



# HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	非線型可積分系の数理 : 1992.9.28-10.2, 北海道大学での集中講義講義録
Author(s)	高崎, 金久; 本間, 盛行//記
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 25, 1
Issue Date	1993-01-01
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/5144">https://doi.org/10.14943/5144</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/5459">https://hdl.handle.net/2115/5459</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	25.pdf



# 非線型可積分系の数理

高 崎 金 久

(1992.9.28 ~ 10.2 北海道大学での集中講義  
講義録 本間盛行 記)

**Series # 25. February, 1993**

**HOKKAIDO UNIVERSITY**  
**TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS**

- # 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- # 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- # 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- # 4: J. Tilouine, Kummer's criterion over  $\Lambda$  and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- # 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- # 6: T. Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- # 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- # 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- # 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- # 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
- # 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- # 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), “特異点論とその応用” 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium “Singularity Theory and its Applications,” 317 pages. 1989.
- # 13: M. Suzuki, “駆け足で有限群を見てみよう” 1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- # 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989.
- # 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- # 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. I, 258 pages. 1990.
- # 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. II, 235 pages. 1990.
- # 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- # 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- # 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- # 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- # 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- # 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.) 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- # 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

はじめに

この講義ノートは1992年9月の高崎金久さんの北海道大学理学部数学教室における集中講義をもとに大学院学生の本間盛行さんがまとめ、高崎金久さんが加筆したものです。このノートが代数解析学、特に佐藤幹夫先生が創始された完全可積分系の代数解析的アプローチを志す若い学生のためになることを望みます。講義ノート作成の労をとられた高崎さん、本間さんに感謝いたします。

1993年2月 戸瀬 信之

# 目次

## I. 戸田格子力学系

1. Hamilton 力学系としての定義	1
2. 有限次元非固期格子	2
3. 変数の変換 — Lax 方程式へ	3
4. Lax 方程式の応用 — 保存量の存在	4
5. Lax 方程式の応用 — QR 分解による初期値問題の解法	5

## II. 戸田場の方程式

1. 戸田場の方程式	8
2. Lax 形式 (零曲率方程式)	9
3. 半無限格子 ( $n \in \mathbb{Z}$ ) から有限格子へ	11
4. Gauss 分解による data $\theta_1 \dots \theta_N, \bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_N$ の抽出	13
5. 逆構成 — 一般解を求める	17
6. 補足 — Wess-Zumino-Witten 模型との関係	22

## III. 戸田 Hierarchy

1. 零曲率方程式系としての定式化	24
2. 差分 Operator としての表示	26
3. 付随する変数	28
4. 変数のまじめと今後の方針	30
5. $\mathbb{Z}_{>0}$ 上の model の解の構成	31
6. $m \rightarrow \infty$ の手続き	36

## IV. 無分散極限 = 準古典極限

1. Scaling limit	38
2. 自己双対重力との関係	40
3. 零曲率方程式	42
4. 閉二次形式 $\omega$ と Darboux 座標	43
5. 特別に Darboux 座標対	45
6. hierarchy の構成	46
7. 戸田 hierarchy との関係	47

# I: 戸田格子力学系

この章の全般的参考文献は

[1] 戸田 盛和 "非線形格子力学" (岩波)  
および、その参考文献

## 1. Hamilton 力学系としての定義

空間  $(q_i, p_i)$  (phase space, symplectic 多様体) 上の Hamilton 関数  $H$  を次のように定義する。

$$H = \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \sum_i e^{q_i - q_{i+1}} + \text{定数}$$

運動方程式を求めると

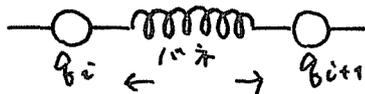
$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}$$

Newton 方程式の形では,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}$$

これが 戸田格子の方程式 である。

$q_i$  と  $q_{i+1}$  が はなれる程 ポテンシャルが減少する, つまり反発力の働かざるを記述している。



添字  $i$  の範囲を限定しなかったが, 次のような場合が考えられる。

□ 有限格子

① 非周期的な場合 ... この場合を扱う。「初等的」である。

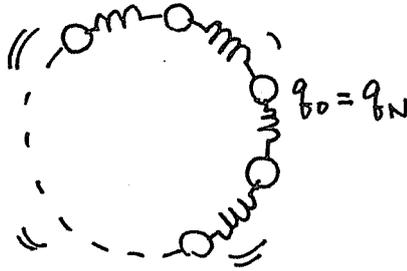
$$\underline{q_{-1} = -\infty, \quad q_{N+1} = +\infty}$$



この場合, 時間とともに, 各  $q_i$  はどんどん離れていくであろう。

② 周期的な場合 ...  $\tau$ - $q$  関数と関係してくる。「高等/踏的」である。

$$q_{i+N} = q_i$$



□ 無限格子

- ① 両側無限  $i \in \mathbb{Z}$  を動く, これは上の周期的な場合を含んでいる。
- ② 片側無限  $i \in \mathbb{Z}_+$  を動く, これは「初等的」である。

2. 有限次元非周期的格子

• 変数は  $q_0, \dots, q_N, p_0, \dots, p_N$ , 方程式は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 q_0}{dt^2} = -e^{q_0 - q_1} \quad (q_{-1} = -\infty \text{ を反映}) \\ \frac{d^2 q_i}{dt^2} = e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}} \quad i=1 \sim N-1, \\ \frac{d^2 q_N}{dt^2} = e^{q_{N-1} - q_N} \quad (q_{N+1} = +\infty \text{ を反映}) \end{array} \right.$$

このセクションの目標は, 上の方程式系が完全積分可能系であることを示し, 初期値問題を解く ことである。

• 注)  $(q_i, p_i)$  空間上の Hamilton 関数  $H$  により定義された力学系

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{において,}$$

関数  $I$  が 保存量 であるとは, 解  $(q_i(t), p_i(t))$  上

$$I(q_i(t), p_i(t)) = 0 \quad \text{となることである。}$$

- 全運動量  $\sum_{i=0}^N p_i$  は保存量である。

実際 
$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^N p_i = \sum_{i=0}^N \frac{d^2 q_i}{dt^2} = -e^{q_0 - q_1} + \sum_{i=1}^{N-1} (e^{q_{i-1} - q_i} - e^{q_i - q_{i+1}}) + e^{q_{N-1} - q_N}$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

このことから重心の座標  $\sum q_i$  は等速直線運動を行っているので、座標をのりかえて  $\sum p_i = 0$  としよ。

- 「独立な」保存量が一つみつかると、自由度を一つずつ落としていく。これをくりかえして、ついに1次元の軌道(解)にまで至ることができるのが完全積分可能系である。

### 3. 変数の変換 — Lax 方程式へ

- 新しい変数  $\alpha_i, \beta_i$  を次のように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = \exp\left(\frac{q_i - q_{i+1}}{2}\right) \quad (i=0 \sim N-1), \alpha_N = 0 \\ \beta_i = -p_i \quad (i=0 \sim N) \end{array} \right. \quad (\beta_0 + \dots + \beta_N = 0 \text{ に注意})$$

注)  $\alpha_i, \beta_i$  は正準座標系ではない。  
この座標系で運動方程式を書くと、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{1}{2} \alpha_i (\beta_{i+1} - \beta_i) \\ \frac{d\beta_i}{dt} = \alpha_i^2 - \alpha_{i-1}^2 \end{array} \right.$$

となる。(定義式を直接微分すればよい)

そこで、更に次のような行列、 $\mathcal{L}$  及び  $A$  を導入する。



•  $\frac{dL}{dt} = [A, L]$  の保存量の存在

今  $U(t)$  を  $\frac{dU}{dt} = AU, U(0) = I$

によって定義すると,

$$L = UL(0)U^{-1} \quad \text{である。}$$

(右辺を微分すると,  $U$  の定義から, Lax 方程式を満たすことがただちにわかる。)

この式より

$\text{tr } L, \text{tr } L^2, \dots, \text{tr } L^{N+1}$  は保存量である。

• 例えば  $\text{tr } L = \sum \beta_i = -(\text{全運動量}), \text{tr } L^2 = \sum \beta_i^2 + 2 \sum \alpha_i^2 = \sum p_i^2 + 2 \sum \exp(q_i - q_{i+1}) = (\text{全エネルギー})$ 。

• 更に  $L$  と  $L(0)$  の固有多項式が一致するので,  $L$  の固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$  も保存量である。(スペクトル保存性)

• 注1)  $L$  の固有値  $\lambda_1 \dots \lambda_{N+1}$  と連分数展開を利用して, 初期値問題をとく Moser の方法については [1] 戸田 参照。

• 注2) KdV 方程式においては, 上の  $L$  や  $A$  の代りに常微分作用素, bracket は作用素のそれ に代る。この場合も スペクトル保存性などが成立する。  
(KdV 方程式の Lax 表示)

### 5. Lax 方程式の応用 — QR 分解による初期値問題の解法

• 以後変数は実とする。

• QR 分解とは?

任意の実正則行列は三角行列と直交行列の積に分解される。

$$P = RQ$$

$R$ : 下三角行列,  $Q$ : 直交行列



よって  $\mathcal{L} = Q \mathcal{L}_{(0)} Q^{-1} (= R \mathcal{L}_{(0)} R^{-1})$  に対し、 $Q$ : 直交,  $\mathcal{L}_{(0)}$ : 対称  
 中へ  $\mathcal{L}$  も対称行列 である。

一方  $\mathcal{L} = R \mathcal{L}_{(0)} R^{-1}$ ,  $R$ : F三角 中へ  $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \text{斜線} & & 0 \\ & \text{斜線} & \\ & & \text{斜線} \end{bmatrix}$  ← 対角の1つ上

の形で ⊗ とあわせ、結局

$\mathcal{L}$  は三重対角行列 である。

よって、 $A' = \frac{dR}{dt} R^{-1} + \frac{1}{2} \mathcal{L}$  に対し、右辺が1項が ( $R$ : F三角 中へ) F三角  
 行列であるから

$$A' = \begin{bmatrix} \text{斜線} & & 0 \\ & \text{斜線} & \\ & & \text{斜線} \end{bmatrix} \quad \text{の形であり、更に } A' \text{ は交代であることとあわせれば}$$

(==は  $\mathcal{L}$  の対応する line の  $\frac{1}{2}$ )

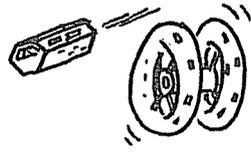
$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_0}{2} & & & 0 \\ \frac{a_0}{2} & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{a_{n-1}}{2} & \\ 0 & & & \frac{a_{n-1}}{2} & 0 \end{bmatrix} = A \quad \text{である。}$$

最後に、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{dQ}{dt} \mathcal{L}_{(0)} Q^{-1} - Q \mathcal{L}_{(0)} Q^{-1} \frac{dQ}{dt} Q^{-1} \\ &= \left[ \frac{dQ}{dt} Q^{-1}, \mathcal{L} \right] \\ &= [A, \mathcal{L}] \end{aligned}$$

よって Lax 方程式の解 となっている。

# II 戸田場の方程式



この章の参考文献

[2] A.N. Leznov, M.V. Saveliev  
 "Exactly and completely integrable nonlinear dynamical systems", Acta Applicandae Mathematicae 16 (1989), 1-74

[3] A.N. Leznov, M.V. Saveliev  
 "A group-theoretical methods for integration of nonlinear dynamical systems" (Birkhäuser 1992)

(その他の文献は本文中に記す。)

## 1. 戸田場の方程式

独立変数  $(z, \bar{z})$ , 未知関数  $u_i(z, \bar{z})$ ,  $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  とする。  
 戸田場の方程式とは

$$\partial \bar{\partial} u_i + e^{u_{i+1} - u_i} - e^{u_i - u_{i-1}} = 0$$

注1)  $(z, \bar{z})$  という書き方には次のような含みがある。

①  $z = \xi + i\eta$ ,  $\bar{z} = \xi - i\eta$  ならば  $\partial \bar{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 = \text{Laplacian}$

②  $z = t + x$ ,  $\bar{z} = t - x$  ならば  $\partial \bar{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \text{d'Alembertian}$

注2)

今  $u_i = -q_i(z, \bar{z})$  ( $q_i = q_i(t)$ ) という形の関数に対し

$\partial \bar{\partial} \rightarrow -\frac{d^2}{dt^2}$  とし、戸田格子の方程式が現れる。

付随する変数,  $\tau_i, \phi_i, v_i$  を次のように決める。

□  $\tau_i = \tau_i(z, \bar{z})$  を次の方程式の解とする。

$$\tau_i \cdot \partial \bar{\partial} \tau_i - \partial \tau_i \cdot \bar{\partial} \tau_i + \tau_{i+1} \cdot \tau_{i-1} = 0$$

□  $e^{\phi_i} = \tau_i$  により  $\phi_i$  を定義すれば、 $\phi_i$  は次の方程式を満たす。

$$\partial \bar{\partial} \phi_i + \exp(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) = 0$$

□  $u_i = \phi_{i+1} - \phi_i$  と定義すると、 $u_i$  は 戸田場の方程式の解である。

$$\partial \bar{\partial} u_i + e^{u_{i+1} - u_i} - e^{u_i - u_{i-1}} = 0$$

□  $v_i = u_i - u_{i-1}$  とおけば

$$\partial \bar{\partial} v_i + e^{v_{i+1}} + e^{v_{i-1}} - 2e^{v_i} = 0$$

∴  $z, \bar{z}$  変数  $\tau_i \rightarrow \phi_i \rightarrow u_i \rightarrow v_i$  を導入する

