References

1. I.N. Baker, *Fractional iteration near a fix poing of multiplier 1*, J. Australian Math. Soc. (1964), 143–148.
2. A.D. Brjuno, *Analytic form of differential equations*, Transaction Moscow Math. Soc. (1971), 131–288.
3. C. Camacho, *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields*, Astérisque (1978), 83–84.
4. D. Cerveau, R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de et équations differentialles* $+ \cdots = 0$, Bull. Soc. Math. France (1988).
5. D. Cerveau, P Sad, *Problémes de modules pour les formes differentialles singuliéres dans le palan complexe*, comment. Math. Helvetici (1986), 222–253.
6. J. Ecalle, *Les fonctions Résurgentes I-III*, preprints in Université de Paris, Orsay.
7. P. Fatou, *Sur let équations fonctionelles*, Bull. S.M.F. (1920), 208–304.
8. G-M, *The transverse dynamics of a holomorphic flow*, Ann. Math. (1988), 49–92.

9. S. Il'yashenko, *The topology of phase portraits of analytic differential equations in the comples projective planes*, Trudy Sem Petrovsky (1978), 83–136.
10. T. Kimura, *On the iteration of analytic functions*, Funk. Equacioj (1971), 197–238.
11. V.P. Kostov, *Versal deformation of differential forms of degree on a line*, Funct. Anal. App. (1985), 335–337.
12. A. Lins Neto, *Construction of singular holomorphic vector fields a and foliations in dimension two*, J. Differential Geometry (1987), 1–31.
13. J. F. Mattei, R. mousse, *Holonomie et intégrales premiere*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (1980), 469–523.
14. J. Martinet, *Remarques sur la bifurcation Noeud-col dans le domaine complexe*, Asterisque (1987), 131–149.
15. I. Nakai, *On tooplogical types of polynomial mappings*, Topology (1984), 45–66.
16. ———, *Topology of comlex webs of codimension one and georetry of projective space curves*, Topology (1987), 475–504.
17. A.A Scherbakov, *Topological and analytic conjugation of non commutative groups of conformal mappings*, Trudy Sem. Petrovsk (1984), 170–192, 238–239.
18. S.M. Volonin, *Analytic classification of germs of maps* $(0) \to (0)$ *with identical linear part*, Funct. Anal. (1981), 1–17.
19. ———, *Analytic classification of pairs of involutions and its applications*, Funct. Anal. (1982), 94–100.

Schrödinger Group の Smoothing Effect

小澤徹，名古屋大学理学部数学教室，〒464 名古屋市千種区不老町

Hilbert 空間 $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ において Schrödinger 作用素 $H_0 = -(1/2)\Delta$ および $H = H_0 + V$ を考える．V は実数値関数による掛算作用素とし Kato 型とする．このとき Kato-Rellich の定理により H は定義域 $D(H) = D(H_0)$ をもつ自己共役作用素となる．Schrödinger semigroup $\{e^{-tH}; t \geq 0\}$ は $t > 0$ に対し L^2 を $\bigcap_{k \geq 0} D(H^k)$ に写すから，$D(H^k) = D(H_0^k)$ なる k に対して e^{-tH} は Sobolev 空間の scale で smoothing effect をもつことになる．Schrödinger semigroup の smoothing effect については Simon [16][17] に幾つか関連した結果がある．

一方 Schrödinger group $\{e^{-itH}; t \in \mathbb{R}\}$ は関数の regularity と decay を保つことが知られている (Hunziker [6], Radin-Simon [15], Ozawa [13])．e^{-itH} は L^2 上 unitary であるから，e^{-itH} によって関数の regularity が良くなることは通常の Sobolev 空間の枠組では期待できない．しかし重みのついた Sobolev 空間において e^{-itH} を捉えるとその smoothing effect を記述することができる．例えば最も簡単な場合 $V = 0$ のとき公式 $(x + it\nabla)e^{-itH_0} = e^{-itH_0}x$ によって $(1+|x|)^k\phi \in L^2$, $k \in \mathbb{N}$, なる初期値 ϕ に対し $e^{-itH_0}\phi \in H^{k,-k}$ $(t \neq 0)$ がなりたつ．ここで $H^{m,s}$, $m, s \in \mathbb{R}$ は重みのついた Sobolev 空間 $H^{m,s} = \{\psi \in \mathcal{S}'; \|\psi\|_{m,s} = \|(1+|x|^2)^{s/2}(1-\Delta)^{m/2}\psi\| < \infty\}$ で $\mathcal{S}'$ は tempered distribution のなす空間，$\|\cdot\|$ は L^2-norm を表す．

結果を述べる為に次の記号を導入する．

<u>記号</u>　$\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数 W に対し，$W \in \Sigma_1$ であるとは定数 $0 \leq \lambda < 1$ と $C > 0$ があってすべての $\psi \in H^{1,0}$ に対し $\|W\psi\|_{-1,0} \leq C\|\psi\|_{1,0}^{\lambda}\|\psi\|^{1-\lambda}$ がなりたつことをいう．整数 $k \geq 2$ に対し $W \in \Sigma_k$ であるとは $0 \leq \lambda < 1$ と $C > 0$ があってすべての $\psi \in H^{k,0}$ に対し $\|W\psi\| \leq C\|\psi\|_{k,0}^{\lambda}\|\psi\|^{1-\lambda}$ がなりたつことをいう．

<u>例</u>　$p \geq 1$, $p > n/2$ ならば $L^p_{unif} \subset \Sigma_1$．$p \geq 2$, $p > n/k$, $k \geq 2$ ならば $L^p_{unif} \subset \Sigma_k$．ここで $L^p_{unif} = \{W \in L^p_{loc}; \|W\|_{L^p_{unif}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}(\int_{|x-y|<1}|W(y)|^p dy)^{1/p} < \infty\}$．$L^p + L^\infty \subsetneqq L^p_{unif}$ であることに注意する．

ここでの目的は次の $(S)_k$ に対する十分条件を与えることである。

$(S)_k$-(1)　$t\neq 0$ に対し e^{-itH} は $H^{0,k}$ から $H^{k,-k}$ への有界作用素である。

$(S)_k$-(2)　$\|e^{-itH}\phi\|_{k,-k}\leq C(|t|^{-k}+1)\|\phi\|_{0,k}$, $t\neq 0$, $\phi\in H^{0,k}$ がなりたつ。

$(S)_k$-(3)　写像 $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times H^{0,k}\ni(t,\phi)\mapsto e^{-itH}\phi\in H^{k,-k}$ は連続。

$(S)_k$-(4)　任意の $\phi\in H^{0,k}$ に対し $\lim_{t\to\pm 0}|t|^k\|e^{-itH}\phi\|_{k,-k}=0$.

定理1　$k=1,2$ とする。$\tilde{V}:=V+(1/2)x\cdot\nabla V\in\Sigma_k$ と仮定すると $(S)_k$ がなりたつ。

定理2　$k\geq 3$ とする。$D(|H|^{k/2})=H^{k,0}$ を仮定し任意の $|\alpha|\leq k-2$ に対し $\partial^\alpha\tilde{V}\in\Sigma_{2+|\alpha|}$ であり $\partial^\alpha V\cdot$ は $H^{2+|\alpha|,0}$ から L^2 への有界作用素であるとする。k が奇数のときは $\tilde{V}\in\Sigma_1$ を仮定する。このとき $(S)_k$ がなりたつ。

例　$V(x)=\sum_{j=1}^N\lambda_j|x|^{-\gamma_j}$, $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $\gamma_j>0$ とし $\gamma=\max_{1\leq j\leq N}\gamma_j$ とおく。$(S)_k$ は次の場合になりたつ。

(1) $0<\gamma<\min(2,n/2)$, $k=1,2$.　(2) $0<\gamma<n/2-1$ $(n=3)$, $0<\gamma\leq 1$ $(n\geq 5)$, $k=3$.

(3) $0<\gamma\leq 1$ $(n\geq 2k-1)$, $k\geq 4$.

$(S)_k$-(1), (3), (4) だけならば次の場合になりたつ。

(1) $0<\gamma<\min(2,n/2)$, $k=1,2$.　(2) $0<\gamma<\min(2,n/2-k+2)$ $(n\geq 2k-3)$, $k\geq 3$.

定理3　すべての $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$ に対し $\partial^\alpha V\in L^\infty$ であると仮定する。このとき

(1) 任意の $\phi\in H^{0,\infty}=\bigcap_{k\geq 0}H^{0,k}$, $t\neq 0$ に対し $e^{-itH}\phi\in C^\infty\cap L^\infty$.

(2) 写像 $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times H^{0,\infty}\ni(t,\phi)\mapsto e^{-itH}\phi\in C^\infty$ は連続。ここで $H^{0,\infty}$ は projective limit としての位相をいれる。

(3) 任意の $\phi\in H^{0,\infty}$ に対し写像 $(\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^n\ni(t,x)\mapsto(e^{-itH}\phi)(x)\in\mathbb{C}$ は C^∞.

以上は Ozawa [11][12] で publish される予定である。これらの結果は Jensen [7] の拡張となっている。証明には Galilei 変換の generator $J=x+it\nabla$ を用いる。方針としては Hayashi-Ozawa [5] と大体同じであるが [5] では $k\leq 2$ の場合しか示されていない。$k=1$ のときにはいわゆる pseudoconformal conservation law を用いればよいことは分かっていたが (Ozawa [10])，$k\geq 2$ のときはそれに対応する identity をつくらねばならない。$k=2$ のときにその新しい identity を求めたのが Hayashi-Ozawa [4][5] であるが，その証明は後 Ginibre [3] によって簡単になった。Ozawa [11] では Ginibre [3] の idea をおしすすめて $k\geq 3$ の場合でも扱えるような identity をつくった。Smoothing effect の別な定式化については [1][2][8][9][14] を見られたい。

References

[1] M. Ben-Artzi and A. Devinatz, Local smoothing and convergence properties of Schrödinger-type equations, preprint, 1989.

[2] P. Constantin and J. C. Saut, Local smoothing properties of dispersive equations, J. AMS, 1, 1988, 413-439.

[3] J. Ginibre, A Remark on some papers by N. Hayashi and T. Ozawa, J. Funct. Anal., 85, 1989, 349-352.

[4] N. Hayashi and T. Ozawa, Time decay of solutions to the Cauchy problem for time-dependent Schrödinger-Hartree equations, Commun. Math. Phys., 110, 1987, 467-478.

[5] N. Hayashi and T. Ozawa, Smoothing effect for some Schrödinger equations, J. Funct. Anal., 85, 1989, 307-348.

[6] W. Hunziker, On the space-time behavior of Schrödinger wave functions, J. Math. Phys., 7, 1966, 300-304.

[7] A. Jensen, Commutator methods and a smoothing property of the Schrödinger evolution group, Math. Z., 191, 1986, 53-59.

[8] T. Kato and K. Yajima, Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect, preprint, 1989.

[9] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations, preprint, 1989.

[10] T. Ozawa, New L^p-estimates for solutions to the Schrödinger equations and time asymptotic behaviors of observables, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 25, 1989, 521-577.

[11] T. Ozawa, Smoothing effects and dispersion of singularities for the Schrödinger evolution group, to appear in Arch. Rat. Mech. Anal.

[12] T. Ozawa, Space-time behavior of propagators for Schrödinger evolution equations with Stark effect, to appear in J. Funct. Anal.

[13] T. Ozawa, Invariant subspaces for the Schrödinger evolution group, to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique.

[14] G. Ponce, Regularity of solutions to nonlinear dispersive equations, J. Differential Equations, 78, 1989, 122-135.

[15] C. Radin and B. Simon, Invariant domains for the Schrödinger equation, J. Differential Equations, 29, 1978, 289-296.

[16] B. Simon, Schrödinger semigroups, Bull. AMS, 7, 1982, 447-526.

[17] B. Simon, Schrödinger semigroups on the scale of Sobolev spaces, Pacific J. Math., 122, 1986, 475-480.

Sobolev空間上の広義積分としてのFeynman経路積分

藤原大輔
(東工大理)

以下簡単のため空間次元は1とする。

$$L(\dot{x},x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2-V(x)$$

をLagrange函数とする。$V(x)$はpotentialである。
時刻 $t=0$ において点 y を出発し，時刻 t において x に達する道を $\gamma(s)$ とする。γの作用は

$$S(\gamma)=\int_0^t L(\gamma)\,ds$$

である。yとxを直線で結ぶ経路は $\gamma_0(s)=\frac{s}{t}x+(1-\frac{s}{t})y$。
Sobolev空間を

$$\mathcal{H}=H_0^1(0,t)=\left\{\gamma;\ \dot{\gamma}\in L^2(0,t),\quad \gamma(0)=\gamma(t)=0\right\}$$

とする。$\gamma_0+\mathcal{H}$は，$t=0$でy，$\gamma(t)=x$となる経路の全体と云ってよいであろう。

伊藤清は，$\mathcal{H}$上の次のような広義積分を与えた。
$\mathcal{H}$の任意の正規直交底 e_ν をとる。2次形式

$$Q=\sum_\nu \lambda_\nu e_\nu\otimes e_\nu$$

を考え，

$\forall\lambda_\nu>0,\qquad \sum\lambda_\nu<\infty$ とする。

$\forall b\in\mathcal{H}$ に対し，$N(d\gamma, nQ, b)$ は bを平均ベクトル，nQを分散とする$\mathcal{H}$上の正規分布とする。

(1) $$\lim_{n\to\infty}(2\pi i\hbar t)^{-1/2}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{n\lambda_\nu}{i\hbar}\right)^{1/2}\int_{\mathcal{H}} e^{i\hbar^{-1}S(\gamma_0+\gamma)}\,N(d\gamma,nQ,b)$$

が伊藤の考えた広義積分である。伊藤は，この極限式が，b, Qのとり方に依らぬ値に収束するとき，それをFeynman経路積分

(2) $$\int_{\mathcal{H}+\gamma_0} e^{i\hbar^{-1}S(\gamma)}\,\mathcal{D}[\gamma]$$

の数学的定義とした。

実用的な広いclassのpotential Vに対し(1)は存在するか？が問題である。

今回の~~報告~~は、「(1)式において、Qは一般とすると未だ不明だが、特殊なQに対しては、ポテンシアルVとして

(3) $$|\partial_x^\alpha V(x)| \le C_\alpha \qquad {}^\forall\alpha \ge 2$$

という比較的広いクラスでも、(1)の収束を証明することが出来る」

ということを報告したい。

(3)のクラスは W. Pauli が扱っている class に近い。

<u>Qとして何をとるか？</u>　$\{e_\nu\}_{\nu=1}^\infty$という正規直交基底として、Haars' 関数系の不定積分をとる。　$\lambda>1$を固定して

$$Q = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{-\nu} e_\nu \otimes e_\nu$$

をとる。

<u>定理</u>．　Qとして上の2次形式をとる。$V(x)$は(3)の仮定をみたすとする。このとき (1)はλ, bによらぬ極限値$K(t,x,y)$に収束する。（ただしtは十分小さいとする）。

$K(t,x,y)$は Schrödinger 方程式

$$\frac{\hbar\partial}{i\partial t} = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(x)$$

の基本解である。

<u>方法</u>．　Stationary phase method を~~●~~次元が∞となるように拡張するのである。　それ自体興味のある形をしている。

・~~●~~この方法は従来行われて来た(1)の取り扱い法（伊藤，Albeverio 等）とは全く違うものである．摂動法は使わない。非常に~~柔軟性に富むように~~ソフトな構造をしていると思われる。

以下に Stationary phase method の公式を記す。

次のような振動積分を考える。　$\nu>1$とする。

$$I(S,a) = \prod_{k=1}^{L}\left(\frac{\nu}{2\pi i t_k}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{L-1}} e^{i\nu S(x_L\cdots x_0)}\, a(x_L, x_{L-1}\cdots x_0) \prod_{j=1}^{L-1} dx_j \ ,$$

ここで phase function $S(x_L\cdots x_0)$は次の構造をしていると仮定する．

$$S(x_L x_{L-1}\cdots x_0) = \sum_{j=1}^{L} S_j(x_j, x_{j-1}).$$

$$S_j(x_j, x_{j-1}) = \frac{1}{2t_j}(x_j - x_{j-1})^2 + \omega_j(x_j, x_{j-1}) \qquad , \quad j=1,2,\ldots,L$$

ここで $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \omega_j(x,y)| \le C_{\alpha\beta}$ if $|\alpha+\beta| \ge 2$ とする。

$L \ge {}^\forall l > {}^\forall k \ge 0$ に対して $x_{k+1}^*, \cdots, x_{l-1}^*$ は次の式の解とする。

$$\partial_j S_{j+1}(x_{j+1}^*, x_j^*) + \partial_j S_j(x_j^*, x_{j-1}^*) = 0 \quad ; \quad j = k+1, \cdots, l-1,$$

但し $x_l^* = x_l$, $x_k^* = x_k$ とする。$x_{k+1}, \cdots, x_{l-1}$ にこれらの値を代入したものを

$$a(x_L \cdots \overline{x_l\, x_k}\, x_{k-1} \cdots x_0) \overset{\mathrm{def}}{=} a(x_L, \cdots, x_l, x_{l-1}^*, \cdots, x_{k+1}^*, x_k, \cdots x_0)$$

と書く。

a について次の仮定をおく: ${}^\forall K > 0$, に対し A_K が存在して任意の正整数列 $0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_r < L$ に対して

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_{j_1}}^{\alpha_{j_1}} \cdots \partial_{x_{j_r}}^{\alpha_{j_r}} \partial_{x_L}^{\alpha_L} a(\overline{x_L x_{j_r}}\, \overline{x_{j_r-1}\, x_{j_{r-1}}}\, \overline{x_{j_{r-1}-1}\, x_{j_{r-2}}} \cdots \overline{x_{j_1-1}\, x_0})| \le A_K.$$

但し $\alpha_{j_s} \le K$, $s = 0, 1, \cdots, L$.

<u>定理 (stationary phase method)</u>

$T_L = t_1 + \cdots + t_L$ が十分小さい ($C_{\alpha\beta}$ に比べて) とすると、

$$I(S, a) = \left(\frac{\nu}{2\pi i T_L}\right)^{1/2} e^{i\nu S(\overline{x_L, x_0})} \left(\det(I + G_0 \mathcal{B})\right)^{-\frac{1}{2}} \left(a(\overline{x_L, x_0}) + R(x_L, x_0)\right)$$

と書ける。そして ${}^\forall K > 0$ に対し定数 C_K が存在して

$$|\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_L}^{\alpha_L} R(x_L, x_0)| \le \left\{ \prod_{j=1}^{L} (1 + C_K \nu^{-1} |t_j|) - 1 \right\} A_{3K+4}.$$

ここで C_K は K のみに依って、L には依らない。

上式で G_0 は差分行列 $\Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}, & -\frac{1}{t_2}, & 0 & \\ -\frac{1}{t_2}, & \frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3} & -\frac{1}{t_3} & \\ 0 & -\frac{1}{t_3}, & & \\ & & & \frac{1}{t_{L-1}}+\frac{1}{t_L} \end{pmatrix}$ の逆行列

$\mathcal{B}$ は行列で

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 \omega_2(x_2^*, x_1^*) + \partial_{x_1}^2 \omega_1(x_1^*, x_0), & \partial_{x_1}\partial_{x_2}\omega_2(x_2^* x_1^*) & 0 \\ \partial_{x_1}\partial_{x_2}\omega_2(x_2^* x_1^*) & , \partial_{x_2}^2 \omega_3(x_3^* x_2^*) + \partial_{x_2}^2 \omega_2(x_2^*, x_1^*), & \\ 0 & \partial_{x_1}\partial_{x_2}\omega_3(x_3^* x_2^*), & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

<u>注意</u> 停留点の Hesse 行列は

$$\mathrm{Hess}\, S(\overline{x_L x_0}) = \Delta \cdot (I + G_0 \mathcal{B}) \quad \text{である。}$$

また $\det \Delta = \dfrac{t_1 + t_2 + \cdots + t_L}{t_1 \cdot t_2 \cdots t_L}$ である。

Sackstederの定理のひとつのアナロジー

西森敏之 1990.5.23

§1 Introduction.

19世紀の末に，三体問題が求積法では解ないことがわかり，H. Poincaré が微分方程式の解の定性的な研究を始めた。自励系の方程式は結局多様体 M 上の $\mathbb{R}$-作用 $\varphi: M\times\mathbb{R}\to M$ (i.e. 力学系) とみなされ，自然に微分同相 $\varphi(\cdot,1): M\to M$ (i.e. $\mathbb{Z}$-作用，離散力学系) の研究につながる。たとえば $M=\mathbb{R}^2$ の2次多項式による微分同相の一般型として $H_{a,b}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+1-ax^2\\-bx\end{pmatrix}$ (Hénon map) があり $b=0$ のときに x 軸上で考えると標準的 unimodal map $f_a(x)=1-ax^2$ が得られる。これらについては実に多くの研究がある。また不変集合のモデルとして symbolic dynamics (たとえば shift : $\Sigma^{\mathbb{Z}}\ni(\cdots,\sigma_{-1},\sigma_0,\sigma_1,\cdots)\mapsto(\cdots,\sigma_{-2},\sigma_{-1},\sigma_0,\cdots)\in\Sigma^{\mathbb{Z}}$) が考えだされた。

葉層については力学系の一般化とみて定性論を展開する研究と G 構造の一般化である Γ 構造とてその特性類を計算する定量論などがある。以下葉層の定性論について述べる。

葉層の定性論は現在余次元1のときのみ研究されている。葉層を力学系の一般化としてみるとき，離散力学系に対応するものは $\mathbb{R}$ 上のホロノミー擬群である。(生成元が複数でありかつそれらが異なる定義域をもつということが異なる点であり，力学系のときのような安定多様体などは定義できない。) また symbolic dynamics に対応するような手法も高村-稲葉-松元，Cantwell-Conlon などによって研究されている。余次元1葉層の定性論の中心的テーマのひとつに例外極小集合の研究があり，Sackstederの定理，Hectorの一様収束定理，(Hector-) Duminy の定理などがこの方面の古典的結果である。ここでは Sackstederの定理の高余次元でのアナロジーを擬群レベルで考える。

§2 余次元1葉層の Sackstedder の定理

この§では M を n 次元連結閉多様体とし $\mathcal{F}$ を M 上の余次元1 C^2 級葉層とする。

<u>Def 2.1</u> $\mathcal{M}\subset M$ が $\mathcal{F}$-<u>minimal</u> とは $\mathcal{M}$ は空でなく, 閉かつ $\mathcal{F}$-飽和 (i.e. $\mathcal{F}$ の葉の和) であり $A\subset\mathcal{M}$ が空でなく閉かつ $\mathcal{F}$-飽和ならば $A=\mathcal{M}$ となることをいう。

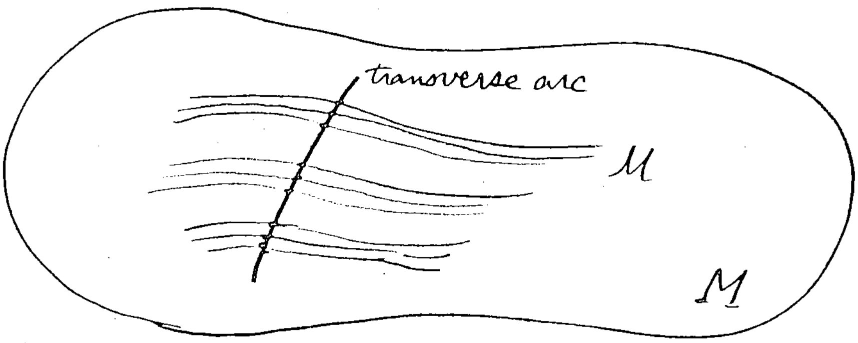
$\mathcal{M}\subset M$ が $\mathcal{F}$-minimal なら次のいずれかになることが知られている:

(1) $\mathcal{M}=M$.

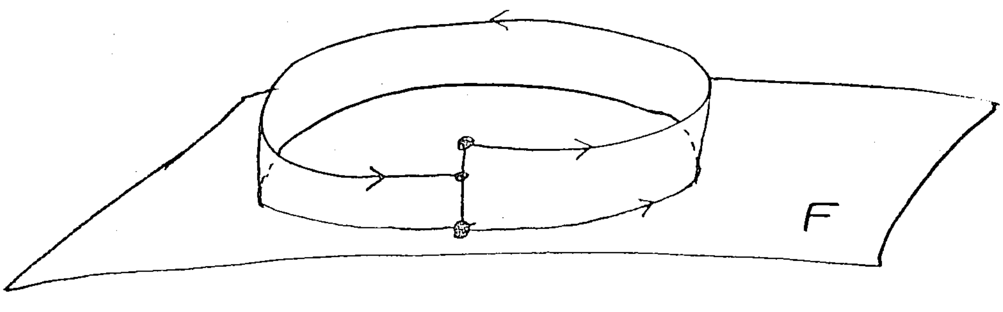
(2) $\mathcal{M}$ は $\mathcal{F}$ の一枚の葉.

(3) $\mathcal{M}$ の transverse arc による切り口は Cantor set.

最後の型の $\mathcal{M}$ を <u>exceptional minimal set</u> (EMS) という。



<u>Th 2.2 (Sackstedder)</u> $\mathcal{M}\subset M$ を $\mathcal{F}$ の EMS とすると $\mathcal{M}$ 内のある葉 F は縮小ホロノミーをもつ.



