



Title	第17回偏微分方程式論 札幌シンポジウム 予稿集
Author(s)	久保田, 幸次
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 24, 1
Issue Date	1992-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/5143
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/5458
Type	departmental bulletin paper
File Information	24.pdf



第17回偏微分方程式論

札幌シンポジウム

(代表者 久保田 幸次)

予稿集

Series # 24. August, 1992

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- # 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- # 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- # 4: J. Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- # 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- # 6: T. Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- # 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- # 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- # 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- # 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
- # 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- # 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), “特異点論とその応用” 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium “Singularity Theory and its Applications,” 317 pages. 1989.
- # 13: M. Suzuki, “駆け足で有限群を見てみよう” 1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- # 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989.
- # 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- # 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. I, 258 pages. 1990.
- # 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. II, 235 pages. 1990.
- # 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- # 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- # 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- # 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- # 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- # 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.

第17回偏微分方程式論 札幌シンポジウム

下記の要領でシンポジウムを行ないますので、ご案内申し上げます。

代表者 久保田 幸次

記

1. 日 時 1992年8月6日(木)～8月8日(土)
2. 場 所 北海道大学理学部数学教室 4-508室
3. 講 演

8月6日(木)	ページ
9:30～10:30 望月 清(信州大理)	
波動方程式に対する非線形散乱概観	...
11:00～12:00 池部 晃生(京大理)	
von Neumann's uniqueness theorem for CCR	... 1
13:30～14:00 *	
14:00～14:30 柳沢 卓(奈良女子大理)	
Maximal nonnegative boundary value problems for symmetric hyperbolic systems	... 6
15:00～15:30 松井 伸也(北海道情報大)	
Example of zero viscosity limit for two dimensional Navier-Stokes flow with boundary	... 8
15:30～16:30 *	

8月7日(金)

9:30~10:30 杉村邦彦(名大理(院))

Existence of infinitely many solutions for a perturbed
elliptic equation with exponential growth . . . 10

11:00~12:00 小磯憲史(阪大教養)

弾性曲線に関する偏微分方程式 . . . 15

13:30~14:00 *

14:00~14:30 渡辺二郎(電通大)

非線形固有値問題の解の収束について . . .

15:00~15:30 大沼正樹(北大理(院))

特異退化放物型方程式の比較定理と曲面の発展方程式 . . . 19

15:30~16:30 *

8月8日(土)

9:30~10:30 小池茂昭(埼玉大理)

monotone system の粘性解について . . . 24

11:00~12:00 高木泉(東北大理)

ある反応-拡散方程式系の軸対称領域における点凝集解 . . . 28

12:00~13:00 *

* この時間は講演者を囲んで自由な質問の時間とする予定です。

連絡先 北海道大学理学部数学教室

Tel. 011-716-2111 内線 2625 (新山)

von Neumann's uniqueness theorem for CCR

京大 理 池部 晃 生

1. 正準交換関係 (CCR)

量子力学に於ては“自由度 1 (有限自由度の場合を“同様に”扱えるので自由度 1 の場合を考へる) の物理系”の運動量 p と位置 q は

$$pq - qp = -i \quad (i = \sqrt{-1})$$

を満足しなくてはならない。これが有名な Heisenberg の正準交換関係 (CCR) である。CCR は明かにユニタリ不変である。そこで「CCR はユニタリ変換を除外して p, q を一意的に決定可能か？」という問題が生ずる。これに答へるのは J. von Neumann の一意性定理であるが、上の CCR に対して直接述べられては無く、所謂 CCR の Weyl form に対して述べられている。

上の CCR は数学的には相当に難物である。 p, q を Hilbert 空間 \mathcal{H} で働く自己共役作用素で CCR の解とすれば、 U, V が有界作用素の pair とはなり得ないことは比較的簡単にわかる。が、有界であると思つて、形式的な計算を実行すると ($pq^n - q^n p = -in q^{n-1}$, etc.)

$$U(s)V(t) = e^{ist} V(t)U(s), \quad (s, t \in \mathbb{R})$$
$$U(s) = e^{isp}, \quad V(t) = e^{itq}$$

が得られる。これが“CCR の Weyl form であるか”、以後これを CCR と呼ぶことにする。

CCR の次の解を持つことは周知である：

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}), \quad (V(t)f)(x) = e^{itx} f(x), \quad (U(t)f)(x) = f(x+t).$$

これを Schrödinger pair と呼ぶことにする。

U -群 $U(t), V(t)$ が既約であれば、これらに共通の不変部分空間が
 存在しないことと意味する。(これは $U(t), V(t)$ の生成作用素 p, q について
 言っても同じである。)

定理 1. (von Neumann [vN]). U -群 $U(t), V(t)$ が既約で CCR を
 満たすならば、これらは Schrödinger pair に U -群同値である。即ち

$\exists W: \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R})$: unitary s.t.

$$(WU(t)f)(x) = (Wf)(x+t), \quad (WV(t)f)(x) = e^{itx}(Wf)(x).$$

この定理の von Neumann 自身による証明は次の作用素

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(s^2+t^2+2ist)} U(s)V(t) ds dt$$

の考察に基づく巧妙なもので、彼自身は L -群に関する Peter と Weyl の
 仕事に不変されたと述べている。

2. von Neumann の定理の証明をめぐって

定理 1 は von Neumann に帰せられているものの普通であるが、実は同じ
 頃 M.H. Stone [S] によって述べられており、その証明の方針が示されている。
 Stone, von Neumann の仕事は 1930 年頃であるが、10 数年を経て、F.
 Rellich の仕事 [R] が現れる。Rellich の結果は Weyl 型の CCR につ
 いてではなく、むしろ元の Heisenberg の CCR に関連している。但し、 p, q
 に対する少し複雑な条件が附加された。これはある意味で当然の事
 であって、稠密な部分空間上で $qp - pq = -i$ が成立するという条件くらい
 では "本質的に" 異なる解が存在し得る。

Rellich の考え方は、 $A = (q + ip)/\sqrt{2}$ とおけば、 $AA^* - A^*A = 1$ という交
 換関係が得られる(少なくとも形式的には)ことを利用するもので、この線に沿
 った研究には J. Dixmier (1958) [D], M.S. Birman & M.Z. Solomyak

(1980) [BS] がある。Rellick, Dixmier の結果は C. R. Putnam の本 [P] に
述べられている (von Neumann の定理も)。

上記の他に測度論的考察による証明がある。これに属するものとし
ては, G. W. Mackey [M], L. H. Loomis [L], H. Ezawa [E], G. Tom-
šić [T] 等がある。Mackey, Loomis は $U(t)$ を局所コンパクト群の表現と
して捉え, von Neumann の定理を一般化している。Tomšić は ρ と $\rho + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)
がユニタリ同値という条件だけを ρ の構造を決定している。

ここで紹介する証明は [L] や [E] に近い。Ezawa は ρ (或は ρ) が
simple (cyclic vector が存在すること) であることを仮定して証明している
が, 既約性と simplicity との関係がはつきりしない。von Neumann
の証明でも ρ の simplicity は証明の最終段階で明らかになる位
掛は下っている。ここではこれを先に示すことを目指す。

CCR と同値の関係

$$U(s) E(M) U(-s) = E(M+s)$$

(E は ρ のスプレッド測度, M は \mathbb{R} の Borel 集合)
に注意すると, 次の定理が証明できる。

定理 2. ρ は絶対連続である。即ち任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して
($E(\lambda)f, f$) は λ の絶対連続関数となる ($E(\lambda) = E((-\infty, \lambda])$),
更に f を適当に取れば ($E(\lambda)f, f$) はある区間 I 上で strictly positive
な微分可能な関数となる。 ρ についても同じである。

この定理の証明は簡単であるが, 興味を引く注意しなくてはな
い。

次に, 粗い話に下るが, 次の improper vector を考える:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) f dt.$$

f は定理に言う適当な f である。 φ は \mathcal{H} の vector ではないか, 実はこれか

φ に対応する (improper) cyclic vector とする. (この状況は $f(x) \equiv 1$ が $L_2(\mathbb{R})$ における掛算作用素 $\alpha \times$ の improper cyclic vector となつてゐるのと同様である.) このことは

$$\mathcal{H}_\varphi := \text{c.l. in } \{E(M)\varphi; M \text{ は } \mathbb{R} \text{ の有界 Borel 集合}\}$$

が \mathcal{H} に一致することを意味する. これは, \mathcal{H}_φ が $U(t)$ によつて不変であることを示すことによつて, 示される.

$\rho_\varphi(M) = (E(M)\varphi, \varphi)$ によつて定義される \mathbb{R} 上の測度による $L_2(\mathbb{R}; \rho_\varphi)$ を考えると $E(M)$ が $L_2(\mathbb{R}; \rho_\varphi)$ 上の掛算作用素 $\chi_M(x) \times$ と \mathcal{H} 同値なことがわかる. 更に ρ_φ は \mathbb{R} 上の Lebesgue 測度と同値なことがわかり, 結局 $E(M)$ は $L_2(\mathbb{R})$ 上の $\chi_M(x) \times$ と \mathcal{H} 同値なことがわかる. 即ち, \mathcal{H} 同値作用素 $W: \mathcal{H} \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ が存在して $WE(M)W^{-1} = \chi_M(x) \times$ となる.

