第１回 関数空間セミナー 報告集

１９９２年１２月２４～１２月２６日

代表者　中路　貴彦

Series ♯ 26. March, 1993

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.
♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.
♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989
♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.
♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.
♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
♯ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.) 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
♯ 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
♯ 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28 ～ 10.2 北海道大学での集中講義　講義録, 52 pages. 1993.

第1回 関数空間セミナー 報告集

１９９２年１２月２４日～１２月２６日

代表者　中路　貴彦

目　次

Spectral Properties of Subhomogeneous Operators

Toshiko Oguiwara
Ochanomizu University

1 Introduction

The Perron-Frobenius theorem, concerning the properties of eigenvalues and eigenvectors of square matrices whose components are nonnegative, has been extended and applied in various ways. It was generalized to a positive linear operator on a Banach space by M. G. Kreĭn and M. A. Rutman [1], H. H. Schaefer [2], S. Karlin [3], F. Niiro and I. Sawashima [4]. In the interest of mathematical economics, nonlinear extensions have been obtained by H. Nikaido [7], M. Morishima [8], T. Fujimoto [9], Y. Oshime [10] [11] [12]. Many of them have been studied in an n-dimensional Euclidean space.

We have extended their results to a nonlinear mapping T on an infinite dimensional space, introducing the notion of indecomposability for a nonlinear mapping on an infinite dimensional space. We consider the eigenvalue problem of an order-preserving mapping on a positive cone(a closed convex cone with vertex at 0) of a strongly ordered Banach space E(an ordered Banach space with positive cone having nonempty interior).

We reported spectral properties of a class of positively homogeneous mappings at last seminar(at Hokkaido University on 1992.1).

In this paper, we deal with a more general class of subhomogeneous mappings. Applying the results of positively homogeneous mappings, along the argument of Y. Oshime for a finite dimensional space, we treat the eigenvalue problem of a subhomogeneous mapping T.

2 Notations and assumptions

Let E be an ordered Banach space, that is, a real Banach space provided with an order cone E_+ (a closed convex cone with vertex at 0 such that $E_+ \cap (-E_+) = \{0\}$). We assume that E_+ has nonempty interior (we call such a space a strongly ordered Banach space) and $\dim E \geq 2$. Let $(E_+)^i$ denote the interior of E_+ and $(E_+)^b$ the boundary of E_+. Note that $(E_+)^b \setminus \{0\}$ is not empty, which follows from $\dim E \geq 2$.

For $x, y \in E$ we write $x \gg y$ if $x - y \in (E_+)^i$, $x > y$ if $x - y \in E_+ \setminus \{0\}$, and $x \geq y$ if $x - y \in E_+$. For $x \in E$ we say x is strongly positive, positive, nonnegative if and only if $x \gg 0, x > 0, x \geq 0$, respectively.

We assume order-preserving norm on E, namely,

$$0 \leq x \leq y \quad \text{implies} \quad \|x\| \leq \|y\|.$$

For $e \gg 0$, e-norm can be defined on E as

$$\|x\|_e = \inf\{m \geq 0 \mid -me \leq x \leq me\},$$

because of closedness of E_+

$$\|x\|_e = \min\{m \geq 0 \mid -me \leq x \leq me\}.$$

Note that e-norm is well-defined and equivalent to the original norm.

Let T be a mapping from E_+ into itself. We consider the following assumptions:

A1:(compact) T is continuous and the image of a bounded set by T is relatively compact,

A2:(positively homogeneous)

$$T(\lambda x) = \lambda T x \qquad \text{for any} \quad \lambda > 0, x \geq 0,$$

A2′:(subhomogeneous)

$$T(\lambda x) \leq \lambda T x \qquad \text{for any} \quad \lambda > 1, x \geq 0,$$

A3:(order-preserving)

$$x \leq y \qquad \text{implies} \qquad Tx \leq Ty.$$

An order-preserving map T is also called monotone or isotone.

For $x \geq 0$, we denote

$$E_x = \{y \geq 0 \mid \exists \lambda > 0, y \leq \lambda x\}.$$

Note that $E_x = \{0\}$ if and only if $x = 0$, and $E_x = E_+$ if and only if $x \gg 0$.

A4:(indecomposable)

$$\{0\} \subsetneq E_{x-y} \subsetneq E_+ \qquad \text{implies} \qquad Tx - Ty \notin E_{x-y}.$$

This is an infinite dimensional extension of indecomposability defined by M. Morishima [8], where $E = R^n$, $E_+ = R^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_i \geq 0, 0 \leq i \leq n\}$. It is also a nonlinear extension of indecomposability found in M. A. Krasnosel'skiĭ [6] and order irreducibility for a linear operator introduced by H. Nikaido [7]. Furthermore, under the assumption A3, when T is a bounded linear operator, T is indecomposable if and only if T is irreducible [2], semi-non-support [5]. Strongly order-preserving mappings($x < y$ implies $Tx \ll Ty$) are indecomposable.

We denote

$$\begin{aligned} VP(T) &= \{\lambda \mid \lambda \text{ is an eigenvalue of } T\} \\ &= \{\lambda \mid Tx = \lambda x \text{ for } \exists x > 0\}, \end{aligned}$$

and for each $\rho > 0$,

$$B_\rho = \{x \geq 0 \mid \|x\| \leq \rho\},$$

$$S_\rho = \{x \geq 0 \mid \|x\| = \rho\},$$

$$\lambda_\rho(T) = \begin{cases} \sup\{\lambda \mid \lambda \in VP(T_{|S_\rho})\} & (VP(T_{|S_\rho}) \neq \emptyset), \\ -\infty & (VP(T_{|S_\rho}) = \emptyset), \end{cases}$$

where $T_{|S_\rho}$ means the restriction of T on S_ρ.

We denote the set of eigenvectors in S_ρ corresponding to $\lambda_\rho(T)$ by $X(\rho)$, that is,

$$X(\rho) = \begin{cases} \{x \in S_\rho \mid Tx = \lambda_\rho(T)x\} & (\lambda_\rho(T) > -\infty), \\ \emptyset & (\lambda_\rho(T) = -\infty). \end{cases}$$

Thus we define a set-valued mapping $X\colon (0, \infty) \twoheadrightarrow E_+$. Throughout this paper the symbol $\twoheadrightarrow$ is used to indicate the domain and the range of a multivalued mapping.

3 Spectral Properties of Positively Homogeneous mappings

In this section, we assume that $T: E_+ \to E_+$ satisfies A1, A2, A3. We denote

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid x \in B_1\}.$$

Lemma 3.1 $\|T\| < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ *exists and satisfies* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|$.

Denote $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, as in the case of linear operators. We have obtained the follwings.

Theorem 3.2 *Suppose that* $T: E_+ \to E_+$ *satisfies the assumptions* A1, A2, A3 *and* $r(T) > 0$. *Then* $r(T)$ *is a maximum eigenvalue of* T.

Theorem 3.3 *Let* T *satisfy the assumptions* A1, A2, A3 *and* A4. *Then* $r(T)$ *is a positive eigenvalue of* T *having strongly positive eigenvectors uniquely up to a multiplication by a positive constant. Moreover there is no other eigen value.*

4 Main Results

In this section, we assume that a mapping $T: E_+ \to E_+$ satisfies the condition A2$'$ generalizing A2 and consider the eigenvalue problem using the results in section 3.

For each positive number $\rho > 0$, let us define the mapping T_ρ from E_+ into itself as

$$T_\rho x = \begin{cases} \frac{\|x\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x\|} x) & (x > 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

First we note the relation between T and T_ρ.

Remark 4.1 *Let* T *satisfy the assumptions* A2$'$, A3 *and* $\rho > 0$ *be fixed, then* T_ρ *satisfies* A2, A3 *and*

$$\begin{cases} T_\rho x \leq Tx & \text{for } \|x\| < \rho, \\ T_\rho x = Tx & \text{for } \|x\| = \rho, \\ T_\rho x \geq Tx & \text{for } \|x\| > \rho. \end{cases} \tag{1}$$

Moreover, if T satisfies A1 *then T_ρ also satisfies* A1*, and if T satisfies* A4 *then so does T_ρ .*

Proof. See the proof of Y. Oshime [11] for the first half of the statements.

We only show the last two statements.

First we prove that T_ρ satisfies A1 when T satisfies A1 in addition to A2′, A3. Let $\{x_n\}$ be a sequence in E_+ which converges to $x_0 \in E_+$. Then, if $x_0 \neq 0$, $T_\rho x_n$ converges to $T_\rho x_0$ obviously. If $x_0 = 0$, $\|x_n\|$ converges to $\|x_0\| = 0$. In case $x_n \neq 0$,

$$T_\rho x_n = \frac{\|x_n\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x_n\|} x_n) \in \frac{\|x_n\|}{\rho} T(B_\rho).$$

Hence

$$\|T_\rho x_n\| \leq \frac{\|x_n\|}{\rho} \sup_{x \in TB_\rho} \|x\|.$$

This also is true if $x_n = 0$. Since $T(B_\rho)$ is bounded, $T_\rho x_n$ converges to $0 = T_\rho(x_0)$ as $x_n \to 0 = x_0$. Thus T_ρ is continuous. Next let K be a bounded subset of E_+. Then, for a sufficiently large $M > 0$ such that $K \subseteq B_M$,

$$T_\rho(K) \subseteq T_\rho(B_M) = co\{\{0\} \cup \frac{M}{\rho} T(S_\rho)\}.$$

Because $\frac{M}{\rho} T(S_\rho)$ is relatively compact, $co\{\{0\} \cup \frac{M}{\rho} T(S_\rho)\}$ is also, and hence so is $T_\rho(K)$. We have proved that T_ρ has the property A1.

Now we prove that T_ρ satisfies A4 if T satisfies A2′, A3, A4. Let $0 \leq x \leq y$ such that $\{0\} \subsetneq E_{y-x} \subsetneq E_+$. In case $x = 0$, we can see $y \neq 0$. Then

$$T_\rho y = \frac{\|y\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|y\|} y),$$

and by the indecomposability of T, $\{0\} \subsetneq E_{\frac{\rho}{\|y\|} y - 0} \subsetneq E_+$ implies

$$E_{\frac{\rho}{\|y\|} y - 0} \not\ni T(\frac{\rho}{\|y\|} y) - T0 \leq T(\frac{\rho}{\|y\|} y).$$

Hence

$$E_{\frac{\rho}{\|y\|} y} \not\ni T(\frac{\rho}{\|y\|} y) = \frac{\rho}{\|y\|} T_\rho y.$$

Then we obtain $E_y \not\ni T_\rho y$.

We prove the case $x \neq 0$. Since $\dfrac{\|y\|}{\|x\|} \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} T_\rho y - T_\rho x &= \frac{\|y\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|y\|} y) - \frac{\|x\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x\|} x) \\ &\geq \frac{\|x\|}{\rho} T(\frac{\|y\|}{\|x\|} \cdot \frac{\rho}{\|y\|} y) - \frac{\|x\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x\|} x) \\ &= \frac{\|x\|}{\rho} \{T(\frac{\rho}{\|x\|} y) - T(\frac{\rho}{\|x\|} x)\}. \end{aligned}$$

While $\{0\} \subsetneq E_{\frac{\rho}{\|x\|}y - \frac{\rho}{\|x\|}x} \subsetneq E_+$ implies

$$T(\frac{\rho}{\|x\|} y) - T(\frac{\rho}{\|x\|} x) \notin E_{\frac{\rho}{\|x\|}y - \frac{\rho}{\|x\|}x} = E_{y-x},$$

because of the assumption A4. Hence we obtain $T_\rho y - T_\rho x \notin E_{y-x}$. □

For two mappings $T, S \colon E_+ \to E_+$, we write $T \leq S$ if $Tx \leq Sx$ for all $x \geq 0$.

Lemma 4.2 *Let T satisfy* A2′, A3. *Then*

$$T_{\rho'} \leq T_\rho \leq \frac{\rho'}{\rho} T_{\rho'} \quad \textit{when} \quad 0 < \rho \leq \rho'.$$

Proof. When $x = 0$, since $T_\rho x = T_\rho 0 = 0$ for all $\rho > 0$ we have

$$T_{\rho'} x = T_\rho x = \frac{\rho'}{\rho} T_{\rho'} x = 0,$$

where $0 < \rho \leq \rho'$. Then we show the case $x > 0$. Let $0 < \rho \leq \rho'$, then

$$\begin{aligned} T_{\rho'} x &= \frac{\|x\|}{\rho'} T(\frac{\rho'}{\|x\|} x) = \frac{\|x\|}{\rho'} T(\frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\|x\|} x) \\ &\leq \frac{\|x\|}{\rho'} \cdot \frac{\rho'}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x\|} x) = T_\rho x, \end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
T_\rho x &= \frac{\|x\|}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x\|}x) \leq \frac{\|x\|}{\rho} T(\frac{\rho'}{\|x\|}x) \\
&= \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{\|x\|}{\rho'} T(\frac{\rho'}{\|x\|}x) = \frac{\rho'}{\rho} T_{\rho'} x.
\end{aligned}
$$

We obtain the desired inequality $T_{\rho'} \leq T_\rho \leq \frac{\rho'}{\rho} T_{\rho'}$. □

Lemma 4.3 *Let T satisfy the assumptions* A1, A2′, A3, *then the following statements are equivalent :*
(i) $VP(T)$ *is not empty,*
(ii) $VP(T_\rho)$ *is not empty for some* $\rho > 0$,
(iii) $VP(T_\rho)$ *is not empty for any* $\rho > 0$.

Proof. ((iii) $\Rightarrow$ (ii)). It is obvious.
((i) $\Rightarrow$ (ii)). Let λ be an eigenvalue of T with the eigenvector $x > 0$. Since by (1) $T_{\|x\|} = T$ on $S_{\|x\|}$, we have

$$\lambda x = Tx = T_{\|x\|} x.$$

This means that λ is an eigenvalue of $T_{\|x\|}$. Therefore we may choose $\rho = \|x\|$.
((ii) $\Rightarrow$ (i)). Let λ be an eigenvalue of T_ρ for some $\rho > 0$ and $x > 0$ be the corresponding eigenvector such that $\|x\| = \rho$. Then again by (1) we have

$$\lambda x = Tx = T_\rho x,$$

which shows that λ is an eigenvalue of T.
((ii) $\Rightarrow$ (iii)). Assume that $VP(T_\rho)$ is not empty for some $\rho > 0$. Since T_ρ satisfies A1, A2, A3 from Remark 4.1, applying Theorem 3.2 we have

$$r(T_\rho) = \lambda_0(T_\rho) \in VP(T_\rho).$$

First we prove the case $r(T_\rho) = 0$. Let x_ρ be the eigenvector corresponding to $r(T_\rho)$. Then, from Lemma 4.2,

$$
\begin{cases}
0 = T_\rho x_\rho \geq T_{\rho'} x_\rho & \text{when } \rho' \geq \rho, \\
0 = T_\rho x_\rho \geq \frac{\rho'}{\rho} T_{\rho'} x_\rho & \text{when } 0 < \rho' \leq \rho.
\end{cases}
$$

This means $T_{\rho'}x_\rho = 0 = 0{\cdot}x_\rho$ for all $\rho' > 0$, that is, $VP(T_{\rho'}) \ni 0$ for all $\rho' > 0$. In case $r(T_\rho) > 0$, since again from Lemma 4.2

$$\begin{cases} r(T_\rho) \le \frac{\rho'}{\rho} r(T_{\rho'}) & \text{when } \rho \le \rho', \\ r(T_\rho) \le r(T_{\rho'}) & \text{when } 0 < \rho' \le \rho, \end{cases}$$

we obtain

$$r(T_{\rho'}) > 0 \qquad (\forall \rho' > 0).$$

Consequently, applying Theorem 3.2, we can see that $VP(T_{\rho'})$ is not empty for all $\rho' > 0$. □

Theorem 4.4 *Let T satisfy the assumptions* A1, A2′, A3, *and have a positive eigenvalue. Then,*

(i) $\lambda_\rho(T)$ *is an eigenvalue of T and $0 < \lambda_\rho(T) = \lambda_0(T_\rho)$ for each $\rho > 0$,*

(ii) $\lambda_\rho(T)$ *is a continuous, nonincreasing function with respect to $\rho > 0$,*

(iii) *for each $\rho > 0$, $X(\rho)$ is nonempty and compact ; furthermore, $\rho \mapsto\!\!\!\rightarrow X(\rho)$ is upper semicontinuous.*

In particular, $\lim_{\rho\downarrow 0} \lambda_\rho(T) = \infty$ if $T0 > 0$.

Proof. The statement (i) is clear from Theorem 3.2, the proof of Lemma 4.3 and the fact that $T = T_\rho$ on S_ρ where T_ρ satisfies A1, A2, A3. Further, we can see

$$\lambda_\rho(T) = \lambda_0(T_\rho) = r(T_\rho).$$

On the other hand,

$$r(T_{\rho'}) \le r(T_\rho) \le \frac{\rho'}{\rho} r(T_{\rho'}) \quad (0 < \rho \le \rho'),$$

follows from Lemma 4.2. Combining these properties we can show the continuity and the fact that $\lambda_\rho(T)$ is nonincreasing with respect to $\rho > 0$.

Hereafter we prove the statement (ii). The statement (i) shows that $X(\rho)$ is not empty for any $\rho > 0$. Since

$$X(\rho) = \{x \ge 0 \mid Tx = \lambda_\rho(T)x\} \cap S_\rho,$$

$X(\rho)$ is bounded and closed. On the other hand, $\frac{T}{\lambda_\rho(T)} X(\rho) = X(\rho)$, which implies that $X(\rho)$ is a compact set because T is a compact mapping.

Let $\rho_n \to \rho_0 > 0 (n \to \infty)$ and $x_n \in X(\rho_n)$. Then, since $\{x_n\}$ is bounded, $\{Tx_n\}$ contains a converging subsequence, of which the limit we denote by x_0. The continuity of $\lambda_\rho(T)$ in ρ implies

$$x_{n_j} = \frac{Tx_{n_j}}{\lambda_{\rho_{n_j}}(T)} \to \frac{x_0}{\lambda_{\rho_0}(T)} \quad (n_j \to \infty).$$

Thus from this we have

$$\frac{Tx_0}{\lambda_{\rho_0}(T)} = x_0 = \lambda_{\rho_0} \cdot \frac{x_0}{\lambda_{\rho_0}(T)}.$$

This shows that as $n_j \to \infty$, $x_{n_j} \to \frac{x_0}{\lambda_{\rho_0}(T)} \in X(\rho)$. Hence we have proved that a compact-valued mapping $X(\rho)$ is upper semicontinuous in $\rho > 0$.

Let us turn to the last statement. Let $T0 > 0$. Then, for each $1 > \rho > 0$ and $x > 0$ such that $\|x\| = 1$, we have

$$T_\rho x = \frac{1}{\rho} T(\frac{\rho}{\|x\|} x) \geq \frac{1}{\rho} T0,$$

$$T_\rho^2 x \geq T_\rho(\frac{1}{\rho} T0) \geq \frac{\|T0\|}{\rho^2} T(\frac{\rho^2}{\|T0\|} T0) \geq \frac{\|T0\|}{\rho^2} T0,$$

$$\vdots$$

$$T_\rho^n x \geq T_\rho(\frac{\|T0\|^{n-2}}{\rho^{n-1}} T0) \geq \frac{\|T0\|^{n-1}}{\rho^n} T0.$$

Thus we have

$$r(T_\rho) = \lim_{n\to\infty} \|T_\rho^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B_1} \|T_\rho^n x\|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\|T0\|}{\rho}.$$

Consequently

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \lambda_0(T_\rho) = \lim_{\rho\downarrow 0} r(T_\rho) = \infty. \qquad \square$$

From Lemma 4.2, 4.3 we can see that under the assumptions A1, A2′, A3, if 0 is an eigenvalue of T and there is no other eigenvalue, $0 = \lambda_\rho(T) \in VP(T)$ and a closed set $X(\rho)$ satisfies $X(\rho) = \rho X(1)$ for any $\rho > 0$.

In case where T is indecomposable, more detailed properties can be shown.

Theorem 4.5 *Let T satisfy the assumptions* A1, A2′, A3, A4. *Then T has an eigenvalue and $VP(T) = \{\lambda_\rho(T) \mid \rho > 0\} \not\ni 0$. For each $\rho > 0$, $Tx = \lambda_\rho(T)x > 0$ if and only if $x > 0$ satisfies $\lambda_\rho(T) = \lambda_{\|x\|}(T)$, $x \in X(\|x\|)$. Further the following properties hold :*

(i) *$X(\rho)$ is a singleton for each $\rho > 0$,*

(ii) *$0 \ll X(\rho) \ll X(\rho')$ when $0 < \rho < \rho'$,*

(iii) *$\rho \mapsto X(\rho)$ is a continuous mapping from $(0, \infty)$ to E_+.*

Remark 4.6 *Under the assumptions of Theorem 4.5, if T satisfies the stronger condition :*

$$T(\lambda x) < \lambda T x \quad (\forall \lambda > 1, x \gg 0),$$

then $\lambda_\rho(T)$ is strictly decreasing with respect to $\rho > 0$.

Proof of Theorem 4.5. Since by Theorem 3.3, for each $\rho > 0$, T_ρ has a unique eigenvalue $\lambda_0(T_\rho) = \lambda_\rho(T) > 0$ with the strongly positive eigenvector which is unique up to multiplication by a positive constant, $X(\rho)$ is a singleton and $X(\rho) \gg 0$ for each $\rho > 0$.

Before proving the statement (ii) we show the following property (ii)′:

(ii)′ $0 \ll X(\rho) \leq X(\rho')$ *when* $0 < \rho \leq \rho'$.

Let $0 < \rho \leq \rho'$. Assume that the inequality $X(\rho) \leq X(\rho')$ is not true. Then

$$X(\rho) \leq MX(\rho'),$$

where $M = \|X(\rho)\|_{X(\rho')} > 1$. Since T satisfies A2′, A3,

$$\begin{aligned} \lambda_\rho(T)X(\rho) &= TX(\rho) \leq TMX(\rho') \\ &\leq MTX(\rho') = M\lambda_{\rho'}(T)X(\rho'). \end{aligned}$$

Hence

$$X(\rho) \leq M\frac{\lambda_{\rho'}(T)}{\lambda_\rho(T)} \cdot X(\rho').$$

By the definition of $X(\rho')$-norm it must be that

$$M \leq M \cdot \frac{\lambda_{\rho'}(T)}{\lambda_\rho(T)}.$$

Therefore we have

$$\lambda_\rho(T) \leq \lambda_{\rho'}(T).$$

On the other hand, from Theorem 4.4 $\lambda_\rho(T)$ is a nonincreasing function of $\rho > 0$, then we have

$$\lambda_\rho(T) = \lambda_{\rho'}(T).$$

If $X(\rho) \neq MX(\rho')$, $\{0\} \subsetneq E_{MX(\rho')-X(\rho)} \subsetneq E_+$ implies

$$\begin{aligned} E_{MX(\rho')-X(\rho)} \not\ni TMX(\rho') - TX(\rho) &\leq MTX(\rho') - TX(\rho) \\ &= \lambda_\rho(T)(MX(\rho') - X(\rho)), \end{aligned}$$

which is a contradiction. Then $X(\rho) = MX(\rho')$. But

$$\rho = \|X(\rho)\| = M\|X(\rho')\| = M\rho' \geq M\rho$$

implies $M \leq 1$, which contradicts that $M > 1$. We have proved the property (ii)$'$.

Now we prove the property (ii). Let $0 < \rho < \rho'$. $0 \ll X(\rho) < X(\rho')$ follows from the statement (ii)$'$ and the fact that $\rho = \|X(\rho)\| \neq \|X(\rho')\| = \rho'$. If the inequality $X(\rho) \ll X(\rho')$ is not true, then, by the indecomposability of T,

$$\begin{aligned} E_{X(\rho')-X(\rho)} &\not\ni TX(\rho') - TX(\rho) \\ &= \lambda_{\rho'}(T)X(\rho') - \lambda_\rho(T)X(\rho) \\ &\leq \lambda_\rho(T)(X(\rho') - X(\rho)). \end{aligned}$$

This is a contradiction. Hence $X(\rho) \ll X(\rho')$.