この定理の擬群 version は一種の不動点定理であり次の§でその高余次元化のひとつのアナロジーを述べる。

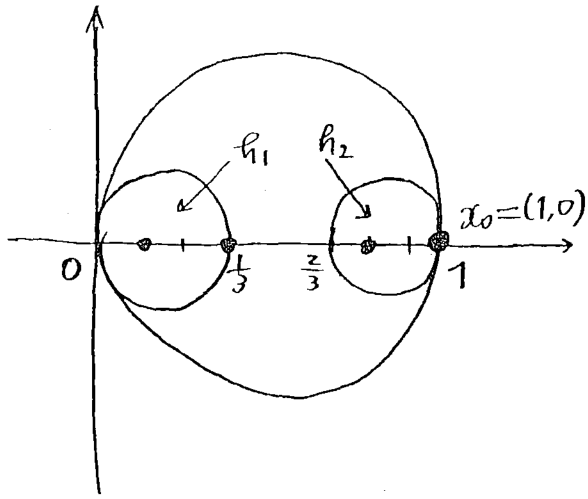
§3. 相似変換の擬群におけるアナロジー

一般のC^∞級の擬群を考えるとすると力学系の理論をすべて含むことになりとうてい満足な結果は期待できない。そこで幾何学的な条件をつけることを考える。

$\Gamma_+^{sim}(\mathbb{R}^q)$で$\mathbb{R}^q$上の相似変換のなす擬群をあらわす。$\Gamma_0 \subset \Gamma_+^{sim}(\mathbb{R}^q)$を有限対称($h \in \Gamma_0 \Rightarrow h^{-1} \in \Gamma_0$)な部分集合とし$\Gamma_0$が生成する擬群を$\Gamma$とかくことにする。[ここで$\Gamma \subset \Gamma_+^{sim}(\mathbb{R}^q)$が擬群とは (1) $id_{\mathbb{R}} \in \Gamma$ (2) $f, g \in \Gamma \Longrightarrow g \circ f \in \Gamma$ (3) $f \in \Gamma \Rightarrow f^{-1} \in \Gamma$ であることとする]

目標は non-proper な軌道 $\Gamma(x_0) := \{ g(x_0) \mid g \in \Gamma,\ x_0 \in D(g) \}$ の閉包を考えて、その中に stabilizer $\Gamma_y := \{ g \in \Gamma \mid y \in D(g),\ g(y) = y \}$ が縮小元を含むような y をみつけることである。次の例でわかるように、これはつねに可能とは限らない。

Ex 3.1

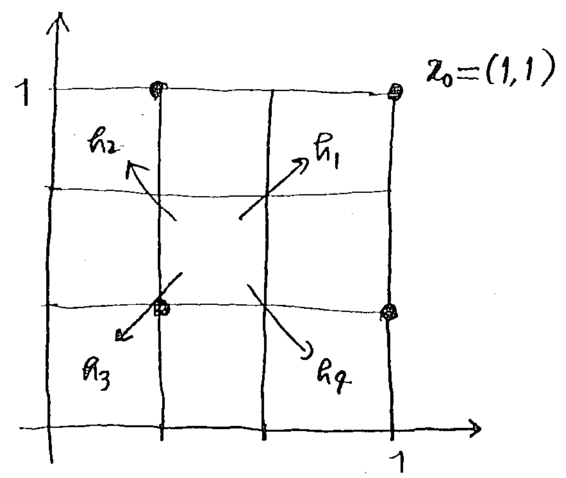


$$h_1(x) = \frac{x}{3},\quad h_2(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$\Gamma_0 = \{ h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1} \}$$

$\overline{\Gamma(x_0)}$ = Cantorの3進集合

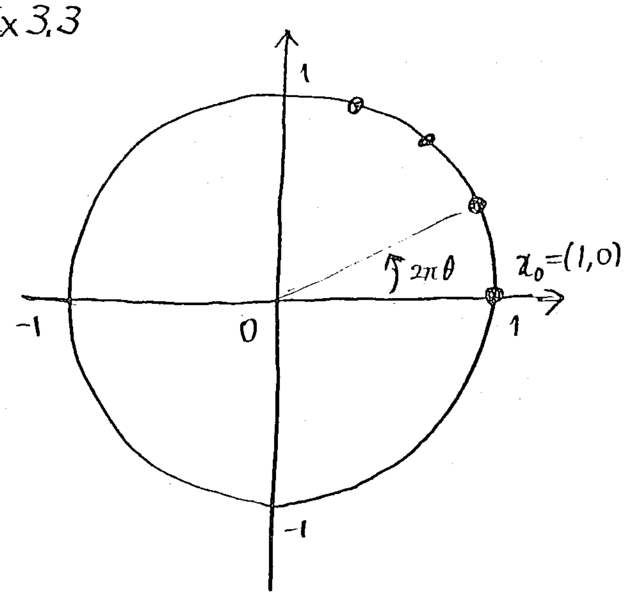
Ex 3.2.



$\overline{\Gamma(x_0)}$ = Cantor set × Cantor set

≈ Cantor set

Ex 3.3



R_θ：無理数θの回転

$\Gamma_0=\{R_\theta, R_\theta^{-1}\}$

$\overline{\Gamma(x_0)} = S^1$

上の例をみるに Ex3.1 と Ex3.2 は縮小元をもつが, Ex3.3 は縮小元をもたない。ちがいはどこにあるのだろうか? 前の2つの例は次に定義するような *bubbles* をもつ。

<u>Def 3.4</u> (1) $x, y\in\Gamma(x_0)$ に対して $d_{\Gamma_0}(x,y)=\min\{n\in\mathbb{N}\cup\{0\} ;$ $\exists h_0=id, h_1,\cdots,h_n\in\Gamma_0$ st. $y=h_n\circ\cdots\circ h_1\circ h_0(x)\}$ とおく。

(2) $g=h_n\circ\cdots\circ h_1$ ($h_i\in\Gamma_0$) が <u>xから</u> <u>yへの</u> <u>近道</u>とは $x\in D(g)$, $g(x)=y$, $d_{\Gamma_0}(x,y)=n$ であることをいう。

<u>Def 3.5</u> 軌道 $\Gamma(x_0)$ が <u>*bubbles*</u> をもつとは 各 $x\in\Gamma(x_0)$ に対して次の条件をみたすような凸開集合 B_x (*bubble* と呼ぶ) が存在することを

(i) $x\in\partial B_x$ (ii) $B_{x_1}\cap B_{x_2}=\phi$ if $x_1\neq x_2$

(iii) $g\in\Gamma$ が xからyへの近道ならば $\tilde{g}(B_x)=B_y$ (ただし $\tilde{g}$ は $\mathbb{R}^n$ 全体の相似変換への g の自然な拡張)

<u>Main theorem</u> (Sacksteder の定理のアナロジー) $A=\overline{\Gamma(x_0)}$ がコンパクトで $A\cap\partial D(h)=\phi$ ($\forall h\in\Gamma_0$) とし, さらに $\Gamma(x_0)$ は *non-proper* で *bubbles* をもつと仮定する。このとき $\exists z\in A$, $\exists g\in\Gamma$ st. $z\in D(g)$, $g(z)=z$, g は縮小元.

<u>Theorem</u> (松田晃一, Hector-Deming の定理のアナロジー) 上の定理と同じ仮定のもとに, x_0 自身がその *stabilizer* の中に非自明な元(縮小元かどうかわからない)をもつ。

Hyperbolicity in the Hénon map

Atsuro Sannami

Department of Mathematics, Faculty of Science
Hokkaido University, Sapporo, 060, JAPAN

A fascinating and important problem is to understand the possible sequences of bifurcations by which a horseshoe is created. A paradigm is the Hénon family f_{ab}

$$\begin{aligned} x' &= a - x^2 + by \\ y' &= x \end{aligned}$$

with parameters a and b. Let

$$B_{ab} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f_{ab}^n(x, y) \text{ is bounded, as } n \to \pm\infty\}$$

be the union of the bounded orbits. It is easy to show that B is contained in the square $Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x|, |y| \leq K = [1 + |b| + \sqrt{(1 + |b|)^2 + 4a}]/2\}$.

As shown by Newhouse and Devaney and Nitecki, there is a region H of the parameter plane containing at least the set $\{(a, b) : a > (5 + 2\sqrt{5})(1 + b^2)/4\}$, for which B_{ab} is a horseshoe. By a *horseshoe* is meant a hyperbolic invariant set on which f_{ab} is topologically equivalent to the shift σ on $2^{\mathbb{Z}}$, the space of doubly infinite sequences of 0s and 1s (for $a \in 2^{\mathbb{Z}}, (\sigma(a))_i = a_{i+1}$).

Using a technique which appears to find most periodic orbits of given period, Biham and Wenzel [BW] found large intervals in a for given b for which the numbers of periodic orbits of all periods up to 15 appear to be constant, but not all equal to their values for the horseshoe. This suggests that f_{ab} is structurally stable in such intervals. It is conjectured that on many such intervals B_{ab} is a hyperbolic Markov shift. A Markov shift is a generalisation of a horseshoe. It is an invariant set on which the map is topologically equivalent to the shift σ on a space Σ of doubly infinite sequences of symbols from some finite alphabet A with only certain transitions between symbols allowed.

In the colloquium, an evidence supporting the above conjecture was presented, and some of the proposed Markov shifts were given explicitly. This result complements results of [CGP] on parameter intervals where the nonwandering set appears to consist of a Markov shift plus some attracting periodic orbits (see discussion in [AAC](§5.2)).

Our results are of interest not just for the Hénon map, but also for all problems involving formation of a horseshoe (or any Markov shift). They indicate that on the way to becoming a horseshoe, the maximal compact invariant set may go through phases corresponding to hyperbolic Markov shifts.

(This result is a joint work with M.J.Davis and R.S.MacKay [DMS].)

References

[AAC] Artuso R, Aurell E, Cvitanovic P, *Recycling of strange sets : II Applications*, Nonlinearity 3 (1990) 361-386

[BW] Biham O, Wenzel W, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellors*, Phys Rev Lett 63 (1989) 819-822

[CGP] Cvitanovic P, Gunaratne GH, Procaccia I, *Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors*, Phys Rev A 38 (1988) 1503-1520

[DMS] Davis MJ, MacKay RS, Sannami A, *Markov shifts in the Hénon family*, Preprint.

積分可能Hamilton系の解のつくるRiemann面とそのホロノミー表現

東北大理　伊藤秀一

古典力学に従う運動はHamilton系

$$(1)\qquad \dot{x}_k = H_{y_k}, \quad \dot{y}_k = -H_{x_k}, \quad k=1,\cdots,n \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

により記述される，ここで $H=H(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ はHamiltonianとよばれる関数である．このとき H は系の第一積分，すなわち(1)の解に沿ってその値が不変に保たれる．この事実はいわゆる"エネルギー保存則"にあたり多様体 $\{H=\mathrm{const}\}$ はしばしばエネルギー曲面とよばれる．17世紀における古典力学とくに三体問題等の天体力学の研究は系(1)を"求積"しようとする努力に端を発していると思われるが，その際重要なことはHamiltonian以外の(1)の第一積分の存在である．$F(x,y)$ が(1)の第一積分であるならば

$$(2)\qquad \begin{aligned}\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) &= \langle F_x, \dot{x}\rangle + \langle F_y, \dot{y}\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(F_{x_k}H_{y_k} - F_{y_k}H_{x_k}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のEuclid内積

である．上の(2)式のあらわす関数は F と H のPoisson bracketとよばれ $\{F,H\}$ と書かれる．$F_1,\cdots,F_k$ を(1)の第一積分とすると $\{F_i,H\}\equiv 0$ であるが，さらに $\{F_i,F_j\}\equiv 0$ $(\forall i,j)$ が成立つとき $F_1,\cdots,F_k$ は包合的な(in involution，あるいはPoisson commuteする)第一積分とよばれる．関数的に独立な(i.e. $dF_1,\cdots,dF_k$ は $\mathbb{R}^{2n}$ のopen & dense subset上で1次独立)包合的第一積分の個数は n 以下であるが最大個数 n のそのような第一積分が存在するとき(1)は積分可能系であるとよばれる．積分可能系の解はlevel set $F^{-1}(c)$，$F=(F_1,\cdots,F_n): M=\mathbb{R}^{2n}\longrightarrow\mathbb{R}$，$c\in\mathbb{R}^n$，の上に制限されるが，$c$ が F のregular valueのときは，$F^{-1}(c)$ のcompactな連結成分は必ず n 次元トーラスに同相になり，その近傍において"解ける"座標：作用-角変数が導入される．

さて，今日の話の中で考えたいのは(1)が複素領域で定義されているときに，解の複素時間 t に関する解析接続がどのようになるか？ということである．

以下においては H を $M=\mathbb{C}^{2n}$ または 複素 $2n$ 次元 Symplectic 多様体 の上の holomorphic function とし その Hamilton ベクトル場 X_H (i.e. (1) の右辺で局所的に表わされるもの) を考える. X_H の解は一般にも多価関数であるが, それは M の中の Riemann 面 Γ をつくる. この Γ の基本群を Γ の近傍における X_H の解の解析接続によるホロノミー表現によってとらえよう.

Γ 上の一点 p を固定し, p を base point とする loop $\gamma:[0,1]\longrightarrow\Gamma$ を考える. これに対応して $\mathbb{C}$ 上の曲線 $\alpha:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ で $\alpha(0)=0$ かつ

$$\gamma(s)=\varphi(\alpha(s);p)$$

$\varphi(t;p)$ は X_H の $t=0$ で p を通る解(軌道)

となるものが定まる. いま

$$\Phi^{\alpha}: z\longmapsto\varphi(\alpha(1);z)$$

とすると, これは α に沿った解析接続をあらわしている. 点 p における X_H に対する横断面 (transverse section, 複素 codim 1 の local submfd) をとり, それを Σ とする. このとき, $\Sigma'\subset\Sigma$ ($p\in\Sigma'$) を適当にとれば Poincaré map

$$\Phi^{\gamma}:=\pi\circ\Phi^{\alpha}|\Sigma':\Sigma'\longrightarrow\Sigma$$

(γ に associate して定まる)

が定義できる. ここで π は p の近傍から Σ への projection である. とくに Φ^{γ} をエネルギー曲面 $H=h$ に制限して得られる map $\Phi^{\gamma}|\Sigma'_h$ を

$$\psi^{\gamma}:=\Phi^{\gamma}|\Sigma'_h,\ ただし\ \Sigma'_h=\Sigma'\cap H^{-1}(h),\quad \Sigma_h=\Sigma\cap H^{-1}(h)$$

と書き, γ に associate した reduced Poincaré map とよぶ. この Σ'_h, Σ_h は $2n-2$ 次元の symplectic 多様体であり, ψ^{γ} は p を不動点とする正準変換 (symplectic diffeo) である. ここで M の symplectic 構造 (非退化で closed な holomorphic 2-form) を ω とすると Σ_h の symplectic 構造は $\sigma_h=j^*\omega$ で与えられる (j は inclusion $j:\Sigma_h\rightarrow M$). $\psi=\psi^{\gamma}$ が symplectic とは $\psi^*\sigma_h=\sigma_h$ が成り立つことを意味する.

いま γ' を p を base point とする γ と homotopic な loop とすると $\psi^{\gamma}=\psi^{\gamma'}$ がいえ, $\pi_1(\Gamma,p)$ のホロノミー表現

$$\rho:\pi_1(\Gamma,p)\ni[\gamma]\longmapsto\psi^{\gamma}\in\mathrm{Symp}(\Sigma_h,p)$$

が得られる. ここで $[\gamma]$ は γ で代表される homotopy 類, $\mathrm{Symp}(\Sigma_h,p)$ は Σ_h 上の不動点 p の近傍 (in Σ_h) で定義された local symplectic diffeos のつくる群である. これは局所座標をとれば $\mathrm{Symp}(\mathbb{C}^{2n-2},0)$ と同一視される.

Results i) special coordinates の導入. 以下で考える loop $\gamma \subset \Gamma$ は "非退化な" loop である. $\Gamma \subset H^{-1}(h_0)$ と仮定する.

Lemma linear map $D\psi^{\gamma}(p)$ が固有値 1 をもたない
$\Rightarrow$ Φ^{γ} の不動点の 1-parameter family $\{p_h\}$, $p_h \in \Sigma_h$ で $p_{h_0} = p$ かつ p_h は h に analytic に depend するものが存在する.

このとき点 p_h を通る loop γ_h が induce される. h が動く範囲を V とし, この族を $\{\gamma_h\}_V$ と書く. $D\psi^{\gamma_h}(p_h)$ が固有値 1 をもたないとき $\{\gamma_h\}_V$ は non-degenerate であるという. $\forall h \in V$ (fixed) に対し, 点 p_h の近傍で局所座標 (u, v, ξ, η), $u, v \in \mathbb{C}$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{n-1}$ を

$$(3) \qquad H = v \qquad \omega = du \wedge dv + \sum_{i=1}^{n-1} d\xi_i \wedge d\eta_i \qquad \text{かつ} \quad p_h = (0, h, 0, 0)$$

となるようにとり,

$$\Sigma_h = \{(u, v, \xi, \eta) \mid u = 0, v = h\}$$

と定める. このとき, Poincaré map $F = \Phi^{\gamma}$ は

$$(4) \qquad F(v, \zeta) = (v, f(v, \zeta)); \qquad \zeta = (\xi, \eta), \quad f(v, \cdot) \in Symp(\mathbb{C}^{2n-2}, 0)$$

と書ける. $\pi_1(\Gamma_h, p_h)$ のホロノミー表現

$$\rho : \pi_1(\Gamma_h, p_h) \longrightarrow Symp(\mathbb{C}^{2n-2}, 0)$$

に対し $f \in \rho(\pi_1(\Gamma_h, p_h))$ は原点 $\zeta = 0$ を不動点とする正準変換であるが, これを線形部分, 非線形部分に分解する.

$$(5) \qquad f = f_0 \circ \hat{f} \; ; \quad f_0(\zeta) = Df(0)\zeta \quad , \quad \hat{f}(\zeta) = \zeta + O(|\zeta|^2)$$

ii) statement of results

$f \in \rho(\pi_1(\Gamma_h, p_h))$ は symplectic だから $Df(p_h)$ の固有値は $\lambda_i, \lambda_i^{-1}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ の pair であらわれる.

Def 1 loop family $\{\gamma_h\}_V$ が non-resonant
$\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ $\forall h \in V$ に対し $D\psi^{\gamma_h}(p_h)$ の固有値はすべて相異なり, さらに $\exists h \in V$ に対し次の条件をみたす:

$$(6) \qquad \prod_{\nu=1}^{n-1} \lambda_{\nu}^{k_\nu} \neq 1 \qquad \text{for} \quad \forall (k_1, \cdots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1} \setminus \{0\}$$

条件 (6) はこの下で ψ^{γ_h} が Birkhoff 標準形 (次に述べる Def で v を fixed したもの) により近似できるための条件である.

Def 2 (i) v, ξ の hol function $G(v,\xi)$ が parametrized normal form とは v の hol 関数を係数とする $n-1$ 変数 $\xi_i\eta_i$ の収束べき級数であること。

(ii) (4) の形で与えられる map F が parametrized normal form とは f が

$$f(v,\xi) = \exp X_K(\xi) \quad , \quad K = K(v,\xi) \text{ は (i) の意味での parametrized normal form}$$

Thm 1 $\{\gamma_h\}_V$ を non-resonant loop family with basepoint $p_h \in H^{-1}(h)$, Γ_h を p_h を通る X_H の orbit とする。もし X_H が $\{\Gamma_h\}_V$ の近傍で holomorphic で関数的独立な第一積分 $G_1, \cdots, G_{n-1}, G_n = H$ をもつならば，V の open かつ dense subset $\hat{V}$ で次の性質をみたすものが存在する：$\forall h \in \hat{V}$ fixed に対し p_h の近傍での局所座標 (u, v, ξ, η) で条件 (3) および次の 2 条件をみたすものが存在する。

(i) Poincaré map Ψ^{γ_h} は parametrized normal form

(ii) Γ_h の近傍で hol な X_H の $\forall$ 第一積分は parametrized normal form.

Thm 2 Thm 1 と同じ仮定がみたされるとし，$\hat{V}$ を Thm 1 で与えたもの，$\forall h \in \hat{V}$; fixed とすると，$\forall f \in \rho(\pi_1(\Gamma_h, p_h))$ は次をみたす。

(i) E_i, F_i を $D\Psi^{\gamma_h}(p_h)$ の固有値 $\lambda_i, \lambda_i^{-1}$ に対応する固有空間とすると，$A := Df(p_h)$ は次の (a) または (b) をみたす：

(a) $AE_i = E_j$ かつ $AF_i = F_j$ for $\exists j \in \{1, \cdots, n-1\}$

(b) $AE_i = F_j$ かつ $AF_i = E_j$ for $\exists j \in \{1, \cdots, n-1\}$

(ii) G を Γ_h の近傍で hol な X_H の第一積分とすると，Thm 1 で導入された座標 (u, v, ξ, η) の下で $G(h, \cdot)$ は linear map $f_0 = Df(0)$ により不変である。(もちろん f 自身でも不変)

(iii) (5) で定義される f の非線形部分 $\hat{f}$ は Thm 1 の (u, v, ξ, η)-座標の下で normal form である。

以上の結果はホロノミー群 $\rho(\pi_1(\Gamma_h, p_h))$ の任意の元をある意味で一斉に解いてしまう座標の存在を示している。これは $\pi_1(\Gamma, p)$ の線形表現（モノドロミー表現）を考えた Ziglin の定理の拡張になっている。

Algebraic Cycles on Algebraic Varieties over Number Fields

Wayne Raskind (joint work with J.-L. Colliot-Thélène)

Let X be a smooth, projective algebraic variety defined over an algebraic number field k. The i-th Chow group $CH^i(X)$ is defined to be the quotient of the free abelian group on the (closed, reduced and irreducible) codimension i subvarieties of X modulo divisors of functions on codimension $i-1$ subvarieties of X. When $i=1$ this is the usual Picard group $Pic(X)$ of divisors modulo linear equivalence. The structure of the Picard group is well-known: it is an extension of a finitely generated group (the Néron-Severi group) by the group of k-points of an abelian variety (the Picard variety). In particular we have the following deep theorem:

Mordell-Weil-Néron-Severi Theorem: Let k be a field which is finitely generated (as a field) over its prime subfield. Then the group $PicX$ is a finitely generated abelian group.

The functor CH^1 is representable by a group scheme of finite type over k (the Picard scheme) and thus behaves in a very predictable way when one changes the field k. For CH^i $(i>1)$ this is no longer the case and the structure of these groups can depend very much on the field k. When k is the complex numbers then the Chow groups can be "uncontrollably large". The philosophy of Bloch is that the smaller the field k the better behaved the groups $CH^i(X)$ should be. In particular, we have the following conjecture due to Bass and Bloch:

Conjecture: Let X be a smooth, projective variety over a number field k. Then the groups $CH^i(X)$ are finitely generated for all i.

Very little is known about these conjectures. It is not even known whether the torsion of these groups is finite. In my talk I shall describe some recent work on this last question and (hopefully) outline the proof of the following theorem:

Theorem: Let X be a smooth, projective variety over an algebraic number field k and assume that $H^2(X,\mathcal{O}_X)=0$. Then the group $CH^2(X)_{torsion}$ is finite.

Corollary: For "most" surfaces X of geometric genus zero over number fields the group $CH^2(X)$ is finitely generated.

The meaning of "most" will be made precise in the talk.

On the Euler Characteristic of an Orbifold

Thomas Höfer

This is a report on joint work, mainly inspired by F. Hirzebruch. Complex threefolds with trivial canonical bundle play an important role in mathematical physics. Their topological Euler characteristic has some meaning in physics. In two papers the physicists Dixon, Harvey, Vafa, Witten also considered threefolds X/G where X is smooth and G is a finite group acting on G. But now the invariant important in physics is not the usual Euler characteristic

$$e(X/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} e(X^g)$$

but

$$e(X, G) := \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{(g,h) \in G \times G \\ gh = hg}} e(X^g \cap X^h).$$

In many cases this is the Euler characteristic of some special resolution of X/G with trivial canonical bundle. The important assumption seems to be that G acts trivially on a global meromorphic $(\dim X)$-form. Then the dualizing sheaf $\omega_{X/G}$ on X/G is locally trivial. The first question is if X/G then has a resolution $\widetilde{X/G} \xrightarrow{f} X/G$ with $f^* \omega_{X/G} = \omega_{\widetilde{X/G}}$. The second one is if the formula above gives the Euler characteristic of such a resolution.

In the two-dimensional case we have a much more precise answer, namely the McKay correspondance. For abelian groups, at least in dimension 3, S.S. Roan has answered both questions positively. For G a symmetric group, the symmetric powers $S^{(n)}$ of a smooth algebraic surface form a big class of examples. Here L. Göttsche has computed the Betti numbers of $\mathrm{Hilb}^n(S)$ which is a resolution of $S^{(n)}$, and again the formula is correct.

History of the invariant problem and full reducibility for $SL_2(\mathbb{C})$

A. Borel

Let G be a group and $\sigma : G \rightarrow GL(V)$ a linear representation of G by invertible transformations of a finite dimensional complex vector space V. Two natural problems were already investigated in the 19th century for certain classes of groups.

1) The "Invariant problem" (IP). Is the algebra I_G of G - invariant polynomials on V finitely generated ? ⌈ If so, more precise questions can be raised, such as finding an explicit generating set, and defining relations between its elements, but only the first question was discussed. ⌋

2) "Full reducibility" (FR) : Has any G - invariant subspace in V a G - invariant supplement, for any V ?

This talk centered on the contributions to these problems for $G = SL_2(\mathbb{C})$. In fact, this being a test case for complex semi - simple Lie groups, the more general case was also alluded to, but the main ideas were explained for $SL_2(\mathbb{C})$. Even so, the history is somewhat surprisingly complicated, in part because various authors were not always aware of the work of others. In some cases, this was a blessing in disguise since it led to new proofs and interesting combinations of independent ideas.

FR for $SL_2(\mathbb{C})$ was announced by E. Study in 1893, proved algebraically by E. Cartan (in 1894) and algebraico - geometrically by G. Fano (1896).