そこで, $U(t)$ を W で変換したものを $WU(t)W^{-1}$ を考えよと, これが "殆ど" 平行移動 $\tau(t)$ ($(\tau(t)f)(x) = f(x+t)$) と一致することがわかる. 僅かに修正をすれば (\mathcal{H} 同値変換) これが結局 $\tau(t)$ になる. この修正では $\chi_M(x) \times$ は変更を受けない.

大体以上のよき手続をよつて定理 1 の証明が終る.

文献

[vN] J. von Neumann: Die Eindeutigkeit der Schrödingerscher Operatoren.

Math. Ann. 104 (1931), 570-578

[S] M. H. Stone: Linear transformations in Hilbert space, III. Proc. Nat.

Acad. Sci. U.S.A. 16 (1930), 172-175.

[R] F. Rellich: Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen. Nachr. d. Akad. d. Wiss. in Göttingen.

Math.-Phys. Kl. 1946, 107-115.

[D] J. Dixmier: Sur la relation $i(PQ - QP) = 1$. Comp. Math. 13 (1958), 263-

270.

- [BS] M.S Birman and M. Z. Solomjak: *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. D.Reidel Publ. Co., 1987.
- [P] C.R. Putnam: *Commutation Properties of Hilbert Space Operators*. *Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Band 36*, Springer, 1967.
- [M] G.W. Mackey: *A theorem of Stone and von Neumann*. *Duke Math. J.* 16(1949), 313-326.
- [L] L. H. Loomis: *Note on a theorem of Mackey*. *Duke Math. J.* 19(1952), 641-645.
- [E] 江沢洋: *現代物理学の基礎*(湯川, 豊田編) *量子力学 II* 岩波書店, 1978.

Maximal nonnegative boundary value problems for
symmetric hyperbolic systems

by

Taku Yanagisawa

Department of Mathematics, Nara Women's University

Abstract. The problems discussed below concern mainly the existence and regularity of local solutions in time of various initial boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic systems. It is well known that, if the dissipative effects are neglected, many physical phenomena arising in (classical) mathematical physics are described by these problems. Further, most of basic boundary conditions for such physical systems that the Euler equations for compressible fluids, the shallow water equations, the equations for ideal magnetohydrodynamics, and so on, are "maximal nonnegative". This fact is one of the reasons why we study maximal nonnegative boundary value problems for symmetric hyperbolic systems.

Now we present our problems more precisely. Let Ω be a bounded domain in \mathbb{R}^n with smooth, compact boundary $\partial\Omega$. We consider the following initial boundary value problem.

$$(1)_1 \quad A^0(t, x, u) \partial_t u + \sum_{j=1}^n A^j(t, x, u) \partial_j u = f(t, x, u) \text{ in } [0, T] \times \Omega,$$

$$(1)_2 \quad u \in M(x) \quad \text{on } [0, T] \times \partial\Omega,$$

$$(1)_3 \quad u(0, x) = u_0(x) \quad \text{for } x \in \Omega.$$

Here the unknown $u = u(t, x)$ is a vector-valued function with m components and takes values in a convex open set $\Theta \subset \mathbb{R}^m$; A^0 and A^j , $j=1, \dots, n$, are smoothly varying real $m \times m$ matrices defined on $[0, T] \times \bar{\Omega} \times \Theta$ with values in \mathbb{R}^m ; f is a smooth function on $[0, T] \times \bar{\Omega} \times \Theta$ with values in \mathbb{R}^m ; $M(x)$ is a linear subspace of \mathbb{R}^m depending smoothly on $x \in \partial\Omega$. We assume

Condition 1. $A^0(t, x, u)$ is real symmetric and positive definite for $(t, x, u) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \times \Theta$. $A^j(t, x, u)$, $j=1, \dots, n$, are real symmetric for $(t, x, u) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \times \Theta$.

We write $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j=1, \dots, n$. Let $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ be the outward unit normal to $\partial\Omega$ at x . Define the

boundary matrix as $A_\nu(t, x, u) = \sum_{j=1}^n A_j(t, x, u) \nu_j$. Put $N(t, x) \equiv \ker A_\nu(t, x, u)$. Then we also assume

Condition 2. $M(x)$ is maximally nonnegative in the sense that for $(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega$ and $u \in M(x) \cap \Theta$ the followings hold :

- i) $\langle A_\nu(t, x, u)v, v \rangle \geq 0$ for each $v \in M(x)$,
- ii) $\dim M(x) =$ the number of nonnegative eigenvalues of $A_\nu(t, x, u)$ counting multiplicity.

Condition 3. For $(t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega$ and $u \in M(x) \cap \Theta$, $\dim N(t, x, u)$ is constant on each component of $\partial\Omega$.

Under these conditions, we will show the local in time existence and regularity theorem for $(1)_{1-3}$. Moreover, we want to discuss the well-posedness of $(1)_{1-3}$ and mention several related open problems.

EXAMPLE OF ZERO VISCOSITY LIMIT FOR TWO DIMENSIONAL
NONSTATIONARY NAVIER-STOKES FLOWS WITH BOUNDARY

北海道情報大学 松井伸也

Zero viscosity limit の例を $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ において与える.

$$\begin{aligned} & u_t^\nu - \nu \Delta u^\nu + (u^\nu, \nabla) u^\nu + \nabla p^\nu = f^\nu, \\ \text{(NS)} \quad & \operatorname{div} u^\nu = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ & u^\nu|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^\nu|_{t=0} = u_0^\nu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t + (\bar{u}, \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p} = \bar{f}, \\ \text{(EE)} \quad & \operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ & \bar{u} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0, \end{aligned}$$

ここで $n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. この (NS), (EE) の解として次のようなタイプのもの考える.

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad & \bar{u}(x) = \bar{u}_0 = \frac{\bar{\varphi}(r)}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{p}(x) = - \int_r^1 \frac{\bar{\varphi}^2(\rho)}{\rho^3} d\rho + \text{constant}, \\ & u^\nu(x, t) = \frac{\varphi^\nu(r, t)}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad p^\nu(r, t) = - \int_r^1 \frac{(\varphi^\nu)^2(\rho, t)}{\rho^3} d\rho + \text{constant}. \end{aligned}$$

ここで (r, θ) は x の極座標表示とし $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(r)$ および $\varphi^\nu = \varphi^\nu(r, t)$ は, つぎを満たすものとする.

$$\text{(2)} \quad \bar{\varphi}(r) = \int_0^r \rho \bar{\omega}(\rho) d\rho,$$

here $\bar{\omega} \in C((0, 1])$ with $\bar{E} = (\int_0^1 \rho \bar{\omega}^2(\rho) d\rho)^{1/2} < \infty$. 更に

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad & \psi_t = r \left(\frac{\psi_r}{r} \right)_r \quad \text{for } 0 < r < 1, 0 < t < \infty, \\ & \psi_r|_{r=0} = 0, \quad \psi|_{r=1} = 0 \quad \text{for } 0 < t < \infty, \\ & \psi|_{t=0} = \varphi_0^\nu(r) \quad \text{for } 0 < r < 1. \end{aligned}$$

この (3) の解 $\psi(r, t)$ に対して

$$\text{(4)} \quad \varphi^\nu(r, t) = \psi(r, \nu t)$$

と置く。ただし φ_0^ν は

$$u_0^\nu(x) = \frac{\varphi_0^\nu(r)}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_0^\nu(0) = (\varphi_0^\nu)'(0) = 0,$$

$$\omega_\nu(r) \equiv \frac{(\varphi_0^\nu)'(r)}{r} \quad \text{with} \quad E^\nu = \left(\int_0^1 \rho \omega_\nu^2(\rho) d\rho \right)^{1/2} < \infty.$$

尚, $\text{rot } u_0^\nu = \omega_\nu$, $\varphi_0^\nu(r) = \int_0^r \rho \omega_\nu(\rho) d\rho$ となる。

方程式 (3) の解の存在については

THEOREM 1 ([1]). $\varphi_0^\nu \in C^{2+\alpha}([0,1])$ for $0 < \alpha < 1$. Then there exists an unique solution $\psi \in C^{2,1}(Q)$ of (3), which satisfies $\psi(0,t) = 0$ for $0 \leq t < \infty$ and

$$|\psi(r,t)| + \left| \int_0^t \psi_r(1,\tau) d\tau \right| + t |\psi_r(1,t)|$$

$$\leq C(\|\omega_\nu\|_{L^2(0,1)}, T) \quad \text{for } (r,t) \in [0,1] \times [0,T] \text{ except } (r,t) = (1,0),$$

where $Q = \{(r,t) \in [0,1] \times [0,\infty); (r,t) \neq (1,0)\}$.