The continuity of $X(\rho)$ in ρ is clear from Theorem 4.4 (iii) and the fact that $X(\rho)$ is a singleton for each $\rho > 0$. □

Proof of Remark 4.6 Let $0 < \rho < \rho'$ be fixed. Assume $\lambda_\rho(T) = \lambda_{\rho'}(T) = \lambda$. $X(\rho) \ll X(\rho')$ follows from Theorem 4.5. This inequality means $\|X(\rho)\|_{X(\rho')} < 1$. In case $X(\rho) = \|X(\rho)\|_{X(\rho')}X(\rho')$, $TX(\rho) = T(\|X(\rho)\|_{X(\rho')}X(\rho'))$ implies

$$\lambda X(\rho) > \|X(\rho)\|_{X(\rho')} \cdot TX(\rho') = \lambda\|X(\rho)\|_{X(\rho')} \cdot X(\rho'),$$

which is a contradiction. In case $X(\rho) < \|X(\rho)\|_{X(\rho')} \cdot X(\rho')$,

$$\begin{aligned} E_{\|X(\rho)\|_{X(\rho')} \cdot X(\rho') - X(\rho)} &\not\ni T(\|X(\rho)\|_{X(\rho')} \cdot X(\rho')) - TX(\rho) \\ &> \|X(\rho)\|_{X(\rho)} TX(\rho') - TX(\rho) \\ &= \lambda(\|X(\rho)\|_{X(\rho')} \cdot X(\rho') - X(\rho)) \end{aligned}$$

also implies a contradiction. Hence, $\lambda_\rho(T) \neq \lambda_{\rho'}(T)$. Since $\lambda_\rho(T)$ is nonincreasing with respect to $\rho > 0$ from Theorem 4.5, we have proved that $\lambda_\rho(T) > \lambda_{\rho'}(T)$. □

References

[1] M. G. Kreĭn and M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. I **10**, (1962), 199–325.

[2] H. H. Schaefer, *Some spectral properties of positive linear operators*, Pacific J. Math. **10**, (1960), 1009–1019.

[3] S. Karlin, *Positive operators*, J. Math. Mech. **8**, (1959), 907–937.

[4] F. Niiro and I. Sawashima, *On the spectral properties of positive irreducible operators in an arbitrary Banach lattice and problem of H. H. Schaefer*, Sci. Pab. of College Gen. Educ. univ. Tokyo **16**, (1966), 145–183.

[5] I. Sawashima, *On spectral properties of some positive operators*, Natural Sci. Rep. of the Ochanomizu Univ. **15** (1965), 53–64.

[6] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Approximate solution of operator equations*, P. Noordhoff, Groningen, 1972.

[7] H. Nikaido, *Convex structures and economic theory*, Academic Press, N. Y., 1968.

[8] M. Morishima, *Equilibrium, stability and growth*, Clarendon Press, Oxford, (1964) (Appendix).

[9] T. Fujimoto, *A generalization of the Perron-Frobenius theorem to non-linear positive operators in a Banach space*, The Kagawa univ. eco. **59** No.3, (1986), 141–150.

[10] Y. Oshime, *Perron-Frobenius problem for weakly sublinear maps in a Euclidean positive orthant*, Japan J. Indust. Appl. Math., (1992), 313–350.

[11] Y. Oshime, *Non-linear Perron-Frobenius problem for weakly contractive transformations*, Math. Japonica **29**, (1984), 681–704.

[12] Y. Oshime, *An extension of Morishima's Nonlinear Perron-Frobenius theorem*, J. Math. Kyoto Univ. **23**, (1983), 803–830.

MATRIX YOUNG INEQUALITIES

T. Ando

Let p, $q > 0$ satisfy $1/p + 1/q = 1$. We prove that for any pair A, B of $n \times n$ complex matrices there is a unitary matrix U, depending on A, B, such that

$$U^*|AB^*|U \leq |A|^p/p + |B|^q/q.$$

1. The most important case of the Young inequalities (see [1] Chap. 2) says that if $1/p + 1/q = 1$ with p, $q > 0$ then

$$|ab| \leq |a|^p/p + |b|^q/q \quad \text{for} \quad a, b \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

In considering a matrix generalization of (1), order relation $\leq$ should be defined in accordance with positive semi-definiteness; $A \geq B$ for Hermitian A, B means that $A - B$ is positive semi-definite. In particular, $A \geq 0$ means positive semi-definiteness of A. Let us write $A > 0$ when A is positive definite. $|A|$ should be understood as the modulus $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

A direct matrix generalization of (1)

$$|AB| \leq |A|^p/p + |B|^q/q$$

does not hold in general. If A, $B \geq 0$ is a commuting pair, however, $AB \geq 0$ and via simultaneous diagonalization, it is proved that

$$AB \leq |A|^p/p + |B|^q/q.$$

Recently Bhatia-Kittaneh [2] established a matrix version of (1) for the special case $p = q = 1/2$ in the following form.

THEOREM (Bhatia and Kittaneh). *For any pair A, B of $n \times n$ complex matrices there is a unitary matrix U, depending on A, B, such that*

$$U^*|AB^*|U \leq |A|^2/2 + |B|^2/2. \qquad (2)$$

In the present paper we shall extend this result to the case of general p. The proof of Bhatia-Kittaneh is based on the special situation that $|A|^2 = A^*A$ and $|B|^2 = B^*B$ while our proof is based on pinching inequalities for the map $X \geq 0 \mapsto X^r$ with $r > 0$ (see Lemma 2).

2. THEOREM. *Let p, $q > 0$ be mutually conjugate exponents, that is, $1/p + 1/q = 1$. Then for any pair A, B of $n \times n$ complex matrices there is a unitary matrix U, depending on A, B, such that*

$$U^*|AB^*|U \leq |A|^p/p + |B|^q/q. \qquad (3)$$

Before going into proof, let us present some alternates of the assertion. Since each Hermitian matrix is unitarily similar to a diagonal matrix with its eigenvalues on the diagonal, the assertion is equivalent to the following system of inequalities for eigenvalues;

$$\lambda_i\big(|AB^*|\big) \leq \lambda_i\big(|A|^p/p + |B|^q/q\big) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (4)$$

where, for a Hermitian matrix X, $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \cdots \geq \lambda_n(X)$ are its eigenvalues, arranged in decreasing order.

If $A = V|A|$ and $B = W|B|$ are the polar representations of A and B respectively, with unitary V, W then

$$|AB^*| = W\big||A| \cdot |B|\big|W^*$$

and

$$\lambda_i\big(|AB^*|\big) = \lambda_i\big(\big||A| \cdot |B|\big|\big) \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Therefore, by replacing A and B by $|A|$ and $|B|$, respectively, it suffices to prove (4) only for A, $B \geq 0$.

3. Now let us enter a proof of (4) for A, $B \geq 0$. Fix k and let us prove

$$\lambda_k\big((BA^2B)^{1/2}\big) \leq \lambda_k\big(|A|^p/p + |B|^q/q\big). \qquad (5)$$

Since

$$\lambda_k\big((BA^2B)^{1/2}\big) = \lambda_k\big((AB^2A)^{1/2}\big),$$

by exchanging the roles of A and B if necessary, we may assume that $1 \le p \le 2$, hence $2 \le q < \infty$. Further by considering $B + \varepsilon I$ with $\varepsilon > 0$ and taking limit as $\varepsilon \to 0$, we may assume $B > 0$.

Write $\lambda = \lambda_k((BA^2B)^{1/2})$ and denote by P the orthoprojection (of rank k) to the spectral subspace, spanned by the eigenvectors corresponding to $\lambda_i((BA^2B)^{1/2})$ for $i = 1, 2, \cdots, k$. Denote by Q the orthoprojection (of rank k) to the subspace $\mathcal{M} = \mathrm{ran}(B^{-1}P)$. In view of the min-max characterization of eigenvalues of a Hermitian matrix (see [1] Chap. 2, §26) for inequality (5) it suffices to prove

$$\lambda Q \le QA^pQ/p + QB^qQ/q. \tag{6}$$

By definition of Q we have

$$B^{-1}P = QB^{-1}P \quad \text{and} \quad PBQ = BQ,$$

which implies

$$PB^{-1}Q = PB^{-1} \quad \text{and} \quad QBP = QB.$$

Now it follows from these identities that

$$\begin{aligned}(QB^2Q)\cdot(B^{-1}PB^{-1}) &= QB^2\cdot(QB^{-1}PB^{-1}Q)\\ &= QB^2\cdot B^{-1}PB^{-1}\\ &= QBPB^{-1} = Q,\end{aligned}$$

and similarly

$$(B^{-1}PB^{-1})\cdot(QB^2Q) = Q.$$

These together mean that $B^{-1}PB^{-1}$ and QB^2Q map $\mathcal{M}$ onto itself, vanish on its orthocomplement and are inverse to each other on $\mathcal{M}$.

4. For a proof of (6) we need some lemmas on the map $X \ge 0 \mapsto X^r$ with $r > 0$.

LEMMA 1. *Let $0 < r \le 1$. Then $0 \le X \le Y$ implies $X^r \le Y^r$.*

LEMMA 2. *Let Q be an orthoprojection. Then for $X \ge 0$*

$$QX^rQ \le (QXQ)^r \quad \text{if} \quad 0 < r \le 1,$$

and

$$QX^rQ \ge (QXQ)^r \quad \text{if} \quad 1 \le r \le 2.$$

See [3] and [4] for the proofs of these lemmas.

Let us return to the proof of (6). First by definition of P we have

$$(BA^2B)^{1/2} \geq \lambda P,$$

which implies, via commutativity of $(BA^2B)^{1/2}$ and P,

$$A^2 \geq \lambda^2 B^{-1}PB^{-1}.$$

Then by LEMMA 1 with $r = p/2$ we have

$$A^p \geq \lambda^p (B^{-1}PB^{-1})^{p/2},$$

hence

$$QA^pQ \geq \lambda^p (B^{-1}PB^{-1})^{p/2}.$$

Since $B^{-1}PB^{-1}$ is the inverse of QB^2Q on $\mathcal{M}$, this means that on $\mathcal{M}$

$$QA^pQ \geq \lambda^p (QB^2Q)^{-p/2}. \tag{7}$$

To prove (6), let us first consider the case $2 \leq q \leq 4$. Then by LEMMA 2 with $r = q/2$ we have

$$QB^qQ \geq (QB^2Q)^{q/2}. \tag{8}$$

Now it follows from (7) and (8) that on $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned} &QA^pQ/p + QB^qQ/q \\ &\qquad \geq \lambda^p (QB^2Q)^{-p/2}/p + (QB^2Q)^{q/2}/q. \end{aligned}$$

In view of the Young inequality for the commuting pair, $\lambda \cdot (QB^2Q)^{-1/2}$ and $(QB^2Q)^{1/2}$, this implies

$$\begin{aligned} &(QA^pQ)/p + (QB^qQ)/q \\ &\qquad \geq \lambda \cdot (QB^2Q)^{-1/2} \cdot (QB^2Q)^{1/2} = \lambda Q, \end{aligned}$$

proving (6).

Let us next consider the case $4 < q < \infty$. Let $s = q/2$. Then $0 < 2/s \leq 1$ and $q/s = 2$. By LEMMA 2 with $r = q/s$ we have

$$QB^qQ \geq (QB^sQ)^{q/s}. \tag{9}$$

On the other hand, by LEMMA 2 with $r = 2/s$ we have

$$(QB^sQ)^{2/s} \geq QB^2Q,$$

and then by LEMMA 1 with $r = p/2$

$$(QB^sQ)^{p/s} \geq (QB^2Q)^{p/2},$$

hence on $\mathcal{M}$

$$(QB^sQ)^{-p/s} \leq (QB^2Q)^{-p/2}. \tag{10}$$

Now it follows from (7), (10) and (9) that

$$\begin{aligned} &QA^pQ/p + QB^qQ/q \\ &\qquad \geq \lambda^p \cdot (QB^sQ)^{-p/s}/p + (QB^sQ)^{q/s}/q. \end{aligned}$$

In view of the Young inequality for the commuting pair $\lambda \cdot (QB^sQ)^{-1/s}$ and $(QB^sQ)^{1/s}$, this implies

$$\begin{aligned} &QA^pQ/p + QB^qQ/q \\ &\qquad \geq \lambda \cdot (QB^sQ)^{-1/s} \cdot (QB^sQ)^{1/s} = \lambda Q, \end{aligned}$$

proving (6). This completes the proof.

REFERENCES

1. E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1965.
2. R. Bhatia and F. Kittaneh, *On the singular values of a product of operators*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **11** (1990), 272–277.
3. Ch. Davis, *Notions generalizing convexity for functions defined on spaces of matrices*, in Convexity: Proc. Symp. Pure Math. , 1963, 187–201.
4. F. Hansen, *An operator inequality*, Math. Ann. , **246** (1980), 249–250.

Laboratory of Information Mathematics
Research Institute for Electronic Science
Hokkaido University
Sapporo 060, Japan

Functions with a unique mean value and amenability

Yuji Takahashi

Hokkaido University of Education, Hakodate

Let G be a locally compact group with a fixed left Haar measure λ and let $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ be the associated Lebesgue spaces. A subspace S of $L^\infty(G)$ is said to be <u>admissible</u> if it contains the constants and ${}_xf$ for each $f \in S$ and $x \in G$ (where ${}_xf$ is the left translate of f by x, ${}_xf(y) = f(xy)$ $(y \in G)$). If $f \in L^\infty(G)$, let S_f denote the smallest admissible subspace containing f. We say that $f \in L^\infty(G)$ has a <u>unique left invariant mean value</u> if $\mathrm{LIM}(S_f)$ is nonempty and there exists a constant c such that $m(f) = c$ for each $m \in \mathrm{LIM}(S_f)$. (For an admissible subspace S of $L^\infty(G)$, $\mathrm{LIM}(S)$ stands for the set of left invariant means on S, i.e., all $m \in S^*$ with $m \geq 0$, $m(1) = 1$, and $m({}_xf) = m(f)$ $(x \in G,\ f \in S)$.) The set of functions with a unique left invariant mean value is denoted by $U(G)$. Note that $U(G)$ is always closed under scalar multiplication. Recall that if G is amenable as a discrete group, then $U(G)$ coincides with the sum of the constants and the norm closed linear span of $\{f - {}_xf : f \in L^\infty(G),\ x \in G\}$ ([7]). In particular, $U(G)$ is closed under addition for such a G. Recently Miao [4] proved that if $U(G)$ is closed under addition, then G is amenable, thus answering a question raised by Rosenblatt and Yang in [7]. The following was posed as an open problem in [4] : Is $U(G)$ closed under addition if G is amenable ? The purpose of this talk is to give many examples which show that the answer to Miao's problem is negative.

Recall that a compact group G is said to have the <u>mean zero weak containment property</u> if there exists a net $\{g_\alpha\}$ in

$$L_0^2(G) = \{f \in L^2(G) : \textstyle\int_G f d\lambda = 0\}$$

such that $\|g_\alpha\|_2 = 1$ for all α and $\lim_\alpha \|{}_xg_\alpha - g_\alpha\|_2 = 0$ for all $x \in G$ ([6]). The negative answer to Miao's problem is a direct consequence of the following result.

Theorem. Let G be an infinite compact group and suppose that $U(G)$ is closed under addition. Then G has the mean zero weak containment property.

It is well known that if an infinite compact group G is amenable as a discrete group, then G has the mean zero weak containment property ([5]). Some examples of compact groups which do not have the mean zero weak containment property can be found in [1, 2, 3, 6, 8]. For example, $SO(n)$ (the special orthogonal group) does not have the mean zero weak containment property for $n \geq 3$. Therefore our Theorem implies that the set of functions on $SO(n)$ $(n \geq 3)$ with a unique left invariant mean value is not closed under addition. This resolves Miao's problem [4] negatively.

As a consequence of the Theorem we have the following. This gives a number of examples which show that the answer to Miao's problem is negative.

Proposition. Let G_1 be an infinite compact group that does not have the mean zero weak containment property and let G_2 be an amenable locally compact group. Then $G_1 \times G_2$ is an amenable locally compact group for which $U(G_1 \times G_2)$ is not closed under addition.

References

1. V.G. Drinfeld : Finitely additive measure on S^2 and S^3, invariant with respect to rotations, Functional Anal. Appl. 18(1984), 245-246.
2. A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak : Hecke operators and distributing points on the sphere I, Comm. Pure Appl. Math. 39(1987), 149-186.
3. G. Margulis : Some remarks on invariant means, Mh. Math. 90(1980), 233-235.
4. T. Miao : Amenability of locally compact groups and subspaces of $L^\infty(G)$, Proc. Amer. Math. Soc. 111(1991), 1075-1084.
5. J. Rosenblatt : Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 265(1981), 623-636.
6. J. Rosenblatt : Translation-invariant linear forms on $L^p(G)$, Proc. Amer. Math. Soc. 94(1985), 226-228.
7. J. Rosenblatt and Z. Yang : Functions with a unique mean value, Illinois J. Math. 34(1990), 744-764.
8. D. Sullivan : For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets, Bull. Amer. Math. Soc. 4(1981), 121-123.
9. Y. Takahashi : Functions with a unique mean value and amenability, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

Injection of shifts into contractions

高橋勝利　　北大理（教養）

ヒルベルト空間上の (有界線形) 作用素T_1, T_2 に対し, $XT_1 = T_2X$ となる 1 対 1 作用素 Xが存在することを$T_1 \overset{i}{\prec} T_2$で表わし, 作用素 Xがさらに稠密な値域をもつようにとれるとき, $T_1 \prec T_2$ と書く. Sを H^2上の片側シフト作用素 (i.e. $(Sh)(z) = zh(z)$, $h \in H^2$) とし, $1 \leq n \leq \infty$ に対して, $S_n = S \oplus S \oplus \cdots \oplus S$ (n 個の直和) とする. ここでは, ヒルベルト空間上の縮小作用素T と片側シフト作用素S_n の関係$S_n \overset{i}{\prec} T$ を考える. 以下, 縮小作用素T はユニタリー部分をもたないとする. ある $f(\neq 0) \in H^\infty$に対して, $f(T) = 0$ となる縮小作用素 Tのクラスは C_0で表わされる. 明かに, 縮小作用素T に対して, もし$XS = TX$ となる単射 Xが存在するならば, $T \notin C_0$ である. 逆に, $T \notin C_0$ ならば, $S(= S_1) \overset{i}{\prec} T$ であることが知られている. また, Apostol-Bercovici-Foias-Pearcy[3]([6]) は次の結果を証明した: もし$\sigma(T) \subset \mathbf{D} = \{z : |z| < 1\}$ で$T \notin C_0$ ならば, $S_\infty \prec T$ である.

縮小作用素Tに対して, $\kappa_T = \sup\{n : S_n \overset{i}{\prec} T\}$ とおく. 上で述べたことから, $T \in C_0 \Leftrightarrow \kappa_T = 0$ である. また, $\kappa_{S_n} = n$, さらに, $T \prec S_n$ となる縮小作用素Tに対して, $\kappa_T = n$ であることが知られている ([7],[8]). Alexander[1] は, 縮小作用素T に対して, $\sum_{j=1}^n f_j(T)x_j = 0$ となるH^∞ の関数$f_1, f_2, ..., f_n$ が$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0$ に限るとき, n 個のベクトル$x_1, x_2, ..., x_n$ はT-analytically independent であると定義し, 次の結果を与えた: $\kappa_T \geq n \Leftrightarrow$ T-analytically independent である n 個のベクトル$x_1, x_2, ..., x_n$ が存在する. この結果を使って, $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ のとき, $\kappa_T = \kappa_{T_1} + \kappa_{T_2}$ を示すことができる. 従って,

命題 1. 縮小作用素T が$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, $T_1 \in C_0$, $T_2 \prec S_n$, と三角化されるならば, $\kappa_T = n$ である.

我々は命題 1 の作用素以外に$\kappa_T < \infty$ となる縮小作用素T があるかどうか知らない.

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の縮小作用素Tに対して, $\mathcal{M}(T) = \{x \in \mathcal{H} : T^n x \to 0 \quad \text{strongly}\}$ はTの閉不変部分空間である. $\mathcal{M}(T) = \mathcal{H}$ となるとき, Tはクラス $C_{0\cdot}$の作用素, また$\mathcal{M}(T) = \{0\}$ であるとき, Tはクラス $C_{1\cdot}$の作用素であると言われる. 一般の縮小作用素Tは, $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ O & T_2 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H} = \mathcal{M}(T) \oplus \mathcal{M}(T)^\perp$, $T_1 \in C_{0\cdot}$, $T_2 \in C_{1\cdot}$ と三角化される. また, クラス $C_{\cdot 0}$, $C_{\cdot 1}$, $C_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1$) は$C_{\cdot 0} = (C_{0\cdot})^*$, $C_{\cdot 1} = (C_{1\cdot})^*$, $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\cdot} \cap C_{\cdot\beta}$で定義される. $C_0 \subset C_{00}$ である. また, $T \prec S_n$ なる縮小作用素 Tはクラス C_{10}であることに注意する. $T \in C_{\cdot 1}$ に対しても, $S_\infty \prec T$ であることが知られているから, もし$T \notin C_{\cdot 0}$ ならば, 縮小作用素 T^*に対する上で与えられた三角化より, $S_\infty \overset{i}{\prec} T$, 特に, $\kappa_T = \infty$ であることが分かる. 従って, $T \in C_{\cdot 0}$ としてよい. $T \in C_{\cdot 0}$ は, $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, $T_1 \in C_{00}$, $T_2 \in C_{10}$, と三角化される. このとき, 上の Alexander の結果より, $\kappa_T = \kappa_{T_1} + \kappa_{T_2}$ が成り立つ.

次の定理は, クラスC_{00} の縮小作用素に対して, 命題 1 の逆が成り立つことを示す.

定理 1. $T \in C_{00}$ かつ$T \notin C_0$ ならば, $\kappa_T = \infty$ である.

定理 1 はクラス $\mathbf{A}$ の縮小作用素の不変部分空間についての結果と次の補題 1, 2 より得られる. 任意の$f \in H^\infty$ に対して, $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$ であるとき, 縮小作用素T はクラス $\mathbf{A}$ の作用素であると

言われる．また，縮小作用素Tの不変部分空間$\mathcal{M}$に対して，(i) $(\lambda - T|\mathcal{M})^* k(\lambda) = 0$ $(\lambda \in \mathbf{D})$, (ii) $\bigvee_{\lambda\in\mathbf{D}} k(\lambda) = \mathcal{M}$ を満たす conjugate analytic function $k : \mathbf{D} \to \mathcal{M}$ が存在するとき，$\mathcal{M}$ は full analytic であると言う．Chevreau-Exner-Pearcy[4] は，full analytic invariant subspace をもつ縮小作用素を特徴付けた．いま，T が定理1の仮定を満たすとする．$T \in C_{0\cdot}$ であるから，もし$T \in \mathbf{A}$ ならば，T^* は full analytic invariant subspace を持つ ([4])．一方，$T \notin \mathbf{A}$ ならば，Apostol の結果 [2] によって$\sigma(T|\mathcal{M}) \not\supset \partial\mathbf{D}$ (そして $T|\mathcal{M} \notin C_0$) となる不変部分空間$\mathcal{M}$がとれる．従って，定理1は次の補題1, 2 より得られる．

補題 1. 縮小作用素Tの共役作用素T^*が full analytic invariant subspace を持つならば，$S_\infty \prec T$ である．

証明. $\mathcal{M}$をT^*の full analytic invariant subspace, $k(\lambda)$ を (i) $(\lambda - T^*|\mathcal{M})^* k(\lambda) = 0$, (ii) $\bigvee_{\lambda\in\mathbf{D}} k(\lambda) = \mathcal{M}$ を満たす conjugate analytic function とする．$k(\lambda)$ は conjugate analytic であるから，$0 < r < 1$ に対して，$X : \mathcal{M} \to H^2$ を $(Xx)(\lambda) = \langle x, k(r\lambda)\rangle$ によって定義できる．このとき，条件 (i), (ii) からXは injective で，$XT_2^* = rSX$ を満たすことが分かる．ここで，$T_2 = P_{\mathcal{M}}T|\mathcal{M}$ ($P_{\mathcal{M}}$ は$\mathcal{M}$への orthogonal projection) とする．従って，$r(S|(\mathrm{ran}\, X)^-)^* \prec T_2$．上で注意した [3](または [6]) の結果より，$S_\infty \prec T_2$ を得る．このとき，Sz.-Nagy-Foias の lifting thoerem を使って，$S_\infty \prec T$ を示すができる．

補題 2. $\sigma(T) \not\supset \partial\mathbf{D}$, $T \notin C_0$ ならば，$\kappa_T = \infty$.

証明. Mobius 変換$(T - \alpha I)(I - \overline{\alpha}T)^{-1}$を考えることにより，$\sigma(T)$ は0を含まない単連結領域に含まれるとしてよい．このとき，任意のnに対して，T はn-th root A を持つ．作用素Aは縮小作用素Bに similar であり，仮定$T \notin C_0$ より縮小作用素Bも$B \notin C_0$ であることが分かる．従って，$S \overset{i}{\prec} B$, そして，$S^n \overset{i}{\prec} B^n$ である．$T = A^n$ はB^nに similar であり，S^n は重複度nの片側シフトであるから，$S_n \overset{i}{\prec} T$ となる．

次にクラスC_{10}の縮小作用素を考える．

命題 2. $T \in C_{10}$ かつ $\kappa_T < \infty$ ならば，(i) $\sigma(T) = \overline{\mathbf{D}}$, (ii) $\sigma_e(T) = \partial\mathbf{D}$, (iii) $\dim\ker T^* \leq \kappa_T$.

