１９９２年度談話会・特別講演
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by T. Hibi

Series ♯ 28. September, 1993

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.
♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.
♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989
♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.
♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.
♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
♯ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.) 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
♯ 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
♯ 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28 ~ 10.2 北海道大学での集中講義　講義録, 52 pages. 1993.
♯ 26: T. Nakazi (Ed.), 第 1 回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
♯ 27: K. Kubota (Ed.), 第 18 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

1992年度談話会・特別講演アブストラクト

談 話 会・特 別 講 演 一 覧 （１９９２年度）

1.	４月　８日（水）		柴 田 良 弘	氏（筑波大）	Nonlinear viscoelasticity について
2.	４月　８日（水）	＊	P. Godin	氏（ブラッセル大）	Long time existence of semilinear progressing wave
3.	４月１５日（水）	＊	P.S. Souganidis	氏（ブラウン大）	Front propagation and phase field theory
4.	４月２２日（水）	＊	池 田 薫	氏（小樽商科大）	$GL_q(\infty)$ の準古典極限による Poisson 構造上の Hamiltonian system について
5.	４月３０日（木）	＊	高 橋 秀 慈	氏（東京電機大・理工）	２相ストークス流の大域解の構成について
6.	５月　６日（水）	＊	山ノ内 毅 彦	氏（北大・理）	作用素環版量子群と群の正則表現との関係
7.	５月１３日（水）	＊	北 川 浩 二	氏（北大・理）	カスプ形式の p-進解析的族の p-進メリン変換について
8.	５月２０日（水）	＊	浅 沼 照 雄	氏（富山大・教育）	擬多項式環と $\mathbb{A}^n$ へのエキゾチックな代数群の作用
9.	５月２７日（水）	＊	井 上 淳	氏（福岡大・理）	Modular systems induced by trace functionals on unbounded operator algebras
10.	６月　３日（水）	＊	由 井 典 子	氏（Queen's Univ.）	Arithmetic of Diagonal Hypersurfaces over Finite Fields
11.	６月１０日（水）	＊	G.A. Elliott	氏（トロント大）	On the classification of inductive limits of matrix algebras over the circle
12.	６月１７日（水）	＊	José Seade	氏（メキシコ工大）	The index of a vector field on a singular variety
13.	６月２４日（水）	＊	小 澤 徹	氏（北大・理）	Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations
14.	７月　１日（水）	＊	坪 井 俊	氏（東大・数理科学）	Irrational Foliations of $S^3 \times S^3$
15.	７月　７日（火）		O. Bratteli	氏（オスロ大）	Real rank zero C^*-algebra
16.	７月　７日（火）		D.W. Robinson	氏（オーストラリア国立大）	Elliptic and subelliptic operators on Lie groups
17.	７月　８日（水）		村 井 隆 文	氏（名大・理）	A unified interpretation of vorticity and viscoelasticity
18.	７月　９日（木）	＊	肥 田 晴 三	氏（ｶﾘﾌｫﾙﾆｱ大・ﾛｻﾝｾﾞﾙｽ校）	Anti-cyclotomic main conjecture について
19.	７月１３日（月）	＊	鈴 木 貴	氏（都立大・理）	Trudinger 不等式と関係する楕円型方程式について
20.	７月１５日（水）	＊	岩 田 耕一郎	氏（北大・理）	Random Parallel Transport on Surfaces and Relations to 2-dimensional Topology
21.	７月１７日（金）	＊	Arne Jensen	氏（オルボー大）	Classical and quantum scattering theory
22.	７月２２日（水）		D.E. Evans	氏（ｳｪｰﾙｽﾞ大・ｽｳｵﾝｼﾞｰ校）	Subfactors and q − 6j − symbols
23.	７月２３日（木）		原 田 耕一郎	氏（オハイオ州立大）	From Glasgow Workshop on the Monster
24.	７月２７日（月）		F. Sergeraert	氏（ｸﾞﾙﾉｰﾌﾞﾙ大・ﾌｰﾘｴ研）	Effective homology
25.	７月３０日（木）		Michael S. Kean	氏（デルフト工科大）	Density and Uniqueness in percolation
26.	８月１２日（水）		G.T. Kossioris	氏（ｶｰﾈｷﾞｰﾒﾛﾝ大）	Geometric properties of viscosity solutions for first and second order equations
27.	８月２０日（木）		E. Andronikof	氏（パリ１３大）	Microlocal Analysis of Riemann-Hilbert Correspondence
28.	９月　９日（水）	＊	Damir Arov	氏（オデッサ教育大）	j-inner matrix functions and related extrapolation problems
29.	９月１６日（水）	＊	C.J.K. Batty	氏（ｵｯｸｽﾌｫｰﾄﾞ大）	Spectral properties and asymptotic behaviour of semigroups of operators
30.	９月２４日（木）		鈴 木 通 夫	氏（イリノイ大）	最近の有限群論の方向
31.	９月３０日（水）	＊	高 﨑 金 久	氏（京大・教養）	W代数，twistor，非線型可積分系

32.	１０月１４日（水）	＊	宮本雅彦 氏	（愛媛大・理）	モンスター加群とリーチルート
33.	１０月１６日（金）		李　家 氏	（西安電子科学技術大）	Solutions of nonlinear dynamic systems by Catastrophe theory
34.	１０月２１日（水）	＊	柳川　堯 氏	（九大・理）	質的データに対する Mantel-Haenszel 型の多変量解析
35.	１０月２１日（水）		佐々木洋城 氏	（山口大・教育）	有限群のコホモロジーと相対射影加群
36.	１０月２８日（水）	＊	斎藤　裕 氏	（京大・教養）	対称行列の空間に付随するゼータ関数について
37.	１０月２８日（水）	＊	岡　睦雄 氏	（東工大・理）	Geometry of plane curves via toric modification
38.	１０月２９日（木）		Le Van Thanh 氏	（ﾊﾉｲ国立科学ｾﾝﾀｰ）	On the link of plane curve singularity
39.	１０月２９日（木）	＊	小俣正朗 氏	（北見工大）	特性関数を含む汎関数の変分問題
40.	１１月　４日（水）	＊	伊藤　昇 氏	（名城大・理工）	Hadamard groups
41.	１１月１１日（水）	＊	吉田朋好 氏	（都立大・理）	Instanton と pseudo-holomorphic curve
42.	１１月１１日（水）	＊	西尾眞喜子 氏	（神戸大・理）	経済に関連した確率解析の話題、risk aversion
43.	１１月１８日（水）	＊	澁川陽一 氏	（北大・理）	Completely symmetric R matrix
44.	１１月１９日（木）	＊	小薗英雄 氏	（九大・教養）	Stability of Navier-Stokes flows in exterior domains
45.	１１月２５日（水）	＊	Songmu Zheng 氏	（ﾌｰﾀﾞﾝ大・数学系）	Mathematical results for some phase transition problems
46.	１２月　２日（水）	＊	Morton Gurtin 氏	（ｶｰﾈｷﾞｰﾒﾛﾝ大）	The formulation of free-boundary problems for evolving phase boundaries
47.	１２月　７日（月）	＊	新井仁之 氏	（東北大・理）	境界で退化する楕円型偏微分作用素と Hardy 空間に関する Wojtaszczyk の予想
48.	１２月　９日（水）	＊	河東泰之 氏	（東大数理科学）	Subfactors, rational conformal field theory, and topological quantum field theory
49.	１２月１６日（木）	＊	R. Brualdi 氏	（ｳｨｽｺﾝｼﾝｰﾏﾃﾞｨｿﾝ大）	Greedy codes
50.	１２月２４日（木）	＊	高橋眞映 氏	（山形大・工）	BSE − Banach module
51.	１月　７日（木）	＊	津田一郎 氏	（九工大・情報）	非平衡非線形神経回路における動的記憶過程の機構　−　カオス的遍歴
52.	１月１２日（火）		V.V. Nikulin 氏	（ｽﾃｸﾛﾌ数学研究所）	Real K3 and Enriques surfaces
53.	１月１３日（水）		柴田良弘 氏	（筑波大・数）	Dissipative evolution equations について
54.	１月１８日（月）	＊	桑村雅隆 氏	（広島大・理）	Swift-Hohenberg 方程式に対する Phasedynamics 法の応用について
55.	１月２７日（水）	＊	溝口紀子 氏	（東工大・理）	Multiple Unstable Periodic Solutions for Semilinear Parabolic Equations
56.	１月２７日（水）	＊	板東重稔 氏	（東北大・理）	層を付け加えることによるアインシュタイン・ケーラーベクトル束のモジュライ空間のコンパクト化　−　一つの試み
57.	２月　１日（月）	＊	辻下　徹 氏	（大阪大・理）	非有基的集合論に基づく知識のモデル理論　−　普遍 Kripke 構造と公開化作用素　−
58.	２月　２日（火）		Nguyen Huu Duc 氏	（Dalat 大）	Lagrangian and Legendrian singularities
59.	２月　３日（水）	＊	山根宏之 氏	（大阪大・理）	１の巾根 ζ での岩堀 − Hecke 環 $H_\zeta(W)$ の表現論について
60.	２月　３日（水）	＊	黒木　玄 氏	（東北大・理）	On the W-algebras
61.	２月　３日（水）	＊	長谷川浩司 氏	（東北大・理）	Belavin の楕円Ｒ行列に付随する代数の表現
62.	２月１６日（火）	＊	山田裕史 氏	（都立大・理）	高次 Specht 多項式と対称群の表現
63.	２月１７日（水）		寺杣友秀 氏	（都立大・理）	フーリエ変換の周期への応用
64.	２月１７日（水）	＊	吉田正章 氏	（九大・理）	Hypergeometric integrals and an intersection theory for twisted cycles

65.	２月２４日（水）	＊ Peter Slodowy	氏（Hamburg 大）	Small nilpotent orbits and simple singularities
66.	３月　３日（水）	皆　川　宏　之	氏（北大・理）	横断的ＰＬ葉層について
67.	３月　３日（水）	＊ 津田谷　公　利	氏（北大・理）	Global existence theorem for semilinear wave equations with non compact data
68.	３月　３日（水）	＊ 齋　藤　　睦	氏（北大・理）	超幾何微分方程式系の Symmetry Algebra について
69.	３月１０日（水）	Denes Petz	氏（ﾊﾝｶﾞﾘｰ科学ｱｶﾃﾞﾐｰ）	Some entropy concepts in operator algebras
70.	３月１８日（木）	＊ 松　木　美保子	氏（電通大(院)）	ニューマークの方法の誤差評価と水の波線形非定常問題の有限要素計算
71.	３月２２日（月）	佐　藤　元　彦	氏（都立大・理）	界面運動方程式の境界値問題の比較定理
72.	３月２４日（水）	奥　山　哲　郎	氏（阪市立大）	Derived equivalence in block theory of finite groups
73.	３月３０日（火）	＊ 橋　口　徳　一	氏（日大・理工）	S^1のＰＬ同相写像のなす群

LONG TIME EXISTENCE OF SEMILINEAR PROGRESSING WAVES.

P. GODIN

We consider solutions of the semilinear Cauchy problem

$$(1) \quad \square z = F(z') \quad \text{if } t>0;\ x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N,$$
$$(2) \quad \partial_t^j z = \overline{z_j} \quad \text{if } j=0,1,\ t=0,\ x\in\mathbb{R}^N,$$

where ($\square=\partial_t^2-\partial_1^2-\dots-\partial_N^2$ and) $z'=(\partial_t z, \partial_1 z,\dots,\partial_N z)$. F is C^∞ in a neighbourhood of 0 and satisfies the condition $\partial^\alpha F(0)=0$ if $|\alpha|\le 1$. The initial data $\overline{z_j}$ belong to $C^\infty(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Omega)$ and vanish for large $|x|$, and $\overline{z_0}\in C(\mathbb{R}^N)$. Here Ω is a bounded subset of $\mathbb{R}^N$ with C^∞ boundary $\partial\Omega$. Let Σ_1 and Σ_2 be the characteristic surfaces of $\square$ through $\{0\}\times\partial\Omega$. It has been proved by Rauch and Reed that, for t small, problem (1), (2) has a unique solution z (called a progressing wave) with the following structure: z is continuous and $z\in C^\infty$ up to the boundary on each connected component of $(]0,t[\times\mathbb{R}^N_x)\setminus(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$. We make the following assumptions:

(3) Ω is strictly convex

(4) The initial data $\overline{z_1}, \overline{z_2}$ satisfy compatibility conditions on $\partial\Omega$ which ensure that z' is smooth across the incoming characteristic surface of $\square$ through $\{0\}\times\partial\Omega$ (so that z' can only jump across the outgoing characteristic surface, which is global in time).

(5) Suitable norms of $\overline{z}_1', \overline{z}_2$ are of size ε, where $\varepsilon>0$ is small.

Denote by T_ε the lifespan of the solution z of (1), (2). Under the above assumptions, we obtain lower bounds for T_ε which are similar to the ones obtained by Klainerman and John-Klainerman in the case of smooth initial data. Indeed we have the following result.

Theorem. Assume that the above assumptions hold. Then, if $N \geq 4$, $T_\varepsilon = +\infty$; if $N = 3$, $T_\varepsilon \geq e^{C/\varepsilon}$ for some $C > 0$; if $N = 2$, $T_\varepsilon \geq C/\varepsilon^2$ for some $C > 0$; if $N = 1$, $T_\varepsilon \geq C/\varepsilon$ for some $C > 0$.

The proof is obtained by combining an energy estimate and decay properties of the ~~[illegible]~~ jumps of derivatives of z ~~[illegible]~~ across the outgoing characteristic surface.

FRONT PROPAGATION & PHASE FIELD THEORY

In this lecture I present joint work with G. Barles and H.M. Soner on recent developments in the theory of front propagation and its application to the phase field theory, as it applies to the asymptotic behavior of scalar reaction-diffusion equations of bistable type.

I present a way to describe propagating fronts using the properties of the signed distance function to the front. Next I relate this approach to the level set formulation of evolving hypersurfaces. I present several theorems discussing the equivalence of the two approaches as well as the important issue of interior of level sets.

In the second part of the lecture I discuss some very new developments on the asymptotic behavior of scalar reaction-diffusion equations. In particular, I show that the interface separating the regions where the solution approaches (for large times) the different equilibria of the associated vector field moves with a normal velocity determined by the nonlinearity.

P.E. Souganidis

$GLq(\infty)$ の準古典極限による Poisson 構造上の Hamiltonian system について。

次の方程式を戸田格子という。

$$u(s)_{tt} = exp(u(s+1) - u(s)) - exp(u(s) - u(s-1)), \tag{0.1}$$

(0.1) の量子化を考えたい。$u(s) = u(s,t)$ は s と t の関数である。$u(s)$ を非可換な operator にとりかえ (0.1) の類似物をつくることをここでは量子化といおう。通常の量子化の過程に従うとまず可換代数である phasespace P とその上の Poisson bracket $\{,\}$ を構成し適当に $Hamiltonian$ 関数を選んで方程式 $\partial f = \{H, f\}$ が (0.1) と同値になるようにする。しかるのちに P を非可換な代数 $\tilde{P}$ へ代え $\{,\}$ を $[,]$ にうつし H を $\tilde{P}$ の元 $\tilde{H}$ に適当に取り替え

$$\partial \tilde{f} = [\tilde{H}, \tilde{f}] \quad \tilde{f} \in \tilde{P} \tag{0.2}$$

をかんがえる。$\tilde{P}$ や $\tilde{H}$ のとりかたが説得力のあるものならば (0.2) から導かれる方程式は (0.1) の量子化といってよいであろう。今回の講演では量子化の前提条件である戸田格子（もっと一般に Lax 方程式）の古典的 Hamiltoniann 表示についてお話ししたい。この方面はあまりなじみのない分野なのではじめに一例として coadjoint orbit 法による Hamiltonian 表示について紹介し、ついで表題の量子群の準古典極限による Poisson 構造上での Hamiltonian 表示について述べる。最後に量子化についての展望にも言及したい。

ON GLOBAL WEAK SOLUTIONS OF THE NONSTATIONARY TWO-PHASE STOKES FLOW

Shuji Takahashi
Department of Mathematical Sciences,
Faculty of Science and Engineering,
Tokyo Denki University,
Hatoyama, Saitama 350-03, Japan

A global-in-time weak solution of the nonstationary two-phase Stokes flow is constructed for arbitrary given initial domains (under periodic boundary condition) when two viscosities are close. Our solution tracks the evolution of the interface after it develops singularities. The theory of viscosity solutions is adapted to solve the interface equation. Surface tention effects are ignored here.

Let $\nu_\pm$ be the viscosities of each fluid. Let $\Omega_\pm(t)$ the disjoint open sets in a bounded open rectangle $R(\subset \mathbf{R}^n(n \geqslant 2))$ occupied with the fluids of viscosities $\nu_\pm$ at time t, respectively. The complement of the union of $\Omega_+(t)$ and $\Omega_-(t)$ is called the interface and denoted by $\Gamma(t)$. To write down the equation we assume that the interface $\Gamma(t)$ is a smooth hypersurface so that $\Gamma(t)$ is the boundary between $\Omega_+(t)$ and $\Omega_-(t)$. Let $u_\pm = u_\pm(t,x)$ and $\pi_\pm = \pi_\pm(t,x)$ denote the velocities and pressures of fluids with viscosities $\nu_\pm$, respectively. The motion of the fluids determines the dynamics of the interface. Let $V = V(t,x)$ denote the speed of $\Gamma(t)$ at $x \in \Gamma(t)$ in the normal direction $\mathbf{n}$ from $\Omega_+(t)$ to $\Omega_-(t)$. We consider an interface equation for $\Gamma(t)$:

$$V = u_+ \cdot \mathbf{n} \quad \text{on} \quad \Gamma(t) \quad \text{with initial date} \quad \Omega_\pm(0) = \Omega_{\pm 0}. \tag{1.1}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX coupled with the incompressible Stokes system:

$$\partial_t u_\pm - \nu_\pm \Delta u_\pm + \nabla \pi_\pm = \nabla \cdot f_\pm, \quad \text{in} \quad (0,T) \times \Omega_\pm(t), \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot u_\pm = 0, \quad \text{in} \quad (0,T) \times \Omega_\pm(t), \tag{1.3}$$

$$u_+ = u_-, \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \tag{1.4}$$

$$T_+(u_+, \pi_+) \cdot \mathbf{n} = T_-(u_-, \pi_-) \cdot \mathbf{n}, \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \tag{1.5}$$

$$u_\pm(0,x) = 0, \quad \text{in} \quad \Omega_\pm(0), \tag{1.6}$$

where $T_\pm(u_\pm, \pi_\pm) := \nu_\pm D(u_\pm) - \pi_\pm I$ denotes the stress tensors with

$$D(u) = (D_{k\ell}(u)) := \frac{\partial u^k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial u^\ell}{\partial x_k}.$$

Here $0 < \nu_- < \nu_+ < \infty$, $0 < T \leqslant \infty$ and $\nabla \cdot f_\pm = \sum_{j=1}^n \partial f_{\pm ij}/\partial x_j$ for $f_\pm = (f_{\pm ij}(t,x))$ $(i,j = 1, \cdots, n)$. The initial velocities are assumed to be zero for simplicity.

Our goal is to construct global weak solutions of the two-phase Stokes system (1.1)-(1.6) for arbitrary given initial domains $\Omega_{\pm 0}$ and external forces $f_\pm$ under the assumption that ν_+ and ν_- are close. Here we impose periodic boundary conditions to avoid technical difficulties. Although local solutions have been constructed, there is an intrinsic difficulty to construct global solutions since the interface $\Gamma(t)$ may develop singularities in a finite time.

We first introduce a weak formulation of the transport equation (1.1). Since the boundary of our domain $\Omega_\pm(t)$ may not be regular, we consider a generalized evolution of (1.1) through a level set of an auxiliary function. Recently, the level set approach is extended to other equations including the mean curvature flow equations. However, our u is merely continuous, so one cannot apply these known theories directly to our setting. We are forced to extend the definition of generalized evolutions to (1.1). It turns out that our generalized evolution uniquely exists for any initial domains and any continuous velocity u.

Using the above interpretation of (1.1), we next introduce a step function ν to give a weak formulation of (1.2)-(1.6). The region occupied with high (resp. low) viscous fluid corresponds to the place where ν takes the value ν_+(resp. ν_-). The interface corresponds to a jump discontinuity of ν. The velocity u is defined by $u = u_+$ on Ω_+ and $u = u_-$ on Ω_-, and also the pressure π is defined in the same manner. The system (1.2) and (1.5) is formally equivalent to

$$(1.7) \qquad u_t - \nabla \cdot (\nu D(u)) + \nabla \pi = \nabla \cdot f, \quad \text{in} \quad (0,T) \times \mathbf{T},$$

where $\mathbf{T}$ is the torus obtained by identifying each ends of R. The equation (1.7) should be understood in the sense of distributions. The condition (1.5) is implicit in (1.7). The condition (1.4) is automatic if u is assumed to be continuous. We thus obtain a weak formulation of (1.1)-(1.6).

To construct a solution we seek a fixed point of a mapping defined as follows. For a continuous function v we solve (1.1) with $u_+ = v$ and find generalized evolution $\Omega^v_\pm$. Let $\nu = \nu_v$ be a step function with $\nu = \nu_\pm$ on $\Omega^v_\pm$ and $\nu = (\nu_+ + \nu_-)/2$ outside $\Omega^v_\pm$. We next solve (1.7) with $\nabla \cdot u = 0$ and $u(0,x) = 0$, and obtain a mapping $S : v \longmapsto u$. Unfortunately S may not be continuous, so Leray-Schauder's fixed point theory does not apply. We extend mapping S to an upper semi-continuous convex set-valued mapping so that we apply Kakutani's fixed point theory. To apply Kakutani's theory we need a compactness which follows from a priori L^p estimates (for large p) for the Stokes system (1.7) with discontinuous viscosity. To get the L^p estimates for large p we need to assume that $(\nu_+ - \nu_-)/\nu_+$ is sufficiently small.

This study is a joint work with Y. giga.

Operator Algebraic Quantum Groups (Kac Algebras)

and

Regular Representations of Locally Compact Groups

Takehiko YAMANOUCHI
Department of Mathematics
Hokkaido University

A series of Majid's works [**M1,2,3**] proved that the notion of a matched pair of groups is important in the theory of Hopf algebras as well as in the theory of Kac algebras. In these papers, Majid exhibited a plenty of interesting examples of matched pairs, relating them to the classical Yang-Baxter equations. He also showed that, through crossed (or smash) product construction, every matched pair $(G_1, G_2, \alpha, \beta)$ yields two Hopf algebras in the purely algerbaic case and two involutive Hopf-von Neumann algebras $L^\infty(G_2) \times_\alpha G_1$, $L^\infty(G_1) \times_\beta G_2$ in the operator algebraic setting. In each case, his construction, referred to as bicrossproduct construction, produces noncommutative and noncocommutative algebras. It should be noted too that, in the von Neumann algebra situation, the additional condition that a matched pair is modular in the sense of Majid ensures that the resulting bicrossproduct algebras $L^\infty(G_2) \times_\alpha G_1$ and $L^\infty(G_1) \times_\beta G_2$ are in fact Kac algebras, dual to each other. All of these would suggest that matched pairs and their associated bicrossproduct algebras deserve a further detailed investigation.

When a matched pair $(G_1, G_2, \alpha, \beta)$ is given, one may construct another group $G_{1\alpha}{\bowtie}_\beta G_2$ out of it, called the bicrossproduct group. (In what follows, $G_{1\alpha}{\bowtie}_\beta G_2$ shall be denoted simply by $G_1 \bowtie G_2$). It is obtained by "taking the semi-direct product simultaneously." Its underlying space is the product space $G_1 \times G_2$; its group structure is defined as follows:

$$(g,s)\cdot(h,t) = (\beta_{t^{-1}}(g)h,\ s\alpha_g(t^{-1})^{-1}),$$
$$(g,s)^{-1} = (\beta_s(g^{-1}),\ \alpha_{g^{-1}}(s)^{-1}).$$

Majid illuminated in [**M1**] one connection among the given groups G_1, G_2 and the bicrossproduct group in the Hopf algebra level, by introducing a double crossproduct of a matched pair of Hopf algebras. However, no connection has been given so far among the bicrossproduct Kac algerbas and the bicrossproduct group. The purpose of this note is to describe one connection among them in the operator algebra level. It is phrased in terms of von Neumann algebras considered by Takesaki in [T]. These von Neumann algebras were investigated to study a generalized commutation relation for the regular representation of a locally compact group. Let us now briefly recall how they were defined. Let G be a locally compact group. Denote by λ (resp. ρ) the left (resp. right) regular representation of G. Suppose that H is a closed subgroup of G. Then we consider the following von Neumann subalgebras of $L^\infty(G)$:

$$L^\infty(G) \cap \lambda(H)', \qquad L^\infty(G) \cap \rho(H)'.$$

These are the fixed point algebras of $L^\infty(G)$ with respect to the automorphism groups $\{\mathrm{Ad}\,\lambda(h) : h \in H\}$ and $\{\mathrm{Ad}\,\rho(h) : h \in H\}$. We denote them by $L^\infty(H \setminus G)$ and $L^\infty(G/H)$, respectively, since they can be naturally identified with the set of all essentially bounded functions on the coset spaces $H \setminus G$ and G/H, respectively, with appropriate measures. Following **[T]**, we set

$$M(H \setminus G, \rho(H)) = L^\infty(H \setminus G) \vee \rho(H)'',$$
$$M(G/H, \lambda(H)) = L^\infty(G/H) \vee \lambda(H)''.$$

By Theorem 3 of [T], they are commutant to each other. Let us say that a von Neumann algebra $\mathcal{P}$ is of Takesaki's type if $\mathcal{P}$ is $*$-isomorphic to one of the algebras introduced above for some G.

Now we state the main result.