Theorem 1 より次の存在定理を得る。

THEOREM 2. For the solution ψ in Theorem 1, we define u^ν and p^ν by (1) and (4). Then (u^ν, p^ν) is an unique solution such that

$$u^\nu \in C^{2,1}(D) \quad \text{and} \quad p^\nu \in C^{3,1}(D),$$

$$u_t^\nu, \Delta u^\nu, \nabla(\text{rot } u^\nu) \in L^2((0,\infty); L^2(\Omega)),$$

$$t \cdot |\nabla u^\nu| \leq C(\|\omega_\nu\|_{L^2(0,1)}, T) \quad \text{for } (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$

here $D = \{0 < |x| \leq 1, 0 < t < \infty\}$.

Zero viscosity limit の例は次で与えられる。

THEOREM 3 (M. 一川島). Assume that $\|u_0^\nu - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ and $\nu^{3/4} \|\text{rot } u_0^\nu\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$. Then for any but fixed $T > 0$ we have

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\nu(t) - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{as } \nu \rightarrow 0.$$

参考文献

[1] Matsui, S. Example of zero viscosity limit for two dimensional nonstationary Navier-Stokes flows wit boundary.

Existence of infinitely many solutions for a perturbed elliptic equation with exponential growth

名大理(院) 杉村 邦彦

次の非線形 Dirichlet 問題を考える.

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = g(x, u) + f(x) & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N (N=2): \text{有界領域,} \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ここで, $\forall f \in L^2(\Omega)$, g は次の条件をみたすものとする.

$$(g1) \quad g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

$$(g2) \quad \begin{cases} \exists A_0 > 0 \text{ s.t. } |g(x, \xi)| \leq A_0 e^{\Phi(\xi)} & \text{for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \\ \text{ここに, } \Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(\xi)\xi^{-2} \rightarrow 0 & (|\xi| \rightarrow \infty). \end{cases}$$

$$(g3) \quad \begin{cases} \exists \mu > 2, \exists r_0 \geq 0 \text{ s.t.} \\ 0 < \mu G(x, \xi) \equiv \mu \int_0^\xi g(x, t) dt \leq \xi g(x, \xi) & \text{for } x \in \bar{\Omega}, |\xi| \geq r_0. \end{cases}$$

$$(g4) \quad g(x, -\xi) = -g(x, \xi) \quad \text{for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

$$(g5) \quad \begin{cases} 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2, \exists A_1, \exists A_2 > 0, \exists B_1, \exists B_2 \geq 0 \text{ s.t.} \\ A_1 e^{|\xi|^{\alpha_1}} - B_1 \leq G(x, \xi) \leq A_2 e^{|\xi|^{\alpha_2}} + B_2 & \text{for } (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \\ \text{さらに } \alpha_1, \alpha_2 \text{ は } \frac{2}{\alpha_2} - 2 > \frac{1}{\alpha_1} \text{ をみたす.} \end{cases}$$

注: $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 2$ かつ $\frac{2}{\alpha_2} - 2 > \frac{1}{\alpha_1} \Rightarrow \alpha_2 < \frac{1}{2}$.

既知結果の概要

$f \equiv 0$ のとき
[AR, R]

$$g(x, u) \sim \begin{cases} u e^{|\mu|^\alpha} & (0 < \alpha < 2) \\ |\mu|^{s-1} u & (1 < s < \infty) \\ |\mu|^{s-1} u & (1 < s < \frac{N+2}{N-2}) \end{cases} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} (N=2) \\ (N=2) \\ (N \geq 3) \end{matrix} \Rightarrow \text{(1) は無限個の解をもつ.}$$

$\forall f \in L^2(\Omega)$ のとき
[BB, St, R, BL, T]

$$g(x, u) \sim |\mu|^{s-1} u \quad \begin{matrix} (1 < s < \infty) \\ (1 < s < \frac{N}{N-2}) \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} (N=2) \\ (N \geq 3) \end{matrix} \Rightarrow \text{シ}$$

Open problem

$$\forall f \in L^2(\Omega) \text{ で } \begin{cases} N \geq 3 \text{ のときの } s \text{ の条件 } \frac{N}{N-2} \rightarrow \frac{N+2}{N-2} \text{ にゆるめられるか?} \\ N = 2 \text{ のとき } g(x, u) \sim u e^{|\mu|^\alpha} (0 < \alpha < 2) \text{ ても O.K. か?} \end{cases}$$

この問題のうち $N=2$ の場合に関して次の定理を得た.

定理 $N=2$ で g は条件 (g1) ~ (g5) をみたし, $\forall f \in L^2(\Omega)$ とする. このとき方程式 (1) は無限個の解の列 $\{u_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ で, $\|u_j\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$ をみたすものをもつ.

例: $g(x, u) \sim u e^{|\mu|^\alpha} (0 < \alpha < \frac{1}{2})$ に定理を適用できる.

定理の証明のための準備

方程式(1)に対応する汎関数: $I(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u) - f u \right\} dx$ for $u \in E \equiv H_0^1(\Omega)$.

条件(91), (92)のもとで $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ から $(I'(u), \varphi)_E = \int_{\Omega} \{ \nabla u \cdot \nabla \varphi - g(x, u) \varphi - f \varphi \} dx$.

したがって, 方程式(1)の解 \iff 汎関数 I の臨界点.

以下(は)らくは(91)~(94)のみを仮定した上での Rabinowitz の方法および結果である.

修正汎関数: $J(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u) - \psi(u) f u \right\} dx$ for $u \in E$.

ここで, ψ は $\psi \in C^{\infty}(E, \mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$ かつ次の命題をみたすべく構成されたもの.

命題1 $\exists M_0 = M_0(f) > 0$ s.t.

(1°) $J(u) \geq M_0$ かつ $J'(u) = 0 \implies J(u) = I(u)$ かつ $I'(u) = 0$.

(2°) J は (PS) をみたす. ここで (PS): $\{u_j\} \subset E$ s.t. $M_0 \leq J(u_j) \leq M$, $\|J'(u_j)\|_{E^*} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) $\implies \{u_j\}$ は収束部分列をもつ.

次に, $\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$ の固有値を λ_j ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$) とし, 対応する固有関数

$e_j \in \int_{\Omega} \nabla e_i \cdot \nabla e_j dx = \delta_{ij}$ をみたすようにとり, $E_n \equiv \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$ とおくと,

$\begin{cases} \exists R_n > 0$ s.t. $J(u) \leq 0$ for $u \in E_n \setminus B_{R_n}$,
ここに, $B_{R_n} \equiv \{u \in E; \|u\| \leq R_n\}$, $\|u\| \equiv \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
(1°) $R_n < R_{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とできる.

さらに, $D_n \equiv B_{R_n} \cap E_n$, $\partial D_n \equiv \partial B_{R_n} \cap E_n$ とおき,

$\Gamma_n \equiv \{ \gamma \in C(D_n, E); \gamma(-u) = -\gamma(u) \text{ in } D_n, \gamma(u) = u \text{ on } \partial D_n \}$,

$U_n \equiv \{ u \in t e_{n+1} + w; t \in [0, R_{n+1}], w \in B_{R_{n+1}} \cap E_n, \|u\| \leq R_{n+1} \}$,

$\Lambda_n \equiv \{ H \in C(U_n, E); H|_{D_n} \in \Gamma_n, H(u) = u \text{ for } u \in \partial D_{n+1} \cup [(B_{R_{n+1}} \setminus B_{R_n}) \cap E_n] \}$,

と定義し, mini-max value を次のように定める.

$$b_n = \inf_{\gamma \in \Gamma_n} \max_{u \in D_n} J(\gamma(u)), \quad C_n = \inf_{H \in \Lambda_n} \max_{u \in U_n} J(H(u)).$$

定義より $C_n \geq b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). さらに次の命題が成り立つ.

命題2 $C_n > b_n \geq M_0$ と仮定する. そして $\exists \delta \in (0, C_n - b_n)$ をとり

$$\Lambda_n(\delta) \equiv \{ H \in \Lambda_n; J(H(u)) \leq b_n + \delta \text{ for } u \in D_n \}, \quad C_n(\delta) = \inf_{H \in \Lambda_n(\delta)} \max_{u \in D_n} J(H(u))$$

と定義する. このとき $C_n(\delta) \geq C_n$ であり, $C_n(\delta)$ は汎関数 I の臨界値となる.

以上 Rabinowitz [R] による.

以下 (91)~(94)に加えて(95)も仮定する.

命題3 $\exists \theta_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $b_n \geq \theta_1 n (\log n)^{\frac{2}{\alpha_2} - 2}$ for $n \geq N_1$.

証明は補足参照.

命題4 “ $C_n = b_n \ \forall n \geq n_0$ ” が成り立つと仮定すると,
 $\exists \theta_2 > 0, \exists n_1 \geq n_0$ s.t. $b_n \leq \theta_2 n (\log n)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ for $n \geq n_1$.