このとき、 $\tau_i$  と  $u_i$  は  $e^{u_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}$  によりつながっている。

(以上 純然たる計算)

● 参考: root 系に付随する拡張

上記  $\phi_i$  の方程式をみると、 $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$  (A型の Cartan 行列) に対し、

$(K\phi)_i = \sum k_{ij} (-\phi_j)$  とするとき

$$\partial \bar{\partial} \phi_i + \exp(K\phi)_i = 0 \text{ の形であることがわかる。}$$

他の type の Cartan 行列から出発して、同様の方程式をつくることも出来る。

詳しくは [4] O. I. Bogoyavlensky "On perturbations of the periodic Toda lattices" Commun. Math. Phys. 51 (1976), 201~209

[5] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, "Two-dimensional generalized Toda lattice", Commun. Math. Phys 79 (1981), 473~488

## 2. Lax 形式 (零曲率方程式)

●  $A, \bar{A}$  ( $z, \bar{z}$ ) 変数の  $(N+1)$  次行列値関数に対し、

$$[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0 \quad \text{つまり} \quad \bar{\partial} A - \partial \bar{A} + [A, \bar{A}] = 0$$

(最終項は行列の bracket)

の形の方程式を 零曲率方程式 と呼ぶ

● 注) 実際  $B = -A dz - \bar{A} d\bar{z}$  という行列値の form (接続) を考えれば  
 上の方程式は  $dB + B \wedge B = 0$  であり、この接続の曲率が零であることを表現している

戸田場の方程式をこの形で書くことを考える。

• 例として  $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$  に付随する系では

( $sl(N+1)$  戸田場)  $\left\{ \begin{array}{l} u_0 + u_1 + \dots + u_N = 0 \\ \partial \bar{\partial} u_0 + e^{u_1 - u_0} = 0 \\ \partial \bar{\partial} u_i + e^{u_{i+1} - u_i} - e^{u_i - u_{i-1}} = 0 \quad i=1, \dots, N-1 \\ \partial \bar{\partial} u_N - e^{u_N - u_{N-1}} = 0 \end{array} \right.$

これは非周期的な方程式 ( $u_{-1} = \infty, u_{N+1} = -\infty$ ) である。周期的:  $u_{N+1} = u_0$  の type 2 は Kac-Moody Lie 環との関係があらわれる。例えば,  $K = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  から出発すると  $u_1 = u, u_0 = -u$  として  $\sinh$ -Gordon 方程式  $\partial \bar{\partial} u = 2 \sinh(2u)$  が"出る。(確かめよう)

±2 ±2  $A, \bar{A}$  を次で定義する。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial u_0 & e^{\frac{u_1 - u_0}{2}} & & & 0 \\ & \frac{1}{2} \partial u_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\frac{u_N - u_{N-1}}{2}} & \\ 0 & & & & \frac{1}{2} \partial u_N \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \bar{\partial} u_0 & & & & 0 \\ e^{\frac{u_1 - u_0}{2}} & -\frac{1}{2} \bar{\partial} u_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\frac{u_N - u_{N-1}}{2}} & -\frac{1}{2} \bar{\partial} u_N \end{pmatrix}$$

$A, \bar{A}$  は  $sl(N+1)$  値であり

$$[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0 \iff sl(N+1) \text{ 戸田場の方程式}$$

である。(純然たる計算)

• 注) 未知関数の数が有限であるとき,  $\tau$  関数は  $\tau_0 = 1, \tau_{N+1} = 1$  とするこ"で"定義される。

• ±2 特に,  $sl(2)$  の場合  $u_1 = u, u_0 = -u$  として, 戸田場の方程式は

$$\partial \bar{\partial} u = e^{2u} \quad \text{となる。}$$

これは、いわゆる Liouville の方程式"である。

≡ $\equiv$ で,  $u = -\log f$  により  $f$  を定義 (この  $f$  が  $\tau$  函数) すると,

$$f \cdot \partial \bar{\partial} f - \partial f \cdot \bar{\partial} f + 1 = 0$$

となる。19世紀の曲線論において, この解は求められており,

一般解は  $F = F(z), \bar{F} = \bar{F}(\bar{z})$  を任意函数として,

$$f = \frac{1 - F(z)\bar{F}(\bar{z})}{\sqrt{F'(z)\bar{F}'(\bar{z})}} \quad \text{である。 (直接確かめてよ。)}$$

このセクションの目標は一般の  $sl(N+1)$  方程式で, 上の解に対応するものを求めることである。

$sl(N+1)$  戸田場の解を調べる為には, まず半無限格子の場合を考察しよう。

### 3. 半無限格子 ( $sl(\infty)$ ) から有限格子へ

参考文献 [6] A.N. Leznov, M.V. Saveliev, V.G. Smirnov  
 "General solutions of the two dimensional system of Volterra equations which realize the Bäcklund transformation for the Toda lattice" Theor. Math. Phys. 47 (1981), 417~422

• 未知函数は  $u_0, u_1, \dots$ ,  $\tau$  函数は  $\tau_0 = 1, \tau_1, \dots$  ( $e^{u_i} = \tau_{i+1}/\tau_i$ )

方程式系は,

$$\begin{cases} \partial \bar{\partial} u_0 + e^{u_1 - u_0} = 0 \\ \partial \bar{\partial} u_i + e^{u_{i+1} - u_i} - e^{u_i - u_{i-1}} = 0 \quad i=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$\tau$  函数で書くと,

$$\begin{cases} \tau_1 \partial \bar{\partial} \tau_1 - \partial \tau_1 \bar{\partial} \tau_1 + \tau_2 = 0 \\ \tau_i \partial \bar{\partial} \tau_i - \partial \tau_i \bar{\partial} \tau_i + \tau_{i+1} \tau_{i-1} = 0 \quad i=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

• この方程式系を見れば, 初期函数  $\tau_1$  (又は  $u_0 = \log \tau_1$ ) を勝手に与えると,  $\tau_2, \tau_3, \dots$  が ( $\tau_{i-1} \neq 0$  の仮定のもと) 一意に決定されてしまうことがわかる。

しかも, 実は  $\tau_i$  を書き下すことも出来る。

結果は,

$$\tau_i = \det \begin{pmatrix} f & (-\bar{\partial})f & \dots & (-\bar{\partial})^{i-1}f \\ \partial f & \partial(-\bar{\partial})f & & \partial(-\bar{\partial})^i f \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial^{i-1}f & \partial^{i-1}(-\bar{\partial})f & \dots & \partial^{i-1}(-\bar{\partial})^{i-1}f \end{pmatrix} \quad \text{ただし } f = \tau_1.$$

(二方向 Wronskian による  $\tau_i$  の表示)

証明は行列式に関する Sylvester の定理を使えばよい。(数学辞典第3版 225頁 84 F の 4) 参照)

- $z = i$   $sl(\frac{\infty}{2})$  から  $sl(N+1)$  戸田場の reduction を考える。  
上記の解  $\tau_i$  に対し、付加条件  $\tau_{N+1} \equiv 1$  が満たされたとすると、 $\tau_1 \dots \tau_N$  は  $sl(N+1)$  戸田場の方程式を満たす。

問: 出発点の  $\tau_1 = f$  をどのように選ぶと  $\tau_{N+1} \equiv 1$  とするか?

( $sl(2)$  の場合、この条件がともたかえず、 $f \cdot \partial \bar{\partial} f - \partial f \bar{\partial} f + 1 = 0$  であった。)

- $z = i$  更に次のような状況を考える。

$$f = \sum_{i=0}^N f_i(z) \bar{f}_i(\bar{z}) = (f_0 \dots f_N) \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{pmatrix} \quad \text{の形であるとする。}$$

$$\text{このとき、} \tau_{N+1} = \det \left( \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} f_0, \dots, f_N \\ \partial f_0 & \partial f_N \\ \vdots & \vdots \\ \partial^N f_0 & \partial^N f_N \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bar{f}_0 & (-\bar{\partial})\bar{f}_0 & \dots & (-\bar{\partial})^N \bar{f}_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{f}_N & (-\bar{\partial})\bar{f}_N & \dots & (-\bar{\partial})^N \bar{f}_N \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

$$= W_{\partial}(f_0 \dots f_N) W_{(-\bar{\partial})}(\bar{f}_0 \dots \bar{f}_N)$$

(三方向 Wronskian が 一方向 Wronskian に分裂した)

より、

$$\left. \begin{array}{l} W_{\partial}(f_0 \dots f_N) = 1 \\ W_{(-\bar{\partial})}(\bar{f}_0 \dots \bar{f}_N) = 1 \end{array} \right\} \text{とすると } f_0, \dots, f_N, \bar{f}_0, \dots, \bar{f}_N \text{ を見つければよい。}$$

• 答は以下の通り)

$\theta_1, \dots, \theta_N$  をその外の任意函数として.

$$\left\{ \begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\sqrt{\theta_1^{N-1} \theta_2^{N-2} \dots \theta_{N-1}}} \\ f_1 &= f_0 \int_0^z dz_1 \theta_1(z_1) \\ f_2 &= f_0 \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \theta_1(z_1) \theta_2(z_2) \\ &\vdots \\ f_N &= f_0 \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{N-1}} dz_N \theta_1(z_1) \theta_2(z_2) \dots \theta_N(z_N) \end{aligned} \right.$$

同様に  $\bar{\theta}_1(z_1) \dots \bar{\theta}_N(z_N)$  から  $\bar{f}_0 \dots \bar{f}_N$  をつくればいい。

• 次節以降で、零曲率方程式の解から、この  $\theta_i, \bar{\theta}_i$  がいかに抽出されるか、ということ、そして、実際上記のものが解に打ち込めることを検証していこう。

参考文献 [7] A.N. Leznov, M.V. Saveliev, "Representation of zero curvature for the system of non-linear partial differential equations  $\mathcal{L}_\alpha, z\bar{z} = \exp(k\alpha)\alpha$ , and its integrability" Lett. Math. Phys. 3 (1979), 489~494

[8] A.N. Leznov, M.V. Saveliev, "Theory of group representations and integrability of non-linear systems  $\mathcal{L}_\alpha, z\bar{z} = \exp(k\alpha)\alpha$ " Physica 3D (1981), 62~72

• この検証のためには、方程式も零曲率の形  $[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0$  で書いておく便利である。

#### 4. Gauss分解による data $\theta_1, \dots, \theta_N, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_N$ の抽出

•  $A, \bar{A}$  が  $[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0$  を満たしているとき、上記の  $\theta_1 \dots \theta_N, \bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_N$  はいかに抽出されるだろうか？

• Gauss分解とは？

g: 正方行列は generic に次のように分解される。

$$g = MN = \bar{M}\bar{N} \quad \begin{array}{l} \text{即ち } M \text{ は下三角行列, } N \text{ は対角成分が全 } 1 \text{ の上三角行列} \\ \bar{M} \text{ は上三角行列, } \bar{N} \text{ は対角成分が全 } 1 \text{ の下三角行列} \end{array}$$

この分解は各々一意的であり、これを Gauss 分解という。

□  $\theta_1, \dots, \theta_N, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_N$  の抽出

①  $A, \bar{A} : sl(N+1)$  値函数が  $[\partial - A, \bar{\partial} - \bar{A}] = 0$  を満たすとする。

これより、ある  $g = g(z, \bar{z}) : SL(N+1)$  値函数  $g$  で、

$$g(0,0) = I, \quad (\partial - A)g = 0, \quad (\bar{\partial} - \bar{A})g = 0$$

を満たすものが局所的に一意に存在する。(  $g$  は戸田格子での  $\cup$  に対応する。)

∴) 実際  $\partial g = Ag, \quad \bar{\partial} g = \bar{A}g$  の両立条件 (Frobenius 条件) は、  
 $A, \bar{A}$  の零曲率方程式に他ならない。

よって初期値を決めれば、local 正解の一意的存在が保証される。

更に

$$d(\det g) = \text{tr}(g^{-1}dg)(\det g) \text{ であり,}$$

$$g^{-1}dg = g^{-1}(\partial g dz + \bar{\partial} g d\bar{z}) = g^{-1}(Ag dz + \bar{A}g d\bar{z})$$

$$= g^{-1}(A dz + \bar{A} d\bar{z})g \text{ である。}$$

最終  $\cup$  の trace は 0 (  $A, \bar{A}$  は  $sl(N+1)$  値 )。

結局  $d(\det g) = 0$  であるから  $\det g$  は定数、 $g(0,0) = I$  より

$g$  は  $SL(N+1)$  値 //

参考) 接続の言葉でいえば、主  $SL(N+1)$  束の曲率零の接続に対し、自明化 ( $g$ ) を与えたことになる。

② 上の  $g$  を 2 通りに Gauss 分解する。

$$\begin{array}{l} g = MN \\ = \bar{M}\bar{N} \end{array} \quad \begin{array}{l} M = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} \\ \bar{M} = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} N = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \\ \bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

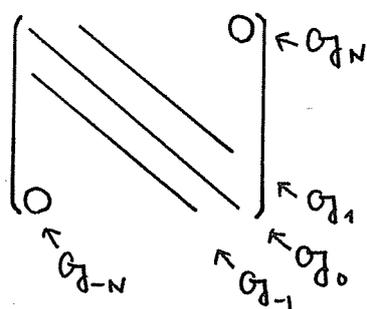
• Notation

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N+1) = \bigoplus_{i=-N}^N \mathfrak{g}_i \quad \text{grading } \mathfrak{g}$$

$\mathfrak{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \{ (a_{jk}) \mid k-j=i \text{ とする } a_{jk} \text{ 以外は全 } 0 \}$   
 と定義する。又,

$$\mathfrak{g}_{\leq 0} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=-N}^0 \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{g}_{\geq 0} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=0}^N \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{g}_{< 0} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=-N}^{-1} \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{g}_{> 0} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^N \mathfrak{g}_i$$

と定義する。



このとき,  $M \in \exp \mathfrak{g}_{\leq 0}$ ,  $N \in \exp \mathfrak{g}_{> 0}$ ,  $\bar{M} \in \exp \mathfrak{g}_{\geq 0}$ ,  $\bar{N} \in \exp \mathfrak{g}_{< 0}$ .