Theorem. *Let $(G_1, G_2, \alpha, \beta)$ be a modualr matched pair. Note that both G_1 and G_2 can be identified with closed subgroups of the bicrossproduct group $G_1 \bowtie G_2$. Then the bicrossproduct Kac algerbas $\mathcal{M} = L^\infty(G_1) \times_\beta G_2$ and $\mathcal{M}'$ are both von Neumann algebras of Takesaki's type. In fact, we have*

$$\mathcal{M} \cong M(G_1 \bowtie G_2/G_2, \lambda(G_2)),$$
$$\mathcal{M}' \cong M(G_2 \setminus G_1 \bowtie G_2, \rho(G_2)),$$

where λ (resp. ρ) is the left (resp. right) regular representation of $G_1 \bowtie G_2$. These isomorphisms are spatial isomorphisms.

Remark. A similar result holds true for the other Kac algebra $L^\infty(G_2) \times_\alpha G_1$ when $G_1 \bowtie G_2$ is replaced by $G_1 \times G_2$ with the following group structure:

$$(g, s) \cdot (h, t) = (g\beta_s(h^{-1})^{-1}, \alpha_{h^{-1}}(s)t),$$
$$(g, s)^{-1} = (\beta_{s^{-1}}(g)^{-1}, \alpha_g(s^{-1})).$$

In this case, the group G_2 in the above assertion must be replaced by G_1.

Although we have seen that bicrossproduct Kac algebras are von Neumann algebras of Takesaki's type, it can be easily verified too that Kac algebras $L^\infty(G)$, $R(G)$ = the group von Neumann algebra, $L^\infty(G_2) \otimes L^\infty(G_2)$, $L^\infty(G_1) \otimes R(G_2)$ and so on are also of Takesaki's type for general groups G, G_1, G_2. Thus almost all concrete examples of Kac algebras can be recovered as algebras of Takesaki's type. Therefore we conclude this note with the following interesting question:

Question: What kinds of conditions on $H \subseteq G$ ensure that $M(G/H, \lambda(H))$ is a Kac algebra?

References

[M1] S. Majid, *Physics for algebraists: Non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*, J. Algebra **130** (1990) 17–64.

[M2] ———, *Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the classical Yang-Baxter equations*, Pacific J. Math. **141** (1990) 311–332.

[M3] ———, *Hopf-von Neumann algebra bicrossprducts, Kac algerba bicrossproducts and the classical Yang-Baxter equations*, J. Funct. Analysis **95** (1991) 291–319.

[T] M. Takesaki, *A generalized commutation relation for the regular representation*, Bull. Soc. Math. France **97** (1968) 289–297.

[Y1] T. Yamanouchi, *The intrinsic group of Majid's bicrossproduct Kac algebra*, To appear in Pacific J. Math..

[Y2] ———, *Bicrossproduct Kac algebras, bicrossproduct groups and von Neumann algebras of Takesaki's type*, To appear in Math. Scand..

談話会アブストラクト

「カスプ形式のp進解析的族のp進メリン変換について」

北川 浩二

カスプ形式のp進L関数の構成はMazurやManinによってp進メリン変換の方法で得られた。肥田のカスプ形式のp進解析的族に対しても同様の方法によりp進L関数を構成することが出来，2変数のp進L関数を得る。

pを奇素数，Kを$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大体，$\mathcal{O}_K$をそのp進整数環とする．$q=e^{2\pi i z}$，$\Gamma=1+p\mathbb{Z}_p$とおく．

$$F(X)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(X)q^n\in\mathcal{O}_K[[X]][[q]]$$

が次を満たすとき，$F(X)$をカスプ形式のp進解析的族という：
整数$k\geq 2$と有限指標$\varepsilon:\Gamma\to\mathcal{O}_K^{\times}$からなる各組$(k,\varepsilon)$について，

$$f_{k,\varepsilon}=F(\varepsilon(u)u^k-1)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(\varepsilon(u)u^k-1)q^n\in\overline{\mathbb{Q}}[[q]]$$

が$S_k(\Gamma_0(Np^r),\psi\varepsilon\omega^{-k})$の正規されたカスプ形式で，すべてのヘッケ作用素に対して固有関数となる。ここで，ψは固定されたmod. Npのディリクレ指標，ωはタイヒミューラー指標で，$\Gamma^{p^{r-1}}=\mathrm{Ker}\,\varepsilon$，$u=p+1$である。

$P_{k,\varepsilon}=\varepsilon(u)u^k-1$とおき，$f_P=f_{k,\varepsilon}$と書く．
Δをpと素な正整数とし，$Z_\Delta=\varprojlim_n(\mathbb{Z}/p^n\Delta\mathbb{Z})^{\times}$とおく．

__定理__．$Z_\Delta\times\Gamma$上に$\mathcal{O}_K$に値を持つp進測度があり，conductor Δp^mのディリクレ指標χと各$P=P_{k,\varepsilon}$，$0\leq\nu\leq k-2$について，

$$\int_{Z_\Delta\times\Gamma}\chi^{-1}(z)\omega(z)^{\nu}\langle z\rangle^{\nu}\varepsilon(w)\langle w\rangle^{k}d\mu(z,w)$$

$$=A_p(P)^{-m}(-\Delta)^{\nu}p^{2m}(1-A_p(P)\chi^{-1}(p)p^{\nu})\varepsilon_P^{\pm}\frac{G(\chi)\nu!\,L(\nu+1,f_P,\chi)}{(2\pi i)^{\nu}\Omega_{f_P}^{\pm}}$$

を満たす。ここで，$\Omega_{f_P}^{\pm}\in\mathbb{C}^{\times}$は高々p進unitで決まり，$\varepsilon_P^{\pm}\in\mathcal{O}_K-\{0\}$はp進補間の誤差を表わす。$P\mapsto|\varepsilon_P|_p$は局所定数で値は有限のrangeを持つ。符号$\pm$は$\chi(-1)(-1)^{\nu}$の符号と一致する。$G(\chi^{-1})$は$\chi^{-1}$のガウス和である。

擬多項式環と$\mathbb{A}^n$へのエキゾチックな代数群の作用

浅沼 照雄

簡約代数群Gが体k上のアファインn-空間$\mathbb{A}^n$に代数的に作用しているとき，その作用は表現と共役か？すなわち，$\mathbb{A}^n$の座標をうまく選ぶことによって線形作用とすることができるか？という問題を代数群Gの線形化問題という。

この問題に関して，nが2以下のときは任意のGについて肯定的であるが，nが3以上のときはGが複素数体上のn次元又は$n-1$次元のトーラス群が効果的に$\mathbb{A}^n$に作用（i.e. この作用によるGから$\mathrm{Aut}\,\mathbb{A}^n$への準同型が単射）している場合など，ごく部分的にしか肯定的結果は得られていない。

一方kが実数体又は複素数体のときには反例（i.e. 線形化不可能な例）が知られているがそれらはすべてGが非可換である。本講演では自明でない擬多項式環の存在定理（i.e. 可換環R上の各ファイバー環が多項式環であるようなR-代数AをR上の擬多項式環というが，とくにRが正標数の体を含むときR上の対称代数でないR上平坦な擬多項式環Aが存在する）を用いて，kが正標数の無限体の場合に，次元1のトーラス群$G=k^{\times}$の$\mathbb{A}^n$ $(n\geq 4)$への線形化不可能な作用を具体的に構成できることを示した。

参考文献

T. Asanuma, Non-linearizable algebraic group actions on $\mathbb{A}^n$, J. Algebra (to appear)

Tomita-Takesaki Theory in Algebras of Unbounded Operators

Atsushi Inoue
Department of Applied Mathematics, Fukuoka University,
Fukuoka, Japan

Algebras of unbounded operators (Op^*-algebras) arise naturally in quantum physics. Tomita-Takesaki theory plays an important role for a study of structures of von Neumann algebras and for a study of quantum physics [4, 9, 13], and so it is desirable to extend the results of Tomita-Takesaki theory to Op^*-algebras. Such a study has been done in [5, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 21] on the physical situations and in [12, 15~19] for the general theory. In this report we introduce standard systems and modular systems which are able to develop the Tomita-Takesaki theory in Op^*-algebras, and apply them to the Wightman quantum field theory and unbounded CCR-algebras.

1. Standard systems and modular systems for general Op^*-algebras

We introduce standard systems and modular systems and some results obtained for them in [18].

Let $(\mathcal{M}, \xi_0, \mathcal{A})$ be given, where

(i) $\mathcal{M}$ is an Op^*-algebra on a dense subspace $\mathcal{D}$ in a Hilbert space $\mathcal{H}$;

(ii) $\xi_0 \in \mathcal{D}$ and $\mathcal{M}\xi_0$ is dense in $\mathcal{H}$;

(iii) $\mathcal{A}$ is a von Neumann algebra on $\mathcal{H}$ such that $\mathcal{A}'\xi_0$ is dense in $\mathcal{H}$ and $\mathcal{A}'$ is contained in $\mathcal{M}'_{\mathrm{w}} \equiv \{C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); (CX\xi \mid \eta) = (C\xi \mid X^\dagger\eta)$ for ${}^\forall X \in \mathcal{M}$ and ${}^\forall \xi, \eta \in \mathcal{D}\}$.

Here, we denote by $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ the set of all linear operators X from $\mathcal{D}$ to $\mathcal{D}$ satisfying $\mathcal{D}(X^*) \supset \mathcal{D}$ and $X^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Then $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ is a $*$-algebra equipped with the usual operations and the involution $X \to X^\dagger \equiv X^* \lceil \mathcal{D}$, and a $*$-subalgebra $\mathcal{M}$ of $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ with identity operator is called an *Op^*-algebra* on $\mathcal{D}$ in $\mathcal{H}$. In general, the weak commutant $\mathcal{M}'_{\mathrm{w}}$ of $\mathcal{M}$ is not necessarily a von Neumann algebra, but by (iii) there exists the induced extension $\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})$ of $\mathcal{M}$ by $\mathcal{A}'$, that is, it is the closure of an Op^*-algebra $\mathcal{M}_1 \equiv \{X_1; X \in \mathcal{M}\}$ on the linear span of $\mathcal{A}'\mathcal{D}$ defined by $X_1(C\xi) = CX\xi$ for $X \in \mathcal{M}$, $C \in \mathcal{A}'$ and $\xi \in \mathcal{D}$ [28]. Since $\overline{\iota_{\mathcal{A}'}(X)}$ is affiliated with $\mathcal{A}$ for each $X \in \mathcal{M}$ and $\mathcal{M}\xi_0$ is dense in $\mathcal{H}$, it follows that $\mathcal{A}\xi_0$ is dense in $\mathcal{H}$. Hence, both the map: $X\xi_0 \to X^\dagger\xi_0$, $X \in \mathcal{M}$ and $A\xi_0 \to A^*\xi_0$, $A \in \mathcal{A}$ are closable in $\mathcal{H}$ and their closures are denoted by $S_{\mathcal{M}\xi_0}$ and $S_{\mathcal{A}\xi_0}$, respectively. Let $S_{\mathcal{M}\xi_0} = J_{\mathcal{M}\xi_0}\Delta^{1/2}_{\mathcal{M}\xi_0}$ and $S_{\mathcal{A}\xi_0} = J_{\mathcal{A}\xi_0}\Delta^{1/2}_{\mathcal{A}\xi_0}$ be the polar decompositions of $S_{\mathcal{M}\xi_0}$ and $S_{\mathcal{A}\xi_0}$, respectively. Then we see that $S_{\mathcal{M}\xi_0} \subset S_{\mathcal{A}\xi_0}$, and $J_{\mathcal{A}\xi_0}\mathcal{A}J_{\mathcal{A}\xi_0} = \mathcal{A}'$ and $\Delta^{it}_{\mathcal{A}\xi_0}\mathcal{A}\Delta^{-it}_{\mathcal{A}\xi_0} = \mathcal{A}$ for all $t \in \mathbf{R}$ by the Tomita fundamental theorem [9]. But, we don't know how the unitary group $\{\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{it}\}_{t\in\mathbf{R}}$ acts on the Op^*-algebra $\mathcal{M}$, and so we define a system which has the best conditions.

Definition 1.1. *A system $(\mathcal{M},\xi_0,\mathcal{A})$ is said to be standard if the above conditions* (i),(ii), (iii) *and the following condition* (iv) *hold:*

(iv) $\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{it}\mathcal{D}=\mathcal{D}$ *and* $\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{it}\mathcal{M}\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{-it}=\mathcal{M},\ ^{\forall}t\in\mathbf{R}$.

A pair $(\mathcal{M},\xi_0)$ is said to be a standard system if $\mathcal{M}_{\mathrm{w}}'$ is a von Neumann algebra and $(\mathcal{M},\xi_0,(\mathcal{M}_{\mathrm{w}}')')$ is a standard system.

We have the following results for standard systems.

Theorem 1.2. *Suppose that $\Gamma=(\mathcal{M},\xi_0,\mathcal{A})$ is a standard system. Then, $S_{\mathcal{M}\xi_0}=S_{\mathcal{A}\xi_0}$ and the vector state ω_{ξ_0} on $\mathcal{M}$ satisfies the KMS-condition with respect to a one-parameter group $\{\sigma_t^{\Gamma}\}_{t\in\mathbf{R}}$ of $*$-automorphisms of $\mathcal{M}$ defined by $\sigma_t^{\Gamma}(X)\equiv\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{it}X\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{-it}=\Delta_{\mathcal{M}\xi_0}^{it}X\Delta_{\mathcal{M}\xi_0}^{-it}$ for $X\in\mathcal{M}$ and $t\in\mathbf{R}$.*

Important examples of standard systems are appeared in the Wightman quantum field theory and unbounded CCR-algebras as seen in Section 2, 3. The notion of standard systems is useful, but the relation (iv) in Definition 1.1 doesn't hold in general, and so by relaxing this requirement we define the notion of modular systems which is able to develop unbounded Tomita-Takesaki theory and which is more applicable to examples.

Definition 1.3. *A system $\Gamma=(\mathcal{M},\xi_0,\mathcal{A})$ is said to be modular if the above conditions* (i),(ii),(iii) *and the following condition* (iv)$'$ *hold:*

(iv)$'$ *There exists a subspace $\mathcal{E}$ of $\mathcal{D}(\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}))$ such that $\xi_0\in\mathcal{E}$, $\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ and $\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{it}\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ for all $t\in\mathbf{R}$.*

A pair $(\mathcal{M},\xi_0)$ is said to be a modular system if $\mathcal{M}_{\mathrm{w}}'$ is a von Neumann algebra and $(\mathcal{M},\xi_0,(\mathcal{M}_{\mathrm{w}}')')$ is a modular system.

Let $\Gamma=(\mathcal{M},\xi_0,\mathcal{A})$ be a modular system and $\mathcal{F}$ the set of all subspaces $\mathcal{E}$ of $\mathcal{D}(\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}))$ satisfying the conditions in (iv)$'$. We put $\mathcal{D}_\Gamma=\bigcup_{\mathcal{E}\in\mathcal{F}}\mathcal{E}$. Then $\mathcal{D}_\Gamma$ is a subspace of $\mathcal{D}(\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}))$ containing $\mathcal{M}\xi_0$ and $\mathcal{A}'\mathcal{D}_\Gamma=\mathcal{D}_\Gamma$, and so $\mathcal{U}(\Gamma)\equiv\{X\in\mathcal{L}^{\dagger}(\mathcal{D}_\Gamma);\overline{X}\eta\mathcal{A}\}$ is a generalized von Neumann algebra on $\mathcal{D}_\Gamma$ [15] and the Op^*-algebra $\mathcal{L}(\Gamma)$ on $\mathcal{D}_\Gamma$ generated by $\{\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{it}\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})\Delta_{\mathcal{A}\xi_0}^{-it}\lceil\mathcal{D}_\Gamma;t\in\mathbf{R}\}$ is an Op^*-subalgebra of $\mathcal{U}(\Gamma)$. We have the following result.

Theorem 1.4. *Suppose that $\Gamma=(\mathcal{M},\xi_0,\mathcal{A})$ is a modular system. Then $(\mathcal{L}(\Gamma),\xi_0,\mathcal{A})$ and $(\mathcal{U}(\Gamma),\xi_0,\mathcal{A})$ are standard systems.*

$\mathcal{L}(\Gamma)$ is said to be a *left Op^*-algebra* of the modular system Γ and $\mathcal{U}(\Gamma)$ is said to be a *left generalized von Neumann algebra* of Γ. We remark that if $\Gamma = (\mathcal{M}, \xi_0, \mathcal{A})$ is a standard system, then $\mathcal{D}_\Gamma = \mathcal{D}(\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}))$ and $\mathcal{L}(\Gamma) = \iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})$.

As seen in Section 3, we need to apply Tomita-Takesaki theory to more cases, relaxing the condition (iv)$'$. We define a new notion of modularity as follows:

Definition 1.5. *A system* $\Gamma = (\mathcal{M}, \xi_0, \mathcal{A})$ *is said to be quasi-modular if the above conditions* (i), (ii), (iii) *and the following conditon* (iv)$''$ *hold:*

(iv)$''$ $\mathcal{D}^p_\Gamma \equiv \{\xi \in \mathcal{D}(\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}));\ \Delta^{it}_{\mathcal{A}\xi_0}\xi \in \mathcal{D}(\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})), {}^\forall t \in \mathbf{R}\}$ *is dense in* $\mathcal{H}$.

A pair $(\mathcal{M}, \xi_0)$ *is said to be a quasi-modular system if* $\mathcal{M}'_{\mathrm{w}}$ *is a von Neumann algebra and* $(\mathcal{M}, \xi_0, (\mathcal{M}'_{\mathrm{w}})')$ *is a quaisi-modular system.*

We denote by $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ the set of all linear operators X from $\mathcal{D}$ to $\mathcal{H}$ satisfying $\mathcal{D}(X^*) \supset \mathcal{D}$. Then $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ is a $*$−invariant vector space with the usual operations, the involution $X^\dagger \equiv X^* \lceil \mathcal{D}$ and the partial multiplication $\square$ defined as follows: X is a *left multiplier* of Y (denoted $X \in L^{\mathrm{w}}(Y)$) if and only if $Y\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(X^{\dagger *})$ and $X^\dagger \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(Y^*)$, and then $X \square Y = X^{\dagger *}Y$. Then we have the following results [1,2]: $X \in L^{\mathrm{w}}(Y)$ if and only if $Y^\dagger \in L^{\mathrm{w}}(X^\dagger)$, and then $(X \square Y)^\dagger = Y^\dagger \square X^\dagger$; if $X \in L^{\mathrm{w}}(Y) \cap L^{\mathrm{w}}(Z)$, then $X \in L^{\mathrm{w}}(\lambda Y + \mu Z)$ for all $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, and $X \square (\lambda Y + \mu Z) = \lambda(X \square Y) + \mu(X \square Z)$. A $\dagger$-invariant subspace $\mathcal{M}$ of $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ is called a *partial Op***−algebra* on $\mathcal{D}$ if $X \square Y \in \mathcal{M}$ whenever $X, Y \in \mathcal{M}$ with $X \in L^{\mathrm{w}}(Y)$. Let $\Gamma = (\mathcal{M}, \xi_0, \mathcal{A})$ be a quasi-modualr system. Since $\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})\mathcal{D}^p_\Gamma$ is not necessarily contained in $\mathcal{D}^p_\Gamma$, the restriction $\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}) \lceil \mathcal{D}^p_\Gamma$ of $\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})$ to $\mathcal{D}^p_\Gamma$ is not an Op^*−algebra. From the definition of $\mathcal{D}^p_\Gamma$ we have $\mathcal{A}'\mathcal{D}^p_\Gamma \subset \mathcal{D}^p_\Gamma$, and so $\mathcal{U}^p(\Gamma) \equiv \{X \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}^p_\Gamma, \mathcal{H})\ ;\ \bar{X}$ is affiliated with $\mathcal{A}\}$ is a partial Op^*−algebra on $\mathcal{D}^p_\Gamma$ containing $\mathcal{A} \lceil \mathcal{D}^p_\Gamma$ and it is said to be a *partial generalized von Neumann algebra* on $\mathcal{D}^p_\Gamma$ over $\mathcal{A}$ containing $\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M}) \lceil \mathcal{D}^p_\Gamma$. We have the following results for quasi-modular systems.

Theorem 1.6. *Suppose* $\Gamma = (\mathcal{M}, \xi_0, \mathcal{A})$ *is a quasi-modualr system. Then* $\{\Delta^{it}_{\mathcal{A}\xi_0}\}_{t \in \mathbf{R}}$ *implemets a one-parameter group* $\{\sigma^\Gamma_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ *of* $*$*−automorphisms of* $\mathcal{U}^p(\Gamma)$. *Hence, the partial Op***− algebra* $\mathcal{L}^p(\Gamma)$ *generated by* $\{\Delta^{it}_{\mathcal{A}\xi_0}\iota_{\mathcal{A}'}(\mathcal{M})\Delta^{-it}_{\mathcal{A}\xi_0} \lceil \mathcal{D}^p_\Gamma;\ t \in \mathbf{R}\}$ *is a partial Op***−subalgebra of* $\mathcal{U}^p(\Gamma)$ *such that* $\sigma^\Gamma_t(\mathcal{L}^p(\Gamma)) = \mathcal{L}^p(\Gamma)$ *for all* $t \in \mathbf{R}$. *The vector form* ω_{ξ_0} *on* $\mathcal{U}^p(\Gamma) \times \mathcal{U}^p(\Gamma)$ *(resp.* $\mathcal{L}^p(\Gamma) \times \mathcal{L}^p(\Gamma)$*) satisfies the KMS-condition with respect to* $\{\sigma^\Gamma_t\}_{t \in \mathbf{R}}$.

2. Standard systems in the Wightman quantum field theory

We give some examples of standard systems in the Wightman quantum field theory, and consider the connection between standard systems obtained from wedge regions in Minkowski space and the association of a local net of von Neumann algebras with a Wightman field. The almost results stated here are obtained by making use of the works of Bisognano and Wichmann [5,6] and Driessler, Summers and Wichmann [10]. Let φ be one scalar, hermitian Wightman field with a cyclic vacuum Ω. It is regarded as a linear map of the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ into an Op^*-algebra $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}_1)$ such that $\varphi[f]^\dagger = \varphi[f^*]$ for $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ adhering the standard assumptions [6,30]. For any subset R of Minkowski space M let $\mathcal{P}_0(R)$ be the Op^*-algebra generated by $\{\varphi[f]; f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4), \mathrm{supp} f \subset R\}$, and $\Lambda \to U(\Lambda)$ be a strongly continuous unitary group of the Poincaré group P on the Hilbert space $\mathcal{H}$ obtained by the completion of $\mathcal{D}_1$. Bisognano and Wichmann [4] determined the modular group and the modular involution for the right wedge region $W_R = \{x \in M; x^3 > |x^4|\}$ and the left wedge region $W_L = \{x \in M; x^3 < -|x^4|\}$ as follows: Since Ω is a cyclic and separating vector for $\mathcal{P}_0(W_R)$ and $\mathcal{P}_0(W_L)$, $X\Omega \to X^\dagger\Omega$, $X \in \mathcal{P}_0(W_R)$ (resp. $\mathcal{P}_0(W_L)$) is closable and its closure is denoted by $\mathcal{S}_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega}$ (resp. $\mathcal{S}_{\mathcal{P}_0(W_L)\Omega}$). Let $\mathcal{S}_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega} = J_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega}\Delta^{1/2}_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega}$ be the polar decomposition. Then $J_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega}$ equals the antiunitary involution $J = U(\pi_3, 0)\Theta_0$, where π_3 denotes the rotation by angle π about the 3-axis and Θ_0 denotes the canonical TCP-operator, and $\Delta^{1/2}_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega}$ equals a positive self-adjoint operator $V(i\pi)$ obtained by analytic continuation of a one-parameter unitary group $\{V(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ of velocity transformations in the 3-direction. $\mathcal{S}_{\mathcal{P}_0(W_L)\Omega} = \mathcal{S}^*_{\mathcal{P}_0(W_R)\Omega} = JV(-i\pi)$. Furthermore, the pair $(J, \{V(t)\}_{t\in\mathbf{R}})$ satisfies the relations : $J\mathcal{P}_0(W_R)J = \mathcal{P}_0(W_L)$, $V(t)\mathcal{P}_0(W_R)V(t)^{-1} = \mathcal{P}_0(W_R)$ and $V(t)\mathcal{P}_0(W_L)V(t)^{-1} = \mathcal{P}_0(W_L)$ for all $t \in \mathbf{R}$.

It is natural to consider when there exists a von Neumann algebra $\mathcal{A}(W_R)$ such that $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega, \mathcal{A}(W_R))$ is a standard system. We have the following result for this question.

Theorem 2.1. *$(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega, \mathcal{A}(W_R))$ is a standard system if and only if there exists a von Neumann algebra $\mathcal{A}(W_R)$ on $\mathcal{H}$ such that $\mathcal{A}(W_R)' \subset \mathcal{P}_0(W_R)'_{\mathrm{w}}$ and $\mathcal{A}(W_R) \subset \mathcal{P}_0(W_L)'_{\mathrm{w}}$.*

We next consider the connection between the standardness of $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega, \mathcal{A}(W_R))$ and the association of a local net of von Neumann algebras with a Wightmann field. A *local net* is an assignment $R \to \mathcal{A}(R)$ of regions R of the Minkowski space M with von Neumann algebras $\mathcal{A}(R)$ satisfying the conditions of *isotony*, i.e. $\mathcal{A}(R_1) \subset \mathcal{A}(R_2)$ if $R_1 \subset R_2$, *locality* , i.e. $[\mathcal{A}(R_1), \mathcal{A}(R_2)] = 0$ if R_1 and R_2 are spacelike separated, and *covariance*, i.e. $U(\Lambda)\mathcal{A}(R)U(\Lambda)^{-1} = \mathcal{A}(\Lambda R)$ for all $\Lambda \in P$ [1,3]. A Wightman field φ *is associated to a local net $\mathcal{A}$ of von Neumann algebras* if each field operator $\varphi[f]$ has an extension to a closed operator, $\varphi[f]_e \subset \varphi[f^*]^*$, that is affiliated with $\mathcal{A}(R)$ if the support of the test function f is contained in the interior of R. We have the following results:

Theorem 2.2. *Let $\mathcal{W}$ be the set $\{\Lambda W_R; \Lambda \in P\}$ and $\mathcal{K}$ the set of all closed double cones with a non-empty interior. Then, φ is associated to some local net $W \in \mathcal{W} \to \mathcal{A}(W)$ of von Neumann algebras iff there exists a standard system $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega, \mathcal{A}(W_R))$ such that*

(a) $U(\Lambda)\mathcal{A}(W_R)U(\Lambda)^{-1} = \mathcal{A}(W_R)$ *for each* $\Lambda \in P$ *s.t.* $\Lambda W_R = W_R$;

(b) $U(\Lambda)\mathcal{A}(W_R)U(\Lambda)^{-1} \subset \mathcal{A}(W_R)$ *for each* $\Lambda \in P$ *s.t.* $\Lambda W_R \subset W_R$;

(c) $U(\Lambda)\mathcal{A}(W_R)U(\Lambda)^{-1} \subset \mathcal{A}(W_R)'$ *for each* $\Lambda \in P$ *s.t.* $\Lambda W_R \subset W_L$.