証明の概要: J の定義と条件(95)の左辺の不等式を用いて, “ $\exists B = B(f) > 0$ s.t. $|J(u) - J(-u)| \leq B \{ \log(|J(u)| + 1) \}^{\frac{1}{\alpha_1} + 1}$ for $u \in E$.” が示される. これと,
 “ $C_n = b_n \ \forall n \geq n_0$ ”なる仮定および “ $b_n \rightarrow \infty$ (命題3)となること”を用いて, 漸化不等式
 “ $\exists \beta > 0, \exists n_1 \geq n_0$ s.t. $b_{n+1} \leq b_n + \beta (\log b_n)^{\frac{1}{\alpha_1}}$ for $n \geq n_1$ ”を導き, 帰納法による. ■

定理の証明

条件 “ $\frac{2}{\alpha_2} - 2 > \frac{1}{\alpha_1}$ ” を考慮すれば, 命題4中の不等式は命題3中の不等式に矛盾する.
 したがって, 命題4中の仮定 “ $C_n = b_n \ \forall n \geq n_0$ ” が否定される. 一方, $C_n \geq b_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$,
 $b_n \rightarrow \infty$ であるから $C_{n_j} > b_{n_j} \geq M_0, b_{n_j} \rightarrow \infty$ をみたす部分列 $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$ がとれる.
 (したがって, 命題2により) $\{C_{n_j}(\delta)\}_{j=1}^{\infty}$ は汎関数 I の臨界値の列で, $C_{n_j}(\delta) \rightarrow \infty$ をみたす
 ことになり, これらの臨界値に対応する臨界点たちが, 定理にいう方程式(1)の解の列となる. ■

補足 (命題3の証明)

条件(95)の右辺の不等式より, $\exists a_0 > 0, \exists C > 0$ s.t.

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - a_0 \int_{\Omega} e^{(u^2+1)^{\frac{\alpha_2}{2}}} dx - C \quad \text{for } u \in E.$$

ここで, $G_0(\xi) = a_0 e^{(\xi^2+1)^{\frac{\alpha_2}{2}}} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とおき, $K(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G_0(u) dx$ と
 定義すると, $K \in C^\infty(E, \mathbb{R}), K(u) = K(-u), J(u) \geq K(u) - C \ (\forall u \in E)$.

さらに, $d_n = \inf_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}_n} \max_{u \in D_n} K(u)$ と定めれば, $b_n \geq d_n - C \ (\forall n \in \mathbb{N})$ となる.

したがって, 命題3を証明するには, 次のことを示せばよい.

命題3' $\exists \theta'_1 > 0, \exists N'_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $d_n \geq \theta'_1 n (\log n)^{\frac{2}{\alpha_2} - 2}$ for $n \geq N'_1$

命題3'の証明に際して, “ $u \in E \Rightarrow G''_0(u) \in L^p(\Omega) \ \forall p \geq 1$ ” となることに注意し,

$$K''(u)(h, h) \equiv \int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx - \int_{\Omega} G''_0(u) h^2 dx = \int_E (-\Delta - G''_0(u)) h, h \Big|_E \quad \text{--- ①}$$

とおく. さらに, $K'(u)$ の augmented Morse index を次のように定義する.

$$m^*(K'(u)) \equiv \max \{ \dim H; H \text{ は } E \text{ の部分空間で } K''(u)(h, h) \leq 0 \text{ for } \forall h \in H \text{ をみたす.} \}$$

このとき, Tanaka [T] の Theorem B1 によって次のことが示される.

命題 A-1 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次のみたす $u_n \in E$ が存在する.
 $K(u_n) \leq d_n, K'(u_n) = 0, m^*(K''(u)) \geq n.$

固有値問題: $\begin{cases} -\Delta h - V(x)h = \lambda h & \text{in } \Omega, \\ h = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (V \in L^p(\Omega), \exists p > 1),$

における $\lambda(\leq 0)$ 以下の固有値の数 (重複も数えて) を $N_\lambda(V, \Omega)$ と記すと, ① および $m^*(K''(u))$ の定義により, 特に, $N_0(G''_0(u), \Omega) = m^*(K''(u)).$ — ②

また, 一般に次の命題が成り立つ.

命題 A-2 $N_0(V, \Omega) \leq C_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} V_+(x) \log(V_+(x) + 1) dx \right\},$
 ここに, C_0 は V に依存しない正の定数, $V_+(x) \equiv \frac{1}{2}(|V(x)| + V(x)).$

この命題の証明には, E. Lieb [Li] によって得られた次の不等式を用いる.

E. Lieb の不等式 $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ は下半連続, 下に凸で次をみたすものとする.
 ($N=2$ の場合) $\varphi(t)/t^m \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \varphi(0) = 0, \int_0^\infty t^{-1} e^{-t} \varphi(t) dt = 1.$

このとき, $\lambda < 0$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$N_\lambda(V, \Omega) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty t^{-1} e^{\lambda t} F(x, x; t) \varphi(t V_+(x)) dt dx,$$

ここに, $F(x, y; t)$ は \mathbb{R}^2 における熱方程式の基本解で $F(x, x; t) = (4\pi t)^{-1}$.

命題 A-2 の証明: 上の φ として, $\varphi(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1, \\ a(t-1) & t \geq 1, \end{cases} \quad a \equiv (e^{-1} \int_1^\infty t^{-1} e^{-t} dt)^{-1}$ とおく.

また, $1_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \end{cases} \quad \tilde{V}_+(x) = \begin{cases} V_+(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \end{cases}$ とする. このとき,

$N_0(V, \Omega) \leq N_0(V_+, \Omega) \leq N_{-1}(V_+ + 1, \Omega) \leq N_{-1}(\tilde{V}_+ + 1_\Omega, \mathbb{R}^2)$ となることに注意して,

$$N_0(V, \Omega) \leq N_{-1}(\tilde{V}_+ + 1_\Omega, \mathbb{R}^2) \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t} (4\pi t)^{-1} \varphi(t(\tilde{V}_+(x) + 1_\Omega(x))) dt dx$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1} e^{-t} (4\pi t)^{-1} a \{t(V_+(x)+1) - 1\} dt dx \leq \frac{a}{4\pi} \int_{\Omega} (V_+(x)+1) \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1} e^{-t} dt dx$$

ここで, $\int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^\infty t^{-1} e^{-t} dt \leq \int_{\frac{1}{V_+(x)+1}}^1 t^{-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} dt = \log(V_+(x)+1) + e^{-1}$ に注意すれば

命題 A-2 中の不等式が示される.

命題 A-2 で特に $V(x) = G''_0(u(x))$ とおき ② を用いると, 次の系が得られる.

命題 A-2 の系 $m^*(K''(u)) \leq C_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} G''_0(u)_+ \log(G''_0(u)_+ + 1) dx \right\}$ for $u \in E.$

長時間存在 任意の C^∞ 級初期値 γ_0 に対して $0 \leq t < \infty$ 上で C^∞ 級の解 γ_t が一意に存在する。

ここまで出来れば、 $t \rightarrow \infty$ のとき $-\gamma^{(4)} + (w\gamma')'$ が C^∞ ノルムで 0 に収束することを示すのはそれほど難しくはない。これは、解 γ_t が弾性曲線に「近づく」ことを意味している。実際に収束を示すには、Euclid 空間が実解析的であることを用いて Simon の方法を用いる。

証明の鍵

短時間存在 普通的手段として、式 (EP'-1) を

$$(EP_{\lambda-1}) \quad \partial_t \gamma = -\gamma^{(4)} + \lambda((v - 2|\gamma''|^2)\gamma')'$$

に拡張する。ここで、 $0 \leq \lambda \leq 1$ である。 $\lambda = 0$ ならこの方程式は解ける。そこで、解けるような λ の集合が閉区間 $[0, 1]$ の中で閉かつ開であることが示せばよいことになる。開であることは線型問題に帰着し、通常のやり方でよい。ところが、閉であることについては、 $\lambda = 1$ でないと、 $|\gamma'| = 1$ とはならず、式 (EP'-2) から v の評価を得ることができない。そこで、式 (EP'-2) を

$$(EP_{\lambda-2}) \quad -v'' + \frac{|\gamma''|^2}{\|\gamma'\|^2} v = 2|\gamma''|^4 - |\gamma^{(3)}|^2$$

と変形する。すると、任意の閉曲線について成立する式 $\|\gamma''\|^2 \geq \|\gamma'\|^2$ を用いて v が $\|\gamma^{(3)}\|^2$ で評価できる。これを用いると、 $\frac{d}{dt} \|\gamma^{(3)}\|^2$ が上から押さえられ、よって $\|\gamma^{(3)}\|$ が上に有界。更に、 $\frac{d}{dt} \|\gamma'\|^2$ が下から押さえられるから、 $\|\gamma'\|$ が下に有界となる。後は通常のやり方でよい。

長時間評価 元々変分問題から出発したので、 $\frac{d}{dt} \|\gamma''\|^2 = -2\|\partial_t \gamma\|^2 \leq 0$ が容易に得られる。もう少し頑張ると、

$$\frac{d}{dt} \|\gamma''\|^2 \leq -C_1 \|\gamma^{(4)}\|^2 + C_2$$

なる正定数が得られる。また、

$$\frac{d}{dt} \|\gamma^{(3)}\|^2 \leq C_3(1 + \|\gamma^{(4)}\|^2 \|\gamma^{(3)}\|^2)$$

が出るので、

$$\frac{d}{dt} \{C_4 \|\gamma''\|^2 + \log(\|\gamma^{(3)}\|^2)\} \leq C_5$$

が分かる。 $\|\gamma''\|^2 \geq \|\gamma'\|^2 = 1$ から $\|\gamma^{(3)}\|$ の上からの評価が得られた。 $\|\gamma^{(3)}\|$ の評価を用いれば $\|\gamma^{(n)}\|$ ($n > 3$) の評価は通常通り。

以下, $C_1, C_2, \dots, C'_1, C'_2, \dots$ は $u \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に依存しない正の定数とする.