The idea of averaging over a finite group to form invariants emerged clearly in 1896. A. Hurwitz (1897) introduced integration over certain compact groups (SO_n, SU_n) to that effect and solved IP for $SO_n(\mathbb{C})$ and $SL_n(\mathbb{C})$.

25 years later, I. Schur combined this approach with the theory of characters of finite groups and extended the latter to the groups previously mentioned. In 1924, H. Weyl put together this work and Cartan's theory of semi - simple Lie algebras and proved FR

and IP for these. The arguments were trancendental. In 1931 the physicist H. L. Casimir introduced the "Casimir operator" generalizing the "monent of momentum" and in 1932 used the latter to give an algebraic proof of FR for $SL_2(\mathbb{C})$, generalized in 1935 by B. L. v.d. Waerden. That was the first algebraic proof in the general case. It was thought at the time that Casimir had given the first algebraic proof for $SL_2(\mathbb{C})$. Even Cartan seemed to have forgotten that his Thesis already contained one.

Various more recent contribution by J. H. C. Whitehead, R. Brauer, Rashesky and N. Bourbaki were also mentioned, as well as corresponding developments in positive characteristic.

Abel多様体上のcycleのpositivityについて

吉田敬之（京大理）

$A/\mathbb{C}$ を n 次元abel多様体とする。A はcomplex manifoldとしてあるlattice $L \subset \mathbb{C}^n$ により、$\mathbb{C}^n/L$ と同型となる。

$$V = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^{2n}, \quad X = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{2n}$$

$$Y = (X, J) \cong \mathbb{C}^n$$

とおく。J は A のcomplex structureから得られる X のcomplex structureである。更に

$$W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q}), \quad W_{\mathbb{C}} = W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathbb{C})$$

とおく。$W_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y, \mathbb{C}) \oplus \overline{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y, \mathbb{C})}$

となる。

$H^i(A, \mathbb{Q}) \cong \overset{i}{\wedge} W$, $H^{p,q}(A) \cong \{\overset{p+q}{\wedge} W_{\mathbb{C}}$ の (p,q)-type の元$\}$

である。

$Z \subset A$ を A のcodimension p のalgebraic subvarietyとする。Z のcohomology類 $cl(Z) \in H^{2p}(A, \mathbb{Z}) \cap H^{p,p}(A)$ が定まる。$p=1$ のときは $cl(Z)$ は周知のRiemann formの条件をみたす。このpositivityの条件は $p>1$ のときどうなるであろうか？

$e_1, \cdots, e_n$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y, \mathbb{C})$ のbasisとすると、

$\overset{2p}{\wedge} W_{\mathbb{C}}$ の (p,p)-type の元 ϕ は

$$\phi = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p \\ j_1<\cdots<j_p}} r_{i_1\cdots i_p, j_1\cdots j_p} (\sqrt{-1} e_{i_1} \wedge \bar{e}_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\sqrt{-1} e_{i_p} \wedge \bar{e}_{j_p})$$

とかける. $I = \{i_1, \cdots, i_p\}$, $J = \{j_1, \cdots, j_p\}$ とし

$r_{IJ} = r_{i_1\cdots i_p, j_1\cdots j_p}$ とおくと. $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p}$ 行列 (r_{IJ}) が定まる. (r_{IJ}) が positive semi-definite のとき, ϕ を H-positive という.

<u>Theorem</u> $cl(Z) \in \overset{2p}{\wedge} W_{\mathbb{C}} = H^{2p}(A, \mathbb{C})$ は H-positive である.

Abel 多様体の family において positivity がどう変るかを調べる.

$\Omega \in \overset{2p}{\wedge} W$ を fix する. $\rho_{2p} : GL(V) \to GL(\overset{2p}{\wedge} W)$ を自然な表現とし.

$$G_\Omega = \{ g \in GL(V) \mid \rho_{2p}(g)\Omega = \Omega \}$$

とおく. G_Ω は $\mathbb{Q}$ 上の algebraic group となる.

$\mathfrak{g}_\Omega = \mathrm{Lie}((G_\Omega)_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{End}(X)$ とし. $J_0 \in \mathfrak{g}_\Omega$ が $J_0^2 = -1_X$ をみたすとする. $g \in (G_\Omega)_{\mathbb{R}}$ をとり, complex structure $J = \mathrm{Ad}(g) J_0 = g J_0 g^{-1}$ を考える.

$T = \{ \exp(2\pi t J) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \}$ とすると. 明らかに $T \subseteq (G_\Omega)_{\mathbb{R}}$ 従って Ω は T で fix され. これから

Ω は J で定義される complex structure について (p,p)-type となる.

$$K = \{ g \in (G_\Omega)_{\mathbb{R}} \mid Ad(g) J_0 = J_0 \}$$

とおく. Ω を (p,p)-type の元とする X の complex structures で $(G_\Omega)_{\mathbb{R}}/K$ で parametrize されるものが得られた. 十分一般の arithmetic な abelian variety の family の complex structures は上の形になっている.

<u>Theorem</u> Ω が $(G_\Omega)_{\mathbb{R}}/K$ のある1点で H-positive ならば, Ω は $(G_\Omega)_{\mathbb{R}}/K$ の全ての点で H-positive となる.

<u>Problem</u> 一般の algebraic variety $/\mathbb{C}$ の complex structure の deformation で上の Th. の類似が成立つか? もしこれが否定的なら Hodge 予想の反例が出る可能性がある.

<u>例</u> Weil が "Abelian varieties and the Hodge ring" 全集 1977c で考察した Hodge class についてみる. 記号は Weil のものを用い $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$, $L = \mathcal{O}^4$, 4次元 abelian variety の case に specialize する. 上の Th. により容易に

$a\omega^2 + b\Omega_1 + c\Omega_{\sqrt{-1}}$ が H-positive <u>definite</u> (i.e. $(h_{\lambda J}) > 0$)

$\Longleftrightarrow$ $a > 0$ かつ $a^2 > 4(b^2 + c^2)$.

(ω は principal polarizing class). 故に

$2\omega^2 + \frac{1}{2}\Omega_1 \in H^4(A, \mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(A)$ は positive である.

これが実際にある subvariety の cohomology 類になるかどうかを調べることは非常に興味ある問題である.

INFORMATION DYNAMICS AND ITS APPLICATIONS

Masanori OHYA

Department of Information Sciences
Science University of Tokyo
278 Noda City, Chiba Japan

ABSTRACT

Various physical or nonphysical systems can be described by states, so that the dynamics of a system is described by the state change. One of essential characters of a state is expressed by its complexity. Complexity such as entropy is a key concept in Information theory. We call the study of the state change together with such complexities "Information dynamics", which is a kind of synthesis of dynamics of state change and information theory.

Let an input dynamical system and an output dynamical system be described by $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha)$ and $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\alpha})$, respectively. Here $\mathcal{A}$ is a set of all objects to be observed and $\mathfrak{S}$ is a set of all means getting the observed value for each element A in $\mathcal{A}$, and α describes an inner evolution of the input system. Same for the output system $(\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\alpha})$. Thus

[Giving a mathematical structure
to input and output triples
≡ Having a theory]

A map providing a bridge between two systems is called a channel if it sends a state of the input system to that of the output system; $\Gamma : \mathfrak{S} \to \bar{\mathfrak{S}}$. There exist several channels, whose properties specify the character of two systems.

Let us give some examples of (I) an input system, (II) a transformation system (channel) and (III) an output system.

<u>(1) Causal System:</u> (I) $x \in R^n$; (II) $x = f(x)$; (III) $x(t) = \Phi_t(x)$, where Φ_t is an evolution (semi)group generated by f.

(2) Signal Transmission: (I) coding a causal signal $x(t)$ to $\{x_n\}$ by e.g., sampling theorem with cut off; (II) some transformation $y_n = f(x_n)$ for any n; (III) interpolating or decoding $\{y_n\}$ to $y(t)$.

(3) Continuous System: (I) probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$; (II) Markov kernel λ; (III) probability space $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mu})$ with $\bar{\mu} = \int_{\Omega} \lambda(\omega, \ )d\mu$.

(4) General Quantum System: (I) C*-triple $(\mathfrak{A}, \mathfrak{S}, \alpha)$; (II) a channel is the dual map Λ^* of a completely positive map $\Lambda : \bar{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$; (III) C*-triple $(\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\alpha})$ with $\bar{\varphi} = \Lambda^* \varphi$.

Once input and output systems are mathematically fixed and a transformation rule (channel) is given, we next consider some complexities of the state associated with the systems, which are a corner stone of information dynamics. The first complexity is one for a state itself: For a state φ, the complexity seen from a reference system $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{S}$ is dented by $C^{\mathfrak{J}}(\varphi)$. The second complexity is determined by both input and output states φ, ψ or an input state φ and a channel Γ, so that it is denoted by $T^{\mathfrak{J}}(\varphi;\psi)$ or $T^{\mathfrak{J}}(\varphi;\Gamma)$, which is called a transmitted complexity from φ to ψ or $\Gamma\varphi$. Typical examples of these complexities are entropy and mutual entropy playing essential role in several fields.

[Definition] Information dynamics is a dynamics described by a set $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{S}, \mathfrak{J}, \alpha; \bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{J}}, \bar{\alpha}; \Gamma; C^{\mathfrak{J}}(\varphi), T^{\mathfrak{J}}(\varphi;\Gamma)\}$ and some relation R among elements of the set.

Therefore, for systems of interest, we have to

(1) mathematically determine $\mathfrak{A}, \mathfrak{S}, \mathfrak{J}, \alpha; \bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{J}}, \bar{\alpha}$;

(2) choose Γ and R;

(3) define $C^{\mathfrak{J}}(\varphi)$ and $T^{\mathfrak{J}}(\varphi;\Gamma)$.

By setting the above (1)-(3) in general quantum systems, we can apply general frames to several topics such as optical communication, fractal theory, molecular evolution.

凸多面体の格子点・単体的複体の面の数え上げとトーリック多様体[*)]

日比孝之（名古屋大学理学部）

昨今、数え上げの組合せ論（enumerative combinatorics）と呼ばれる分野で、さかんに研究されている話題は、単体的複体の面と凸多面体の格子点の数え上げである。前者は、１７５２年に発見されたEulerの公式を源とし、後者は、Minkowskiらによって創設された「数の幾何」からの派生である。両者とも、盛衰の歴史と永年の伝統を誇っているが、１５年程前から、可換環論や代数幾何学、特に、Cohen－Macaulay環やトーリック多様体などの理論との驚嘆すべき相互関係が認識され、古色蒼然とした雰囲気に嵐が巻き起こった。

本講の目的は、球面の三角形分割の面の数え上げという前者の象徴的な話題を背後に踏まえながら、後者の範疇に属しているEhrhart多項式と呼ばれるものについての最近の成果を概観し、将来解決すべき諸問題を明確にすることにある。

いずれにしても、数え上げの組合せ論は、二項係数が始祖で、その究極的な目標（と言うか、哲学）は、離散的な数学現象から自然に生起する有限数列の組合せ論的な特徴付けを探す、ということである［１４］。

［１］凸多面体と δ－列

次元 d の有理凸多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^d$ と整数 $n\geq 1$ に対し、$\mathcal{P}$ に含まれる有理点 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d)$ で $n\alpha_i\in\mathbb{Z}$ $(i=1,2,\cdots,d)$ となるものの個数を $i(\mathcal{P},n)$ で表す。すなわち $i(\mathcal{P},n)=\#(n\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^d)$ である。ただし、$n\mathcal{P}:=\{n\underline{\alpha}\,;\,\underline{\alpha}\in\mathcal{P}\}$ であり $\#(X)$ は有限集合 X の要素の個数を表す。函数 $i(\mathcal{P},n)$ は１９５５年頃 *lycée* の先生であったEhrhart博士が考察した［２］。彼は、$\mathcal{P}$ が整凸多面体、つまり、各頂点が $\mathbb{Z}^d$ に属する凸多面体、であれば $i(\mathcal{P},n)$ は次数 d の多項式で $i(\mathcal{P},0)=1$、更に $n>0$ のとき $(-1)^d i(\mathcal{P},-n)$ が $\#(n(\mathcal{P}-\partial\mathcal{P})\cap\mathbb{Z}^d)$ に一致することを示した。ここで $\partial\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}$ の境界である。そこで $\mathcal{P}$ が整凸多面体のとき $i(\mathcal{P},n)$ を $\mathcal{P}$ のEhrhart多項式と呼ぼう。

我々は、整凸多面体のEhrhart多項式を直接研究するのではなく、その母函数から生起する或る有限数列を考察の対象とする。次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^d$ から、整数の数列 $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\cdots$ を、公式

---

*) 北海道大学理学部数学教室談話会講演記録（１９９０年7月１２日）

（☆）　$$(1-\lambda)^{d+1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} i(\mathcal{P},n)\lambda^n\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\lambda^i$$

で定義する。すると $i(\mathcal{P},n)$ は n に関する次数 d の多項式であるから（母函数の一般論を経て）$i>d$ ならば $\delta_i=0$ が従う。そこで、数列 $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ を $\mathcal{P}$ の δ－列と呼ぶことにする。このとき $\delta_0=1$，$\delta_1=\sharp(\mathcal{P}\cap\mathbb{Z}^d)-(d+1)$ であり、また、$\delta_d=\sharp((\mathcal{P}-\partial\mathcal{P})\cap\mathbb{Z}^d)$ が成立する。他方、$\mathcal{P}$ の（通常の）体積 $vol(\mathcal{P})$ は $i(\mathcal{P},n)$ の n^d の係数と一致する。つまり $(\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_d)/d!=vol(\mathcal{P})$ となる。更に、$\delta(\mathcal{P})$ は非負数列、すなわち各 δ_i は非負整数である［１３］。

【２】δ－列の線形不等式

我々の問題意識は、整凸多面体から生起する δ－列の組合せ論的特徴付けを探せ———という（数え上げの組合せ論の哲学に立脚した）きわめて明確なものである。

そこで、まず、任意の整凸多面体の δ－列に関して何が言えるか、ということを問い掛けてみよう。

定理（［３］）　次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^d$ の δ－列を $(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$ と置く。このとき、任意の $0\leqq i\leqq d$ に対して線形不等式

（＊）　$$\delta_d+\delta_{d-1}+\cdots+\delta_{d-i}\leqq\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_i+\delta_{i+1}$$

が成立する。

線形不等式（＊）を示すときの鍵となるのは、有限個の単項式で生成された Cohen - Macaulay 環［８］の規準加群の理論［１１］である。

【３】双対凸多面体と対称 δ－列

次元 d の単体的凸多面体の i 次元の面の個数を f_i，$0\leqq i<d$，更に、$f_{-1}=1$ とするとき、公式

（★）　$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i}=\sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$$

で定義される数列 $h_0,h_1,\cdots,h_d$ は対称、つまり $h_i=h_{d-i}$ $(0\leqq i\leqq d)$ である、という Dehn - Sommerville の定理が成立する。その類似を整凸多面体の δ－列で考察しよう。後に、単なる‘類似’ではないことが判明する。

まず、次元 d の整凸多面体から生起する対称な δ－列を研究対象とする際には、次元 d の整凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ で $\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部 $\mathcal{P} - \partial\mathcal{P}$ に含まれるもののみを考察しても差し障りは生じない。そこで、記号 $\mathcal{C}_0(d)$ で原点を内部に含む $\mathbb{R}^d$ の d 次元整凸多面体の全体を表そう。

凸多面体の一般論では、原点を内部に含む d 次元凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の双対凸多面体 $\mathcal{P}^* \subset \mathbb{R}^d$ が

$$\mathcal{P}^* := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d ; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 , \forall \mathbf{y} \in \mathcal{P} \}$$

で定義される。ただし、$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である。もちろん $\mathcal{P}^*$ は再び原点を内部に含む次元 d の凸多面体であり $(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P}$ となる。更に、$\mathcal{P}$ が有理凸多面体であれば $\mathcal{P}^*$ も有理凸多面体となる。しかし、$\mathcal{P}$ が整凸多面体であっても、$\mathcal{P}^*$ は必ずしも整凸多面体であるとは限らない。しからば、如何なる条件があれば、整凸多面体の双対凸多面体が再び整凸多面体となるか、という疑問が浮上する。そこで $\mathcal{P}^*$ が整凸多面体となるような $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_0(d)$ の全体を $\mathcal{C}^*(d)$ と置く。

定理（[４]，[５]） 整凸多面体 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}_0(d)$ の δ－列 $\delta(\mathcal{P}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_d)$ が対称、つまり $\delta_i = \delta_{d-i}$ $(0 \leq i \leq d)$ となるための必要十分条件は $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ となることである。

［４］凸多面体の境界の三角形分割

本講の後半では、対称な δ－列を追跡する。すると、考察の対象となるのは $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ である。便宜上、$\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の三角形分割 Δ で $\partial\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ を頂点集合とするものを $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割と呼ぶことにする。[1] そのような三角形分割 Δ があったとき Δ の次元 i の単体の個数を f_i，$0 \leq i < d$，とし、数列 $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ を Δ の f－列と呼ぶ。更に（☆）によって Δ の h－列 $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ を定義する。このとき $h(\Delta)$ は等式 $h_i = h_{d-i}$ $(0 \leq i \leq d)$ を満たし、更に、任意の $1 \leq i \leq d$ に対し、不等式 $h_i \leq \binom{f_0 - d + i - 1}{i}$ が成立する（Stanley［１０］）。

さて、$\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 Δ が圧縮的であるとは、Δ の任意の $d-1$ 次元単体 σ に対し、$\mathbb{R}^d$ の原点を頂点とし σ を底面として得られる $\mathbb{R}^d$ の d 次元単体の体積が $1/d!$ であるときを言う。

---

1) $\mathcal{P}$ の頂点集合を含む $\partial\mathcal{P}$ の部分集合が任意に与えられたとき、それを頂点集合とする $\partial\mathcal{P}$ の三角形分割が常に存在する。

命題　整凸多面体 $\mathcal{P}\in\mathcal{C}^{*}(d)$ の δ－列を $\delta(\mathcal{P})=(\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_d)$、$\mathcal{P}$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 Δ の h－列を $h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$ とする。このとき、不等式 $h_i\leqq\delta_i$ $(i=0,1,\cdots,d)$ が成立する。更に、$h(\Delta)=\delta(\mathcal{P})$ となるためには Δ が圧縮的であることが必要十分である。

なお、$d\leqq3$ のとき $\mathcal{P}\in\mathcal{C}^{*}(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の任意の総格子型三角形分割は圧縮的であるが、$d\geqq4$ のときには $\partial\mathcal{P}$ が圧縮的な総格子型三角形分割を所有しないような $\mathcal{P}\in\mathcal{C}^{*}(d)$ が存在する。

【５】トーリック多様体と単峰数列

我々の対称 δ－列の理論を築き上げる際に、トーリック多様体は不可欠な武器である。そこで、如何にして組合せ論家がトーリック多様体の御利益を得るかを述べたいのだが、まず、［１］や［９］に沿って、必要な舞台装置を準備する。

（５.１）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の部分集合 C が凸多面錐であるとは、$\mathbb{Z}^d$ の有限個の元 $\underline{m}_1,\cdots,\underline{m}_s$ が存在して、C がそれらの非負有理数係数の一次結合と一致すること、つまり $C=\mathbb{Q}_+\underline{m}_1+\cdots+\mathbb{Q}_+\underline{m}_s$ を意味する。ここで $\mathbb{Q}_+$ は非負有理数の全体を表す。凸多面錐 C の次元は $\underline{m}_1,\cdots,\underline{m}_s$ が張る $\mathbb{Q}$ 上の線形空間の次元と定義する。また、C が単体的であるとは、$\underline{m}_1,\cdots,\underline{m}_s$ として $\mathbb{Q}$ 上線形独立な $\mathbb{Z}^d$ の元が選べるときを言う。

凸多面錐 C の空でない部分集合 C' が C の面であるとは、原点を通る $\mathbb{Q}^d$ の超平面 $\mathcal{H}$ が存在して、C は $\mathcal{H}$ が定める２つの閉半空間 $\mathcal{H}^+$ と $\mathcal{H}^-$ のいずれか一方に含まれ、しかも $C'=\mathcal{H}\cap C$ であるときを言う。凸多面錐 C の面は再び $\mathbb{Q}^d$ の凸多面錐である。

他方、$\mathbb{Q}^d$ の凸多面錐 C の双対凸多面錐 $C^\vee$ を

$$C^\vee:=\{\underline{x}\in\mathbb{Q}^d\,;\,\langle\underline{x},\underline{y}\rangle\geqq0,\ {}^\forall\underline{y}\in C\}$$

で定義する。

（５.２）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の扇とは、$\mathbb{Q}^d$ の凸多面錐の有限集合 $\mathcal{F}$ であって、以下の条件を満たすものである：

（ｉ）$\mathcal{F}$ のそれぞれの凸多面錐 C は $\mathbb{Q}^d$ の直線を含まない。つまり $C\cap(-C)=\{0\}$ である。

（ii）$C\in\mathcal{F}$ で C' が C の面ならば $C'\in\mathcal{F}$ である。

（iii）$C,D\in\mathcal{F}$ ならば $C\cap D$ は C と D の共通の面である。

扇 $\mathcal{F}$ が単体的とは、$\mathcal{F}$ を構成するそれぞれの凸多面錐が単体的であるときを言う。また、扇 $\mathcal{F}$ が完備とは、$\bigcup_{C\in\mathcal{F}}C=\mathbb{Q}^d$ であるときを言う。

（5.3）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の扇 $\mathfrak{F}$ があったとき、$\mathfrak{F}$ を構成するそれぞれの凸多面錐 C に対して $X_C := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[C^\vee \cap \mathbb{Z}^d])$ と定義する。このとき C' が C の面であれば $X_{C'}$ は X_C の開集合となる。すると、C と D が扇 $\mathfrak{F}$ の凸多面錐ならば $C \cap D$ は C および D の面だから X_C と X_D を開集合 $X_{C\cap D}$ に沿って貼り合わすことができる。結局 $\{X_C\}_{C\in\mathfrak{F}}$ をすべて貼り合わせ、$X(\mathfrak{F}) := \bigcup_{C\in\mathfrak{F}} X_C$ を得る。これを扇 $\mathfrak{F}$ に付随するトーリック多様体と呼ぶ。

（5.4）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の扇 $\mathfrak{F}$ に付随するトーリック多様体 $X(\mathfrak{F})$ は d 次元の正規複素多様体である。更に、$X(\mathfrak{F})$ が完備となるための必要十分条件は $\mathfrak{F}$ が完備扇となることである。他方、$X(\mathfrak{F})$ が非特異であるための必要十分条件は、扇 $\mathfrak{F}$ のそれぞれの凸多面錐 C が $\mathbb{Z}^d$ の $\mathbb{Z}$ －基底の一部で $\mathbb{Q}_+$ 上生成されることである。特に、$X(\mathfrak{F})$ が非特異であれば扇 $\mathfrak{F}$ は単体的となる。

（5.5）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の完備扇 $\mathfrak{F}$ を構成する次元 d の凸多面錐全体の集合を $\mathfrak{F}_d$ で表す。連続写像 $\rho: \mathbb{Q}^d \to \mathbb{Q}$ が扇 $\mathfrak{F}$ に関して区分的に線形であるとは、$\mathfrak{F}_d$ の元に添字付けられた $\mathbb{Q}^d$ の元の集合 $\{\alpha_C\}_{C\in\mathfrak{F}_d}$ が存在して $\rho(\mathbf{x}) = \langle \alpha_C, \mathbf{x} \rangle$, $\forall \mathbf{x} \in C$, が成立することである。このとき ρ が上に凸、つまり $\rho(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \geq \rho(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{y})$ $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^d)$ となるためには、不等式 $\langle \alpha_C, \mathbf{x} \rangle \geqq \rho(\mathbf{x})$ が任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^d$ に対して成立することが必要十分条件である。更に、等式 $\langle \alpha_C, \mathbf{x} \rangle = \rho(\mathbf{x})$ が成立するのは $\mathbf{x} \in C$ かつそのときに限るならば ρ は扇 $\mathfrak{F}$ に関して狭義に上に凸であると呼ばれる。

完備扇に付随するトーリック多様体が射影的であるための必要十分条件は、その扇に関して狭義に上に凸である区分的に線形な連続写像が存在することである。

（5.6）線形空間 $\mathbb{Q}^d$ の完備扇 $\mathfrak{F}$ は単体的であると仮定し、f_i $(0 \leqq i < d)$ で $\mathfrak{F}$ に含まれる $i+1$ 次元の凸多面錐の個数を表し、公式（★）で数列 $h_0, h_1, \cdots, h_d$ を定義する。このとき、$\mathfrak{F}$ に付随するトーリック多様体 $X(\mathfrak{F})$ の cohomology 環 $H^*(X(\mathfrak{F});\mathbb{C})$ は偶数次元のところのみが出現し $H^*(X(\mathfrak{F});\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=0}^{d} H^{2i}(X(\mathfrak{F});\mathbb{C})$ であって、しかも

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(X(\mathfrak{F});\mathbb{C}) = h_i \quad (i = 0, 1, \cdots, d)$$

である。更に $X(\mathfrak{F})$ が射影的であると仮定すると強 Lefschetz 定理が成立する。つまり $H^2(X(\mathfrak{F});\mathbb{C})$ の或る元 ω が存在して

$$H^{2i}(X(\mathfrak{F});\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega^{d-2i}} H^{2(d-i)}(X(\mathfrak{F});\mathbb{C}), \quad 0 \leqq i \leqq [d/2],$$