③  $N$  は  $z$  のみの関数,  $\bar{N}$  は  $\bar{z}$  のみの関数であり, か

$$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathfrak{g}_1, \quad \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{-1} \quad \text{である。}$$

$$\partial N \cdot N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1(z) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \theta_N(z) & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \bar{\theta}_1(\bar{z}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\theta}_N(\bar{z}) & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と書く。}$$

(証明)

$$A = \partial g \cdot g^{-1} = \partial (\bar{M} \bar{N}) (\bar{M} \bar{N})^{-1} = \partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1} + \bar{M} \partial \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \bar{M}^{-1}$$

であるが  $A \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  (定義をみよ)  $\partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$  ゆえ

$\bar{M} \partial \bar{N} \bar{N}^{-1} \bar{M}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$  である。とよか今  $\bar{M}$  は上三角行列ゆえに,  $\partial \bar{N} \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$

$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$  ではないから好都合。一方  $\partial \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathfrak{g}_{< 0}$  であるから

結局  $\partial \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} = 0$  かつ  $\partial \bar{N} = 0$  となり  $\bar{N}$  は  $\bar{z}$  に依存しない。

● 同様に  $\bar{A} = \bar{\partial}g \cdot g^{-1}$  であり  $g = M \cdot N$  であることから  $\bar{\partial}N = 0$   $N$ は  $\bar{E}_1$ に平行  
 こともわかる。

● 次に,  $A = \partial g \cdot g^{-1}$  に今度は  $g = M \cdot N$  を代入すると

$$A = \partial M \cdot M^{-1} + M \partial N \cdot N^{-1} M^{-1}$$

よって

$$\partial N \cdot N^{-1} = M^{-1} A M - M^{-1} \partial M$$

(右辺第1項)  $\in \mathcal{O}_{\leq 1}$  ( $M$ と $A$ の形より) (第2項)  $\in \mathcal{O}_{\leq 0}$  からの

$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathcal{O}_{\leq 1}$  だから, よって  $\partial N \cdot N^{-1} \in \mathcal{O}_{\geq 1}$  中.  $\partial N \cdot N^{-1} \in \mathcal{O}_{\geq 1}$

● 同様に  $\bar{A} = \bar{\partial}g \cdot g^{-1}$  に  $g = \bar{M} \cdot \bar{N}$  を代入して,  $\bar{\partial} \bar{N} \bar{N}^{-1} \in \mathcal{O}_{\geq -1}$  を知る。



④ こうして,  $A, \bar{A}$  から出発して  $\theta_1, \dots, \theta_N, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_N$  が抽出できることがわかった。

次節では逆に  $\theta_1, \dots, \theta_N, \bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_N$  を任意に与えて,  $sl(N+1)$  超代数の方程式の解をつくる。以上の議論は, これが  $sl(N+1)$  超代数の方程式の一般解であることを保証している。

5. 逆構成一般解を求める。

$\theta_1(z) \dots \theta_N(z), \bar{\theta}_1(\bar{z}) \dots \bar{\theta}_N(\bar{z})$  ( $\theta_i, \bar{\theta}_i \neq 0$ ) を任意に与える。

①  $L \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \theta_N & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{L} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \bar{\theta}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\theta}_N & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{に對して}$

$\partial N \cdot N^{-1} = L, \quad \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} = \bar{L}$  (これは常微分方程式) を解く。

答は  $N = 1 + \int_0^z dz_1 L(z_1) + \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 L(z_2) L(z_1) + \dots + \int_0^z dz_1 \dots \int_0^{z_{N-1}} dz_N L(z_1) \dots L(z_N)$

(有限項で切れてしまう。Kac-Moody が関係してくると無限項になる)

又  $\bar{N}^{-1} = 1 - \int_0^{\bar{z}} d\bar{z}_1 \bar{L}(\bar{z}_1) + \int_0^{\bar{z}} d\bar{z}_1 \int_0^{\bar{z}_1} d\bar{z}_2 \bar{L}(\bar{z}_2) \bar{L}(\bar{z}_1) - \dots$

( $\partial(\bar{N}\bar{N}^{-1}) = 0$  より  $\partial\bar{N}\bar{N}^{-1} = -\bar{N}\bar{\partial}\bar{N}^{-1}$  より  $\bar{N}^{-1}$  は  $\bar{\partial}\bar{N}^{-1} = -\bar{N}^{-1}\bar{L}$  の解である)

② 先節で  $g = MN = \bar{M}\bar{N}$  だったことを思い出そう。  $K \stackrel{\text{def}}{=} N\bar{N}^{-1}$  を Gauss 分解する。

$K = M^{-1}\bar{M} \quad \text{すなわち} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (m_{ij}), \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & * \end{pmatrix} = (\bar{m}_{ij})$

•  $M$  の対角成分を 1 としたことで、前節の  $M, \bar{M}$  とは異なっていることに注意せよ。  
この点はおとて、ヤジ交換により調節を行う。(後述)

③  $m_{ij}, \bar{m}_{ij}$  は  $K$  の小行列式の比で書くことができる。

たとえば  $m_{i, i-1} = - \frac{K_{i_0, \dots, i-2, i_4, i_0, \dots, i-1}}{K_{i_0, \dots, i-1, i_0, \dots, i-1}} \quad \text{すなわち} \quad K_{IJ} = \det (K_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$

-----

$\bar{m}_{ii} = \frac{K_{i_0, \dots, i-1, i_4, i_0, \dots, i-1, i_4}}{K_{i_0, \dots, i-1, i_0, \dots, i-1}}$

演習: 二れを示せ

(ヒント:  $K = (k_{ij})$  given,  $M = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$  に対する方程式 (線形!))

$(MK)_{ij} = 0$  ( $i > j$ ) をとけば.  $MK = \begin{pmatrix} * & * \\ & \ddots \\ 0 & * \end{pmatrix}$  中の Gauss 分解を得る)

④  $g \stackrel{\text{det}}{=} MN = \bar{M}\bar{N}$ ,  $C \stackrel{\text{det}}{=} \partial g g^{-1}$ ,  $\bar{C} = \bar{\partial} \bar{g} \bar{g}^{-1}$  とおく.

二れを

$[C - \bar{C}, \bar{C} - C] = 0$  である。(定義に従って計算するだけ)

•  $C, \bar{C}$  の形を決定しよう。

$C = \partial g g^{-1} = \partial(MN) (MN)^{-1} = \partial M \cdot M^{-1} + M \partial N \cdot N^{-1} M^{-1}$

一方  $= \partial(\bar{M}\bar{N}) (\bar{M}\bar{N})^{-1} = \partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1}$  ( $\bar{N}$  は 2 に対して 0 であることを注意)

今  $\partial M \cdot M^{-1} \in \mathcal{G}_{\leq -1}$ ,  $\partial N \cdot N^{-1} \in \mathcal{G}_{\geq 1}$  中

$\partial M \cdot M^{-1} + M \partial N \cdot N^{-1} M^{-1} \in \mathcal{G}_{\leq 1}$

一方  $\partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1} \in \mathcal{G}_{\geq 0}$  中

$C \in \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_1$  である。

又.  $C = \partial \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1}$  より  $C = \begin{pmatrix} \partial \log \bar{m}_{00} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \partial \log \bar{m}_{NN} \end{pmatrix}$  という形中

一方  $C = (\partial M M^{-1} + M \partial N \cdot N^{-1} \cdot M^{-1})_{\geq 0}$

$= (M \cdot L \cdot M^{-1})_{\geq 0}$  ( $N$  は  $\partial N \cdot N^{-1} = L$  の解!)

$M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$   $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$  中

$M L M^{-1} = \begin{pmatrix} * & \theta_1 & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \theta_N \end{pmatrix}$   $C$  はこの上三角成分.

全く同様にして  $\bar{C} = \bar{\partial} \bar{g} \bar{g}^{-1} = \bar{\partial} \bar{M} \cdot \bar{M}^{-1} = \bar{\partial} \bar{M} \bar{N}^{-1} + \bar{M} \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \bar{M}^{-1}$  中

$$M = \begin{pmatrix} \bar{m}_{00} & * \\ 0 & \bar{m}_{NN} \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{m}_{00}^{-1} & * \\ 0 & \bar{m}_{NN}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{を使い } \bar{C} \text{ の形が決まる。}$$

$$C = \begin{pmatrix} \partial \log \bar{m}_{00} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \theta_N \\ 0 & & & \partial \log \bar{m}_{NN} \end{pmatrix} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \bar{m}_{NN} \theta_1 / \bar{m}_{00} & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \bar{m}_{NN} \theta_N / \bar{m}_{NN-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。しかし、まだこれは2節の  $A, \bar{A}$  の形をしていない。

⑤ gauge 変換を行う。

$C, \bar{C}$  が零曲率方程式  $[\partial - C, \bar{\partial} - \bar{C}] = 0$  を満たしているとき、

$$h \text{ 正方形行列 (n \times n) } \begin{cases} C' = h^{-1} C h - h^{-1} \partial h \\ \bar{C}' = h^{-1} \bar{C} h - h^{-1} \bar{\partial} h \end{cases}$$

という変換を行って

$$[\partial - C', \bar{\partial} - \bar{C}'] = h^{-1} [\partial - C, \bar{\partial} - \bar{C}] h = 0$$

である。

特に、 $h$  が対角かつ SL 値であるとき、これを gauge 変換 という。

このとき、 $C \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \bar{C} \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \rightarrow C' \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \bar{C}' \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$  である。

つまり  $h$  は grading を変えないことに注意する。

そこでまず戸田場の方程式を与える  $A, \bar{A}$  を、 $h = \text{diag} (e^{-\frac{u_0}{2}} \dots e^{-\frac{u_N}{2}})$  で gauge 変換する。変換した結果を  $B, \bar{B}$  とすると

$$B = \begin{pmatrix} \partial u_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \partial u_N \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ e^{u_1 - u_0} & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & e^{u_N - u_{N-1}} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} B = h^{-1} A h - h^{-1} \partial h \\ \bar{B} = h^{-1} \bar{A} h - h^{-1} \bar{\partial} h \end{cases}$$

よ2  $C, \bar{C}$  から  $B, \bar{B}$  gauge に移るこが出来るよ

⑥ gauge 変換の存在.

$$h = \text{diag}(h_0 \dots h_N) \text{ を見つけ } \left. \begin{array}{l} B = h^{-1} C h - h^{-1} \partial h \\ \bar{B} = h^{-1} \bar{C} h - h^{-1} \bar{\partial} h \end{array} \right\}$$

としたい。  
右辺を計算すると

$$1) h^{-1} C h - h^{-1} \partial h = \begin{pmatrix} \partial \log \bar{m}_{00} - \partial \log h_0 & h_1 \theta_1 / h_0 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & h_N \theta_N / h_{N-1} & \\ 0 & & & \partial \log \bar{m}_{NN} - \partial \log h_N \end{pmatrix}$$

$$2) h^{-1} \bar{C} h - h^{-1} \bar{\partial} h = \begin{pmatrix} \bar{\partial} \log h_0 & & & 0 \\ \frac{\bar{m}_{11}}{\bar{m}_{00}} \bar{\theta}_1 \frac{h_0}{h_1} & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{\bar{m}_{NN}}{\bar{m}_{N-1,N-1}} \bar{\theta}_N \frac{h_{N-1}}{h_N} & \bar{\partial} \log h_N \end{pmatrix}$$

1) 式が B と一致するためには  $\frac{h_i \theta_i}{h_{i-1}} = 1$  でなければならぬ。

よ  $h_0 \dots h_N = 1$  あり

$$(2a) \left. \begin{array}{l} h_0 = \sqrt[N]{\theta_1^{N-1} \dots \theta_{N-1}} \\ h_i = \frac{h_0}{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_i} \end{array} \right\}$$

であることが直ちにわかる。

よ2 特には  $h_i = h_i(z)$  であり、2) 式の対角成分も全て 0 になる。(B の対角と一致)

==>  $\bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_N$  から  $\bar{h}_1 \dots \bar{h}_N$  を上と同様の系統で定める。

(7#)  $\frac{\bar{h}_i \bar{\theta}_i}{\bar{h}_{i-1}} = 1$  によって定める)

==>  $e^{u_i} \stackrel{\text{det}}{\longleftarrow} \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i}$  とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{e^{u_i - u_{i-1}}}{e^{u_i - u_{i-1}}} &= \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i} \cdot \frac{h_{i-1} \bar{h}_{i-1}}{\bar{m}_{i-1,i-1}} = \frac{\bar{m}_{ii}}{\bar{m}_{i-1,i-1}} \frac{h_{i-1}}{h_i} \frac{h_{i-1}}{h_i} \\ &= \frac{\bar{m}_{ii}}{\bar{m}_{i-1,i-1}} \bar{\theta}_i \frac{h_{i-1}}{h_i} = \text{2) 式の (i, i-1) 成分} \end{aligned} \quad \textcircled{A}$$

更に, このとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \bar{m}_{ii} - \partial \log h_i}{\partial \log \bar{m}_{ii} - \partial \log h_i} &= \partial \log \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i} \quad h_i \text{ は } \bar{z}_i \text{ にかよってゆえ} \\ &= \partial \log \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i} = \frac{\partial u_i}{\partial \log \bar{m}_{ii} - \partial \log h_i} \quad \textcircled{B} \end{aligned}$$

以上 ①, ②, ③, ④, ⑤ より (9a) で表される gauge 変換において,  $C, \bar{C}$  が  $B, \bar{B}$  に移されることかわかった。

⑦ T 関数の決定.