Furthermore, φ is associated to some local net $K \in \mathcal{K} \to \mathcal{B}(K)$ of von Neumann algebras iff there exists a standard system $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega, \mathcal{A}(W_R))$ satisfying the above conditions (a), (b), (c) *and the condition*

(d): $(\bigcup\{U(\Lambda)\mathcal{A}(W_R)U(\Lambda)^{-1}; \Lambda W_R \subset K^c\})'' \subset \mathcal{P}_0(K)'_{\mathrm{w}}$ *for each* $K \in \mathcal{K}$, *where* K^c *is the causal complement of* K.

By Theorem 2.2 we have the following results under the additional assumptions.

Corollary 2.3. *Suppose that $\mathcal{P}_0(W_R)'_{\mathrm{w}}$ is a von Neumann algebra. Then, $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega)$ is standard, iff $(\mathcal{P}_0(W_R)'_{\mathrm{w}})' = \mathcal{P}(W_L)'_{\mathrm{w}}$, iff φ is associated to a local net of $W \in \mathcal{W} \to (\mathcal{P}_0(W)'_{\mathrm{w}})'$.*

Corollary 2.4 *Suppose that $\mathcal{P}_0(K)'_{\mathrm{w}}$ is a von Neumann algebra for all $K \in \mathcal{K}$. Then the following statements are equivalent. (1) $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega)$ is a standard system. (2) φ is associated to a local net $W \in \mathcal{W} \to (\mathcal{P}_0(W)'_{\mathrm{w}})'$ of von Neumann algebras. (3) φ is associated to some local net $K \in \mathcal{K} \to \mathcal{B}(K)$ of von Neumann algebras. (4) φ is associated to a local net $K \in \mathcal{K} \to (\mathcal{P}_0(K)'_{\mathrm{w}})'$ of von Neumann algebras. (5) φ is associated to a local net $K \in \mathcal{K} \to \mathcal{P}_0(K^c)'_{\mathrm{w}}$ of von Neumann algebras.*

Borchers and Yngvason have showed that the condition (5) in Corollary 2.4 is also equivalent to a certain positivity property of the Wightman distributions in ([8] Theorem 3.1).

Corollary 2.5. *Suppose that $\mathcal{P}_0(W_R)$ is essentially self-adjoint. Then the following statements are equivalent. (1) $(\mathcal{P}_0(W_R), \Omega)$ is standard. (2) φ is associated to a local net $W \in \mathcal{W} \to (\mathcal{P}_0(W)'_{\mathrm{w}})'$ of von Neumann algebras. (3) φ is associated to some local net $K \in \mathcal{K} \to \mathcal{B}(K)$ of von Neumann algebras. (4) φ is associated to a local net $K \in \mathcal{K} \to \mathcal{P}_0(K^c)'_{\mathrm{w}}$ of von Neumann algebras.*

In this section we have investigated the standardness of systems $(\mathcal{P}_0(W), \Omega, \mathcal{A}(W))$ for wedge-regions W. But, it is difficult to give examples of standard systems for domains except wedge-regions. By the Hislop and Longo result ([14] Theorem 2) we see that for a massless free field $(\mathcal{P}_0(O), \Omega)$ is a modular system for each open double cone O in M.

3. Standard systems and modular systems induced by trace functionals

Many important examples of states in quantum physics are trace functionals, that is, they are of the form $\varphi(X) = Tr\rho X$ with a certain positive trace operator ρ. It is important to consider the quantum moment problem: Under what conditions is a state on an Op^*−algebra a trace functional ? This problem was considered by Woronowicz [32], Sherman [29], Lassner and Timmermann [23] and Schmüdgen [27].

In this section we consider the following problem: Given a trace functional φ on an Op^*−algebra $\mathcal{M}$, under what conditions is $(\pi_\varphi(\mathcal{M}), \lambda_\varphi(1))$ a standard (or modular) system? Here $(\pi_\varphi, \lambda_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ is the GNS-construction for φ. Let φ be a trace functional on an Op^*−algebra $\mathcal{M}$ on a dense subspace D in a Hilbert space $\mathcal{H}$, that is, $\varphi(X) = TrX\rho$, $X \in \mathcal{M}$ for some positive trace operator ρ on $\mathcal{H}$. Then $\varphi(X) = < X\rho^{\frac{1}{2}} \mid \rho^{\frac{1}{2}} >$, $X \in \mathcal{M}$, where $< \mid >$ is an inner product of the Hilbert space $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ of Hilbert-Schmidt operators on $\mathcal{H}$. Hence, to consider this problem it is sufficient to study standard systems and modular systems for Op^*−algebras on dense subspaces in $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$. Such a study has been done in [12,15,16,18]. Recently we obtained better results for this problem in [19] and introduce them. Let $\mathcal{M}$ be an O^*−algebra on $\mathcal{D}$ in $\mathcal{H}$. We put

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \otimes \bar{\mathcal{H}} &= \{T \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}};\ T\mathcal{H} \subset \mathcal{D}\}, \\ \sigma_2(\mathcal{M}) &= \{T \in \mathcal{D} \otimes \bar{\mathcal{H}};\ XT \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}} \text{ for all } X \in \mathcal{M}\}, \\ \sigma_2(\mathcal{M})_+ &= \{T \in \sigma_2(\mathcal{M});\ T \geq 0\}. \end{aligned}$$

Then $\mathcal{D} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ and $\sigma_2(\mathcal{M})$ are subspaces of $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ containing $\{\xi \otimes \bar{x};\ \xi \in \mathcal{D},\ x \in \mathcal{H}\}$, and so they are dense in $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$. We put $\pi(X)T = XT$, $(X \in \mathcal{M},\ T \in \sigma_2(\mathcal{M}))$. Then $\pi(\mathcal{M})$ is an Op^*−algebra on $\sigma_2(\mathcal{M})$ in $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ and it is closed (resp. self-adjoint) if and only if $\mathcal{M}$ is closed (resp. self-adjoint). We have the following results:

Theorem 3.1. *Let $\mathcal{M}$ be a closed Op^*−algebra on $\mathcal{D}$ in $\mathcal{H}$ such that $\mathcal{M}'_{\mathrm{w}} = \mathbf{C}1$ and Ω a non-singular element of $\sigma_2(\mathcal{M})_+$. Suppose $\pi(\mathcal{M})\Omega$ is dense in $\mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$. Then the following statements hold:*

(1) $(\pi(\mathcal{M}), \Omega)$ is a quasi-modular system.

(2) Suppose $\Omega \in \sigma_2(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}))_+$ and $\Omega^{it}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ for all $t \in \mathbf{R}$. Then $(\pi(\mathcal{M}), \Omega)$ is a modular system.

(3) Suppose there exists an element N of $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ such thet $\overline{N^{-1}} \in \mathcal{H} \otimes \bar{\mathcal{H}}$ and $\Omega^{it}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ for all $t \in \mathbf{R}$. Then $(\pi(\mathcal{M}), \Omega)$ is a standard system.

By Theorem 3.1 we have the following

Corollary 3.2. *$(\pi(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})), \Omega)$ is a quasi-modular system for every non-singular element Ω of $\sigma_2(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}))_+$. Furthermore, if $\Omega^{it}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ for all $t \in \mathbf{R}$, then $(\pi(\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})), \Omega)$ is a standard system.*

We apply the above results to the Op^*- algebra of the Schrödinger representation. Let $\mathcal{A}_0$ be the canonical algebra for one degree of freedom and π_0 the Schrödinger representation of $\mathcal{A}$. Then $\mathcal{M} \equiv \pi_0(\mathcal{A}_0)$ is a self-adjoint Op^*-algebra on the Schwartz spaces $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ of infinitely defferentiable rapidly decreasing functions satisfying $\mathcal{M}'_w = \mathbf{C}1$ [24]. Let $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots} \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ be an orthonormal basis in $L^2(\mathbf{R})$ of normalized Hermite functions. We put

$$s = \{\{\lambda_n\} \subset C;\ \sup_n n^k \mid \lambda_n \mid < \infty \text{ for all } k \in N\},$$
$$s_+ = \{\{\lambda_n\} \in s; \lambda_n > 0 \text{ for } n = 0, 1, \cdots\}.$$

Then we have the following

Theorem 3.3. $(\pi(\mathcal{M}), \Omega_{\{\lambda_n\}})$ is a standard system for every $\{\lambda_n\} \in s_+$.

We finally consider the case Ω is a singular element of $\sigma_2(\mathcal{M})_+$, that is, the following problem: Is $(\pi(\mathcal{M})\lceil\pi(\mathcal{M})\Omega, \Omega)$ a quasi-modular system ? Here $\pi(\mathcal{M})\lceil\pi(\mathcal{M})\Omega$ is an O^*-algebra defined by the restriction of $\pi(\mathcal{M})$ to $\pi(\mathcal{M})\Omega$. We have showed in [19] that this is not affirmative even if $\mathcal{M}$ is a self-adjoint maximal O^*-algebra.

References

1. J.-P. ANTOINE AND W. KARWOWSKI, Partial $*-$algebras of closable operators in Hilbert space, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 21(1985), 205-236.
2. J.-P. ANTOINE, A. INOUE and C. TRAPANI, Partial $*-$algebras of closable operators I. The basic theory and the abelian case, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 26(1990), 359-395.
3. J.-P. ANTOINE, A. INOUE and C. TRAPANI, Partial $*-$algebras of closable operators II. States and representations of partial $*-$algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 23(1987),673-726.
4. H. ARAKI, Von Neumann algebras of local observables for free scalar field, *J. Math. Phys.* 5(1964), 1-13.
5. J.J. BISOGNANO and E.H. WICHMANN, On the duality condition for a Hermitian scalar field, *J. Math. Phys.* 16(1975), 985-1007.
6. J.J. BISOGNANO and E.H. WICHMANN, On the duality condition for quantum fields, *J. Math. Phys.* 17(1976), 303-321.
7. H.J. BORCHERS, Algebraic aspects of Wightman field theory, *In statistical Mechanics and Field Theory, Lecture,* 1971; Haifa Summer School, New York-Jerusalem-London(1972), 31-79.
8. H.J. BORCHERS and J. YNGVASON, Positivity of Wightman functionals and the existence of local nets, *Comm. Math. Phys.* 127(1990), 607-615.
9. O. BRATTELI and D.W. ROBINSON, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechnics I, II, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979, 1981.

10. W. DRIESSLER, S.J. SUMMERS and E.H. WICHMANN, On the connection between quantum fields and von Neumann algebras of local operators, *Comm. Math. Phys.* 105(1986), 49-84.
11. S.P. GUDDER and W. SCRUGGS, Unbounded representations of $*-$algebras, *Pacific J. Math.* 70(1977), 369-382.
12. S.P. GUDDER and R.L. HUDSON, A noncommutative probability theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* 245(1978), 1-41.
13. R. HAAG and D. KASTLER, An algebraic approach to quantum field theory, *J. Math. Phys.* 5(1964), 848-861.
14. P.D. HISLOP and R. LONGO, Modular structure of the local algebras associated with the free massless scalar field theory, *Commun. Math. Phys.* 84(1982), 71-85.
15. A. INOUE, An unbounded generalization of the Tomita-Takesaki thoery, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 22(1986), 725-765.
16. A. INOUE, An unbounded generalization of the Tomita-Takesaki theory II, *Publ, RIMS, Kyoto Univ.* 23(1987), 673-726.
17. A. INOUE, Extension of unbounded left Hilbert algebras to partial $*-$algebras, *J. Math. Phys.* 32(1991), 323-331.
18. A. INOUE, Modular structure of algebras of unbounded operators, *to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*
19. A. INOUE, Modular systems induced by trace functionals on algebras of unbounded operators, *Preprint.*
20. K. KATAVOLOS and I. KOCH, Extension of Tomita-Takesaki theory to the unbounded algebra of the canonical commutation relation, *Rep. Math. Phys.* 16(1979), 335-352.
21. H. KUROSE and H. OGI, On a generalization of the Tomita-Takesaki theorem for a quasifree state on a self-dual CCR-algebra, *Nihonkai Math. J.* 1(1990), 19-42.
22. G. LASSNER, Topological algebras of operators, *Rep. Math. Phys.* 3(1972),279-293.
23. G. LASSNER and W. TIMMERMANN, Normal states on algebras of unbounded operators, *Rep. Math. Phys.* 3(1972), 295-305.
24. R.T. POWERS, Self-adjoint algebras of unbounded operatos, *Comm. Math. Phys.* 21(1971),85-124.
25. R.T. POWERS, Algebras of unbounded operators, *Proc. Sympos. Pure Math.* 38(1982), 389-406.
26. M.A. RIEFFEL and VAN DAELE, A bounded operator approach to Tomita-Takesaki thoeory, *Pacific J. Math.* 69(1977), 187-221.
27. K. SCHMÜDGEN, On trace representation of linear functionals on unbounded operator algebras, *Comm. Math. Phys.* 63(1978), 113-130.
28. K. SCHMÜDGEN, Unbounded Operator Algebras and Representation Theory, *Akademie-Verlag Berlin,* 1990.
29. T. SHERMAN, Positive linear functionals on $*-$algebras of unbounded operators, *J. Math. Anal. Appl.* 22(1968), 285-318.
30. R.F.STREATER and A.S. WIGHTMAN, PCT, Spin and Statistics, and all that, Benjamin, New York, 1964.
31. M. TAKESAKI, Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications, *Lecture Notes in Maths.* 128 (Springer-Verlag, 1970).
32. S.L. WORONOWICZ, The quantum moment problem I, II, *Rep. math. Phys.* 1(1970), 135-145 ; *Rep. Math. Phys.* 1 (1971), 175-183.

Please send proof to
yui@ny-mast.queensu.ca

Arithmetic of Diagonal Hypersurfaces over Finite Fields

Noriko YUI (Queen's University)

This is a report on joint work with Fernando Gouvêa.

Let $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, $n \geq 1$ and let $k = \mathbb{F}_q$ be a finite field with $q \equiv 1 \pmod{m}$. Let $\underline{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_{n+1}) \in (k^\times)^{n+2}$. Let $V = V(m, n, \underline{c})$ denote the diagonal hypersurface of degree m and dimension n defined over k by the equation

$$V : c_0 X_0^m + c_1 X_1^m + \cdots + c_{n+1} X_{n+1}^m = 0 \subset \mathbb{P}_k^{n+1}.$$

The zeta-function of V has the form

$$Z(V, T) = Q(V, T)^{(-1)^{n+1}} \Big/ \prod_{i=0}^{n} (1 - q^i T).$$

Here

$$Q(V, T) = \prod (1 - \underline{c}(\underline{a})\, T) \in 1 + T\mathbb{Z}[T]$$

where the product is taken over all twisted Jacobi sums, $\underline{c}(\underline{a})$. It is known that $\underline{c}(\underline{a})$ are algebraic integers in $L := \mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})$ with the complex absolute value $|\underline{c}(\underline{a})| = q^{n/2}$.

In this talk, I will discuss two problems confining myself to $V = V(m, n, \underline{c})$ where m is prime, $n = 2d$ and $\underline{c}$ is subject to certain conditions:

(1) Determine the order, $\rho_d = \rho_d(V/k)$, of poles of $Z(V, q^{-s})$ at $s = d$ ($\rightsquigarrow$ the Tate conjecture), and

(2) Interprete the special value $\lim_{s \to d} Z(V, q^{-s})(1 - q^{d-s})^{\rho_d} = \alpha$ in terms of arithmetic and geometry of V ($\rightsquigarrow$ the Lichtenbaum-Milne conjecture).

Let $\rho_d'(V_k) =: \rho_d'$ denote the dimension of the Chow group of algebraic cycles of codimension d on V defined over k. The Tate conjecture claims that

$$\rho_d'(V_k) = \rho_d(V_k).$$

Theorem 1. Suppose that $\underline{c} = (c_0, c_1, \cdots c_{n+1})$ is an extreme twist. (Conjecturally, almost all twists are extreme.) Then the Tate conjecture is true for $V = V(m, n, \underline{c})$, i.e.,

$$\rho_d'(V_k) = 1 = \rho_d(V_k)$$

To understand arithmetic and geometry of V, we associate to it a family of twisted Fermat motives $\{V_A\}$, which correspond to a natural decomposition of the cohomology of V. We say that V_A is ordinary (resp. supersingular) if the Newton and the Hodge polygons of V_A coincide (resp. the Newton polygon of V_A has the pure slope $n/2$).

For the special value, we evaluate

$$C_V^*(d) := \lim_{s \to d} Q(V, q^{-s}) / (1-q^{d-s})^{\varepsilon_d - 1} = \prod_{\underline{c}(\mathfrak{q}) \neq q^d} \left(1 - \frac{\underline{c}(\mathfrak{q})}{q^d}\right)$$

by passing down to twisted Fermat motives.

Let V_A be a twisted Fermat motive, and let

$$Q(V_A, q^{-d}) = \mathrm{Norm}_{L/\mathbb{Q}}\left(1 - \frac{\underline{c}(\mathfrak{a})}{q^d}\right).$$

Theorem 2. (1) Suppose that V_A is supersingular. Then $Q(V_A, q^{-d})$ is a power of m.

(2) Suppose that V_A is ordinary. Then

$$Q(V_A, q^{-d}) = \frac{C_{V_A}(d) \cdot m}{q^{w_{V_A}(d)}}$$

where $w_{V_A}(d) = \sum_{i=0}^{d-1} (d-i)\, h^{i, n-i}(V_A)$, and $C_{V_A}(d)$ is an integer which is a square.

Examples. Let $(m,n)=(7,6)$ (so $d=3$) and $q=p\in\{71,113\}$. Let $\underline{a}=(1,1,1,1,1,1,4,4)$. Then $w_{V_A}(3)=4$ and V_A is ordinary. We may write

$$Q(V_A,p^{-3}) = c_{V_A}(3)\cdot 7/p^4$$

where $c_{V_A}(3)$ takes the following values

twist	$p=71$	$p=113$
$\underline{c}=(1,1,1,1,1,1,1,1)$	$41^2\cdot 7^2$	$13^2\cdot 167^2\cdot 7^2$
$\underline{c}=(1,1,1,1,1,1,3,3)$	$13^2\cdot 337^2$	$13^2\cdot 29^2\cdot 71^2$
$\underline{c}=(1,2,3,3,4,4,5,5)$	$3^6\cdot 13^2\cdot 29^2$	$71^2\cdot 139^2$

Gluing together these motivic special values, we can evaluate $C_V^*(d)$.

We say that V is ordinary (resp. supersingular) if every twisted Fermat motive V_A is ordinary (resp. supersingular).

Theorem 3. Let $V=V(m,n,\underline{c})$ where m is prime >3, $n=2d$.

(1) If V is supersingular, then $C_V^*(d)$ is a power of m.

(2) If V is ordinary with an extreme twist ς, then

$$C_V^*(d) = \prod [C_{V_A}(d) \cdot m] / q^{W_V(d)}$$

where $W_V(d) := \sum_{i=0}^{d-1} (d-i) h^{i,n-i}(V) = \prod [W_{V_A}(d)]$.

We compare the second formula with the Lichtenbaum-Milne conjectural formula for $C_V^*(d)$:

$$C_V^*(d) = \frac{c_0 \# Br^d(V) |\mathrm{disc}\ NS(V)|}{q^{W_V(d)}}$$

where c_0 is a rational number prime to char(k). For this particular, $V = V(m, n, \varsigma)$, we can compute that $|\mathrm{disc}\ NS(V)| = m$. Therefore, the order of the Brauer group $Br^d(V)$ should be

$$\# Br^d(V) = \prod [C_{V_A}(d) \cdot m] / c_0 \cdot m \in \mathbb{Z}.$$

Finally, to determine the validity of the Lichtenbaum-Milne conjecture for this V, we should be able to compute the order of $Br^d(V)$ <u>directly</u> from the definition. However, this seems, at present, an intractable task!

On the classification of inductive limits of matrix algebras over circles

Abstract of colloquium address June 10, 1992

George A. Elliott

University of Toronto and University of Copenhagen

The classification of separable amenable C^*-algebras shows signs of following the pattern of that of amenable von Neumann algebras with separable predual. The analogue of the flow of weights, the invariant for von Neumann algebras, would appear to be K-theory.

Notable results so far include the classification of inductive limits of finite direct sums of matrix algebras over the circle with the property known as real rank zero (the invertible selfadjoint elements dense), and the fact that the irrational rotation C^*-algebras (generated by unitaries u and v with the relation $vu = e^{2\pi i\theta} uv$, θ irrational) belong to this class

Colloquium Talk

The index of a vector field on a singular variety

José A. Seade

Let X be a complex analytic space with an isolated singularity at a point P. We would like to have invariants for distinguishing different germs of holomorphic vector fields on X at P. If P were a regular point of X, its most basic invariant is its local index at P, as defined by Poincaré (for surfaces) and Hopf (in higher dimensions). In this talk I will explain a definition of the local index of a vector field on a hypersurface singularity germ. This was introduced in a joint work of X. Gómez-Mont, A. Verjovsky and myself. This local index coincides with the local index of Poincaré and Hopf when P is a regular point of X. On the other hand, the local index of a vector field which is transversal to the link of P is given by the Milnor number of P. Thus, the local index on hypersurface singularities unifies two important concepts: the index of Poincaré-Hopf and the Milnor number of a hypersurface singularity. I will discuss these and other properties of the local index of a vector field on a hypersurface germ.

6月24日　北海道理学部談話会

「Long Range Scattering for Nonlinear Schrödinger Equations」

小澤徹（札幌）

要旨.

この話では先ず量子論的散乱理論の枠組を動力学的立場から簡単に説明する. 特に, 場を支配するポテンシャルが短距離型であるか長距離型であるかによってその理論がどの様に変わるか, という問題を中心に述べる. 次に非線型波動の問題でも散乱問題が定式化できること, また非線型性の相互作用に対しても短距離型と長距離型の概念が考えられることを説明する. 最後に非線型 Schrödinger 方程式に対する長距離散乱についての結果を紹介する.

参考文献.

1. J. Ginibre & T. Ozawa, Long range scattering for non linear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geqq 2$, preprint LPTHE Paris-Sud, Orsay (1992).

2. T. Ozawa, Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, Commun. Math. Phys. **139**, 479-493 (1991).

東京大学大学院数理科学研究科
坪　井　　俊

$S^3 \times S^3$上の無理的葉層構造

多様体上に完全積分可能条件を満たす非特異微分1形式 ω を考える。完全積分可能条件は $d\omega = \omega \wedge \eta$ となる微分1形式 η の存在である。このとき、微分3形式 $\eta \wedge d\eta$ は閉形式となり、この閉3形式の定める多様体の3次元 de Rham コホモロジー類は、微分形式 ω の極大積分多様体の族(余次元1葉層構造)のみによる。これが1970年に発見された余次元1葉層構造の Godbillon-Vey 特性類の定義である。この特性類の著しい性質は余次元1葉層構造を変形すると連続に変化するということである。

さて、3次元球面 S^3 の直積 $S^3 \times S^3$ 上の余次元1葉層構造を考えるとその Godbillon-Vey 特性類は $(a,b) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \cong H^3(S^3 \times S^3)$ という形をしている。a/b が有理数または ∞ となるとき、余次元1葉層構造は有理的であるといい、a/b が無理数となるとき、余次元1葉層構造は無理的であるという。これは2次元トーラス上の線型葉層構造の類似である。$S^3 \times S^3$ 上の有理的な余次元1葉層構造の構成は容易であるが、滑らかな無理的余次元1葉層構造の存在は知られていない。

Gelfand-Feigin-Fuks によると、$S^3 \times S^3$ 上の余次元1葉層構造

を変形しても比 a/b は不変である。このことから、滑らかな有理的な余次元1葉層構造を変形して、滑らかな無理的余次元1葉層構造を作ることはできないことがわかる。

余次元1葉層構造の正則性を弱めても Godbillon-Vey 特性類は定義される。例えば、横断的に Lipschitz+有界変動な余次元1葉層構造に対して Godbillon-Vey 特性類は定義されている。

このような葉層構造の中に横断的に区分線型な余次元1葉層構造があるが、横断的に区分線型な $S^3 \times S^3$ 上の余次元1葉層構造に対して Godbillon-Vey 特性類 $(a, b) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \cong H^3(S^3 \times S^3)$ を考えると、a/b は有理数または ∞ である。これは横断的に区分線型な余次元1葉層構造のある種の剛性を表している。

しかしながら、最近の研究で次のことがわかった。

横断的に Lipschitz+有界変動な $S^3 \times S^3$ 上の余次元1葉層構造に対して Godbillon-Vey 特性類 $(a, b) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \cong H^3(S^3 \times S^3)$ を考えると、a/b は任意の無理数をとり得る。

このことは、森田茂之による葉層の分類空間のホモトピー群の上の Whitehead 積 $\pi_3 \times \pi_3 \longrightarrow \pi_5$ と台がコンパクトな葉層 $\mathbf{R}$ 積の分類空間のホモロジー群の上の Pontrjagin 積 $H_2 \times H_2 \longrightarrow H_4$ との関係の記述と、H_2 の台がコンパクトな区分線型葉層 $\mathbf{R}$ 積により生成される部分群上でこの Pontrjagin 積が可換になることから示される。

Anti-Cyclotomic Main Conjecture について

肥田晴三

J. Tilouine との共著の論文 [HT1-2] において ordinary な CM-体 K に対応する anti-cyclotomic な岩澤加群の岩澤特性巾級数 $F_\chi^-(T)$ が Katz の p-進 L 関数の anti-cyclotomic 部分 $L_\chi^-(T)$ で割り切れることが示された. 変数 T は 1 変数の如く書いたが実は多変数で, その変数の個数は K の次数の半分 d である. ここで χ は branch を示す記号で K の p 分岐最大アーベル拡大の Galois 群のねじれ部分の指標である. いろいろな予想を仮定すると, χ が identity の時, 主予想 $L_\chi^-(T) = F_\chi^-(T)$ を示すことができる. ここでの等号 "=" は単数倍を除いての意であり, 以下常にこの意味で使う. 仮定する予想は大まかに言って, "$\mu(L_\chi)=0$" と K 及び K の最大 $\mathbb{Z}_p^r$-拡大の各部分体で "弱い意味での Leopoldt 予想" が成り立つことである. 証明の Key は次の Lemma である.