が同型写像となる。すると $H^{2i}(X(\mathcal{F});\mathbb{C}) \xrightarrow{\omega} H^{2i+2}(X(\mathcal{F});\mathbb{C})$ は、任意の $0 \leqq i < [d/2]$ で単射、任意の $[d/2] \leqq i < d$ で全射となる。従って、数列 $h_0, h_1, \cdots, h_d$ は（対称であって、しかも）単峠 $h_0 \leqq h_1 \leqq \cdots \leqq h_{[d/2]}$ である（［１２］）。

（５.７）凸多面体 $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 Δ が与えられたとき、Δ から自然に単体的完備扇 $\mathcal{F}(\Delta)$ が構成できる。すなわち Δ の各単体 σ に対し、原点を端点とし σ を通過する半直線全体の和集合を $C(\sigma)$ と置けば $C(\sigma)$ は単体的凸多面錐となり、そのような $C(\sigma)$ の全体の集合が所期の単体的完備扇 $\mathcal{F}(\Delta)$ である。このとき、$X(\mathcal{F}(\Delta))$ が非特異となるための必要十分条件は Δ が圧縮的となることである。もちろん $X(\mathcal{F}(\Delta))$ は（たとえ非特異であると仮定しても）必ずしも射影的であるとは限らない。他方、$X(\mathcal{F}(\Delta))$ が非特異かつ射影的であれば $\delta(\mathcal{P})$ は単峠である。

すると、$X(\mathcal{F}(\Delta))$ が、非特異かつ射影的となる $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 Δ が存在する $\mathcal{P} \in \mathcal{C}^*(d)$ から生起する δ－列は、球面の三角形分割から得られる単峠な h－列でもある。[2)] そこで、数え上げの組合せ論に登場する著名な有限数列から、そのような数列を構成することを試みよう。

【６】半順序集合に付随する凸多面体

有限半順序集合 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_d\}$ の添字付けは“ Y で $y_i < y_j$ ならば $\mathbb{Z}$ で $i < j$ である”という性質を持つと仮定する。いま Y に含まれる鎖（全順序部分集合）の濃度の最大値を ℓ と置き、また、$y \in Y$ のとき $y = z_0 < z_1 < \cdots < z_m$ なる Y の鎖が存在するような整数 $m \geqq 1$ の最大値を $r(y)$ で表す。我々は $\mathbb{R}^d$ の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d)$ で以下の条件を満たすものの全体を Q_Y で表す：

（ｉ） $0 \leqq \alpha_i + r(y_i) \leqq \ell + 1 \ (i = 1, 2, \cdots, d)$ であり、更に、

（ii） $y_i > y_j$ ならば $\alpha_i + r(y_i) \leqq \alpha_j + r(y_j)$ である。

すると、Q_Y は $\mathbb{R}^d$ の d 次元整凸多面体であって、原点を内部に含む。すなわち $Q_Y \in \mathcal{C}_0(d)$ である。

補題 $Q_Y \in \mathcal{C}^*(d)$ となるための必要十分条件は、Y が純、つまり Y に含まれる極大鎖の濃度がすべて等しいことである。

---

2) 球面の三角形分割から得られる h－列は単峠数列である、という予想は、数え上げの組合せ論の未解決予想の最高峰である。

定理（[6]，[7]）　半順序集合 Y が純なとき $Q_Y \in \mathcal{C}^*(d)$ の境界 ∂Q_Y の総格子型三角形分割 Δ で、それに付随するトーリック多様体 $X(\mathcal{F}(\Delta))$ が非特異かつ射影的であるものが存在する。

他方、$w_i = w_i(Y)$，$0 \leq i < d$，で、次の条件を満たす $\{1, 2, \cdots, d\}$ の置換 $\pi = c_1 c_2 \cdots c_d$ の個数を表す：

（i）$y_{c_p} < y_{c_q}$ 　ならば　$p < q$　であって、更に、

（ii）$\#(\{p ; c_p > c_{p+1}\}) = i$ 　　である。

すると、$w_0 = 1$ である。また、$s := \max\{i ; w_i \neq 0\}$ と置けば、$s = d - \ell$ となる。我々は、数列 $w(Y) = (w_0, w_1, \cdots, w_s)$ を Y の w－列と呼ぶことにする。

一般に、$\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i \in \mathbb{R}[[\lambda]]$ で $\ell > 0$ が整数のとき $[\varphi(\lambda)]^{(\ell)} := \sum_{i=0}^{\infty} u_{i\ell} \lambda^i$ と定義する。

命題　整凸多面体 Q_Y の δ－列を $(\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_d)$ とすれば、等式

$$(**) \quad \sum_{i=0}^{d} \delta_i \lambda^i = \left[(1+\lambda+\cdots+\lambda^{\ell})^{d+1} \sum_{j=0}^{s} w_j \lambda^j\right]^{(\ell+1)}$$

が成立する。

系　半順序集合 Y は純であると仮定し、$(w_0, w_1, \cdots, w_s)$ を Y の w－列とせよ。このとき、公式（＊＊）で定義される組合せ論的数列 $(\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_d)$ は（対称かつ）単峰である。

【7】将来の課題　一対称な δ－列の組合せ論的構造の解明一

凸多面体の Ehrhart 多項式の理論の最終目標は、整凸多面体から生起する δ－列の組合せ論的特徴付けを探すことであるが、その中継地点となるのは、対称な δ－列の組合せ論的構造の解明である。以下、対称 δ－列を研究する際の指針となる具体的な研究課題を列挙しよう。

（1）対称な δ－列を持つ整凸多面体は、その双対凸多面体が整凸多面体であるという条件で特徴付けられたのである【3】が、もちろん、$\delta(\mathcal{P}) = \delta(\mathcal{Q})$ かつ $\delta(\mathcal{P}^*) \neq \delta(\mathcal{Q}^*)$ となる整凸多面体 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は容易に構成できる。しかし、$\delta(\mathcal{P})$ と $\delta(\mathcal{P}^*)$ の間には何らかの因果関係が存在すると期待でき、その因果関係を探るために、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^*$ の組合せ論的相互関係を詳細に検討する。なお、現在の段階では、$\mathcal{P}$ の面の集合と $\mathcal{P}^*$ の面の集合の間に Galois 対応の類似が成立するといった古典的な

結果を除くと、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^*$ の相互関係は十分には解明されていないようである。

（２）対称な δ - 列を持つ整凸多面体 $\mathcal{P}$ の境界 $\partial\mathcal{P}$ の総格子型三角形分割 Δ から構成される完備なトーリック多様体 $X(\mathcal{F}(\Delta))$ が非特異かつ射影的であれば、$\delta(\mathcal{P})$ が単峠であることを述べた【５】が、射影的であるという条件を取り除き、単に $X(\mathcal{F}(\Delta))$ が非特異であると仮定するだけで $\delta(\mathcal{P})$ の単峠性が従うことが証明できないだろうか？

（３）次元 d の整凸多面体から生起する対称 δ - 列で、それが同時に $d-1$ 次元の球面の三角形分割から得られる h - 列となっているものの組合せ論的特徴付けを探せ。なお、$d \geqq 4$ のとき、次元 d の整凸多面体から生起する対称 δ - 列で、それが $d-1$ 次元の球面の三角形分割から得られる h - 列には決してならないものが存在する。

（４）純な半順序集合から構成される、【６】で考察した、整凸多面体の双対凸多面体の δ - 列はどうやって計算すればいいのであろうか？また、そのような双対凸多面体の境界の総格子型三角形分割で圧縮的なものが常に存在するであろうか？

（５）整数 $d>1$ を固定したとき、次元 d の整凸多面体から生起する対称 δ - 列は、有限個しか存在しないことが証明できるのであるが、しからば、その個数をちゃんと求めることは可能であるか？

（６）中心的対称な整凸多面体や単体的整凸多面体などの、組合せ論的性質が比較的良く知られている凸多面体の類から生起する対称 δ - 列に限って理論を展開させる。例えば、中心的対称な整凸多面体を考察する際には、凸体の体積についての Minkowski の基本定理が、我々の理論に有効となるであろう。

参考文献

[1] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, *Russian Math. Surveys* **33** (1978), 97 - 154.

[2] E. Ehrhart, "Polynômes arithmétiques et Méthode des Polyèdres en Combinatoire," Birkhauser, Basel and Stuttgart, 1977.

[3] T. Hibi, Some results on Ehrhart polynomials of convex polytopes, *Discrete Math.* **82** (1990), in press.

[4] ______, Dual polytopes of rational convex polytopes, submitted.

[5] ______, A combinatorial self-reciprocity theorem for Ehrhart quasi-polynomials of rational convex polytopes, submitted.

[6] ______, Ehrhart polynomials of convex polytopes, h-vectors of simplicial complexes and non-singular projective toric varieties, Proc. of the Workshop on Polytopes and Convex Sets held at Rutgers University (January 8 - 12, 1990), submitted.

[7] ______, Toric varieties arising from canonical triangulations of poset polytopes are projective, preprint.

[8] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, *Ann. of Math.* **96** (1972), 318-337.

[9] T. Oda, "Convex Bodies and Algebraic Geometry (An introduction to the theory of toric varieties)," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1988.

[10] R. P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, *Stud. Appl. Math.* **54** (1975), 135-142.

[11] ______, Hilbert functions of graded algebras, *Advances in Math.* **28** (1978), 57 - 83.

[12] ______, The number of faces of a simplicial convex polytope, *Advances in Math.* **35** (1980), 236-238.

[13] ______, Decompositions of rational convex polytopes, *Annals of Discrete Math.* **6** (1980), 333-342.

[14] ______, "Enumerative Combinatorics, Volume I," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1986.

The existence of periodic solutions for time dependent non linear oscillations

James Damon (Univ. North Carolina) July 16, 1990

Summary :

~~In~~ This lecture was discussed the general problem of how to determine the number of solutions for nonlinear problems. It then specialized to the case of the number of periodic solutions for time dependent non linear oscillations of the form

$$x'' + \lambda^2 x + P(x, x', t) = q(t)$$

for P, q periodic in t of period $2\pi/\lambda$.

The early motivation for such problems came from partial differential equations such as nonlinear Dirichlet problem

$$\Delta u + \lambda u + P(u) = g(x) \quad \text{on smooth domain with bdry } \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

The determination of the number of solutions to this problem for $P(u) = u^2$ by Ambrosetti-Prodi and ~~for~~ $P(u) = u^3$ by Berger-Church-Timourian was achieved by describing the structure of the nonlinear operator

$F(u) = \Delta u + \lambda u + P(u) : C_0^{2+\alpha}(\bar\Omega) \to C^\alpha(\bar\Omega)$

for $-\lambda$ the first eigenvalue of Δ

as a local mapping of the form $f_1 \times id_E$ with f_1 a finite dimensional mapping and E a Banach space.

This holds quite generally for operators which are infinitesimally stable. these are operators which have a restriction to a finite dimensional subspace to give a mapping f_1 which is infinitesimally stable. Then, the local structure of such operators can be described

Thm 1: f infinitesimally stable $\Rightarrow$ f locally equivalent to $f_1 \times id_{E'}$.

Thm 2: For nonlinear oscillations the operator

$$(*) \quad F(x) = x'' + \lambda^2 x + P(x, x', t) : C^2_{2\pi/\lambda} \to C^0_{2\pi/\lambda}.$$

1) is infinitesimally stable for P of degree n when we are allowed a generic choice of the Fourier coefficients of order $\le r$ (for appropriate r) of the coefficients of the nonlinear terms $x^i x'^j$ in P
2) Given an infinitesimally stable $f_1 : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ with $\dim_{\mathbb{R}} \ker df_1(0) = 2$ there is a P such that F in (*) is locally equivalent to $f_1 \times id_{E'}$.

The local number of solutions to the finite dimensional equation $f_1(x) = y_0$ may be counted with the aid of a theorem of the lecturer and A. Galligo

Thm 3: For infinitesimally stable $f_1 : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ the maximum number of solutions to $f(x) = y_0$ for y_0 near 0 is given by $\dim_{\mathbb{R}} Q(f_1)$ where $Q(f_1)$ is the local algebra of f_1.

Taken with earlier results, it implies

Thm 4: Given ** $x'' + \lambda^2 x + P(x, x', t) = q(t)$ with F infinitesimally stable, then number of periodic solutions occurring near 0 for appropriate choice of $q(t)$ is $\dim_{\mathbb{R}} Q(f_1)$.

From $f_0(x,y) = (x^{n+1}, y^{n+1})$, it is possible to construct a stable mapping f_1 with local algebra $Q(f_1) \simeq \mathbb{R}\{x,y\}/(x^{n+1}, y^{n+1})$ of dim $= (n+1)^2$. For this f_1, the P in 2) of thm 2 has degree $2n$. Thus, there are nonlinear oscillations of degree $2n$ with $(n+1)^2$ periodic solutions. This exceeds by a factor of n the number known to exist by earlier work of Golubitsky-Langford, Takens, Lins-de Melo-Pugh, Shasshahani, etc.

On Exterior Problem for the Incompressible Flow

Hideo Kozono

Department of Applied Physics, Nagoya University

This work is done by H.Sohr at the University of Paderborn in West Germany and myself.

Abstract.

In an exterior domain Ω in $\mathbf{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$, we consider the Stokes equations:

$$\text{(S)} \quad -\Delta u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega.$$

Let $1 < q < \infty$ and N_q be the set of all generalized solutions $\{u, p\} \in H^{1,q}_{loc}(\bar{\Omega})^n \times L^q(\Omega)$ of (S) satisfying

$$\int_\Omega |\nabla u(x) - A|^q dx < \infty,$$

where A is an $n\times n$-matrix with $\mathrm{Tr}.A = 0$. In particular, $N_q^0 = \{\{u, p\} \in N_q; \int_\Omega |\nabla u(x)|^q dx < \infty\}$. Then we get the following result:

THEOREM. (1) <u>Let</u> $1 < q \leqq n/(n-1)$ <u>for</u> $n \geqq 3$ <u>and</u> $1 < q < 2$ <u>for</u> $n = 2$. <u>Then</u> $\dim N_q = n^2 - 1$, $\dim N_q^0 = 0$.

(2) <u>Let</u> $n/(n-1) < q < \infty$ <u>for</u> $n \geqq 2$. <u>Then</u> $\dim N_q = n^2 + n - 1$, $\dim N_q^0 = n$.

(3) <u>Let</u> $n = q = 2$. <u>Then</u> $\dim N^2 = 3$, $\dim N_0^2 = 0$.

As an application of the above theorem, we obtain the following generalization of the Stokes paradox:

Corollary. There is no solution u of (S) in the class $\int_\Omega |\nabla u(x)|^q dx < \infty$ for $1 < q \leqq n/(n-1)$, $n \geqq 2$ such that

$$u(x) \to u^\infty \quad \text{as } |x| \to \infty,$$

where u^∞ is the non-zero constant vector in $\mathbf{R}^n$.

We can also apply this theorem to the solvability of the inhomogeneous Stokes equations and the Navier-Stokes equations.

Singularities with maximal depth

by Lê Dũng Tráng.

In this lecture we introduce the notion of rectified homotopical depth of a singular complex analytic space due to A. Grothendieck in SGA 2, Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Masson and North-Holland Pub., 1968. Let X be a complex analytic space and let Y be a complex analytic subspace.

Definition. *The space X has homotopical depth $hd_Y(X,x) \geq n$ at x along Y, if there is an open neighbourhood U of x in X, such that for any $y \in Y \cap U$, there is a good neighbourhood V of y in X such that the pair $(V, V-Y)$ is $(n-1)$-connected.*

Of course, the integer $hd_Y(X,x)$ is the maximum of the set of n as in the definition above.

We recall the definition of good neighbourhoods (due to D. Prill). It can be done in the framework of general topological spaces:

Let Y and Z be topological subspaces of a topological space X, we can define:

Definition. *A neighbourhood U of Z in X is called a good neighbourhood of Z with respect to Y, if there are subsets $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ which satisfy the following conditions:*
i) The family $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ is a neighbourhood basis of the Z in X;
ii) Each pair $(U_\alpha, U_\alpha - Y)$ $(\alpha \in A)$ is a deformation retract of $(U, U-Y)$.

Suppose that $Z = \{x\}$, X is subanalytic and embedded in $\mathbf{R}^N$. There is $\epsilon_0 > 0$, such that, for any ϵ, $\epsilon_0 \geq \epsilon > 0$, the intersection $X \cap B_\epsilon(x)$ of X with the open ball $B_\epsilon(x)$ of $\mathbf{R}^N$ centered at x with radius $\epsilon > 0$, is a good neighbourhood of x in X with respect to Y.

Now we can define the rectified homotopical depth of a complex analytic space X at a point $x \in X$.

Definition. *We say that the rectified homotopical depth $rhd(X,x)$ of X at the point x is $\geq n$, if, for any analytically closed subspace Y of X, there is an open neighbourhood U of x in X, such that the homotopical depth of $X \cap U$ at any point of $Y \cap U$ along $Y \cap U$ is $\geq n - dimY$.*

Of course, the integer $rhd(X,x)$ is the maximum of the set of integers n as in the definition above.

The rectified homotopical depth was introduced by Grothendieck to get the best level of comparison for the homotopy type of a projective variety and its hyperplane sections. In particular A. Grothendieck conjectured:

1. Let V be a projective variety and $V \cap H$ a hyperplane section, then the pair $(V, V\cap H)$ is $(n-1)$-connected, with $n = rhd(V) := \inf_{x\in V} rhd(V,x)$.
2. If V is non-singular at x then $rhd(V,x) = dim_x V$.
3. If Z is defined by k equations in X, then for any $x \in Z$, we have $rhd(Z,x) \geq rhd(X,x) - k$. Then if (X,x) is a complete intersection we have $rhd(X,x) = dim_x X$.

These conjectures are true and are proved by using the following result which allows us to calculate the rectified homotopical depth:

Theorem. *Let X be a reduced complex analytic space and x be a point of X. Let $\mathcal{S} = (X_i)_{i\in I}$ be a Whitney stratification of X. The following conditions are equivalent:*
a) $rhd(X,x) \geq n$;
b) for any $i \in I$, such that the point x belongs to the closure of the stratum X_i, the homotopical depth $hd_{X_i}(X)$ is $\geq n - dimX_i$.

In particular, from this theorem, the conjecture 2 above is trivial.

It is easy to see that we always have $rhd(X,x) \leq dim_x X$. We say that X has maximal homotopical depth at x if $rhd(X,x) = dim_x X$.

In the same way as above we can define the rectified homological depth (resp.the rectified rational homological depth) and spaces with maximal homological depth (resp.maximal rational homological depth).

Following M. Goresky and R. MacPherson we define the complex link of a Whitney stratum. Let X be a complex analytic space. We consider a Whitney stratification $\mathcal{S} = (X_i)_{i \in I}$ of X. We set $dim X_i = d_i$.

Theorem. *In the space of linear projections of $\mathbf{C}^N$ onto $\mathbf{C}^{d_i+1}$, there is an open dense set Ω, such that, for any $p \in \Omega$, there is $\epsilon_0 > 0$, such that, for any ϵ, $\epsilon_0 > \epsilon > 0$, there is α_ϵ, such that, for any α, $\alpha_0 > \alpha > 0$, the projection p induces a map p_0 of $U := B_\epsilon(x) \cap X \cap p^{-1}(D_\alpha(p(x)))$ into the open ball $V := D_\alpha(p(x))$ and there is a closed complex hypersurface Δ of V, such that p_0 is a locally trivial fibration over $V - \Delta$. Furthermore the homotopy type of the general fiber $\mathcal{L}_i$ of this fibration is an analytic invariant of the germ (X, x).*

We call complex link of X_i in X the homotopy type of the general fiber $\mathcal{L}_i$ of the fibration obtained in the preceding theorem. On can show that it does not depend on the choice of $x \in X_i$.

It will be convenient to introduce the normal slice $\mathcal{N}_i$ of X_i in X, by considering the cone of $\mathcal{L}_i$ at x. We have the following theorem:

Theorem. *Let X be a complex analytic space and x be a point in X. Let $\mathcal{S}$ be a Whitney stratification of X. The following conditions are equivalent:*

a) *$rhd(X, x) \geq n$;*

b) *for any stratum S which contains x in its closure, the pair $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ of a normal slice and a complex link of S in X is $(n - dim S - 1)$-connected.*

From this theorem it is immediate that:

Theorem. *Let X be a complex analytic space and x be a point in X. Let $\mathcal{S}$ be a Whitney stratification of X. The following conditions are equivalent:*

a) *The space X has maximal homotopical depth (resp.maximal homological depth, resp.maximal rational homological depth) at x;*

b) *for any stratum S which contains x in its closure, a complex link $\mathcal{L}$ of S in X has the homotopy type (resp.the homology type, resp.the rational homology type) of a bouquet of spheres of real dimension $n - dim S - 1$.*

The proof of this theorem is based on the:

Lemma. *A $(d-1)$-connected CW-complex E of dimension d has the homotopy type of a bouquet of spheres of (real) dimension d.*

It leads to a generalisation of Milnor theorem for complex analytic functions with isolated singularity.

Definition. *We say that a complex analytic function f defined on X has an isolated singularity at the point x, if there is a Whitney stratification $\mathcal{S}$ of X and an open neighbourhood U of x, such that the restriction of f to the strata of $\mathcal{S}$ has rank 1 at any point of $U - \{x\}$.*

Theorem. *Let X be a complex analytic space and x be a point of X. Consider a complex analytic function f defined on X and suppose it has an isolated singularity at x. Then if X has maximal homotopical depth at x, a general fiber of f at x has the homotopy type of a bouquet of spheres of real dimension $dim_x X - 1$.*

We shall say that a space X has the homotopy (resp.homology, resp.rational homology) Milnor property at x if for any complex analytic function f defined on a neighbourhood of x in X which has an isolated singularity at x, a general fiber of f at x has the homotopy type (resp.the homology type, resp.the rational homology type) of a bouquet of spheres of real dimension $dim_x X - 1$.

We can prove:

Theorem. *A space X has the homotopy (resp. homology, resp. rational homology) Milnor property at x, if the complex link of $\{x\}$ in X has the homotopy type (resp.the homology type, resp.the rational homology type) of a bouquet of spheres of middle dimension and the complex links of the strata of dimension ≥ 1 of a Whitney stratification of X which contain x in their closures have the homology type (resp.the homology type, resp.the rational homology type) of a bouquet of spheres of middle dimension.*

In particular the constant sheaf $\mathbf{Q}_X$ is perverse if and only if X has maximal rational homological depth. Therefore it is also perverse if X has maximal homotopical (resp.homological) depth.

Classification of germs of contracting maps and classification of compact complex surfaces

GEORGES DLOUSSKY

University of Provence

The study of Hopf surfaces is based on the classification of germs of invertible contracting holomorphic mappings, i.e. of germs

$$f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$$

which are invertible and s.t. $Df(0)$ has eigenvalues a, b satisfy

$$0 < |a| \leq |b| < 1$$

the following theorem gives normal forms of these germs i.e. the simplest elements of the equivalence classes by the equivalence relation

(*) $f \sim f' \Leftrightarrow \exists \varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ which is invertible and $\varphi f = f' \varphi$.

On Intrinsic Measures of Complex Manifolds

SHOSHICHI KOBAYASHI

University of California, Berkeley

We give a brief survey of intrinsic measures on complex manifolds. Since the publication of [3] and [6] in 1970, some progress has been made on the subject. However, intrinsic measures are much harder to work with than intrinsic metrics. So the results obtained so far are not as extensive as the results on intrinsic metrics. Since the first Chern class of a manifold is represented (up to a constant factor) by the Ricci form of a Hermitian metric and since the intrinsic measure seems to be closely related to the Ricci form, the intrinsic measure may possibly play some roles in algebraic geometry of complex manifolds.

単純群分類のrevisionismについて

鈴木通夫

1990, 8月1日

単純群の分類定理は有限群論の基本的な結果であるがその証明は異常に長く、多くの人々の長年にわたる結果のつみ積ねであるので、その証明が完成した時点では、まだ十分に整理されていたとはいい難い。revisionismは、分類定理の証明をまとめ、簡易化をはかることを目的とする。Gorenstein, Lyons, Timmesfeldをはじめ我が国でも五味，林などの人達がこの方向に研究を進めている。ここではGorenstein, Lyons, R. Solmonによる、いわゆる"generic case"についての現況を簡単にのべた。

更に現在の有限群論及び表現論の結果2,3に言及し H. Ellers と G. Hill によるBrauer対応に関する結果および、一般有限群に対してinjectorの概念を定義し、その共役性をLinear groupsについて証明したSheu、その他の人の結果について述べた。

Sheuの定理の証明に当って、$n \times n$ 行列のつくる群 $GL(n, q)$ の部分群で級が c の nilpotent 部分群の位数の最大値が$(H)q^t$、ここで t は $\max \sum_{i<j} n_i n_j$ $(n=\sum_{i=0}^{c} n_i)$ で与えられることが必要となった。この結果は $GL(n, q)$ の可換部分群の位数が $(q-1)q^s$ $s=[\frac{n^2}{4}]$ を越えないというSchurの古い結果の拡張となっている。この最大値をとる巾零部分群の構造は？という問題は未解決である。（同形になるわけではない。）

~~injectorの定義は次の通り。有限群Gの部分群Hがinjectorであるというのは、Hが巾零であり、次の条件をみたす~~.

Effects Of Environmental Pollution On The Survival Of Populations

Zhien Ma

Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University
Xi'an 710049 China

Abstract

Organisms in the world are often exposed to the polluted environment and are invaded by the toxicant. Hence the study of effects of the toxicant to a population or a community is quite important. In this synthetical report a series of studies on this topic will be introduced. These studies have been done by the author, cooperator and author's students from 1983 to now. The main question solved by these work is to ~~investigate~~ find the threshold between persistence and extinction for some population or community models invaded by toxicant. From mathematics point of view, the question is to investigate the asymptotic behavior of the solutions of some nonlinear and nonautonomous systems.