$e^{u_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}$  によって T 関数を決めるのであつたが 今の場合

$$e^{u_i} = \frac{\bar{m}_{ii}}{h_i \bar{h}_i}, \quad \bar{m}_{ii} = \frac{K_{j_0, \dots, i-1, i, j_0, \dots, i-1, i, j}}{K_{j_0, \dots, i-1, i, j_0, \dots, i-1, i, j}}$$

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \frac{h_0 \dots h_i}{h_0 \dots h_{i-1}} \\ \bar{h}_i &= \frac{\bar{h}_0 \dots \bar{h}_i}{\bar{h}_0 \dots \bar{h}_{i-1}} \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{あたり前の恒等式}$$

より  $\tau_i = \frac{K_{j_0, \dots, i-1, j_0, \dots, i-1, j}}{h_0 \dots h_{i-1} \bar{h}_0 \dots \bar{h}_{i-1}}$  であることがわかる。

● これは実際 3 節で示したものに他ならない。

たとえば

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{K_{f_0 f_1 f_2}}{h_0 h_0} = \frac{K_{00}}{h_0 h_0} \quad \text{であり } K = N \bar{N}^{-1} \text{ ゆえ} \\ &= \sum_{i=0}^N \frac{N_{0i}}{h_0} \frac{(\bar{N}^{-1})_{i0}}{h_0} \end{aligned}$$

一方 ④ の  $N$  の定義

$$N = 1 + \int_0^z dz_1 L(z_1) + \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 L(z_2) L(z_1) + \dots + \int_0^z dz_1 \dots \int_0^{z_{N-1}} dz_N L(z_1) \dots L(z_N)$$

より

$$N_{00} = 1 \quad N_{01} = \int_0^z dz_1 \theta_1(z_1), \dots \quad N_{0N} = \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{N-1}} \theta_1(z_1) \theta_2(z_2) \dots \theta_N(z_N)$$

又

$$h_0 = \sqrt{\theta_1^{N-1} \dots \theta_{N-1}} \quad \text{ゆえ} \quad \frac{N_{0i}}{h_0} = (\text{3 節の } f_i)$$

$\bar{N}^{-1}$  についても同様であり

$$\tau_1 = \sum_{i=0}^N f_i(z) \bar{f}_i(z) \quad \text{である。}$$

## 6. 補足 - Wess-Zumino-Witten 模型との関係

● 4 節, 5 節の議論により,

$$(A, \bar{A}) \begin{array}{c} \xrightarrow{4 \text{ 節}} \\ \xleftarrow{5 \text{ 節}} \end{array} (N, \bar{N})$$

という対応ができた。この対応の左側は  $sl(N+1)$  超場の方程式であるが、右側は、どのような場の方程式にあたるだろうか？ この答え方は、 $SL(N+1)$  値函数

$$K = N \bar{N}^{-1}$$

を方程式

$$\partial(K^{-1} \cdot \bar{\partial} K) = 0 \quad (\Leftrightarrow \bar{\partial}(\partial K \cdot K^{-1}) = 0)$$

の解と理解することである。これは Wess-Zumino-Witten 模型と呼ばれるものに他ならない。  
(正確には Euler-Lagrange 方程式, 7 節より量子化以前の場の方程式である。)

ただし、もともとの Wess-Zumino-Witten 模型では  $N, \bar{N}$  は (それぞれ  $z, \bar{z}$  の対の函数であることを除けば) 任意の  $SL(N+1)$  値函数であるが、今の場合には、拘束

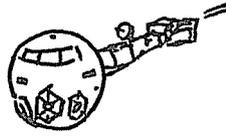
条件

$$\partial N \cdot N^{-1} \in \mathcal{G}_1, \quad \bar{\partial} \bar{N} \cdot \bar{N}^{-1} \in \mathcal{G}_{-1}$$

が付けられている。

つまり  $sl(N+1)$  超場の方程式は、『拘束条件付き  $SL(N+1)$  Wess-Zumino-Witten 模型』とみせることもできる。

# III 戸田 Hierarchy



二章の参考文献

[ 9 ] K. Ueno, K. Takesaki  
 "Toda lattice hierarchy", Adv. Stud. Pure. Math. 4  
 (North Holland / 紀伊国屋)

[ 10 ] K. Takesaki  
 "Initial value problem for the Toda lattice hierarchy"  
 (i. b. i. d.)

[ 11 ] T. Takebe  
 "Toda hierarchy and conservation law" Commun.  
 Math. Phys. 129 (1990)

[ 12 ] T. Takebe  
 "Representation theoretical meaning of the initial value  
 problem for the Toda lattice hierarchy, I" Lett.  
 Math. Phys. 21 (1991) 77~84;

[ 13 ] "同, II" Publ. RIMS, Kyoto Univ., 27 (1991) 491~503

## 1. 零曲率方程式系としての定式化

- Motivation . 戸田格子と戸田場の融合, . KP hierarchy に相当するものを戸田場で行うこと.
- 定義 (同値な定義のうちの一つ)  
 戸田格子) ヒエラルキーは次の無限箇の零曲率方程式系におて定式化される。

$$\left\{ \begin{array}{l} [\partial_m - B_m, \bar{\partial}_m - \bar{B}_m] = 0 \\ [\bar{\partial}_m - \bar{B}_m, \partial_m - B_m] = 0 \\ [\partial_m - B_m, \bar{\partial}_m - \bar{B}_m] = 0 \end{array} \right. \quad m, m = 1, 2, 3, \dots$$

∴ ∂<sub>m</sub> =  $\frac{\partial}{\partial z_m}$ ,  $\bar{\partial}_m = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}$   $m=1, 2, \dots$

$B_m = (L^m)_{\geq 0}$ ,  $\bar{B}_m = (\bar{L}^m)_{\leq -1}$  であり,



$$b(\Delta) = b(\Delta, z, \bar{z}) \quad , \quad a(\Delta) = a(\Delta, z, \bar{z}) \quad z''$$

方程式

$$[\partial_1 - B_1, \bar{\partial}_1 - \bar{B}_1] = 0 \quad \text{は}$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_1 a(\Delta) = a(\Delta) (b(\Delta+1) - b(\Delta)) \\ \bar{\partial}_1 b(\Delta) + a(\Delta) - a(\Delta-1) = 0 \end{array} \right\} \text{と同等} z'' \quad \left. \begin{array}{l} a(\Delta) = e^{u(\Delta+1) - u(\Delta)} \\ b(\Delta) = \partial_1 u(\Delta) \end{array} \right\}$$

とおけば

$$\underline{\partial_1 \bar{\partial}_1 u(\Delta) + e^{u(\Delta+1) - u(\Delta)} - e^{u(\Delta) - u(\Delta-1)} = 0} \quad \text{と作る。}$$

これは2次元戸田場方程式の成分無限箇のものとなっている。

## 2. 差分 Operator とこの表示

- 無限次の行列は差分作用素だと思えることができる。
- $GL(\infty) \Rightarrow A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$  の index を次のようにつけかえる。

$$a_{ij} \longrightarrow a_{j-i}(i)$$

おぼわち  $(j-i)$  が grading の index を,  $i$  が 行の index を表わすわけである。

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \dots & a_{j-i}(i) & \\ \vdots & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \dots & & \\ \dots & a_{0(-1)} & \\ \dots & a_{-1(0)} & a_{0(0)} \\ & a_{-1(1)} & a_{0(1)} \\ & & \dots \end{array} \right]$$

このとき,  $A$  は 差分 Operator

$$A = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\Delta) e^{m\partial_\Delta} \quad \text{と表わせる。}$$

こゝで  $e^{m\partial_\Delta}$  は  $\Delta \longmapsto \Delta + m$  という operator

を表わす

$$F = \begin{pmatrix} \vdots \\ f(-1) \\ f(0) \\ f(1) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{に対し} \quad Af = \begin{pmatrix} \vdots \\ Af(-1) \\ Af(0) \\ Af(1) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad Af(\Delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\Delta) f(\Delta+m)$$

• この同一視によると,  $L, \bar{L}$  は

$$L = e^{\partial \Delta} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(\Delta) e^{m\partial \Delta}, \quad \bar{L} = \sum_{n=-1}^{\infty} \bar{u}_n(\Delta) e^{n\partial \Delta}$$

又,

$$B_1 = e^{\partial \Delta} + u_0(\Delta), \quad \bar{B}_1 = \bar{u}_{-1}(\Delta) e^{-\partial \Delta}$$

(前節の notation では  $u_0(\Delta) = u_0(\Delta), a(\Delta-1) = \bar{u}_{-1}(\Delta)$ )

• この記法によると, たとえば,

$$\begin{aligned} (B_1 \bar{B}_1 f)(\Delta) &= (e^{\partial \Delta} \bar{B}_1 f)(\Delta) + (u_0(\Delta) \bar{B}_1 f)(\Delta) = (\bar{B}_1 f)(\Delta+1) + u_0(\Delta) (\bar{B}_1 f)(\Delta) \\ &= \bar{u}_{-1}(\Delta+1) f(\Delta+1-1) + u_0(\Delta) \bar{u}_{-1}(\Delta) f(\Delta-1) \\ &= [(\bar{u}_{-1}(\Delta+1) + u_0(\Delta) \bar{u}_{-1}(\Delta)) e^{-\partial \Delta} f](\Delta) \end{aligned}$$

よって

$$[\partial_1 - B_1, \bar{\partial}_1 - \bar{B}_1] = \bar{\partial}_1 B_1 - \partial_1 \bar{B}_1 + (\bar{u}_{-1}(\Delta+1) - \bar{u}_{-1}(\Delta)) + (u_0(\Delta) \bar{u}_{-1}(\Delta) - u_0(\Delta-1) \bar{u}_{-1}(\Delta)) e^{-\partial \Delta}$$

==> 右辺=0 とし,  $1 = e^{0 \cdot \partial \Delta}$ ,  $e^{-\partial \Delta}$  の係数をくらべて, 前節末の方程式 (2次元 F 田場) を得る。

• Lax 方程式系による定式化.

$L, \bar{L}, B_n, \bar{B}_n$  は先節と同じものとする。次の Lax 方程式系

$$\begin{cases} \partial_m L = [B_m, L], & \bar{\partial}_m L = [\bar{B}_m, L] \\ \partial_m \bar{L} = [B_m, \bar{L}], & \bar{\partial}_m \bar{L} = [\bar{B}_m, \bar{L}] \end{cases} \quad m=1, 2, \dots$$

は零曲率方程式系と同値である。(証明は [9] 参照)

### 3. 付随変数

II章における  $G$  に対応する行列 (operator) と  $\tau$  函数を導入する。

• Toda hierarchy の下で  $\exists W, \bar{W} \in \text{gl}(\infty)$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\lambda) e^{-m\partial_\lambda} \sim \begin{pmatrix} \dots & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \dots \end{pmatrix} \\ \bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\lambda) e^{n\partial_\lambda} \sim \begin{pmatrix} \dots & & * \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

such that

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} L = W \cdot e^{\partial_\lambda} \cdot W^{-1} \\ \bar{L} = \bar{W} \cdot e^{-\partial_\lambda} \cdot \bar{W}^{-1} \end{array} \right.$$

$$e^{m\partial_\lambda} = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \dots \end{pmatrix}$$

$\uparrow G_m$

$$\textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} \partial_m W = B_m W - W e^{m\partial_\lambda} \\ \partial_m \bar{W} = B_m \bar{W} \\ \bar{\partial}_m W = \bar{B}_m W \\ \bar{\partial}_m \bar{W} = \bar{B}_m \bar{W} - \bar{W} e^{-m\partial_\lambda} \end{array} \right.$$

$$e^{-m\partial_\lambda} = \begin{pmatrix} \dots & & 0 \\ & & \\ & & \\ & & \\ 0 & & \dots \end{pmatrix}$$

$\uparrow G_{-m}$

• さらに  $\exists \tau(\lambda) = \tau(\lambda, z, \bar{z})$

such that

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\lambda) \lambda^{-n} = \frac{\tau(\lambda, z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z})}{\tau(\lambda, z, \bar{z})} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\lambda) \lambda^n = \frac{\tau(\lambda+1, z, \bar{z} - \varepsilon(\lambda))}{\tau(\lambda, z, \bar{z})} \end{array} \right.$$

==>  $\varepsilon(\lambda^{\pm 1}) = (\lambda^{\pm 1}, \frac{1}{2}\lambda^{\pm 2}, \frac{1}{3}\lambda^{\pm 3}, \dots)$