さて, 命題3'の証明を完結しよう. まず, $\forall \xi \in \mathbb{R}$ に対して次の不等式が成り立つことに注意する.

$$\begin{cases} G_0(\xi)\xi \geq C_1 \langle \xi \rangle^{\alpha_2} e^{\langle \xi \rangle^{\alpha_2}} - C_2, \\ G_0''(\xi)_+ \leq C_3 \langle \xi \rangle^{2\alpha_2-2} e^{\langle \xi \rangle^{\alpha_2}}, \end{cases} \quad (\langle \xi \rangle \equiv (\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}). \quad \text{---③}$$

次に, 命題A-1, A-2の系および③を用いて,

$$d_n \geq K(u_n) = K(u_n) - \frac{1}{2}(K'(u_n), u_n) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} G_0'(u_n) u_n - G_0(u_n) \right\} dx \geq C'_1 \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{\alpha_2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx - C'_2, \quad \text{---④}$$

$$n \leq m^*(K''(u_n)) \leq C_0 \left\{ 1 + \int_{\Omega} G_0''(u_n)_+ \log(G_0''(u_n)_+ + 1) dx \right\} \leq C_0 + C'_3 \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx.$$

$$\text{すなわち, 各 } n \in \mathbb{N} \text{ に対して, } \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx \geq C_4 n - C_5 \quad \text{---⑤}$$

ここで, $\varphi_0(\xi) = \xi \{ \log(\xi+1) \}^{\frac{2}{\alpha_2}-2}$ ($\xi \geq 0$) とおくと, α_1, α_2 に対する条件より $\frac{2}{\alpha_2}-2 > 2$ であるから, φ_0 は単調増加, 下に凸となる. したがって, Jensenの不等式および φ_0 の定義を用いて,

$$\varphi_0 \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx \right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi_0(\langle u_n \rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}}) dx \leq C_6 \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{\alpha_2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx. \quad \text{---⑥}$$

④~⑥より, 十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} d_n &\geq C'_1 \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{\alpha_2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx - C'_2 \geq C_7 \varphi_0 \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \langle u_n \rangle^{3\alpha_2-2} e^{\langle u_n \rangle^{\alpha_2}} dx \right) - C_8 \\ &\geq C_7 \varphi_0(C_4 n - C_5) - C_8 \geq \theta'_1 n (\log n)^{\frac{2}{\alpha_2}-2} \quad (\exists \theta'_1 > 0), \end{aligned}$$

が成り立ち, 命題3'の証明が終了する. ■

参考文献

- [AR] A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz, *J. Funct. Anal.* 14 (1973), 349~381.
- [BB] A. Bahri & H. Berestycki, *Trans. Amer. Math. Soc.* 267 (1981), 1~32.
- [BL] A. Bahri & P.L. Lions, *Comm. Pure Appl. Math.* 41 (1988), 1027~1037.
- [Li] E. Lieb, *Proc. Sym. Pure Math.* 36 (1980), 241~252.
- [R] P.H. Rabinowitz, *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.* 65 Amer. Math. Soc., Providence 1986.
- [S] K. Sugimura, *Nonlinear Anal. : T.M.A.* (to appear).
- [St] M. Struwe, *Manuscripta Math.* 32 (1980), 335~364.
- [T] K. Tanaka, *Comm. Partial Diff. Eq.* 14 (1989), 99~128.

弾性曲線に関する偏微分方程式

大阪大学教養部 小磯憲史

運動の方程式と定常解

ピアノ線の両端を滑らかにつなぎ、任意に歪めて空間に放置すれば、そのピアノ線は弾性エネルギーが小さくなるように変形してゆき、最終的にはある形をとる。その最終的な形を閉弾性曲線とよぶ。それを数学的に定式化する。束縛条件： $|\gamma'(x)| = 1$ のもとで、弾性エネルギー $E(\gamma) = \int |\gamma''(x)|^2 dx$ を作用とする変分問題を考える。ただし、 x は $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上を動く。

曲線 $\gamma(x)$ の無限小変形 $\partial_t|_{t=0} \gamma_t(x)$ に対し、弾性エネルギーは

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} E(\gamma_t) = 2 \int (\gamma''(x), \partial_t|_{t=0} \gamma_t''(x)) dx = 2 \int (\gamma^{(4)}(x), \partial_t|_{t=0} \gamma_t(x)) dx$$

だけ変化する。従って、曲線の「粘性無限大のもとでの運動の方程式」は

$$\partial_t \gamma_t = -\gamma_t^{(4)} + \text{束縛項 } \eta_t$$

で与えられる。ここで、束縛項 η は次のようにして求められる。

まず、微小変形 ξ の束縛条件は $(\gamma'(x), \xi'(x)) = 0$ で、それを満たす ξ 全体を V とする。 V に L_2 直交し、 $-\gamma^{(4)} + \eta$ が V に属するような η が束縛項である。幸いに、このような η は関数 $w(x)$ を用いて $(w\gamma)'$ と表示でき、運動の方程式は次のようになる。

$$(EP) \quad \begin{cases} \partial_t \gamma = -\gamma^{(4)} + (w\gamma)', \\ (\gamma', \{-\gamma^{(4)} + (w\gamma)'\})' = 0 \end{cases}$$

弾性曲線とは、この方程式でいえば $\partial_t \gamma = 0$ となる曲線だから、方程式は

$$(EE) \quad -\gamma^{(4)} + (w\gamma)' = 0$$

で与えられる。この式から関数 $w(x)$ は $w = |\gamma''|^2 + (\gamma', a)$ となり、 γ についての単独の常微分方程式になる。 $(a$ は積分定数)

空間閉弾性曲線 (EE)

Langer - Singer によって n 次元 Euclid 空間の閉弾性曲線は完全に分類されている。主な結果だけ述べると、

- (1) 弾性曲線は 3 次元空間に入る。
- (2) 平面内の閉弾性曲線は円と 8 の字型の 2 種類のみ。
- (3) 3 次元空間内の閉弾性曲線は有理数 $0 \leq \frac{m}{n} \leq \frac{1}{2}$ と一対一に対応する。(後の図参照)
- (4) 3 次元空間内の閉弾性曲線で安定なものは単純な円のみ。

運動の方程式 (EP)

定理 方程式 (EP) は任意の C^∞ 級の初期値 γ_0 ($|\gamma'_0| = 1$) に対して $0 \leq t < \infty$ で C^∞ 級の解 γ_t を持ち、その解は $t \rightarrow \infty$ のときある閉弾性曲線に C^∞ 位相で収束する。

証明の方針 一般的に、熱方程式でないことを 1 次元であることで補う。つまり、最大値の原理の代わりに、評価: $\max |u|^2 \leq \|u\| \cdot (\|u\| + \|u'\|)$ を用いる。ここに、 $\|*\|$ は S^1 上の L_2 ノルムである。

最初に $w = v - 2|\gamma''|^2$ と置いて (EP) を整理しておく。

$$(EP') \quad \begin{cases} \partial_t \gamma = -\gamma^{(4)} + ((v - 2|\gamma''|^2)\gamma')', \\ -v'' + |\gamma''|^2 v = 2|\gamma''|^4 - |\gamma^{(3)}|^2, \\ |\gamma'_0| = 1. \end{cases}$$

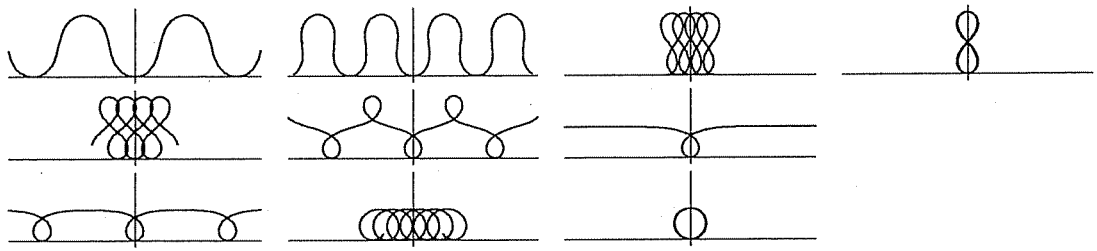
もちろん、もし解 γ_t があれば、その解は $|\gamma'_t| \equiv 1$ を満たす。証明は次の手順で行なわれる。