If the capacity of the environment is so large that the change of toxicant in the environment, which comes from the uptake and egestion of the organisms, can be neglected, the threshold between persistence and extinction for Kolmogorov population model and Lotka-Volterra community model have beed obtained.

For Lotka-Volterra model with time dependent coeffecients we got some sufficient conditions to guarantee the uniform persistence of the community and to guarantee any solution of that model is globelly asymptotically stable.

It also be proved that time delay is harmless to uniform persistence and persistence in the mean for Volterra model.

In the reality, a low density population should go to extinction in a finite time if the population is under extreme stress. In this case we proposed a concept — β-persistence and β-extinction and given a simple method to get the threshold between β-persistence and β-extinction of a population within a given finite time interval.

If the toxicant of the uptake and egestion of the organisms could not be neglected, some sufficent conditions, under which a population or a community is persistent or extinct, have been obtained and the threshold has been gotten in most situations.

A toxicant-individual model is more realistic than above population model. Some sufficent conditions for persistence ~~and~~ or extinction have been obtained

We plan to study toxicant-individual-population models after we know more information about toxicant-individual models, so that the study of population and community in the polluted environment can be developed further.

If we consider the age-structure of a population or a community invaded by toxicant, then the model will become a partial differential ~~equation~~ system. Only a few papers I have seen in this field and the results ~~are not so good~~ still need to improve.

Introduction of the last part of the book "Approche de la résurgence", by B. Candelpergher, J.C. Nosmas and F. Pham (to appear).
This summarizes a talk given by F. Pham in Sapporo on September 3, 1990.

EPILOGUE :

RESURGENCE des FLEUVES

Cet épilogue est l'histoire d'une rencontre: celle des idées de **F. et M. Diener** avec les idées de **J.Ecalle**. Le cadre en a été le séminaire **"Résurgence et analyse non standard"** organisé avec F.Diener à Nice en 1988-89, avec comme impulsion initiale les questions de F. et M.Diener sur les développements asymptotiques des "fleuves". Dans leur apparente simplicité, ces questions ont été pour nous tous un extraordinaire "révélateur", à la fois des possibilités de la théorie d'Ecalle et de l'insuffisante maîtrise que nous en avions. Les lignes qui suivent sont le reflet des discussions passionnées entre participants du séminaire, et des explications qu'Ecalle nous a prodiguées sous forme de lettres, échanges téléphoniques, conversations et exposés au séminaire parisien de F. et M.Diener.
Que tous en soient ici remerciés.

0. - PRESENTATION du PROBLEME.

Tracés par un ordinateur (cf. [AG]), les portraits de phase des champs de vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$ présentent génériquement des concentrations infinies de trajectoires, en violation apparente du principe de Cauchy d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Ces trajectoires qui tendent à "canaliser" toutes les trajectoires voisines ont été appelées *fleuves* par F. et M. Diener, qui ont découvert et étudié systématiquement le phénomène [D].

La Fig. 1 est l'exemple favori de F. et M. Diener : extrait de [AG], c'est le portrait de phase de l'équation de Liouville $Y' = Y^2 - X$. On y voit très nettement deux types de fleuves partant à l'infini vers la droite :

1°) une trajectoire asymptotique à $Y = \sqrt{X}$, d'où semblent "surgir" une infinité de trajectoires qui s'en écartent très rapidement (*"fleuve répulsif"*) ;

2°) une "confluence" très marquée, asymptotique à $Y = -\sqrt{X}$, de trajectoires s'attirant mutuellement (*"fleuve attractif"*).

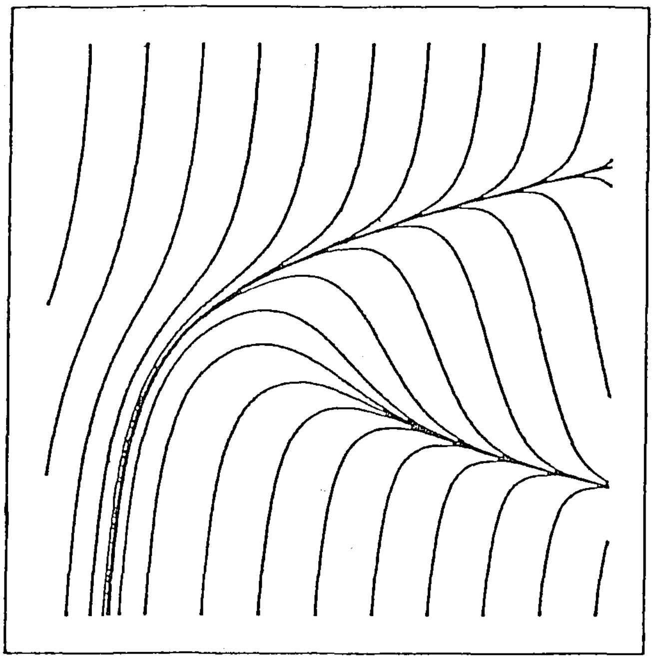


Fig. 1

Portrait de phase de l'équation de Liouville $Y' = Y^2 - X$

On peut s'étonner qu'un phénomène aussi frappant et aussi répandu (cf. [D]) soit resté si longtemps inaperçu des géomètres. Sans doute est-ce parce que le géomètre, "sachant" que par un point ne passe qu'une seule trajectoire, s'arrangera toujours pour que son dessin n'entre pas en contradiction avec ce principe. Pour ouvrir les yeux sur le phénomène des fleuves il fallait donc l'innocence de l'ordinateur, ou de disciples de G. Reeb.

Considérons maintenant un autre type d'innocence, celui d'un étudiant du 1er cycle universitaire, et proposons lui l'exercice suivant :

Exercice : Résoudre l'équation $Y' = Y^2 - X$ sous forme de développement en série de

puissances demi-entières décroissantes de X.
Habitué à ce que tout exercice posé par le professeur admette une solution, l'étudiant ne sera pas étonné de trouver une solution *unique* (à la détermination de $X^{1/2}$ près) :

$$Y = X^{1/2} + \frac{1}{4X} - \frac{5}{32X^{5/2}} + \dots \qquad \textbf{(0)}$$

Si c'est un bon étudiant, il se dira peut-être que (0) n'est qu'une solution particulière *parmi une infinité d'autres non exprimables sous cette forme.* S'il maîtrise parfaitement le livre "Calcul infinitésimal" de Dieudonné, il soupconnera peut-être que la série formelle (0) est, pour $X^{1/2} = \sqrt{X}$, un développement asymptotique de la trajectoire que nous avons appelée "fleuve répulsif", et pour $X^{1/2} = -\sqrt{X}$ un développement asymptotique des trajectoires groupées sous l'étiquette "fleuve attractif".

C'est alors que le maître intervient pour lui révéler que la série (0) est divergente (cf. [D3]), et pour poser sa

QUESTION : Existe-t-il un procédé de "sommation" permettant, à partir de la seule donnée de la série (0), de reconstruire toutes les solutions de l'équation différentielle ?

Nous allons montrer qu'à condition de se restreindre à des "bassins" convenables au voisinage de l'infini, la réponse est *oui*, précisément parce que la série est divergente.

A. A. Ivanov

On characterization of association schemes by parameters.

The talk concerns characterization problem of (P and Q)-polynomial association schemes in terms of their parameters.

A symmetric association scheme with d classes (or just a scheme) $Y = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ is a finite set X along with symmetric relations $R_0, R_1, \dots, R_d$ satisfying the following axioms:

(i) $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}$ is a diagonal relation;

(ii) for each $x, y \in X$ the inclusion $(x,y) \in R_i$ holds for exactly one i;

(iii) for each triple $0 \le h, i, j \le d$ and for each pair $(x,y) \in R_h$ the cardinality of the set $\{z \mid (x,z) \in R_i, (y,z) \in R_j\}$ does not depend on (x,y) and is denoted by p_{ij}^h.

The integers p_{ij}^h are called the parameters of the association scheme Y.

Let Y be a given association scheme with the parameters p_{ij}^h, $0 \le i, j, h \le d$. The characterization problem of Y by its parameters implies description up to isomorphism of all association schemes whose parameters coincide with those of Y.

The characterization problem in terms of parameters is of particular interest for the schemes possessing both P-polynomiality and Q-polynomiality properties. We give a brief account of the present situation in this area.

A significant progress in characterization of (P and Q)-polynomial schemes in terms of parameters gives a realization of the scheme by vectors in a vector space over $\mathbb{R}$ where the inner products are determined by the relations in the scheme. As an illustration we give a completely elementary characterization for the odd graphs O_k. This result was firstly proved by A. Moon using another method.

Along this approach S.V. Shpectorov and the author have characterized the association schemes of Hermitian forms by their parameters.

References

1. E. Bannai, T. Ito, Algebraic Combinatorics I, Association Schemes, Benjamin, 1984.
2. A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer Verlag, 1989.
3. A.A. Ivanov, S.V. Shpectorov, A characterization of the association schemes of Hermitian forms, J. Math. Soc. of Japan (to appear).

FUCHSIAN GROUPS AND 3-MANIFOLDS

ABSTRACT

ANDREW J. CASSON

Any group Γ of orientation-preserving homeomorphisms of the circle S^1 also acts naturally on the 3-manifold T of positively ordered triples of distinct points of S^1.
P. Tukia showed that Γ is a discrete convergence group in the sense of Gehring and Martin if and only if the projection $\pi : T \to T/\Gamma$ is a covering map. It is well-known that Γ is topologically conjugate to a Fuchsian group if and only if, in addition, T/Γ is a Seifert fibered space.

THEOREM. *Every discrete convergence group acting on S^1 is topologically conjugate to a Fuchsian group.*

This implies, by results of G. Mess and P. Scott, that every closed irreducible 3-manifold M such that $\pi_1(M)$ has infinite center is a Seifert fibered space.

The theorem was proved by Tukia in each of the following cases;

1) T/Γ is non-compact,

2) all torsion elements of Γ have order ≤ 3.

To complete the proof, let Γ be a discrete convergence group on S^1 such that $M = T/\Gamma$ is compact and Γ contains an element e of order $m \geq 3$ (chosen to have rotation number $1/m$). Define $E : S^1 \to T$ by $E(x) = (x, ex, e^{-1}x)$. Then $C = \pi E(S^1)$ is a simple closed curve in M, and $\tilde{C} = \pi^{-1}(C) = \bigcup_{g \in \Gamma} gE(S^1)$ is a countable union of circles in T. The remaining steps are as follows.

1) $\tilde{C}$ is a "positive braid" in $T \cong S^1 \times \mathbb{R}^2$ in which each pair of components has exactly two crossings.

2) The pair $(T, \tilde{C})$ is homeomorphic to $(S^1 \times \mathbb{R}^2,\ S^1 \times$ discrete set$)$.

3) If $N = \overline{M \setminus C \times D^2}$ then $\pi_1(N)$ has infinite center.

4) N is Seifert fibered (follows since N is a Haken manifold).

5) M is Seifert fibered (with C as an exceptional fiber).

談話会 アブストラクト　　　　藤田 隆夫

Cを種数gの代数曲線，LをC上のdegree dのample line bundleとする。$\varepsilon=(2g-2)/d$とおき，これがどんな値をとり得るかを考えてみよう。明らかに$\varepsilon\in\mathbb{Q}$，そして$\varepsilon\gtreqless 0 \iff g\gtreqless 1$。$g,d$をいろいろ動かすと$\varepsilon$は$\varepsilon\geq 0$の範囲ではすべての有理数値をとるが，$\varepsilon<0$では$-\frac{2}{d}$というとびとびの値しかとらない。この様子は量子力学におけるエネルギー準位スペクトルによく似ている。さらに「連続スペクトル部分$\leftrightarrow \varepsilon>0 \leftrightarrow$ニュートン力学での双曲軌道$\leftrightarrow$負曲率空間」という対応も観察される。何となく 代数幾何：微分幾何＝量子力学：古典力学＝量子重力理論：一般相対論 という比例式を考えたくなる。

上のεに似た性質を持つ不変量は代数曲線ばかりでなく様々な代数幾何的対象に対しても定義される──例えば 偏極多様体＝複素多様体MとM上のample line bundle Lのpair (M,L)，singularity，affine pair＝代数多様体Vと，V上のeffective divisor Dで$V-D$がaffineなもの，などなど。定義の仕方は対象ごとにちがっていて，一つの対象に対して別種のεがdefされたりする（リーマン多様体の曲率といってもRicci曲率，断面曲率などいろいろあるが如し）が，どの場合もcanonical bundleの性質が基本的である。ε（エネルギーと呼びたい）の取り得る値は連続スペクトル部分と離散スペクトル部分にわかれ，連続スペクトル部分は代数多様体の分類における一般型に対応し，離散スペクトル部分はFano多様体の分類に関連している。こうした現象の背後にある真理はまだ予想として定式化することすらできないものがほとんどであるが，来世紀にかけて研究の進展とともに次第に姿を現わしてくると思われる。だが物理学との関連がどのようになるかは想像もつかない。

Duality for Finite Bipartite Graphs

大阪教育大学　長田まりゑ

Jonesが有限因子環の部分因子環に対する指数理論を導入して以来, A, D, E型のDynkin diagramと超有限連続有限型因子環の部分因子環と指数4以下のものとの間に密接な関係が存在する事が判明してきつつある.

その関係は, Bratteliによって定義されたdiagramとして,表われてくる.

Bratteliは,有限次元C^*-環の組の関係を表わす一手段として,有限二部グラフを用いた。今日,そのようなグラフは,Bratteli diagramと呼ばれる.

一方局所コンパクト群の双対定理と関連して,作用素環の局所コンパクト群による接合積に対する双対定理が竹崎他多くの人々によって,論じられてきている.

その様な観点から,ある種の二部有限グラフに対する双対定理を与えてみたい.

以下Γを二色分けされた有限グラフで,色を保存するような自己同型写像θを持っているものとする.

(1)　グラフΓのθによる双対グラフ$\hat{\Gamma}(\theta)$を定義する. $\hat{\Gamma}(\theta)$を簡単のため$\hat{\Gamma}$で記す. $\hat{\Gamma}$は自然な形式で二色分けされる.

(2)　$\hat{\Gamma}$上でθによって導かれる自己同型写像$\hat{\theta}$を定義する.

(3)　上の操作をもう一度繰り返すと,ある良い状態のもとでは, $\hat{\hat{\Gamma}}$からΓの上への同型写像ϕで,次の性質を充すものが存在する;

$$\phi\cdot\hat{\hat{\theta}} = \theta\cdot\phi$$

連続有限型因子環の部分因子環の構造を調べる為に、Dynkin diagram を用いる場合には、因子環のトレースとの関係で、そのグラフの全ての頂点に、重みを与えることを必要とする。その為に

(4) 二部有限グラフ Γ から行列 mat Γ を導く。$(\mathrm{mat}\,\Gamma)(\mathrm{mat}\,\Gamma)^t$ と $(\mathrm{mat}\,\Gamma)^t(\mathrm{mat}\,\Gamma)$ に対する各々の固有ベクトルを用いることにより Γ の頂点に重みを与える。その様な操作をほどこした上で、重みの与えられた二部グラフとしての $\hat{\Gamma}$ と Γ との間に (3) の型の関係が成立する。

(5) 特に Γ が Dynkin diagram で与えられるグラフのときに、上記のことを適用する。すると条件を充すグラフは A_n（n は奇数）, D_n, E_6 のどれかでなければならないことが判る。これらのグラフに対する同型写像は、Lie 群の factor group の理論で取り扱われる symmetry である。そのとき次の関係が成立する。

(i) すべての n に対して、

A_{2n-3} 型 Dynkin diagram と D_n 型 Dynkin diagram は、互いに他のものの双対グラフとなっている。

(ii) D_4 型 diagram と E_6 型 diagram は夫々、自分自身の双対グラフである。

与えられた二部グラフに対して、重みを与えられたグラフを考えるとき、二種類のグラフが表われる。そのとき重みが与えられたグラフとして考えると

(ii) における対応は、双対グラフは、互いに他の一つになっている。

$$L^2\left(\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z} & \cdots & \mathbb{Z}\\ & 1 & & \vdots\\ & & \ddots & \mathbb{Z}\\ & & & 1\end{pmatrix}\Big\backslash\begin{pmatrix}1 & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R}\\ & 1 & & \vdots\\ & & \ddots & \mathbb{R}\\ & & & 1\end{pmatrix}\right)$$

の既約 unitary 分解（の一部分）

森川寿（名大理）

§1 Heisenberg groups の場合

$$H_n(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix}1 & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R}\\ & 1 & \bigcirc & \mathbb{R}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & 1 & \mathbb{R}\\ & & & 1\end{pmatrix} \qquad 座標\ (\check{x}, \hat{x}, x_0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & \check{x} & x_0\\ & \ddots & {}^t\hat{x}\\ & & 1\end{pmatrix}$$

積 $(\check{x}, \hat{x}, x_0)\circ(\check{y}, \hat{y}, y_0) = (\check{x}+\check{y}, \hat{x}+\hat{y}, x_0+y_0+{}^t\check{x}\hat{y})$

$L^2(H_n(\mathbb{Z})\backslash H_n(\mathbb{R}))$ に $H_n(\mathbb{R})$ が左から

$$f(\check{x}, \hat{x}, x_0) \longmapsto f((\check{x}, \hat{x}, x_0)\circ(\check{y}, \hat{y}, y_0))$$

で unitary 作用する。

$L^2(H_n(\mathbb{Z})\backslash H_n(\mathbb{R}))$ を unitary 分解せよ

定理 (H.M.)

$$\phi^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix}(\tau\,|\,\check{x}, \hat{x}, x_0)$$

$$= \exp[2\pi l\sqrt{-1}x_0]\sum_{\hat{b}\in\mathbb{Z}^n}\exp\left[\pi\sqrt{-1}\,l\left\{(\hat{b}+l^{-1}\hat{a}+\hat{x})\tau\,{}^t(\hat{b}+l^{-1}\hat{a}+\hat{x}) + 2(\hat{b}+l^{-1}\hat{a}+\hat{x})\,{}^t\check{x}\right\}\right]$$

とおくと

イ) $\phi^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix}(\tau\,|\,\check{x}, \hat{x}, x_0)$ $\quad \hat{a}\in\mathbb{Z}^n \bmod l\mathbb{Z}^n$

は $L^2(H_n(\mathbb{Z})\backslash H_n(\mathbb{R}))$ の元である

ロ) $\phi^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix}(\tau\,|\,\check{x}, \hat{x}, x_0)$ の生成する $H_n(\mathbb{R})$-Hilbert module ~~は既約であり~~ $\mathbb{H}^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix}$ は既約であり

$$\mathbb{H}^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix} \sim \mathbb{H}^{(h)}\begin{bmatrix}h^{-1}\hat{b}\\ 0\end{bmatrix} \iff l = h$$

$$\mathbb{H}^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix} \not\sim \overline{\mathbb{H}^{(h)}\begin{bmatrix}h^{-1}\hat{b}\\ 0\end{bmatrix}}$$

ハ) $$L^2(H_n(\mathbb{Z})\backslash H_n(\mathbb{R})) = \bigoplus_{l,\ \hat{a} \bmod l\mathbb{Z}^n} \mathbb{H}^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix} \oplus \overline{\mathbb{H}^{(l)}\begin{bmatrix}l^{-1}\hat{a}\\ 0\end{bmatrix}}$$

$$\bigoplus_{\check{a}, \hat{a}\in\mathbb{Z}^n} \mathbb{C}e^{2\pi\sqrt{-1}\,\hat{a}\,{}^t\check{x}} \oplus \mathbb{C}e^{2\pi\sqrt{-1}\,\check{a}\,{}^t\hat{x}}$$

§2 今の場合

$$G(\mathbb{R}) = G^{(1)}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\ & 1 & \mathbb{R} & \\ & & \ddots & \mathbb{R} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Big\} n+2$$

$$G^{(2)}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{R} & \cdots & \mathbb{R} \\ & 1 & \mathbb{R} & \vdots \\ & & \ddots & \mathbb{R} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Big\} n$$

$G(\mathbb{R})$ の座標 $\quad \rho^{(1)}_x = \begin{pmatrix} 1 & \hat{x}^{(1)} & x^{(1)}_0 \\ & \ddots & {}^t\hat{y}^{(1)} \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho^{(2)}_x & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{x}^{(1)}\rho^{(2)}_x & x^{(1)}_0 \\ & \rho^{(2)}_x & {}^t\hat{y}^{(1)} \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$$\phi^{(\ell)}\begin{bmatrix} \ell^{-1}\hat{a}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}(\rho^{(1)}_x)$$

$$= \exp[-2\pi\ell\sqrt{-1}\, x^{(1)}_0] \sum_{\hat{b}\in\mathbb{Z}^n} \exp\Big[\pi\ell\sqrt{-1}\Big\{(\hat{b}+\ell^{-1}\hat{a}+\hat{x}^{(1)})\sqrt{-1}\,({}^t\rho^{(2)-1}_x\rho^{(2)-1}_x)\,{}^t(\hat{b}+\ell^{-1}\hat{a}+\hat{x}^{(1)}) + 2(\hat{b}+\ell^{-1}\hat{a}+\hat{x}^{(1)})\,{}^t\hat{y}^{(1)}\Big\}\Big]$$

とおく。また

$\ell^{-1}\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n = \sum \alpha$ を $\hat{a} \to \hat{a}\,{}^t\rho^{-1}_c$ なる作用による $G^{(2)}(\mathbb{Z})$-orbit 分解とする。

$$\boxed{\phi^{(\ell)}_\alpha(\rho^{(1)}_x) = \sum_{\ell^{-1}\hat{a}\in\alpha} \phi^{(\ell)}\begin{bmatrix} \ell^{-1}\hat{a} \\ 0 \end{bmatrix}(\rho_x)}$$ とおく

定理 イ) $\phi^{(\ell)}_\alpha(\rho^{(1)}_x) \in L^2(G^{(1)}(\mathbb{Z})\backslash G^{(1)}(\mathbb{R}))$

ロ) $\mathbb{H}^{(\ell)}_\alpha$ $\phi^{(\ell)}_\alpha(\rho^{(1)}_x)$ で生成される $G^{(1)}(\mathbb{R})$-Hilbert module とすれば simple であり

$\mathbb{H}^{(\ell)}_\alpha \not\sim \overline{\mathbb{H}^{(h)}_\beta}$, $\quad H^{(\ell)}_\alpha \sim H^{(h)}_\beta \Leftrightarrow \ell = h$

これらの直和が non-degenerate な部分のどの位をしめるかはわからない

Riemann多様体の崩壊と確率過程の収束

池田信行

1、Introduction　この話では特に断わらねば多様体 M は compact とする。

(a) Riemann多様体 (M, g) があれば、M に g より distance d_g が定まる。従って $Met \equiv$ the space of all compact metric spaces とすれば $(M, g) = (M, d_g) \in Met$ と考えられる。近年 Met に適当な topology を導入し、Riemann多様体のある性質をみたす集合の closure や、Riemann多様体の sequence の convergence を考え幾何学的事実を示す研究が進められている。

(b) 一方 (M, g) があれば次に示す順序で"M 上の diffusion"が存在する。

Riemann多様体 $\longrightarrow$ Laplace-Beltrami operator $\Delta = \Delta_g$

$\longrightarrow$ heat equation on M : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta_g u$ ---- (1.1)

$\longrightarrow$ $p(t, x, y)$ = fundamental solution of (1.1) w.r.t the Riemannian volume $m = m_g$

$\longrightarrow$ diffusion $\{P_x ; x \in M\}$ with transition probabilities $P(t, x, dy) = p(t, x, y)m(dy)$

ところが P_x は $W(M) \equiv \{w : [0, \infty) \ni t \to w(t) \in M,\ \text{continuous}\}$ 上の probability。従って diffusion の sequence の convergence は measure の sequence の convergence として考えられる。この convergence は確率過程論の中心的課題の1つである。

この話の目的はこの2つの話題の関連をもう少し広い枠組で論ずることである。

2、典型的な例 (skew product, warped product) $M = T^2 = \{(e^{\sqrt{-1}x}, e^{\sqrt{-1}y}) ; x, y \in R\}$ (two-dim. torus)。$b : S^1 \to R$,

>0, C^∞-function, $g_n(b) = (dx)^2 \oplus n^{-1} b(x)^2 (dy)^2$: μ_n : normalized Riemannian volume w.r.t. $g_n(b)$。その時

$$((M, g_n), \mu_n) \longrightarrow ((N, g), \mu) \quad \text{(measured Hausdorff)}.$$

$N = S^1$; g : flat metric on N, $\mu(dx) = b(x)dx/C$, C は $\mu(N) = 1$ となるように定める．$(M, g_n(b))$ に対応する diffusion を $\{P^{(n)}_{(x,y)}; (x,y) \in M\}$, $\psi : M \to N$: natural projection とすれば $P^{(n)}_{(x,y)} \circ \psi^{-1} \longrightarrow P_x$。ここで P_x は Dirichlet form

$$\mathcal{E}(u, v) = \int_N \langle du, dv \rangle (x) \mu(dx)$$

に対応する diffusion. $\langle\ ,\ \rangle(x)$ は $(T_x N)^*$ 上の g に関する inner product.