つまりたとえば  $\bar{z} - \varepsilon(\lambda) = (\bar{z}_1 - \lambda, \bar{z}_2 - \frac{\lambda^2}{2}, \bar{z}_3 - \frac{\lambda^3}{3}, \dots)$

差の operator の記法を「かえり」

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\Delta) \lambda^{-n} = \frac{e^{-\sum \frac{\lambda^{-n}}{n} \partial_n} \tau(\Delta)}{\tau(\Delta)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\Delta) \lambda^n = \frac{e^{-\sum \frac{\lambda^n}{n} \bar{\partial}_n} \tau(\Delta+1)}{\tau(\Delta)}$$

• 次のような見方もできる。

今  $t = (t_1, t_2, \dots)$  の多項式  $P_m(t)$   $m=0, 1, 2, \dots$  を

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} t_m \lambda^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) \lambda^m \quad \text{と定義する。}$$

すると例えば,  $P_0=1, P_1(t)=t_1, P_2(t)=t_2 + \frac{1}{2}t_1^2, P_3(t)=t_3 + t_1t_2 + \frac{1}{6}t_1^3 \dots$   
 (これは Schur 函数の特殊な場合にあたる。)

とすると  $\partial = (\partial_1, \frac{1}{2}\partial_2, \frac{1}{3}\partial_3, \dots)$   $\bar{\partial} = (\bar{\partial}_1, \frac{1}{2}\bar{\partial}_2, \frac{1}{3}\bar{\partial}_3, \dots)$

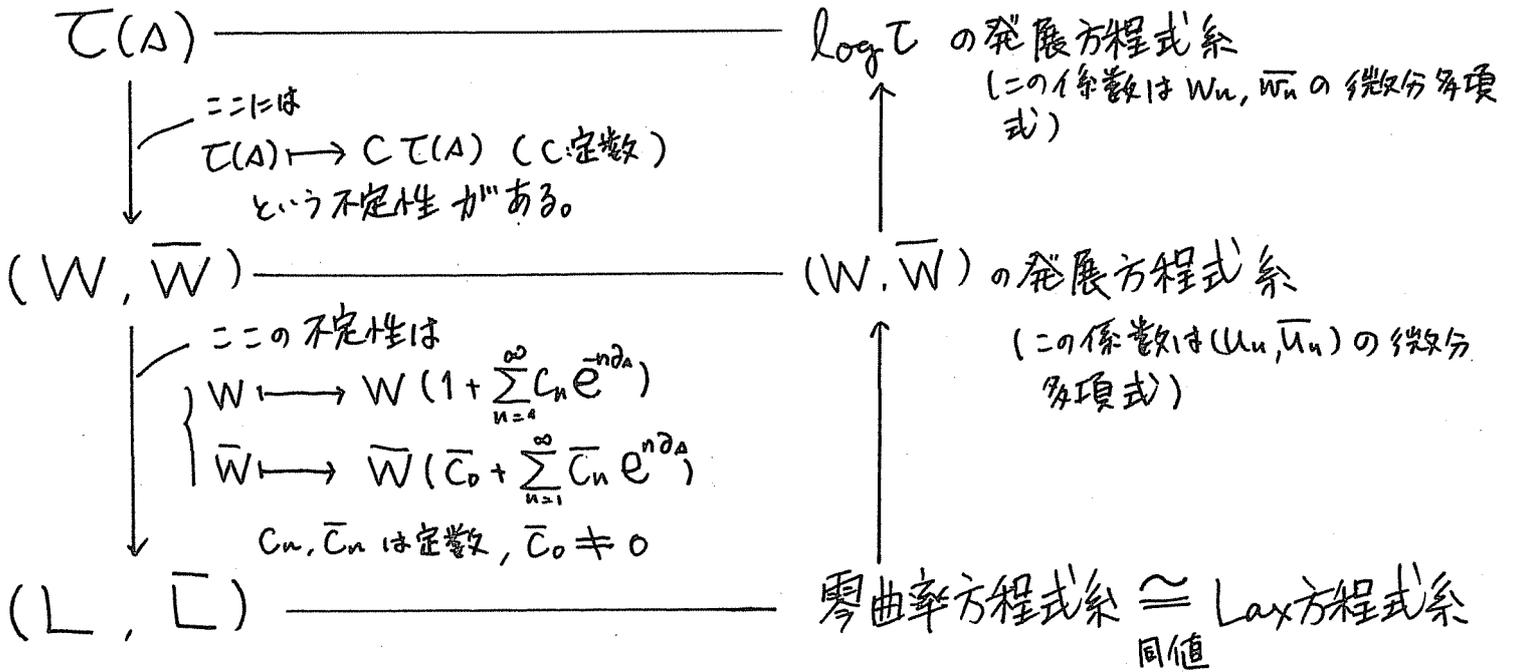
とすると,

$$w_n(\Delta) = \frac{P_n(-\partial) \tau(\Delta)}{\tau(\Delta)} \quad \bar{w}_n(\Delta) = \frac{P_n(-\bar{\partial}) \tau(\Delta+1)}{\tau(\Delta)}$$

• この  $W, \bar{W}$  及び  $\tau$  の存在は [9] を参照のこと。

### 4. 変数のまとめと今後の方針

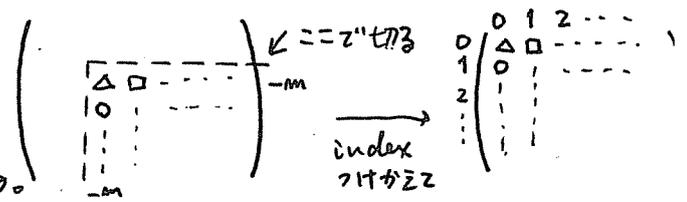
- 3節で導入された変数  $\tau$ , その不定性をまとめおく。



- 本質は  $\tau$  関数のレベルで見えてくる。
- 以後、この方程式の一般解を構成する。 ←これが目標

枠をきは

- $\Lambda \in \mathbb{Z}_{>-m}$  上の対角物を考える  
 この時  $m=0$  で考えれば良いから  
 一般解が「Gauss分解」により得られる。  
 又、 $\tau$  関数を determinant で表すことができる。



- $m \rightarrow \infty$  を実行する。

5.  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  上の model の解の構成

• 半分だけだった模型で考える。

$$L = \begin{pmatrix} \overset{0}{\downarrow} & \overset{1}{\downarrow} & \dots & \\ * & 1 & & \\ & * & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} \overset{0}{\downarrow} & \overset{1}{\downarrow} & \dots & \\ * & * & & \\ & * & * & \\ & & * & * \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_m = (L^n)_{\geq 0} \quad \bar{B}_m = (\bar{L}^n)_{\leq -1}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & w_{i-j(i)} \end{pmatrix} \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \bar{w}_{j-i(i)} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

• 注) この model では  $e^{2\alpha}, e^{-2\alpha}$  は可換ではない, (はしから=はしれおちる) ので 差分 Operator の表示は使わず, 行列表示を使う。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{に対して}$$

$$L = W \Lambda W^{-1}, \quad \bar{L} = \bar{W} \bar{\Lambda} \bar{W}^{-1} \quad \text{である。 (3節)}$$

• Gauss 分解による解の構成

まず  $A(0,0) = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  で  $\det (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq A-1} \neq 0 \quad \forall A$  なるものを  
 1つとる。  
 たとえば  $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$  や  $A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & \ddots & * \end{pmatrix}$  ならよる。  
 ← この成分は全  $\neq 0$

$$\textcircled{1} \quad A(z, \bar{z}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n \Lambda^n\right) A(0,0) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n\right) \quad \text{とおく。}$$

この  $A(z, \bar{z})$  を Gauss 分解する。

$$\textcircled{1} \quad W(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & w_{i-j(i)} \end{pmatrix} \quad \bar{W}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \bar{w}_{j-i(i)} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

をとり

$$A(z, \bar{z}) = W(z, \bar{z})^{-1} \bar{W}(z, \bar{z}) \quad \text{とある。 (一意的)}$$

②  $W, \bar{W}$  の各成分  $w_n(A), \bar{w}_n(A)$  は  $A(z, \bar{z})$  の小行列式の比で書くとすることができる。

$$\left\{ \begin{aligned} w_n(A) &= (-1)^m \frac{\langle 0, \dots, \overset{n \text{ 位}}{A^{-n}}, \dots, A \mid A(z, \bar{z}) \mid A^{-1}, \dots, 1, 0 \rangle}{\langle 0, \dots, \dots, A^{-1} \mid A(z, \bar{z}) \mid A^{-1}, \dots, 0 \rangle} \\ \bar{w}_n(A) &= \frac{\langle 0, \dots, A^{-1}, A \mid A(z, \bar{z}) \mid A^{-1}, \dots, 0 \rangle}{\langle 0, \dots, \dots, A^{-1} \mid A(z, \bar{z}) \mid A^{-1}, \dots, 0 \rangle} \end{aligned} \right.$$

(Rem:  $\langle I \mid A \mid J \rangle \stackrel{\text{det}}{=} \det (a_{ij} \mid \substack{i \in I \\ j \in J})$  ↑増大  
↑順序  
↑とる.)

(実はこの分母が  $\Gamma$  function と呼ばれる。④でそのことは見る。)

これは II 章 5 節と同様に示すことができる。

③  $W, \bar{W}$  の満たす方程式を導き出す。

$$\begin{aligned} \cdot \text{まず } A = A(z, \bar{z}) \text{ に対し } \cdot \partial_m A &= \partial_m \left( \exp\left(\sum z_n \Lambda^n\right) A_{(0,0)} \exp\left(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n\right) \right) \\ &= \Lambda^m A \\ \cdot \bar{\partial}_m A &= -A \bar{\Lambda}^m \end{aligned}$$

であることに注意しておく。

$$\left( \begin{array}{l} \text{特に} \\ \partial_1 A = \Lambda A, \quad \bar{\partial}_1 A = -A \bar{\Lambda} \text{ より} \end{array} \right) A = \begin{pmatrix} a_{00} & (-\bar{\partial}) a_{00} & \dots \\ \partial_1 a_{00} & & \\ \partial_1^2 a_{00} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{multi} \\ \text{Wronskian} \\ \text{の形である。} \end{array}$$

•  $WA = \bar{W}$  を微分し  $A$  を消去する。

$\partial_m$  と微分をとると。

$$(\partial_m W)A + W(\partial_m A) = \partial_m \bar{W} \quad \text{より}$$

$$(\partial_m W) W^{-1} \bar{W} + W \Lambda^m W^{-1} \bar{W} = \partial_m \bar{W}$$

$$\text{よって } \partial_m \bar{W} \cdot \bar{W}^{-1} = \partial_m W \cdot W^{-1} + W \Lambda^m W^{-1} \xrightarrow{\text{def}} B_m \quad \text{--- ①}$$

$$\text{② (微分)} \quad \bar{\partial}_m W \cdot W^{-1} = \bar{\partial}_m \bar{W} \bar{W}^{-1} + \bar{W} \bar{\Lambda}^m \bar{W}^{-1} \xrightarrow{\text{def}} \bar{B}_m \quad \text{--- ②}$$

$$\text{--- ③ ---} \quad L \xrightarrow{\text{def}} W \Lambda W^{-1}, \quad \bar{L} \xrightarrow{\text{def}} \bar{W} \bar{\Lambda} \bar{W}^{-1} \quad \text{とすると}$$

$$B_m = \partial_m \bar{W} \cdot \bar{W}^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z} \geq 0} \quad \text{ゆえ}$$

$$= (\partial_m W \cdot W^{-1} + L^m)_{\geq 0} \quad \text{ゆえに } \partial_m W \cdot W^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z} \leq -1} \quad \text{ゆえ}$$

$$= (L^m)_{\geq 0}$$

全く同様に

$$\bar{B}_m = (\bar{L}^m)_{\leq -1}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{①より} \dots \partial_m \bar{W} &= B_m \bar{W}, & \partial_m W &= B_m W - W \Lambda^m \\ \text{②より} \dots \bar{\partial}_m W &= \bar{B}_m W, & \bar{\partial}_m \bar{W} &= \bar{B}_m \bar{W} - \bar{W} \bar{\Lambda}^m \end{aligned} \right\}$$

これらは3節の方程式系に他ならない。

よって  $W \cdot \bar{W}$  は  $\mathbb{Z}_{>0}$  model の解を与えている。

以上で  $(W, \bar{W})$  level  $z$  の check が終了した。次に  $\tau$  関数を同定しよう。

⑤  $\tau$  関数は次により与えられる。

$$\tau(\Delta, z, \bar{z}) = \langle 0, \dots, \Delta-1 | A(z, \bar{z}) | \Delta-1, \dots, 0 \rangle$$

これをたしかめるには

$$\left. \begin{aligned} \text{①} & \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\Delta) \lambda^{-n} & \frac{\tau(\Delta, z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z})}{\tau(\Delta, z, \bar{z})} \\ \text{②} & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\Delta) \lambda^n & \frac{\tau(\Delta+1, z, \bar{z} - \varepsilon(\lambda))}{\tau(\Delta, z, \bar{z})} \end{aligned} \right\}$$

を示せばよい。

① a check.