Lemma. 巾級数 $A(T)$, $B(T)$ $(T=(T_1,\cdots,T_d))$ があって $\mathbb{Z}_p[[T]]$ の中で A は B を割り切ると仮定する. もし

$$0 \neq \left| \frac{A(X,\cdots,X)}{X^r}\Big|_{X=0} \right|_p = \left| \frac{B(X,\cdots,X)}{X^r}\Big|_{X=0} \right|_p$$

ならば $A=B$ である.

T をうまく線型に変数変換すると $L_\chi^-(X,\cdots,X)$ の $X=0$ での order r と $\dfrac{L_\chi^-(X,\cdots,X)}{X^r}\Big|_{X=0}$ が計算できる. これには Colmez の

総実体での極限公式をKに一般化する必要があり，delicateなp-進解析的計算が必要である．一方 岩澤型descentの議論を使うことにより $\left|\frac{F_{\chi}^{-}(X,\ldots,X)}{X^r}\Big|_{X=0}\right|_p$ が $\left|\frac{L_{\chi}^{-}(X,\ldots,X)}{X^r}\Big|_{X=0}\right|_p$ と一致することが示される．この部分は J. Tilouine との合作で Wintemberger と Perrin-Riou の descent 理論の多変数への一般化が必要で，非常に technical である．とにかく，この2つの結果から Lemma を応用すれば 結果を得る．

詳細は上記2つの部分を各々1つの論文として，発表する予定である．

[HT1] H. Hida and J Tilouine, Anti-Cyclotomic Katz p-Adic L-functions and congruence modules, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4-th series, 26 (1993), 189-259

[HT2] H. Hida and J. Tilouine, On the anti-cyclotomic main conjecture for CM fields, to appear in Inventiones Math.

Trudinger不等式と関係する楕円型方程式について

都立大・理　　鈴木　貴

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を境界 $\partial\Omega$ が十分滑らかな有界領域とし，指数 $p\in(1,\infty)$ に対して半線形楕円型境界値問題

(1) $-\Delta u=u^p,\ u>0\ (\mathrm{in}\ \Omega),\qquad u=0\ (\mathrm{on}\ \partial\Omega)$

を考える。解の存在証明の方法として思いつくのは，(1)と同等な不動点方程式 $u=(-\Delta)^{-1}u^p$ を解くことであるが，残念ながら通常はこの方法では自明解 $u\equiv 0$ しか捕えることができない。

実際 Pohozaev等式を使うと，$n\geq 3$，$p\geq\frac{n+2}{n-2}$，Ω：星型 $\Rightarrow$ (1)は解(古典)を持たぬことを示すことができる。

一方 特殊な変分法を用いると $p<\frac{n+2}{n-2}$ の時は (1) は解を持つことを証明することができる。その基礎は Sobolevの埋込み

(2) $H^1_0(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$

に在る。ここで埋込みの最良定数 S_0 は n のみで定まり，$\Omega=\mathbb{R}^n$ を除いて S_0 は到達されない。(i.e. 最良関数は $H^1_0(\Omega)$ にはない。)

$p=\frac{n+2}{n-2}$ のときは臨界Sobolev指数と言われ，変分法に載せることができるにもかかわらず compact性の欠如によって解の存在証明ができない。実際，解の存在は領域の形状に微妙に関係しており，Brezis-Nirenberg や Bahri-Coron の深い研究を産んでいる。

$n=2$ のときは limiting Sobolev case と言われ，Orlicz空間への埋込みが存在することが知られている。

即ち Trudinger によると、$\exists c_1, c_2>0$ s.t. $\forall \Omega\subset\mathbb{R}^2$ 有界領域,

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|u|^2}{c_1\|\nabla u\|_2^2}\right)dx \leqq c_2|\Omega| \quad \text{である。}$$

後に Moser はこれを精密化して c_1 の最良定数を求めた：

$$(3)\qquad \sup_{\Omega,u}\left\{\int_\Omega e^{u^2}dx \;\middle|\; \|\nabla u\|_2 \leqq 4\pi\right\} < +\infty, \quad 4\pi \text{ は最良.}$$

Carleson-Chang は $\Omega=B\equiv\{|x|<1\}$ の時に (3) を到達する関数が存在することを示して Sobolev の場合との本質的相違点を明らかにした。

この講演はこれらの事実と楕円型境界値問題

$$(4)\qquad -\Delta u=\lambda f(u),\quad u>0 \ (\text{in } B),\qquad u=0 \ (\text{on } \partial B)$$

の $\lambda\downarrow 0$ で $\|u\|_{L^\infty}\to+\infty$ となる解の族との間の関係を明らかにすることであり、最近の小川卓克との共同研究の紹介である。要約すれば、

1. 非線形性が指数関数より強いと、解は爆発点 $(x=0)$ 以外では 0 に収束する。
   〃　弱いと、〃 全ての内点で $+\infty$ に発散する。
2. 前者の場合には、適当な scalling を行なって解を micro-scopic に見ると、極限において $f(u)=e^u$ に対する古典解が現われる。
3. 前項の収束の一様性と Trudinger 不等式の精密性が関係している。

これらの基礎となるのは、筆者や Brezis-Merle による bubble 定理であって、曲面上の等周不等式とも関係する最良定数が重要な役割を果たしている。

Random Parallel Transport on Surfaces and Relations to 2-dimensional Topology

by K. Iwata

Let G be a Lie group and let M be a manifold. A connection (one form) on the product bundle $M \times G$ infinitesimally descrbes the associated parallel transport. This can be described by a G-valued function, defined for curves in M, and satisfying

$$m(c_1c_2) = m(c_1)m(c_2), \quad m(c^{-1}) = m(c)^{-1},$$

where c_1c_2 designates that the curve c_2 is followed by c_1 and c^{-1} denotes c with opposite orientation.

To obtain quantised field theories, one way is to construct random fields satisfying, sample wise, these two conditions. We sketch a general construction for surfaces M of finite type.

The particularity of gauge theory in 2 dimensions makes this possible. This fact has certainly been known among physicists for quite some time (see [Br], [DM]). The mathematical formulation and construction goes back to [AH-KH], and was given a detailed treatment in Kaufmann [K]. Some of these ideas have appeared later in several papers [D], [F1, 2], [GKS], [S1, 2]. There, the starting point, and the principal object, is the Yang-Mills action functional, and the Feynman path integral formalism. It also appears, among several other subjects, in the recent paper by Witten [W]. In this connection, see also Atiyah's Lincei Lecture Notes [A].

The construction presented in this lecture is based on certain inner invariant, or class, functions, and partitionings of M. One also needs to "measure" the plaquettes. Except for this feature, the theory is really "topological" (combinatorial; cf. the comment about the "Hauptvermutung of topology" in Sengupta [S], and [W]), rather than based on the differentiable structure of the manifold. Essentially, this is lattice gauge theory (see[Sei]), but the particular family of class functions (convolution semigroups), yields invariance under subdivision. Hence, in physics terminology, the continuum limit is in fact realized.

We remark, finally, that in our 2-dimensional case, if in addition G is simply connected, then $E = M \times G$ is the general principal G-bundle over M. In the general case, one must take into account the topology of the bundle. As remarked in [S], [W], one has to sum over all topologically inequivalent principal G-bundles E over M. For further discussions on this point, refer to the latter article.

References

[A] M. F. Atiyah: The geometry and physics of knots. Cambridge Univ. Press 1990.

[AHKH] S.Albeverio, R.Høegh-Krohn, H.Holden: Markov cosurfaces and gauge fields. Acta Phys. Austr. Suppl. XXVI, 211-231 (1984)

[Br] N. E. Bralic: Exact computation of loop averages in two- dimensional Yang-Mills theory. Phys. Rev. D 22, 3090-3103 (1980).

[D] B. Driver: YM_2: Continuum expectation, lattice convergence and lassos; Comm. Math. Phys. 123, 576-616 (1989)

[DM] H. G. Dosch, V.F. Müller: Lattice gauge theory in two spacetime dimensions. Fort. Phys. 27, 547-559 (1979).

[F1] D.S.Fine, Quantum Yang–Mills theory on the two sphere. Commun. Math. Phys. 134, 273-292 (1990).

[F2] D.S.Fine, Quantum Yang–Mills on a Riemann surface. Commun. Math. Phys. 140, 321-338 (1991).

[GKS] L.Gross, C.King, A.Sengupta: Two dimensional Yang-Mills theory via stochastic differential equations; Ann. Phys. 194, 65–112 (1989)

[K] A. Kaufmann: Stetigkeit von Gruppenwertigen Stochastischen Koflächen. Diplomarbeit, Bochum 1986.

[S1] A. Sengupta: The Yang-Mills measure for S^2. J. Funct. Anal. 108, 231–273 (1992).

[S2] A. Sengupta: Quantum gauge theory on compact surfaces. Princeton University Preprint 1991.

[Sei] E. Seiler: Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics; Lect. Notes Phys. 159, Springer 1982

[W] E. Witten: On quantum gauge theories in two dimensions. Comm. Math. Phys. 141, 153-209 (1991).

Talk at Hokkaido University
by
Arne Jensen
Aalborg University

Title: Classical and Quantum Scattering Theory

Abstract

In this talk I will first give a short introduction to scattering theory for the two-body problem, both in classical mechanics and in quantum mechanics. After that I will present a survey of recent results in scattering theory for the quantum problem. Intuition from classical mechanics has played an important role in recent progress on the scattering theory for the quantum mechanical many-body problem. In the last part of the talk I will describe joint work with T. Ozawa on the Stark Hamiltonian, where we discovered a discrepancy between classical and quantum scattering. I will also present some proposals for explaining this discrepancy.

J-inner matrix-functions and related extrapolation problems

D. Arov (Odessa Pedagogical Institute)

There are many extrapolation problems (Schur, Carathéodory, Nevanlinna-Pick, Hamburger, Kreĭn etc.) connected with harmonic analysis and spectral theory of differential operators, which may be formulated as the problems of describing the set of contractive matrix-functions $S(z)$ of order $n \times m$, holomorphic in the unit disk D, (in short $S \in \mathcal{S}(n,m)$) with given data.

In the complete indefinite case the set of solutions $S(z)$ of one of the above mentioned problems is described as the range of a fractional-linear transformation

$$S(z) \mapsto \{W_{11}(z)S(z) + W_{12}\}\{W_{21}(z)S(z) + W_{22}\}^{-1}$$

from $\mathcal{S}(n,m)$ into itself, for which the matrix-function $W(z) = [W_{ij}(z)]_{i,j=1}^{2}$ is a J-contractive, meromorphic matrix-function in D with J-unitary boundary values on ∂D where $J = \mathrm{diag}(I_n, -I_m)$. Such is called a J-inner matrix-function (in short $W \in \mathcal{V}(n,m)$). This matrix-function $W(z)$ has a physical interpretation as lossless scattering matrix and is known as the resolvent matrix of the problem.

The description of this type first appeared in the classical work of I. Schur (1917) for the problem, now known as the Schur problem, about the set of functions $f(z)$, holomorphic and $|f(z)| \leq 1$ in D with given first n Taylor's coefficients. The Schur's algorithm was applied by R. Nevanlinna (1929) to the description of solutions of the so-called Nevanlinna-Pick problem. V. P. Potapov (l971) generalized this approach to matrix-valued problems.

It is known that the resolvent matrices for the completely indefinite bitangential Schur-Nevanlinna-Pick problems are written in the form of Blaschke-Potapov products with poles in D, as first considered by Potapov (1955).

In my work regular J-inner matrix-functions were characterized as resolvent matrices for generalized bitangential Schur-Nevanlinna-Pick problems while V. Katznelson showed that singular J-inner matrix-functions are connected with extrapolation problems of singular type. A review of some properties of J-inner matrix-functions and their connections with extrapolations, de Branges' theory, Darlington synthesis etc. was given in the book of H. Dym (1990). The results of Katznelson and myself will give a new step in the development of the theory of J-inner matrix-functions.

Spectral properties and asymptotic behaviour of semigroups of operators

C. J. K. Batty

For the purposes of this lecture, a "semigroup of operators" will normally mean a C_0-semigroup $\{T(t) : t \geq 0\}$ of bounded linear operators on a complex Banach space (so $T(0) = I$, $T(s)T(t) = T(s+t)$, T is strongly continuous). However it could refer to the powers $\{T^n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ of a single operator, or to something more general.

The generator A of T, given by $Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$ is densely-defined and unbounded, in general. When T is bounded ($\sup_t \|T(t)\| < \infty$), the spectrum of A, $\sigma(A)$, is contained in the closed left half-plane $\mathbb{C}_- := \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$. We are interested in connections between spectral properties of A and asymptotic behaviour of $T(t)$ as $t \to \infty$, for example the convergence, or relative compactness, of the semigroup in a suitable topology.

Examples of C_0-semigroups include: (a) Schrödinger semigroups on $L^p(\mathbb{R}^n)$, where $A = \Delta - V$ (Δ = Laplacian, V a potential function), and convergence of $T(t)$ in the uniform and strong operator topologies can be characterised in terms of V, for $V \geq 0$;

(b) semiflows in ergodic theory, where weak mixing of the semiflow corresponds to a form of weak convergence of the semigroup, and also to the existence of only one eigenvector of A;

(c) multiplier semigroups on $L^p(\Omega, \mu)$, where elementary calculations show that $T(t) \to 0$ strongly if $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ is countable and $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R}$ is empty.

The following abstract theorem concerning strong convergence to 0 was obtained, independently by W. Arendt and the speaker on the one hand, and by Yu.I. Lyubich and Vũ Quốc Phóng on the other.

<u>Theorem</u>. Let $\{T(t)\}$ be a bounded C_0-semigroup with generator A, and suppose that $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ is countable and $P\sigma(A^*) \cap i\mathbb{R}$ is empty. Then $\|T(t)x\| \to 0$ as $t \to \infty$, for all $x \in X$.

The two proofs were in striking contrast to each other; both were obtained in 1986 and published in 1988.

The discrete analogue of the theorem also holds, and is ~~[illegible]~~ related in various ways to a result of Katznelson and Tzafriri who showed that if T is a power-bounded operator, $\sum |a_n| < \infty$, and $g(z) = \sum a_n z^n$ is of spectral synthesis for $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| = 1\}$, then $\|T^n g(T)\| \to 0$ as $n \to \infty$.

Numerous extensions and generalisations of the theorem have subsequently been obtained, including almost periodic semigroups, Volterra equations, integrated semigroups, ergodic theorems, or theorems for individual vectors, and multi-parameter semigroups.

September 16, 1992

W代数、ｔｗｉｓｔｏｒ、非線形可積分系

京都大学教養部　高崎金久

W代数、twistor、非線形可積分系はそれぞれまったく異なる起源をもつ概念であるが、最近数年間の、特に共形場の理論に刺激された研究により、互いに深くかかわり合うようになってきた。

W代数にはいくつかの種類があるが、今の場合にはW-無限大 (W-infinity) 代数と通称されるものが重要である。これには大別して W_∞ と w_∞ の２種類がある。前者は（中心拡大の部分を別にすれば）$x^k(d/dx)^n$ あるいは Fourier 変換して $\lambda^n(d/d\lambda)^n(l \geqq 0, n = 0, \pm 1 \pm 2, \cdots)$ という生成系をもつ（擬）微分作用素の Lie 代数と考えてよい。これに対して後者は $\{\lambda, \mu\} = 1$ という Poisson 括弧に関して $\lambda, 1/\lambda, \mu$ の多項式（ Laurent 多項式）がなす Lie 代数と見なせる。いいかえれば前者の古典極限である。Twistor 理論はきわめて一般的にとらえるならば

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \swarrow^{\pi_2} & & \searrow^{\pi_1} \\ M & & T \end{array}$$

という double fibration により M（時空）の上の構造と T（ twistor 空間）の上の構造の間を結び付けることをめざす。本来の４次元時空の場合には古典的な Klein 対応 ($M = Gr(2;4), F = Fl(1,2;4), T = Gr(1;4) = CP^3$) が現れる。このような対応を微分方程式に応用することは旧くは F. John の超双曲型方程式の解の積分表示（一種の Radon 積分）に遡る。R. Penrose の twistor 理論はそれを幾何学的にとらえ直したものとして位置づけられる。このような考え方は線形微分方程式に関する限り非常に広範囲に拡張することができる。

非線形可積分系と twistor 理論との接点は最初、自己双対方程式（ Yang-Mills 版と Einstein 版がある）において見いだされた。自己双対 Yang-Mills 方程式は twistor 対応を通じて twistor 空間上のある種の正則ベクトル束に翻訳される。これに対して自己双対 Einstein 方程式（ただし宇宙項＝０）は twistor 空間自体のある種の構造に翻訳される。その構造は２次元の symplectic 構造に関わっていて、そこから自然に Poisson 代数つまりある種の w_∞ 代数が現れてくる。これがW代数との接点である。

最近になって、同様の w_∞ 代数の構造が他の非線形可積分系においても見いだされた。それらの新しい例はＫＰヒエラルヒーや戸田ヒエラルヒー（実は W_∞ と関わっている）の準古典極限というべきもので、**twistor** 理論とソリトン理論の間をつなぐ面白い場合を与えている。

モンスターのミステリー

宮本雅彦（愛媛大学）

1992年10月

モンスターという言葉を聞くと一般には怪物を想像されると思いますが，群論にはモンスターと呼んでいるものがあります．２６個ある散在単純群のうち最も位数（元の数）が大きいものです．かってにこの様な名前を付けてと思われるかもしれませんが，この単純群の位数は

$$808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000$$

です．無限系列に属さない固有の数字としては知られているものの中で最大だと思いますし，多分これ以降もこれ以上の固有の数は出てこないのではないかと思います．　最初この単純群は Fisher，Griess が存在を予想し，後に Griess が推論とモンスターの位数２の元の中心化群の構造だけからグライス代数を構成して，それの自己同形群としてモンスター単純群の存在を証明したときには Friendly Giant と希望をこめて呼んだのですが，すぐにモンスターの本性を発揮し，多くのミステリーが始まりました．まず，このミステリーに出てくる登場人物を紹介します．

1　登場人物

まずこの話しの中心は新興勢力２つのファミリーです．これらは歴史のある無限系列のファミリーには属していません．

[散在単純群ファミリー（２６人兄弟）]

長男	モンスター	$\mathbb{M}$
次男	ベビーモンスター	F_2
⋮	⋮	
···	コンウエイ群	$.O$
···	マシュー群	M_{24}

[ニイマイヤ格子ファミリー（２４人兄弟)]

長男	リーチラティス	根無し草,有名人
次男	A_1^{24} − 型	几帳面な性格
長女	A_2^{12} − 型	
⋮	⋮	⋮

2 第一話 偶然の一致

2.1 Ogg 氏の発見

整数論に於けるモジュラー関数の研究

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

は

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}$$

による複素平面 $\mathbb{C}$ の上半平面 $H = \{z \in \mathbb{C} | Im\ z > 0\}$ の上への作用を研究するのですが、特に，$SL_2(Z)$ の部分群である合同群

$$\Gamma_0(p) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \text{ 整数}, c \equiv 0 (mod\ p), ad - bc = 1\} \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$$

に対しての剰余空間 $H \cup \{$ カスプ $\}/\Gamma_0(n)$ が genus 0 を持つような n は古くに決定されており、

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 18, 22, 15, 30, 46$$

となることが知られています．特に n が素数なら $n-1|24$ が必要十分条件です。

さらに最近になって Ogg が合同群の正規化群が" genus 0 "の性質を持つような素数 n を決定したのですが，結果は

定理 1 (Ogg の結果) $N_G(\Gamma_0(n))$ が *genus 0* の性質を持つような素数は

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71$$

の１５個である．

偶然の一致というのでしょうか，ここに出てきている素数の集合は最初に書いたモンスターの位数の素数因子の集合と完全に一致するのです．即ち，genus 0 の性質とモンスター群との間に何かしらの関係があるのです．これらに関しては現在色々な研究がなされこれと同じ様な幾つかの結果が知られていますが，どうしてこの様な一致が起こるのかを説明する方法は全く見つかっていません．

単純群モンスターそのものの構造については徐々に調べられているのですが，位数が極めて大きいためにモンスターの持つ性質を直接調べる有効な方法があまりなく，上の問題をどう扱ったら良いのか分からないのですが，この合同群の種数 0 の性質は単純群モンスターだけでなく，ニイマイヤラティスやそれのコクスター数とも関係していることがわかります．

先に示した合同群 $\Gamma(n)$ 自身が種数 0 の性質を持つ n の表にでてくる数は最初の 1 を除いて全てニイマイヤラティスのコクスター数となっています．実際$\Gamma(n)$ を少し大きく取れば，ニイマイヤラティスのコクスター数を合同群の言葉で表わすことができるのです．

定理 2 $\Gamma_0(n)$ または $<\Gamma_0(n), w_{n/2}>$ が種数 0 の性質を持つ $\Leftrightarrow$ n はニイマイヤ格子のコクスター数であることが必要十分である．

ここで，$w_{n/2}$ は Atkin Layer involution であり，$\Gamma_0(n)$ の正規化群に入っています．それ以外にも，種数 0 の性質とコクスター数との関係が見つかっています．ニイマイヤラティスはほとんどその基本ルート系のコクスター数だけで同型類が決まるのですが，5 組みだけは同じコクスター数を持っています．これらのコクスター数は 6, 10, 12, 18, 30 で，この数は原田，ラングの論文で指摘されているように，コンウエイ群の元のうち，ムーンシャイン加群への作用がモンスターの元の作用と一致しないものの位数でもあります．これらの数も合同群の言葉で表示できます．

3　少しは見えてきた神秘

モンスターの自明でない既約表現の数は

$$196883$$

です。行列で表わそうとすると最低ほぼ 20 万 × 20 万の行列がいるのです．

一方 $SL_2(\mathbb{Z})$ で不変な関数、即ちモジュラー関数の中で古くから知られておりこれの関数体がモジュラー関数全体となるなど一番重要なものに　ニイマイヤ格子のテーター関数をエーター関数で割ったものがあります。これをローレンツ展開すると

$$J_N(z) = \mathbf{q}^{-1} + C + 196884\mathbf{q} + 21493760\mathbf{q}^2 + \dots$$

$$C = 24 + \text{ルートの数}$$

定数項は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に対して不変なので，ここを無視すると，最初の係数 196884 はモンスターの既約表現の次数と一つしか違いません．まだモンスターの存在が証明される前にこの事に　Mackey が気が付き，コンウェイに話したところ，単なる一致だろう，さもなければ何か信じられないような大きな理論は深く沈んでいるに違いない，と述べたそうです．その後　モンスターの研究が進み，既約表現の全ての次数が決定されました．そして調べてみると，モンスターの 2 番目の既約表現の次数は 21296876 で上の $J_N(z)$ の 2 番目の係数 21493760 は

$$21493760 = 21296876 + 196884$$

が成り立つのです．

これはもう偶然ではなく，何か関係があるだろうと言うことで，色々なものを含めムーンシャイン予想と言うのが立てられました．其の内もっとも簡単に説明出来るのが，上の $J_N(z)$ の係数とモンスターの既約表現との関係で，

予想 1 (ムーンシャイン予想の一番最初) ある自然な $\mathbb{Z}$-*graded* 加群

$$V = V_{-1} + V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

があって モンスター M は自然に V_n の上に作用しており，$dimV_n$ は $J_N(z)$ の q^n の係数となっている．

この問題に対して，次数付きということでリー代数が使われて色々な候補が出てきたのですが，

3.1　ムーンシャイン加群 $V^\natural$

１９８５年に理論物理の方から

ある２６次元の共形場理論の頂点作用素代数

として Frenkel, Lepowsky, Meurman によって構成されたのが，現在ムーンシャイン加群と呼んでいるものです．共形場理論は理論物理の統一場理論の候補として注目を浴びている弦理論を研究するために考えだされた方法です．弦理論とは物質の最小の形が点や球ではなく，弦であると考える理論です．この場合色々な問題点がうまく説明出来るのですが，この理論が成り立つのは１０次元か２６次元だけなのです．ムーンシャイン加群は２６次元の共形場理論のフォック空間として構成されたのですが，色々面白い構造を持っており，その特異性から，多分このような頂点作用素代数は一意的だろうと予測されています．

予想 2 $V^\natural$ は次の性質を満足する頂点作用素代数として特徴付けられる．

1. $V^\natural$ は唯一の既約 $V^\natural$-加群である．

2. $rank\ V^\natural = 24$

3. $V^\natural$ はウエイト 1 の元を持たない．

このムーンシャイン加群とモジュラー関数の一致は上の Mckay の気付いたものだけではなく，Thompson が気付きモンスター単純群の指標表から構成した，各 $\mathbb{M}$ の元 g に対して，Thompson 列 $T(g) = \sum T_n(g)q^n$ と呼ばれるモジュラー関数があるのですが，これが最近 Borcherds によって，ムーンシャイン加群に対する指標の値に一致することが示されています．