3。問題　考えたい問題は次の例の一般化である．M は上に考えた例と同じ

$$g_n = a(x,y)^2 (dx)^2 \oplus n^{-1} b(x,y)^2 (dy)^2$$

a, b : smooth, >0。ψ は上に同じ．$g = a(x,y)^2 (dx)^2$．この時 $\{P^{(n)}_{(x,y)}, (x,y) \in M\}$ を (M, g_n) に対応する diffusion とする時, $P^{(n)}_{(x,y)} \circ \psi^{-1} \longrightarrow P_x$ が知られている．ここで P_x は metric

$$\left(\int_{S^1} \left(\frac{b}{a}\right)(x,y)dy \Big/ \int_{S^1} (ab)(x,y)dy \right) (dx)^2$$

で, reference measure $\psi_*(\mu)$ に対応する diffusion. μ は $\mu(dxdy) = (ab)(x,y)\,dxdy/C$, C は M の flat metric に対応する volume. 問題はこの diffusion の収束を導く $((M, g_n), \mu)$ の $((M, g), \mu)$ への収束の意味を定めることである．

4. 一般化 : symmetric Markov process $\{P_x, x \in M\}$, その生成作用素を L とする。M の distance を $d(x,y) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ \Gamma(f)(z) \le 1, z \in M\}$, $\Gamma(f) = L(f^2) - 2f\Gamma(f)$ で, $(M, d) \in \mathcal{M}et$ に関し類似のことを考える．

北大理　戸瀬信之

この講演では佐藤超函数の空間における双曲型混合問題を扱う.

$M = \mathbb{R}^{n+1} \ni (t, x)$, $\Omega = \{t > 0\} (\subset M)$ として、$(0, \mathring{x}) \in \partial\Omega$ の近傍で定義された C^ω 係数の混合問題

$$(MP) \begin{cases} P u(t,x) = f(t,x) & \text{in } \Omega \\ u(+0, x) = g(x) \\ \operatorname{supp}(u) \subset \{x_1 \geq 0\} \end{cases}$$

を考える。但し

$$P(t,x,D) = D_t^2 + A(t,x,D_x) D_t + B(t,x,D_x)$$

$$(\operatorname{ord} A \leq 1,\ \operatorname{ord} B \leq 2)$$

であり、$f(t,x)$, $g(x)$ は夫々

$$\operatorname{supp} f \subset \{x_1 \geq 0\},\ \operatorname{supp} g \subset \{x_1 \geq 0\}$$

を満たす超函数とする。更に f は $(0, \mathring{x})$ の近傍の Ω で定義されていて

(仮1)　片側の意味で mild とする.

更に

(仮2)　$\sigma(P)(t, x, \sqrt{-1}\tau, \sqrt{-1}\eta_1 + 1, \sqrt{-1}\eta') \neq 0$

$\quad$ on $\{0 \leq t \leq \delta,\ |x_1| + |x' - \mathring{x}'| < \delta,\ \tau \in \mathbb{R},\ \eta \in \mathbb{R}^n\}$,

(仮2)　θ の方程式 $\sigma(P)(0, 0, \mathring{x}'; \theta, +1, 0 \cdots 0) = 0$

$\quad$ は 1つの正根 1つの負根を持つ

と仮定する. この条件の下で (MP) が一意可解であることを示す.

Berry phase と量子ホール効果

新潟大教養　田島恒一

1980年2月の4日から5日にかけて深夜2時頃 グルノーブルにある強磁場研究所において K フォンクリッツイングらによって量子ホール効果が発見された。これは SiMOSFET (シリコン金属酸化膜半導体電界効果トランジスタ)と呼ばれる半導体素子を約20テスラの強磁場，1K程度の低温状態においてホール効果を測定するとその半導体のホール伝導率が量子化されるという現象である。

このSiMOSFETと呼ばれる半導体においては電流を担う電子は表面反転層と呼ばれる領域内を動き，2次元系をなしていると見做すことができる。更にゲート電圧を変化させることにより，この2次元電子系の電子の面密度 n を $0 < n < 10^{13}/cm^2$ の範囲で制御することができる。この2次元電子系に対し垂直に強磁場 H をかけると古典的にはホール伝導率 σ は

$$\sigma = -nec/H$$

となり電子密度 n に比例し，磁場の強さ H に反比例する。ところが極低温状態ではホール伝導率 σ が量子化されてしまい n あるいは H を連続的に変化させても

$$\sigma = -\text{整数} \times \frac{e^2}{h}$$

のように離散的な値を示すことが観測された。ここにhはプランク定数である。しかもこの伝導率σの観測値は6桁から8桁の精度を持つという。この現象の発見によりフォン・クリッツツイングらは1985年のノーベル物理学賞をうけている。

この量子ホール効果は多くの物理学者の興味を引き、理論的にもほぼ解明されている。強磁場下の2次元電子系に対し久保公式（線型応答理論）を用いてそのホール伝導度を求めそれがある種のChern数と一致するという型で量子化現象を明らかにしている。たとえばKohmotoは磁場下の電子状態を記述するのにmagnetic Bloch関数を用い久保公式を変形することにより、ホール伝導度を、波数ベクトル平面上のmagnetic Brillouin zone（トーラス面）上の2-formの積分として表現した。（サウレスも同じ結果をだしている）この2-formはBerry's connectionのcurvatureと同じ型をしており、ホール伝導率とChern数が関係づけられる。あるC*環の研究者はこのことを絶対零度における"日中関係"と呼んでいる

久保公式（日本）＝ Chern数（中国）。

半導体という現実の巨視系の物性がこのような現代数学の概念と結びつくという所が大変おもしろい。

以上

q-analogue の世界
―Gauss二項係数から量子群まで―

日比孝之（北海道大学 理学部）

筆者は凸多面体に含まれる格子点や単体的複体の面の数え上げを可換環論，特にCohen-Macaulay環の規準加群の理論などを武器として研究しているが，この話題については，平成2年7月12日（木曜日）の談話会で既に話したので，今日は“裏芸”を披露したいと思う。以前，筆者はq-analogueの解説記事[H]を執筆したが，その内容は組合せ論における‘数え上げ’の観点からq-analogueの世界を眺望したものである。本講では量子群に関連したq-analogueを扱うが，筆者は量子群についてはズブの素人で，知識は絶無，数理物理的な背景については言うまでもなく，Hopf代数についても何も知らないことをお断りしておく。なお，量子群については[N-M]と[U]を参考にした。さて，本稿は鳥取大学教養部の若山正人氏が平成2年10月29日（月曜日）―11月3日（土曜日）に札幌に遊びに来た折にいっしょに計算した結果の報告である。ちょうどこの週は名古屋大学理学部の森川寿教授が集中講義に来られていたのであるが，我々は昼間は計算で忙しく，残念ながら森川先生の講義に参加することは不可能であったが，しかし，夜は，月曜日から金曜日まで，毎夜，森川先生を誘い，すすきのや小樽を徘徊したことを記録に留めたい。

量子群の話の前座として、まず，q-analogueの典型であるGauss二項係数を登場させよう。簡単に言うと，q-analogueとは，自然数 i を q-自然数

$$[i] := 1+q+q^2+\cdots+q^{i-1}$$

に置き換える操作である。ここでは q は不定元と考えるのが妥当だ。いま，積 $[1][2]\cdots[n]$ を $[n]!$ で表せば

$$[n]! = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{i(\pi)}$$

(ただし，$i(\pi)$ は $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_n$ の転倒数の個数 $\#\{(i,j)\mid i<j \ \&\ a_i>a_j\}$ である) となり，$[n]!$ にしかるべき解釈を与えることができる。そこで我々は $[n]!$ を $n!$ の q-analogue として定義しよう。すると二項係数 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ の q-analogue は

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} := \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}$$

が候補となる。簡単な計算で q-漸化式

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix} + q^{n-k}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}$$

が導ける。従って，$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ は非負整数を係数とする q の $k(n-k)$ 次多項式である。周知のように，q が素数巾のとき，q 個の元から成る有限体上の n 次元線型空間の k 次元部分空間の個数は $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ に一致する。更に，x と y が変数で 'q-可換性' $xy = qyx$ を満たすとき q-二項定理

$$(y+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} y^k x^{n-k}$$

が成立する。

我々は古典的な不変式論で本質的な寄与をしたCapelli恒等式と呼ばれるもの(cf.[W, p.42])の q-analogueを構成しようと企てた。もっとも、素人の直接計算で何とかなるのは $U(\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}))$ と $A(GL(2;\mathbb{C}))$ のCapelli恒等式の q-analogueである。そこで、まず $U(\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}))$ と $A(GL(2;\mathbb{C}))$ の相互関係とCapelli恒等式とは何であるかを簡潔に述べよう。一般線型群 $GL(2;\mathbb{C})$ の函数環とは、可換環

$$A = A(GL(2;\mathbb{C})) := \mathbb{C}[x, u, v, y]\left[\frac{1}{xy-uv}\right]$$

である。他方、非可換な変数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, e, f$ を準備し、非可換多項式環 $\mathbb{C}\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, e, f\rangle$ の

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2],\ [\varepsilon_1, e]-e,\ [\varepsilon_2, e]+e,$$
$$[\varepsilon_1, f]+f,\ [\varepsilon_2, f]-f,\ [e, f]-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

が生成する両側idealによる剰余環 $U=U(\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}))$ がLie環 $\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C})$ の普遍展開環と呼ばれるものである。ここで $[a, b] := ab-ba$ である。普遍展開環 U の函数環 A への左作用、すなわち A の左 U-加群としての構造を

$$\varepsilon_1 . \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_2 . \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e . \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f . \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する。ただし、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, e, f$ は $\varphi, \psi \in A$ のとき積 $\varphi\psi$ に導分として、e.g., $e.(\varphi\psi) = (e.\varphi)\psi + \varphi(e.\psi)$, 作用する。次に、$\mathcal{E} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} A$ で $\mathbb{C}$ 上の線型空間としての A の自己準同型写像の全体を表す。

もちろん $(\varphi.\rho)(\psi)=\varphi(\rho(\psi))$, $\varphi,\psi\in A$, $\rho\in\mathcal{E}$ によって $\mathcal{E}$ には左A-代数の構造が定義できる。更に，Uの各元には自然に $\mathcal{E}$ の元が付随する。すると，$\mathcal{E}$ の元として，等式

$$
(\#)\quad
\begin{cases}
\varepsilon_1 = x\partial_x + v\partial_v, \\
\varepsilon_2 = u\partial_u + y\partial_y, \\
e = x\partial_u + v\partial_y, \\
f = u\partial_x + y\partial_v
\end{cases}
$$

が成立する。このとき，Capelli恒等式とは

$$
(\varepsilon_1+1)\varepsilon_2 - fe = \det\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_v \\ \partial_u & \partial_y \end{pmatrix}
$$

を意味する。ここで恒等式の左辺 $(\varepsilon_1+1)\varepsilon_2 - fe$ がUの中心に含まれることが重要である。

さて，Capelli恒等式のq-analogueを構成する舞台設定として $A=A(GL(2;\mathbb{C}))$ と $U=U(\mathfrak{gl}(2;\mathbb{C}))$ のq-analogueが必要だ。以下，複素数 $q\neq 0,\pm 1$ を固定する。そして，x,u,v,y を非可換な変数として $\mathcal{A}=\mathbb{C}\langle x,u,v,y\rangle$ において

$$
(b)\quad
\begin{array}{l}
xu-qux,\ xv-qvx,\ uy-qyu,\ vy-qyv, \\
uv-vu,\ xy-yx-(q-q^{-1})uv
\end{array}
$$

が生成する両側idealをIとし，剰余環 $\mathcal{A}/I$ を $A(Mat_q(2;\mathbb{C}))$，更に，

$$
D := xy - quv
$$

と置く。すると $A(Mat_q(2;\mathbb{C}))$ の中心はDが生成する $\mathbb{C}$ 上の一変数多項式環 $\mathbb{C}[D]$ である。このとき $A(Mat_q(2;\mathbb{C}))$ のDによる局所化

$$
A_q = A(GL_q(2;\mathbb{C})) := A(Mat_q(2;\mathbb{C}))\left[\frac{1}{D}\right]
$$

は $A=A(GL(2;\mathbb{C}))$ のq-analogueであり，量子(群 $GL_q(2;\mathbb{C})$ の)函数環と呼ばれる。他方，非可換形式的巾級数

環 $\mathbb{C}\langle\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, e, f \rangle\rangle$ における $q^{\varepsilon_1}, q^{-\varepsilon_1}, q^{\varepsilon_2}, q^{-\varepsilon_2}$, e, f が生成する $\mathbb{C}$-部分代数 $\mathfrak{A} = \mathbb{C}\langle q^{\varepsilon_1}, q^{-\varepsilon_1}, q^{\varepsilon_2}, q^{-\varepsilon_2}, e, f\rangle$ を考え、

$$q^{\varepsilon_1}q^{\varepsilon_2} - q^{\varepsilon_2}q^{\varepsilon_1},\ q^{\varepsilon_1}e - qeq^{\varepsilon_1},\ q^{\varepsilon_2}e - q^{-1}eq^{\varepsilon_2},$$
$$q^{\varepsilon_1}f - q^{-1}fq^{\varepsilon_1},\ q^{\varepsilon_2}f - qfq^{\varepsilon_2},$$
$$ef - fe - (q^{\varepsilon_1-\varepsilon_2} - q^{-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)})/(q-q^{-1})$$

が生成する $\mathfrak{A}$ の両側 ideal J による剰余環 $\mathfrak{A}/J$ を $U_q = U_q(gl(2;\mathbb{C}))$ で表す。非可換 $\mathbb{C}$-代数 U_q は $gl(2;\mathbb{C})$ に付随する量子展開環と呼ばれている。我々は、U_q の A_q への左作用を

$$q^{\varepsilon_1}.\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$q^{\varepsilon_2}.\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$
$$e.\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f.\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし、更に、$\varphi, \psi \in A_q$ のとき

$$q^{\varepsilon_i}.(\varphi\psi) = (q^{\varepsilon_i}.\varphi)(q^{\varepsilon_i}.\psi) \quad (i=1,2),$$
$$e.(\varphi\psi) = (e.\varphi)(q^{\varepsilon_2}.\psi) + (q^{\varepsilon_1}.\varphi)(e.\psi),$$
$$f.(\varphi\psi) = (f.\varphi)(q^{-\varepsilon_1}.\psi) + (q^{-\varepsilon_2}.\varphi)(f.\psi)$$

で定義する。いま、左 A_q-代数 $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}nd_{\mathbb{C}}(A_q)$ の元 $\partial_x, \partial_u, \partial_v, \partial_y$ を

$$\partial_x = \frac{1}{D}(y[\varepsilon_1] - q^{-1}uf),$$
$$\partial_u = \frac{1}{D}(ye - q^{-1}v[\varepsilon_2]),$$
$$\partial_v = \frac{1}{D}(-qu[\varepsilon_1] + xf),$$
$$\partial_y = \frac{1}{D}(-que + x[\varepsilon_2])$$

で定める。ただし，$[x]:=(q^x-q^{-x})/(q-q^{-1})$ である。このとき，我々の q-Capelli 恒等式は

$$(☆)\quad [\varepsilon_1+1][\varepsilon_2]-fe = q\,\det_q\begin{pmatrix} x & u \\ v & y \end{pmatrix} \det_{q^{-1}}\begin{pmatrix} \partial_x & \partial_v \\ \partial_u & \partial_y \end{pmatrix}$$

である。ここで

$$\det_q\begin{pmatrix} \alpha & \xi \\ \eta & \beta \end{pmatrix} := \alpha\beta - q\xi\eta$$

と置く。更に，(☆)の左辺 $[\varepsilon_1+1][\varepsilon_2]-fe$ は U_q の中心に含まれ，他方，

$$\partial_x x^n = [n]x^{n-1},\ \partial_x u^n = \partial_x v^n = \partial_x y^n = 0$$

などが成立するから，$\partial_x, \partial_u, \partial_v, \partial_y$ の定義とともに恒等式(☆)は $U=U(gl(2;\mathbb{C}))$ と $A=A(GL(2;\mathbb{C}))$ に関する Capelli 恒等式の q-analogue として尽案であろう。

ところで，我々の $\partial_x, \partial_u, \partial_v, \partial_y \in \mathcal{E}_q$ の定義の $\frac{1}{D}$ の部分に着目すると，これは(#)を $\partial_x, \partial_u, \partial_v, \partial_y$ について解いて，そこから q-analogue として辻褄が合うように ごちゃごちゃ 弄(いじ)ったことが容易に想像できる。ここまでならば 素人の悪戯である。しかし，我々の $\partial_x, \partial_u, \partial_v, \partial_y$ が(4)で x を ∂_v，u を ∂_y，v を ∂_x，y を ∂_u に置き換えた交換関係を満たすことを認識するや否や悪戯はこのままでは終わらなくなってしまうのである。

参考文献

[H] 日比孝之，'q-analogue' の世界，数学 41 (1989), 269–274.

[N-M] 野海正俊，三町勝久，量子群の表現論に現れる特殊函数，特殊函数の代数的側面研究集会（1989年12月，名古屋大学理学部）報告集，pp. 88–142.

[U] 上野喜三雄，量子群の表現論，数学 42 (1990), 68–73.

[W] H. Weyl, "The Classical Groups," Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

直交する作用素環の対とAssociation Schemes

北大・理　綿谷安男

$\boxed{\text{Def}}$ $n\times n$ 行列全体のなすalgebraを $M_n(\mathbb{C})$ とおく.
AもBも $M_n(\mathbb{C})$ の maximal *subalgebras とする
(A, B) is an <u>orthogonal pair</u>

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in A\ \forall b\in B\quad tr(ab) = tr(a)\,tr(b)$

ここで $tr : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ は正規化されたトレース.

つまり
$$\begin{array}{ccc} A & \subset & M_n(\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{C}1 & \subset & B \end{array}$$
が commuting square をなす.

$\boxed{\text{問題}}$ (S. Popa) orthogonal pair (A, B) を unitary equivalence を除いて分類せよ.

$\boxed{\text{Def.}}$ $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $H = \ell^2(G)$, $M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(H)$ とみなして
$A = \ell^\infty(G)$ を diagonals, $B = R(G)$ を Gの左正則表現からつくられたalgebraとする. この(A,B)を<u>standard</u>という.

$\boxed{\text{Theorem}}$ (de la Harpe - Jones) nが13以上の素数で $n\equiv 1 \pmod 4$ ならば $M_n(\mathbb{C})$ には non-standard な orthogonal pair が存在する.

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Munemasa - Watatani) nが7以上の素数で $n\equiv -1 \pmod 4$ ならば $M_n(\mathbb{C})$ には non-standard な orthogonal pair が存在する.

- 証明にあたり de la Harpe - Jones は strongly regular graphs を使ったが, 私達は association schemes を使った.

Singular perturbations in foliations

GIKŌ IKEGAMI

1. Introduction

The system which we want to study here is suggested by the equations of the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ 0 &= g(x,y), \end{aligned} \tag{$(1.1)_0$}$$

$x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$. Many types of solutions of $(1.1)_0$ have been studied by considering $(1.1)_0$ as the limit of

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x,y), \end{aligned} \tag{$(1.1)_\varepsilon$}$$

for $\varepsilon \to 0$. For the type $m = n = 1$, there are the works of J. LaSalle, A.A. Andronov and others. For the case $m = 2$ and $n = 1$, there are works of E.C. Zeeman, E. Benoit, and others. For general m and $n = 1$, there is the work of N. Levinson. For general m and n, there are the works of L.S. Pontryagin, F. Takens, and E.F. Mishchenko and N.Kh. Rozov.

As a generalization of the Eq. $(1.1)_\varepsilon$, we consider a vector field $\tilde{Z}_\varepsilon/\varepsilon$. Here, $\tilde{Z}_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, is a vector field on a manifold M, which is a generalization of the equation: $\dot{x} = \varepsilon f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$. The limit of $\tilde{Z}_\varepsilon/\varepsilon$ for $\varepsilon \to 0$ exists only on the set Σ of points where $\tilde{Z}_0 = 0$, (in the case of $(1.1)_0$, Σ is the set of points where $g(x,y) = 0$). But, by a perturbations of $\tilde{Z}, \Sigma$ becomes a discrete set. To avoid this, we assume that the vector field $\tilde{Z}_0$ is tangent to the leaves of a codimension m foliation $\mathcal{F}$ on M. $\mathcal{F}$ can be considered as a generalization of the product structure $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. This vector field $\tilde{Z}_0$ tangent to $\mathcal{F}$ is a generalization of the equation $\dot{y} = g(x,y)$ in $(1.1)_\varepsilon$. For the family of vector fields $\{\tilde{Z}_\varepsilon\}$ and the foliation $\mathcal{F}$, as above, the pair $\{\{\tilde{Z}_\varepsilon\}, \mathcal{F}\}$ is called a *constraint system.* After the definition of the *solution* for a constraint system we will define an *admissible solution*, which has some useful properties. These definitions are motivated by F. Takens' definitions of constrained equations solutions. As a generalization of the fibre bundles in his situation, we consider foliations. He considered a function $M \to \mathbb{R}$ which played a similar role to our vector field $\tilde{Z}_0$ tangent to $\mathcal{F}$.

Before the description of our singular perturbation theorem, we must introduce the previous results. We show generic properties G0, G1, and G2 for the vector field $\tilde{Z}_0$. G0 assures that the set of equilibrium points Σ of $\tilde{Z}_0$ is a manifold. G1 is a regularity condition of the derivative of $\tilde{Z}_0$ on Σ. G2 assures that Σ has a stratification $\mathcal{S}$, which is stratified by the number of zero-eigenvalues and the number of pure imaginary eigenvalues of the derivative of $\tilde{Z}_0|L_p$ at $p \in \Sigma$. Here L_p is a plaque of $\mathcal{F}$ containing p. G0, G1, and G2 are generic properties. The property G3 assures that the manifold Σ is in general position in the foliation $\mathcal{F}$ with respect to the Thom-Boardman singularity. The set of $\tilde{Z}_0$ having property G3 is dense in the space of vector fields on M which are tangent to $\mathcal{F}$. The saddle-node bifurcation and the Hopf bifurcation are well known as typical codimension one bifurcations of equilibra. We show where these bifurcations of $\tilde{Z}_0|L_p$ appear for $p \in \Sigma$ in the language of the stratification $\mathcal{S}$ and Thom-Boardman's stratification. We determine the qualitative structure of $\tilde{Z}_0$ near the point p where a saddle-node bifurcation occurs: In the case that Σ has condimension one (i.e. $n = 1$), it is trivial to see that the jumping path leaving a fold point exists uniquely. We show the uniqueness and other properties of the jumping path for the general $n \geqq 1$.

Main results concern with the structure of the orbits of $(1.1)_0$ or the slow orbits of $(1.1)_\varepsilon (\varepsilon \to 0)$ on a neighborhood of the fold points $(\partial\Sigma_s)_f$ of Σ, and with the singular perturbation for admissible solutions which is a generalization, in some sense, of N. Levinson, L.S. Pontryagin, and N. Fenichel.

There is an example of a constraint system in the theory of LC-network perturbation of electrical circuits (G. Ikegami). In this theory, there is a foliation $\mathcal{F}$ (not necessarily a trivial product structure $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$) and a one parameter family of vector spaces, $\{\tilde{Z}_\varepsilon\}$ such that $\tilde{Z}_0$ is tangent to $\mathcal{F}$.

不変方程式について

東京都立大学 理学部

遠藤 静男

ここでは，群の作用による有理(函数)体の不変部分体に関する基本問題の1つである次の問題に関連する最近の諸結果について述べる

問題 N (E. Noether 1914) 有限群 G が体 k 上の有理体 F の上に線型的に作用するとき，不変部分体 F^G は k 上の有理体であろうか.

k が代数体 (特に $k = \mathbb{Q}$) の場合に，この問題に肯定的解答が得られれば，Hilbert の既約性定理を用いると，次の問題にも肯定的解答が得られる

問題 I (Galois 理論の逆問題) k が代数体 (特に $k = \mathbb{Q}$) のとき，任意の有限群 G に対して，k の Galois 拡大体 K で $\mathrm{Gal}(K/k) \cong G$ となるものが存在するか.

問題 N に関しては，1969年に，$k = \mathbb{Q}$ の場合には，G が位数47 の巡回群のとき，否定的であることが示された (Swan). さらに，1984年には，$k = \mathbb{C}$ の場合でも比較的簡単な p 群に対して否定的であることが示された (Saltman)

一方，問題 I については，1950年代に，G が可解群のとき肯定的であることが示されていた (Shafarevich). この10年余りの間に，単純群またはそれに近い群についても肯定的であることが，次々と示されている. しかし，一般には，未解決のままになっている.