まず  $\varepsilon(\lambda^{-1}) = (\lambda^{-1}, \frac{\lambda^{-2}}{2}, \frac{\lambda^{-3}}{3}, \dots)$   $z$  があった。  $\varepsilon = z$   $A(z, \bar{z})$  の定義より

$$\begin{aligned} A(z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z}) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - \frac{\lambda^{-n}}{n}) \Lambda^n\right) A \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n\right) \\ &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-n}}{n} \Lambda^n\right) A(z, \bar{z}) \\ &= \exp\left(\log(1 - \lambda^{-1} \Lambda)\right) A(z, \bar{z}) \\ &= (1 - \lambda^{-1} \Lambda) A = \begin{bmatrix} 1 - \lambda^{-1} & & 0 \\ & 1 - \lambda^{-1} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} A \quad (*) \end{aligned}$$

$\varepsilon = z$  行列式

$\langle 0, \dots, A-1 | A(z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z}) | A-1, \dots, 0 \rangle$  を計算するが,  $(*)$  の積の形より

$$\tau(A, z - \varepsilon(\lambda^{-1}), \bar{z}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & A-1 & A \\ \vdots & 1 - \lambda^{-1} & & & \\ \vdots & 1 - \lambda^{-1} & & & \\ \vdots & & & & \\ A-1 & & & & 1 - \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{A-1, A-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{A, 0} & \dots & a_{A, A-1} \end{pmatrix}$$

積の行列式の展開定理 (数学事典第3版 225頁 84 Fの5) より

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^A \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda^{-1} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 - \lambda^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 - \lambda^{-1} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_{00} & & & & a_{A-1, A-1} \\ & \ddots & & & \\ & & a_{k-1, 0} & \dots & a_{k-1, A-1} \\ & & a_{k, 0} & \dots & a_{k, A-1} \\ & & & & \\ & & & & a_{A, 0} & & a_{A, A-1} \end{pmatrix} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(-\lambda^{-1})^{A-k}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{長列を抜く} \\ (-1)^{A-k} \omega_{A-k}(A) \tau(A) \\ (\because) \textcircled{2}}} \\ &= \sum_{k=0}^A \omega_k(A) \lambda^{-k} \tau(A, z, \bar{z}) \end{aligned}$$

よ,  $z \textcircled{2}$  が成立する。



6.  $m \rightarrow \infty$  の手続き

① 半無限モデルでの  $\tau$  函数の Shun 函数による展開

$$\begin{aligned} \tau(A, z, \bar{z}) &= \langle 0, \dots, A-1 | A(z, \bar{z}) | A-1, \dots, 0 \rangle \\ &= \langle 0, \dots, A-1 | \exp(\sum z_n \Lambda^n) A \exp(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n) | A-1, \dots, 0 \rangle \end{aligned}$$

前節のように行列式の展開を適用して

$$A = A(0,0)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{I, J} \langle 0, \dots, A-1 | \exp(\sum z_n \Lambda^n) | I \rangle \langle I | A | J \rangle \langle J | \exp(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n) | A-1, \dots, 0 \rangle \\ &\quad I = (i_0, i_1, \dots, i_{A-1}) \quad 0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{A-1} \\ &\quad J = (j_0, j_1, \dots, j_{A-1}) \quad 0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{A-1} \end{aligned}$$

今  $S_I(z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0, \dots, A-1 | \exp(\sum z_n \Lambda^n) | I \rangle$  とおけば, 3節の記法を使えば,

$$\exp(\sum z_n \Lambda^n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \Lambda^n \quad \text{であるから}$$

$$S_I(z) = \det (P_{i_\alpha - \beta}(z))_{\alpha, \beta = 0, \dots, A-1} \quad I = (i_\alpha) = (i_0, \dots, i_{A-1})$$

である。

又  $\langle J | \exp(-\sum \bar{z}_n \bar{\Lambda}^n) | A-1, \dots, 0 \rangle = S_J(-\bar{z})$  とおくと直ちにわかる。

よって

$$\tau(A) = \sum_{I, J} S_I(z) A_{IJ} S_J(-\bar{z}) \quad , \quad A_{IJ} = \langle I | A(0,0) | J \rangle$$

という表示を得た。

• Rem 二のこき。  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{z} \text{ を固定すると } z \text{ に関する KP hierarchy の } \tau \text{ 函数であり,} \\ z \text{ を固定すると } \bar{z} \text{ に関する KP hierarchy の } \tau \text{ 函数と対応する。} \end{array} \right.$

②  $m \rightarrow \infty$  の手続き.

• 他は  $W, \bar{W}$  に対する微分方程式を考えていたことに注意しよう。A は Gauss 分解によつて  $W, \bar{W}$  を生みだすものであったから、 $W, \bar{W}$  の初期値  $W^{-1}(0,0), \bar{W}(0,0)$  を与えて A は formal に

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & * \\ & * \\ 0 & * & \ddots \end{pmatrix} = W^{-1}(0,0) \bar{W}(0,0)$$

で与えられるものしよう。この積は、もちろん一般に意味をもたぬが

$$W^{-1}(0,0) = (w_{ij}^*)_{i,j \in \mathbb{Z}}, \quad \bar{W}(0,0) = (\bar{w}_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \quad \text{に對し}$$

$$A^{(-m)} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij}^{(-m)})_{-m \leq i,j}, \quad a_{ij}^{(-m)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-m}^{\infty} w_{ik}^* \bar{w}_{kj} \quad \text{とすれば,}$$

この積は有限である。

そこでこの  $A^{(-m)} = A^{(-m)}(0,0)$  から出発し、 $\tau$  函数  $\tau_m(A, z, \bar{z})$  を構成する。

今  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  を  $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \bar{w}_0(A) (= \bar{w}_{AA})$  で決めると、 $A \geq -m$  に對し

$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m \tau_m(A, z, \bar{z})$  が存在することがわかる。つまり、

$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m A_{IJ}^{(-m)}$  が存在する。(実際は  $m$  が十分大で一定の値となる)

このように、 $\tau$  函数の定数倍の不定性をうまく調節することである。

$$A_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} a_m A_{IJ}^{(-m)} \quad \text{が定義され、} m \rightarrow \infty \text{ の手続きが完了}$$

される。

以上の詳細は [10] を参照のこと。

# IV 無分散極限 = 準古典極限

二の章の参考文献

- [14] O. I. Bogoyavlensky, "Some constructions of integrable dynamical systems," Math. USSR Izvestiya 31(1988), 47~35
- [15] Saveliev, Tersik, "Continual analogues of contragradient Lie algebras," Commun. Math. Phys 126(1989) 376~398
- [16] Y. Kodama, "Solutions of the dispersionless Toda equation" Phys. Lett. A147(1990), 477~482
- [17] Bakas, "The structure of the W<sub>0</sub> algebra" Commun. Math. Phys. 134(1990) 487~508
- [18] Park, "Extended conformal symmetries in real heavens," Phys. Lett. B236(1990) 429~432
- [19] K. Takasaki, T. Takebe "SDiff(2) Toda - equation - hierarchy, tau function and symmetries," Lett. Math. Phys. 23(1991) 205~214
- 自己対称 Einstein equation の関係は
  - [20] C. P. Boyer, J. D. Finley, "Killing vectors in self-dual Euclidean Einstein spaces," J. Math. Phys. 23(1982), 1126~1128
- 自己対称 Einstein equation に于ける
  - [21] K. Takasaki, "Symmetries of hyper-Kähler (or Poisson gauge field) hierarchy," J. Math. Phys. 31(1990), 1897~1888
- 関連の話題に於ける
  - [22] J. Hoppe, Lect. Note in Phys. Monograph series no. 10, Springer (1992)

## 1. Scaling limit

• Motivation

KdV 方程式  $U_t = UU_x + U_{xxx}$ ,  $U = U(x, t)$  において,  $U_{xxx}$  を分散項と見做す。

今,  $t \rightarrow h^{-1}t$ ,  $x \rightarrow h^{-1}x$ ,  $u \rightarrow u = U(h, x, t) = U^0(x, t) + O(h)$  とし,  $h \rightarrow 0$  とする。この行は操作を Scaling 極限という。これは long distance behavior を強調するに於ける。これは (非線形項の対が残った) KdV 方程式から。

$U_t = UU_x$  : 無分散 KdV 方程式を得る。(非線形項の対が残った。)

この方程式は hodograph 変換により解くことができる。  
 あるいは、 $f$  (任意関数) を与えて、

$$u = f(x + ut) \quad \text{を } u \text{ について解けば } u \text{ が解である。}$$

二のようなことも Toda 場の方程式に代しても行いたい。

● 2次元戸田場の方程式

$$\partial \bar{\partial} u(\Delta) + \frac{e^{u(\Delta+1)-u(\Delta)}}{\epsilon} - \frac{e^{u(\Delta)-u(\Delta-1)}}{\epsilon} = 0$$

において、 $z \rightarrow \epsilon^{-1} z$ ,  $\bar{z} \rightarrow \epsilon^{-1} \bar{z}$ ,  $\Delta \rightarrow \epsilon^{-1} \Delta$ ,  $u \rightarrow \epsilon^{-1} u$  とおきかえ、  
 更に変数  $\Delta \in \mathbb{Z}$  を  $\Delta \in \mathbb{R}$  とおきかえ、

$$\partial \rightarrow \epsilon \partial, \quad \bar{\partial} \rightarrow \epsilon \bar{\partial}, \quad \Delta \rightarrow \sigma = \epsilon^{-1} \Delta, \quad \Delta = \epsilon \sigma, \quad \Delta+1 = \epsilon(\sigma+1) = \Delta + \epsilon$$

$$\partial \bar{\partial} u(\Delta) + \frac{e^{\epsilon^{-1}(u(\Delta+\epsilon)-u(\Delta))} - e^{\epsilon^{-1}(u(\Delta)-u(\Delta-\epsilon))}}{\epsilon} = 0$$

すなわち、 $u(\Delta) = u(\epsilon, \Delta, z, \bar{z}) = u^0(\Delta, z, \bar{z}) + O(\epsilon)$  を仮定し、 $\epsilon \rightarrow 0$  とすると

$$\partial \bar{\partial} u^0 + \frac{\partial}{\partial \Delta} \exp \frac{\partial u^0}{\partial \Delta} = 0 \quad (\text{上式右項の } \epsilon \rightarrow 0 \text{ の limit は } e^{\frac{\partial u}{\partial \Delta}} \frac{\partial^2 u}{\partial \Delta^2})$$

これが戸田場の scaling 極限である。

● 他の変数の scaling はどうなるだろうか？

①  $\tau$  関数.

$$u(\Delta) = \log \frac{\tau(\Delta+1)}{\tau(\Delta)} \quad \text{は scaling による。}$$

$$\downarrow$$

$$u(\epsilon, \Delta) = \epsilon (\log(\tau(\epsilon, \Delta+\epsilon)) - \log(\tau(\epsilon, \Delta))) \quad \text{と持る。}$$

すなわち  $\tau(\epsilon, \Delta) = \exp(\epsilon^{-2} F(\Delta) + O(\epsilon^{-1}))$  という要請をおくと。

$$u(\epsilon, \Delta) = \frac{F(\Delta+\epsilon) - F(\Delta) + O(\epsilon^2)}{\epsilon} \sim \frac{\partial F}{\partial \Delta} + O(\epsilon)$$

よって  $\epsilon \rightarrow 0$  として

$$u^0(\Delta) = \frac{\partial F}{\partial \Delta} \quad \text{と考えられる。}$$

この  $F$  を 自由エネルギー と呼ぶ。

②  $v$  函数

$$v(\Delta) = u(\Delta) - u(\Delta-1) \quad \text{は scaling } z^n$$

↓

$$v(z, \Delta) = z^{-1} (u(z, \Delta) - u(z, \Delta-z)) \sim \frac{\partial u^0(\Delta)}{\partial \Delta}$$

$$\text{よって } v^0(\Delta) = \frac{\partial u^0}{\partial \Delta} \text{ と表される。}$$

● 二つの相互の関係は、(以下  $u, v^0$  対しての  $\Delta$  は  $\Delta$  とおく)

$$\begin{aligned} & \partial \bar{\partial} F + \exp \partial_{\Delta}^2 F = 0 \\ & \left( \begin{array}{l} \Delta \text{ 積分} \\ \downarrow \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} u = \partial_{\Delta} F \\ \text{u の方程式)} & \partial \bar{\partial} u + \partial_{\Delta} \exp \partial_{\Delta} u = 0 \\ & \left( \begin{array}{l} \Delta \text{ 積分} \\ \downarrow \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} v = \partial_{\Delta} u \\ & \longrightarrow \partial \bar{\partial} v + \partial_{\Delta}^2 \exp v = 0 \end{aligned}$$

(積分定数は、 $v, u, F$  の再定義で吸収される)

これは Liouville の方程式に近い。変分原理から導出できる方程式である。

2 自己双対重カビの関係

①  $(p, \hat{p}, q, \hat{q})$  独立変数とする。

$$\Omega = \Omega(p, \hat{p}, q, \hat{q}) \quad \text{ポテンシャル (Kähler potential)}$$

に対する 自己双対 Einstein equation ( $\Lambda = 0$  のもの) は、次の方程式に帰着する。

$$\underline{\partial_p \partial_{\hat{p}} \Omega \partial_q \partial_{\hat{q}} \Omega - \partial_p \partial_{\hat{q}} \Omega \cdot \partial_q \partial_{\hat{p}} \Omega = 1}$$

(Ricci flat Kähler geometry の local 表現)