短時間存在 任意の C^∞ 級初期値 γ_0 に対してある正数 T があって、 $0 \leq t < T$ 上で C^∞ 級の解 γ_t が一意に存在する。

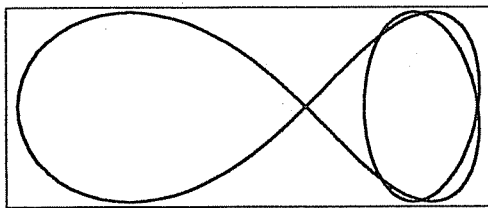
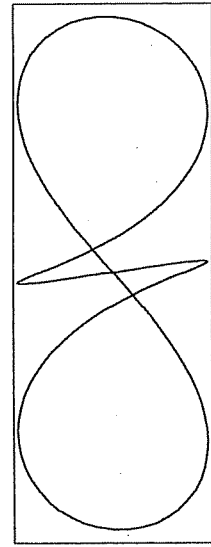
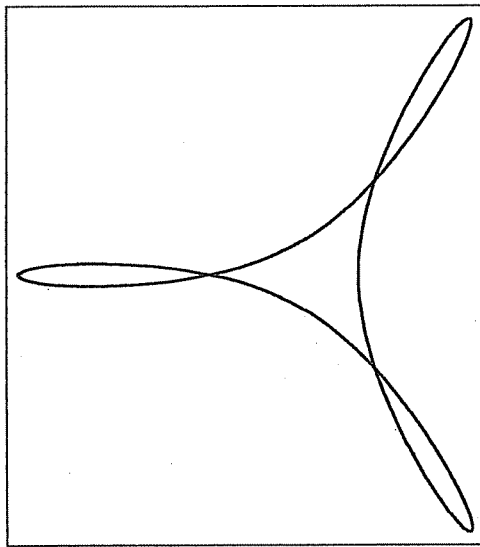
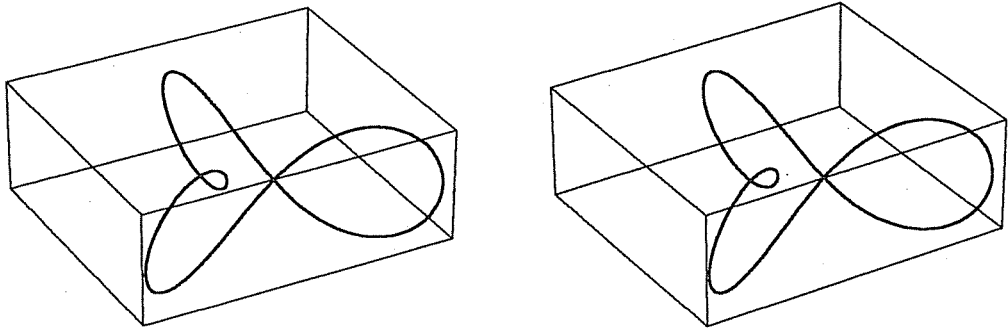
長時間評価 もし $0 \leq t < T$ 上の C^∞ 級の解 γ_t が存在すれば、それは $t \rightarrow T$ のとき C^∞ ノルムで一様に有界である。

この2つがわかったとする。 C^∞ 級の解 γ_t が存在する t の上限を $T < \infty$ とすれば、「長時間評価」より $t \rightarrow T$ のとき γ_t は収束し、よって「短時間存在」により T を越えて解が延長される。即ち、

平面彈性曲線



空間彈性曲線 (1/3 型)



SINGULAR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS
WITH APPLICATIONS
TO GEOMETRIC EVOLUTIONS

MASAKI OHNUMA
AND
MOTO-HIKO SATO

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

1. **Introduction.** We are concerned with a degenerate parabolic equation of form

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (1.1)$$

where Ω is a bounded domain in \mathbf{R}^n and $T > 0$. The function $F(p, X)$ is allowed to have singularities when p belongs to finitely many half lines ℓ_i of the form

$$\ell_i = \{\eta q_i ; \eta \geq 0\}, \quad q_i \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

As explained later such an F naturally arises in a level set approach of motion of phase boundaries. Here $u_t = \partial u / \partial t$, ∇u and $\nabla^2 u$ denote, respectively, the time derivative of u , the gradient of u and the Hessian of u in space variables.

Our first goal is to establish a comparison principle for viscosity solutions of (1.1). If F has singularities only for $p = 0$, a comparison principle is established in [5] assuming that F can be extended continuously at $(p, X) = (0, O)$; See [11] for simplification of the proof. (The paper [6] includes corrections of technical errors in [5], [11]).

Although we still appeal to Crandall-Ishii's lemma [7], the method in [11] or [5] does not apply to our setting because F has singularities other than $p = 0$. By a clever choice of "test function" we shall prove a comparison principle under assumptions on the value of semicontinuous envelope of F at $(\mu q_i, \nu q_i \otimes q_i)$, $\mu > 0$, $\nu \in \mathbf{R}$, where \otimes denotes the tensor product.

AMS Subject Classifications : 35K22, 35K65, 82D35 .

Our second goal is to apply our comparison results to geometric evolutions. Let Γ_t denote the hypersurface expressed as the boundary of a bounded open set D_t in \mathbf{R}^n ($n \geq 2$) at time t . Let \mathbf{n} denote the unit exterior normal vector field on $\Gamma_t = \partial D_t$. Let $V = V(t, x)$ denote the speed of Γ_t at $x \in \Gamma_t$ in the exterior normal direction. The geometric evolution of Γ_t studied in [2], [3] is of the form

$$V = \frac{1}{\beta(\mathbf{n})} \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{n}) \right) + c \right), \quad (1.2)$$

where H is positively homogeneous of degree one, β is a positive function on a unit sphere S^{n-1} in \mathbf{R}^n and c is a constant.

A level set approach is to regard Γ_t as the zero-level set of an auxiliary function $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ of the evolution equation

$$\begin{aligned} u_t - \text{trace} \left(A \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \left(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2} \right) \nabla^2 u \left(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{|\nabla u|^2} \right) \right) + B(\nabla u) &= 0, \\ A(\bar{p}) &= \frac{1}{\beta(-\bar{p})} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(-\bar{p}) \right), \quad \bar{p} = \frac{p}{|p|}, \\ B(p) &= -\frac{1}{\beta(-\bar{p})} |p|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Here Ω is taken so that Γ_t stays in Ω for $t \in (0, T)$ and u is taken so that $u > 0$ on D_t and $u < 0$ outside $\Gamma_t \cup D_t$.

A fundamental analytic question related to (1.2) and (1.3) is to construct a global in time unique generalized solution $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ for a given initial data Γ_0 . Chen, Giga and Goto [5] have adapted the theory of viscosity solutions to construct unique global generalized solutions to the equation (1.3) when β is continuous and $H \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ is convex not necessarily strictly convex. Moreover, they proved the zero-level set Γ_t of u of (1.3) is determined by Γ_0 and independent of initial value of u . This yields a global unique generalized evolution to (1.2). Nearly at the same time Evans and Spruck [9] carried out this programme in a slightly different way and only for the mean curvature flow equation.

For the history of level set approach as well as its recent development we refer to [1], [4] and references therein.

In physics there is also the possibility that H is not convex as studied in [2], [3]. If H is not convex, the equation (1.3) is no longer parabolic and not well-posed. It seems

to be natural to consider the convexification \hat{H} when H is not convex. The problem is that the convexification \hat{H} of a function H may be no longer C^2 away from zero even if H is smooth. So the equation (1.3) may have singularities other than at $\nabla u = 0$. Our comparison theory does apply to (1.3) with $H = \hat{H}$ provided that \hat{H} is singular at most finitely many directions and that the derivative of \hat{H} is locally Lipschitz outside zero. Once the comparison principle is established for (1.3) with $H = \hat{H}$, we can adapt the theory in [5] of constructing global unique generalized solutions of (1.2) with $H = \hat{H}$.

Angenent and Gurtin [3] solved such an equation (1.2) with $H = \hat{H}$ for $n = 2$ at least locally if each normal of initial curve (with corners) lies in the direction that the curvature of $\hat{H} = 1$ is positive. Our theory applies to their setting. Moreover we allow that normal of initial curve lies in the direction that the curvature of $\hat{H} = 1$ is zero.

In Section 2 we shall establish a comparison principle on a bounded domain for the equation (1.1).