$\Theta_T(z)$ を縮小作用素Tの特性関数とする．$\Theta_T(z)$ は$\mathcal{D} := (\mathrm{ran}(I - T^*T))^-$ から$\mathcal{D}_* := (\mathrm{ran}(I - TT^*))^-$ への縮小作用素を値にとる作用素値の H^∞-関数である．(i) $T \in C_{\cdot 0} \Leftrightarrow \Theta_T(z)$: isometric a.e. on $\partial\mathbf{D}$, (ii) $T \in C_{00} \Leftrightarrow \Theta_T(z)$: unitary a.e. on $\partial\mathbf{D}$ が成り立つ．$\Delta_{*,T}(z) = (I - \Theta_T(z)\Theta_T(z)^*)^{1/2}$ $(z \in \partial\mathbf{D})$, $R_T = M_z|(\Delta_{*,T}L^2(\mathcal{D}_*))^-$ とする．ここで，$L^2(\mathcal{D}_*)$ は$\mathcal{D}_*$に値をとるベクトル値L^2空間，M_z は座標関数zによる$L^2(\mathcal{D}_*)$上の multiplication operator とする．ユニタリー作用素R_TはTの minimal coisometric extension のユニタリー部分にユニタリー同値であり，T(のユニタリー拡大) の*-residual part と呼ばれる．Kerchy[5] は，$\sup\{\mathrm{rank}\,\Delta_{*,T}(z) : z \in \partial\mathbf{D}\} \geq n$ $(n < \infty)$, i.e. R_T の multiplicity がn以上ならば，$S_n \overset{i}{\prec} T$ であることを示した．$\Gamma_T = \{z : \Delta_{*,T}(z) \neq 0\}$ とおく．

補題 3.([5]) 縮小作用素Tに対して，$\Gamma_{T|\mathcal{M}} = \Gamma_T$ となる巡回不変部分空間$\mathcal{M}$が存在する．

命題 3. $T = T_1 \oplus T_2$, $T_i \in C_{10}$ とする．もし，$\Gamma_{T_1} \cap \Gamma_{T_2}$ がルベーグ測度0ならば，$\kappa_T = \infty$.

証明. 補題 3 より，T_i に対して，$\Gamma_{T_i|\mathcal{M}_i} = \Gamma_{T_i}$ となる巡回不変部分空間$\mathcal{M}_i$が存在する．命題 2 より$\sigma(T_i|\mathcal{M}_i) = \overline{\mathbf{D}}$, $\sigma_e(T_i|\mathcal{M}_i) = \partial\mathbf{D}$ としてよい．このとき，$T_i|\mathcal{M}_i$ は巡回的であるから，$\dim\ker(T_i|\mathcal{M}_i)^* = 1$. また，$\mathrm{rank}\,\Delta_{*,T_i|\mathcal{M}_i}(z) \leq 1$ a.e. である．$T_0 = T|(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) =$

$(T_1|\mathcal{M}_1) \oplus (T_2|\mathcal{M}_2)$ とする．このとき，$\sigma_e(T_0) = \partial\mathbf{D}$，そして，$\dim\ker T_0^* = 2$ である．T_0 に対して補題 3 を使って，$\Gamma_{T_0|\mathcal{N}} = \Gamma_{T_0}$ となる巡回不変部分空間 $\mathcal{N}$ を得る．$\dim\ker(T_0|\mathcal{N})^* \leq 1$ であるから，任意の $\lambda \in \mathbf{D}$ は縮小作用素 $T_0^*|\mathcal{N}^\perp$ の固有値である．従って，$P_{\mathcal{N}^\perp}T_0|\mathcal{N}^\perp \in \mathbf{A}$．仮定より $\Gamma_{T_1} \cap \Gamma_{T_2}$ がルベーク測度0だから，$\operatorname{rank}\Delta_{*,T_0}(z) = \operatorname{rank}\Delta_{*,T_1|\mathcal{M}_1}(z) + \operatorname{rank}\Delta_{*,T_2|\mathcal{M}_2}(z) \leq 1$ a.e. 従って，特性関数に対する regular factorization についての結果より，$P_{\mathcal{N}^\perp}T_0|\mathcal{N}^\perp \in C_{00}$. [4] の結果と補題1より，$\kappa_{T_0} = \infty$，そして，$\kappa_T = \infty$ を得る．

命題 4. $T \in C_{10}$ とする．ある開集合 $(\subset \partial\mathbf{D})$ 上ほとんど到る所で $\Theta_T(z)$ がユニタリーならば，$\kappa_T = \infty$ である．

証明. $T_\alpha = (T - \alpha I)(I - \overline{\alpha}T)^{-1}$ とおく．$\kappa_T = \kappa_{T_\alpha}$ である．仮定より，ある $\alpha \in \mathbf{D}$ をとって，$\Gamma_{T_\alpha} \cap \Gamma_{-T_\alpha}$ は測度0とできる．従って，命題3 より，$\kappa_{T_\alpha \oplus (-T_\alpha)} = \infty$. $\kappa_{T_\alpha \oplus (-T_\alpha)} = \kappa_{T_\alpha} + \kappa_{-T_\alpha}$ であるから，$\kappa_T = \kappa_{T_\alpha} = \infty$.

A, m をそれぞれ $\mathbf{D}, \partial\mathbf{D}$ 上のルベーク測度とし，$\Gamma = \{z \in \partial\mathbf{D} : 0 < \arg(z) < \pi\}$ とする．測度 $d\mu = dA + \chi_E dm$ によって定まる cyclic subnormal operator S_μ は命題 4 の条件を満たす．

最後に，一般の縮小作用素 T について $S_\infty \prec T$ となる十分条件を与える．

定理 2. T を縮小作用素とする．ある $|\alpha| < 1$ に対して，$T - \alpha I$: not Fredholm かつ $\dim\ker(T - \alpha I) < \infty$ ならば，$S_\infty \prec T$.

Uchiyama[8] は，次の系 (2) の T に対し，$S_\infty \overset{i}{\prec} T \prec S_\infty$ であることを示した.($\operatorname{rank}(I - T^*T) < \infty$ の場合は，[7] で示されている.)

系. (1) $T \prec S_\infty$ ならば，$S_\infty \prec T$; 従って，T は S_∞ に quasisimilar である．

(2) $T \in C_{10}$ とする．もし，$I - T^*T$ がトレースクラスで $\dim\ker T^* = \infty$ ならば，T は S_∞ に quasisimilar である．

References

1. V.T. Alexander, Contraction operators quasisimilar to a unilateral shift, Trans. Amer. Math. Soc. 283(1984), 697-703.

2. C. Apostol, Ultraweakly closed operator algebras, J. Operator Theory 2 (1979), 49-61.

3. C. Apostol, H. Bercovici, C. Foias and C. Pearcy, Quasiaffine transforms of operators, Michigan Math. J. 29(1982), 243-255.

4. B. Chevreau, G. Exner and C. Pearcy, On the structure of contraction operators. III, Michigan Math. J. 36(1989), 29-62.

5. L. Kerchy, Injection of shifts into contractions, Acta Sci. Math. 53(1989), 329-338.

6. B. Sz.-Nagy and C. Foias, Injection of shifts into strict contractions, Linear operators and approximation, II. Proc. Conf. Oberwolfach Math. Res. Inst., pp.29-37, 1974.

7. B. Sz.-Nagy and C. Foias, Jordan model for contractions of class $C_{\cdot 0}$, Acta Sci. Math. 36(1974), 305-322.

8. M. Uchiyama, Contractions and unilateral shifts, Acta Sci. Math. 46(1983), 345-356.

BSE Banach modules

Sin-Ei Takahasi

Abstract. We introduce a class of Banach modules which are module version of BSE commutative Bnanach algberas considered by the author and O. Hatori [4]. A Banach module which belongs to such a class are called BSE. Every multiplier of a BSE Banach module over a commutative Banach algebra A can be characterized as a continuous vector field on the carrier space Φ_A of A which satisfies a Bochner-Schoenberg-Eberlein typ inequality. We give typical BSE Banach modules with respect to C*-algebras and convolution algebras and further give several related results.

Let A be a commutative Banach algebra with carrier space Φ_A and X a Banach A-module. For each $\varphi \in \Phi_A$ let M_φ be the corresponding maximal regular ideal of A and set

$$X^\varphi = \overline{sp}\,\{ M_\varphi X + (1 - e_\varphi)X\},$$

where $\overline{sp}$ denotes the closed linear span and e_φ denotes an element of A with $\varphi\,(e_\varphi) = 1$. In this case X^φ does not depend on a choise of e_φ and it is a Banach A-submodule of X. We define $X_\varphi = X/\,X^\varphi$ and $x\hat{}(\varphi) = x + X^\varphi$ $(\varphi \in \Phi_A, x \in X)$. Let $\prod X_\varphi = \prod_{\varphi\in\Phi_A} X_\varphi$ be the class of all functions σ defined on Φ_A such that $\sigma(\varphi) \in X_\varphi$ for each $\varphi \in \Phi_A$. An element of $\prod X_\varphi$ is called a vector field on Φ_A. The space $\prod X_\varphi$ becomes an A-module under the module multilication defined by

$$(a\sigma)(\varphi) = \varphi(a)\,\sigma(\varphi)\ (a \in A,\ \varphi \in \Phi_A,\ \sigma\in \prod X_\varphi).$$

Set

$$\prod{}^b X_\varphi = \{\sigma\in \prod X_\varphi : \|\sigma\|_\infty = \sup_{\varphi\in\Phi_A} \|\sigma(\varphi)\| < +\infty\}.$$

Then $\prod^b X_\varphi$ becomes a Banach A-module under the sup norm $\|\ \|_\infty$. For each $\varphi \in \Phi_A$ we define

$$\pi_\varphi(x) = x\hat{}(\varphi)\ \ (x \in X).$$

In this setting a vector field $\sigma \in \prod X_\varphi$ is said to be BSE if there exists a positive constant β such that

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \le \beta \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i \circ \pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*}.$$

for all finite number of $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi_A$ and the same number of $f_1 \in (X_{\varphi_1})^*, \dots, f_n \in (X_{\varphi_n})$ and the infimum of such β is denoted by $\| \sigma \|_{BSE}$. Here $(X_\varphi)^*$ denotes the dual space of the Banach space X_φ. Moreover set

$$\prod_{BSE} X_\varphi = \{\sigma \in \prod X_\varphi : \sigma \text{ is BSE}\}.$$

In this case we have $\| \sigma \|_\infty \leq \| \sigma \|_{BSE}$ for each $\sigma \in \prod X_\varphi$ and hence $\prod_{BSE} X_\varphi \subseteq \prod^b X_\varphi$. Also we can see that $\prod_{BSE} X_\varphi$ becomes a Banach A-module under the BSE-norm $\| \ \|_{BSE}$.

We next introduce a concept of continuity for vector fields. To do this, set

$$\amalg X_\varphi = \bigcup_{\varphi \in \Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi ,$$

and let π be the natural map of $\Phi_A \times X$ to $\amalg X_\varphi$ defined by

$$\pi(\varphi, x) = (\varphi, x\hat{}(\varphi)) \quad (\varphi \in \Phi_A, x \in X).$$

Let $\Phi_A \times X$ have the product topology and give $\amalg X_\varphi$ the quotient topology with respect to π. In this settting we say that a vector field $\sigma \in \prod X_\varphi$ is continuous at $\varphi_0 \in \Phi_A$ if the map: $\varphi \rightarrow (\varphi, \sigma(\varphi))$ of Φ_A into $\amalg X_\varphi$ is continous at φ_0. Also $\sigma \in \prod X_\varphi$ is said to be continuous on Φ_A if it is continous at all $\varphi \in \Phi_A$. Let us denote by $\prod^c X_\varphi$ the class of all continuous vector fields in $\prod X_\varphi$ and set

$$\prod^{cb} X_\varphi = \prod^c X_\varphi \cap \prod^b X_\varphi ,$$
$$\prod^c_{BSE} X_\varphi = \prod_{BSE} X_\varphi \cap \prod^c X_\varphi .$$

Problem 1. Is $\prod^c_{BSE} X_\varphi$ a Banach A-submodule of $\prod_{BSE} X_\varphi$?

An A-module homomorphism of A into X is called a multiplier of X. We denote by M(A,X), or simly M(X), the class of all multipliers of X. M(X) becomes a Banach A-module in the obvious way. In this case we have the following representation theorem which is a generalization of the Helgason-Wang representation [1, 7].

Lemma 1. (i) If $T \in M(X)$, then there exists a unique vector field $T\hat{}$ on Φ_A such that $(Ta)\hat{} = aT\hat{}$ for all $a \in A$.

(ii) The map: $T \rightarrow T\hat{}$ is an A-module homomorphism of M(X) into $\prod^c X_\varphi$, the kernel of the homomorphism being equal to $\{T \in M(X) : TA \subseteq \bigcap_{\varphi \in \Phi_A} X^\varphi\}$.

(iii) If $\sup_{\varphi \in \Phi_A} \| \pi_\varphi \| / \| \varphi \| < +\infty$, then $M\hat{}(X) \subseteq \prod^b X_\varphi$, where $M\hat{}(X) = \{T\hat{} : T \in M(X)\}$.

If $\{e_\lambda\}$ is a bounded net in A satisfying the condition $\lim_\lambda \varphi(xe_\lambda) = \varphi(x)$ for every $x \in X$ and $\varphi \in \Phi_A$, then we call it a bounded weak approximate identity of A in the sense of Jones-Lahr (cf. [2]). For each $x \in X$, define $T_x a = ax$ $(a \in A)$, so that each T_x is a multiplier of X. Then we have the following

Lemma 2. (i) $X^\wedge \subseteq M^\wedge(X) \cap \prod^c_{BSE} X_\varphi$ and $x^\wedge = (T_x)^\wedge$ for each $\varphi \in \Phi_A$, where $X^\wedge = \{x^\wedge : x \in X\}$.

(ii) If A has a bounded weak approximate identity in the sense of Jones-Lahr, then $M^\wedge(X) \subseteq \prod^c_{BSE} X_\varphi$.

Then we have the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
\prod^b X_\varphi \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & & & \prod^c X_\varphi \arrow[dll, dash] \arrow[dd, dash] \\
\prod_{BSE} X_\varphi \arrow[d, dash] & & \prod^{bc} X_\varphi \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\prod^c_{BSE} X_\varphi \arrow[drr, dash] & & & & M^\wedge(X) \arrow[dll, dash] \\
& & X^\wedge & &
\end{tikzcd}$$

Definition. A Banach A-module X is said to be BSE if $M^\wedge(X) = \prod^c_{BSE} X_\varphi$.

Remark 1. Let M(A) be the multiplier algebra of A. Then the Helgason-Wang representation theorem asserts that any element T of M(A) can be representated as a continuous complex-valued function $T^\wedge$ on Φ_A. Let $M^\wedge(A) = \{T^\wedge : T \in M(A)\}$. Also denote by $C_{BSE}(\Phi_A)$ the set of all contiunous complex-valued functions on Φ_A satisfying that there exists a positive constant β such that for every finite number of complex numbers $c_1, \dots, c_n$ and the same number of $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in Φ_A the inequality

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i(\varphi_i) \right| \leq \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\|_A .$$

holds. We say that A is a BSE-algebra if $M^\wedge(A) = C_{BSE}(\Phi_A)$. The well-known Bochner-Schoenberg-Eberlein thorem asserts that the group algebra $L^1(G)$ of a locally compact abelian group G is BSE. But commutative C*-algebras, the disk algebra and Hardy algebra on the open disk are also BSE (cf. [4]). If further A is BSE, it is a BSE Banach module over itself.

Remark 2. Suppose that X = A. Then for each $\varphi \in \Phi_A$ and $x \in X$, we have $X^\varphi = M_\varphi$ and so $X_\varphi = A/M_\varphi \cong \mathbb{C}$, the complex numbers. Therefore $(X_\varphi)^* \cong \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}$ and $\pi_\varphi(x) = x + M_\varphi \cong \varphi(x)$ $(\forall x \in X)$. Hence the BSE-inequality on a Banach module represents the classical BSE-inequality on a commutative Banach algebra.

Suppose next that $A = \mathbb{C}$. Then $\Phi_A = \{i_C\}$ and hence $X^{i_C} = \{0\}$, where i_C is the identity map on $\mathbb{C}$. Therefore $X_{i_C} \cong X$, $\pi_{i_C}(x) \cong x + \{0\} \cong x$ $(\forall x \in X)$, $X \cong X^\wedge = \prod X_\varphi$ and $(X_{i_C})^* \cong X^*$. Hence the BSE-inequality represents $|f(x)| \leq \|x\|_{BSE} \|f\|$ $(\forall x \in X, \forall f \in X^*)$, so by the Hahn-Banach extension theorem, we obtain $\|x\|_{BSE} = \|x\|$ $(\forall x \in X)$. Consequently, the BSE-inequality represents the fundamental inequality $|f(x)| \leq \|x\| \|f\|$ $(\forall x \in X, \forall f \in X^*)$ on the functional analysis.

In [6] the author gives the following typical BSE Banach modules.

Theorem 1. (i) If A is a commutative C*-algebra and I is a closed ideal of A, then I is a BSE Banach A-module and A is a BSE Banach I-module.

(ii) If A is a quasicentral C*-algebra and Z is the center of A, then A is a BSE Banach Z-module.

(iii) If G is a compact abelian group, then C(G), M(G) and $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ are BSE Banach $L^1(G)$- modules.

(iv) If A is a commutative C*-algebra with discrete carrier space, then any Banach A-module is BSE.

Problem 2. What is a commutative Banach algebra over which any Banach module is BSE?

Remark 3. Let G be a compact abelian group and X a Banach $L^1(G)$-module. For each $\gamma \in G^\wedge$, the dual group of G, let $X_\gamma = \{\gamma x : x \in X\}$. Then Liu-Rooij-Wang [3] have obtained that $\sigma \in \prod X_\gamma$ can be extented to a multiplier of X if and only if there exists positive constant β such that

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \sigma(\gamma_i) \right\|_X \leq \beta \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \right\|_{L^1(G)}$$

for all $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ and $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in G^\wedge$. A better analogy with the Bochner-Schoenberg-Eberlein theorem would be obtained if in the above inequality one could replace the L^1-norm by L^∞-norm, but this change would make the theorem false, as one sees from the example $X = C(G)$, $\sigma(\gamma) = \gamma$ $(\forall\gamma \in G^\wedge)$. However this trouble can be taken away in our viewpoint.

The following result gives a characterization of BSE vector fields which is similar to one obtained in [4].

Theorem 2. A vector field $\sigma \in \prod^c X_\varphi$ is BSE if and only if there exists a bounded net $\{x_\lambda\}$ in X such that w*-lim $(x_\lambda)^\wedge(\varphi) = \sigma(\varphi)$ for all $\varphi \in \Phi_A$.

The above theorem suggests that any BSE vector field can be regarded as an element of X**, the second dual of X.

Theorem 3. Let X be either M(A) or a commutative Banach algebra which contains A as a closed ideal and assume A has a bounded weak approximate identity in the sense of Jones-Lahr. Then $\prod^c_{BSE} X_\varphi$ becomes a Banach A-module and it is isomorphic with $C_{BSE}(\Phi_A)$ as Banach A-modules.

In particular, if A is a BSE-algebra, then X is a BSE Banach A-module. The converse is true whenever A has a bounded approximate identity.

Corollary . Let G be a locally compact abelian group. Then the measure algebra M(G) of G is a BSE Banach $L^1(G)$-module.

Probelem 3. In the noncompact case, are $C_0(G)$ and $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ BSE Banach $L^1(G)$-modules?

Let S be a set and $\ell^1(S)$ the set of all complex-valued function a on S such that $\| a \|_1 = \sum_{s \in S} | a(s) | < +\infty$. Then $\ell^1(S)$ is a commutative Banach algebra under the pointwise operators and the norm $\| \ \|_1$. The following result is similar to one obtained in [5].

Theorem 4. Let S be a set and X a Banach $\ell^1(S)$ -module. Then $X^\wedge \subseteq \prod^c_{BSE} X_\varphi \subseteq M^\wedge(X) = \prod^b X_\varphi$.

Probelem 4. (i) For any Banach $\ell^1(S)$ -module X, does $X^\wedge = \prod^c_{BSE} X_\varphi$ holds?

(ii) What is a commutative Banach algebra A such that $X^\wedge = \prod^c_{BSE} X_\varphi$ for every Banach A-module X?

References

1. H. Helson, Isomorphisms of abelian group algberas, Ann. Math. **64**(1956), 240-254.
2. C. A. Jones and C. D. Lahr, Weak and norm approximate identities are different, Pacific J. Math. **72**(1977), 99-104.
3. T. S. Liu, A. C. M. van Rooij and J.-K. Wang, A generalized Fourier transformation for $L^1(G)$ -modules, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **36**(1984), 365-377.
4. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **110**(1990), 149-158.
5. S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras and BSE-inequalities, Math. Japonica, **37**(1992), 607-614.
6. S.-E. Takahasi, BSE Banach modules and Multipliers, submitted.
7. J.-K. Wang, Multipliers of commutative Banach algebras, Pacific J. Math. **11**(1961), 1131-1149.

Department of Basic Technology
Applied Mathematics and Physics
Yamagata University
Yonezawa 992, Japan

局所コンパクト群の conjugation 表現に関連した関数空間について

古田　公司（北大・理）

G を局所コンパクト群, dx を G 上の (固定された) 左不変 Haar 測度とし, $L^p(G)\,(1 \le p \le \infty)$ をこの測度に関する通常の Lebesgue 空間とする. 各 $x \in G$ に対し $\{x\}$ の中心化群を $C(x)$, G の中心を $Z(G)$ で表わす. すなわち $C(x) = \{y \in G : xy = yx\}$, $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$.

$1 \le p \le \infty$ に対し G の $L^p(G)$ 上の連続な表現 π_p を

$$\pi_p(x)f(t) = f(x^{-1}tx)\Delta(x)^{1/p}, \quad x, t \in G,\ f \in L^p(G)$$

で定める. ここで Δ は G のモジュラー関数である. この表現を conjugation 表現と呼ぶ. 各 $\pi_p(x)$ は $L^p(G)$ 上の等距離作用素であり, 特に π_2 は Hilbert 空間 $L^2(G)$ 上のユニタリー表現となる.

以下 $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ とする. 空間 $A_{\pi_p}(G)$ を $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi_p(x)h_n, g_n \rangle$ ($h_n \in L^p(G)$, $g_n \in L^q(G)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ||h_n||_p ||g_n||_q < +\infty$) と表わせるような G 上の複素数値関数 u の全体とする. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^p(G)$ と $L^q(G)$ の双対を表わす. このとき $u \in A_{\pi_p}(G)$ のノルムを

$$||u||_{A_{\pi_p}} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} ||h_n||_p ||g_n||_q : u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \pi_p(x)h_n, g_n \rangle \right\}$$

で定めることにより $A_{\pi_p}(G)$ は Banach 空間となる.

上の定義で π_p の代わりに G の $L^p(G)$ 上の左移動による表現 λ_p (すなわち $\lambda_p(x)f(t) = f(x^{-1}t)$, x, $t \in G$; $f \in L^p(G)$) を用いて得られる空間を $A_p(G)$ で表わす. $u \in A_p(G)$ のノルムも同様に

$$||u||_{A_p} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} ||h_n||_p ||g_n||_q : u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda_p(x)h_n, g_n \rangle \right\}$$

で定める. このとき $A_p(G)$ は積を $(uv)(x) = u(x)v(x)$ で定めることにより Banach 代数となる. 空間 $A_p(G)$ については Herz, Eymard 等により多くの研究がなされている. ここで $A_2(G)$ は Fourier 代数と呼ばれるものであり, G が可換のときは指標群 $\widehat{G}$ 上の空間 $L^1(\widehat{G})$ の Fourier 変換の空間に一致する.

空間 $A_p(G)$ の構造については次のことが知られている.

(i) $A_p(G)$ の元は無限遠で 0 となる G 上の連続関数である.

(ii) $A_p(G)$ は G の各点を分離する.

(iii) $A_p(G)$ が定数関数をもつための必要十分条件は G がコンパクトであることである.

(iv) H が G の閉部分群であるとき $A_p(G)|_H = A_p(H)$ が成立する.

1. 空間 $A_{\pi_p}(G)$ の構造.

最初に $A_p(G)$ との比較の下で $A_{\pi_p}(G)$ の基本的な性質について考察する.

命題 1.1. (i) $A_{\pi_p}(G)$ の元は G 上の一様連続な関数である.
(ii) $A_{\pi_p}(G)$ が G の各点を分離するための必要十分条件は $Z(G) = \{e\}$ となることである. また $A_{\pi_p}(G)$ の元は $Z(G)$ の各剰余類上一定値をとる.