体 k の有限生成拡大体 K に関して，有理性より弱い条件として種々のものが考えられているが，次のものはそのうちの1つである

Kの正則拡大体であるようなk上の有理体が存在するとき、Kをk上の半有理体とよぶ（簡単のため、体の標数は0とする）。そこで、問題Nを次のように弱めたものが考えられる。

問題N′　有限群Gが体k上の有理体Fの上に線型的に作用するとき、不変部分体F^Gはk上の半有理体であろうか。

F^Gの半有理性については、次のことが知られている。

命題（本質的にはK. Uchida）　kを体、Gを有限群とするとき、次の条件は同値である。

(1)　Gがk上の有理体Fに線型的に作用するとき、F^Gがk上の半有理体である。

(2)　各$m \geq 1$についてk上の有理体$k(T_1, T_2, \cdots, T_m)$のGalois拡大体であるようなkの正則拡大体Eで$Gal(E/k(T_1, T_2, \cdots, T_m)) \cong G$となるものが存在する。

kが代数的閉体の場合には、(2)が成りたつことがわかっているため、問題N′の答は肯定的である。また、kが代数体の場合には、問題N′の答が肯定的ならば、Hilbertの既約性定理により、問題Iの答も肯定的となる。最近の問題Iに関する諸結果のうちの多くは、上の命題の(2)の$m = 1$の場合が成りたつことを示すことによって得られている。

ここでは、問題N′に重点をおいて、有理体の有限群による不変部分体に関する諸結果を述べる。

談話会の要旨　　東工大　森田茂之

談話会の題名：写像類群、Teichmüller 空間、３次元多様体

講演者は１９８３年、曲面をファイバーとするファイバーバンドル（以下曲面束と呼ぶ）の特性類の理論を創めた。まず曲面束の一般的構成法を与えることにより、特性類の非自明性を証明し、また同伴する Jacobi 多様体の族への（位相的） Abel-Jacobi の写像の詳細な解析を通して、その基本的性質を調べ、理論の枠組を整えた。この理論は有理数体上では、 Mumford による Riemann 面の moduli 空間の Chow 環の理論の位相的対応物であり、 moduli 空間またはその普遍被覆である Teichmüller 空間の位相的理論と解釈できる。また他方それは今世紀初頭 Dehn, Nielsen により創始された、組合せ群論の最も重要な対象である曲面の写像類群（mapping class group）のコホモロジー理論と解釈することもできる。これら多くの側面は、古典的によく知られた曲面上の種々の構造の同値性（双曲構造＝共形構造＝複素構造＝代数曲線の構造）に由来するものであるが、このことはまたこの理論が関連する諸分野に多くの応用を持つ可能性を強く示唆している。実際講演者が現在行なっている研究は、それらのうちの一つ、曲面束の特性類の３次元多様体論への応用が中心である。最近の主結果は、１９８５年 Casson により発見されたある種の３次元多様体の不変量（Casson 不変量）の曲面束の第一特性類による解釈である。

本講演では、上記に従って Casson 不変量を例に、 mapping class group、Teichmüller 空間、３次元多様体という三つの対象の相互の連関について考察をしたい。

実特異点の位相と写像度

長野高専　福井　敏純

関数芽　$f:(R^n,0)\longrightarrow(R,0)$　から以下に説明する手続きで定まるある有限写像の写像度と，元の写像fの位相との関係を探求するのが目的

関数芽　$f:(R^n,0)\longrightarrow(R,0)$　の局所レベル多様体(local level manifold)を考えよう．即ち，DをR^{n}内の原点を中心とした小球，$\tilde{f}:D\longrightarrow R$を$f$のa representativeとするとき$V_\varepsilon=\tilde{f}^{-1}(\varepsilon)$を考える．以下芽とそのrepresentativeを混同しておく．このとき次が成立する．$(x_1,...,x_n)$をR^{n}の原点での座標系とするときfが孤立特異点ならば写像芽

$$df=(\partial f/\partial x_1,...,\partial f/\partial x_n):(R^n,0)\longrightarrow(R^n,0)$$

は有限写像である．このときKhimshashvili(1977), Arnol'd(1977)やWall(1983)によって次の事実が指摘された．

定理A：(1) $\deg(df)=(-1)^{n+1}(\chi(V_\varepsilon)-1)$, if $\varepsilon>0$.
　　(2) $\deg(df)=-(\chi(V_\varepsilon)-1)$, if $\varepsilon<0$.

系：この定理とEisenbud-Levineの定理をつなげればlocal level manifolds V_εのEuler数が代数的に計算できる．

系：　SをDの境界　$A_+=S\cap\{f\geq0\}$　$A_-=S\cap\{f\leq0\}$とおくと　A_+は　$V_\varepsilon(\varepsilon>0)$と$A_-$は　$V_\varepsilon(\varepsilon<0)$と微分同相だから

$$\chi(A_+)=1+(-1)^{n+1}\deg(df),\qquad \chi(A_-)=1-\deg(df)$$

が成り立つ．

定理AはMorse理論の応用で証明できるが詳細は略す．

さて次に実曲線芽の場合を考えてみよう．$f:(R^2,0)\longrightarrow(R,0)$が平面曲線芽を定義するとする．$(x,y)$をR^{2}の原点での座標系　$g=x^2+y^2$とおくと　$f^{-1}(0)$と　$\{g>0\}$の共通部分の連結成分の個数がfの位相を定める．このときFukuda-Aoki-Sun (1986)により次の事実が指摘された．

定理B：$f^{-1}(0)$と$\{g>0\}$の共通部分の連結成分の個数 $=2\deg(f,j)$
但し　$j=\partial(g,f)/\partial(x,y)$

この定理はSzafraniec(1988)によって次のように一般化された．

定理C：$f:(R^n,0)\longrightarrow(R^{n-1},0)$　が曲線を定義するとする．$g:(R^n,0)\longrightarrow(R,0)$が　$f^{-1}(0)$上$\{0\}$以外の零点を持たないとき次が成り立つ．
$b_+=f^{-1}(0)$と$\{g>0\}$の共通部分の連結成分の個数
$b_-=f^{-1}(0)$と$\{g<0\}$の共通部分の連結成分の個数

とおくと

$$b_+ - b_- = 2\deg(f,j).$$

但し $j=\det(\partial g/\partial x, \partial f/\partial x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$はR^nの原点での座標系.

$g=x_1{}^2+\ldots+x_n{}^2$のときは Aoki-Fukuda-Nishimura(1987) によって $f^{-1}(0)$ の位相形の公式として, $g=x_1{}^2$, $g=x_1$のときは Nishimura-Aoki-Fukuda (1989)によって$f^{-1}(x_1,0)$のx_1をparameterとした族の分岐を決定する公式としてSzafraniec とは独立に与えられた. 我々はこの公式を

$$b_+ - b_- = 2\{\chi(f^{-1}(\varepsilon)\cap\{g\geq 0\})-\chi(f^{-1}(\varepsilon)\cap\{g\leq 0\})\}$$

とみて写像度が Euler数の差を与えると理解することにする.

ここで再び関数芽に戻る. $f:(R^{n+1},0)\longrightarrow(R,0)$ を関数芽, $(\lambda,x_1,\ldots,x_n)$を R^{n+1} の原点での座標系とする. このとき

定理D: $R\{\lambda,x\}/(f,\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n)$ が有限次元と仮定すると,

$$-\mathrm{sgn}(-\varepsilon)^{n+1}\{\chi(f^{-1}(\varepsilon)\cap\{\lambda\geq 0\})-\chi(f^{-1}(\varepsilon)\cap\{\lambda\leq 0\})\} = \deg(f,\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n)$$

関数芽 $f:(R^{n+2},0)\longrightarrow(R,0)$ に対しては, $(x,y,z_1,\ldots,z_n)$をR^{n+2}の原点での座標系として, $g=g(x,y)$ に対して $j=\partial(f,g)/\partial(x,y)$とおく.

定理E: $R\{x,y,z\}/(f,j,\partial f/\partial z_1,\ldots,\partial f/\partial z_n)$ が有限次元と仮定すると,

$$-\mathrm{sgn}(-\varepsilon)^{n}\{\chi(f^{-1}(\varepsilon)\cap\{g\geq 0\})-\chi(f^{-1}(\varepsilon)\cap\{g\leq 0\})\} = \deg(f,j,\partial f/\partial z_1,\ldots,\partial f/\partial z_n)$$

これらを分岐の公式と理解することも可能である.
定理Eは定理B,Dを特別な場合として含む.

問題：上記の諸現象を統一的に説明する理論を建設せよ.

文献：

K.Aoki, T.Fukuda & T.Nishimura: in "Topology and Computer Science" Kinokuniya 1987, 347-363
V.I.Arnol'd: Funct. Anal. Appl. 12 (1978), 1-14
T.Fukuda, K.Aoki & W.Z.Sun: Kodai Math.J. 9 (1986),179-187
T.Nishimura K.Aoki & T.Fukuda: Archive for Rat. Mech.& Anal. 108 (1989) 247-265
Z.Szafraniec: Kodai Math. J. 11(1988),78-85
C.T.C.Wall: Topology 22 (1983), 345-350

1991年2月15日

多重 Markov Gauss 過程の標準表現と KM$_2$O-Langevin 方程式について

愛知教育大学　野田明男

広義 N 重 Markov Gauss 過程 $X(t)$ に対して、その共分散

(1) $$\Gamma(t,s) = \sum_{i=1}^{N} f_i(t)\, h_i(s), \quad t_0 \le s \le t < t_1$$

を知ったとき（簡単のため、$f_1(t) \equiv 1$ とする）、標準表現

(2) $$X(t) = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{N} f_i(t) g_i(u) \right\} \sigma(u)\, dB(u), \quad t_0 \le t < t_1,$$

を求めたい（cf. [1]）。ここで、

(3) $$\sigma^2(t) := \sum_{i=1}^{N} \begin{vmatrix} f_i(t) & h_i(t) \\ f_i'(t) & h_i'(t) \end{vmatrix} > 0$$

を仮定すると、$g_1(u) = 1 - \sum_{i=2}^{N} f_i(u) g_i(u)$ とおけるので、$\{f_i, h_i\}_{i=1}^{N}$ から決定すべき量は、$(N-1)$ 個の関数 $\{g_i(u)\}_{i=2}^{N}$ である。

積分形の表現式 (2) の等価物として、確率微分（KM$_2$O-Langevin）方程式

(4) $$dX(t) = m(t)\, dt + \sigma(t)\, dB(t), \quad t_0 < t < t_1,$$

を考察する。ここで、$\mathcal{F}_t(X) := \sigma\{X(s);\, s \le t\} = \mathcal{F}_t(B)$ - 可測な $m(t)$ は、次のように表現される：

(5) $$m(t) = \sum_{i=2}^{N} f_i'(t) \int_{t_0}^{t} g_i(u)\,\sigma(u)\,dB(u) = \sum_{i=2}^{N} f_i'(t) \int_{t_0}^{t} k_i(t,u)\,dX(u)$$

$$= -\rho(t)X(t) + \int_{t_0}^{t} \gamma(t,u)\,X(u)\,du 。$$

(5)に生じる諸量の間には、次の関係式が成立する：

(6) $$\begin{cases} k_i(t,u) = g_i(u) - \displaystyle\int_u^t g_i(s)\Big\{\sum_{j=2}^{N} f_j'(s)\,k_j(s,u)\Big\}ds, \\ \rho(t) = -\displaystyle\sum_{i=2}^{N} f_i'(t)\,k_i(t,t), \quad \gamma(t,u) = -\displaystyle\sum_{i=2}^{N} f_i'(t)\,\frac{\partial}{\partial u}k_i(t,u) 。\end{cases}$$

独立性の条件 $E[X(s)\,dB(t)] = 0 \quad (\forall s<t)$ を、(4), (5)を用いて書き直すと、未知の核 k_i を決定する積分方程式を得る。仮定

$$p_i(s) := f_i'(s)/\sigma(s) > 0, \quad q_i(s) := \left(h_i'(s)/f_i'(s)\right)' > 0 \quad (i=2,\cdots,N)$$

の下で、この積分方程式から次の2階線形微分方程式系を導くのが、我々の key step である：

(7) $$\left(\frac{1}{q_i(s)}\,y_i'(s)\right)' = p_i(s)\sum_{j=2}^{N} p_j(s)\,y_j(s), \quad i=2,\cdots,N, \quad t_0<s<t 。$$

方程式(7)に対する境界値問題は常に一意的に解けるという仮定を加えて、求めるべきすべての量 k_i, g_i, ρ, γ を(7)の解を用いて explicit に書き表すことに成功する。

我々の方法は、標準表現の多重度問題に現われる過程([1])に適用される他に、さらに共分散

(8) $$R(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-\lambda_i|t|}, \quad c_i>0, \ \sum_{i=1}^{N} c_i = 1, \quad 0<\lambda_N<\cdots<\lambda_2<\lambda_1,$$

をもつ正規定常過程とその KM_2O-Langevin 方程式（このとき $\sigma(t) \equiv \alpha$ となる）

$$(9) \qquad dU(t) = \alpha\, dB(t) + dt\left(-\beta(t)U(t) + \int_0^t \gamma(t,u)U(u)\,du + \delta(t)U(0)\right), \quad t>0,$$

に応用できる（[3],[4]）。この場合 (7) は定数係数の方程式に変換され、その解はなじみの関数 $e^{-\lambda_i s}$, $\cosh \mu_i s$, $\sinh \mu_i s$ を用いて具体的に書くことができる。ここで、$\lambda_N < \mu_N < \cdots < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_1$ なる $\{\mu_i\}_{i=2}^N$ は、(8) に対応する KMO-Langevin data で生じる exponent である（[2]）。

こうして、岡部がこの20年間、一連のすぐれた業績（[5]の文献表参照）によって開拓してきた揺動散逸原理の働く豊饒な世界（中野，三好，井上等の(共同)研究にも言及したい）への一つの小さな寄与として、(8) に対応する KM_2O-Langevin data を、我々の方法でじかに表現する結果を得、談話会においては、$N=2$ の場合に報告した。

今回の北海道大学滞在中、岡部先生は、私が見落していた文献[4]とそれに付随する未発表のノートを親切に御教示下さり、さらには定常過程に対する年来の夢を語って下さった。先生に深甚なる感謝を申し上げます。

REFERENCES

[1] 飛田武幸・櫃田倍之，ガウス過程 表現と応用，紀伊國屋書店 (1976).

[2] Y. Okabe, On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with T-positivity and the fluctuation-dissipation theorem, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 28 (1981), 169-213.

[3] T. Miyoshi, On (l,m)-string and $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$-Langevin equation associated with a stationary Gaussian process, Ibid. 30 (1983), 139-190.

[4] Y. Okabe, On a wave equation associated with prediction errors for a stationary Gaussian process, Lecture Notes in Control and Information Sciences 49 (1983), 215-226, Springer-Verlag.

[5] Y. Okabe and A. Inoue, The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (II): Causal analysis (1), to appear.

The Nonlinear Schrödinger Limit and the Initial Layer of the Zakharov Equations

YOSHIO TSUTSUMI

Department of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-01
Japan

In the present note we consider the nonlinear Schrödinger limit and the initial layer for the Zakharov equations:

$$i\frac{\partial E}{\partial t} + \Delta E = nE, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta n = \Delta |E|^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{2}$$

$$E(0,x) = E_0(x), \quad n(0,x) = n_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}n(0,x) = n_1(0,x), \tag{3}$$

where $E(t,x)$ is a function from $\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^N$ to $\mathbf{C}^N$, $n(t,x)$ is a function from $\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^N$ to $\mathbf{R}$, $\lambda > 0$ and $1 \leqq N \leqq 3$. (1)-(3) describe the long wave Langmuir turbulence in a plasma (see [24]). $E(t,x)$ denotes the slowly varying envelope of the highly oscillatory electric field, $n(t,x)$ denotes the deviation of the ion density from its equilibrium and λ is the speed of the ion sound. The Zakharov equations (1) and (2) are derived from the coupled system of the Maxwell equations and the fuid dynamics equation through the physical approximation in [24], but they are still complicated. So, in [24] Zakharov claims that (1) and (2) are reduced to

$$i\frac{\partial E}{\partial t} + \Delta E = nE, \quad n = -|E|^2 \tag{4}$$

as $\lambda \to \infty$. (4) is just the nonlinear Schrödinger equation and it is thought that when λ is sufficiently large, we can adopt (4) instead of (1) and (2).

The problem whether this limit process can be rigorously justified or not seems very interesting and important from both mathematical and physical points of view. Especially, in the non-compatible case of $n_0 + |E_0|^2 \neq 0$, the initial layer phenomenon occurs: that is, the singularity appears near $t = 0$ as $\lambda \to \infty$. In my talk, I would like to state the results concerning the rate of convergence of solutions for (1)-(3) and the formation of the initial layer, which have recently been obtained in collaboration with Tohru Ozawa, RIMS, Kyoto University.

REFERENCES

[1] H. Added and S. Added, *Existence globale de solutions fortes pour les équations de la turbulence de Langmuir en dimension 2*, C. R. Acad. Sci. Paris **299** (1984), 551–554.

[2] H. Added and S. Added, *Equations of Langmuir turbulence and nonlinear Schrödinger equation: Smoothness and approximation*, J. Funct. Anal. **79** (1988), 183–210.

[3] K. Asano, *On the incompressible limit of the compressible Euler equation*, Japan J. Appl. Math. **4** (1987), 455–488.

[4] P. Constantin and J. C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.

[5] J. Gibbons, *Behavior of slow Langmuir solitons*, Phys. Letter **67A** (1978), 22–24.

[6] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations I: the Cauchy problem*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32.

[7] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 363–401.

[8] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), 1794–1797.

[9] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Math. Z. **192** (1986), 637–650.

[10] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **71** (1987), 218–243.

[11] N. Hayashi and T. Ozawa, *Smoothing effect for some Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **85** (1989), 307–348.

[12] A. Jensen, *Commutator methods and a smoothing property of the Schrödinger evolution group*, Math. Z. **191** (1986), 53–59.

[13] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **46** (1987), 113–129.

[14] S. H. Schochet and M. I. Weinstein, *The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence*, Comm. Math. Phys. **106** (1986), 569–580.

[15] Y. Shibata and Y. Tsutsumi, *Local existence of solutions for the initial boundary value problem of fully nonlinear wave equation*, Nonlinear Analysis, TMA **11** (1987), 335–365.

[16] P. Sjölin, *Regularity of solutions to the Schrödinger equation*, Duke Math. J. **55** (1987), 699–715.

[17] P. Sjölin, *Local regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Ark. Mat. **28** (1990), 145–157.

[18] R. S. Strichartz, *Ristrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.

[19] C. Sulem and P. L. Sulem, *Quelques résultats de régularité pour les équations de la turbulence de Langmuir*, C. R. Acad. Sci. Paris **289** (1979), 173–176.

[20] M. Tsutsumi, *Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the damped nonlinear Schödinger equation*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 357–366.

[21] S. Ukai, *The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 323–331.

[22] M. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates*, Comm. Math. Phys. **87** (1983), 567–576.

[23] K. Yajima, *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 415–426.

[24] V. E. Zakharov, *Collapse of Langmuir waves*, Sov. Phys. JETP **35** (1972), 908–914.

Rational functions in topology and geometry

M. A. Guest

Let $P \to S^4$ be a principal G-bundle, with $c_2(P) = -d$, where G is a compact simple Lie group and d is a non-negative integer. Let $\mathcal{A}_d$ be the space of (smooth) connections ∇ in $P \to S^4$. The Yang-Mills functional is defined by

$$YM : \mathcal{A}_d \to \mathbf{R}, \quad YM(\nabla) = \int_{S^4} ||F(\nabla)||^2$$

where $F(\nabla)$ is the curvature of ∇. The critical points of YM ("Yang-Mills connections") are the solutions of the equation

$$d^* F(\nabla) = 0. \tag{1}$$

It is not easy to find solutions to this equation. However, the critical points of YM which are absolute minima ("Yang-Mills instantons") turn out to be the solutions of the simpler equation

$$*F(\nabla) = F(\nabla). \tag{2}$$

Let $\mathcal{I}_d$ be the subset of $\mathcal{A}_d$ consisting of solutions to (2). The "based gauge group" $\mathcal{G}$ is the group of all automorphisms of $P \to S^4$ which are the identity over $\infty \in S^4$. This acts freely on $\mathcal{A}_d$ and on $\mathcal{I}_d$, and the submanifold $\mathcal{M}_d = \mathcal{I}_d/\mathcal{G}$ of $\mathcal{C}_d = \mathcal{A}_d/\mathcal{G}$ is called the *moduli space of (framed) G-instantons of charge d over S^4.*

All these concepts extend to principal G-bundles $P \to M^4$ where M^4 is a compact oriented Riemannian manifold of dimension 4. Since the work of Donaldson (1984) we know that the corresponding moduli space $\mathcal{M}_d(M^4, G)$ is a fundamental object which reflects deep properties of M^4 and G. However, we shall be concerned mainly with the simplest case $M^4 = S^4, G = SU_2$; even in this case the moduli space $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_d(S^4, SU_2)$ is quite non-trivial!

The first interesting examples of SU_2-instantons on S^4 were obtained by the "'t Hooft construction": given a collection $\{q_1, \ldots, q_d\}$ of distinct points in $\mathbf{R}^4$, it is possible to write down an explicit solution of (2). Shortly afterwards (1978), Atiyah, Hitchin and Singer showed that $\mathcal{M}_d(S^4, G)$ is a finite dimensional manifold, and computed its dimension. For example, $\dim \mathcal{M}_d(S^4, SU_n) = 4nd$. Then (1978) Atiyah, Drinfeld, Hitchin and Manin gave a linear algebraic description of all the solutions to (2) (the "ADHM construction"), for the compact simple classical groups.

What can be said about the space $\mathcal{M}_d$? For $d = 1$, it is known that there is a diffeomorphism

$$\mathcal{M}_1 \cong SO_3 \times \{x \in \mathbf{R}^5 \mid ||x|| < 1\}.$$

For $d = 2$ (see [Ha],[Hh],[Au]) there is a homotopy equivalence

$$\mathcal{M}_2/SU_2 \simeq Gr_2(\mathbf{R}^5).$$

(In general, G acts on $\mathcal{M}_d(M^4, G)$, although the action is not necessarily free.) For general d, it is known that $\mathcal{M}_d$ is connected (see [Ta1]), and it is known that$\pi_1\mathcal{M}_d \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (see [Hu]). However, it is not very easy to get this kind of explicit topological (or geometrical) information about $\mathcal{M}_d$ from the ADHM construction.

A different way of obtaining topological information about $\mathcal{M}_d$ is suggested by Morse theory. We have a functional $YM : \mathcal{C}_d \to \mathbf{R}$, whose critical points are the Yang-Mills connections, and for which $\mathcal{M}_d$ is the set of absolute minima. This can be compared with another, simpler, situation. If P, Q are two points of a Riemannian manifold M, we have the energy functional $E : \Omega M \to \mathbf{R}$ on (a component of) the set of smooth paths from P to Q. The critical points of E are the geodesics connecting P and Q, and of course the shortest geodesics constitute the absolute minima of E. It is a classical fact that Morse theory applies to E. A simple consequence of Morse theory is that if M_{min} denotes the set of minimal geodesics (in a fixed component), then the induced maps $H_iM_{min} \to H_i\Omega M$ in homology, and $\pi_iM_{min} \to \pi_i\Omega M$ in homotopy, are isomorphisms for $i < n$, where $n+1$ is a lower bound for the index of any non-minimal critical point. For example, if $M = S^n$ and P, Q are the north and south poles of the n-sphere, then $(S^n)_{min} \cong S^{n-1}$ and we obtain an inclusion $S^{n-1} \to \Omega S^n$ which induces isomorphisms in dimensions less than $2n-3$. This is the "Freudenthal Suspension Theorem". Now, the classical Morse theory does not apply to YM in the same way that it applies to E, but there are some formal analogies betwen the two situations. In the version of the Yang-Mills equations for a principal G-bundle $P \to M^2$, where M^2 is a compact oriented Riemann surface, Atiyah and Bott made this analogy very precise. This suggests a basic principle:

APPROXIMATION PRINCIPLE: $\mathcal{M}_d(M^4, G)$ should approximate $\mathcal{C}_d(M^4, G)$ in homology and homotopy, up to some dimension which increases with d.

In the case of $E : \Omega M \to \mathbf{R}$, this approximation principle is valid and it allows one to study ΩM by studying the simpler space M_{min}. In the case of $YM : \mathcal{C}_d(M^4, G) \to \mathbf{R}$ the emphasis is switched, as it is $\mathcal{C}_d(M^4, G)$ which is simpler than $\mathcal{M}_d(S^4, G)$. In fact:

PROPOSITION [AJ]. *The space $\mathcal{C}_d(M^4, G)$ has the homotopy type of $\Omega^3_d G = \mathrm{Map}^*_d(S^3, G)$.*

Here, $\mathrm{Map}^*_d(S^3, G)$ denotes the set of smooth (or continuous) maps $f : S^3 \to G$ such that $f(\infty) = e$ (the identity element of G), and such that in $\pi_3 G \cong \mathbf{Z}$ the class $[f]$ corresponds to d. Note that $\Omega^3_d G$ is connected, and that $\pi_1\Omega^3_d SU_2 \cong \pi_4 SU_2 \cong \pi_4 S^3 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, so the approximation principle is at least consistent with the information given earlier on $\mathcal{M}_d$.

The first work on the approximation principle for SU_2-instantons on S^4 was done by

Atiyah and Jones [AJ]. They established a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_d \arrow[r, "I"] & \mathcal{C}_d \simeq \Omega^3_d S^3 \\ C_d(\mathbf{R}^4) \arrow[u, "T"] \arrow[r, "E"] & \Omega^4_d S^4 \arrow[u, "H"] \end{tikzcd}$$

where I is the natural inclusion and T is the inclusion of the 't Hooft instantons. The map E is the "electric field map", well known to topologists, which takes a configuration $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ of d distinct points in $\mathbf{R}^4 \cong \mathbf{H}$ to the function $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $q \mapsto \Sigma(q - \alpha_i)^{-1}$; this extends to a continuous map of degree d on $S^4 \cong \mathbf{H} \cup \infty$. The map H is the composition $\Omega^4_d S^4 \cong \Omega^4_d \mathbf{H}P^1 \to \Omega^4_d \mathbf{H}P^\infty \cong \Omega^4_d BS^3 \cong \Omega^3_d S^3$. It is elementary that H induces a surjection in homology groups H_i, and it is a well known theorem in topology that E induces an isomorphism in H_i for $i << d$. Hence (from the diagram):

THEOREM [AJ]. *The map $I : \mathcal{M}_d \to \mathcal{C}_d$ induces a surjection in homology groups H_i for $i << d$.*

Thus, the philosophy of the proof is to identify a subset $C_d(\mathbf{R}^4)$ of $\mathcal{M}_d$ whose topological behaviour is better understood.

Atiyah and Jones conjectured that in fact the map I induces isomorphisms in H_i and π_i (for i in some computable range), i.e. that the approximation principle holds for SU_2-instantons on S^4. (It should be noted, however, that the above diagram gives no information about homotopy groups, as $\pi_1 \mathcal{C}_d \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ whereas $\pi_1 C_d(\mathbf{R}^4)$ is the braid group on d strings.) This conjecture has still not been proved, although several attempts have been made, which have resulted in considerable progress. In fact, by analysing the gradient flow of the Yang-Mills functional, Taubes has given an analytical proof of the "stable" approximation principle for any M^4 and G (see [Ta2] for a precise statement). A topological proof has been given by Graveson [Gr], in the case $M^4 = S^4, G = SU_2$. In this case, the "expected" range of isomorphisms is $i < d$. The main evidence for this was provided by Boyer and Mann [BM], who showed that $H_* \mathcal{M}_d$ has a product structure, which permits the construction of various non-zero homology classes. As a consequence, the approximation principle cannot be valid in general beyond $i = d$.