このモンスター加群の定義を説明しましょう．

Frenkel, Lepowsky and Meurman [FLM] が定義したムーンシャイン 加群，$V^\natural$は共形場理論における最初のツイストした即ち，$\mathbb{Z}_2$-orbifold なモデルとして与えられています．これは位数 2 のラティスの鏡映

$$r : \beta \to -\beta \qquad \forall \beta \in \Lambda$$

を使って定義されています．

モンスター単純群の加群の立場から見ると，$V^\natural$ は共形場理論のフォック空間とみてモンスター単純群が作用しており，しかもモンスター 単純群 $\mathbb{M}$ は $V^\natural$ の頂点作用素 $V(v,z)$ の作用と可換な $V^\natural$の自己同形全体の集合と一致しています．即ち，$v,w \in V^\natural$ と $g \in \mathbb{M}$ に対して，

$$V(gv,z)w = g^{-1}V(v,z)gw$$

が成り立ちます．頂点作用素についてはあまり詳しく述べません．詳細については [FLM], [DGM] を参照してください．

では，リーチラティスの共形場理論から始めます．リーチラティス Λ を使って，ベクトル空間

$$\mathcal{H} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda,$$

を定義します．この 24-次元の $\mathbb{C}$-ベクトル空間は非退化な対称二次形式を持っています．これをアーベルリー代数とみて，それの $\mathbb{Z}$-次数付きアフィンリー代数

$$\tilde{\mathcal{H}} = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

とそれのハイゼンバーグ部分リー代数

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}} = \tilde{\mathcal{H}}' = \prod_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \mathcal{H} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}c$$

を構成します．$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}$の 対称代数の非正の次数部分

$$M(1) = S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-) = \prod S^n(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}})$$

を $\mathbb{Q}$-次数付き $\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}$-既約 $\hat{\mathcal{H}}$-加群と考えます．ここで，c と$\hat{\mathcal{H}}$は自明に作用しており，d は次数作用素として作用しています．また，上の $S^n(V)$ は Vの n 番目の対称巾 を表わしています． 積を無視すると，加群として多項式環

$$S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-) = \mathbb{C}[\alpha_i \otimes t^{-1}, \alpha_i \otimes t^{-2}, ... : i = 1, ..., 24],$$

と一致します．ここで，$\{\alpha_i : i = 1, ..., 24\}$ は A_1^{24}型のニイマイヤラティスを使って構成した $\mathcal{H}$ の直交基底を先に固定して考えています．Λの内積を使って，位数 2 の中心 $< k >$ を持つΛの中心拡大$\tilde{\Lambda}$を構成します．即ち，

$$0 \to < k > \to \tilde{\Lambda} \xrightarrow{-} \Lambda \to 0. \tag{2.1}$$

次に，$\mathbb{C}[\tilde{\Lambda}]$ でそれの群環をあらわし，$\mathbb{C}\{\Lambda\}$ で $k+1$ で生成されるイデアルで割った剰余環を表わすことにします．代表系として$\iota(b)$ で $b \in \tilde{\Lambda}$ に対して，b に対応する定められた $C\{\Lambda\}$ の一つの元を適当な規則を満たすように取っておきます． これで集合

$$V_\Lambda = S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-) \otimes \mathbb{C}\{\Lambda\},$$

を定義すると，これがリーチラティス共形場理論のフォック空間となっています．

ムーンシャイン加群はこの空間の半分の他にツイストした部分が加わって構成されるので，ツイストされた部分を次に構成します．まず，$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-次数付きのツイストされたアフィンリー代数

$$\hat{\mathcal{H}}[-1] = \prod_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \mathcal{H} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

とそれのハイゼンバーグ部分代数

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}+1/2} = \hat{\mathcal{H}}[-1]$$

を用意し，$\Lambda/2\Lambda$の内積を使って，$\Lambda/2\Lambda$の中心拡大$\hat{\Lambda}$ を構成します．これは位数 2^{25}の extra special 2-群となっています．$\hat{\Lambda}$はただ一つ一次元でない 2^{12}次元の既約表現がありますので，それを Tで表わします．ツイストしたベクトル空間

$$V_\Lambda^T = S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}+1/2}^-) \otimes T$$

を構成し，$End\ S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}+1/2}^-)$ と $End\ T$ を $End\ V_\Lambda^T$ に埋めこんで考えます．

θ を

$$a \to a^{-1} k^{<\bar{a}, \bar{a}>/2},$$

で与えられる$\hat{\Lambda}$の位数 2 の自己同形とし，また，θ は T に自明に作用し，on $\mathcal{H}$には -1 として作用するとします．ここで，$\bar{a}$ は $a \in \hat{\Lambda}$ の Λ での像です．この自己同形を使って，V_Λにおけるθ の固定点の集合 V_Λ^θ と V_Λ^Tにおける 固有値 -1 の固有空間 $(V_\Lambda^T)^\theta$ of θ を合わせて，ムーンシャイン加群

$$V^\natural = V_\Lambda^\theta \oplus (V_\Lambda^T)^\theta.$$

が定義されています.

この 空間 $V^\natural$ は特別な構造を持っており, 例えば, $V^\natural$ 上限が 1 であるような整数を次数として持つ次数付き加群:

$$V^\natural = \prod_{n\in\mathbb{Z}, n\leq 1} V^\natural_n,$$

で, 各次元が最初に述べたモジュラー関数の係数に一致しています. ここで,

$$V^\natural_1 = \mathbb{C}\iota(1), \qquad V^\natural_0 = 0$$

であり, $V^\natural_{-1}$ は 196884 次元空間です. 特にこの $V^\natural_{-1}$ は重要なので少し詳しく構造を説明しましょう.

$$V^\natural_{-1} = \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\bigoplus\oplus_{x\in\tilde{\Lambda},\bar{x}\in\Lambda(4)}\mathbb{C}(\iota(x)+\iota(x^{-1}))\bigoplus T\otimes\mathcal{H}.$$

ここで, $\Lambda(4) = \{x\in\Lambda : x^2 = 4\}$ はリーチラティスのノルム 4 の元 (short elements と呼ぶ) の集合です. モンスター単純群は $V^\natural_{-1}$ に忠実に作用しているので, この 加群の上の作用を見ると, モンスター単純群のムーンシャイン加群への作用が決定できます. この有限次元の加群をモンスター加群と呼ぶ.

直交座標を使って $V^\natural$ を分解してみましょう. . リーチラティス Λ は次の表示を持っています.

$$\sum_{C\in C_{24}}\mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_C + \sum_{k,h\in\Omega}\mathbb{Z}(\alpha_k+\alpha_h) + \mathbb{Z}(\frac{1}{4}\alpha_\Omega - \alpha_1),$$

特に, A_1^{24}型のニイマイヤラティスとの共通部分は指数 2 の部分ラティス

$$\Lambda_0 = \sum_{C\in C_{24}}\mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_C + \sum_{k,h\in\Omega}\mathbb{Z}(\alpha_k+\alpha_h)$$

となっています. ここで $\Omega = \{1,...,24\}$ $\alpha_C = \sum_{k\in C}\alpha_k \quad \forall C\in\mathbb{C}_{24}$ です. 更に, 内積を持つ 2 元体上のベクトル空間 $\Lambda/2\Lambda$ の部分空間

$$\mathbb{Z}_2\frac{1}{2}\alpha_\Omega + \sum_{k,h\in\Omega}\mathbb{Z}_2(\alpha_k+\alpha_h)$$

は全ての元の長さが 0 である$\Lambda/2\Lambda$の中の極大な部分空間なので, T の基底として

$$\{t(\iota(\frac{1}{2}\alpha_C)), \quad t(\iota(\beta_1 - \frac{1}{2}\alpha_C)) : 1\notin C\in C_{24}\}, \tag{3.2}$$

が取れることが解ります. ここで $b(\alpha)\in\tilde{\Lambda}$ は$\alpha\in\Lambda$ の代表であり, β_i は $\frac{1}{4}\alpha_\Omega - \alpha_i\in\Lambda$ を表わします.

この部分ラティスを使って, つぎの集合を定義します.

$$V_0 = S(\hat{\mathcal{H}}^-_{\mathbb{Z}})\otimes\sum_{\alpha\in\Lambda_0}\mathbb{C}\iota(b(\alpha))$$

$$V_1 = S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}}^-) \otimes \sum_{\alpha \in \Lambda - \Lambda_0} \mathbb{C}\iota(b(\alpha))$$

$$T_0 = \sum_{1 \notin C \in \mathbb{C}_{24}} \mathbb{C}t(b(\frac{1}{2}\alpha_C)) \qquad V_0^T = S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}+1/2}^-) \otimes T_0$$

$$T_1 = \sum_{1 \notin C \in \mathbb{C}_{24}} \mathbb{C}t(b(\beta_1 - \frac{1}{2}\alpha_C)) \qquad V_1^T = S(\hat{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}+1/2}^-) \otimes T_1$$

Then $V^\natural$ has the decomposition

$$V_0^\theta \oplus V_1^\theta \oplus (V_0^T)^\theta \oplus (V_1^T)^\theta.$$

モンスターの作用を見る上で特に役に立つ定理を述べておこう.

定理 3 (FLM) 頂点作用素代数上の加群として, $V_0^\theta, V_1^\theta, (V_0^T)^\theta, (V_1^T)^\theta$ は全て既約な V_0^θ-加群である. 特に, モンスター単純群の元 s が $(V_0^T)^\theta$ に自明に作用していると, s は V_0^θ の上にも自明に作用していることが分かる. しかも, $V_1^\theta \oplus (V_1^T)^\theta$ にはスカラー $\{\pm 1\}$ 倍の作用となる.

[付記]
ムーンシャイン加群の研究はこの談話会の後に大きな進展が起こっており,

1. Huang, Lepowsky による頂点作用素代数の幾何学的関係
2. 著者によるムーンシャイン加群の上に作用する3元体上のアフィン平面の点と線に対応する21個の traialities の構成

等があります. 前半は先の genus 0 の問題に対して有効な方法ではないかと思いますし, 後者はムーンシャイン加群に上のモンスターの作用とモンスター単純群そのものを把握するのに役立つと思います.

References

[1] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, ATLAS of Finite Groups, Oxford Univ. Press, 1985.

[2] J. H. Conway and S. P. Norton, Monstrous moonshine, Bull.London Math. Soc. 11(1979), 308-339.

[3] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packing, Lattices and Groups,* Springer-Verlag, New York, 1988.

[4] B. Fischer, D. Livingstone, and M. P. Thorne, The characters of the "Monster" simple group, Birmingham, 1978.

[5] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Vertex Operator Algebra and the Monster,* Academic Press, INC., 1988.

[6] R. L. Greiss, JR, The structure of the "Monster" simple group, in: *Proc. of the Conference on Finite Groups,* ed. by W. R. Scott and R. Gross, Academic Press, New York, 1976, 113-118.

[7] R.L.Greiss,JR, The friendly giant, Invent. Math. 69 (1982), 1-102.

[8] K. Harada, M. L. Lang, and M. Miyamoto, Sequential construction of Niemeier lattices and uniqueness proof, J. of Number Theory, (to appear).

質的データに対する Mantel-Haenszel 型の多変量解析

柳川　堯　　(九州大理)

1　問題の背景

1. はじめに

ヒトを対象とする因果関係（例えば、喫煙⟹肺がん）について考える。喫煙（Yes,No）、肺がん（Yes,No）など多くの場合データは定性的、つまりカテゴリカルデータである。これらのデータは最も簡単な場合、表 1.1 の様な 2x2 分割表で表示される。

表 1.1　データ

	非喫煙	喫煙	計
健常	c	a	n_1
肺がん	d	b	n_2
計	t_1	t_2	N

また、因果関係:喫煙⟹肺がんは、個体の年齢、性、職業、居住地区等の多くの変量の影響をうける。これらの変量も多くの場合またカテゴリカルである（年齢は連続変量であるが5才、あるいは１０才ごとにグループ分けされることが多い)。次の例に見られるように、因果関係の解析でこれらの変量を無視すると重大な misleading が起きる。

2. シンプソンのパラドクス（人工的データ）

表 1.2　因果関係なし⟹　（見せかけ）因果関係あり

					Z_1			Z_2			
	$\overline{E}$	E	計		$\overline{E}$	E	小計	$\overline{E}$	E	小計	総計
健常	1152	240(.17)	1392	⇐	30	70(.70)	100	1122	170(.13)	1292	1392
肺がん	96	80(.45)	176		30	70(.70)	100	66	10(.13)	76	176
計	1248	320	1568		60	140	200	1188	180	1368	1568

E:喫煙, $\overline{E}$: 非喫煙

表 1.3　因果関係あり ⟹（見せかけ）因果関係なし

					Z_1			Z_2			
	$\overline{E}$	E	計		$\overline{E}$	E	小計	$\overline{E}$	E	小計	総計
健常	612	170(.22)	782	⇐	160	160(.50)	320	452	10(.02)	462	782
肺がん	468	130(.22)	598		16	80(.83)	96	452	50(.10)	502	598
計	1080	300	1380		176	240	416	904	60	964	1380

E:喫煙, $\overline{E}$: 非喫煙

3. 目的

Mantel-Haenszel 法 (1959) は、因果関係に影響を与える因子を層別によってコントロールする多変量解析の方法論であって、疫学データの解析に対する有用性が確立している。しかしその理論的研究は十分ではなく、適用範囲も 2x2 表に限られている。本研究の目的は、Mantel-Haenszel 法の数理を明らかにし、これを一般化して、2xk 表にまとめられる質的データの多変量解析理論を構築することである。

2 数学的定式化

セル確率

データ	Y=0	Y=1	...	Y=K	計	Y=0	Y=1	...	Y=K
X=0	X_{oo}	X_{o1}	...	X_{oK}	n_o	P_{oo}	P_{o1}	...	P_{oK}
X=1	X_{1o}	X_{11}	...	X_{1K}	n_1	P_{1o}	P_{11}	...	P_{1K}
計	t_o	t_1	...	t_K	N				

1. 一般化超幾何分布とオッズ比

定義　$P_{ij} > 0$ を仮定して

$\psi_j =: \frac{P_{oo}P_{1j}}{P_{oj}P_{1o}}$:オッズ比という

上の 2xK 表にまとめられたデータは、その採られ方によって、ポアッソン分布、多項分布、二つの多項分布、K+1 個の二項分布を確率モデルとして想定できるが、二つの周辺の和 $\mathbf{C}=(n_o, n_1, t_o, t_1, ..., t_K)$ を所与とした条件付き分布は、いずれの場合もつぎの一般化超幾何分布で与えられる。

$$Pr[(X_{11}, ..., X_{1K}) = (x_{11}, ..., x_{1K})|\mathrm{C}] = \frac{\psi_1^{x_{11}} ... \psi_K^{x_{1K}}}{x_{1o}!x_{11}!...x_{1K}!} \Big/ \Sigma * \frac{\psi_1^{a_{11}} ... \psi_K^{a_{1K}}}{a_{1o}!a_{11}!...a_{1K}!},$$

ただし、Σ^*は $a_{1o} + a_{11} + ... + a_{1K} = n_1, 0 \leq a_{1j} \leq t_j, j = 0, 1, ..., K$なるすべての整数 $a_{1o}, a_{11}, ..., a_{1K}$ に関する和。

2. Mantel-Haenszel 型の多変量解析

因果関係に影響を与える因子で層別した結果、L 枚の 2xK 表ができたとする。第 ℓ表のオッズ比、セル確率、データ等を$\psi_{\ell,j}, P_{\ell,i,j}, x_{\ell,i,j}$の様に表す。Mantel-Haenszel 型の多変量解析理論を

$\psi_{\ell,j} = \psi_j$, ℓ=1,2,...,L (オッズ比の均一性)

を前提とする、共通オッズ比　ψ_j, j=1,2,...K に関する推測 (検定、推定) 理論として展開する。このとき、カテゴリー (Y=0),(Y=1),...,(Y=K) 間に順序がある場合と、ない場合で相異なる定式化を行う。

談話会では、これらの方法の前提であるオッズ比の均一性の検定について述べる。

対称行列の空間に付随するゼータ関数について

京都大学人間環境学研究科
齋藤　裕

対称行列に付随するゼータ関数は、既にジーゲルによりその特殊な場合が調べられているが、新谷卓郎氏は、概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の重要な例として一般の場合に考察し、１９７５年の論文において、その解析接続を示し、関数等式、極、留数を決定している。さらにそのゼータ関数の特殊値がジーゲル保型形式の次元公式への、ユニポテントな元の寄与を与えることを示し、特別な場合にその値を決定している。ここでは、このゼータ関数の具体的な形を決定し、それから次元公式に必要な特殊値が容易に得られることを示す。

V_n で、n 次の対称行列のなす空間を表し、$\boldsymbol{C}$ の部分体 F に対し $V_n(F)$ で、F に値を持つ点を表す。このとき、$(GL_n(\boldsymbol{C}), V_n(\boldsymbol{C}))$ は、作用 $\rho(g)x = gx^tg,\ g \in GL_n(\boldsymbol{C}),\ x \in V_n(\boldsymbol{C})$ で概均質ベクトル空間をなす。$SL_n(\boldsymbol{Z})$ で不変な $V_n(\boldsymbol{Q})$ の格子 L に対し $L^{(i)}$ で、L の元で、符号が $(i, n-i)$ であるものの集合を表す。このときゼータ関数が

$$\zeta_i(s, L) = c_n \sum_{x \in L^{(i)}/\sim} \mu(x)|\det x|^{-s}$$

で定義される。ここで

$$c_n = \frac{2\prod_{k=1}^{n} \Gamma(k/2)}{\pi^{n(n+1)/2}}$$

で、$\mu(x)$ は x から決まるある基本領域の面積で、特に $i = n$ の場合には

$$c_n\mu(x) = 1/\varepsilon(x),\ \varepsilon(x) = |\{\gamma \in SL_n(\boldsymbol{Z}) | \rho(\gamma)x = x\}|$$

で与えられる。また x は、$L^{(i)}$ を $SL_n(\boldsymbol{Z})$ の作用で割った代表を動く。この級数は、$n = 2,\ i = 1$ の場合を除いて $Re(s) > (n+1)/2$ で絶対収束し、さらに全平面に有理型関数として解析接続される。

簡単のため、$n \geq 3,\ i = n$ の場合に、上のゼータ関数の具体的な形を与える。このとき L は、$\boldsymbol{Z}$ に係数を持つ対称行列全体 L_n またはその相対格子 L_n^* とスカラー倍を除いて一致する。ふたつの格子のゼータ関数の形は、ほぼ同じなので、L_n^* の場合にその形を与える。この形は、n が偶数か奇数かによって形がかなり異なるので、まず n が奇数の場合を与える。この場合ゼータ関数は

$$\zeta_n(s, L_n^*) = \frac{|\prod_{i=1}^{[n/2]} B_{2i}|}{2^{n-1}(\frac{n-1}{2})!} 2^{(n-1)s} \Big(\zeta(s - \frac{n-1}{2}) \prod_{i=1}^{[n/2]} \zeta(2s - (2i-1)) + (-1)^{(n^2-1)/8} \zeta(s) \prod_{i=1}^{[n/2]} \zeta(2s - 2i)\Big)$$

で与えられる。n が偶数の場合には、次の半整数ウエイトのアイゼンシュタイン級数のディリクレ級数

$$D_n^*(s) = (-1)^{[n/4]} \sum_{(-1)^{n/2} d_K > 0} 2(2\pi)^{-n/2}(n/2-1)!|d_K|^{(n-1)/2} L(\frac{n}{2}, \chi_K) \times \frac{\zeta(2s)\zeta(2s-n+1)}{L(2s-\frac{n}{2}+1, \chi_K)} |d_K|^{-s}$$

が必要になる。ここで K は、二次体または $\boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{Q}$ で、$(-1)^{n/2} d_K > 0$ となるものを動く。n が偶数のときには

$$\zeta_n(s, L_n^*) = \frac{|\prod_{i=1}^{n/2-1} B_{2i}|}{2^{n-1}(\frac{n-2}{2})!} 2^{ns} \Big((-1)^{[n/4]} D_n^*(s) \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s-2i) + (-1)^{n(n+2)/8} \delta_n \frac{2|B_{n/2}|}{n} \prod_{i=1}^{n/2-1} \zeta(2s-(2i-1)) \Big)$$

で与えられる。ここで、$(-1)^{n/2} \equiv 1 \bmod 4$ なら $\delta_n = 1$, そうでないときには、$\delta_n = 0$.

これから負の整数点での値は、ベルヌイ数を用いて簡単に表されることがわかる。また関数等式、極、留数なども容易にわかる。証明は、二次形式の理論、特にジーゲルの公式と、有理数体上の二次形式と局所体上の二次形式の関係、及び局所体所上の二次形式の計算によってなされる。このような計算が可能なのは、特殊な概均質ベクトル空間に限られるが、エルミート形式の空間など、他にもいくつか可能であると思われる。

GEOMETRY OF PLANE CURVES VIA TOROIDAL RESOLUTION

MUTSUO OKA

Department of Math., Tokyo Institute of Technology
Oh-Okayama, Meguroku-ku, Tokyo 152

§1. Introduction.

Let $C = \{f(x,y) = 0\}$ be a germ of a reduced plane curve. As examples of the basic invariants of a plane curve, we have the Milnor number, the number of irreducible components, the resolution complexity, the Puiseux pairs of the irreducible components and their intersection multiplicities. In fact, the Puiseux pairs of the irreducible components and their intersection multiplicities are enough to describe the embedding topological type of C. See [17, 9]. It is well known that C can be resolved by a composition of (ordinary) blowing-ups. However this process is usually too long and even we know the informations of the composition of these blowing-ups, it is not so easy to read from these informations how the Puiseux pairs and the intersection multiplicity behave. Instead of ordinary blowing-ups, we study the toroidal resolution of C, which is a resolution consisting of a finite composition of admissible toric blowing-ups. Certainly a toric blowing-up is a finite composition of an ordinary blowing-ups but as a package, it contains more informations. In fact, it turns out that the toroidal resolution contains the informations which is perfectly suitable for the determination of the above invariants. In our previous paper [10], we have proved the existence of the toroidal resolution and a basic theorem about the complexity of the resolution. The purpose of this paper is to show how we can read Puiseux pairs and the intersection multiplicities among the irreducible components using the data of the toroidal resolution. See Theorem (7.3) and Theorem (7.13) in §7. As an application, we consider a plane curve C which is a plane curve obtained as n times iterated generic hyperplane sections of a non-degenerate hypersurface. We will show that the resolution complexity of such a curve is at most $n+1$ and each irreducible components has at most one Puiseux pair (Theorem (8.1)).

北大数学特別講演（'92.10.29）

特性関数を含む汎関数の変分問題について

小俣 正朗　（北見工業大）

1．物理的背景と問題の定式化.

ゴム製の薄膜を等方的に引き延ばしてから、平面に接着剤で張り付けて、それを剝すときにゴム膜がどの様な形状になるかという問題を考えてみよう。ここで、等方的というのは、stress tensor が定数対角型行列でかけていて、さらに同じ固有値 T を持っている時のことをいう。最初にゴム膜を張り付けたところを領域 Ω としよう。そこで、ゴムのはじを持って平面と垂直方向に持ち上げる。この時のゴム膜の形状をもとめるのである。ゴム膜をスカラー関数 $u:\Omega\to R$ で表すことにするとき、この系のエネルギー増加量を次の二つの仮定のもとに計ってみよう。

(A1) 接着力（の最大値）は線密度で表現されるが、これを定数 $\widetilde{Q}$ とする。

(A2) 接着力と張力の比 $\widetilde{Q}/T$ は、十分小さくて剝す動作中に変化しないものと仮定する。

この系のエネルギーを増加させるのには２つの要素がある。一つは、ゴムが延びることによって増加する張力エネルギーで$\int_{\{u>0\}}T\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}-1\right)d\mathcal{L}^n$ と書くことができる。もう一つは、はがれる過程で系に加わるエネルギーで$\int_{\{u>0\}}(T-\sqrt{T^2-\widetilde{Q}^2})d\mathcal{L}^n$ となる。両エネルギーに $T|\Omega|$ を加えて整理すると、

$$\int_\Omega\left(T\sqrt{1+|\nabla u|^2}+(T-\sqrt{T^2-\widetilde{Q}^2})\chi\{u>0\}\right)d\mathcal{L}^n \tag{1.1}$$

となる。そして実際に起こる現象は、この汎関数の minimizer が記述するのである。この汎関数の変分問題は難しく、radially symmetric の時に、一部の結果が得られているにすぎない。（[Y] 参照。）そこで、この各項を Taylor 展開して近似すると、

$$\int_\Omega\left(\frac{T}{2}|\nabla u|^2+\frac{\tilde{Q}^2}{2T}\chi(\{u>0\})\right)d\mathcal{L}^n \tag{1.2}$$

という変分汎関数が得られる。

(1.2) は、Alt, Caffarelli が [AC] で導入した汎関数に他ならない。彼らは、ゴム膜の物理イメージではなく、専ら jet problem や Cavitational flow problem などを解くためにこのタイプの汎関数を用いた。彼らの流体のモデルは本質的には線形の場合を考えているので、本格的な非線形性は出てきていないと言って良い。本講演では、(1.2) 式を出発点として、もう少し物理的な仮定を弱めた汎関数を扱い、ゴム膜の剝がれ口（自由境界）の正則性を調べること目標を置く。物理的設定を次のように一般化していこう。まず、stress tensor が、定数対角型行列で書けない一般の場合を扱い、さらに、膜が、外からの影響を受けて、stress tensor が u とか ∇u に応じて変化する場合を考える。これは、外部のスカラー場とかベクトル場がゴム膜に
影響する場合に当たる。このような場合の最も一般的な汎関数を、(1.2) を出発点に定式化し直すと問題は次のようになる。

$$J(u)=\int_\Omega\left(a^{ij}(x,u,\nabla u)D_iuD_ju+Q^2\chi(\{u>0\})\right)d\mathcal{L}^n, \tag{1.3}$$

ここで、 $D_i=\partial/\partial x_i$ とし、summation convention を用いることにする。
この (1.3) を $K=\{u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)|\nabla u\in L^2(\Omega),u=u_0 \text{ on } S\}$ で最小値を与える関数の自由境界 $\{x|u>0\}$ の正則性を示せ. ただし記号は次の通りである.