証明. (i) $u(x) = \langle \pi_p(x)h, g\rangle \in A_{\pi_p}(G)\,(h \in L^p(G), g \in L^q(G))$ に対し

$$\begin{aligned}|u(ax) - u(x)| &= |\langle \pi_p(ax)h, g\rangle - \langle \pi_p(x)h, g\rangle| \\ &= |\langle \pi_p(x)h, \pi_q(a^{-1})g - g\rangle| \\ &\leq ||h||_p ||\pi_q(a^{-1})g - g||_q\end{aligned}$$

であり, 写像 $x \mapsto \pi_q(x)$ が強連続であることから u の右一様連続性がわかる. 左一様連続性についても同様. またこの証明から $u \in A_{\pi_p}(G)$ ならば ${}_a u$, $u_a \in A_{\pi_p}(G)\,(a \in G)$ となることも容易にわかる.

(ii) $a \in Z(G)$ とすると $\Delta(a) = 1$ より $\pi_p(a)h = \pi_p(e)h$, $h \in L^p(G)$. よって $u(a) = u(e)$, $u \in A_{\pi_p}(G)$. また (i) の証明の注意より $u(xa) = u(x)$, $u \in A_{\pi_p}(G)$, $x \in G$.

逆に $Z(G) = \{e\}$ とする. このとき $a \in G \setminus \{e\}$ に対し $u(a) = 0$, $u(e) \neq 0$ でないような $u \in A_{\pi_p}(G)$ の存在をいえば十分である. 仮定より $ab \neq ba$ となる $b \in G$ と, $aU \bigcap Ua = \varnothing$ となるような b のコンパクト近傍 U が存在する. このとき $u(x) = \langle \pi_p(x)\chi_U, \chi_U\rangle$ とおくと $u \in A_{\pi_p}(G)$ で $u(a) = 0$, $u(e) \neq 0$. (証終)

<u>命題 1.2.</u> G が [IN]-group のとき $A_{\pi_p}(G)$ は定数関数をもつ．逆に $A_{\pi_2}(G)$ が定数関数をもつならば G は [IN]-group である．ここで G が [IN]-group であるとは単位元のコンパクト近傍 U ですべての $x \in G$ に対し $xUx^{-1} \subset U$ となるものが存在するときをいう．

<u>証明.</u> G を [IN]-group とし，U を e のコンパクト近傍 U で $xUx^{-1} = U$, $x \in G$ となるものとする．このとき $|U|$ を U の Haar 測度として $u(x) = |U|^{-1}\langle \pi_p(x)\chi_U, \chi_U\rangle$ とおくと $u(x) = 1$, $x \in G$ となる．

逆に $A_{\pi_2}(G)$ が定数関数 1_G をもつとする．一般に $A_{\pi_2}(G)$ は $\{\pi_2(x) : x \in G\}$ で生成される von Neumann 代数 $\mathfrak{M}$ の predual であることが知られている．1_G は $\mathfrak{M}$ 上の正規状態を定義し，したがって $L^2(G)$ の 0 でない関数からなる列 $\{f_n\}_{n=1}^N$ が存在して $\sum_{n=1}^N \langle \pi_2(x)f_n, f_n\rangle = 1$, $x \in G$ となる．ここで Schwarz の不等式を用いると $\langle \pi_2(x)f_n, f_n\rangle = ||\pi_2(x)||_2||f_n||_2$, すなわち $\pi_2(x)f_n = f_n\,(x \in G, n = 1, \cdots, N)$ を得る．よって π_2 の作用で不変な 0 でない関数が存在することと G が [IN]-group であることが同値であることから命題が得られる．(証終)

<u>注意.</u> (i) H を G の閉部分群とする．このとき一般には $A_{\pi_p}(G)|_H \subset A_{\pi_p}(H)$ は成立しない．実際 $A_{\pi_p}(G)|_H \subset A_{\pi_p}(H)$ ならば H の中心 $Z(H)$ が $Z(G)$ に含まれることが必要である．証明は命題 1 (ii) とその証明から得られる．
(ii) $A_{\pi_p}(G)$ は一般には (G の各点ごとの) 積で閉じていない．例えば $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0\right\}$ (離散群として) のとき，または G が 2 個以上の生成元をもつ自由群のとき $A_{\pi_2}(G)$ は積で閉じていないことが，命題 3 (iii) を用いて証明することができる．

$A_p(G)$ と $A_{\pi_p}(G)$ の包含関係については次のことがわかる．

<u>命題 1.3.</u> (i) G がコンパクトならば $A_{\pi_p}(G) \subset A_p(G)$ であり，さらに $u \in A_{\pi_p}(G)$ に対し $||u||_{A_p} \leq ||u||_{A_{\pi_p}}$.
(ii) $Z(G)$ がコンパクトでないならば $A_{\pi_p}(G) \bigcap A_p(G) = \{0\}$.
(iii) G が 離散群のとき $A_{\pi_2}(G) \bigcap A_2(G) = \{0\}$ であるための必要十分条件はすべての $a \in G$ に対し $C(a)$ が 無限集合であることである．

証明. (i) $MA_p(G)$ を $A_p(G)$ の乗関数の空間とすると，一般に $A_{\pi_p}(G) \subset MA_p(G)$, $\|u\|_{A_{\pi_p}} \leq \|u\|_{MA_p}$ $(u \in A_{\pi_p}(G))$ である．一方 G がコンパクトのとき $A_p(G) = A_{\pi_p}(G)$ であり，そのノルムも一致することから (i) が得られる．

(ii) $A_{\pi_p}(G)$ の元が $Z(G)$ の上で一定値をとる関数であることと $A_p(G)$ の元が無限遠で 0 となる関数であることから明らか．

(iii) $C(a)$ が有限となる $a \in G$ が存在するとき，関数 $u(x) = \langle \pi_p(x)\delta_a, \delta_a \rangle = \chi_{C(a)}(x)$ は $A_{\pi_p}(G)$ かつ $A_p(G)$ に属する．実際 $A_p(G)$ は台が有限な関数をすべて含むことから明らかである．

逆にすべての $a \in G$ に対し $C(a)$ が無限集合であるとし，T を $\ell^2(G)$ 上の有界線形作用素で $T\pi_2(y) = \lambda_2(y)T$, $y \in G$ をみたすものとする．もし $T\delta_a \neq 0$ となる $a \in G$ が存在するとすると，すべての $y \in C(a)$ に対し

$$T\delta_{yay^{-1}} = T\pi_2(y)\delta_a = \lambda_2(y)T\delta_a,$$

よってすべての $y \in C(a)$ に対し $T\delta_a = \lambda_2(y)T\delta_a$ となるが，$C(a)$ が無限集合であることからこれは $T\delta_a$ が $\ell^2(G)$ に属することに矛盾する．したがって $T = 0$. 一般に $A_{\pi_2}(G) \bigcap A_2(G) = \{0\}$ となることと π_2 と λ_2 の intertwining 作用素が 0 に限ることが同値であるから $A_{\pi_2}(G) \bigcap A_2(G) = \{0\}$ となる．(証終)

2. Inner amenability と空間 $A_{\pi_p}(G)$.

Banach 代数 $A_p(G)$ の様々な性質は G の従順性 (amenability) と密接に関係していることが知られている．以下では空間 $A_{\pi_p}(G)$ を用いて G が inner amenable であるための必要十分条件を与える．

C^*代数 $L^\infty(G)$ 上の状態 m ですべての $a \in G$, $f \in L^\infty(G)$ に対し $m(\pi_\infty(a)f) = m(f)$ となるものが存在するとき G は inner amenable であると呼ばれる．すべての離散群，従順な群は inner amenable であるが，$GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ は inner amenable でない．inner amenability については作用素代数の理論にも関連して近年様々の研究結果が得られている．

$f \in L^1(G)$ に対し $L^p(G)$ 上の有界線形作用素 $\widetilde{\pi}_p(f)$ および $A_{\pi_p}(G)$ 上の有界線形作用素 $\gamma_p(f)$ をそれぞれ

$$\langle \widetilde{\pi}_p(f)h, g\rangle = \int_G f(x)\langle \pi_p(x)h, g\rangle\, dx, \quad h \in L^p(G),\, g \in L^q(G),$$
$$\gamma_p(f)u = f * u, \quad u \in A_{\pi_p}(G)$$

で定める. このとき $||\gamma_p(f)|| \leq ||\widetilde{\pi}_q(f)|| \leq ||f||_1$ が成り立つことがわかる.

<u>補題 2.1.</u> $f \in L^1(G)$, $f \geq 0$ とする. このとき関数

$$[1, \infty] \ni p \mapsto \log ||\widetilde{\pi}_p(f)||$$

は凸関数である. 特に $||\widetilde{\pi}_{p_0}(f)|| = ||f||_1$ となる $1 < p_0 < \infty$ が存在すれば, すべての $1 < p < \infty$ に対し $||\widetilde{\pi}_p(f)|| = ||f||_1$ となる.

<u>定理 2.2.</u> 各 $1 < p < \infty$ に対し次の条件は互いに同値である.

(i) G は inner amenable である.

(ii) $A_{\pi_p}(G)$ の元のネット $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ で $\sup_\alpha ||u_\alpha||_{A_{\pi_p}} < +\infty$ となるようなものが存在して, 広義一様に, すなわち G のすべてのコンパクト集合の上で一様に $\lim_\alpha u_\alpha = 1$ が成り立つ.

(iii) 任意の $f \in L^1(G)$, $f \geq 0$ に対し $||\gamma_p(f)|| = ||f||_1$.

(iv) 写像 $\widetilde{\pi}_p(f) \mapsto \int_G f(x)\, dx\, (f \in L^1(G))$ が $\mathcal{B}(L^p(G))$ 上の有界線形汎関数に広がる.

ここで $\mathcal{B}(L^p(G))$ は $L^p(G)$ 上の有界線形作用素全体のつくる Banach 空間を表わす.

<u>証明</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii). G が inner amenable のとき $f_\alpha \geq 0$, $||f_\alpha||_1 = 1$, $\alpha \in I$ となるような $L^1(G)$ のネット $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ で広義一様に $\lim_\alpha ||\pi_1(x)f_\alpha - f_\alpha||_1 = 0$ となるものが存在することが知られている. $h_\alpha = f_\alpha^{1/p} \in L^p(G)$, $g_\alpha = f_\alpha^{1/q} \in L^q(G)$ とおき, $u_\alpha(x) = \langle \pi_p(x)h_\alpha, g_\alpha\rangle$ と定めると $u_\alpha \in A_{\pi_p}(G)$, $||u_\alpha||_{A_{\pi_p}} \leq 1$ であり, さらに $|u_\alpha(x) - 1| = |\langle \pi_p(x)h_\alpha, g_\alpha\rangle - \langle h_\alpha, g_\alpha\rangle| \leq ||\pi_p(x)h_\alpha - h_\alpha||_p$ となる. ここで最右辺の式は 0 に広義一様に収束するから, この $\{u_\alpha\}$ が求めるものであることがわかる.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $f \in L^1(G)$, $f \geq 0$ に対し $||f||_1 \leq ||\gamma_p(f)||$ を示す. $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を (ii) を満たす $A_{\pi_p}(G)$ のネットとする. $\sup_\alpha ||u_\alpha||_\infty \leq \sup_\alpha ||u_\alpha||_{A_{\pi_p}} < +\infty$ より, ネット $\{f * u_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset L^\infty(G)$ は $\sigma(L^\infty, L^1)$ 位相で $||f||_1 1_G$ に収束することがわかる. したがって $M = \sup_\alpha ||u_\alpha||_{A_{\pi_p}}$ とおくと, $L^1(G)$ の元から定まる $L^\infty(G)$ 上の有界線形汎関数の下半連続性と不等式 $||u||_\infty \leq ||u||_{A_{\pi_p}}$ $(u \in A_{\pi_p}(G))$ から $||f||_1 \leq M||\gamma_p(f)||$ を得る. ここで f を $f * \cdots * f$ (n 個) でおきかえることにより $||f||_1 \leq M^{1/n}||\gamma_p(f)||$ となる. よって $n \to \infty$ として $||f||_1 \leq ||\gamma_p(f)||$ を得る.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). 補題 2.1 の前の注意より $f \in L^1(G)$, $f \geq 0$ に対し $||f||_1 = ||\widetilde{\pi}_q(f)||$ であり, 特に補題 2.1 より $||f||_1 = ||\widetilde{\pi}_p(f)||$ である. この等式とノルムに関する三角不等式から, すべての $f \in L^1(G)$ に対し $|\int_G f(x)\,dx| \leq 2||\widetilde{\pi}_p(f)||$ となることがわかる. したがって写像 $\widetilde{\pi}_p(f) \mapsto \int_G f(x)\,dx$ はノルム空間 $\{\widetilde{\pi}_p(f) : f \in L^1(G)\}$ 上の有界線形汎関数を定義し, よって Hahn-Banach の定理からこれは $\mathcal{B}(L^p(G))$ 全体に広がる.

(iv) $\Rightarrow$ (i). 定数 $M > 0$ を $|\int_G f(x)\,dx| \leq M||\widetilde{\pi}_p(f)||$, $f \in L^1(G)$ を満たすものとすると, 特に $f \in L^1(G)$, $f \geq 0$ に対し $||f||_1 \leq M||\widetilde{\pi}_p(f)||$. このとき (ii) $\Rightarrow$ (iii) の証明と同様にして $||f||_1 \leq ||\widetilde{\pi}_p(f)||$ となる. さらに補題 2.1 より $||f||_1 = ||\pi_2(f)||$, したがって $|\int_G f(x)\,dx| \leq ||\widetilde{\pi}_2(f)||$, $f \in L^1(G)$. ここで有界線形汎関数 $\pi_2(f) \mapsto \int_G f(x)\,dx$ を $\mathcal{B}(L^2(G))$ 全体に広げたものを φ とおく. このとき $L^\infty(G)$ の元を $L^2(G)$ 上の掛算作用素として $\mathcal{B}(L^2(G))$ の元とみなすと $m(f) = \varphi(f)$ $(f \in L^\infty(G))$ で定まる有界線形汎関数 m が π_∞ の作用で不変な $L^\infty(G)$ 上の状態であることが知られている. (証終)

References

1. A. L. T. Paterson, "Amenability", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, 1988.
2. J. -P. Pier, "Amenable locally compact groups", Wiley, New York, 1984.

順序を保存する作用素の固有値について

お茶の水女子大学　理学部　澤島侑子

非線形写像の固有値問題、或はエルゴード理論等を扱うとき、有効な手段として考えられるのは不動点定理であり、殆んどそれのみと云っても過言でないように思われる。今まで線形作用素を扱って来たものにとって、何か他に有効な手段を加えられないだろうか？

こゝで思いおこされるのが、Banach空間E上の線形作用素Tを扱うときの、その双対空間E^*、双対作用素T^*、更には第二双対空間E^{**}および第二双対作用素T^{**}を用いる関数解析的手法である。Tが線形であったから、その双対空間（すなわちE上の有界線形汎関数全体）上の双対作用素を働かせうるわけで、もし、Tが非線形であるときは、そのTに加えられる性質、例えばLipschitz連続性、劣加法性、或は正斉次性等によって、それ等と同じ性質をもつE上の汎関数全体をEのある双対空間と考えれば、Tの双対写像を働かせ得て、有効な手法になり得るのではないか？

この報告では、上記の単純な発想に基いて、E上のLipschitz連続な非線形写像Tが$T0=0$をみたすとき、この性質に応じた、新しい意味の双対空間をLipschitz双対空間$E^☆$と定め、$E^☆$上の双対写像$T^☆$の固有値問題への適用を試みる。

§1 Lipschitz 双対空間

EをBanach空間とし、Eの双対空間をE^*とする。E上でLipschitz連続、かつ、$x^☆(0)=0$となる汎関数の全体を$E^☆$とする。こゝで$x^☆$がLipschitz連続であるとは、Eの任意の元x, yに対し、

$$|x^☆(x) - x^☆(y)| \leqq K\|x-y\|$$

をみたす定数Kが存在することである。$E^{☆}$の元$x^{☆}$に対して、

$$\|x^{☆}\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{|x^{☆}(x) - x^{☆}(y)|}{\|x - y\|}$$

と定める。

$$\|x^{☆}\|_L = \inf\{K \,;\, |x^{☆}(x) - x^{☆}(y)| \leqq K\|x - y\| \quad (\forall x, y \in E)\}$$

であり、$E^{*} \ni x^{*}$ に対して $\|x^{*}\|_L = \|x^{*}\|$ である。

命題 1.1 $E^{☆}$ は $\|\cdot\|_L$ をノルムとするBanach空間でE^{*}は$E^{☆}$の閉部分空間である。このBanach空間をLipshitz双対空間と云う。

命題 1.2 $E^{☆}$の単位球 $B_1^{☆} \equiv \{x^{☆}\,;\, \|x^{☆}\|_L \leqq 1\}$ は$\sigma(E^{☆}, E)$－コンパクトである。

Eが正錐E_+による順序Banach空間であるとは、Eが実係数のBanach空間で、E_+がEの閉凸錐で、かつ$E_+ \cap -E_+ = \{0\}$をみたし、順序$x \leqq y$が$y - x \in E_+$によって定義されていることである。このときE^{*}の正錐をE_+上で非負値をとる有界線形汎関数全体と定めることによりE^{*}も順序Banach空間となる。$E = E_+ - E_+$であるとき、Eは生成的であると云い、Eに同位相かつ順序を保存するノルムが定義出来るときEは正規であると云う。Eが生成的であれば、E^{*}は正規であり、Eが正規であればE^{*}は生成的であること等が知られている。

順序Banach空間EのLipshitz双対空間$E^{☆}$には、順序を保存する$E^{☆}$の元全体を$E_+^{☆}$と定めておく。ここで$E^{☆}$の元$x^{☆}$が順序を保存するとは、$x \leqq y$ならば$x^{☆}(x) \leqq x^{☆}(y)$をみたすことである。

命題 1.3 $E_+^{☆}$は$E^{☆}$の閉凸錐で、$E_+^{☆} \cap -E_+^{☆} = \{0\}$である。すなわち、$E^{☆}$は$E_+^{☆}$を正錐とする順序Banach

空間となる。また $B_1^☆ \cap E_+^☆$ は $\sigma(E^☆, E)$ コンパクトで、E_+^* は $E^* \cap E_+^☆$ に等しい。

§2. Lipschitz 連続写像とその双対写像

Banach 空間 E から Banach 空間 F への Lipschitz 連続で、原点を原点にうつす写像の全体を $L(E, F)$、有界線形写像の全体を $B(E, F)$ で表す。$L(E, E)$, $B(E, E)$ を $L(E)$、$B(E)$ とそれぞれ省略して記す。$E^☆$ と同様に、$L(E, F)$ の元 T の Lipschitz ノルムを

$$\|T\|_L = \sup_{x \neq y} \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|}$$

と定義すれば、$L(E, F)$ は Banach 空間となることが示される。

$L(E, F)$ の元 T の Lipschitz 双対写像を、$E^☆$ の元 $x^☆$ に対して、

$$(T^☆ x^☆)(x) = x^☆(Tx) \qquad (\forall x \in E)$$

と定める。また、$T^☆$ の E^* 上への制限を $T^☆|E^*$ と記す。

命題 2, 1. 次が成り立つ。

(i) $T \in L(E)$ ならば $T^☆ \in B(E^☆)$, $T^☆|E^* \in B(E^*, E^☆)$ かつ、$\|T\|_L = \|T^☆\| = \|T^☆|E^*\|$ である。

(ii) $S, T \in L(E)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ならば

$$(T + S)^☆|E^* = T^☆|E^* + S^☆|E^*,$$

$$(\alpha T)^☆|E^* = \alpha \cdot T^☆|E^*,$$

$$\|T + S\|_L = \|T^☆|E^* + S^☆|E^*\| \leqq \|T^☆ + S^☆\|.$$

である。

(iii) $T \in L(E)$ ならば $(T^☆)^n = (T^n)^☆$ で、$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|_L^{1/n}$ が存在して $T^☆$ のスペクトル半径 $r(T^☆)$ に等しい。すなわち、

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|_L^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\|T^{*n}\|^{1/n} = r(T^*)。$$

ただし，T^*のノルム $\|T^*\|$ は T^*がE^*上の有界線形写像であることから

$$\|T^*\| = \sup\{\|T^*x^*\|_L ; \|x^*\|_L \leqq 1\}$$

である。

(iv) $T \in L(E)$ に対して

$$M_n = M_n(T) = \frac{I + T + \cdots + T^{n-1}}{n}$$

$$M_n^* = M_n(T^*) = \frac{I + T^* + \cdots + T^{*n-1}}{n}$$

と表す。このとき，

$$(M_n(T))^*|E^* = M_n(T^*)|E^*,$$

$|\lambda| > r(T^*)$ であるとき

$$R(\lambda, T^*)|E^* = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\right)^*|E^*。$$

但し $R(\lambda, T^*)$ は T^*の レゾルバント写像である。

§3. 第二双対空間と第二双対写像

$T \in L(E)$ に対し、T^*が有界線形写像となったことにより，E^* の双対空間として E^{**} を考える必要はない。E^{**}，すなわち E^*の双対空間（通常の意味），で充分である。T^{**} も T^*の双対写像を表す。通常の意味での第二双対空間E^{**}の中へのEの埋め込み写像をQで，EのE^{**}の中へのEの埋め込み写像を$\tilde{Q}$で表わす，すなわち

$$Qx(x^*) = x^*(x) \qquad (\forall x^* \in E^*)$$

$$\tilde{Q}x(x^*) = x^*(x) \qquad (\forall x^* \in E^*)。$$

命題 3.1. 次が成り立つ。

(i) $\tilde{Q}E \subset E^{**}$ かつ $\|\tilde{Q}x\| = \|x\|$

(ii) $T \in L(E)$ ならば $T^{**}\tilde{Q} = \tilde{Q}T$。

(注意) $\tilde{Q}$は EからE^{**}の中への等距離写像であるが線形ではない。$\tilde{Q}x|E^{*}=Q$であるから、これはEからE^{**}の中への等距離線形写像である。

§4. Lipschitz双対写像の固有値

§2 の結果から、$L(E)$に属する写像TのLipschitz双対写像T^{*}がBanach空間E^{*}上の有界線形写像となり、T^{*}の性質を知るために関数解析の豊富な手法が使い得ることになった。その例として、こゝではT^{*}の固有値、および固有ベクトルについて得られた結果を示す。

T^{*}のスペクトル半径をr、T^{*}のレゾルバント集合$\rho(T^{*})$に属する数λに関するレゾルバント写像、すなわち、$\lambda I-T^{*}$の逆写像を$R(\lambda,T^{*})$と書く。

定理 4.1. EをBanach空間、E^{*}をそのLipschitz双対空間とする。Tを$L(E)$に属する写像とし、$\lambda_0\in\mathbb{C}$が次の条件をみたすとする；

(*) 或る正整数kと、λ_0に収束する或る$\lambda_n\in\rho(T^{*})$と、E^{*}の或る元x_0^{*}が存在して、$(\lambda_n-\lambda_0)^kR(\lambda_n,T^{*})x_0^{*}$がノルム$(\|\ \|_L)$収束し、その極限$z_0^{*}$は$0$でない。

このとき、λ_0はT^{*}の固有値となり、$z_0^{*}(\in E^{*})$はその固有ベクトルとなる。

系 4.2. Eを正規順序Banach空間とし、Tを$L(E)$に属する順序を保存する写像とする。或る正整数kが存在して、E^{*}の任意の元x^{*}に対して

$$\|\ \|_L-\lim_{\lambda\downarrow r}(\lambda-r)^kR(\lambda,T^{*})x^{*}=\bar{A}x^{*}$$

とする。このとき、次が成り立つ。

(1) $\bar{A}\in B(E^{*},E^{*})$, $\bar{A}E^{*}_{+}\subset E^{*}_{+}$、

(2) $T^{*}\bar{A}=r\bar{A}$

(3) $\bar{A}\neq 0$ ならば rは固有値となり、E^{*}_{+}に属す

る固有ベクトルが存在する。

定理 4.3. Eを Banach 空間、$E^{\star}$をその Lipschitz 双対空間、$T \in L(E)$とし、Tは次の条件をみたすとする;

(i) $E^{*} \ni x^{*}$に対して、$\sup_n \| M_n^{\star} x^{*} \|_L < +\infty$、

(ii) $\frac{T^n x}{n}$ が、すべての $x \in E$ に対して $\sigma(E, E^{*})$位相で0に収束する。

このとき、E^{*}から$E^{\star}$への写像 $\overline{P}$ が存在して $T^{\star}\overline{P} = \overline{P}$ となる。さらに、もし、Tが条件

(iii) 或るE^{*}の元x_0^{*}が存在して $\overline{P}x_0^{*} \neq 0$

をみたすならば、$\overline{P}x_0^{*}$はT*の固有値1に対する固有ベクトルとなる。

(注意) $\overline{P}$ は一般に連続性も、線形性も持たない。また、条件(i)は $\sup_n \| M_n(T) \| = \sup_n \| M_n(T^{\star})|E^{*} \| = \sup_n \| M_n(T^{\star}) \| < +\infty$ と同値である。(一様有界の定理による)