Atiyah [At] and Donaldson [Do] obtained the following remarkable description of the map $I : \mathcal{M}_d(S^4, G) \to \mathcal{C}_d(S^4, G)$ (at least for G a compact simple *classical* Lie group):

THEOREM [AT],[DO]. *The map $I : \mathcal{M}_d(S^4, G) \to \mathcal{C}_d(S^4, G)$ is homotopy equivalent to the natural inclusion $J : \mathrm{Hol}^*_d(S^2, \Omega G) \to \mathrm{Map}^*_d(S^2, \Omega G)$.*

Here we use the notation $\mathrm{Map}_d(S^2, \Omega G)$ for the space of smooth maps $f : S^2 \to \Omega G$ such that $[f] \in \pi_2 \Omega G \cong \pi_3 G \cong \mathbf{Z}$ corresponds to d, and $\mathrm{Map}^*_d(S^2, \Omega G)$ for the subspace consisting of maps which satisfy in addition the basepoint condition $f(\infty) = e$ (where e is the constant loop at the identity element of G). Similar definitions apply to $\mathrm{Hol}_d(S^2, \Omega G)$

and $\mathrm{Hol}_d^*(S^2, \Omega G)$, using holomorphic maps instead of smooth maps; the complex structure of ΩG being used here will be explained later. The identification of $\mathcal{C}_d(S^4, G) \simeq \Omega_d^3 G$ with $\mathrm{Map}_d^*(S^2, \Omega G) = \Omega_d^2(\Omega G)$ is elementary, but the identification of $\mathcal{M}_d(S^4, G)$ with $\mathrm{Hol}_d^*(S^2, \Omega G)$ uses the twistor description of instantons as holomorphic bundles.

This reformulation is useful only if one has a good understanding of ΩG, of course. Fortunately, the theory of loop groups (see [PS]) provides such an understanding. Surprisingly, ΩG behaves very much like a ***compact*** complex manifold; it is closely analogous to the familiar finite dimensional "generalized flag manifolds" such as $\mathbf{C}P^n, Gr_k(\mathbf{C}^n)$ or a complex flag manifold. In particular, holomorphic maps $S^2 \to \Omega G$ are, in a certain sense, given by rational functions.

The Morse-theoretic principle is supported by evidence both from Physics and Mathematics, not merely by comparison with the energy function $E : \Omega M \to \mathbf{R}$. A significant piece of mathematical evidence comes from the theory of ***harmonic maps*** of a Riemann surface M^2 into a compact Kähler homogeneous space G/H (see [EL1],[EL2]). One has an energy functional $E : \mathrm{Map}(M^2, G/H) \to \mathbf{R}$, $f \mapsto \int_{M^2} ||df||^2$, whose critical points are by definition the harmonic maps $M^2 \to G/H$, and for which the absolute minima (in a suitable connected component of $\mathrm{Map}(M^2, G/H)$) are the holomorphic maps. A comparison of the harmonic maps problem with the Yang-Mills problem is given in [Bo], which illustrates why the former may be considered as a simple "model" of the latter. In the case $G/H = \mathbf{C}P^n$, the approximation principle is valid, by the following theorem of Segal:

THEOREM [SE1]. *The inclusion* $\mathrm{Hol}_d(S^2, \mathbf{C}P^n) \to \mathrm{Map}_d(S^2, \mathbf{C}P^n)$ *induces isomorphisms in homology groups* H_i *and homotopy groups* π_i *for* $i < (2n-1)d$, *and a surjection for* $i = (2n-1)d$.

Regarding compact Káhler manifolds G/H other than $\mathbf{C}P^n$, progress has been made essentially on a case by case basis (see [Gu],[Ki],[MM1],[MM2]).

We shall discuss the approximation principle for SU_2-instantons on S^4, starting with the reformulation of Atiyah and Donaldson, then using the method of Segal.

Let $e_1, \ldots, e_n$ be an orthonormal basis of $\mathbf{C}^n$. Let H be the Hilbert space $L^2(S^1, \mathbf{C}^n) = < \lambda^i e_j \mid i \in \mathbf{Z},\ j = 1, \ldots, n >$, and let H_+ be the subspace $< \lambda^i e_j \mid i \geq 0,\ j = 1, \ldots, n >$. The group ΩU_n acts naturally on H by multiplication, and we have a map from ΩU_n to the Grassmannian $\mathrm{Grass}(H)$ of all closed linear subspaces of H, given by $\gamma \mapsto \gamma H_+ = \{\gamma f \mid f \in H_+\}$. It is easy to see that this map is injective. Regarding the image, one has:

THEOREM [PS]. *The image of the map* $\Omega U_n \to \mathrm{Grass}(H)$ *is the subspace* $Gr_\infty(H)$ *of* $\mathrm{Grass}(H)$ *consisting of linear subspaces* W *which satisfy*

(1) $\lambda W \subseteq W$,
(2) *the orthogonal projections* $W \to H_+$ *and* $W \to (H_+)^\perp$ *are respectively Fredholm and Hilbert Schmidt, and*
(3) *the images of the orthogonal projections* $W^\perp \to H_+$ *and* $W \to (H_+)^\perp$ *consist of smooth functions.*

Moreover, if $\gamma \in \Omega U_n$ *and* $W = \gamma H_+$, *then* $\deg(\det \gamma) = \dim H_+/W \cap H_+ - \dim W/W \cap H_+$.

This is known as the "Grassmannian model of ΩU_n". (Similar models exist for other differentiability classes of loops — see [PS].) This theorem is proved by showing that the (unbased) loop group $\Lambda U_n = \mathrm{Map}(S^1, U_n)$ acts transitively on $Gr_\infty(H)$, with isotropy subgroup U_n. It follows easily from this that the complex group $\Lambda Gl_n(\mathbf{C})$ also acts transitively; the isotropy subgroup is the subgroup $\Lambda^+ Gl_n(\mathbf{C})$ consisting of loops which are the boundary values of holomorphic maps $\{\lambda \mid |\lambda| < 1\} \to Gl_n(\mathbf{C})$. Thus $\Omega U_n \cong \Lambda U_n / U_n \cong \Lambda Gl_n(\mathbf{C}) / \Lambda^+ Gl_n(\mathbf{C})$. This is analogous to the description of the ordinary Grassmannian $Gr_k(\mathbf{C}^n)$ as a homogeneous space either of U_n or of $Gl_n(\mathbf{C})$. Hence, like $Gr_k(\mathbf{C}^n)$, the loop group ΩU_n acquires a natural complex structure (as a quotient of two complex Lie groups).

DEFINITION. *The algebraic loop groups of* $U_n, Gl_n(\mathbf{C})$ *are defined (respectively) as:*

$$\Omega_{\mathrm{alg}} U_n = \{\gamma \in \Lambda U_n \mid \gamma(\lambda) \text{ is polynomial in } \lambda, \lambda^{-1}\}$$
$$\Lambda_{\mathrm{alg}} Gl_n(\mathbf{C}) = \{\gamma \in \Lambda Gl_n(\mathbf{C}) \mid \gamma(\lambda), \gamma(\lambda)^{-1} \text{ are polynomial in } \lambda, \lambda^{-1}\}.$$

Similarly one defines $\Omega_{\mathrm{alg}} U_n$ and $\Lambda^+_{\mathrm{alg}} Gl_n(\mathbf{C})$. Then the following Grassmannian model for $\Omega_{\mathrm{alg}} U_n$ may be deduced from the theorem (see [Pr] for a self-contained exposition of this):

COROLLARY. *Under the map* $\Omega U_n \to \mathrm{Grass}(H)$, *the image of* $\Omega_{\mathrm{alg}} U_n$ *is the subspace* $Gr_{\mathrm{alg}}(H)$ *of* $\mathrm{Grass}(H)$ *consisting of linear subspaces* W *which satisfy*

(1) $\lambda W \subseteq W$ *and*

(2) $\lambda^k H_+ \subseteq W \subseteq \lambda^{-k} H_+$ *for some* k.

Moreover, if $\gamma \in \Omega_{\mathrm{alg}} U_n$ *and* $W = \gamma H_+$, *then* $\deg(\det \gamma) = (1/2)/(\dim \lambda^{-k} H_+/W - \dim W/\lambda^k H_+)$.

The importance of $\Omega_{\mathrm{alg}} U_n$ is that is a "good approximation" to ΩU_n, in particular it is homotopy equivalent to ΩU_n (see [Pr],[PS],[Mi2]), yet it is much simpler, being the union of a sequence of *finite dimensional complex projective varieties* (indexed by k). A similar statement holds for $\Omega_{\mathrm{alg}} SU_n$ and ΩSU_n.

Mitchell [Mi1] and Segal [Se2] introduced the following subspaces of $Gr_{\mathrm{alg}}(H), \Omega_{\mathrm{alg}} U_n$:

DEFINITION.

(1) $F_k = \{W \in \mathrm{Grass}(H) \mid H_+ \subseteq W \subseteq \lambda^{-k} H_+,\ \lambda W \subseteq W, \dim W/H_+ = k\}$

(2) $M_k = \{\gamma \in \Omega U_n \mid \gamma(\lambda) \text{ is polynomial in } \lambda^{-1},\ \deg(\det \gamma) = -k\}$

From the theorem, it is easy to see that F_k is mapped diffeomorphically to M_k under the identification $\Omega U_n \to Gr_{\mathrm{alg}}(H)$. *But one should not use this identification too casually*, as F_k and M_k reflect quite different properties of the loop group.

As $\Omega_{\mathrm{alg}} SU_n$ is equal to the identity component of $\Omega_{\mathrm{alg}} U_n$, it is clear that

$$\Omega_{\mathrm{alg}} SU_n = \bigcup_{k \geq 0} \lambda^k M_{nk}.$$

We call this the *Mitchell-Segal filtration.*

We can prove the following generalization of Segal's theorem [Se1]:

THEOREM. *The inclusion* $\mathrm{Hol}_d^*(S^2, F_k) \to \mathrm{Map}_d^*(S^2, F_k)$ *induces isomorphisms in homology groups* H_i *and homotopy groups* π_i *for* $i < d$, *and an isomorphism for* $i = d$, *where* $*$ *indicates any basepoint which is not a singular point of* F_k.

This gives immediately another proof of the theorem of [AJ] on SU_2-instantons on S^4. In fact, we obtain a result in homotopy as well as homology, and the range of dimensions can be made more precise:

THEOREM. *The map* $I : \mathcal{M}_d \to \mathcal{C}_d$ *induces a surjection in homology groups* H_i *for* $i < d$.

PROOF: Consider the following commutative diagram, in which all maps are the natural inclusions:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hol}_d^*(S^2, \Omega SU_2) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_d^*(S^2, \Omega SU_2) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{Hol}_d^*(S^2, F_k) & \longrightarrow & \mathrm{Map}_d^*(S^2, F_k)
\end{array}$$

The right hand vertical map is an equivalence in homology and homotopy up to dimension $2k-2$, as F_k can be shown to be the $2k$-skeleton of ΩSU_2. The previous theorem says that the lower horizontal map is an equivalence up to dimension d. Hence, by taking k large, we see that the upper horizontal map is surjective in homology and homotopy up to dimension d. ∎

It seems quite likely that this can be refined to give a proof of the Atiyah-Jones conjecture.

REFERENCES

AJ. M. F. Atiyah, J. D. S. Jones, *Topological aspects of Yang–Mills theory,* Commun. Math. Phys. **61** (1978), 97–118.

At. M. F. Atiyah, *Instantons in two and four dimensions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 437–451.

Au. H. Aupetit, *Les equations de Yang-Mills*, Astérisque **71-72** (1980), 171–195.

BM. C.P. Boyer, B.M. Mann, *Homology operations on instantons*, Jour. Diff. Geom. **28** (1988), 423–465.

Bo. J. P. Bourguignon, *Harmonic curvature for gravitational and Yang-Mills fields*, Springer Lecture Notes in Mathematics **949** (1982), 34–47.

Do. S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 453–460.

EL1. J. Eells, L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. Lond. Math. Soc. **10** (1978), 1–68.

EL2. J. Eells, L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. Lond. Math. Soc. **20** (1988), 385–524.

Gr. J. Graveson, *On the topology of spaces of holomorphic maps*, Acta Math. **162** (1989), 247–286.

Gu. M. A. Guest, *Topology of the space of absolute minima of the energy functional*, Amer. Jour. Math. **106** (1984), 21–42.

Ha. A. Hattori, *Topology of the moduli space of $SU(2)$-instantons with instanton number 2*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34** (1987), 741–761 (with correction in vol 36 (1989), 387–388).

Hh. R. Hartshorne, *Stable vector bundles and instantons*, Commun. Math. Phys. **59** (1978), 1–15.

Hu. J. Hurtubise, *Instantons and jumping lines*, Commun. Math. Phys. **105** (1986), 107–122.

Ki. F. C. Kirwan, *On spaces of maps from Riemann surfaces to Grassmannians and applications to the cohomology of moduli of vector bundles*, Arkiv f. mat. **24** (1986), 221–275.

Mi1. S. A. Mitchell, *A filtration of the loops on $SU(N)$ by Schubert varieties*, Math. Zeit. **193** (1986), 347–362.

Mi2. S.A. Mitchell, *Quillen's theorem on buildings and the loops on a symmetric space*, L'Enseignement Math. 34 **34** (1988), 123–166.

MM1. B. M. Mann, R. J. Milgram, *The topology of spaces of holomorphic maps from the Riemann sphere to complex Grassmannian manifolds*, preprint.

MM2. B. M. Mann, R. J. Milgram, *On the geometry of $SU(n)$-monopoles and holomorphic maps to flag manifolds*, preprint.

Pr. A.N. Pressley, *Decompositions of the space of loops on a Lie group*, Topology **19** (1980), 65–79.

PS. A.N. Pressley, G.B. Segal, *Loop Groups*, Oxford University Press, 1986.

Se1. G. B. Segal, *The topology of spaces of rational functions*, Acta Math. **143** (1979), 39–72.

Se2. G.B. Segal, *Loop groups and harmonic maps*, in Advances in Homotopy Theory, L.M.S. Lecture Notes 139, Cambridge Univ. Press 1989, pages 153–164.

Ta1. C. H. Taubes, *Path connected Yang-Mills moduli spaces*, Jour. Diff. Geom. **19** (1984), 337–392.

Ta2. C.H. Taubes, *The stable topology of self dual moduli spaces*, Jour. Diff. Geom. **29** (1989), 163–230.

University of Rochester and Tokyo Metropolitan University

HARMONIC MAPS OF COMPLETE MANIFOLDS

Seiki Nishikawa

Mathematical Institute, Tôhoku University, Sendai

In this lecture, I will discuss some recent progress on the existence of harmonic maps between complete noncompact manifolds. The following results and related matters will be explained.

1. Let $M = (M^m, g)$ and $N = (N^n, h)$ be Riemannian manifolds with metrics $g = \sum g_{ij} dx^i dx^j$ and $h = \sum h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, respectively. A C^2 mapping $u : M \to N$ is called a *harmonic map* if the tension field $\tau(u) = Tr\nabla du$ of u vanishes identically. In local coordinates, this means that u satisfies the nonlinear elliptic system of second order:

$$(1) \qquad \Delta u^\alpha + \sum_{i,j,\beta,\gamma} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^j} g^{ij} = 0,$$

where $\{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\}$ are the Christoffel symbols of N and $\alpha = 1, \cdots, n$.

The equation (1) is in fact the Euler-Lagrange equation for critical points of the total energy functional

$$E(u) = \int_M e(u)(x) dx,$$

where the energy density function $e(u)$ is defined by

$$e(u) = \frac{1}{2}|du|^2 = \frac{1}{2} \sum g^{ij} h_{\alpha\beta}(u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j}.$$

In 1964, Eells and Sampson [ES] proved that if M and N are compact without boundary and N has nonpositive sectional curvaure, then any C^1 map f from M to N can be deformed to a harmonic map by solving the corresponding parabolic system defined on $M \times [0, \infty)$, with initial condition f:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} (\Delta - \frac{\partial}{\partial t}) u^\alpha &= - \sum \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^j} g^{ij}, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}
$$

The analogous version for compact manifolds with boundary was proved by Hamilton [H].

2. In a recent paper [LT], Li and Tam proved that if M is a complete noncompact Riemannian manifold with Ricci curvature bounded from below, N is a complete noncompact Riemannian manifold with nonpositive sectional curvature, and the initial map f is of bounded energy density, then there is a unique solution of (2) on $M \times [0, \infty)$.

To this date, not much is known for the questions of convergence to a harmonic map as time approaches infinity and of behavior of solutions near the ends of M. Based on their existence theorem, Li and Tam [LT] studied the boundary value problem at infinity for harmonic maps between hyperbolic spaces and obtained that given any C^3 map from the infinity sphere S^{m-1} of the hyperbolic m-space $\mathbb{H}^m$ to the infinity sphere S^{n-1} of $\mathbb{H}^n$ whose energy density is nonvanishing, there exists a harmonic map from $\mathbb{H}^m$ to $\mathbb{H}^n$ which realizes the given boundary map. The case $m = n = 2$ was also proved by Akutagawa [A] by a different method.

3. Harmonic maps between hyperbolic spaces are closely related to the geometry of constant mean curvature spacelike hypersurfaces of Minkowski space. For instance, Akutagawa and Nishikawa [AN] proved the Lorentzian version of the classical Weierstrass-Enneper-Kenmotsu representation formula concerning constant mean curvature surfaces in Euclidean 3-space. Moreover, by studying the Gauss maps of constant mean curvature spacelike hypersurfaces of Minkowski space, Choi and Treibergs [CT] constructed many examples of harmonic maps from $\mathbb{H}^m$ into $\mathbb{H}^n$. In particular, they proved that for any closed

set containing an interval in the infinity circle S^1 of $\mathbb{H}^2$, there is a harmonic diffeomorphism from $\mathbb{H}^2$ to the interior of the hyperbolic space convex hull of the set.

It is very interesting to prove this by solving (2) with the corresponding asymptotic boundary data.

References

[A]. K. Akutagawa, *Harmonic diffeomorphisms of the hyperbolic plane*, preprint.

[AN]. K. Akutagawa and S. Nishikawa, *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*, Tôhoku Math. J., **42** (1990), 67–82.

[CT]. H. I. Choi and A. Treibergs, *Gauss maps of spacelike constant mean curvature hypersurfaces of Minkowski space*, J. Differential Geometry, **32** (1990), 775–817.

[ES]. J. Eells and J. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., **86** (1964), 109–160.

[H]. R. Hamilton, *Harmonic maps of manifolds with boundary*, Lecture Notes in Math., **471**, Springer, 1975.

[LT]. P. Li and L.-F. Tam, *The heat equation and harmonic maps of complete manifolds*, preprint.

点の配置空間上の局所系と力学系
(北大数学教室談話会記録)

岩崎克則[†]

1991. 3. 20.

1. 序

この講演では一般種数の閉 Riemann 面上の $m \geq 1$ 個の点の配置空間上にある非線形完全積分可能偏微分方程式系を定義することを目標とする. この完全積分可能系は有名な Painlevé 方程式の一般化であり, 特殊な場合に古典的な特殊函数—例えば多変数の超幾何函数など—を解として含むような興味ある非線形偏微分方程式系である. 場の理論の相関函数との関係においても注目すべきものと思われる.

2. 点の配置空間上の局所系

C を種数 $g \geq 0$ の閉 Riemann 面とする. B_m を C 上の $m \geq 1$ 個の順序付けられた点の配置空間とする. $\mathrm{p} = (p_1, ..., p_m) \in B_m$ が与えられた時, $C_{\mathbf{p}}$ を C の点 $p_1, ..., p_m$ に沿う real blow-up とする. G を複素半単純 Lie 群で自明でない中心 $Z(G)$ を持つものとする. $\mathbb{P}G = G/Z(G)$ をその射影化とする. 一般に位相空間 X に対して, X の基本亜群 ΠX から $\mathbb{P}G$ への亜群準同型の共役類全体の集合を $R_G(X)$ と表す. 位相空間の射 $f : X \to Y$ があると反変的に射 $R_G(f) : R_G(Y) \to R_G(X)$ が定まる. 埋入写像 $\iota : \partial C_{\mathbf{p}} \to C_{\mathbf{p}}$ に対して定まる射 $r = R_G(\iota) : R_G(C_{\mathbf{p}}) \to R_G(\partial C_{\mathbf{p}})$ を考える. $\partial C_{\mathbf{p}} \simeq S^1 \times ... \times S^1$ (m 個) であるから $R_G(\partial C_{\mathbf{p}}) \simeq R_G(S^1) \times ... \times R_G(S^1)$ である. $R_G(S^1)$ は $\mathbb{P}G$ の共役類の集合である. 与えられた $\theta = (\theta_1, ..., \theta_m) \in R_G(S^1) \times ... \times R_G(S^1)$ に対して, θ 上の r-fiber を $R_G(\mathrm{p}; \theta)$ と表す. これは自然に複素 symplectic 多様体を成す. 次に $\mathrm{p} \in B_m$ を動かして $R_G(\mathrm{p}; \theta)$ を束ねる. すなわち非連結和 $R_G(m; \theta) = \bigsqcup_{\mathrm{p} \in B_m} R_G(\mathrm{p}; \theta)$ を考える. $ls : R_G(m; \theta) \to B_m$ を自然な射影とする. これは自然に B_m 上の局所系をなし, $R_G(m; \theta)$ は複素 Poisson 多様体である.

「問題」　Poisson 多様体 $R_G(m; \theta)$ 上の局所系の構造 $ls : R_G(m; \theta) \to B_m$ を表現する完全積分可能 Hamilton 方程式系を見出せ.

[†] 1 1 3　東京都文京区本郷 7 − 3 − 1　東京大学理学部数学教室

3. 微分方程式のモジュライ

上の問題に対するアプローチの仕方は次の通りである．簡単のため以後 $B = B_m, R = R_G(m;\theta)$ と表す．Riemann 面 C 上の適当な条件を満たす Fuchs 型微分方程式 $L : \mathcal{M}(\xi) \to \mathcal{M}(\xi \otimes \kappa^{\otimes n})$ 全体の成す moduli 空間 E を構成する．ただし n は Lie 群 G の階数，κ は C の標準線束，ξ は $\xi^{\otimes 1-n} = \kappa^{\otimes 2}$ を満たす線束とする．$\pi : E \to B$ を微分方程式 $L \in E$ に対してその順序付特異点 $\mathrm{p} = (p_1, ..., p_m) \in B$ を対応させる写像とする．また $PM : E \to R$ を $L \in E$ に対してその射影 monodromy 表現 $\rho \in R$ を対応させる写像とする．このとき次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "PM"] \arrow[d, "\pi"'] & R \arrow[d, "ls"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

微分方程式の moduli 空間 E を射影 monodromy 写像 PM が局所双正則写像となるような複素多様体としてうまく設定することができる．R 上の Poisson 構造を写像 PM で引き戻すことによって E 上に Poisson 構造を定義することができる．更に R 上の局所系の構造から得られる R 上の葉層構造を PM で引き戻すことによって E 上に monodromy 保存葉層構造 $\mathcal{F}$ を定義することができる．このとき問題は $\mathcal{F}$ を記述する完全積分可能非線形偏微分方程式系を見出すことである．これが実行可能であり実際に Hamilton 函数まで求まることを示すのが本講演の目的である．詳しくは次の文献を見られたい．

References

1. K. Iwasaki, *Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface*, University of Tokyo preprint series 89-16 (1989).
2. K. Iwasaki, *Fuchsian moduli on a Riemann surface — its Poisson structure and the Poincaré-Lefschetz duality —*, preprint (1990).

II_1 因子環上のシフト

千葉大学理学部　　渚 勝

$\boxed{\text{定義 1}}$ M を II_1-型因子環とする. σ が M 上のシフトであるとは,

$$\sigma : * - endomorphism of M,\ \sigma(1) = 1$$

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \sigma^k(M) = C1$$

を満たすことをいう.

$\boxed{\text{定義 2}}$ σ が M 上のバイナリシフトであるとは, σ が M 上のシフトで, 次のような M の作用素 u を持つことである.

$$u^* = u,\ u^2 = 1$$

$$u\sigma^k(u) = \pm\sigma^k(u)u,\ k \in N$$

$$\{u, \sigma(u), \sigma^2(u), \cdots\} \text{ は } M \text{を生成する.}$$

この時, 数列 $\{a(n)\}$ を

$$\sigma^i(u)\sigma^j(u) = (-1)^{a(i-j)}\sigma^j(u)\sigma^i(u),\ i, j \in N$$

によって定義する.

ここでは, 上の $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ が周期的では無くて, 漸近的に周期を持つ (ある番号から先で周期を持つ) 場合を考察する.

バイナリシフトの相対可換子環 P_n とその中心環 Q_n というのは,

$$P_n = \{x \in M | xy = yx,\ y \in \sigma^n(M)\}$$

$$Q_n = \{x \in P_n | xy = yx,\ y \in P_n\}$$

であり, それらは有限次元環であり, その増大列 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ について, 次のような結果を得る.

$\boxed{\text{定理}}$

(1)　$\{\dim Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ は, 漸近的に周期を持つ.
(2)　$\dim Q_n$ は, 2 の巾乗である.
(3)　有限次元環 P_n は, homogeneous である.
(4)　P_n から P_{n+1} への埋め込み行列も漸近的に周期を持つ.