During this work is prepared we learned that a comparison theorem for nonsmooth interfacial energy is obtained by Giga [12] when the interface is a graph of a function on \mathbf{R} . After this work was completed, we learned a recent work of Gurtin, Soner and Souganidis [13] closely related to ours. They also proved a comparison principle for (1.3) with $H = \hat{H}$, but the proof differs from ours. They also proved that generalized solution is consistent with solutions of Angenent and Gurtin [3].

2. Comparison theorem. Let Ω be a bounded domain in \mathbf{R}^n and let T be a positive number. We consider a degenerate parabolic equation of form

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } Q = (0, T) \times \Omega. \quad (2.1)$$

For $i = 1, \dots, m$ let ℓ_i be a half line in \mathbf{R}^n of the form

$$\ell_i = \{\eta q_i; \eta \geq 0\}, \quad \text{where } q_1, \dots, q_m \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}.$$

We list assumptions on $F = F(p, X)$.

$$(F1) \quad F : \left(\mathbf{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m \ell_i \right) \times S^n \longrightarrow \mathbf{R} \text{ is continuous,}$$

where S^n denotes the space of real $n \times n$ symmetric matrices.

$$(F2) \quad \begin{aligned} &F \text{ is degenerate elliptic, i.e.,} \\ &F(p, X + Y) \leq F(p, X) \quad \text{for all } Y \geq 0. \end{aligned}$$

$$(F3) \quad \begin{aligned} -\infty < F_*(\mu q_i, \nu q_i \otimes q_i) = F^*(\mu q_i, -\nu q_i \otimes q_i) < +\infty \\ \mu > 0, \nu > 0 \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$(F4) \quad -\infty < F_*(0, O) = F^*(0, O) < +\infty,$$

where F_* and F^* are the lower and upper semicontinuous relaxation (envelope) of F on $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$, respectively, i.e.,

$$F_*(p, X) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \{F(\tau, Y); \tau \in (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m \ell_i), |p - \tau| < \varepsilon, |X - Y| < \varepsilon\}$$

and $F^* = -(-F)_*$. Here $|X|$ denotes the operator norm of X as a self-adjoint operator on \mathbb{R}^n ; \otimes denotes a tensor product of vector in \mathbb{R}^n .

The assumption (F1) allows the possibility that (2.1) is singular at $\nabla u = \eta q_i$ ($i = 1, \dots, m$). The equation (2.1) is called degenerate parabolic if (F2) holds.

We recall one of equivalent definitions of viscosity sub- and supersolutions of (2.1) (cf. [8]). A function $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *viscosity sub-(super)solution* of (2.1) in Q if $u^* < \infty$ (resp. $u_* > -\infty$) in \bar{Q} and

$$\tau + F_*(p, X) \leq 0 \quad \text{for all } (\tau, p, X) \in \mathcal{P}_Q^{2,+} u^*(t, x), (t, x) \in Q$$

(resp. $\tau + F^*(p, X) \geq 0$ for all $(\tau, p, X) \in \mathcal{P}_Q^{2,-} u_*(t, x), (t, x) \in Q$). Here $\mathcal{P}_Q^{2,+}$ denotes the *parabolic super 2-jet* in Q , i.e., $\mathcal{P}_Q^{2,+} u(t, x)$ is the set of $(\tau, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$ such that

$$\begin{aligned} u(s, y) &\leq u(t, x) + \tau(s - t) + \langle p, y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle X(y - x), y - x \rangle \\ &+ o(|s - t| + |y - x|^2) \quad \text{as } (s, y) \rightarrow (t, x) \text{ in } Q, \end{aligned}$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the Euclidean inner product; similarly, $\mathcal{P}_Q^{2,-} u = -\mathcal{P}_Q^{2,+}(-u)$. For $U = (0, T) \times D$, the set

$$\partial_p U = \{0\} \times D \cup [0, T] \times \partial D$$

is often called the parabolic boundary of U . We are now in position to state our main comparison theorem. We often suppress the word "viscosity", except in statements of theorems.

Theorem 2.1. *Suppose that Ω is bounded domain in \mathbb{R}^n and that F satisfies (F1)-(F4). Let u and v be, respectively, viscosity sub- and supersolutions of (2.1) in $Q = (0, T) \times \Omega$. If $u^* \leq v_*$ on $\partial_p Q$, then $u^* \leq v_*$ in Q .*

REFERENCES

- [1] S. J. Altschuler, S. B. Angenent and Y. Giga, *Mean curvature flow through singularities for surfaces of rotation*, Hokkaido Univ. Preprint Series #130, December 1991.
- [2] S. B. Angenent and M. E. Gurtin, *Multiphase thermomechanics with interfacial structure. 2. Evolution of an isothermal interface*, Arch. Rational Mech. Anal. **108** (1989), 323-391.
- [3] S. B. Angenent and M. E. Gurtin, *Anisotropic motion of a phase interface*, preprint.
- [4] G. Barles, H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Fronts propagation and phase field theory*, SIAM J. Cont. Optim., to appear.
- [5] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geometry **33** (1991), 749-786.
- [6] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Remarks on viscosity solutions for evolution equations*, Proc. Japan Acad. Ser. A **67** (1991), 323-328.
- [7] M. G. Crandall and H. Ishii, *The maximum principle for semicontinuous functions*, Diff. Int. Equations **3** (1990), 1001-1014.
- [8] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., to appear.
- [9] L. C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geometry **33** (1991), 635-681.
- [10] Y. Giga and S. Goto, *Motion of hypersurfaces and geometric equations*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 99-111.
- [11] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii and M.-H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 443-470.
- [12] Y. Giga, in preparation.
- [13] M. E. Gurtin, H. M. Soner and P. E. Souganidis, in preparation.

1 序

次のような二階非線形偏微分方程式系を考える。

$$F^k(x, u(x), Du^k(x), D^2u^k(x)) = 0 \text{ for } x \in \Omega, k \in A \equiv \{1, \dots, m\}$$

但し、 Ω は \mathbf{R}^n の有界開集合、 $F = (F^k) : \bar{\Omega} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ は、簡単のため連続、 $u = (u^k) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^m$ を未知関数とする。(\mathbf{S}^n は、 $n \times n$ 実対称行列の集合。)

F に対し [2] で与えた単調性 (monotonicity) を仮定しよう。

定義

次を満たす $\lambda > 0$ が存在する。

任意の $r = (r^k), s = (s^k) \in \mathbf{R}^m (r \neq s)$ に対し、 $\max_{k \in A} |r^k - s^k| = |r^j - s^j| (> 0)$ ならば、すべての $(x, p, X) \in \bar{\Omega} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^n$ に対し、

$$\{F^j(x, r, p, X) - F^j(x, s, p, X)\} \operatorname{sgn}\{r^j - s^j\} \geq \lambda |r^j - s^j|$$

(注意) F が連続でないときは、もう少し複雑である。

この仮定の下で、いくつかの応用が考えられる。(正確には、 $\lambda = 0$ も含めて)

例 1) スイッチング・ゲーム ($\lambda = 0$)

$$\min\{\max\{L^k u^k - f^k, u^k - M^k(x, u(x))\}, u^k - N^k(x, u(x))\} = 0$$

但し、 $L^k v = -a_{ij}^k v_{x_i x_j} + b_i^k v_{x_i} + c^k v$, $M^k(x, r) = \min\{r^j + g^{kj}(x) | j \neq k\}$, $N^k(x, r) = \max\{r^j + h^{kj}(x) | j \neq k\}$.

例 2) Weakly coupled system

$$L^k u^k + \sum_{l=1}^m c^{kl} u^l - f^k = 0$$

但し、 $c^{kk} - \sum_{l \neq k} |c^{kl}| \geq \lambda$

一般に、monotonicity の仮定では、Dirichlet 境界条件の下で、比較定理は成立しない。その例を挙げよう。

$$\text{例 3) } \begin{cases} \max\{-\Delta u^1 + u^1 - \frac{1}{2}, 2u^1 + u^2\} = 0 & \text{in } \Omega \\ \max\{-\Delta u^2 + u^2 + 1, u^2\} = 0 & \text{in } \Omega \\ u^1 = u^2 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

この例の唯一の (古典) 解 u は、

$$\begin{cases} -\Delta \phi + \phi = -1 & \text{in } \Omega \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解 ϕ を用いて、 $u = (-\frac{1}{2}\phi, \phi)$ である。($\phi < 0$ in Ω に注意) 一方、 $(0, 0)$ は、(古典的) 優解 (supersolution) であるが、 $(0, 0) \not\leq u$ である。

[2] では Dirichlet 境界条件を古典的な意味で与えたときの粘性解の一意性定理と存在定理を得た。しかし、退化した方程式も扱っているため境界条件は、粘性解の意味で与えた方が自然である。そこで本講演では、粘性解の意味での Dirichlet 条件の下での一意性定理及び存在定理の最近の発展について述べる。

2 主な結果

以下、 F には、「適当な」連続性を仮定しておく。

まず、[5] の結果から述べる。

「連続な粘性解は、一意である。」

最近、M. Katsoulakis 氏が、scalar PDE に対し、この連続性を弱めて (nontangentially semicontinuity)、解の比較定理及び存在定理を得ている ([3])。そこで、更に、我々の monotone system に対しても同様の