系 4.4. Eを正規または生成的な順序Banach空間、TをL(E)に属し、順序を保存する写像で、定理4.3.の条件(i),(ii),(iii)、および次の条件(iV)をみたす写像とする;

(iV) Tは弱エルゴード的である、すなわち、Eの任意の元xに対して、$M_n x$ がEの或る元に$\sigma(E, E^{*})$位相で収束する。この極限をPxと表す。

このとき、次が成り立つ;

(1) $P \in L(E)$、かつ、$PT = P$

(2) $T^{\star}P^{\star}_{|E^{*}} = P^{\star}_{|E^{*}}$

(3) $P^{\star}_{|E^{*}_{+}} \neq 0$、従って1は$T^{\star}$の固有値となり、$E^{\star}_{+}$に属する固有ベクトルが存在する。

Subfactor と Subdiagonal 環

北海道大学・綿谷安男

[0] はじめに

関数環における weak* Dirichlet 環を非可換化したものが，作用素環における subdiagonal 環[1]である。そのくわしいことは，斉藤吉助氏の解説がこの報告集にのっているのでそれを参照してほしいと思います。ここでは σ-weakly closed な subdiagonal 環の定義を復習する程度にします。この小文の目的はこの subdiagonal 環が Jones の指数理論[2]に始まる subfactor の理論とどのように関連しているかを調べることである。この方向の研究はまだほとんどなく，斉藤―綿谷による subdiagonal 環の存在と Jones index の有限性との関係の研究，中路―綿谷による hypo-subdiagonal の導入などの共同研究が少し始まった位である。私は斉藤氏や中路氏に色々と教えてもらいながらしているのであり，そのいくつかの試みを紹介したい。

1 関数環の理論，群論と作用素環論の間のアナロジー

最初に簡単な対照表をかいて比べてみる：

関数環論	群論	作用素環論
本質的有界環 か連続関数環 $L^\infty(X)$ or $C(X)$	群 G	Subfactor $N\subset M$
ベクトル空間としての 次元 $\dim_{\mathbb{C}} L^\infty(X)$	群の位数 (order) $\# G$	Jones 指数 $[M:N]$
極大イデアル全体 か Banach space dual か ?	群の双対 (dual) $\hat{G}$	basic 構成 $M\subset\langle M, e_N\rangle$. ここで e_N: Jones 射影子
$\dim_{\mathbb{C}} L^\infty(X)<\infty$ の時の分類は自明 $L^\infty(X)\cong\mathbb{C}^n$	$\# G\leq 4$ の時の 分類は簡単： $\{1\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ 有限単純群の分類は完成	$[M:N]\leq 4$ の時で hyperfinite なものに ついては最近分類が 完成：A_n, D_{2n}, E_6, E_8 $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_\infty, \ldots\ldots$
W^*-Diricklet環 A ① $A+\bar{A}\subset L^\infty(X)$: dense ② $A\cap\bar{A}=\mathbb{C}$ ③ $\int fg\,d\mu=\int f\,d\mu\int g\,d\mu$ 例 $A=H^\infty(\mathbb{T})\subset L^\infty(\mathbb{T})$	positive cone $S\subset G$ ① $S\cup S^{-1}=G$ ② $S\cap S^{-1}=\{1\}$ ③ $S\cdot S\subset S$ 例 $S=\mathbb{Z}_+\subset G=\mathbb{Z}$	subdiagonal環 A ① $A+A^*\subset M$: dense ② $A\cap A^*=N$ ③ 条件付期待値 $E: M\to N$ $E(ab)=E(a)E(b)$ $a,b\in A$ 例 $A=N\rtimes\mathbb{Z}_+\subset M=N\rtimes\mathbb{Z}$
hypo-Diricklet環 $A+\bar{A}+N=C(X)$ $\dim N<\infty$	positive cone より 有限コ要素をとった semi-group	hypo-subdiagonal環

[2] Subfactor

Def ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素全体のなす環 $B(H)$ の $*$subalgebra M で, (operator) weak topology で閉じたものを <u>von Neumann 環</u> という。さらに M の中心 $Z(M) \underset{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \forall y \in M \ \ xy = yx\}$ が $\mathbb{C}I$ となる時 M を <u>factor</u> (因子環) という。これは (位相を考えに入れた上で) M が単純 (つまり閉イデアルが M か $\mathbb{C}I$) であることと同じである。特に M 上に finite な trace $tr : M \to \mathbb{C}$, ($tr(xy) = tr(yx)$) があり, M が有限次元でないとき, M を <u>II_1 型 factor</u> という。

(例) 2×2 行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の無限テンソル積のある表現での weak topology での閉包をとると II_1 型 factor になる:

$$M = \overline{M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots\cdots}$$

Def II_1-factor M があるヒルベルト空間 H に作用している時その <u>coupling 定数</u> $\dim_M H \in (0, \infty)$ を次できめる; $0 \neq \xi \in H$ を何でも1つとってきて 2つの projection $P_\xi \in M$ と $P'_\xi \in M' \equiv \{x \in B(H) \mid \forall m \in M \ \ xm = mx\}$ を $P_\xi : H \to [M'\xi]$ と $P'_\xi : H \to [M\xi]$ により定めておく。

$$\dim_M H \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{tr_M(P_\xi)}{tr_{M'}(P'_\xi)} & \left(\begin{array}{l}\text{もし}\\ M' : \text{finite}\end{array}\right) \\[2ex] +\infty & (\text{そうでない時}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Def}}$ II_1-factor M上に $(x|y) = tr(y^*x)$ により内積をいれて完備化したヒルベルト空間 $L^2(M, tr)$ にMは左からのかけ算で自然に作用する。Mの中にsubfactor $N \subset M$ があるとする。包含関係 $N \subset M$ の Jones index $[M:N]$ を coupling 定数を使って次で定義する；

$$[M:N] \underset{\text{def}}{=} \dim_N L^2(M, tr) \in [1, \infty)$$

今 projection $e_N : L^2(M, tr) \to L^2(N, tr)$ を Jones projection という。この時 $[M:N] = \dfrac{1}{tr_{N'}(e_N)}$ ともかける。

(注) Jones index $[M:N]$ は MのN-moduleとしてのmoduleのrankのようなものであるが，値が自然数値だけでなく連続の値をとることに注意する。

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Jones) subfactor $N \subset M$ の Jones index のとり得る値は $\{4\cos^2\frac{\pi}{n} \mid n = 3, 4, 5, \cdots\} \cup [4, \infty)$

$\boxed{\text{例}}$ $M = \overline{M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots\cdots}$

$N = \overline{\mathbb{C}1 \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes \cdots\cdots}$

$\Longrightarrow [M:N] = 4$

$\boxed{\text{例}}$ $M = N \rtimes G$ （群Gのouter作用による接合積）

$\Longrightarrow [M:N] = \# G$

3 Subdiagonal 環と Subfactor

この§の結果は斉藤吉助氏との共同研究である。

Theorem 1 (斉藤-綿谷), N を II_1-factor, G を可算離散群, $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N$ を outer action, $M = N \rtimes_\alpha G$ を α による接合積とする。M から N への唯一つの条件付期待値を E とする。E に関する M の subdiagonal 環の全体と群 G の positive cone 全体の間には1対1の対応が存在する。(ここで subdiagonal 環は σ-weakly closed を仮定している).

例 ① $M = N \rtimes \mathbb{Z}$ の場合は subdiagonal 環は2つある。
② $M = N \rtimes \mathbb{Z}^2$ の場合は subdiagonal 環は ∞ つある
③ $M = N \rtimes G$ (G は有限群) の場合はない。

Theorem 2 (斉藤-綿谷), M を hyperfinite II_1-factor, N を M の subfactor とする。もし Jones index $[M : N] \leqq 4$ ならば, M 上の trace から自然にきまる条件付期待値 $E : M \longrightarrow N$ に関する subdiagonal 環は存在しない。

予想 Theorem 2 は Jones index $[M : N]$ が有限の仮定だけでいえると予想している。subfactor の理論の最近の発展は, 幸崎 [4] や河東 [3] の日本語の解説に任せるが, Theorem 2 の現在の証明には分類論を必要とする。

4 hypo-subdiagonal 環

この§の結果は中路氏との共同研究である。関数環における hypo-Dirichlet 環の概念を subfactor の設定で考えてみた時に相当するものとして導入したのが次にあげる hypo-subdiagonal 環である。N が一般の von Neumann subalgebra の時も定義できるが、ここでは簡単のため N が subfactor の時のみを考える。

$\boxed{\text{Def}}$ M を finite von Neumann 環, N を M の subfactor, $E: M \to N$ を条件付期待値とする。σ-weakly closed な algebra $\mathcal{A}$ (s.t. $N \subset \mathcal{A} \subset M$) が <u>hypo-subdiagonal</u> with respect to E とは M のある σ-weakly closed subspace L で N-module となっているものがあり,

$$\begin{cases} \mathcal{A} + \mathcal{A}^* + L \subset M & : \sigma\text{-weakly dense} \\ l = \dim_N [L]_2 < \infty \end{cases}$$

を満たすことをいう。

$\boxed{\text{Theorem 3}}$ (中路-綿谷) 上の状況下で M の σ-weakly closed subalgebra K が $[\mathcal{A}]_2 \cap M \subset K \subset M$ で $E(ab) = E(a)E(b)$ (for $a, b \in K$) をみたすとする。$[\mathcal{A}]_2 \cap M$ の K における N-余次元, $\dim_N([K]_2 \ominus [[\mathcal{A}]_2 \cap M]_2) \leqq l$ となる。

(注) 特に $\mathcal{A}$ が subdiagonal の時は $[\mathcal{A}]_2 \cap M$ は Arveson [1] の $\mathcal{A}_m$ にあたり, この時上の定理は $\mathcal{A}_m$ が $\mathcal{A}$ を含む maximal subdiagonal であることを示す。

< References >

[1] W. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89 (1967), 578-642

[2] V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math., 72 (1983), 1-25

[3] 河東泰之, V.F.R. Jones氏の業績I, 数学, 43巻1号, (1991), 29-34

[4] 幸崎秀樹, 作用素環の指数理論, 数学, 41巻4号, (1989), 289-304

ハーディー空間 H^1 の極値問題

井上純治（北大理）

f が単位円板 D 上の Hardy 空間 H^1 の norm 1 の関数であるとき、

$$S^f = \{\, g \in H^1 : \|g\|=1,\ f/g \geqq 0 \text{ a.e. on } T=\partial D \,\}$$

とおく。いろいろな f について S^f がどのような集合であるかは興味深い問題である。

まず、S^f は H^1 のある超平面と H^1 単位球面との接点の集合として表現され、極値問題としてとらえられる。すなわち、

$h \in L^{\infty}(T)$ のとき、

$$L_h(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{it})h(e^{it})dt/2\pi \qquad (\, g \in H^1 \,)$$

と定義すると、$f \in H^1$ のとき $S_f = \{\, g \in H^1 : \|g\|=1,\ L_{|f|/f}(g) = 1 \,\}$ と表されるのである。また、この問題には、Toeplitz 作用素との関わり、予測問題との関わりなどがある。

さて、H^1 の norm 1 の関数 f が与えられたとき，S^f についての次の問題が考えられる。

(1) $S^f=\{f\}$ となるときがあるか? あるとすれば、それは f がどのような関数のときか?

(2) S^f の生成するベクトル空間が有限次元となるのはどのようなときか？また、そのとき、S^f に属する関数のすべてを組織的に分かり易く表現することができるか?

(3) S^f の生成するベクトル空間が無限次元となるのはどのようなときか？ また、そのとき、S^f に属する関数を組織的に分かりやすく表現することができるか?

以下、(1) について述べる。(2) については、[6]，[7]を参照されたい。また、(3) については [2],[3] がある。

$S^f=\{f\}$ が成り立つとき、f は H^1 の exposed point と呼ばれる。f が exposed point であるとき f は H^1 の単位球の extreme point になるから，deLeeuw-Rudin の結果([1],1958) により f は outer function であることが分かる。従って、f が H^1 の outer function であるとき、$f/\|f\|$ が ball(H^1) の exposed point となるのは f が特別な outer function であるときと言う事になる。このような outer function はいろいろな意味で重要な関数であり、strong outer function (cf.[7]) とか rigid function (cf. [9]) とか呼ばれているものである。以下では、strong outer function という言葉を用いることにする。

すなわち、

f : outer $\leftrightarrows$ $f/\|f\|$ が H^1 の単位球の extreme point

f : strong outer $\leftrightarrows$ $f/\|f\|$ が H^1 の単位球の exposed point

$\leftrightarrows$ $f(e^{it}) = g(e^{it})$ a.e. t が成り立つとき、$f \sim g$ とかくことにすると、

$$g \in H^1,\ f \sim g \Rightarrow g/f \text{ は constant function}$$

f が strong outer になる条件はいろいろと知られているが、まだ未知の部分もあり研究が続けられている。

strong outer function でない outer 関数の例

A. $f(z) = (z-\alpha)^2$, $\alpha \in T$,

B. $f(z) = (1-q)^2$, $q(z)$ non-constant inner,

C. $f(z) = (q_1 + q_2)^2$, with q_1, q_2 inner, q_1+q_2 = non-constant outer

D. $f(z) = q_1+q_2$, q_1, q_2 inner with $\mathrm{Im}\,[q_1 q_2] \leqq 0$ on T, q_1+q_2 non-constant outer

∵) A. $(z-\alpha)^2 \sim -\alpha z$

B. $(1-q)^2 \sim -q$

C. $(q_1+q_2)^2 \sim q_1 q_2$

D. $q_1+q_2 \sim -i(q_1-q_2)$

以上の例より次のことが分かる。

(A) $\exists g(z) \in H^1$: $f(z) = (z+\alpha)^2 g(z)$ $\Rightarrow$ f : not strong outer

(B) $\exists g(z) \in H^1$, $\exists q$ nonconstant inner: $f(z)=(q+1)^2 g(z)$ $\Rightarrow$ f : not strong outer

(C) $\exists g(z) \in H^1$, $\exists q_1$, q_2 inner with q_1+q_2 non-constant outer, $f(z)=(q_1+q_2)^2 g(z)$ $\Rightarrow$ f : not strong outer

(D) $\exists g(z) \in H^1$, $\exists q_1$, q_2 inner with $\mathrm{Im}\,[q_1 q_2] \leqq 0$ on T, q_1+q_2 non-constant outer : $f(z)=(q_1+q_2)g(z)$ $\Rightarrow$ f : not strong outer

問題: 上の (A), (B), (C), (D) について逆が成立するか?

(A) E. Hayashi の反例 ([2])

$$f(z) = (1+B)^2, \quad B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-\overline{w}_n}{|w_n|} \cdot \frac{z-w_n}{1-\overline{w}_n z} \quad \text{with}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|w_n|^2}{|1-\alpha w_n|^2} = \infty \quad \text{for each } \alpha \in T$$

(B) a Conjecture in [9]

(C) 成立する。 H. Helson [3]

(D) 成立する。T. Nakazi [8]

(B) については、逆が成立すると予想されていたが、最近反例が構成されることが分かった。([5]). 以下、その例の構成方法についてのべる。

（B）　の反例の構成

まず、F(z) を次のように定義する。すなわち $\alpha_k = \exp(i/k^2)$　k=1, 2, 3, ... に対して

$$F(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(z-\alpha_k)(1-\overline{\alpha}_k z)}{(z-1)(1-z)} \qquad (z\in D=\{z:\ |z|<1\})$$

このとき、

(i)　F(z) は analytic on $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $F(z)\geqq 0$ on $T\setminus\{1\}$,

(ii)　$\mathrm{Im}[\log F(e^{it})]$ は　$L\log^+ L$　class に属する。

従って、$\log F(z)\in H^1(D)$　即ち F(z) は outer になる。

次に、正数列 $\{\varepsilon_k\}$ を　i) $\dfrac{1}{k^2} > \dfrac{1}{k^2}-\varepsilon_k > \dfrac{1}{(k+1)^2}+\varepsilon_{k+1}$

ii)　$|F(e^{it})|\leqq 1$　$(t\in(1/k^2-\varepsilon_k, 1/k^2+\varepsilon_k))$

k=1, 2, ...　を満たすように取り、$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}(1/k^2-\varepsilon_k,\ 1/k^2+\varepsilon_k)$　とおく。

そうして、関数 $g\in L^1(T)$ を

$$g(e^{it})=\begin{cases}\min\{1/|F(e^{it})|,\ 1\} : & t\in(0,2\pi)\setminus\Omega\\ 1/(k^4\varepsilon_k) : & k\in(1/k^2-\varepsilon_k, 1/k^2+\varepsilon_k)\ \text{ for some } k\end{cases}$$

とおく。$g>0$　on $T\setminus\{1\}$,　$g\in L^1(T)$, $\log g\in L^1(T)$ である。

最後に g を用いて、f を定義する。

$$f(z) = \exp\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log g(e^{it})dt/2\pi \qquad (z\in D)$$

このとき、$f\in H^1$, and outer であり更に次の (i), (ii) を満たす。

<u>(i)　$f/(1-q)^2\notin H^1$　for any nonconstant inner function q</u>

$\because$)　もし、$f/(1-q)^2\in H^1$ が成り立つと、$-q/(1-q)^2\geqq 0$　a.e on T,　かつ 任意の点 $\alpha\in T\setminus\{1\}$で locally に H^1 に属すので、$q/(1-q)^2$ は $\forall\alpha\in T\setminus\{1\}$　で analytic extension が出来る事になる。従って、q　の零点が集積する点としては 高々 z=1 のみが許される。しかし、もし q が高々 1 に集積する零点を持つ nonconstant Blaschke product of degree more than 1, とすると $f/(1-q)^2(\in H^1)$ の分母の $(1-q)^2$ は $T\setminus\{1\}$ のある点 α で２位以上の零点を持ち矛盾が起こるので、q は高々１次の Blaschke Product となる。しかし、この場合は本質的には $f/(z-1)^2\in H^1$ ということであり、

$$\int_0^{\pi} |f(e^{it})| \frac{1}{|1-e^{it}|^2} dt \geqq \int_0^{\pi} |g(e^{it})| \frac{1}{|1-e^{it}|^2} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/k^2-\varepsilon_k}^{1/k^2+\varepsilon_k} \frac{1}{\varepsilon_k k^4} \frac{1}{4\sin^2(t/2)} dt$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_k k^4}\cdot\frac{1}{4\cdot\sin^2 k^{-2}} 2\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{k^{-2}}{\varepsilon_k k^4}\right)^2 = \infty$$

より $f/(1-z)^2\notin H^1$. 即ち f は任意の nonconstant inner q に対して、$f/(1-q)^2\notin H^1$

(ii) f は strong outer ではない。

∵) $g(z) = f(z)\cdot F(z)$ とおくと、$g\in H^1$ かつ $f\sim g$, g/f は non-constant である。従って, f は strong outer ではない。

References

1. deLeeuw, K. and Rudin W., Extreme points and extremum problem in H^1. Pacific J. Math., 8(1958) 467-485
2. Hayashi, E., The solution sets of extremal problems in H^1, Proc. AMS 93-4(1985) 690-696
3. Hayashi, E., Kernel of Toeplitz operators, Integral equations mand operator and theory 9(1986)588-591
4 Helson, H., Large analytic functions II Analysis and differential equations, ed Cora Sadosky 217-220, 1990 Marcel Dekker
5. Inoue, J. An example of a non-exposed extreme function in the unit ball of H^1 to appear in Proc. Edinburgh Math. Soc.
6. Inoue, J. and Nakazi, T., Finite dimensional solution sets of extremal problems in H^1, to appear in Operator Theory : Advances and Applocations
7. Nakazi, T., Exposed points and extremal problems in H^1, J. Func. Anal. 53(1983) 224-230
8 Nakazi, T., Some of two inner functions and exposed ponts in H^1, Proc. Edinburgh Math. Soc., 35 (1992) 349-357.
9. Sarason, D., Exposed points in H^1, I, Advances and Appl. 41(1989) 485-496

Uniqueness of a Farthest Point in a Bounded Closed Set in Banach Spaces

SHIZUO MIYAJIMA

Department of Mathematics, Faculty of Science
Science University of Tokyo

AND

FUMIOKI WADA

Tôbetu High School

§1. Statement of the problem and preliminaries

"Suppose a bounded closed subset C of a Banach space E and a point $x \in E$ are given. Then does there exist a point z in C which is farthest from x? When is such a point unique?"

This is our problem, and before introducing our results, we would like to note the following facts about this problem. Let $\boldsymbol{R}^2$ be equipped with supremum norm and let C be its closed unit ball. Then there exist infinitely many farthest points in C from every point of E. On the other hand, if $\boldsymbol{R}^2$ is endowed with Euclidean norm, then $(s,t) \in \boldsymbol{R}^2$ has a unique farthest point in the same set C if and only if $st \neq 0$. This observation shows that the geometric nature of the underlying Banach space E is involved in the uniqueness problem, and we can expect the uniqueness only for "almost every" point in E.

The notion of the subdifferential of a convex function is crucial in the proofs of our results. We begin with the following definition of a convex function associated with a bounded set.

DEFINITION 1.1. For a non-empty bounded closed set C in a Banach space, we set $f_C(x) := \sup\{\, \|x-y\| \mid y \in C\,\}$.

REMARKS. (i) $f_C(x)$ is a convex function of x and is uniformly Lipschitz continuous with Lipschitz constant 1.
(ii) $f_C(x) = f_D(x)$ holds if $\overline{\mathrm{co}}\, C = \overline{\mathrm{co}}\, D$.
(iii) z is a farthest point in C from $x \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} z \in C$ and $\|x - z\| = f_C(x)$

We recall that $x^* \in E^*$ is called a subgradient of a continuous convex function f on E at $x \in E$ if

$$\langle x^*, y-x \rangle \le f(y) - f(x)$$

holds for all $y \in E$. The set of all subgradients of f at x is called the subdifferential of f at x and is denoted by $\partial f(x)$. For any $x \in E$, $\partial f(x)$ is non-empty. Moreover, $\partial f(x) = \{x^*\}$ for some $x^* \in E^*$ if and only if f is Gâteaux differentiable at $x \in E$ with its Gâteaux derivative being x^*.

On the other hand, for $x \in E$ and for each $y \in E$ the (right hand) directional derivative $d^+ f_C(x)(y) = \lim_{t \downarrow 0}\{f_C(x + ty) - f_C(x)\}/t$ exists and defines a sublinear functional of y on E. Moreover, the following equalities hold:

$$\partial f_C(x) = \{x^* \in E^* \mid \langle x^*, y\rangle \leq d^+ f_C(x)(y) \text{ for all } y \in E\}, \tag{1}$$

$$d^+ f_C(x)(y) = \max\{\langle x^*, y\rangle \mid x^* \in \partial f_C(x)\} \quad (y \in E). \tag{2}$$

§2. Existence results on farthest points

The existence problem of a farthest point has been investigated by several authors, for example by Edelstein, Asplund, Lau, and Panda–Dwivedi.

DEFINITION 2.1. (Lau) For a closed bounded set $\emptyset \neq C \subset E$, define $D(C)$ by

$$D(C) := \{x \in E \mid \forall x^* \in \partial f_C(x) \ \inf_{z \in C}\langle x^*, z - x\rangle = -f_C(x)\}.$$

THEOREM A (LAU). *$D(C)$ is a dense G_δ-set in E and in case C is weakly compact every $x \in D(C)$ has a farthest point in C from x.*

PROPOSITION 2.2. *Let C be a non-empty bounded closed subset of a Banach space E. Then $G(C) = E$ holds if and only if C is a singleton.*

DEFINITION 2.3. We say that a Banach space E is a Kadec space provided that each sequence $\{x_n\}$ in E which is weakly convergent to x with $\|x_n\| \to \|x\|$ is actually norm convergent to x.

THEOREM B (PANDA–DWIVEDI). *Let E be a reflexive Kadec space and let C be a non-empty bounded closed subset of E. Then every $x \in D(C)$ has a farthest point in C.*

§3. Uniqueness results on farthest points

As to the uniqueness, we obtain the following results.

PROPOSITION 3.1. *Suppose that E is strictly convex and that C is a non-empty relatively weakly compact subset of E. Then each point $x \in D(C)$ has at most one farthest point in C.*

THEOREM 3.2(reflexive case). *Suppose that E is reflexive and strictly convex and let C be a non-empty bounded closed subset of E. Then each $x \in D(C)$ has at most one farthest point.*

If we further impose a condition on Banach space E, we can prove both the existence and the uniqueness of a farthest point from each point of $D(C)$.

DEFINITION 3.3. A Banach space E is called strongly convex provided it is reflexive, Kadec, and strictly convex.