②  $S^1$ -symmetry

今  $\Omega = \omega(p\hat{p}, q, \hat{q})$  といふ 要請 をおくと,  $n \stackrel{dt}{=} p\hat{p}$  といふ

$$\left. \begin{aligned} \partial_p \partial_{\hat{p}} \Omega &= \partial_n \omega + n \partial_n^2 \omega = \partial_n (n \partial_n \omega) \\ \partial_p \partial_{\hat{q}} \Omega &= \hat{p} \partial_{\hat{q}} \partial_n \omega, \quad \partial_q \partial_{\hat{p}} \Omega = p \partial_q \partial_n \omega \end{aligned} \right\} \text{ 以上}$$

自己対 Einstein eq は

$$\partial_n (n \partial_n \omega) \cdot \partial_q \partial_{\hat{q}} \omega - n \partial_q \partial_n \omega \cdot \partial_{\hat{q}} \partial_n \omega = 1 \quad \text{--- (1) とおす}$$

③  $A \stackrel{dt}{=} n \partial_n \omega, \quad Q \stackrel{dt}{=} \partial_q \omega, \quad \hat{Q} \stackrel{dt}{=} \partial_{\hat{q}} \omega$  とおけば

$$d\omega = A d(\log n) + Q dq + \hat{Q} d\hat{q} \quad \text{であり,}$$

$$(1) \iff \partial_n A \cdot \partial_q \hat{Q} - \partial_q A \cdot \partial_n \hat{Q} = 1 \quad \text{--- (2)}$$

$$\iff \partial_n A \cdot \partial_{\hat{q}} Q - \partial_{\hat{q}} A \cdot \partial_n Q = 1 \quad \text{--- (3)}$$

これより

$$ds \wedge d\hat{Q} \wedge d\hat{q} = \frac{\partial(A, \hat{Q})}{\partial(n, \hat{q})} dr \wedge dq \wedge d\hat{q} \stackrel{(2)}{=} dr \wedge dq \wedge d\hat{q} \quad \text{--- (2)}$$

$$ds \wedge dQ \wedge dq = \frac{\partial(A, Q)}{\partial(n, \hat{q})} dr \wedge d\hat{q} \wedge dq \stackrel{(3)}{=} dr \wedge d\hat{q} \wedge dq \quad \text{--- (3)}$$

④ 独立変数を  $(n, q, \hat{q})$  から  $(A, q, \hat{q})$  にとりかえる (Legendre 変換)

•  $v \stackrel{dt}{=} \log n$  とおけば

$$d\omega = A dv + Q dq + \hat{Q} d\hat{q}$$

• 更に  $u \stackrel{dt}{=} Av - \omega$  (基本的な Legendre 変換) とおくと

$$du = v ds + A dv - d\omega = v ds - Q dq - \hat{Q} d\hat{q}$$

$$\begin{cases} v = \partial_\Lambda U(\Lambda, q, \hat{q}) & \text{--- (4)} \\ Q = -\partial_q U(\Lambda, q, \hat{q}) & \text{--- (5)} \\ \hat{Q} = -\partial_{\hat{q}} U(\Lambda, q, \hat{q}) & \text{--- (6)} \end{cases}$$

∴ (2) 式の左辺 =  $ds \wedge d\hat{Q} \wedge d\hat{q} = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial q} ds \wedge dq \wedge d\hat{q}$

右辺 =  $d(e^v) \wedge dq \wedge d\hat{q} = \frac{\partial(e^v)}{\partial \Lambda} ds \wedge dq \wedge d\hat{q}$

ゆえ  $\frac{\partial \hat{Q}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial \Lambda}(e^v)$  (4), (6) より  $-\frac{\partial^2 U}{\partial q \partial \hat{q}} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} \exp \frac{\partial U}{\partial \Lambda}$

↑  
1節の eq と同じ

• 同様に (3) 式の左辺, 右辺と (4), (5) が与えられた同じ方程式が出る。

このようにして, 1つは戸田場の scaling limit より, 1つは  $S^1$  対称性をもつ自己双対 Einstein 方程式 より 出た. 同一の方程式を扱う.

### 3. 零曲率方程式

• 方程式を零曲率の形で与えよう

①  $(p, \Lambda)$  独立変数. (二つの  $p$  は 2節の  $p$  とは違ふ.)  $\theta = \log p$  として

$(\theta, \Lambda)$  についての Poisson bracket を考える. 7 節  $f, g$  に対して

$$\{f, g\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial \Lambda} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda} \frac{\partial g}{\partial \theta} = p \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial \Lambda} - p \frac{\partial f}{\partial \Lambda} \frac{\partial g}{\partial p}$$

ここで  $\{\theta, \Lambda\} = 1$  である.

$d\theta \wedge d\Lambda = \frac{dp}{p} \wedge d\Lambda$  が symplectic form である.

②  $\mathbb{B}, \overline{\mathbb{B}}$  を

$$\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} p + h(\Lambda) \quad \overline{\mathbb{B}} \stackrel{\text{def}}{=} a(\Lambda) p^{-1}, \quad h(\Lambda) = \partial_s U(\Lambda) \quad a(\Lambda) = \exp \partial_\Lambda U(\Lambda)$$

で定義する.

$$U = U(\Lambda, z, \bar{z})$$

このとき、

$$\partial \bar{\partial} u + \partial_{\Delta} \exp \partial_{\Delta} u = 0 \iff \begin{cases} \bar{\partial} b + \partial_{\Delta} a = 0 \\ \partial a = a \partial_{\Delta} b \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{戸田では } \Delta \text{ に対する} \\ \text{shift だったものが} \\ \Delta \text{ 微分 に化した。} \end{array}$$

$\iff$

$$\underline{\bar{\partial} B - \partial \bar{B} + \{B, \bar{B}\} = 0}$$

(この中、 $p^0, p^1$  の係数が上の eq. に付く)

最後の方程式は零曲率の形をしている。

( $[, ]$  のかわりに Poisson bracket が付いた。)

しかし、今の場合  $W, \bar{W}$  に対するものが付いて、戸田場の手法をそのまま使うわけにはいかない。

以下紹介するのは [19] Takasaki-Takebe の方法である。基本的な考え方は自己双対重力に対する方法 [21] Takasaki と同様である。

#### 4. 閉2次形式 $\omega$ と Darboux 座標

• 2 form  $\omega$  を  $\omega = d \log p \wedge ds + d B \wedge dz + d \bar{B} \wedge d \bar{z}$  で定義する。  
 $d\omega = 0$  であり 更に

$$\text{零曲率方程式} \iff \omega \wedge \omega = 0$$

• この  $\omega$  に対する Darboux 座標をしよう。

① Darboux の定理 (例えば、岩波基礎数学「階偏微分方程式」定理 1.6 参照)

に於て  $\exists P, Q \quad \omega = \frac{dP}{P} \wedge dQ \quad (\text{local に})$

( $\omega = dH \wedge dQ$  付く  $H, Q \in \mathbb{C}, \mathbb{R} \quad H = \log P$  とおく)

②  $\omega = \frac{dP}{P} \wedge dQ$  であることは同値。

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \mathcal{P} = \{B, \mathcal{P}\}, \quad \partial Q = \{B, Q\} \\ \bar{\partial} \mathcal{P} = \{\bar{B}, \mathcal{P}\}, \quad \bar{\partial} Q = \{\bar{B}, Q\} \end{array} \right.$$

(Lax eq. の類似)

[証明]

$$\omega = d\theta \wedge ds + dB \wedge dz + d\bar{B} \wedge d\bar{z} \quad (\theta = \log P)$$

||  
 $d \log P \wedge dQ$  とすると 二の両辺の

•  $d\theta \wedge ds$  の係数を比較し  $\frac{\partial(\log P, Q)}{\partial(\theta, A)} = 1$  -①

•  $d\theta \wedge dz$  の係数を比較し

$$\frac{\partial(\log P, Q)}{\partial(\theta, z)} = \frac{\partial B}{\partial \theta} \quad \text{--- ②}$$

•  $ds \wedge dz$  " " " " " "

$$\frac{\partial(\log P, Q)}{\partial(A, z)} = \frac{\partial B}{\partial A} \quad \text{--- ③}$$

• 以下同様に

$$\frac{\partial(\log P, Q)}{\partial(\theta, \bar{z})} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial \theta} \quad \text{--- ④} \quad (ds \wedge d\bar{z}), \quad \frac{\partial(\log P, Q)}{\partial(A, \bar{z})} = \frac{\partial \bar{B}}{\partial A} \quad \text{--- ⑤} \quad (ds \wedge d\bar{z})$$

①②④⑤をまとめて行列表示すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B}{\partial \theta} & \frac{\partial \bar{B}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial B}{\partial A} & \frac{\partial \bar{B}}{\partial A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q}{\partial \theta} & \frac{\partial \log P}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial Q}{\partial A} & \frac{\partial \log P}{\partial A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \log P}{\partial z} & \frac{\partial \log P}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

①よりこの行列式 = 1 であることを注意して、この行列に7112 等式を解けばよい。

### 5. 特別な Darboux 座標対

Darboux 座標が Lorent 展開出来るという仮定のもとで  
次のような 2つの Darboux 座標を選ぶことが可能である。

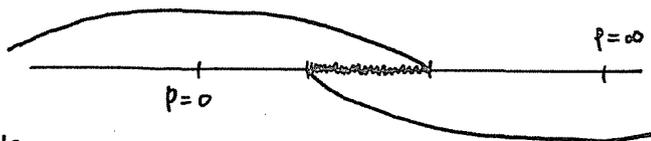
$$p = \infty \text{ のまわりで } \begin{cases} \mathcal{L} = p + \sum_{n=-\infty}^0 u_n p^n \\ \mathcal{M} = \varepsilon \mathcal{L} + \Lambda + \sum_{n=-\infty}^{-1} v_n \mathcal{L}^n \end{cases}$$

$$p = 0 \text{ のまわりで } \begin{cases} \bar{\mathcal{L}} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n p^n \\ \bar{\mathcal{M}} = -\bar{\varepsilon} \bar{\mathcal{L}}^{-1} + \Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{\mathcal{L}}^n \end{cases}$$

この  $\bar{\mathcal{L}}$  は前節までの記号でいえば、 $\mathcal{L}^{-1}$  に相等する。(向きがかり)上とのまわりに対応した。  
おれはする。) )

(特に、この係数たちは、 $u$  に対する微分方程式を順に解くことで得られる。  
たとえば、 $u_0 = \partial u$  ,  $\bar{v}_1 = \bar{u}_2 u_1^2$  etc )

ここで仮定 "上記の2つの収束半径は重なる" をおく。(実際、 $(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = (0, 0)$  の近く  
で考える限り、このように  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}}$  が選べる。一般に局所的考察においては同様のことが  
いえる)



このとき、重なる部分で、

$$d \log \mathcal{L} \wedge d \mathcal{M} = \omega = d \log \bar{\mathcal{L}} \wedge d \bar{\mathcal{M}} \quad \text{ゆえ}$$

$$\exists \begin{cases} f = f(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \\ g = g(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \end{cases} \text{ symplectic diffeo, such that } (*) \left. \begin{array}{l} \bar{\mathcal{L}} = f(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \\ \bar{\mathcal{M}} = g(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \end{array} \right\}$$

$$\text{特に } \frac{\partial(\log f, g)}{\partial(\log \mathcal{L}, \mathcal{M})} = 1 \quad (\text{= a symplectic diffeo が Gauss 分解にあたる。})$$

そこで、逆構成  $(f, g) \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{M}) (\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}})$  が実行できれば"零曲率方程式の解が"  
得られることになる。これは、もともとの戸田場や戸田ヒエラルキーの場合と違って一般には、

具体的に行うことが難しいが、抽象的存在定理はつくれる。例えば、 $(f, g)$  が symplectic diffeomorphism 恒等変換に近ければ、(\*) をみたす  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}}$  の存在は保証されている。幾何学的には、これは twistor construction の一種である。

### 6. hierarchy の構成

• 戸田場のとおり同様に hierarchy を構成しよう。

$(z, \bar{z}) = (z_1, z_2, \dots, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots)$  独立変数。

$$\begin{cases} \mathcal{L}, \mathcal{M} \\ \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}} \end{cases} = z^n \quad \begin{aligned} \mathcal{M} &= \sum_{n=1}^{\infty} n z_n \mathcal{L}^n + \Delta + \sum_{n=-1}^{\infty} v_n \mathcal{L}^n \\ \bar{\mathcal{M}} &= - \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{z}_n \bar{\mathcal{L}}^{-n} + \Delta + \sum_{n=-1}^{\infty} \bar{v}_n \bar{\mathcal{L}}^n \end{aligned}$$

Lax 方程式系 (8 type の方程式系)

$$\left\{ \begin{aligned} \cdot \partial_m \mathcal{L} &= \{ B_m, \mathcal{L} \} \\ \cdot \partial_n \mathcal{M} &= \{ B_m, \mathcal{M} \} \\ \cdot \{ \mathcal{L}, \mathcal{M} \} &= \mathcal{L}, \quad \{ \bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{M}} \} = \bar{\mathcal{L}} \text{ etc} \end{aligned} \right. \quad \text{etc} \quad \text{= 此らが hierarchy を構成する。}$$

今  $\omega = d \log p ds + \sum d B_m \wedge dz_m + \sum d \bar{B}_m \wedge d \bar{z}_m$  とおくと

上の方程式系は

$$\underline{\omega = d \log \mathcal{L} \wedge d \mathcal{M} = d \log \bar{\mathcal{L}} \wedge \bar{\mathcal{M}}} \quad \text{と等値である。}$$