Domain $\Omega \in R^n$ の境界は Lipschitz Graph とする。$Q(x)$ は予め与えられた measurable 関数で $0 < Q_{\min} \le Q(x) \le Q_{\max} < \infty$ を満足する。u_0 は予め与えられた関数で bounded かつ non-negative で $u_0 \in L^1_{\rm loc}(\Omega), \nabla u^0 \in L^2(\Omega)$ and $J(u_0) < \infty$ である。ここで、S は Ω の subset で $\mathcal{H}^{n-1}(S) > 0$ とする。但し, $\mathcal{H}^{n-1}$ は $n-1$-dimensional Hausdorff measure である。χ は特性関数である。

2. これまでの結果と証明の概略.

結果1 (Alt-Caffarelli:[AC]) . $a^{ij} = \delta^{ij}$ とし, Q を *Hölder* 連続であるとするると $n=2$ のときは, *free boundary* $\{x|u>0\}$ は, Ω 内の任意の *compact set* で $C^{1,\alpha}$-*curve* である. $n \ge 3$ のときは, *reduced free boundary* $\partial^*\{x|u>0\}$ は Ω 内の任意の *compact set* で $C^{1,\alpha}$-*curve* である.

結果2 (Omata:[Om]) . $a^{ij}(x,u,\nabla u) = a^{ij}(u)$ で $a^{ij} = a^{ji}$ とする。($a^{ij}(0) = a\delta^{ij}$ ($a>0$:定数)) と仮定する。これは、一般性を失わない。a^{ij} が *smooth* で $0 < \lambda|\xi|^2 \le a^{ij}(u)\xi^i\xi^j \quad \forall \xi \in R^n - \{0\}$ さらに、$0 \le \dot{a}^{ij}(z,x)\xi^i\xi^j \quad \forall \xi \in R^n - \{0\}$ をみたすとする。
このとき $n=2$ で *free boundary* $\partial\{x|u>0\}$ は, Ω 内の任意 *compact set* で, *countably* 1 *rectifiable* である.

結果3 (Omata-Yamaura :[OY]). 上の定理と同様の仮定の時、自由境界は、$C^{1,\alpha}$-*curve* である。

結果2についての証明の概略を述べてみよう。第一段として、minimizer の Lipschitz 連続性を導出する。この証明に非線形独特の工夫が必要になってくる。([Om] 参照。) 第2段として、これを元に、ゴム膜が平面に突入する角度を下から、1次関数で評価して、一種の陰関数定理を作り、自由境界 $\partial\{u>0\}$ が countably rectifiablity であることを証明するのである。さて、minimizer u の連続性より、弱い意味で、Euler Lagrange equation

$$D_j(a^{ij}(u)D_iu) - \frac{1}{2}\dot{a}^{ij}(u)D_iuD_ju = 0 \qquad \text{in} \quad \{u>0\} \tag{2.1}$$

を満足することがわかる。実は、Ω 全体では、(1.4) の左辺は正になっており、このことから、左辺の作る Radon measure の support が自由境界上 $\partial\{u>0\}$ に集中するのである。また、このとき自由境界上では、$|\nabla u| = Q/\sqrt{a(0)}$ on $\partial\{u>0\}$ をみたすことがわかる。これで、問題の微分方程式としての意味がはっきりとわかった。

また、このタイプの汎関数は local minimizer も存在して、それを見つけるのも面白い問題になっている。それに関しては、対応する熱方程式を用いるのがひとつの方法であるが、残念ながら、この問題に対応する熱方程式の解は得られていない。今のところ、時間方向を差分化した方程式の場合に解の構成と漸近挙動の一部がわかっているだけである。([NO] 参照。)

References

[AC] H.W.Alt - L.A.Caffarelli, *Existence and regularity for a minimum problem with free boundary,* J. Reine Angew. Math. **325** (1981), 105-144.

[ACF] H.W.Alt - L.A.Caffarelli - A.Friedman, *Asymmetric jet flows,* Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 29-68.

[NO] T.Nagasawa - S.Omata, *Discrete Morse semiflows of a functional with free boundary,* to appear in Adv. in Math. Sci. Appl.

[Om] S.Omata, *A free boundary problem for a quasilinear equation Part I: Rectifiablity of free boundary,* preprint

[OY] S.Omata - Y.Yamaura, *A free boundary problem for a quasilinear equation Part II:* $C^{1,\alpha}$ *regularity of free boundary,* preprint

[Y] Y.Yamaura, *The construction of a minimum for radially symmetric free boundary problem,* preprint

Hadamard 群

名城大 理工 伊藤 昇

定義：G が Hadamard 群 というのは，$|G| = 2n$，$\exists\, D \subseteq G$，$e^* \in G$ が次の条件を満足することです

$D \cap De^* = \phi$，$a \neq e$（単位元），e^* なら $|D \cap Da| = \frac{n}{2}$，

また $\forall a, b \in G$ について $|Da \cap \{b, be^*\}| = 1$

基本的なことでわかったこと

(1) e^* は central involution

(2) $|G| > 4$ なら $|G| \equiv 0 \pmod 8$

(3) G_i, D_i, e_i^* $i=1, 2$ が Hadamard 群 なら $G = \dfrac{G_1 \times G_2}{\langle e_1^* e_2^* \rangle}$ も $D = D_1 D_2 \langle e_1^* e_2^* \rangle$，$e^* = e_1 \langle e_1^* e_2^* \rangle$ として Hadamard 群

(4) $G = H \times \langle e^* \rangle$ となれば，$D \cap H$ は Hadamard (Menon という人もある) 差集合．逆もよい。Hadamard 差集合についてはいろいろ調べられていますし，面白そうな予想もいくつか知られています．Hadamard 群の特殊な場合といってもよいだろうと思っています

(5) ($\mathbb{C}$ 上の) 既約表現 R を考えると，$R(\bar{D}D) = O$ か nI で 後者は $R(e^*) = -I$ のときおこります (I は単位行列)，また前者では $R \neq 1_G$ (単位表現) とします．この逆も正しいことが最近わかりました．

(5) は negative に，即ち Hadamard 群の Sylow 2 群が dihedral (order $\geqq 8$) でないとか，cyclic (order $\geqq 8$) でないとかに使われるのですが，positive にはまだ使うことが出来ません

平方剰余型とか Paley 型とか Hadamard 行列を基にして, 対応する Hadamard 群を作りましたが, その様でなく 群論的な構成法が望ましいです. もっとも 平方剰余型に関連して SL(2,5) が Hadamard 群であることは示せましたが.

References:

N. Ito 1) On Hadamard groups, to appear in J. of Algebra

3) 〃 II 〃

2) Note on Hadamard groups of quadratic residue types, to appear in Hokkaido Math. J.

4) Note on Hadamard groups and difference sets

要求して下されば preprints をお送り致します.

ともかく考慮するに値する subject だと確信しています.

Instanton と Pseudo-Holomorphic Curve

都立大理　吉田朋好

M^3 を 3次元 oriented closed 多様体とし、$M\times SU(2)$ の既約 flat 接続 a, b をとり、$M^3\times\mathbb{R}\times SU(2)$ 上の自己共役接続でエネルギー有限、かつ $M^3\times\{\pm\infty\}$ でそれぞれ a, b に極限をもつものの全体を、ゲージ同値の関係で割ったものを $\mathcal{M}^{\mathrm{Instanton}}(a,b)$ とおくと、これは局所的に有限次元の多様体となる。

一方、$M^3=V_1\cup_h V_2$ を M^3 の Heegaard 分解とする。すなわち V_1, V_2 は genus $g\ (\geqq 2)$ のハンドル体、$h:\partial V_1\to\partial V_2$ は $\Sigma=\partial V_1=\partial V_2$ の微分同相写像で、M^3 は V_1 と V_2 を h によって境界を同一視したものとして表わされる。この分解に対し、M^3 の基本群 $\pi_1(M^3)$ は Van-Kampen の定理により $\pi_1(M^3)=\pi_1(V_1)*_{\pi_1(\Sigma)}\pi_1(V_2)$ と表わされる。それに、$\pi_1(\Sigma)$ の $SU(2)$-表現の空間 $\mathcal{M}_\Sigma=\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), SU(2))/\mathrm{conj.}$ の中に 2つの Lagrangian 部分多様体 L_1, L_2 が $\pi_1(V_1), \pi_1(V_2)$ に対応して得られ、$L_1\cap L_2$ が $\mathrm{Hom}(\pi_1(M^3), SU(2))/\mathrm{conj.}$ と同一視される。Σ に複素構造を与えて、$\mathcal{M}_\Sigma$ に Kähler 多様体の構造を与えることができる。

$M\times SU(2)$ 上の flat 接続は、ホロノミー表現をとることにより $\pi_1(M^3)$ の $SU(2)$-表現と同一視することができる。従って 2つの flat 接続 a, b に対し、2点 $a, b\in L_1\cap L_2$ が定まる。$\Theta=\{z\in\mathbb{C}\mid 0\leq \mathrm{Im}\,z\leq 1,\ -\infty<\mathrm{Re}\,z<+\infty\}$ とし、Θ から $\mathcal{M}_\Sigma$ への正則写像 f で $f(\partial_1\Theta)\subset L_1$, $f(\partial_2\Theta)\subset L_2$, かつ $\mathrm{Re}\,z\to\pm\infty$ で a, b に収束するものを考える。(ただし $\partial_1\Theta=\{z\in\Theta\mid \mathrm{Im}\,z=0\}$, $\partial_2\Theta=\{z\in\Theta\mid \mathrm{Im}\,z=1\}$)。このような正則写像の全体を $\mathcal{M}^{\mathrm{hol}}(a,b)$ とおくことにする。

$\mathcal{M}^{Instanton}(a,b)$ と $\mathcal{M}^{hol}(a,b)$ の間の関係について、次の結果を得た。

定理　$\mathcal{M}^{Instanton}(a,b)$ と $\mathcal{M}^{hol}(a,b)$ の次元は等しく、これらの次元が1のとき、$M^3 \times \mathbb{R}$ の Riemann 計量を適当にとると、両者は向きのついた多様体として、微分同相になる。

経済に関連した確率解析の話題，risk aversion.

西尾真喜子（神大 理）

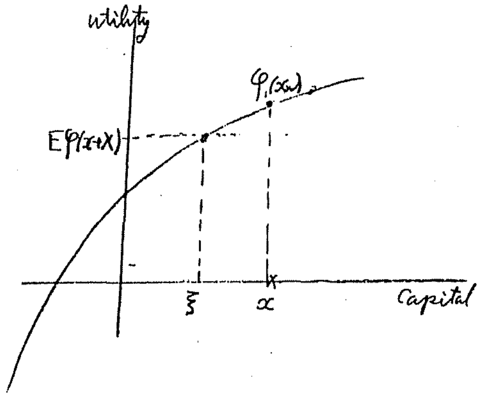
1. 証券市場にみられる様に，不確実なリスクを伴うことに対して行動する場合，期待される効用が最大になる様な決定を行うことが多い。
例えば，A氏のキャピタルに対する効用を $u(\ )$ とする．勝てば a円，負ければ $-a$円得る公平な賭けに A が x円持って参加した時，期待効用 $= \frac{1}{2}(u(x+a)+u(x-a))$

である． さて，A がリスクを嫌い賭に参加することを望まない性格であれば，大ざっぱにいって，彼の効用 $u(\ )$ は，$\frac{1}{2}(u(x+a)+u(x-a)) < u(x)$ という性質を持つことになる．即ち，risk averter（危険回避者）の効用として，増大な凹関数が用いられる．

φ をなめらかな増大凹関数（= risk averter の utility）

X = 賭の capital gain を表す確率変数

$E\varphi(x+X)$ = capital x を持って賭を行う時の期待効用



右図に見るように $\xi = \varphi^{-1}(E\varphi(x+X))$ は期待capital ともいうべきもので certainty equivalent な値といわれている． また，$\gamma(x) \equiv -\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$ は危険回避の測度として用いられ，危険回避率と呼ばれる．$E(x+X)-\xi$ がリスクを回避したことによる損失である．

2. 危険回避率が大きい時の certainty equivalent な値を調べる事は興味深い．最近，Barron & Jensen [1] は random な運動の制御と関連させて次のような結果を得ている．

Γ を制御域とし，制御された運動 $\xi(\cdot)$, $Y(\cdot, U)$ を考える

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi(t)}{dt} = f(\xi(t), Y(t), U(t)) & \xi(0) = x \in R^n \\ dY(t) = dW(t), & Y(0) = y \in R^d. \end{cases}$$

ここで W は d 次元ブラウン運動，U は admissible control

即ち，W に適合した Γ-値確率過程． $\mathcal{A}$ = admissible control の全体．

gain function $g: R^n \to R^1$ を有界なめらか，φ を risk averter の utility とする.

$E_{x,y}\,\varphi(g(\xi(t,U)))$ を最大になる様，admissible control $U \in \mathcal{A}$ をえらぶのが制御問題であり，$v_\varphi(t,x,y) \equiv \sup_U E_{x,y}\,\varphi(g(\xi(t,U)))$ が最大の期待効用になる．Certainty equivalent value function を $V_\varphi = \varphi^{-1} \cdot v_\varphi$ とおく.

<u>定理 [1]</u>

1). V_φ は次の非線形方程式（Bellman タイプ）の一意的粘性解になる

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi''(V)}{\varphi'(V)}\sum_{i=1}^{d}\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \sup_{u\in\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(x,y,u)\right) \\
V(0,x,y) = g(x)
\end{cases}
$$

2). φ_i, $i=1,2,\cdots$ が "$r_i(x) \longrightarrow \infty \quad \forall x$" となる時，

$V(t,x,y) = \lim V_{\varphi_i}(t,x,y)$ は存在し，極限関数 V は y によらない.

更に $V(t,x)$ は，次の min-max 方程式の一意的粘性解になる.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} = \inf_{y\in R^d}\sup_{u\in\Gamma}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(x,y,u)\right) \\
V(0,x) = g(x).
\end{cases}
$$

3. 運動方程式を発展方程式

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = A\xi + f(\xi(t), Y(t), U(t))$$

にした場合，ヒルベルト空間上の問題になる．この場合，問題はむつかしくなり，部分的な結果が得られているに過ぎない

Reference; [1]. E.N. Barron & R. Jensen.; Total risk aversion, stochastic control, and Differential games.; Appl. Math. Optim. 19 (1989) 313 - 327.

Completely $\mathbb{Z}$ symmetric R matrix

北大 理 数学 澁川 陽一

$\{E_{ij}\ ;\ i,j\in\mathbb{Z}\}$ を $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ - matrix algebra での行列単位とする。

<u>Definition</u> R行列 $R(\lambda)=\sum_{i,j,k,l\in\mathbb{Z}} R_{ij}^{kl}(\lambda)\, E_{ik}\otimes E_{jl}$ が completely $\mathbb{Z}$ symmetric であるとは、$\exists\, S^{a,b}(\lambda)$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ s.t. $R_{ij}^{kl}(\lambda)=\delta_{i+j\ k+l}\, S^{k-i\ l-i}(\lambda)$

$|q|<1$, K: 定数 のとき

$$(1)\qquad S^{a,b}(\lambda) = -\frac{q^a}{e^{2\pi\sqrt{-1}K}-q^a}+\frac{q^b}{e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}-q^b}$$

とおいて completely $\mathbb{Z}$ symmetric な R行列を定める。

<u>Theorem</u>. (1) で定めたR行列は Yang-Baxter 方程式を満たす。

$$(2)\ \text{(YB)}\qquad R_{12}(\lambda_1)R_{13}(\lambda_1+\lambda_2)R_{23}(\lambda_2) = R_{23}(\lambda_2)R_{13}(\lambda_1+\lambda_2)R_{12}(\lambda_1)$$

$V := C^\infty(S^1)$, $V\hat{\otimes}V := C^\infty(S^1\times S^1)$, $\{\varphi_k(x)\mid k\in\mathbb{Z}\}$ を V の基底 ($\varphi_k(x)=e^{2\pi\sqrt{-1}kx}$) とする。このとき <u>Thm</u> の R行列をフーリエ変換することにより、次の $R(\lambda): V\hat{\otimes}V\to V\hat{\otimes}V$ も YB方程式(2)の解となることがわかる。これを R作用素とよぶ。

$$(3)\quad (R(\lambda)(\varphi_k\otimes\varphi_l))(x,y) = G(x-y:\lambda)(\varphi_k\otimes\varphi_l)(y,x) - G(x-y:K)(\varphi_k\otimes\varphi_l)(x,y)$$

ただし $G(x:\lambda)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\ \dfrac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(\lambda+x)}{\vartheta_1(\lambda)\,\vartheta_1(x)}$,

$$\vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{8}}\sin\pi x\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-2q^m\cos 2\pi x+q^{2m})$$

(3) のR作用素がYB方程式(2)を満たすことは ϑ_1 の加法公式のみから導かれる。したがって、より一般的に

<u>Proposition</u>　解析函数 $\theta(x)$ が

(4) $\theta(x+y)\theta(x-y)\theta(z+w)\theta(z-w)+\theta(x+z)\theta(x-z)\theta(w+y)\theta(w-y)$
$\quad +\theta(x+w)\theta(x-w)\theta(y+z)\theta(y-z)=0$

を満たしているとする。$G(\lambda)$, σ : $V\otimes V \to V\otimes V$ を

$$(G(\lambda)\varphi)(x,y)=\frac{\theta'(0)\theta(\lambda+x-y)}{\theta(\lambda)\theta(x-y)}\varphi(x,y), \quad (\sigma\varphi)(x,y)=\varphi(y,x)$$

とおくと、$R(\lambda):=G(\lambda)\circ\sigma-G(k)$ はYB方程式(2)を満たす。

(4)の解は次のようになる。(A, B：定数)

$$\theta(x)=\vartheta_1(x)\exp(\tfrac{1}{2}Ax^2+B), \quad \sin(\pi x)\exp(\tfrac{1}{2}Ax^2+B), \quad x\exp(\tfrac{1}{2}Ax^2+B)$$

講演では、この中の特に三角函数解に対して

$$R(\lambda_1-\lambda_2)L_1(\lambda_1)L_2(\lambda_2)=L_2(\lambda_2)L_1(\lambda_1)R(\lambda_1-\lambda_2)$$
$$(L_1(\lambda)=L(\lambda)\otimes 1, \quad L_2(\lambda)=1\otimes L(\lambda))$$

から、いかにして algebra $\{L_{ij}\}$ を定義したらよいか、そして、その簡単な表現について説明した。

<u>References</u>

Y.S. and Kimio Ueno, Lett. Math. Phys. <u>25</u> (1992) 239-248
Y.S., to appear in 「量子群とその周辺」講演集.

Stability of the Navier-Stokes Flows in Exterior Domains

HIDEO KOZONO (WITH TAKAYOSHI OGAWA(NAGOYA UNIVERSITY))

Abstract.

Let Ω be an exterior domain in $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ with smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the stationary Navier-Stokes equations in Ω:

$$(S) \qquad \begin{cases} -\Delta w + w \cdot \nabla w + \nabla \pi = f, \quad \text{div } w = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ w = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad w(x) \to 0 & \text{as} \quad |x| \to \infty, \end{cases}$$

In this article we show that the solution w of (S) in the class $w \in L^n(\Omega)$ with $\nabla w \in L^{n/2}(\Omega)$ is *stable* in L^r-spaces. If w is perturbed by a, then the perturbed flow $v(x,t)$ is governed by the following *non-stationary* Navier-Stokes equations:

$$(N-S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + v \cdot \nabla v + \nabla q = 0, \quad \text{div } v = 0 & \text{in} \quad \Omega, t > 0, \\ v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, t > 0, \quad v(x,t) \to 0 & \text{as} \quad |x| \to \infty, \\ v(x,0) = w(x) + a(x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

We show that if $\|w\|_n + \|\nabla w\|_{n/2}$ and $\|a\|_n$ are small, then there exists a unique *global strong solution* v of $(N-S)$ such that

$$\|v(\cdot,t) - w\|_r = o(t^{-n(1/n-1/r)/2}) \quad \text{for} \quad n \leq r < \infty$$

as $t \to \infty$. Under some additional assumption on the initial disturbance a, we obtain also an explicit decay rate of $\|\nabla v(\cdot,t) - \nabla w\|_r$ for $1 < r < n$ as $t \to \infty$.

Let w and v be solutions of (S) and $(N-S)$, respectively. Then the pair of functions $u \equiv v - w, p \equiv q - \pi$ satisfies

$$
(N-S')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + w\cdot\nabla u + u\cdot\nabla w + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0 & \text{in} \quad \Omega, t>0, \\ \text{div } u = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, t>0, \\ u = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega, t>0, \qquad u(x,t)\to 0 \quad \text{as} \quad |x|\to\infty, \\ u|_{t=0} = a. \end{cases}
$$

Hence the problem on the stability for (S) can now be reduced to investigation into asymptotic behaviour of the solution u of $(N-S')$.

Our results now read:

Theorem 1. *Let $a \in L^n_\sigma$ and let w be a solution of $(N-S')$ with $w \in L^n(\Omega), \nabla w \in L^{n/2}(\Omega)$. Then there is a positive number $\lambda = \lambda(n)$ such that if*

$$
\|a\|_n \le \lambda, \quad \|w\|_n + \|\nabla w\|_{\frac{n}{2}} \le \lambda,
$$

there exists a unique strong solution u of (N-S') on $(0,\infty)$ with $\lim_{t\to+0} t^{\frac{1}{4}}\|u(t)\|_{2n} = 0$.

Moreover, for every $n < r < \infty$, there is a positive number $\eta = \eta(n,r)$ such that if

$$
\|w\|_n + \|\nabla w\|_{\frac{n}{2}} \le \eta,
$$

then the above solution u has the following asymptotic properties:

(1) *(uniform estimate) $\|u(t)\|_l \le Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{l})}$ for $n \le l \le r$ with $C = C(n,r,l)$ independent of $t > 0$;*
(2) *(behaviour near $t=0$) $\lim_{t\to+0} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{r})}\|u(t)\|_r = 0$.*

Theorem 2. *(1)(i) Let $1 < p < n$ and let $a \in L^p_\sigma \cap L^n_\sigma$. There is a positive number $\lambda' = \lambda'(n,p) \le \lambda$ such that if*

$$
(*) \qquad \|a\|_n \le \lambda', \quad \|w\|_n + \|\nabla w\|_{\frac{n}{2}} \le \lambda',
$$

then the strong solution u given in Theorem 1 belongs to the following class.

$$
u \in BC([0,\infty); L^p_\sigma \cap L^n_\sigma).
$$

(ii) In particular, if $1 < p < \frac{n}{2}$ *for* $n \geq 5$ *and if* $1 < p \leq 2$ *for* $n = 3, 4$, *under the condition* $(*)$, *we have also*

$$t^{\frac{1}{2}} \nabla u(\cdot) \in BC([0, \infty); L^p).$$

(2)(i) Let $n \geq 3$ *and* $1 < p < n$. *Assume* $(*)$. *Then for every* r *with* $p \leq r < \infty$, *there is a positive number* $\eta' = \eta'(n, p, r) \leq \eta$ *such that if*

$$(**) \qquad \|w\|_n + \|\nabla w\|_{\frac{n}{2}} \leq \eta',$$

we have also the decay property

$$\|u(t)\|_l = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{l})}) \qquad \text{for} \quad p \leq l \leq r$$

as $t \to \infty$.

(ii) Let $n \geq 3$ *and* $1 < p < \frac{n}{2}$, $p \leq r < n$. *In case* $n = 3, 4$, *we may let also* $1 < p \leq r \leq 2$. *Assume* $(*)$. *Then under the condition* $(**)$ *we have also*

$$\|\nabla u(t)\|_l = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{l}) - \frac{1}{2}}) \qquad \text{for} \quad p \leq l \leq r$$

as $t \to \infty$.

Mathematical Results for Some Phase Transition Problems

Songmu Zheng

Institute of Mathematics, Fudan University
Shanghai 200433, China.

In recent years, I was interested in the mathematical problems arising from the study of phase transitions which include:

1. The phase transition of a binary solution such as polymer, binary alloys, etc. This leads to the study of the Cahn-Hilliard equation (in the iso-thermal case) and the coupled Cahn-Hilliard equations (in the non-isothermal case).
2. Solidification of liquid (ice) and the liquid-solid phase transition. This leads to the study of the phase-field equations.
3. Solid-solid phase transition (shape memory alloys). This leads to the study of a system of partial differential equations which consist of a nonlinear fourth order PDE and a nonlinear second order PDE (or variational inequality).
4. Liquid-vapour phase changes in porous media (e,g, wetting and drying process in concrete). This leads to the study of a system of nonlinear PDE and ODE.

We are interested in the following mathematical problems: global existence and uniqueness; asymptotic behavior of solution as time goes to infinity; multiplicity of solutions to the corresponding stationary problem; optimal control and feedback stabilization. THESE mathematical problems become very challenging because of the following feature of these problems: Higher (unusual) nonlinearity; the system of PDE is NOT diagonal; uniform ellipticity conditions are NOT satisfied; the correspo -ding stationary problem is a nonlinear elliptic boundary value problem with nonlocal term and constraints.

The mathematical results we have obtained in the past few years will be presentd.

The formulation of free-boundary problems for evolving phase boundaries

The study of dynamical phase transitions leads to free-boundary problems for the evolving phase interface. These problems are basically unstable, and many are not well-posed. In this lecture I will present an overview of the subject. I will try and explain the physical mechanisms underlying the basic instabilities, and I will try and describe the resulting free-boundary problems. Among the topics I will discuss are: generalized Stefan problems; instabilities induced by supercooling and diffusion; isothermal theory and curve-shortening; anisotropic energies, facets, and corners; diffusion within the interface and higher-order curve shortening; hyperbolic theories and melting-freezing waves.