COROLLARY 3.4. *Suppose that E is strongly convex and that C is a non-empty bounded closed subset of E. Then each point of $D(C)$ has a unique farthest point in C. In particular, if E is a Hilbert space, then for a non-empty bounded closed subset C of E, each point of $D(C)$ has a unique farthest point in C.*

Moreover, there exists a possibility of finding a dense G_δ-set $D_0(C)$ other than $D(C)$ such that each $x \in D_0(C)$ has at most one farthest point in C.

PROPOSITION 3.5(non-reflexive case). *Let E be a strictly convex Banach space and let C be a non-empty bounded closed subset of E. Suppose that f_C is Gâteaux differentiable at $x \in E$. Then x has at most one farthest point in C.*

DEFINITION 3.6. A Banach space E is said to be an Asplund space [resp. a weak Asplund space] if it satisfies the following condition:
For each continuous convex function f defined on an open convex subset D of E, there exists a dense G_δ-set G in D such that f is Fréchet [resp. Gâteaux] differentiable at every point of G.

THEOREM 3.7(non-reflexive case). *Let E be a strictly convex weak Asplund space and let C be a non-empty bounded closed subset of E. Then there exists a dense G_δ-set $D_0(C)$ in E such that each point x in $D_0(C)$ has at most one farthest point in C.*

THEOREM 3.8(non-reflexive case). *Suppose that E is smooth and let $C \neq \emptyset$ be a relatively weakly compact closed subset of E. If C is not a singleton, then f_C is Gâteaux differentiable at every $x \in D(C)$.*

§4. Effect of G_δ property

THEOREM 4.1. *Let E be a strictly convex weak Asplund space and let C be a non-empty weakly compact subset of E. Then there exists a dense G_δ-set $D^*(C)$ in E such that each point x in $D^*(C)$ has a unique farthest point in C.*

THEOREM 4.2. *If C is a non-empty bounded closed subset of a strongly convex space E, then there exists a dense G_δ-set $D^*(C)$ in E such that each point x in $D^*(C)$ has a unique farthest point in C.*

§5. Proofs

PROPOSITION 5.1. *Let C be a non-empty bounded closed subset of a Banach space E and let $x \in E$. Then the following assertions are equivalent:*

(i) $x \in D(C)$;

(ii) $\inf_{z \in \operatorname{co} C} d^+ f_C(x)(z-x) = -f_C(x)$;

(iii) *For any $\varepsilon > 0$ there exist a $\lambda \in (0,1)$ and a $z \in \operatorname{co} C$ such that*

$$f_C(x - \lambda(x-z)) - \varepsilon\lambda < (1-\lambda)\|x-z\|. \tag{3}$$

Proof of Proposition 3.1

Since the proposition clearly holds if C is a singleton, we may assume that C is not a singleton. Now take an $x \in D(C)$. Then by Proposition 5.1, for any sequence $\{\varepsilon_n\} \subset (0,1)$ with $\varepsilon_n \downarrow 0$, there exists a sequence $\{z_n\}$ in $\overline{\operatorname{co}}\, C$ and $\{\lambda_n\}$ in $(0,1)$ such that

$$f_C(x + \lambda_n(z_n - x)) - f_C(x) < -\lambda_n f_C(x) + \varepsilon_n \lambda_n.$$

Since C is weakly relatively compact, $\overline{\operatorname{co}}\, C$ is weakly compact by the Krein–Smulian theorem. Hence we may assume that z_n is weakly convergent to some $z \in \overline{\operatorname{co}}\, C$ by virtue of the Eberlein-Smulian theorem. We may also assume that $x = 0$ and $f_C(0) = 1$ without loss of generality (by scaling and translation). Suppose that $x = 0$ has a farthest point y in C. Then $\|y\| = f_C(0) = 1$ and for each $n \in N$ we get

$$\|y - \lambda_n z_n\| \leq f_C(\lambda_n z_n) < 1 - \lambda_n + \varepsilon_n \lambda_n,$$

and hence

$$\|y - \lambda_n z_n\| - \|y\| < -(1-\varepsilon_n)\lambda_n.$$

Taking a $\varphi \in \partial\|\cdot\|(y)$, we obtain from the above inequality

$$-\lambda_n\langle\varphi, z_n\rangle < -(1-\varepsilon_n)\lambda_n$$

and hence

$$\langle\varphi, z_n\rangle > 1-\varepsilon_n.$$

Since $\varepsilon_n \downarrow 0$, we obtain $\langle\varphi, z\rangle \geq 1$ which implies $\langle\varphi, z\rangle = 1$ and $\|z\| = 1$ on account of $\|z\| \leq 1$ and $\|\varphi\| = 1$. On the other hand $\langle\varphi, y\rangle = 1$ clearly holds, hence $\langle\varphi, y+z\rangle = 2$. Consequently $\|y+z\| = 2$, and hence we obtain $y = z$ by the strict convexity of E. Thus we have proved the uniqueness of a farthest point from x. ∎

Proof of Proposition 3.5

We may assume that C is not a singleton. Let y, $z \in C$ be farthest points from x and let φ be the unique element of $\partial f_C(x)$. Then $\|\varphi\| = 1$ and

$$\langle\varphi, x-y\rangle = \|x-y\| = \|x-z\| = \langle\varphi, x-z\rangle.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\|(x-y)+(x-z)\| &\geq \langle\varphi, (x-y)+(x-z)\rangle \\ &= \|x-y\| + \|x-z\|\end{aligned}$$

holds, hence $x-y = x-z$ by the strict convexity of E, whence $y = z$. ∎

§6. Example

For a non-empty bounded closed subset C of a Banach space E and a point $x \in E$, $\mathrm{far}(x, C)$ denotes the set of farthest points in C from x. $\mathrm{far}(C)$ denotes the set of points in C which are farthest from some point in E, i.e., $\mathrm{far}(C) := \cup_{x\in E}\mathrm{far}(x, C)$.

EXAMPLE 6.1. (A) Suppose that $E = l^2$ (over the reals) and $C = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1, x \geq 0\}$. Then

$$\mathrm{ext}\, C = \exp C = \{0\} \cup \{x \in C \mid \|x\| = 1\}, \tag{a}$$

$$\mathrm{far}(C) = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}. \tag{b}$$

For $x \in E$, we define the positive and negative part $x^\pm$ of x by $x^\pm = (\pm x) \vee 0$, respectively. Then as to $\mathrm{far}(x, C)$,

$$\mathrm{far}(x, C) = \begin{cases} \emptyset, & (x > 0) \\ \{x^-/\|x^-\|\}, & (x^- \neq 0) \\ \{z \in \mathrm{far}(C) \mid z \perp x\}, & (x \geq 0 \text{ but not } x > 0) \end{cases} \tag{c}$$

holds, where $x \geq 0$ [resp. $x > 0$] means that every component of $x \in E$ is nonnegative [resp. positive]. Moreover,

$$D(C) = \{x \in E \mid x^- \neq 0\}. \tag{d}$$

(B) Suppose that $E = L^2[0,1]$ (over the reals) and $C = \{f \in E \mid \|f\| \leq 1, f \geq 0 \text{ a.e.}\}$. Then

$$\operatorname{ext} C = \exp C = \{0\} \cup \{f \in C \mid \|f\| = 1\}, \tag{e}$$

$$\operatorname{far}(C) = \{f \in C \mid \|f\| = 1\}. \tag{f}$$

Let $f^{\pm}$ be the positive and negative part of $f \in E$ as in (A). Then as to $\operatorname{far}(f, C)$,

$$\operatorname{far}(f, C) = \begin{cases} \emptyset, & (f > 0 \text{ a.e.}) \\ \{f^-/\|f^-\|\}, & (f^- \neq 0) \\ \{z \in \operatorname{far}(C) \mid z \perp f\}, & (f \geq 0 \text{ but not } f > 0 \text{ a.e.}) \end{cases} \tag{g}$$

holds, and we have

$$D(C) = \{f \in E \mid f^- \neq 0\}. \tag{h}$$

References

[1] E. Asplund, *Farthest points in reflexive locally uniformly rotund Banach spaces*, Israel J. Math. **4** (1966), 213-216.

[2] M. Edelstein, *Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces*, Israel J. Math., **4** (1966), 171-176.

[3] K.-S. Lau, *Farthest points in weakly compact sets*, Israel J. Math., **22** (1975), 168–174.

[4] B. B. Panda and K. Dwivedi, *On existence of farthest points*, Indian J. Pure and Appl. Math., **16** (1985), 486–490

Perron-Frobenius 定理のハウスドルフ次元への応用

お茶の水女大·理　竹尾　富貴子

§1. 序

自然科学の分野のみならず、経済学などにおいても、フラクタル構造の研究がいろいろな現象の解明に役立っている。このフラクタルについて、その特徴の定量化の一つとして，ハウスドルフ次元がある．典型的なフラクタルであるカントール集合とか，コッホ曲線などは，繰返される関数系の不変集合で，お互いほとんど交りを持たない Moran の開集合条件 [4] を満たす自己相似集合である．このような自己相似集合はその相似次元から容易にハウスドルフ次元を求めることができる [2]．しかし，一般の集合のハウスドルフ次元を求めることは容易ではない．V. Drobot and J. Turner は非負の行列に対するPerron-Frobenius の定理を用いて， Moran の開集合条件を満たすような，単位区間の部分集合のハウスドルフ次元を求めている [1].

ここでは，V. Drobot and J. Turner の方法を発展させて，$\mathbf{R}^d$ の自己相似でない，ある種の部分集合のハウスドルフ次元を求める方法について述べる．そして，これは Moran の開集合条件を満たさない関数系の像でも，ある種の条件を満たせば適用できる.

k 個の値をもつ無限数列空間 $E_k^{(\omega)}$ に距離 ρ_δ を導入し，長さ $r+1$ の数列空間 $E_k^{(r+1)}$ の有限集合 F に対し，それから誘導された $E_k^{(\omega)}$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ と F から

誘導された行列 M を考える．行列 M のスペクトル半径 λ_0 を用いて，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元が $\log_{\frac{1}{\delta}}\lambda_0$ であることを示す（命題3.5，定理3.6）．さらに，この結果の応用として，ハウスドルフ次元を保存するような $\mathcal{A}(F)$ から R^d への写像の条件を調べることにより，R^d におけるフラクタルのハウスドルフ次元を求める．定理4.1では，Moran の開集合条件より弱い，一種の開集合条件を満たすとき，$\mathcal{A}(F)$ から R^d への写像はハウスドルフ次元を保存することを示し，定理4.2では，交りのあるような関数系に対しても，ある種の条件下では，ハウスドルフ次元が保存されることを示す．最後にいくつか具体的な例をあげる．

§2．記号と準備

(1)　1から k までの値をもつ数列の集合 $E_k^{(\omega)}$，$E_k^{(n)}$，$E_k^{(*)}$ を

$$E_k^{(\omega)} = \{\underline{x}=(x_j)_{j=1}^{\infty} \mid x_j \in \{1,2,\cdots,k\}\}$$

$$E_k^{(n)} = \{\underline{\alpha}=(\alpha_j)_{j=1}^{n} \mid \alpha_j \in \{1,2,\cdots,k\}\}$$

$$E_k^{(*)} = \bigcup_{n\in N} E_k^{(n)}$$

とする．

任意の数 $n \in N \cup \{0\}$ に対し，写像 $\sigma^n : E_k^{(\omega)} \to E_k^{(\omega)}$ と $P_n : E_k^{(\omega)} \to E_k^{(*)} \cup \{\emptyset\}$ を

$$\sigma^n(x_1x_2\cdots\cdots) = (x_{n+1}x_{n+2}\cdots\cdots)$$

$$P_n(x_1x_2\cdots\cdots) = \begin{cases} (x_1\cdots x_n) & (n \geqq 1) \\ \emptyset & (n=0) \end{cases}.$$

により定義する．

同様に $\sigma^n : \bigcup_{p>n} E_k^{(p)} \to E_k^{(*)}$ と $P_n : \bigcup_{p>n} E_k^{(p)} \to E_k^{(*)} \cup \{\emptyset\}$ も定義する．

次に $\underline{\alpha} \in E_k^{(n)}$ と $\underline{\beta} \in E_k^{(*)} \cup E_k^{(\omega)}$ に対し，$P_n\underline{\beta} = \underline{\alpha}$ を満たすとき，$\underline{\beta} > \underline{\alpha}$ と書く．

$\underline{\alpha} \in E_k^{(*)}$ に対し，$\underline{\alpha}$ で始まるすべての無限数列の集合をシリンダー集合といい，$[\underline{\alpha}]$ と書く．即ち，

$$[\underline{\alpha}] = \{\underline{\beta} \in E_k^{(\omega)} \mid \underline{\beta} > \underline{\alpha}\}$$

(2) 数列空間 $E_k^{(\omega)}$ に距離 ρ_δ $(0<\delta<1)$ を以下のように導入する．

$\underline{x}=(x_j)$，$\underline{y}=(y_j) \in E_k^{(\omega)}$ に対し，

$$\rho_\delta(\underline{x},\underline{y}) = \begin{cases} \delta^n & (\text{if } P_n\underline{x}=P_n\underline{y} \text{ and } x_{n+1} \neq y_{n+1} \text{ for some } n \in N \cup \{0\}) \\ 0 & (\text{if } \underline{x}=\underline{y}) \end{cases}$$

(3) $r \geq 1$ に対し，長さ $r+1$ の数列空間 $E_k^{(r+1)}$ の有限部分集合 $F = \{\underline{\alpha}^1, \cdots, \underline{\alpha}^l\}$ を考え，この F から作られる $E_k^{(*)}$ の部分集合 $A(F;p)$，$A(F)$ を

$$A(F;p) = \begin{cases} \{\underline{\gamma} \in E_k^{(p)} \mid P_{r+1}\sigma^{j-1}\underline{\gamma} \in F \text{ for any } j=1,2,\cdots p-r\} & (p \geq r+1) \\ \{P_p\underline{\alpha} \mid \underline{\alpha} \in F\} & (1 \leq p \leq r) \end{cases}$$

$$A(F) = \bigcup_{p \in N} A(F;p)$$

により，定義する．

さらに $E_k^{(\omega)}$ の部分集合 $\mathcal{A}_p(F)$，$\mathcal{A}(F)$ を

$$\mathcal{A}_p(F) = \{\underline{x} \in E_k^{(\omega)} \mid \underline{x} > \underline{\gamma} \text{ for some } \underline{\gamma} \in A(F;p)\}$$

$$\mathcal{A}(F) = \bigcap_{p \in N} \mathcal{A}_p(F)$$

により，定義する．

集合 $P_r(F) = \{P_r\underline{\alpha} \mid \underline{\alpha} \in F\}$ を F' で表し，$\#(F')=m$，$F' = \{\underline{\beta}^1, \underline{\beta}^2, \cdots, \underline{\beta}^m\}$ とする．

次に，$m \times m$ 行列 $M = (m_{ij})$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (\exists\, \underline{\alpha} \in F \text{ s.t. } P_r\underline{\alpha} = \underline{\beta}^i \text{ and } P_r(\sigma\underline{\alpha}) = \underline{\beta}^j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を考え，M を F から誘導された行列という．

(4) 距離空間 (X, d) において，部分集合 E の Hausdorff 次元は次のように定義される： 任意の $\varepsilon > 0$ と $s \geq 0$ に対して

$$H^s_\varepsilon(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\ U_i)^s \mid \mathrm{diam}\ U_i < \varepsilon,\ \cup U_i \supset E\}$$

を定義する．ここで，diam U_i は U_i の直径を表す．

$\varepsilon \searrow 0$ のとき $H^s_\varepsilon(E)$ は単調増加するので，

$$H^s(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} H^s_\varepsilon(E)$$

が存在する．このとき，$H^s(E)$ に対し

$$H^s(E) = \begin{cases} \infty & (0 \leqq s < s_0) \\ 0 & (\quad s > s_0) \end{cases}$$

をみたすような $s_0 \geqq 0$ が存在する．この s_0 を E の Hausdorff 次元という．

§3．無限数列空間のハウスドルフ次元

これ以後，F は $\mathcal{A}(F)=\{\underline{x}=(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E_k^{(\omega)} \mid x_n x_{n+1} \cdots x_{n+r} \in F$ for any $n \in \mathrm{N}\}$ が空集合でないような $E_k^{(r+1)}$ $(r \geqq 1)$ の有限部分集合とし，$F' = P_r(F) = \{\underline{\beta}^1, \underline{\beta}^2, \cdots, \underline{\beta}^m\}$ かつ，M は F から誘導された $m \times m$ 行列でそのスペクトル半径を λ_0 とし，$0<\delta<1$ とする．

この節では $\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元を求める．

その際に必要なペロン－フロベニウスの定理について，まず述べる．

正方行列 S が，適当な置換行列 Q により $QSQ^T = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ と表されるとき，行列 S は可約行列であるといい，そのような置換行列が存在しないとき，既約行列であるという．

【註】 $m \geqq 2$ のとき，M が $m \times m$ の既約行列ならば，M は零行列ではない．

定理（ペロン－フロベニウスの定理）

$m \geqq 2$ で，S を $m \times m$ の非負行列とし，$r(S)$ を S のスペクトル半径とする．こ

のとき，

(1) $Sv \geqq \lambda v$ なる零でないベクトル $v \geqq 0$ が存在するならば，$r(S) \geqq \lambda$ である.

(2) S が既約行列ならば，$r(S)$ は正で，$r(S)$ は S の固有値で，$r(S)$ に対応する正の固有ベクトル u がある．即ち，$Su=r(S)u$ かつ，すべての j $(1 \leqq j \leqq m)$ に対し，$u_j>0$ である.

$\mathcal{A}(F)$ が空集合でないという仮定に関し，次の補題が成りたつ.

<u>補題 3.1</u>． 次は同値である.

(1) $\mathcal{A}(F)$ は空集合でない.

(2) $\lambda_0 \geqq 1$ である.

$\mathcal{A}(F)$ のハウスドルフ次元の計算に必要な，$A(F;p)$ や $A(F;p,\gamma_0)$ の要素の数に関する補題を，以下に示す.

<u>補題 3.2</u>． $p \geqq t \geqq r$ で，$\gamma_0 \in A(F;t)$ はある $\beta^j \in F'$ に対し $\sigma^{t-r}\gamma_0 > \beta^j$ を満たすとする．このとき，

$$\#(A(F;p,\gamma_0))=\langle e_j, M^{p-t}1_m\rangle \text{ かつ } \#(A(F:p))=\langle 1_m, M^{p-r}1_m\rangle$$

がなりたつ.

ただし，e_j，1_m の転置ベクトルはそれぞれ $\mathbf{R}^m$ におけるベクトル $e_j^T=(0\cdots0\overset{j}{1}0\cdots0)$，$1_m^T=(1\cdots1)$ で，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^m$ に於ける内積であり、$\#(A(F:p))$ は $(A(F:p))$ の元の数を表す.

更に，この内積の値を求めるに際し，ペロン－フロベニウスの定理を用いて次のような評価を得る

補題 3.3. 1) すべての $p \geqq r$ に対して

$$\#(A(F;p)) \leqq c_0(p-r)^n \lambda_0^{p-r}$$

が成りたつような $c>0$ が存在する.

2) F から誘導された行列 M が既約ならば，ある $c>0$ が存在して

すべての $p \geqq r$ に対して $\lambda_0^{p-r} \leqq \#(A(F;p)) \leqq c_0\lambda_0^{p-r}$ かつ

$p \geqq t \geqq r$ を満たすような $\gamma_0 \in A(F:t)$ に対し，$\#(A(F;p,\gamma_0)) \leqq c\lambda_0^{p-t}$

が成りたつ.

ハウスドルフ次元の下からの評価のため，次の補題が必要である.

補題 3.4. E を $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ のコンパクトな部分集合とし，$s>0$ とする.

このとき，以下のような性質を満たす $\varepsilon>0$ が存在するならば，$\dim E \geqq s$ である.

"$[\gamma^j]$ の直径が ε 以下で，シリンダー集合 $[\gamma^i]$ と $[\gamma^j]$ $(i \neq j)$ が共通部分を持たないで $\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{diam}\,[\gamma^j])^s \leqq 1$ が成りたつならば，$E_k^{(\omega)}$ のどんな有限集合 $\{\gamma^1, \cdots, \gamma^n\}$ に対しても，$\bigcup_{j=1}^{n}[\gamma^j]$ は E を覆うことはできない."

補題 3.3 及び 3.4 を用いて，M が既約行列のときハウスドルフ次元に関する次の命題を得る.

命題 3.5. M が既約行列ならば，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ に対し，$\dim \mathcal{A}(F) = \log_{\frac{1}{\delta}} \lambda_0$ が成りたつ.

M が可約行列の場合でも，補題 3.3(2) 及び命題 3.5 から，次の定理が導かれる.

<u>定理 3.6</u>．　F は $\mathscr{A}(F)=\{\underline{x}=(x_j)_{j=1}^{\infty}\in E_k^{(\omega)}\mid x_n x_{n+1}\cdots x_{n+r}\in F$ for any $n\in$ N$\}$ が空集合でないような $E_k^{(r+1)}$ $(r\geqq 1)$ の有限部分集合とし，F から誘導された $m\times m$ 行列 M のスペクトル半径を λ_0 とする．

このとき，距離空間 $(E_k^{(\omega)},\rho_\delta)$ $(0<\delta<1)$ における $\mathscr{A}(F)$ のハウスドルフ次元は

$$\dim\mathscr{A}(F)=\log_{\frac{1}{\delta}}\lambda_0$$

である．

§4．R^d におけるフラクタルのハウスドルフ次元

この節では，$(f_1,\cdots,f_k)$ を R^d における縮小比 $\delta(0<\delta<1)$ の自己相似写像の繰返しの関数系，即ち，任意の $u,v\in\mathrm{R}^d$ に対し，$\|f_j(u)-f_j(v)\|=\delta\|u-v\|$ が成りたつとする．このとき，$K=\bigcup_{j=1}^{k}f_j(K)$ を満たすような $(f_1,\cdots,f_k)$ に関するコンパクトな不変集合 K が一意に存在することが知られている [3]．カントール集合，コッホ曲線，シェルピンスキー・ガスケットなどいくつかの典型的なフラクタルは，ある自己相似写像の繰返しの関数系に関する不変集合で，これらのハウスドルフ次元はよく知られている．しかし，一般のフラクタル集合のハウスドルフ次元を求めることは，容易ではない．ここでは，繰返しの関数系のある種の部分集合に対するハウスドルフ次元を前の節の結果を用いて求める方法について述べる．

前節の結果を用いるために，無限数列空間 $E_k^{(\omega)}$ からコンパクト不変集合 K への自然な埋め込み写像 φ で任意の $\underline{x}=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in E_k^{(\omega)}$ に対し $\varphi(\underline{x})=\bigcap_{n=1}^{\infty}f_{x_1}f_{x_2}\cdots f_{x_n}(K)$ なるものを考える．

<u>定理 4.1</u>．　$(f_1,\cdots,f_k)$ を R^d における縮小比 $\delta(0<\delta<1)$ の自己相似写像の繰返しの関数系とし，K を $(f_1,\cdots,f_k)$ に関するコンパクトな不変集合，φ を自然な埋め

込み写像とする．F は $\mathscr{A}(F)$ が空集合でないような $E_k^{(r+1)}$ $(r \geqq 1)$ の有限部分集合とし，$F' = P_r(F) = \{\beta^1, \beta^2, \cdots, \beta^m\}$ とする．このとき

(4.1) $\qquad i \neq j$ なる $\beta^i, \beta^j \in F'$ に対して $f_{\beta^i}(U) \cap f_{\beta^j}(U) = \emptyset$

かつ

(4.2) $$(\mathscr{A}(F)) \subset \overline{U}$$

を満たすような空でない有界な開集合 U が存在するならば，距離空間 $(E_k^{(\omega)}, \rho_\delta)$ に於いて，$\mathscr{A}(F)$ のどんな部分集合 A に対しても

$$\dim A = \dim \varphi(A)$$

が成りたつ．

【註】関数系 $(f_1, \cdots, f_k)$ と自然な埋め込み写像 $\varphi : E_k^{(\omega)} \to K$ があるとき，ハウスドルフ次元が等しくなる条件として，Moran の開集合条件が知られている．それは

"$i \neq j$ ならば，$f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$ がなりたち，すべての i に対して，

$U \supset f_i(U)$ が成りたつ"

ことである．

このことは，上述の定理4.1の系として，でてくる．

<u>定理 4.1の系</u>　関数系 $(f_1, \cdots, f_k)$ が Moran の開集合条件を満たせば距離空間 $E_k^{(\omega)}$ の任意の部分集合 A に対し，$\dim A = \dim \varphi(A)$ が成りたつ．

更に関数系にある程度の交りがある場合も，その中の特別なものに交りが無ければ，ハウスドルフ次元が保存されることを示すのは次の定理である．

<u>定理 4.2</u>．　$(f_1, \cdots, f_k)$，K，φ，F，$\{\beta^1, \beta^2, \cdots, \beta^m\}$ は定理4.1と同じとする．M は F から誘導された行列とし，$v = (v_j)$ を M のスペクトル半径 λ_0 に対応す