• 更にこれは零曲率方程式系の形では、

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_m B_m - \partial_m \bar{B}_m + \{ B_m, \bar{B}_m \} &= 0 \\ \bar{\partial}_m \bar{B}_m - \bar{\partial}_m B_m + \{ \bar{B}_m, B_m \} &= 0 \\ \bar{\partial}_m B_m - \partial_m \bar{B}_m + \{ B_m, \bar{B}_m \} &= 0 \end{aligned} \right.$$

と書ける。(これは  $\omega \wedge \omega = 0$  と等値である。)

自由エネルギー

次の方程式に対して自由エネルギー  $F(A, \psi, \bar{\psi})$  を定義する。

$$dF = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{-m} dZ_m - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\psi}_m d\bar{Z}_m + u ds$$

実際左辺の 1 form は閉微分形式に於けるので、少なくとも局所的には  $F$  が存在する。

- この設定で、前と同様に  $(f, g)$  という data を  $v$  を出し一種の twistor construction を行うことができる。

7. 戸田 hierarchy との関係

- 戸田場の方程式に対して scaling 極限を考えたように、戸田 hierarchy に対しても scaling 極限をつくることができる。

これが 6 節で示した hierarchy に他何ら相違を示さず。

(以下の議論は [16] Kodama の方法を発展させたものである。)

- ① もとの戸田 hierarchy には  $t$  が  $\lambda$  について、以下のように入っている。  
まず、 $L$  と  $\bar{L}$  はそれぞれ

$$L = e^{t\partial_A} + \sum_{n \leq 0} u_n(t, \lambda) e^{-n t \partial_A}$$

$$\bar{L} = \sum_{m \geq 1} \bar{u}_m(t, \lambda) e^{m t \partial_A}$$

という形をとる。(ここで  $\bar{L}$  は前節までの  $\bar{L}^{-1}$  に相等する。)

Lax 方程式は

$$t \partial_m L = [B_m, L], \quad t \partial_m \bar{L} = [\bar{B}_m, \bar{L}],$$

$$t \partial_m \bar{L} = [B_m, \bar{L}], \quad t \partial_m L = [\bar{B}_m, L],$$

$$B_m = (L^m)_{\geq 0}, \quad \bar{B}_m = (\bar{L}^{-m})_{\leq -1}$$

と与えられる。要するに量子力学の処法を真似して

$$\partial_A \rightarrow t \partial_A, \quad \partial_m \rightarrow t \partial_m, \quad \bar{\partial}_m \rightarrow t \bar{\partial}_m$$

とおきかえたのである。(但し量子力学では  $\hbar$  が掛かる。)

さらに、係数  $u_m, \bar{u}_m$  に対して

$$\begin{cases} u_m(\hbar, \lambda) = u_m^{(0)}(\lambda) + O(\hbar), \\ \bar{u}_m(\hbar, \lambda) = \bar{u}_m^{(0)}(\lambda) + O(\hbar), \end{cases} \quad \hbar \rightarrow 0$$

というふるまいを仮定する。このとき、

$$\begin{cases} \mathcal{L} = p + \sum_{m \leq 0} u_m^{(0)}(\lambda) p^m \\ \bar{\mathcal{L}} = \sum_{m \geq 1} \bar{u}_m^{(0)}(\lambda) p^m \end{cases}$$

とおくと、これは前節の形式的 Lax 方程式を対するのである。

実際、差分作用素の交換子を  $\hbar$  展開で考えると、ちょうど微分作用素や擬微分作用素と同じように、主導項は Poisson-bracket と対応する。

ただし微分の場合と違って、基本的な交換子は、

$$[e^{\hbar \partial_\lambda}, \lambda] = \hbar e^{\hbar \partial_\lambda} \longrightarrow \{p, \lambda\} = p$$

というように対応する。これは戸田場の場合も含めて、Poisson bracket の起源が明らかに付いた。scaling 極限の parameter を  $\hbar$  と書いて至極理由も、これで了解されるだろう。

②  $\mathcal{M}, \bar{\mathcal{M}}$  の由来を見るために、 $W, \bar{W}$  を考へる。  $\hbar$  が  $\lambda$  について  $W$  と  $\bar{W}$  も

$$W = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\hbar, \lambda) e^{-m \hbar \partial_\lambda}$$

$$\bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\hbar, \lambda) e^{n \hbar \partial_\lambda}$$

という形に構成される。  $L, \bar{L}$  はこれらを用いて、

$$L = W e^{\hbar \partial_\lambda} W^{-1}, \quad \bar{L} = \bar{W} e^{\hbar \partial_\lambda} \bar{W}^{-1}$$

と書ける。さらに  $W, \bar{W}$  を適当に  $\hbar$  に対応すると、Lax 方程式系は、

$$\hbar \partial_m W = B_m W - W e^{m\hbar \partial_A}$$

$$\hbar \partial_m \bar{W} = B_m \bar{W}$$

$$\hbar \bar{\partial}_m W = \bar{B}_m W$$

$$\hbar \bar{\partial}_m \bar{W} = \bar{B}_m \bar{W} - \bar{W} e^{-m\hbar \partial_A}$$

という方程式に変換される。これを新しい差分作用素  $M, \bar{M}$  を

$$M = W \left( \sum_{n=1}^{\infty} m z_n e^{n\hbar \partial_A} + A \right) W^{-1}$$

$$\bar{M} = \bar{W} \left( -\sum_{n=1}^{\infty} m \bar{z}_n e^{-n\hbar \partial_A} + A \right) \bar{W}^{-1}$$

と定義すると、 $M, \bar{M}$  は  $L, \bar{L}$  と同じ形の Lax 方程式

$$\hbar \partial_m M = [B_m, M], \quad \hbar \bar{\partial}_m M = [\bar{B}_m, M]$$

$$\hbar \partial_m \bar{M} = [B_m, \bar{M}], \quad \hbar \bar{\partial}_m \bar{M} = [\bar{B}_m, \bar{M}]$$

が互いに正準交換関係

$$[L, M] = \hbar L, \quad [\bar{L}, \bar{M}] = \hbar \bar{L}$$

を満たすことがわかる。よって  $M, \bar{M}$  の展開

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} m z_n L^n + A + \sum_{n \leq -1} v_n(\hbar, A) e^{n\hbar \partial_A},$$

$$\bar{M} = -\sum_{n=1}^{\infty} m \bar{z}_n \bar{L}^{-n} + A + \sum_{n \geq 1} \bar{v}_n(\hbar, A) e^{n\hbar \partial_A},$$

の係数  $v_n, \bar{v}_n$  はそれぞれ、 $u_n, \bar{u}_n$  と同様の漸近的ふるまい、

$$v_n(\hbar, A) = v_n^{(0)}(A) + O(\hbar)$$

$$\bar{v}_n(\hbar, A) = \bar{v}_n^{(0)}(A) + O(\hbar), \quad \hbar \rightarrow 0$$

を仮定すれば (実際は、 $W, \bar{W}$  をうまく選ぶことで、これは満たされる)

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} m z_n L^n + A + \sum_{n \leq -1} v_n^{(0)}(A) L^n$$

$$\bar{M} = -\sum_{n=1}^{\infty} m \bar{z}_n \bar{L}^{-n} + A + \sum_{n \geq 1} \bar{v}_n^{(0)}(A) \bar{L}^n$$

により定義される Laurent 級数は前節の hierarchy が要求する級数の方程式を満たす。

③ 量子力学との類似は、さらに深いレベルにまで及ぶ。それを見るために、新たな変数  $\lambda$  を用意し、

$$\Psi = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\hbar, \lambda) \lambda^{-n}\right) \exp\left[\hbar^{-1}(\lambda \log \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \lambda^n)\right]$$

$$\bar{\Psi} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(\hbar, \lambda) \lambda^n\right) \exp\left[\hbar^{-1}(\lambda \log \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \lambda^{-n})\right]$$

というものを考える。このとき、 $W, \bar{W}$  と  $L, \bar{L}, M, \bar{M}$  を結び関係は、

$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad M\Psi = \hbar\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda},$$

$$\bar{L}\bar{\Psi} = \lambda\bar{\Psi}, \quad \bar{M}\bar{\Psi} = \hbar\lambda \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \lambda},$$

というように書きなおされる。さらに  $W, \bar{W}$  の発展方程式は、

$$\hbar \partial_m \Psi = B_m \Psi, \quad \hbar \partial_{\bar{m}} \Psi = \bar{B}_m \Psi,$$

$$\hbar \partial_n \bar{\Psi} = B_n \bar{\Psi}, \quad \hbar \partial_{\bar{n}} \bar{\Psi} = \bar{B}_n \bar{\Psi}$$

というように書き直される。これは(±の加減はこれのどけい) 量子力学の Schrödinger 方程式にそっくりである。特に  $\Psi, \bar{\Psi}$  は WKB 形

$$\Psi = \exp\left[\hbar^{-1} S(\lambda, z, \bar{z}, \lambda) + O(\hbar^0)\right],$$

$$\bar{\Psi} = \exp\left[\hbar^{-1} \bar{S}(\lambda, z, \bar{z}, \lambda) + O(\hbar^0)\right], \quad \hbar \rightarrow 0$$

を考へ。ここで  $S, \bar{S}$  は

$$S(\lambda, z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \lambda^n + \lambda \log \lambda + \sum_{n \leq -1} S_n(\lambda, z, \bar{z}) \lambda^n$$

$$\bar{S}(\lambda, z, \bar{z}, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \lambda^{-n} + \lambda \log \lambda + \sum_{n \geq 1} \bar{S}_n(\lambda, z, \bar{z}) \lambda^n,$$

という形をしている。

$S, \bar{S}$  は「Hamilton-Jacobi 方程式」として

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda} = M(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} M Z_n \lambda^n + A + \sum_{n \leq -1} V_n^{(0)}(\lambda) \lambda^n$$

$$\lambda \frac{\partial \bar{S}}{\partial \lambda} = \bar{M}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{n=1}^{\infty} M \bar{Z}_n \lambda^{-n} + A + \sum_{n \geq 1} \bar{V}_n^{(0)}(\lambda) \lambda^n$$

$$\partial_n S = \mathcal{B}_n(\exp \frac{\partial S}{\partial A}), \quad \bar{\partial}_n S = \bar{\mathcal{B}}_n(\exp \frac{\partial S}{\partial A})$$

$$\partial_n \bar{S} = \mathcal{B}_n(\exp \frac{\partial \bar{S}}{\partial A}), \quad \bar{\partial}_n \bar{S} = \bar{\mathcal{B}}_n(\exp \frac{\partial \bar{S}}{\partial A})$$

この方程式系を満たす。即ち  $\mathcal{B}_n, \bar{\mathcal{B}}_n$  は  $B_n, \bar{B}_n$  から

$$B_n = e^{n\hbar \partial A} + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i}(\hbar, A) e^{i\hbar \partial A} \longrightarrow \mathcal{B}_n(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i}^{(0)}(A) p^i$$

$$\bar{B}_n = \sum_{i=-n}^{-1} \bar{b}_{n,i}(\hbar, A) e^{i\hbar \partial A} \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}_n(p) = \sum_{i=-n}^{-1} \bar{b}_{n,i}^{(0)}(A) p^i$$

$$b_{n,i}(\hbar, A) = b_{n,i}^{(0)}(A) + O(\hbar), \quad \bar{b}_{n,i}(\hbar, A) = \bar{b}_{n,i}^{(0)}(A) + O(\hbar), \quad \hbar \rightarrow 0$$

というふうに得られる。

これらの方程式の意味を述べるために、次のような 1-form の方程式を考へておく。

$$dS = M(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial S}{\partial A} dA + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n(\exp \frac{\partial S}{\partial A}) dZ_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{B}}_n(\exp \frac{\partial S}{\partial A}) d\bar{Z}_n \quad \text{--- ①}$$

$$d\bar{S} = \bar{M}(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial A} dA + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n(\exp \frac{\partial \bar{S}}{\partial A}) dZ_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{B}}_n(\exp \frac{\partial \bar{S}}{\partial A}) d\bar{Z}_n \quad \text{--- ②}$$

①, ② は外微分方程式、2-form の方程式と見られるが、実はこれらは  $\mathcal{L}, M, \bar{\mathcal{L}}, \bar{M}$  に代わる 2-form の方程式 (前節) と同等である。 これを見るためには ② における  $\lambda$  を

① における  $\lambda$  と区別して  $\hat{\lambda}$  と書いて、Legendre 変換

$$\frac{\partial S(A, Z, \bar{Z}, \lambda)}{\partial A} = p, \quad \frac{\partial \bar{S}(A, Z, \bar{Z}, \hat{\lambda})}{\partial A} = p \quad (\lambda, \hat{\lambda} \text{ は互逆の関数})$$

(\*) 関数  $\lambda = \mathcal{L}(A, Z, \bar{Z}, p), \quad \hat{\lambda} = \bar{\mathcal{L}}(A, Z, \bar{Z}, p)$  を定義する。このとき、

$$M = M(\lambda) \Big|_{\lambda = \mathcal{L}(A, Z, \bar{Z}, p)}, \quad \bar{M} = \bar{M}(\hat{\lambda}) \Big|_{\hat{\lambda} = \bar{\mathcal{L}}(A, Z, \bar{Z}, p)}$$

とかけば、①, ② から得られる 2-form の方程式は前節の方程式に完全に一致するようになる。