Morton Gurtin
Director of
Center for Nonlinear Analysis
Carnegie Mellon University

境界で退化する楕円型偏微分作用素と
Hardy 空間に関する Wojtaszczyk の予想

東北大理　新井仁之

この講演では境界で退化する 2 階楕円型作用素に関するポテンシャル論に関する結果とその Hardy 空間の同型問題への応用について述べる。まず、境界で退化する楕円型作用素のポテンシャル論に関する結果から述べ、次に滑らかな境界をもつ有界強擬凸領域 Ω 上の解析関数からなる Hardy 空間 $H^1(\Omega)$ が複素平面内の単位開円板 D 上の古典的な $H^1(D)$ と Banach 空間として、同型であることを報告する。この結果は Wojtaszczyk の予想に肯定的な解決を与えるものである。また、よく知られているように、1980 年に Maurey (Acta Math.) が、$H^1(D)$ は Banach 空間として無条件基底をもつことを証明しているので、われわれの結果を使えば、Maurey の定理より、$H^1(\Omega)$ も Banach 空間としての無条件基底をもつことがわかる。結果は下記のものである：

Ω の Bergman 計量に関する Laplacian を Δ_g とおく。Δ_g は境界 $\partial\Omega$ で退化する楕円型作用素である。これにわれわれの退化楕円型作用素に関する結果を用いると次のことが証明できる：

Theorem 1 $H^1_{\max}(\partial\Omega)$ を Δ_g-調和関数の境界関数からなる *Hardy* 空間で *admissible* 最大関数で定義されるものとし、また、$H^1_{\mathrm{atom}}(\partial\Omega)$ を *non-isotropic atom* によって定義される *Hardy* 空間とする。このとき、I を恒等写像とすると、I は $H^1_{\max}(\partial\Omega)$ から $H^1_{\mathrm{atom}}(\partial\Omega)$ への *Banach* 空間としての同型写像である。すなわち、線形な全単射でかつ両連続である。

この定理は、Coifman-Rochberg-Weiss (Ann. of Math. 1976) の単位球上の定理の強擬凸領域への一般化になっている。

さらに、、われわれの退化楕円型作用素に関する調和測度の結果を拡散過程に翻訳して用いると、Maurey の手法がわれわれの場合に適用できることがわかり、次のことが証明できる：

Lemma 2 $H^1_{\max}(\partial\Omega)$ は $H^1(D)$ のある *complemented* 閉部分空間に *Banach* 空間として同型である。

これらの結果から、$H^1(\Omega)$ は $H^1(D)$ のある complemented 閉部分空間に Banach 空間として同型であることが示される。一方、Ω に非自明な内部関数が存在することが知れれているので、Wojtaszczyk の方法を使って、$H^1(D)$ は $H^1(\Omega)$ のある complemented 閉部分空間に Banach 空間として同型であることは容易にわかる。よって、

Theorem 3 $H^1(\Omega)$ と $H^1(D)$ が *Banach* 空間として同型である。

この定理は、単位球に関する Wojtaszczyk の定理 (Ann. of Math. 1983) と Wolniewicz の定理 (Ark. Mat. 1989) の強擬凸領域への一般化で、Wojtaszczyk の予想の解決にもなっている。

Subfactors, rational conformal field theory and topological quantum field theory

河東泰之（東大・数理科学）

1982 年，V. F. R. Jones によって開始された subfactor の組織的研究は，短期間に作用素環論の中心的話題の一つになると同時に，link 不変量，Jones 多項式の発見によって，場の量子論，可解格子模型，量子群，3 次元トポロジーなどを巻き込んだ大きな現代数学の流れを作り出すもととなった．これら他分野との関連は，作用素環論の立場からは，subfactor の combinatorial な構造を支配する新たな代数的対象 paragroup を通じて現われると見なされる．この paragroup 理論は，適当な意味で（有限）群の量子化と見なされるもので，A. Ocneanu によって 1987 年に導入されたが，彼は（証明・説明抜きに）公理系を出版しただけで，その後何も論文を書かないため，多くの点が不明になっていた．しかし，彼の世界各地での講演などをもとに，1990 年頃から paragroup の実質的な研究が始まり，様々な分野に現われる combinatorial な構造の正確な関係が，解明されて来た．それを表にして掲げよう．

<table>
<tr><td>Paragroups (path algebras)</td><td>Paragroups (bimodules)</td><td>Lattice models</td><td>Quantum 6j-symbols</td><td>RCFT</td><td>TQFT</td></tr>
<tr><td colspan="2">connection</td><td>Boltzmann weight</td><td>6j-symbol</td><td>braiding matrix</td><td>4 面体の local data</td></tr>
<tr><td colspan="5">unitarity</td><td>move II, III での不変性</td></tr>
<tr><td>commuting square</td><td>Frobenius reciprocity</td><td>crossing symmetry</td><td>S⁴-symmetry</td><td colspan="2">tetrahedral symmetry</td></tr>
<tr><td>flatness</td><td>associativity</td><td>Yang-Baxter 方程式</td><td>pentagon relation</td><td>braiding-fusion relation</td><td>move I での不変性</td></tr>
</table>

この内，特に興味深いのは最後の行である．3 行目，4 行目はほぼ，完全な対応と思ってよいが，最後の行では，微妙な違いが現われるからである．例を取ってみると，まず，作用素環論でもっとも基本的な subfactor は，Jones の構成した A_n型の subfactor（ index は $4cos^2(\pi/(n+1))$ ）であり，これは，Andrews-Baxter-Forrester の格子模型，Kirillov-Reshetikhin の $\mathcal{U}_q(sl_2)$ の quantum 6j-symbol，$SU_{n-1}(2)$ に対応する WZW model，そして Turaev-Viro の位相不変量に対応している．しかし，これから orbifold 構成で得られる D_n型の Dynkin 図形の場合は，3 種類の異なった状況が発生するのである．

これらの関係は，subfactor 自身の研究にも，また他分野への応用にもさらに役立つことが期待される．詳しくは，*"Subfactors and conformal field theory"*, preprint 1992, (D. E. Evans & Y. Kawahigashi) とそこにあげられている参考文献を見よ．

Greedy Codes

Richard A. Brualdi

University of Wisconsin, Madison

Abstract: Greedy codes are codes defined by a greedy algorithm. They are suprisingly good from the point of view of error correction and have many interesting properties. They include the lexicodes as defined by Conway and Sloane and by Levenstein and have connections to the theory of impartial games. I will begin with an introduction to coding and then explain the algorithmic construction behind greedy codes. Some computer generated data will also be presented.

BSE-Banach modules

Sin-Ei Takahasi（高橋眞映）

群環上の乗作用素 (multiplier) の表現関数をある種の不等式を満たす連続関数として特徴付けた Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理を一般の可換 Banach 環の世界に焼き直し、そのような形の定理を満たす可換 Banach 環を著者一羽鳥は BSE と名付け、BSE 環を調査した。ここでは可換 Banach 環上の Banach module の世界に BSE 不等式を導入し Bochner-Schoenberg-Eberlein 形の定理が成り立つ Banach module を BSE と呼び、BSE-Banach module を調査をする。

A を可換 Banach 環、X を A 上の Banach module とする。A のキャリア空間 Φ_A の各元 φ に対して、M_φ を対応する極大正則 ideal とし、$M_\varphi X + (1-e_\varphi)X$ の線形包による X の商空間を X_φ とする。ただし e_φ は $\varphi(e_\varphi)=1$ なる A の元を表わす。次式を満たす $\beta \geq 0$ が存在するとき、Φ_A 上のベクトル場 σ (i. e., $\sigma(\varphi)\in X_\varphi$ $(\forall\varphi\in\Phi_A)$) を BSE と呼び、連続な BSE ベクトル場の全体を $\prod^c_{BSE} X_\varphi$ で表わす：

$$\left|\sum_{i=1}^n f_i(\sigma(\varphi_i))\right| \leq \beta \left\|\sum_{i=1}^n f_i\pi_{\varphi_i}\right\|_{X^*} \quad (\forall\varphi_1,\dots,\varphi_n\in\Phi_A, \forall f_1\in(X_{\varphi_1})^*,\dots,\forall f_n\in(X_{\varphi_n})^*), \forall n)$$

ここで X^* は X の双対空間、π_φ は X から X_φ への標準写像を表わす。A から X への A-準同型を X 上の乗作用素と呼ぶ。任意の乗作用素は Φ_A 上の ベクトル場として表現される。そのようなものの全体を $\hat{M}(X)$ で表わす。もし $\prod^c_{BSE} X_\varphi = \hat{M}(X)$ であれば、X は BSE であると言う。任意の可換C^*一環はその ideal 上の Banach module と見て BSE である。また、任意の擬中心的C^*一環はその中心上の Banach module と見て BSE である。更に、コンパクト可換群上の連続環数環、測度環、L^p–空間 $(1 \leq p \leq +\infty)$ 等はその群環上の Banach module と見て BSE である。この結果は Liu-Rooij-Wang の不完全な Bochner-Schoenberg-Eberlein 形の定理を是正するものである。特に測度環の場合はコンパクト性をはずすことができるが、他の場合については、まだ分かっていない。

キャリア空間が離散であるような可換C^*一環上の任意の Banach module は常に BSE であることが分かるが、そのような可換 Banach 環を特徴付けることはまだ出来ていない。

BSE ベクトル場 σ が BSE-不等式を満たすような $\beta \geq 0$ の下限を $\|\sigma\|_{BSE}$ で表わすと、このノルムで BSE ベクトル場の全体は自然に Banach A-module となるが、$\prod^c_{BSE} X_\varphi$ は一般に分かっていない。しかし、X が A を閉 ideal として含むときは、A が Jones-Lahr の意味での有界弱近似単位元を持てば、$\prod^c_{BSE} X_\varphi$ は Banach A-module となる。特に A が BSE 環であれば、$\prod^c_{BSE} X_\varphi$ も BSE となる。逆は分かっていないが、A が有界近似単位元を持てば成立する。

1992年度 北大数学教室 特別講演 要旨

非平衡非線形神経回路における動的記憶過程の機構
—— カオス的遍歴

津田一郎（九州工業大学情報工学部）

脳の動的記憶過程を力学系に基礎をおいた立場で理解するために、大脳皮質の基本神経回路の構造といくつかの生理学条件を考慮し、動的記憶の神経回路モデルをつくり解析した。モデルにおいては、各記憶状態を不動点に対応させる学習則を用い、外部パターンの内的記憶表現とした。これらの記憶表現間に履歴に強く依存するカオス的遷移がみられた。これをカオス的遍歴と名づけた。

講演では、カオスの定義から入り、動的記憶過程のモデルの必要性、数値解析の結果を述べ、カオスの情報力学構造を明らかにしカオスの情報論的分類を行なった。カオス的遍歴はまだ数学的に定義されていないが、ラフなイメージとして次のようなものを考えている。

「大自由度力学系において、運動の支配的自由度が一時的に小さくなる（すなわちアトラクターまがいのものが出現する）が、低自由度でかつ高次元空間に分布した不安定多様体により支配的自由度~~の秩序が変化~~が不安定化し、他の支配的自由度を励起する。このような支配的自由度の再組織化がダイナミックスの進行とともにおこり、再組織化のルールに何らかの形でカオスが関連する。」

上の神経回路モデルにおいては、このルールが一次元写像で表現されるカオスであって、さらにこのカオスは、noise-induced order（外部雑音によってカオスから秩序状態が抜き出される）を生成する型であり、従って情報論的には、二進空間において情報混合を許す型である。

さらに、上の神経回路モデルにおいては、神経接合部（シナプス）に雑音が加味されていて、この雑音は生理学的基盤をもつが、数学的には、二つの力学系の確率的きりかえという意味をもつ。この確率的きりかえに力学的基礎を与えることを考えた。結果は、神経回路を与える力学とベルヌーイシフトの歪積変換であった。確率的きりかえの確率構造に依存して、力学モデルが構成できる。

本講演の数学的問題は次の三つにまとめられるであろう。

① カオス的遍歴の数学的定義（力学系としての）

② カオス的遍歴のランジュバン方程式表現（cf. 岡部, KM$_2$O Langevin eq.）

③ 複数の力学系の確率的きりかえの定式化

Swift-Hohenberg 方程式に対する Phasedynamics 法の応用について

桑村雅隆

広島大学理学部数学 D 3

Abstract

熱対流に見られるロールの構造は Swift-Hohenberg 方程式によって現象論的に記述される。ロールが周期的に並んでパターンを作る時、このパターンの安定性とダイナミクスを周期パターンのもつ phase の歪を通して理解する方法について考える。

図１のように深さ d のうすい容器の中に流体を入れて下から温度 T_0 で暖めて、上を温度 T_1 で冷やす。このとき、レーリー数 R（$\propto$ 温度差） がある一定値 R_c を越えると対流が起きる。対流の作るパターンには、図２のように y 方向には一様であって、x 方向には多数のロールが周期的に並んでいるように見えるものがある。いま、この容器を平面 $z=d/2$ で切って、時刻におけるこの平面上の各点における流速の z 成分を $v(x,y,t)$ としよう。
対流が図２のようなパターンを作る時、図３のように考えると v は y と t に依らない x についての周期関数であると思える。対流が生じて、このようなパターンが形成されていくときのダイナミクスは、Swift-Hohenberg 方程式：

$$v_t = (\alpha - (1+\triangle)^2)v - v^3 \tag{1}$$

によって現象論的に記述される [2],[4]。ここで、パラメーター α は

$$\alpha = \frac{R}{R_c} - 1$$

である。ここでは、簡単のため空間１次元の場合について（１）を考える。（１）がこのような現象をうまく説明していることは、次のように考えてみれば了解されるであろう：
自明解 $v \equiv 0$ のまわりで（１）の右辺を線形化してその固有値を調べてみると

$$\mu_k = \alpha - (1-k^2)^2$$

となる。もしも$\alpha < 0$ならば、$\mu_k < 0$となり$v \equiv 0$は安定であるといえる。$\alpha \geq 0$のときは$k = \pm 1$のときのμ_kが最大の固有値であって

$$\mu_{\pm 1} = 0 \quad (\alpha = 0)$$
$$\mu_{\pm 1} > 0 \quad (\alpha > 0)$$

となる。したがって、αを負から正へ少しずつ値を変えていくときαが0を越えると$\mu_{\pm 1}$に対応する固有関数$\exp(\pm ix)$の方向に不安定性が成長して空間的な周期構造をもった定常解が分岐する。これはレーリー数RがR_cを越えると対流が起きて周期的にロールが並んで現れるということを現象論的に説明していると考えて良いだろう。

（１）の定常解で空間的な周期構造をもつものが存在することは Collet-Eckmann [1] によって知られている。

（空間周期構造をもつ定常解の存在）

$2/5 < \omega^2 < 2$とする。$\alpha = 3\varepsilon^2 + (1-\omega^2)^2$のとき、（１）の定常解$u$で

$$u(x) = \overline{u}(\omega x) = 2\varepsilon \cos \omega x + \sum_{n \geq 3, n:\mathrm{odd}}^{\infty} \eta_n \cos n\omega x \tag{2}$$

$$|\eta_n| \leq C\varepsilon^{(1+2n/3)} \ \text{for } n = 3, 5, 7, \cdots$$

の形のものが存在する。ここで、εは十分小さな正の数である。

（２）で与えられるuの波長は$\lambda = 2\pi/\omega$であることに注意しよう。ここでは（２）を長さ$L = N\lambda$（Nは十分大きな正の整数）の枠の中で観察する。つまり、

$$\begin{cases} v_t = (\alpha - (1+\triangle)^2)v - v^3 & x \in [-L/2, L/2] \\ \partial_x^j v(-L/2) = \partial_x^j v(L/2), & (j = 0, 1, 2, 3) \end{cases} \tag{3}$$

において、$u(x)$を考える。$u(x)$の（３）における線形安定性も [1] によって知られている。

（空間周期構造をもつ定常解の線形安定性）

$A : L^2_{per}[-L/2, L/2] \to L^2_{per}[-L/2, L/2]$を$A\psi = (\alpha - (1+\triangle)^2)\psi - 3u^2\psi$で定義する。このとき、十分小さな$\varepsilon$、十分大きな$N$に対して次が成り立つ。

（Ａ） $\left|\dfrac{\omega^2 - 1}{\sqrt{3}\varepsilon}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき、$A$は正の固有値をもつ。

（Ｂ） $|\dfrac{\omega^2-1}{\sqrt{3}\varepsilon}| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、A の固有値は simple な 0 固有値を除いてすべて負である。さらに、次の性質をもつ $0<\beta<\gamma$ が存在する。

(i)β と γ は ε と N に依存して決まり、

$$\lim_{N\to\infty}(\gamma(\varepsilon,N)-\beta(\varepsilon,N))=0,\quad \lim_{N\to\infty}\beta(\varepsilon,N)=0$$

をみたす。

(ii) 区間 $(-\beta,0]$ に属する A の固有値は

$$\begin{aligned}\mu_n &= -D\kappa_n^2+o(\kappa_n^4)\\ D &= -4+8(\frac{\omega^2-1}{\sqrt{3}\varepsilon})^2+o(\varepsilon)\\ \kappa_n^2 &= (\frac{\omega n}{N})^2 \quad \text{for} \ \ n\in[-\sqrt{N},\sqrt{N}]\end{aligned}$$

で与えられる。また、区間 $(-\infty,-\beta]$ に属する A の固有値は

$$\mu<-\gamma$$

をみたす。

（Ａ）と（Ｂ）によって定常解 $u(x)$ の安定性がわかるのだが、次のように考えても安定性がわかる。

$$\begin{aligned}&v(x,t)=\overline{u}(z)+\rho(z,X,T)\\ &z=\omega x+\phi(X,T), X=\nu x, T=\nu^2 t\\ &\rho=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n(z,X,T)\nu^n\end{aligned} \tag{4}$$

とおく。ここで、$\overline{u}$ は（２）で与えられたものであり、ν は十分小さな正の数である。また、ϕ は定常解 $\overline{u}$ の phase の歪を表しており、その変化はもとの時間空間スケール x,t とは異なるスケール X,T で記述されていると考える。（４）を（１）に代入して ν のべきで展開して整理すると

$$\phi_T=D\phi_{XX}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}D>0 \text{ ならば } u \text{ は安定}\\ D<0 \text{ ならば } u \text{ は不安定}\end{aligned}$$

と考えるのである。このようにして $u(x)$ の安定性を調べる方法は Phasedynamics 法と呼ばれていて、例えば、Kuramoto[3] などに見られる。この方法によれば定常解 u のまわり

の（1）の解の挙動も、

$$(5) \qquad \begin{cases} v(x,t) = \overline{u}(\omega x + \phi(X,T)) \\ \phi_T = D\phi_{XX}, X = \nu x, T = \nu^2 t \end{cases}$$

で与えられることになる。我々は Collet-Eckmann の結果をもとに、近年発展している無限次元力学系の理論を用いて（5）の数学的な正当化を試みる。その際に、重要な鍵となるのは定常解 u のまわりの（1）の解の挙動を記述する時間空間スケールを決めるパラメーターを

$$\nu = \frac{\lambda}{L} = \frac{\text{定常解の波長}}{\text{観測をする枠の長さ}} = \frac{1}{N}$$

（ただし、N は十分大）で与えたとき、このスケールの下で（5）の拡散係数 Dが（B）（ii）で知られている$-D$ と一致するということである。我々の得た結果は次である。

定理（Phasedynamics の 1 つの解釈）

（a） $u_\theta(x) = \overline{u}(\omega x + \theta)$, $\theta \in \mathbf{R}$ とおくと、u_θも（1）の定常解であって空間周期構造をもつ。u_θの波長もλである。

（b） $M = \{u_\theta \ ; \ \theta \in \mathbf{R}\}$ は $L^2_{per}[-L/2, L/2]$ の中の S^1 同相な smooth manifold である。

（c）各 u_θ に対して $A_\theta : L^2_{per}[-L/2, L/2] \ \rightarrow \ L^2_{per}[-L/2, L/2]$ を

$$A_\theta \psi = (\alpha - (1 + \triangle)^2)\psi - 3u_\theta^2 \psi$$

で定義する。このとき A_θ の固有値についても（B）（ii）と同様の評価が成立する。

（d）（B）の条件の下で、Mのまわりの local な安定多様体であって、M 上の各点 u_θ における接ベクトル空間が、上の（c）で得られた区間 $(-\beta, 0]$ に属する A_θの固有値に対応する固有ベクトルで張られているもの $W(M)$ が存在する。

（e）$W(M)$ 上の（1）の解の挙動は漸近的に（5）で与えられて、

$$\lim_{T \to \infty} \phi(X,T) = \theta, \quad \text{for some} \quad \theta \in \mathbf{R}$$

が成り立つ。

謝辞

この仕事をするのに、京都大学理学部物理教室の佐々真一氏と広島大学理学部数学教室の坂元国望氏にたいへんお世話になりました。この場を借りて厚くお礼申しあげます。

参考文献

[1] P. Collet and J. P. Eckmann, Instabilities and fronts in extended systems, (1990), Princeton university press.

[2] H. S. Greenside and W. M. Coughran, Jr., Nonlinear pattern formation near the onset of Rayleigh-Benard convection, Phys. Rev. **A**, vol.**30**, num.**1**, (1984), pp.398-428.

[3] Y. Kuramoto, Instability and turbulence of wavefronts in reaction-diffusion systems, Prog. Theo. Phys, vol.**63**, no.**6**, (1980), pp.1885-1903.

[4] J. Swift and P. C. Hohenberg, Hydrodynamic fluctuations at the convective instability, Phys. Rev. **A**, vol.**15**, num.**1**, (1977), pp.319-328.

図 1

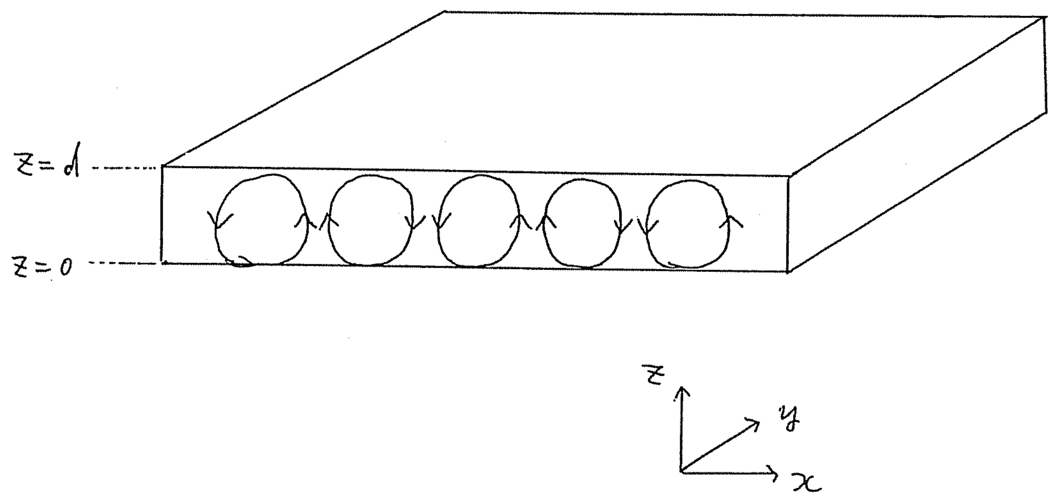


図2

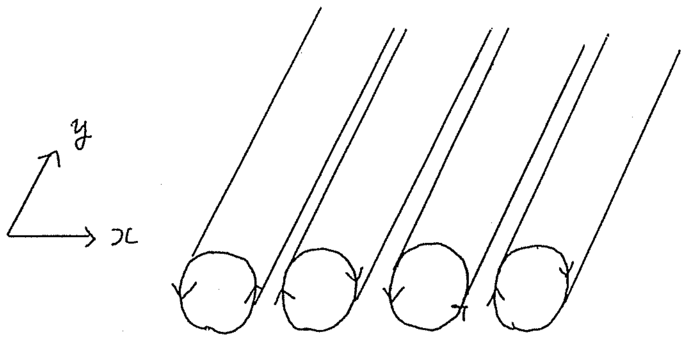
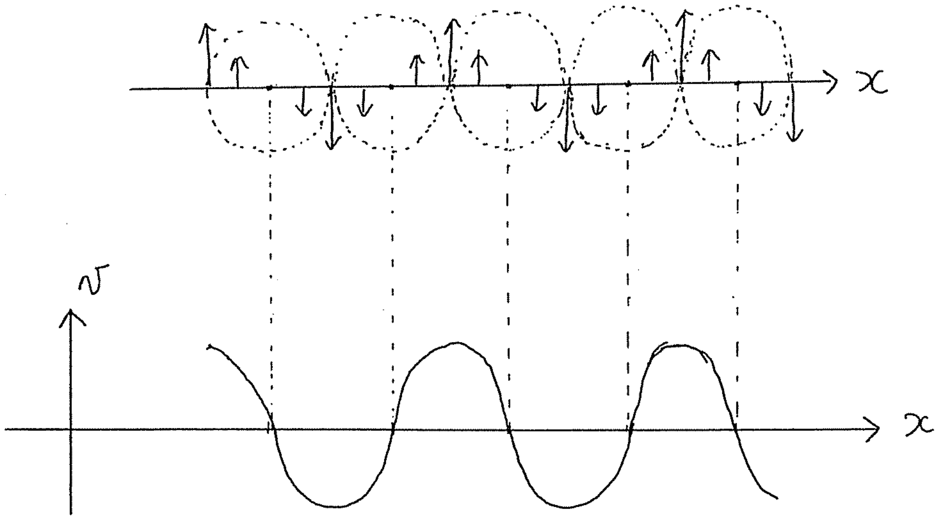


図3



Multiple Unstable Periodic Solutions for Semilinear Parabolic Equations

溝口紀子　　　　(東工大・理)

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を滑らかな境界$\partial\Omega$をもつ有界領域、$g \in C^{1,\alpha}(\mathbf{R}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbf{R})$ を第 1 変数に関して周期Tをもつ関数とするとき、次の問題

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(t,x,u) & \text{in } \mathbf{R}_+ \times \Omega \\ u = 0 & \text{on } \mathbf{R}_+ \times \partial\Omega \\ u(t+T) = u(t) \quad \text{in } \Omega & \end{cases}$$

を考える。但し、周期解 u が安定とは、任意の$\varepsilon > 0$ に対して　ある$\delta > 0$ が存在して $|v_0 - u(0)|_{L^2(\Omega)} < \delta$なる v_0を初期値とする (P) に対応する初期値問題の解 vに対して $|v(t) - u(t)|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$が成り立つことをいい、$u$ が安定でないとき不安定という。$-\Delta$ の Dirichlet 境界条件のもとでの固有値の列を $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots$で表す。

定理 1.　次の i), ii) を仮定する：

i) ${}^{\exists}M > 0$ s.t.

$$\lambda_1 \leq \frac{\partial g}{\partial \xi}(t,x,\xi) \leq M, \quad {}^{\forall}(t,x,\xi) \in \mathbf{R}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbf{R}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(t,x,0) > \lambda_1, {}^{\exists}(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \partial\Omega$$

ii) ${}^{\exists}m \geq 1, {}^{\exists}\alpha > 0$ s.t. $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$に関して一様に

$$\lambda_m + \alpha \leq \liminf_{\xi \to \pm\infty} \frac{g(t,x,\xi)}{\xi} \leq \limsup_{\xi \to \pm\infty} \frac{g(t,x,\xi)}{\xi} \leq \lambda_{m+1} - \alpha$$

このとき、(P) は不安定な解をもつ。

$g(t,x,0) = 0, {}^{\forall}(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$のとき、$u \equiv 0$ は明らかに (P) の解である。したがって、このような場合に自明でない解の存在を調べる。

定理 2. 条件 i), ii) に加えて、

iii) $2 \leq^{\exists} l \leq m; m-l+1$ は奇数, $\beta > 0$ s.t. $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega$ に関して一様に

$$\lambda_{l-1} + \beta \leq \liminf_{\xi \to 0} \frac{g(t,x,\xi)}{\xi} \leq \limsup_{\xi \to 0} \frac{g(t,x,\xi)}{\xi} \leq \lambda_l - \beta$$

を仮定すると、(P) は自明でない不安定な解をもつ。さらに、(P) が退化していない自明でない解をもてば、少なくとも 2 つの自明でない不安定な解が存在する。ここで、(P) の解 u が退化していないとは (P) を線形化したものが 0 を固有値としてもたないということである。

特に、$g(t,x,\xi) = f(\xi) + h(t,x)$ の場合、次の定理が成り立つ。

定理 3. 条件 i), ii) に加えて、$2 \leq^{\exists} l \leq m$; $m-l+1$ は奇数 s.t. $\lambda_{l-1} < g'(0) < \lambda_l$ を仮定すると、$^{\forall} h \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R})$ が $h \not\equiv 0$ で $\|h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$: 十分小ならば、(P) は少なくとも 2 つの不安定な解をもつ。さらに、(P) の任意の解が退化していないならば少なくとも 3 つの不安定な解が存在する。

定理 4. 定理 3 の仮定のもとで、$l = m$ で f' が $[0,\infty)$ で単調増加, $(-\infty,0]$ で単調減少ならば、$^{\forall} h \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}); h \not\equiv 0, \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$: 十分小 に対して、(P) は少なくとも 3 つの不安定な解 u_1, u_2, u_3 をもつ。このとき、u_1, u_2, u_3 は 次の半線形楕円型方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の不安定な解 $w_1, w_2, 0$ のある近傍に存在する。

References

[1] N. D. Alikakos, P. Hess and H. Matano, Discrete order preserving semigroups and stability for periodic parabolic differential equaitons, J, Diff. Eq. 82 (1989), 322-341.