る非負の固有ベクトルとする．J_0，F_0 を以下のように決める．

$J_0=\{j\in\{1,\cdots,m\}\mid v_j>0\}$，$F_0=\{\underline{\alpha}\in F\mid \underline{\alpha}>\underline{\beta}^i,\ \sigma\underline{\alpha}>\underline{\beta}^j$ なる $i,j\in J_0$ が存在する$\}$

このとき，

$$J_0 \text{ の異なる元 } i,j \text{ に対して } f_{\underline{\beta}^i}(U)\cap f_{\underline{\beta}^j}(U)=\emptyset$$

かつ $$\varphi(\mathcal{A}(F_0))\subset\bar{U}$$

を満たすような空でない有界な開集合 U が存在するならば，距離空間 $(E_k^{(\omega)},\rho_\delta)$ の部分集合 $\mathcal{A}(F)$ に対して

$$\dim\mathcal{A}(F)=\dim\varphi(\mathcal{A}(F))$$

が成りたつ．

§5．例

この節では，定理4.1 及び 4.2 を使っていくつかのフラクタルのハウスドルフ次元を求める．

(1) コッホ曲線のハウスドルフ次元は相似次元から容易に求められることがよく知られているが，定理4.1 を使った方法を述べる．繰返しの関数系として，$f_1(z)=\mu\bar{z}$，$f_1(z)=\overline{\mu z}+\mu$ を考える．ただし，$\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ で $\bar{z}$ は z の複素共役である．

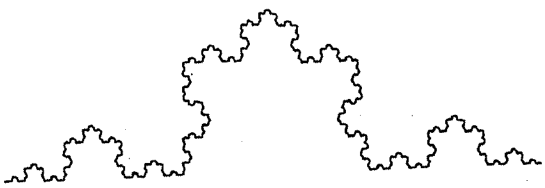

図1

このとき，コッホ曲線は f_1，f_2 による自然な埋めこみ写像の像である．F として集合 $\{(11),(12),(21),(22)\}$ とすると，F から誘導された行列 M は

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$でそのスペクトル半径 λ_0 は 2 である．$(E_2^{(\omega)}, \rho_{\frac{1}{\sqrt{3}}})$ に於ける$\mathcal{A}(F)$のハウスドルフ次元は定理3.6 により$\log_{\sqrt{3}} 2$ となる．$U=\{z=\xi+i\eta \mid 0<\eta<\frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{3}\eta<\xi<1-\sqrt{3}\eta\}$ は定理4.1の系の仮定を満たすのでコッホ曲線のハウスドルフ次元は $\log_3 4$ となる．

(2) 繰返しの関数系として，$f_1(z)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z$，$f_2(z)=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ $(z\in\mathrm{C})$ を考える．関数系 (f_1, f_2) に関する不変集合は図(2a) に示すように，いわゆるドラゴンと呼ばれるものである．このハウスドルフ次元は2であるが，この境界(図2b)のハウスドルフ次元は整数ではない．

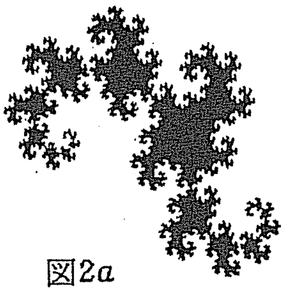

図2a

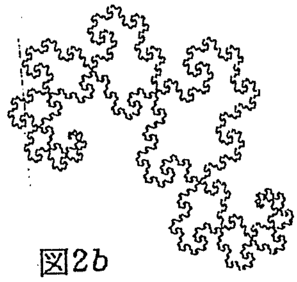

図2b

$f_3(z)=(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)z$ を考え，$F=\{(111), (112), (122), (123), (211), (212), (221), (231), (311), (312)\}$ とすると，$\mathcal{A}(F)$ の自然な埋め込み写像の像はドラゴンの境界(図2b)になる．このとき，$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり，

行列 M のスペクトル半径 λ_0 は次の方程式を満たす．

$$(\lambda_0^3-\lambda_0^2-2)\lambda_0^3=0$$

λ_0 は，約 1.6956 となる．定理4.1の系の条件を満たす R^d の空でない有界開集合 U は容易にみつけられないが，U として，ドラゴンの内部とすると，定理4.1 の仮定を満たす．従って，定理4.1 を用いて，ドラゴンの境界のハウスドルフ次元は

$\log_{\sqrt{3}}\lambda_0$ で約 1.5236 となる．

(3) $E_4^{(2)}$ の部分集合 F={(11), (12), (21), (22), (31), (32), (33), (34), (41), (42), (43), (44)} を考えると，F'={(1), (2), (3), (4)}，

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

かつ M のスペクトル半径は 2 となり，$\mathcal{A}(F)$のハウスドルフ次元は定理3.6により $\log_3 4$ となる．次に以下のような 4 つの関数系をとり，$\mathcal{A}(F)$の自然な埋め込みによる像を考える．

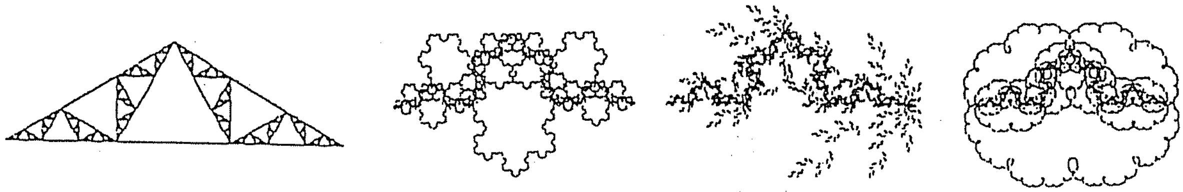

図3a　　図3b　　図3c　　図3d

$$3a: f_1(z)=\delta z,\ f_2(z)=\delta z+1-\delta,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$$

$$3b: f_1(z)=\overline{\mu z},\ f_2(z)=\mu\bar{z}+1-\mu,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$$

$$3c: f_1(z)=\delta\bar{z},\ f_2(z)=\mu z+1-\mu,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$$

$$3d: f_1(z)=\bar{\mu}z,\ f_2(z)=\mu z+1-\mu,\ f_3(z)=\mu\bar{z},\ f_4(z)=\overline{\mu z}+1-\bar{\mu}$$

ここで，$\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$，$\delta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする．$3a$ ~ $3c$ において、f_1f_1 と f_3f_3 は同じになるので，定理4.1の (4.1), (4.2) を満たすような開集合 U はないが，$v^T=(0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)$, $J_0=\{3, 4\}$，F_0={(33), (34), (43), (44)} として，定理 4.2 を用いることができる．このとき，$Mv=2v$ となり，$U=\{z=\xi+i\eta \mid 0<\eta<\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ \sqrt{3}<\xi<1-\sqrt{3}\eta\}$ は定理 4.2 の仮定を満たす．従って，定理 4.2 を用いて，これらの次元は $\log_3 4$ となる．

【参考文献】

[1] V. Drobot and J. Turner, *Hausdorff Dimension and Perron-Frobenius Theory*, Illinois U. of Math. 33(1989),1-9.

[2] G. A. Edgar, "Measure, topology and Fractal Geometry", Springer-Verlag, 1990

[3] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30(1982), 713-747.

[4] P. A. Moran, *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Camb. Phil. Soc. 42(1946), 15-23.

[5] F. Takeo, *Hausdorff dimension of a set of sequences and its application to some fractals*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser Verlag, to appear.

Andô's matrices of normal extensions of subnormal operators and their applications

斉藤 功　　　東京理科大学 理学部

pure operator, subnormal operator を次のように定義する。ただし、H は complex Hilbert space, $B(H)$ を H 上の bounded linear operator の全体とする。

<u>定 義</u>

$A \in B(H)$ が pure とは A の reducing subspace M で $A|M$ が normal となるものが、$\{0\}$ のみであることをいう。また $S \in B(H)$ が subnormal とは H を含む Hilbert space K と normal operator $N \in B(K)$ が存在して $S = N|H$ となることをいう。

いま、$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, $N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$ on $K = H \oplus H^{\perp}$ を S の minimal な normal extension とする。このとき N は S により unitary 同型の意味で一意に定まる。よって T も S により unitary 同型の意味で一意に定まる。

J. B. Conway [2] は次の定義を与えた。

<u>定 義</u>

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator とするとき、上の T を S の dual と定める。そして $S \cong T$ のとき、S を self-dual subnormal operator という。

上の定義からは、subnormal operator S が与えられたとき、その normal extension N が、どのようなものになるかは、わからない。しかし、次に示す安藤の定理 [1] により、S から具体的に S の normal extension N が、operator matrix として与えられる。

H 上の self-adjoint operator T に対し　ran $T \oplus \ker T$ から H への densely defined operator T^{-1} を $T^{-1}T = P$, $T^{-1}(I-P) = 0$ で定義する。ただし、P は H から cl ran T への orthogonal projection とし、cl ran T は、T の range の closure とする。

この T^{-1} を T の partial inverse と呼ぶ。また densly defined operator S が bounded なとき、その bounded extension も同じ記号 S で表す。

安藤の定理

$S \in B(H)$ を subnormal operator とする。次の式より、$A_n, S_n \in B(H)$ を帰納的に定義する。

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 0, \quad S_0 = S, \\
A_n &= (A_{n-1}^2 + S_{n-1}^* S_{n-1} - S_{n-1} S_{n-1}^*)^{1/2}, \\
S_n &= A_n S_{n-1} A_n^{-1},
\end{aligned}
$$

ただし、A_n^{-1} は、A_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$A_{n-1}^2 + S_{n-1}^* S_{n-1} - S_{n-1} S_{n-1}^* \geq 0,$$

$$S_n A_n = A_n S_{n-1}$$

が、成立し $A_n S_{n-1} A_n^{-1}$ は、有界となる。そして $H \oplus H \oplus H \oplus H \oplus \cdots$ 上の operator

$$
N := \begin{pmatrix}
S & A_1 & & & \\
 & S_1 & A_2 & & \\
 & & S_2 & A_3 & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

は、bounded normal operator となり、ノルムは $\|S\|$ と等しい。つまり、N は、S の normal extension となる。

上の S の normal extension N は、必ずしも minimal となるわけではない。Stampfli [4] は、subnormal weighted shift の minimal normal extension を与えた。しかし、安藤の定理を使って、一般の subnormal operator の minimal normal extension が得られる。

$S \in B(H)$ を normal でない subnormal operator, A_n, S_n を安藤の定理で述べたものとする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cl}\operatorname{ran} S_n &\subseteq \operatorname{cl}\operatorname{ran} A_n, \\
\operatorname{cl}\operatorname{ran} A_{n+1} &\subseteq \operatorname{cl}\operatorname{ran} A_n
\end{aligned}
$$

が成立する。これより、各 $n \geq 1$ に対し、$\operatorname{cl}\operatorname{ran} A_{n+1}$ から $\operatorname{cl}\operatorname{ran} A_n$ への operator $\hat{A}_{n+1}$ を A_{n+1} の制限として定義でき、$\operatorname{cl}\operatorname{ran} A_n$ から $\operatorname{cl}\operatorname{ran} A_n$ への operator $\hat{S}_n$ を S_n の制限として定義できる。また、$\operatorname{cl}\operatorname{ran} A_1$ から H への operator $\hat{A}_1$ を A_1 の制限として定義する。

定 理

$S \in B(H)$ を normal でない subnormal operator, A_n, S_n, $\hat{A}_n$, $\hat{S}_n$ を上で述べたものとする。このとき、$H \oplus \mathrm{cl\,ran}\, A_1 \oplus \mathrm{cl\,ran}\, A_2 \oplus \mathrm{cl\,ran}\, A_3 \oplus \cdots$ 上の operator

$$\hat{N} := \begin{pmatrix} S & \hat{A}_1 & & & \\ & \hat{S}_1 & \hat{A}_2 & & \\ & & \hat{S}_2 & \hat{A}_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

は、S の minimal normal extension となる。

この結果の応用として、次の様な結果を得た。$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして

$$\begin{aligned} A &:= (S^*S - SS^*)^{1/2} | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ B &:= S^* | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*). \end{aligned}$$

とすると、A と B は S の unitary invariants の complete system を形成すること、つまり次のことが知られている。([5])

$S, S' \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして A, A', B, B' を上のように定める。このとき $\mathrm{cl\,ran}(S'^*S' - S'S'^*)$ から $\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*)$ への isomorphism U が存在して

$$U^*AU = A', \quad U^*BU = B'$$

となるならば、S と S' は同型となる。

上の A, B を用いて、S の dual の行列表現が得られ、そして A, B を用いた S の行列表現が、得られた。

定 理

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして

$$\begin{aligned} A &:= (S^*S - SS^*)^{1/2} | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ B &:= S^* | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*). \end{aligned}$$

とする。次の式より、$E_n, F_n \in B(\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*))$ を帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} E_1 &= A, \quad F_1 = B, \\ E_n &= (E_{n-1}^2 + F_{n-1}^*F_{n-1} - F_{n-1}F_{n-1}^*)^{1/2}, \\ F_n &= E_nF_{n-1}E_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし、E_n^{-1} は、E_n の partial inverse とする。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$E_{n-1}^2 + F_{n-1}^* F_{n-1} - F_{n-1} F_{n-1}^* \geq 0,$$

$$F_n E_n = E_n F_{n-1}$$

が、成立し $E_n F_{n-1} E_n^{-1}$ は、有界となる。このとき、各 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathrm{cl\,ran}\ F_n &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\ E_n, \\ \mathrm{cl\,ran}\ E_{n+1} &\subseteq \mathrm{cl\,ran}\ E_n \end{aligned}$$

が成立する。よって、各 $n \geq 1$ に対し、$\mathrm{cl\,ran}\ E_{n+1}$ から $\mathrm{cl\,ran}\ E_n$ への operator $\hat{E}_{n+1}$ を E_{n+1} の制限として定義でき、$\mathrm{cl\,ran}\ E_n$ から $\mathrm{cl\,ran}\ E_n$ への operator $\hat{F}_n$ を F_n の制限として定義できる。このとき、S は、$\mathrm{cl\,ran}\ E_1 \oplus \mathrm{cl\,ran}\ E_2 \oplus \mathrm{cl\,ran}\ E_3 \oplus \cdots$ 上の operator

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_1^* & & & & \\ \hat{E}_2^* & \hat{F}_2^* & & & \\ & \hat{E}_3^* & \hat{F}_3^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

とユニタリ同型となる。

上の定理より A と B が S の unitary invariants の complete system を形成することは、直ちに得られる。

また、次の様な結果も得られた。

命　題

$S \in B(H)$ を pure な subnormal operator, そして

$$\begin{aligned} A &:= (S^*S - SS^*)^{1/2} | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*), \\ B &:= S^* | \mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*). \end{aligned}$$

とする。このとき、S が self-dual subnormal operator となる必要十分条件は、$\mathrm{cl\,ran}(S^*S - SS^*)$ 上の unitary operator U が存在して

$$\begin{aligned} U^*AU &= A, \\ U^*BU &= AB^*A^{-1}, \end{aligned}$$

となることである。ただし、A^{-1} は A の partial inverse とする。

任意の normal operator $B \in B(H)$ に対し

$$S := \begin{pmatrix} B^* & & & & \\ I & B^* & & & \\ & I & B^* & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} B & & & & \\ I & B & & & \\ & I & B & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$X := \begin{pmatrix} I & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

とすると、$\begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$ は、normal となり、S は subnormal となる。さらに、

$$B = S^*|\mathrm{cl}\,\mathrm{ran}(S^*S - SS^*)$$

となる。では、任意の operator $B \in B(H)$ に対し

$$B = S^*|\mathrm{cl}\,\mathrm{ran}(S^*S - SS^*)$$

となる subnormal operator S が、存在するだろうか。$\dim H = 2$ のときは、これが成立する。

定　理

2次元 複素 Hilbert 空間 H 上の任意の operator $B \in B(H)$ に対し

$$B = S^*|\mathrm{cl}\,\mathrm{ran}(S^*S - SS^*)$$

となる subnormal operator S が、存在する。

参考文献

[1] T. Andô, *Matrices of normal extensions of subnormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **24** (1963), 91–96.

[2] J. B. Conway, The dual of a subnormal operator, J. Operator Theory, **5**, no.2, (1981), 195-211.

[3] I. Saito,*Andô's matrices for normal extensions of subnormal operators and their applications*, SUT Journal of Mathematics, **28** (1992), no.2.

[4] J. G. Stampfli, *Which weighted shifts are subnormal?*, Pacific J. Math., **17** (1966), 367–379.

[5] M. Martin, M. Putinar, "Lectures on Hyponormal Operators," Birkhaüser-Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.

Generalized Interpolation in Finite Maximal Subdiagonal Algebras

Kichi-Suke Saito (Niigata University)

1. Introduction

In [15], Sarason studied the theory of generalized interpolation in $\mathbb{H}^\infty$ over the unit circle and proved two classical interpolation theorems due to Caratheodory and Pick. In fact, the generalized interpolation is an operator dilation. In this note, we introduce the notion of generalized interpolation in finite maximal subdiagonal algebras in the sense of Arveson in [1].

Our setting is the following. Let $\mathfrak{A}$ be a von Neumann algebra with a faithful normal tracial state τ. Let $\mathbb{H}^\infty$ be a finite maximal subdiagonal algebra of $\mathfrak{A}$ with respect to Φ and τ, where Φ is a faithful normal conditional expectation of $\mathfrak{A}$ onto the diagonal of $\mathbb{H}^\infty$. We define the noncommutative L^2-space associated with τ by $L^2(\mathfrak{A},\tau)$ and let $\mathbb{H}^2$ be the closure of $\mathbb{H}^\infty$ in $L^2(\mathfrak{A},\tau)$. For every $a \in \mathfrak{A}$, we define operators L_a and R_a by $L_a x = ax$ and $R_a x = xa$ for $x \in L^2(\mathfrak{A},\tau)$. Put $L(\mathfrak{A}) = \{L_a\}_{a\in\mathfrak{A}}$ and $R(\mathfrak{A}) = \{R_a\}_{a\in\mathfrak{A}}$, respectively. Further, set $\mathfrak{L}_+ = \{L_a\}_{a\in\mathbb{H}^\infty}$ and $\mathfrak{R}_+ = \{R_a\}_{a\in\mathbb{H}^\infty}$, respectively. We now consider a two sided invariant subspace of $\mathbb{H}^2$ which is of the form $W\mathbb{H}^2$ for some unitary operator W in $\mathbb{H}^\infty$. Let K be the subspace $\mathbb{H}^2 \ominus W\mathbb{H}^2$. The orthogonal projection in $\mathbb{L}^2$ with range K will be denoted by P_K. For any operator A in $\mathfrak{L}_+$ or $\mathfrak{R}_+$, we define the operator S_A on K by $S_A f = P_K(Af)$, $f \in K$. When an operator T on K can be written S_A

for some A in $\mathfrak{L}_+$ or $\mathfrak{R}_+$, we shall say that this operator A interpolates T. We now set $\mathfrak{L}_+(K) = \{S_A: A \in \mathfrak{L}_+\}$ and $\mathfrak{R}_+(K) = \{S_A: A \in \mathfrak{R}_+\}$, respectively. Then, we show that $\mathfrak{L}_+(K)$ and $\mathfrak{R}_+(K)$ are weakly closed subalgebras of $B(K)$ (cf. Theorem 2.11).

Further, it is easy to check that $\mathfrak{L}_+(K)$ commutes with $\mathfrak{R}_+(K)$. Conversely, if $\mathbb{H}^\infty$ is an analytic crossed product determined by a finite von Neumann algebra and a $*$-automorphism, then we prove that, if T is a bounded linear operator on K that commutes with $\mathfrak{R}_+(K)$, then there exists an operator A in $\mathfrak{L}_+$ such that $T = S_A$ and $\|T\| = \|A\|$ (cf. Theorem 3.2). That is, $\mathfrak{L}_+(K)' = \mathfrak{R}_+(K)$ and $\mathfrak{R}_+(K)' = \mathfrak{L}_+(K)$. In §4, we prove the genelarization of Caratheodory-Fejer Theorem as an application of Theorem 3.2 (cf. Theorem 4.1).

2. Interpolation in finite maximal subdiagonal algebras

Let $\mathfrak{A}$ be a von Neumann algebra with a faithful normal tracial state τ. First, we recall the definition of finite subdiagonal algebras of $\mathfrak{A}$.

Definition 2.1. Let $\mathbb{H}^\infty$ be a subalgebra of M containing the unit and let Φ be a faithful normal expectation from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{D}$ $(= \mathbb{H}^\infty \cap \mathbb{H}^{\infty *})$. Then $\mathbb{H}^\infty$ is called a finite subdiagonal algebra of $\mathfrak{A}$ with respect to Φ and τ in case the following conditions are satisfied: (1) $\mathbb{H}^\infty + \mathbb{H}^{\infty *}$ is σ-weakly dense in $\mathfrak{A}$; (2) $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$, for all $x, y \in \mathbb{H}^\infty$; (3) $\tau \circ \Phi = \tau$.

Let $\mathbb{H}^\infty$ be a σ-weakly closed finite subdiagonal subalgebra of

$\mathfrak{A}$ with respect to Φ and τ. By [3, Theorem 7], then $\mathbb{H}^\infty$ is maximal among those subalgebras of $\mathfrak{A}$ satisfying (1) and (2) of Definition 2.1. We shall denote the noncommutative L^p-spaces associated with $\mathfrak{A}$ and τ by $L^p(\mathfrak{A},\tau)$, $1 \le p < \infty$. For $1 \le p < \infty$, the closure of $\mathbb{H}^\infty$ in $L^p(\mathfrak{A},\tau)$ is denoted by $\mathbb{H}^p$ and the closure of $\mathbb{H}_0^\infty = \{x\in\mathbb{H}^\infty: \Phi(x) = 0\}$ is denoted by $\mathbb{H}_0^p$. We refer for the properties of $\mathbb{H}^p$ and $\mathbb{H}_0^p$ to [9, 10].

We denote the operators in the left regular representation of $\mathfrak{A}$ on $L^2(\mathfrak{A},\tau)$ by L_x, $x \in \mathfrak{A}$, and those in the right regular representaion by R_x, $x \in \mathfrak{A}$. Put $\mathfrak{L} = \{L_x: x \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{R} = \{R_x: x \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{L}_+ = \{L_x: x \in \mathbb{H}^\infty\}$ and $\mathfrak{R}_+ = \{R_x: x \in \mathbb{H}^\infty\}$, respectively.

Definition 2.2. Let $\mathfrak{M}$ be a closed subspace of $L^2(\mathfrak{A},\tau)$. We shall say that $\mathfrak{M}$ is: left-invariant, if $\mathfrak{L}_+\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$; left-reducing, if $\mathfrak{L}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$; left-pure, if $\mathfrak{M}$ contains no left-reducing subspaces; and left-full, if the smallest left-reducing subspace containing $\mathfrak{M}$ is all of $L^2(\mathfrak{A},\tau)$. The right-hand versions of these concepts are defined similarly, and a subspace which is both left-invariant and right-invariant will be called two-sided invariant.

In this note, we consider a two-sided invariant subspace $\mathfrak{M}$ of $\mathbb{H}^2$ which is of the form $L_w\mathbb{H}^2$ $(= w\mathbb{H}^2)$ for some unitary operator w in $\mathbb{H}^\infty$. At first, we study the interpolation for $L_w\mathbb{H}^2$. Let K be the subspace $\mathbb{H}^2\ominus L_w\mathbb{H}^2$ of $\mathbb{H}^2$. The orthogonal projection in $L^2(\mathfrak{A},\tau)$ with range K will denoted by P_K. Then, for every $a \in \mathbb{H}^\infty$, the operators S_{L_a} and S_{R_a} is defined by

$$S_{L_a}f = P_K(L_a f) \quad \text{and} \quad S_{R_a}f = P_K(R_a f), \quad f \in K.$$

When an operator T on K can be written as S_A for some operator A in $\mathfrak{L}_+$ or $\mathfrak{R}_+$, we shall say that this operator A interpolates T.

Proposition 2.3. If $A \in \mathfrak{L}_+$ and $B \in \mathfrak{R}_+$, then $S_A S_B = S_B S_A$.

We now put $\mathfrak{L}_+(K) = \{S_{L_a} : a \in \mathbb{H}^\infty\}$ and $\mathfrak{R}_+(K) = \{S_{R_a} : a \in \mathbb{H}^\infty\}$, respectively. Since K is semi-invariant as in the proof of Proposition 2.3, $\mathfrak{L}_+(K)$ and $\mathfrak{R}_+(K)$ are subalgebras of $B(K)$. Further, we define the map φ from $\mathbb{H}^\infty$ onto $\mathfrak{L}_+(K)$ by $\varphi(a) = S_{L_a}$, $a \in \mathbb{H}^\infty$. Then we have

Proposition 2.4. The map φ from $\mathbb{H}^\infty$ onto $\mathfrak{L}_+(K)$ is a homomorphism with $\ker\varphi = w\mathbb{H}^\infty$.