仮定で一意性定理を得る。

「nontangential semicontinuous な粘性解は、一意である。」

しかし、[3]の方法で存在定理を得るのは、(我々の system には比較定理がないため) 困難である。そこで、[3]の方法が適用できるように「弱い意味の」比較定理を導き存在定理を得る。この定理は、述べておこう。

弱比較定理 ([4])

$u = (u^k), v = (v^k)$ を各々粘性劣解 (subsolution)、優解 (supersolution) とする。次の nontangential semicontinuity を各点 $z \in \partial\Omega$ で仮定する。

$$\limsup_{x \in K_z \rightarrow z} u^*(x) = u^*(z) \quad \text{and} \quad \liminf_{x \in K_z \rightarrow z} v_*(x) = v_*(z)$$

もし、 $v^* \leq u^*, v_* \leq u_*$ が Ω で成り立てば、 $u^* \equiv v_* \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ である。

(注意) K_z は、 z を頂点とした cone の一部で、 Ω の内部に入るものである。

粘性解の意味での境界値問題で、何等かの連続性を持った解の存在定理を導くのに Perron の方法は、不適當であるため、存在定理は、解の形式的な表現のある場合にかぎる。つまり、ベルマン型の二階退化楕円型方程式系を扱うことにする。(もちろん、退化してないときは、barrier を用いて古典的な意味での境界条件を満たす優・劣解があるので、ここでは問題にしない。) 具体的には、(時間があれば) 講演で解説する。

尚、二階の方程式系を扱う場合、普通の粘性解の定義では、semi-jet によるうまい equivalent な (粘性解の) 定義が成立しないため、石井氏の導入した multi-valued の粘性解の定義に従う。([1] を参照)

参考文献

- [1] H. ISHII, Perron's method for monotone systems of second-order PDEs, *Diff. Int. Equations*, 5 (1992), 1-24.
- [2] H. ISHII AND S. KOIKE, Viscosity solutions for monotone systems of second-order elliptic PDEs, *Comm. in P. D. E.*, 16 (1991), 1095-1128.

- [3] M. KATSOULAKIS, Viscosity solutions of 2nd order fully nonlinear elliptic equations with state constraint, personal communication.
- [4] M. KATSOULAKIS AND S. KOIKE, Viscosity solutions of monotone systems for Dirichlet problems (仮題) , in preparation.
- [5] S. KOIKE, Uniqueness of viscosity solutions for monotone systems of fully nonlinear PDEs under Dirichlet condition, to appear in *Nonl. Anal.*

ある反応-拡散方程式系の軸対称領域における点凝集解

東北大学理学部数学教室 高木 泉†

次の反応-拡散方程式系は A. Gierer と H. Meinhardt によって提唱された生物の発生過程における形態形成モデルのひとつである:

$$(GM) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = D_a \Delta a - \mu_a a + c_a \frac{a^p}{h^q} + \sigma, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = D_h \Delta h - \mu_h h + c_h \frac{a^r}{h^s}. \end{cases}$$

但し, $D_a, D_h, \mu_a, \mu_h, c_a$ 及び c_h は正定数, σ は非負定数であり, 未知函数 $a = a(x, t)$ 及び $h = h(x, t)$ はそれぞれ 活性化因子 (activator), 抑制因子 (inhibitor) と呼ばれる生化学物質の濃度を表し, 従って共に正とする. 指数 $p > 0, q > 0, r > 0, s \geq 0$ は次の条件を満たすとする:

$$(A) \quad 0 < \frac{p-1}{q} < \frac{r}{s+1}.$$

いま, 活性化因子, 抑制因子が \mathbb{R}^N の滑らかな境界をもつ有界領域 Ω を占めるとすると, 自然な境界条件は

$$(BC) \quad \frac{\partial a}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial h}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

である. ここで, ν は境界 $\partial \Omega$ の外向単位法線を表す.

本講演では, 領域が軸対称であるとき, (GM) の振幅の大きな定常解を構成することが出来ることを示す.

以下ではつねに次を仮定する:

$$(A1) \quad 1 < p < \frac{N+2}{N-2} \quad (\text{但し, } N=2 \text{ のときは } 1 < p < +\infty);$$

$$(A2) \quad \sigma = 0;$$

(A3) Ω は \mathbb{R}^N の有界領域で, 滑らかな境界 $\partial \Omega$ をもち, x_N -軸に関して対称である, 即ち, N 次直交行列で x_N 軸を動かさないものの作用で不変とする.

さて, 十分大きな D_h に対し (GM) の定常解を構成するため, (GM) の定常問題で, $D_h \rightarrow +\infty$ とした極限を考えると, 形式的には, $\Delta h \rightarrow 0$ となるから, (BC) とあわせて, $h \rightarrow \xi$ (定数) と予想できる. 更に, (GM) の第2式で左辺を 0 とおいたものを Ω 上で積分したうえで $h \rightarrow \xi$ とすることにより, 次のような方程式系 (Shadow System) に到達する.

$$(SS1) \quad D_a \Delta a - \mu_a a + c_a \frac{a^p}{\xi^q} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(SS2) \quad -\mu_h |\Omega| \xi + \frac{c_h}{\xi^s} \int_{\Omega} a^r dx = 0$$

$$(SS3) \quad \frac{\partial a}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$$

† W.-M. Ni との共同研究

まず, (SS1)–(SS3) の解を求め, 次いで, それからの摂動として (GM) の定常解を構成することにする. 準備として, 次のことに注意しておく.

$$\begin{aligned} \Delta w - w + w^p &= 0 & \text{and} & & w > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ w(0) = \max w(z) & & \text{and} & & w(z) \rightarrow 0 & \text{as } |z| \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

は, ただひとつの解をもち, それは球対称である: $w(z) = w(|z|)$.

定理 1. x_N 軸と $\partial\Omega$ との交点を P_1, \dots, P_{2n} とし, これらの点のうちから相異なる m 個 P_{j_1}, \dots, P_{j_m} を任意に選んで固定する. $\epsilon := \sqrt{D_a/\mu_a}$ とおく. このとき, 十分小さい ϵ に対し, (SS1)–(SS3) は次の性質をもつ軸対称な解 $(a_0(x; \epsilon), \xi_0(\epsilon))$ を持つ:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_0(P_{j_k}; \epsilon) = \epsilon^{-Nq/[\lambda(p-1)]} (\gamma_0 w(0) + o(1)) \quad \text{as } \epsilon \downarrow 0 \quad (k = 1, \dots, m); \\ (2) \quad & a_0(x; \epsilon) \leq \epsilon^{-Nq/[\lambda(p-1)]} \exp\left\{-\frac{c}{\epsilon} \text{dist}(x, \{P_{j_1}, \dots, P_{j_m}\})\right\} \quad \text{for } x \in \Omega; \\ (3) \quad & \xi_0(\epsilon) = \epsilon^{-N/\lambda} \left(\frac{m}{2} \gamma_1 \int_{\mathbb{R}^N} w^r dz + o(1)\right)^{-1/\lambda} \quad \text{as } \epsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

ここで, $\lambda := qr(p-1)^{-1} - (s+1) > 0$ ((A) による), $\gamma_1 := c_h(\mu_h|\Omega|)^{-1}[\mu_a/c_a]^{r/(p-1)}$, $\gamma_0 := (\mu_a/c_a)^{1/(p-1)}[\frac{m}{2}\gamma_1 \int_{\mathbb{R}^N} w^r dz]^{-q/[\lambda(p-1)]}$, $c > 0$ は Ω のみからきまる正定数である.

なお, 函数 $f(x)$ が x_N -軸に関して対称であるとは, $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ として $f(x) = f(|x'|, x_N)$ であることをいう.

定理 2. 十分小さい各 $\epsilon = \sqrt{D_a/\mu_a}$ に対し, $D > 0$ が定まり, $D < D_h < +\infty$ ならば (GM) は

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0(x; \epsilon) + \varphi(x; \epsilon, D_h) \\ h(x) &= \xi_0(\epsilon) + \psi(x; \epsilon, D_h) \end{aligned}$$

なる形の定常解を持つ. 但し, φ, ψ も軸対称であり, $D_h \rightarrow +\infty$ のとき, $x \in \Omega$ に関して一様に, $\varphi(x; \epsilon, D_h) \rightarrow 0$, $\psi(x; \epsilon, D_h)$ をみたく.

定理 1 及び 定理 2 の証明は次の単独方程式の解で, ちょうど P_{j_1}, \dots, P_{j_m} においてのみピークをもつようなものを構成することに帰着される.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \epsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0 \quad \text{and} \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ (2) \quad & \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

線型化作用素 $\phi \mapsto \epsilon^2 \Delta \phi - \phi + pu^{p-1}\phi$ が斉次 Neumann 境界条件下で (軸対称な函数のなす空間において) ϵ について一様に可逆であることを示すことが鍵となる.