Lemma 2.5. Let $x \in \mathbb{H}^1$. Then, for every $n \in \mathbb{N}$, there exist two elements y_n and $z_n \in \mathbb{H}^2$ such that $x = y_n z_n$, $\|y_n\|_2^2 \le n^{-2} + \|x\|_1$ and $\|z_n\|_2^2 \le n^{-2} + \|x\|_1$. Further, if $x \in \mathbb{H}_0^1$, then we can choose the element z_n such that $z_n \in \mathbb{H}_0^2$.

Lemma 2.6. Let $f \in \mathbb{H}_0^1$. Then, for every $n \in \mathbb{N}$, there exist two elements $g_n, h_n \in K$ such that $\|g_n\|_2^2 \le \|f\|_1 + n^{-2}$, $\|h_n\|_2^2 \le \|f\|_1 + n^{-2}$ and $\tau(afw^*) = (S_{L_a} g_n, h_n)$, $a \in \mathbb{H}^\infty$. Conversely, if $g, h \in K$, then there exists an element $f \in \mathbb{H}_0^1$ such that $\tau(afw^*) = (S_{L_a} g, h)$, $a \in \mathbb{H}^\infty$.

Proposition 2.7. The natural isomorphism $\tilde{\varphi}$ of $\mathbb{H}^\infty/_{w\mathbb{H}^\infty}$ onto $\mathfrak{L}_+(K)$ is norm preserving.

Proposition 2.8. For any $a \in \mathbb{H}^\infty$, there exists an element $b \in \mathbb{H}^\infty$ such that $\|a + wb\| = \|a + w\mathbb{H}^\infty\|$.

By Propositions 2.7 and 2.8, we have

Corollary 2.9. Let $T \in B(K)$ such that $T = S_{L_a}$ for some $a \in \mathbb{H}^\infty$. Then there exists an element $b \in \mathbb{H}^\infty$ such that $T = S_{L_b}$ and $\|T\| = \|b\|$.

Proposition 2.10. The natural isomorphism $\tilde{\varphi}$ of $\mathbb{H}^\infty/_{w\mathbb{H}^\infty}$ onto $\mathfrak{L}_+(K)$ is a homeomorphism relative to the weak*-topology on $\mathbb{H}^\infty/_{w\mathbb{H}^\infty}$ and the weak operator topology on $\mathfrak{L}_+(K)$.

Theorem 2.11. $\mathfrak{L}_+(K)$ is a weakly closed subalgebra of $B(K)$.

3. Interpolation in analytic crossed products

Let M be a σ-finite finite von Neumann algebra. That is, there exists a faithful normal tracial state ϕ on M. Let $L^2(M,\phi)$ be the noncommutative L^2-space associated with M and ϕ. For every

$x \in M$, let ℓ_x (resp. r_x) be the left multiplication on $L^2(M,\phi)$: that is, $\ell_x y = xy$ (resp. $r_x y = yx$). Put $\ell(M) = \{\ell_x : x \in M\}$ and $r(M) = \{r_x : x \in M\}$, respectively. Also, we fix once and for all a $*$-automorphism α of M which preserves ϕ. Then there is a unitary operator u on $L^2(M,\phi)$ induced by α. To construct a crossed product, we consider the Hilbert space $\mathbb{L}^2$ defined by $\{f: \mathbb{Z} \longrightarrow L^2(M,\phi): \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f(n)\|_2^2 < \infty\}$, where $\|\cdot\|_2$ is the norm of $L^2(M,\phi)$. For $x \in M$, we define operators L_x, R_x, L_δ and R_δ on $\mathbb{L}^2$ by the formulae $(L_x f)(n) = \ell_x f(n)$, $(R_x f)(n) = r_{\alpha^n(x)} f(n)$, $(L_\delta f)(n) = uf(n-1)$ and $(R_\delta f)(n) = f(n-1)$. Put $L(M) = \{L_x: x \in M\}$ and $R(M) = \{R_x: x \in M\}$. We set $\mathfrak{L} = \{L(M), L_\delta\}''$ and $\mathfrak{R} = \{R(M), R_\delta\}$ and define the left (resp. right) analytic crossed product $\mathfrak{L}_+$ (resp. $\mathfrak{R}_+$) to be the σ-weakly closed subalgebra of $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{R}$) generated by $L(M)$ (resp. $R(M)$) and L_δ (resp. R_δ). Let E_n be the projection on $\mathbb{L}^2$ defined by the formulae $(E_n f)(k) = f(n)$, if $k = n$, and 0, if $k \neq n$. We also define the integral $\varepsilon_n(T) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}\beta_t(T)dt$, $T \in \mathfrak{L}$ or $\mathfrak{R}$, where $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ is the dual action of $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Furthermore, we define $\mathbb{H}^2 = \{f \in \mathbb{L}^2: f(n) = 0,\ n < 0\}$. We refer to the reader to [6, 7] for discussions of these algebras including some of their elementary properties. Putting $\varphi = \phi\cdot\varepsilon_0$, then φ is a faithful normal tracial state on $\mathfrak{L}$. Thus we have

Proposition 3.1. $\mathfrak{L}_+$ (resp. $\mathfrak{R}_+$) is a finite maximal subdiagonal algebra of $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{R}$) with respect to ε_0 and φ.

As in §2, we take a unitary operator W in $\mathfrak{L}_+$ such that $W\mathbb{H}^2$

is two-sided invariant. Put $K = \mathbb{H}^2 \ominus W\mathbb{H}^2$. The orthogonal projection in $\mathbb{L}^2$ with range K will denote by P_K. Then, for every $A \in \mathfrak{L}_+$ or $\mathfrak{R}_+$, the operator S_A is defined by

$$S_A f = P_K(Af), \quad f \in K.$$

Then our goal in this section is the following

Theorem 3.2. If T is a bounded linear operator on K that commutes with $\mathfrak{R}_+(K)$ (resp. $\mathfrak{L}_+(K)$), then there exists an operator A in $\mathfrak{L}_+$ (resp. $\mathfrak{R}_+$) such that $T = S_A$ and $\|T\| = \|A\|$. Therefore, $\mathfrak{L}_+(K)' = \mathfrak{R}_+(K)$ and $\mathfrak{R}_+(K)' = \mathfrak{L}_+(K)$.

To prove this theorem, we need some notations and some preliminaries. For a positive integer r, $\mathbb{L}^2{}_r$ denotes the direct sum of $\mathbb{L}^2$ with itself r times and put $\mathbb{H}^2{}_r = \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{H}^2$ (r times). If $A \in B(\mathbb{L}^2)$, then $\tilde{A}$ is the operator on $\mathbb{L}^2{}_r$ defined by $\tilde{A}(f_1, \ldots, f_r) = (Af_1, \ldots, Af_r)$. Put $\mathfrak{L}_r = \{\tilde{A}: A \in \mathfrak{L}\}$ and $\mathfrak{L}_{r+} = \{\tilde{A}: A \in \mathfrak{L}_+\}$, respectively. Since $\mathfrak{L}_r$ is isomorphic to $\mathfrak{L} \otimes 1$ on $\mathbb{L}^2 \otimes \mathbb{C}^r$, the commutant of $\mathfrak{L}_r$ is isomorphic to $\mathfrak{R} \otimes M_r$ $(= M_r(\mathfrak{R}))$, where M_r is the algebra of $r \times r$-matrices. We put $M_r(\mathfrak{R}_+) = \{[A_{ij}]: A_{ij} \in \mathfrak{R}_+,\ 1 \le i,\ j \le r\}$.

We now study the form of invariant subspaces under $\mathfrak{L}_{r+}$ in $\mathbb{L}^2{}_r$. That is, we say that a closed subspace $\mathfrak{N}$ of $\mathbb{L}^2{}_r$ is $\mathfrak{L}_{r+}$-invariant if $\mathfrak{L}_{r+}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. Let $\mathfrak{N}$ be an $\mathfrak{L}_{r+}$-invariant subspace of $\mathbb{L}^2{}_r$. Put $\mathfrak{V} = \mathfrak{N} \ominus \tilde{L}_\delta \mathfrak{N}$ and $L(M)_r = \{\tilde{L}_x: x \in M\}$. Since $\mathfrak{N}$ is $L(M)_r$-invariant, the orthogonal projection $P_{\mathfrak{V}}$ onto $\mathfrak{V}$ is contained in $L(M)_r{}' =$

$(L(M)\otimes 1)' = L(M)'\otimes M_r$. Then we have

Lemma 3.2. $\tilde{E}_0(L(M)'\otimes M_r)\tilde{E}_0 = (R(M)\otimes M_r)\tilde{E}_0$.

Let $\mathfrak{N}$ be an $\mathfrak{L}_{r+}$-invariant subspace of $\mathbb{L}^2{}_r$. Then we shall say that $\mathfrak{N}$ is pure if $\bigcap_{n\geq 0} \tilde{L}_\delta{}^n\mathfrak{N} = \{0\}$. As in [13, Theorem 3.1], we have the following theorem. The proof is similar, but we prove it for completeness.

Proposition 3.4. Let $\mathfrak{N}$ be a pure $\mathfrak{L}_{r+}$-invariant subspace of $\mathbb{L}^2{}_r$. Then there exists a sequence $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ of partial isometries in $\mathfrak{R}\otimes M_r$ with mutually orthogonal ranges such that $\mathfrak{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus V_n\mathbb{H}^2{}_r$.

We put $K_r = K\oplus K\oplus\cdots\oplus K$. The orthogonal projection in $\mathbb{L}^2{}_r$ with range K_r will denote by P_{K_r}. Then, it is clear that $K_r = \mathbb{H}^2{}_r\ominus\tilde{W}\mathbb{H}^2{}_r$. Further, for every $A \in B(\mathbb{L}^2)\otimes M_r$, we define the operator S_A on K_r by

$$S_Af = P_{K_r}(Af), \quad \text{for every } f \in K_r.$$

Then we have the following lemma and the proof is routine and will be omitted.

Lemma 3.5. If T is an operator on K that commutes with $\mathfrak{R}_+(K)$, then $\tilde{T}$ commutes with S_A for all $A \in M_r(\mathfrak{R}_+)$.

We put $\tilde{\mathfrak{L}}_+(K) = \{S_A : A \in \mathfrak{L}_{r+}\}$. Then we have

Proposition 3.6. Let $\mathfrak{N}$ be a closed subspace of K_r that is invariant under $\tilde{\mathfrak{L}}_+(K)$. Then there exists a sequence $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ of partial isometries in $M_r(\mathfrak{R}_+)$ with mutually orthogonal range such that $\mathfrak{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus S_{V_n} K_r$.

4. Caratheodry-Fejer Theorem

In this section, we generalize the Caratheodry-Fejer Theorem to analytic crossed products as an application of Theorem 3.2. We consider two-sided invariant subspace $L_\delta{}^n\mathbb{H}^2$ (= $R_\delta{}^n\mathbb{H}^2$) of $\mathbb{H}^2$. Then put $K = \mathbb{H}^2 \ominus L_\delta{}^n\mathbb{H}^2$. As a generalization of Caratheodry-Fejer Theorem, we have

Theorem 4.1. For every $x_0, x_1, \cdots, x_n \in M$, we define the operator T on K by

$$T = S_{\left(\sum_{k=0}^{n} L_{x_k} L_\delta{}^k\right)}.$$

Then $\|T\| \leq 1$ if and only if there exists an element $A \in \mathfrak{L}_+$ such that $T = S_A$ and $\|A\| \leq 1$.

Remark 4.2. We identify $\mathbb{L}^2$ with the tensor product $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L^2(M)$ of $\ell^2(\mathbb{Z})$ and $L^2(M)$. Then L_x and L_δ have the following matricial representations:

$$L_x \sim \begin{bmatrix} \ddots & & & & & 0 \\ & \ell_x & & & & \\ & & \ell_x & & & \\ & & & \ell_x & & \\ & & & & \ell_x & \\ 0 & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

and

$$L_\delta \sim \begin{bmatrix} \ddots & & & & & 0 \\ \ddots & 0 & & & & \\ & u & 0 & & & \\ & & u & 0 & & \\ & & & u & 0 & \\ 0 & & & & u & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Let $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$. Then the matricial representation of $T = S_{\left(\sum_{k=0}^{n} L_{x_k} L_\delta{}^k\right)}$ has

$$\begin{bmatrix} \ell_{x_0} & & & & 0 \\ \ell_{x_1} u & \ell_{x_0} & & & \\ \ell_{x_2} u^2 & \ell_{x_1} u & \ell_{x_0} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \ell_{x_n} u^n & \cdot & \cdot & \cdot & \ell_{x_0} \end{bmatrix}.$$

References

[1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.

[2] R. G. Douglas, Banach algebra techniques in operator theory,

Academic Press, 1972.

[3] R. Exel, Maximal subdiagonal algebras, Amer. J. Math., 110(1988), 775-782.

[4] Y. Imina and K. -S. Saito, Hankel operators associated with analytic crossed products, to appear in Bull. Canad. Math.

[5] P. D. Lax, Translation invariant spaces, Acta Math., 101(1959), 163-178.

[6] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc., 248(1979), 381-409.

[7] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Nonselfadjoint crossed products Ⅱ, J. Math. Soc. Japan, 33(1981), 485-495.

[8] M. Rosenblum and J. Rovnyak, Hardy spaces and operator theory, Oxford Math. Monographs (Oxford University Press, 1985).

[9] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., Proc. Amer. Math. Soc., 77(1979), 348-352.

[10] K. -S. Saito, Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, Pacific J. Math., 93(1981), 431-434.

[11] K. -S. Saito, Toeplitz operators associated with analytic crossed products, Math. Proc. Cambridge Philo. Soc., 108(1990), 539-549.

[12] K. -S. Saito, Toeplitz operators associated with analytic crossed producrs Ⅱ (Invariant subspaces and factorization), Integral Equations and Operator Theory, 14(1991), 251-275.

[13] K. -S. Saito, A simple approach to the invariant subspace structure of analytic crossed products, to appear in J.

Operator Theory.

[14] D. Sarason, On spectral sets having connected complement, Acta Sci. Math. Szeged 26(1965), 289-299.

[15] D. Sarason, Generalized interpolation in $\mathbb{H}^{\infty}$, Trans. Amer. Math. Math. Soc., 127(1967), 179-203.

[16] S. Stratila and L. Zsido, Lectures on von Neumann algebras, Abacus Press, 1979.

non linear open mapping theorem

越　昭　三（宇都宮大）

1. Xを位相空間とし，GをX上のtopological transformation groupとし，GはX上をtransitiveにactしているものとする．transitiveにactするとは $\forall x, y \in X$に対し，$\exists g \in G$ s.t. $gx = y$となることである．
このときnon linear open mapping theoremについて述べる．

2. $\psi(g, x) = g \cdot x$で$G \times X \to X$なるmap ψが定義される．ψがcontinuousとはtopological space $G \times X$からtopological space Xへのmapとしてcontinuousになるときをいう．
もしも (1) $\forall g \in G$に対し $x \to gx$ $(X \to X)$がcontinuous
(2) $\forall x \in G$に対し $g \to gx$ $(G \to X)$がcontinuous
なるときψはseparately continuousという．ψがcontinuousならばseparately continuousになることは明白であろう．
このとき次の定理が成立する．

<u>Theorem A_1</u>. Gε complete metric group acting on a metric space X. If the map $\psi : G \times X \to X$ defined by $\psi(g, x) = g \cdot x$ is separately continoous, then ψ is continuous.

<u>Theorem A_2</u>. Gε metric group acting transitively on a complete metric space X. If the map $\psi : G \times X \to X$ defined by $\psi(g, x) = g \cdot x$ is separately continuous, then ψ is continuous.

どちらの証明も同じように出来るので Theorem A_1 の証明を述べよう.

Proof. ψ が separately continuous であるので

$$d(gx, g_0x_0) \leqq d(gx, gx_0) + d(gx_0, g_0x_0)$$

より ψ が $(g_0, x_0) \in G \times X$ で continuous を示すには次のことが分ればよい. 即ち $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists \delta > 0$ と g_0 の $\exists$ 近傍 U が存在して

$$d(x, x_0) < \delta \text{ and } g \in U \Rightarrow d(gx, gx_0) < \varepsilon$$

が示されればよい.

$x_0 \in X$ をとめて次の集合を定義する

$$A_{m,n} = \{g \in G,\ d(gx, gx_0) \leqq \tfrac{1}{m} \text{ if } d(x, x_0) < \tfrac{1}{n}\}$$

ψ が separately continuous だから $A_{m,n}$ は closed set であり

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \quad \text{for each } m = 1, 2, \cdots\cdots$$

更に
$$A_{m,n} \subset A_{m,n+1}$$

G の Baire のカテゴリー性より, すべての空でない open set U に対し, 空でない open set V, $V \subset U$ で $V \subset A_{m,n(m)}$ が存在する.

これより G の空ならざる open subsets O_n $n = 1, 2, \cdots$ の列が

$$O_m \subset A_{m,n(m)}, \quad \text{diameter}(O_m) < 1/m$$

$$O_m \supset \overline{O}_{m+1} \quad m = 1, 2, \cdots\cdots$$

となるようにとれる

Gが complete だから $\exists\, g_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} O_m$.

このとき　$d(x, x_0) < 1/n(m)$, $g \in O_m$ ならば
$d(gx, gx_0) \leq 1/m$ となる.

したがって ψ は (g_0, x_0) で continuous である.
すなわち $\forall \varepsilon_1 > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ と g_0 の近傍 U で

$$d(gx, g_0x_0) < \varepsilon_1 \text{ whenever } g \in U,\ d(x, x_0) < \delta.$$

任意の $g_1 \in G$ と $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\varepsilon_1 > 0$ を次のことが成立するようにとれる

$$d(g_1 g_0^{-1} y, g_1 x_0) < \varepsilon \quad \text{if} \quad d(y, g_0x_0) < \varepsilon_1.$$

したがって $V = g_1 g_0^{-1} U$ は g_1 の近傍であるが
$g \in V$, $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g_0 g_1^{-1} g \in U$
より
$$d(g_0 g_1^{-1} g x, g_0 x_0) < \varepsilon_1$$

したがって

$$d(gx, g_1x_0) < \varepsilon \quad \text{if} \quad g \in V \text{ and } d(x, x_0) < \delta.$$

すなわち ψ は $(g_1, x_0) \in G \times X$ で連続である　□

次に nonlinear open mapping theorem について述べる.

<u>Theorem B.</u> G を complete metric separable (Polish) group acting transitively on a complete metric space X. For each $x \in X$, the map $G \ni g \to \psi(g, x) = gx \in X$ は open mapping である.

$\delta > 0$ に対し $B(x, \delta) = \{y \,;\, d(x, y) < \delta\}$ とする.

$x_0 \in X$ を fix する．しからば次の Lemma が成立する．

Lemma　G の単位元 e の任意の近傍 U に対し，$\overline{Ux_0}$ は open ball $B(x_0, \delta)$ (for some $\delta > 0$) を含む．

Proof　G が separable だから G の countable dense set $\{g_1, g_2, \cdots, g_n, \cdots\}$ が存在する．任意の e の近傍 U に対し，したがって

$$\bigcup_n g_n U = G \quad , \quad \bigcup_n g_n U x_0 = X \quad (\text{G の trasitive より})$$

X の Baire のカテゴリー性より $g_{n_0}\overline{U x_0}$ は open ball を含むので $\overline{Ux_0}$ はある open ball $B(y, \delta)$ を含む．

さて $V = V^{-1}$, $V^2 \subset U$ なる e の近傍に対して

$$\overline{Vx_0} \supset B(y, \delta)$$

と open ball $B(y, \delta)$ がとれる．

すなわち $\exists g \in V$ が $gx_0 \in B(y, \delta)$ となるものがとれる．したがって $\exists \varepsilon > 0$

$$B(g \cdot x_0, \varepsilon) \subset B(y, \delta) \subset \overline{Vx_0}$$

$$g^{-1}B(g \cdot x_0, \varepsilon) \subset g^{-1}B(y, \delta) \subset g^{-1}\overline{Vx_0}$$

$$\subset \overline{V^2 x_0} \subset \overline{Ux_0}$$

$g^{-1}B(gx_0, \varepsilon)$ は x_0 を含む open ball $B(x_0, \delta_1)$ ($\exists \delta_1 > 0$) を含む．すなわち $B(x_0, \delta_1) \subset g^{-1}B(g \cdot x_0, \varepsilon) \subset \overline{Ux_0}$．

Theorem B の証明

Lemma より $\forall x_0 \in X$, $\forall e$ の近傍 U_0 に対し，$\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t.

$$B(x_0, \varepsilon_0) \subset \overline{U_0 x_0}$$

Induction より e の近傍の列 V_n, U_n を次の要領で定義する．

$V_0 \subset U_0$ を $V_0 = V_1^{-1}$, $V_0^2 \subset U_0$ かつ $\overline{U_0 y_0} \subset B(x_0, \varepsilon_0)$

で定める．

このとき $\exists g_0 \in U_0$, $g_0 x_0 = x_1 \in B(y, \delta_0)$ となるように

選ぶことができる．

次に e の近傍 U_1 を

$$\overline{U_1 x_1} \subset B(y_0, \delta_0), \quad U_1 = U_1^{-1}, \quad U_1^2 \subset U_0$$

と

$$d(U_1 g_0) = \text{diameter of } U_1 g_0 \leq (1/2)\varepsilon_0$$

となるように選び，更に $0 < \varepsilon_1 < (1/2)\varepsilon_0$ を

$$\overline{U_1 x_1} \supset B(x_1, \varepsilon_1)$$

となるように選ぶ．そこで $h_0 \in V_0$ を

$$y_1 = h_0 y_0 \in B(x_1, \varepsilon_1)$$

となるようにとる．

次に e の近傍 V_1 を $V_1 = V_1^{-1}$, $V_1^2 \subset V_0$ で

$$\overline{V_1 y_1} \subset B(x_1, \varepsilon_1) \text{ および } d(V_1 h_0) < (1/2)\delta_0$$

となるように選ぶ．

そこで $0 < \delta_1 < (1/2)\delta_0$ で

$$\overline{V_1 y_1} \supset B(y_1, \delta_1)$$

となるように δ_1 を選ぶ

そこで $\{U_n\}, \{V_n\}, \{\varepsilon_n\}, \{\delta_n\}, \{g_n\}, \{h_n\}, \{x_n\}, \{y_n\}$ $n=0,1,2,\cdots$

が Induction で次のことが成りたつようにとることができる．

$$x_{n+1} = g_n x_n = \cdots\cdots = g_n g_{n-1} \cdots g_0 x_0$$

$$y_{n+1} = h_n y_n = \cdots\cdots = h_n h_{n-1} \cdots h_0 y_0$$

$$d(U_n g_{n-1} \cdots g_0) < (1/2)\,\varepsilon_{n-1}, \quad g_n \in U_n$$

$$d(V_n h_{n-1} \cdots h_0) < (1/2)\,\delta_{n-1}, \quad h_n \in V_n$$

$$0 < \varepsilon_n < (1/2)\varepsilon_{n-1}, \quad 0 < \delta_n < (1/2)\delta_{n-1}$$

$$\overline{U_n x_n} \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \overline{V_n y_n}, \quad x_{n+1} = g_n x_n \in B(y_n, \delta_n)$$

そこで $\lim\limits_{n\to\infty} g_n g_{n-1} \cdots g_0 = g$，$\lim\limits_{n\to\infty} h_n h_{n-1} \cdots h_0 = h$

とおくと，$g \in \overline{U_0}^2$，$h \in \overline{U_0}^2$ となる

$d(x_n, y_n) < \varepsilon_n$ より $g x_0 = h y_0$

したがって

$$y_0 = h^{-1} g x_0 \in \overline{U}^4 x_0 \qquad \square$$

4. Banach の open mapping theorem との関連

3 の Theorem B より separable の仮定のもとに Banach の open mapping theorem を導くことができる．

<u>Theorem C</u> (Banach) E，F を Banach 空間とし，E から F の上への linear continuous operator T が連続ならば，T は open mapping である．

E が separable であるとき Theorem B を用いて Theorem C を証明する．

$E/T^{-1}(0)$ は separable Banach 空間である．又 $E \to E/T^{-1}(0)$ は open map である．

一方 $E/T^{-1}(0)$ は F 上の transformation group と考える
ことができる．すなわち $E/T^{-1}(0) \ni x+T^{-1}(0)$
に対し $y \in F$ に $T(x)+y$ を対応させる transformation
と考えられる．つまり $E/T^{-1}(0)$ は F 上の affine transformation
の作る transitively に acting する transformation group
と考えられる．したがって Theorem B より T が open map
である．

問題 Theorem B で G の separability がとれない
だろうか？

以上