[2] N. Hirano, Existence of unstable periodic solutions for semilinear parabolic equations, to appear in J. Math. Anal. Appl.

Compactification of the moduli space of Einstein-Hermitian vector bundles by adding sheaves — a trial

Shigetoshi Bando

Let (E_j, h_j) be a sequence of Einstein-Hermitian holomorphic vector bundles on an n-dimensional compact Kähler manifold (X, g). We assume the first and second Chern classes $c_1(E_j)$, $c_2(E_j)$ are fixed. Then the following facts are known.

1) If (X, g) is Hodge, then there exists a subsequence of E_j which converges to a semi-stable torsion free sheaf $\mathcal{E}_\infty$.
2) In general, there exist a subsequence of (E_j, h_j), which we still denote (E_j, h_j), and a closed subset S of finite Hausdorff measure of real co-dimension 4, such that (E_j, h_j) converges to an Einstein-Hermitian holomorphic vector bundle (E_∞, h_∞) outside S (up to gauge transformation) and E_∞ extends to a reflexive sheaf $\tilde{\mathcal{E}}_\infty$ defined on the whole space X.

In the Hodge case, we can understand their relation by: $\tilde{\mathcal{E}}_\infty = \mathcal{E}_\infty^{**}$ and S becames the singular locus of $\mathcal{E}_\infty$, hence in particular an algebraic subvariety.

It is natural to expect a similar result for general Kähler manifolds.

Conjecture. *There exists a subsequence of (E_j, h_j) which satisfies the following. We define a presheaf $\mathcal{E}$ by*

$$\mathcal{E}(U) = \left\{ s \in \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}_\infty, U) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{There exists a sequence } s_j \in \Gamma(E_j, U) \\ \text{such that } s_j \text{ converges to } s \text{ outside } S \end{array} \right\}.$$

Then the sheafication $\mathcal{E}_\infty$ makes a coherent subsheaf of $\tilde{\mathcal{E}}_\infty$ and $\tilde{\mathcal{E}}_\infty = \mathcal{E}_\infty^{**}$. Moreover S is the singular locus of $\mathcal{E}_\infty$.

In higher dimensional case, the Conjecture is yet open, but one can prove it in the surfaces case. Note that in the surface case the reflexive sheaf $\tilde{\mathcal{E}}_\infty$ is locally free, and the metric h_∞ extends to the smooth one for $\tilde{\mathcal{E}}_\infty$. In this case we can work locally, since S is a discrete set. The following theorem is the sequence version of the removable singularity theorem.

Theorem. *Let (E_j, h_j) be a sequence of Einstein-Hermitian holomorphic vector bundles on the unit ball $B(1) \subset \mathbf{C}^2$ (with respect to not necessary Euclidean Kähler metric) such that the squar integral of the curvature is uniformly bounded: $\int_{B(1)} |F_j|^2 \leq C$ and (E_j, h_j) converges to an Einstein-Hermitian holomorphic vector bundle (E_∞, h_∞) outside the origin. Then there exists a constant $m > 0$ such that if $s \in \Gamma(\tilde{\mathcal{E}}_\infty, B(1))$ vanishes up to degree m at the origin, then there exists a sequence $s_j \in \Gamma(E_j, B(1/2))$ which converges to s on $B(1/2)$ outside the origin.*

Conjecture for surfaces follows from Theorem.

Lemma 1. *Under the assumption of Theorem, we can find a finite number of points $z_{j,k} \in B(1)$, constants $m_k > 0$, $\rho_{j,k} > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ and $C > 0$ such that*

$$|F_j| \leq C + \sum_k m_k \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log(|z - z_{j,k}|^2 + \rho_{j,k}^2).$$

Theorem can be shown applying the $\bar{\partial}$-method to $(E_j, h_j \exp(-\sum_k m_k \log(|z - z_{j,k}|^2 + \rho_{j,k}^2)))$. The proof of the Lemma 1 is done by using the arguement of the bubbling out of Einstein manifolds and the following Lemma proved by K. Uhlenbeck.

Lemma 2. *If the curvature F of the Yang-Mills connection defined over $\mathbf{R}^4$ is squar integrable, then F decays at the order of r^{-4} toward infinity.*

References.

[1] S. Bando, *Bubbling out of Einstein manifolds,* Tohoku Math. J. 42 (1990), 205–216.

[2] S. Bando, *Correction and addition: Bubbling out of Einstein manifolds (Tôhoku Math. J. 42 (1990), 205–216),* Tohoku Math. J. 42 (1990), 587–588.

[3] S. Bando, *Removable singularities for holomorphic vector bundles,* Tohoku Math. J. 43 (1991), 61–67.

[4] S. Bando and Yum-Tong Siu, *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics,* in preparation.

[5] H. Nakajima, *Compactness of the moduli space of Yang-Mills connections in higher dimensions,* J. Math. Soc. Japan 40 (1988), 383–392.

[6] K. Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields,* Comm. Math. Phys. 83 (1982), 11–30.

[7] K. Uhlenbeck, *Connections with L^p-bounds on curvature,* Comm. Math. Phys. 83 (1982), 31–42.

[8] K. Uhlenbeck, *A priori estimates for Yang-Mills fields,* a preprint.

非有基的集合論に基づく知識のモデル理論

—普遍Ｋｒｉｐｋｅ構造と公開化作用素—

北海道大学理学部数学教室　談話会　講演要旨

辻下　徹

１９９３年2月1日

要約　非有基性公理は集合論に新しい表現力を与える。複雑システムの、これまで数学的に記述しにくかった側面の若干が、これにより数学的に簡明に記述できるようになった。その例として知識の集合論的モデルを説明し、共通知識・情報公開に数学的意味づけを与える。この枠組を用いて知識パズルを分析する。

1　序

複雑システムと呼ばれているものの例としては、宇宙・生態系・社会などの全体的システムの類と、生物・免疫系・脳などの部分的システムの類とがある。２つの類の間には共通する面は多くあるが、問題とすることは両者で大きくことなる。

共通する面としては、大規模・自律分散性・創発性・可塑性などが顕著である。一方、部分システムにだけ有効な概念として、適応・認識・統一性・社会性などがあるが、これらの意味は、自己と同種の複雑システムが多数存在する環境内に存在するという現実性に支えられているのである。

複雑システムの主要な認識機能の一つは、他の複雑システムの知識・認識状況を把握することであるが、この機能には常識的にはとらえにくい循環的因子が付きまとっている。この例にとどまらず、複雑システムの高次機能には、従来の論理的枠組をすり抜けるような側面が多く存在する。

以下、「共通知識」という循環的現象を例に取り上げ、最近 Aczel[1] により整備された非有基的集合論を用いた知識の数学的モデルを説明する。

2　知識パズル

Muddy Children's Puzzle　(cf.[3])

１１人の天才児が外から教室に戻ってきました。一人を除いて、どの子の顔にも泥がついています。どの子もほかの子の顔が汚れているかどうかは見てわかるのですが、自分の顔がきれいかどうかはわかりません。そこに先生がやって来てみんなを見ると言いました：

（１）「顔に泥が付いたやつがいるぞ。」

そして、「よし、これから頭の体操をしよう。まず、みんな目をつぶって。」といってから

（２）「自分の顔が汚れているかどうかわかるものは手を挙げて！」

と言いました。そのあと、次のように問を繰り返しました：

- 手を挙げる子がいたら、「わかったやつがいるぞ！」と言ってから、質問（２）をする。
- 手を挙げる子がいなかったら、「なんだ、わかる者は居ないのか。」と言ってから、質問（２）をする。

さて、子どもたちの応答はどのような経過を辿るでしょうか？

知識論理式を用いたパズルの表現　次のような記号列（知識論理式と呼ぶ）を用いる（$n=11$）：

- $h_i \in \{0,1\}$:　$h_i = 1$ は子ども P_i の顔に泥がついていること。
- $h = (h_1, \cdots, h_n) \in E := \{0,1\}^n$。
- $K_i\varphi$: P_i は情報 φ を知っている。
- K_if: P_i は関数 f の値を知っている。
- $C\varphi$: P_i はみんなの共通知識。

このとき教室内で起こった知識の変化は次のように記述できる。まず初期共通知識は $C\varphi_0$ である、ただし

$$\varphi_0 := \wedge_{i\neq j} K_i h_j \ \wedge \ \wedge_i \neg K_i h_i.$$

先生の最初の発言により、情報 $\varphi_1 := \exists_i[h_i = 1]$ が公開される。そのあと $\psi := \vee_{i=1}^{n} K_i h_i$ が成り立つかどうかを公開することを続ける。

3　非有基的集合論

$G = (V, E)$ をグラフとする、すなわち $E \subset V \times V$. 写像 $d : V \to \mathbf{V}$ （$\mathbf{V}$は集合全体のクラス）が G の飾りであるとは

$$d(v) = \{ \, d(w) \mid (v, w) \in E \, \}.$$

非有基性公理（Aczel）

任意のグラフは唯一つの飾りを持つ。

この公理と、任意の集合方程式系が解を持つこととは同値である。

無矛盾性定理（Aczel 1988）

Zermero-Fraenkel の公理系が無矛盾ならば、正則性公理を非有基性公理に替えた公理系も無矛盾である。

クラス作用素の最大固定点定理　クラスにクラスを対応させる作用素 $\mathbf{X} \mapsto \Phi\mathbf{X}$ が集合的クラス作用素であるとは、$\Phi\mathbf{X} = \bigcup_{x \subset X} \Phi x$ が成り立つことをいう（x は集合を動く）。集合的なクラス作用素Φ に対して、$J_\Phi := \bigcup \{ \, x \mid x \subset \Phi x \, \}$ とおく。

定理：最大固定点定理

(i)　$J_\Phi = \Phi J_\Phi$,

(ii)　$\mathbf{X} \subset \Phi\mathbf{X} \Longrightarrow \mathbf{X} \subset J_\Phi$.

余帰納法によるクラスの定義　上の定理により、クラス $J = J_\Phi$ を次のような言い回しで定義することができる：J は $x \in \mathbf{X} \implies x \in \Phi\mathbf{X}$ を満たすクラス $\mathbf{X}$ の中で最大のものである。これを余帰納的定義という。

注意：非有基的との関係　最大固定点の存在定理に非有基性公理は不要だが、最大固定点が空でないことを示すのに非有基性公理が必要なことが多い。

非有基的集合論の意義　技術的には、初期条件のない（循環する）再帰式により集合を定義できることと、クラスを余帰納的に定義できることが、非有基性公理の大きな効用である。

応用的な意義の中で顕著なのは、循環する種々の状況を直接的に簡明に表現できるようになったことである。たとえば、ゲーデルの不完全性定理を非有基的集合論について示すときは、容易にゲーデル論理式を構成することができる。また、Barwise 達 [2] は「この文は正しくない」というパラドックスを非有基的集合論に基づいて新しい角度から分析している。

また、プロセス理論にも非有基的集合論は簡明な基礎付けを与えた。プロセスの持つ種々の再起性が、従来、その数学的意味付けを込み入っていたものにしていたのだが、非有基的集合論により、プロセス理論全体が数学的に透明になったのである。

4　知識論理のモデル理論

知識状態空間　$S \in \bigcap_i (S$ の第 i-成分$)$ を満たすような集合 $S \in \mathbf{V}^n \times E$ のなすクラスを $\mathcal{U}$とし、クラス作用素 $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{K}_{n,E}\mathbf{X}$ を次のように定義する：

$$\mathbf{K}_{n,E}\mathbf{X} := ((\wp\mathbf{X})^n \ \times \ E) \cap \mathcal{U}.$$

これは集合的であり、最大固定点クラス $\mathbf{W}_{n,E}$を持つ。

注意：普遍 Kripke 構造　$\mathbf{K}_{n,E}$-coalgebra(cf.[1]) と、Kripke 構造 (cf.[3]) とは 1 対 1 に対応し、$\mathbf{W}_{n,E}$ は final $\mathbf{K}_{n,E}$-coalgebra であることがわかるので、対応する Kripke 構造は普遍 Kripke構造であることがわかる。

知識論理式の解釈　知識論理式 φ 対して $\mathbf{W}_{n,E}$の部分クラス $[\varphi]$ を帰納的に定義できる。たとえば

$$[K_i f] \ = \bigcup_{v \in \mathrm{Range}(f)} \pi_i^{-1} \wp(f^{-1} v),$$
$$[K_i \varphi] \ := \pi_i^{-1} \wp[\varphi],$$

とおき、また、共通知識論理式 $C\varphi$ に対しては、部分クラス $[C\varphi] \subset \mathbf{W}_{n,E}$ を集合的クラス作用素

$$\mathbf{X} \mapsto [\varphi] \cap \pi_1^{-1}(\mathbf{X} \cap \mathbf{W}_{n,E}) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(\mathbf{X} \cap \mathbf{W}_{n,E})$$

の最大固定点クラスとして定義する。

$S \in [\varphi]$ のとき $S \models \varphi$ と書く。

公開化作用素　情報 φ に対して、これが公開されることによりもたらされる世界状態の変化を表現する公開作用素 $\kappa_\varphi : [\varphi] \to \mathbf{W}$ を次の性質で定義する：

$$\kappa_\varphi S = \langle \kappa_\varphi(\pi_1 S \cap [\varphi]), \cdots, \kappa_\varphi(\pi_n S \cap [\varphi]), \pi_E S \rangle$$

ただし、$\alpha \subset \mathbf{W}$ に対して$\kappa_\varphi \alpha := \{ \kappa_\varphi S \mid S \in \alpha \}$ とおく。出発点のないこのような再帰的定義が可能なのは、集合方程式系の解の存在と一意性が 非有基的により保証されているからである。

注意すべきことは、$\kappa_\varphi[\varphi] \subset [\varphi]$ とは限らないことである。すなわち、正しい情報 φ が公開されることにより、それが偽りとなることが有り得るのである。

パズルの問題の解釈　パズルは $\mathbf{W}_{n,E}$の次のような初期条件と遷移写像の下での軌道を問うものと解釈できる：初期条件は $S_0 \in [C\varphi_0 \wedge \varphi_1]$ である。先生の最初の発言 (1) は、知識状態を $S_1 := \kappa_{\varphi_1} S_0 \in \mathbf{W}_{n,E}$ に変える。そのあと、$\lambda : \mathbf{W}_{n,E} \to \mathbf{W}_{n,E}$ により、状態が遷移する、ただし

$$\lambda(S) := \begin{cases} \kappa_\psi S & \text{if } S \models \psi \\ \kappa_{\neg\psi} S & \text{if } S \models \neg\psi. \end{cases}$$

パズルの解答　$\lambda^k(S_1)$ を決定することができるが、ここでは次のことだけ述べておこう：

定理

$$\lambda^k(S_1) \models \begin{cases} \neg\psi & \text{if } k \leq 8 \\ \psi & \text{if } k = 9 \\ C(h = (1,1,\cdots,1,0)) & \text{if } k \geq 10 \end{cases}$$

すなわち、８回目まではだれも自分の顔が汚れているかどうかわからないが、９回目にそれがわかる子どもがおり、１０回目以降は、全員自分の顔の状態を知っていることが共通知識となる。(実際には、９回目の時点で、顔が汚れている子どもは皆、自分がそうであることがわかる。そして１０回目に、顔がきれいな子どもが、自分がそうであることがわかる)

5　結語

古来、種々の複雑システムに共通する格言的法則・哲学的観察・思想的視座は数々あるが、「科学的法則」は個別的複雑システムを離れてはいまだ見出されてはいない。「複雑システム理論」の実現を阻む困難のとしては例えば次のようなものがある

- 記述の難しさ：独立変数が不明・巨大自由度
- 実験の難しさ：強い歴史性・真の再起性の欠如
- 異レベル間の結合の緊密性：ミクロを離れたマクロ記述の困難（クリックの「分子心理学」）・細部の特殊な性質がもつ決定的な役割（免疫系）
- 概念的難しさ：構造／状態概念の融合・種々の自己参照性

これらは、複雑システムの特性に根源的に結びついているだけに、困難さは大きい。

しかし幸いなことに、数学は今世紀の発展を通して驚くべき自由さ・豊かさ・多様性を持つに至った。現代数学は、今は思いもよらない深い概念・理論を生み出すことによって、上の困難にもかかわらず複雑システムの本質の数理的研究に実質的に取り組むことを可能にしてくれるであろう。非有基的集合論は、この楽観を支持する「思いもよらなかった豊かで有用な理論」であると私は思う。

参考文献

[1] P.Aczel, *Non-well-founded Sets* CSLI Lecture Notes No. 14, Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University, 1988.

[2] J.Barwise and J.Etchemendy, *The Liar, An Essay on Truth and Circularity*, Oxford Univ. Press, 1987.

[3] J.Y.Halpern and M.Y.Vardi, Model Checking vs. Theorem Proving: A Manifesto, p.151–176 in *Artificial Intelligence and Mathematical Theory of Computation*, Academic Press,1991.

[4] S.Tanaka and T.Tsujishita, Hypersets and Dynamics of Knowledge, preprint OSAKAU/PRM 93-11.

1のべき根での岩堀－Hecke環の表現論について

山根宏之　　阪大　理

この講演では q が1のべき根のときの岩堀－Hecke環 $Hq(W)$ の表現論について今迄分かっていることについて解説をおこなった。W を $\{s_1,\ldots,s_n\}$ を生成元とする有限Coxeter群とする。$q \in \mathbb{C}-\{0\}$ とする。$Hq(W)$ は $\mathbb{C}W$ の q-analogue として定義される。即ち$\mathbb{C}$-代数 $Hq(W)$ は $\mathbb{C}$-基底は $\{T(w)\ (w \in W)\}$ であって積は

$$T(s_i)T(w) = \begin{cases} T(s_i w) & \text{if } l(s_i w) > l(w), \\ (q-1)T(s_i w) + qT(w) & \text{if } l(s_i w) < l(w) \end{cases}$$

で定義される。q が1のべき根でないとき（もっと詳しくPoincarè多項式 $P_W(q) = \sum_{w \in W} q^{l(w)}$ が0でないとき）$Hq(W)$ は $\mathbb{C}W$ と同型であるので両者の表現論は全く同じである（行者－宇野の定理）。この定理は有限群の表現論のMaschkeの定理の類似物となっている。一方 q が1のべき根のときには有限群の有限体上のベクトル空間上への表現の表現論（モジュラー表現論と呼ばれる）の類似物として様々な定理が打ち立てられた。主なものは： $Hq(S_n)$ の既約表現の分類（Dipper-James），$Hq(S_n)$ の中山の補題の証明（Dipper-James），$Hq(W)$ の不足数0の既約表現の分類（山根），$Hq(W)$ の直既約表現の個数が有限かどうかの問題（宇野）である。またこれらの定理と直接計算より $H_{\sqrt[n]{1}}(S_n)$ 及び $H_{\sqrt[n-1]{1}}(S_n)$ については全ての主直既約表現、直既約表現、根基が分かる事を示した。詳しくは、

H, Yamane: On representation theories of Iwahori-Hecke algebras at roots of unity, Quantum Groups, Integrable Models and Knot Theory, ed. by M.L. Ge and H.J. de Vega, World Scietific (1993).

を見てください。

W-algebra について

東北大学理学部数学教室　黒木　玄　(Gen Kuroki)

$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上の finite-dimensional simple Lie algebra とし、$\widehat{\mathfrak{g}}$ はそれに対する affine Lie algebra とする:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

このとき、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の universal enveloping algebra のある graded completion を $\widehat{U}$ と表わし、$k \in \mathbb{C}$ に対して、$\widehat{U}$ を両側イデアル $(K-k)$ で割ってできる商環を $\widehat{U}_k$ と表わす。このとき、$\widehat{\mathfrak{g}}$ が $\mathrm{A}_n^{(1)}$, $\mathrm{B}_n^{(1)}$, $\mathrm{C}_n^{(1)}$ 型の場合に ([H])、level が critical すなわち $k = -h^\vee$($h^\vee$は dual Coxeter number) のとき、$\widehat{U}_k$ が十分多くの central elements を持つことが証明されている。更に、その結果を用い、上の型の $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対する Kac-Kazhdan conjecture が証明されている。我々は、$\widehat{U}_{-h^\vee}$ の center もしくはその適切な subalbegra でもって、classical W-algebra を定義する。このとき、classical W-algebra には自然に Poisson algebra structure が入る。したがって、本来の quantum W-algebra は、そのパラメーター k に関する変形 (Sugawara operator の algebara) として得られる筈のものである。

一方、より一般の affine Lie algebra に対する Kac-Kazhdan conjecture は、現在では、Wakimoto modules (affine Lie algebra の boson 表示、[W], [FF], [K1,2]) を用いることによって証明できることが知られている。

有限次元の場合には、$\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の center は、Harish-Chandra 同型によって、Cartan subalgebra から生成される多項式の Weyl 群不変式環と同型になることが知られている。Harish-Chandra 同型の証明には、Verma modules の理論が有効に使われる。そこで、$\widehat{U}_{-h^\vee}$ に対する Harish-Chandra 同型の類似が、Wakimoto modules を利用して得られないかどうか考えてみよう。

まず、affine Lie algebra の boson 表示について簡単に説明する。(詳しいことは、[K1,2] を見られたい。) $\mathfrak{g}$ の positive roots 全体を Δ_+ と表わし、$\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra を $\mathfrak{h}$ と表わす。$\kappa \in \mathbb{C}$ に対して、$\mathcal{A}_\kappa$ は

$$\{\, \delta_\alpha[m],\, x_\alpha[m],\, p_i[m] \mid \alpha \in \Delta_+,\ i = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h},\ m \in \mathbb{Z} \,\}$$

から生成され、以下の交換関係によって定義される algebra であるとする:

$$\begin{aligned} &\big[\delta_\alpha[m], x_\beta[n]\big] = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{m+n,0}, \\ &\big[p_i[m], p_j[n]\big] = \kappa(H_i|H_j) m \delta_{m+n,0}, \\ &(\text{他の組み合わせの commutator}) = 0. \end{aligned}$$

すなわち、$\mathcal{A}_\kappa$ は無限次元空間上の微分作用素環である。ここで、$(.|.)$ は $\mathfrak{g}$ の normalized Killing form であり、$\{H_i\}$ は $\mathfrak{h}$ の basis である。$\mathcal{A}_\kappa$ のある graded completion を $\widehat{\mathcal{A}_\kappa}$ と書く。$\widehat{U}$ から $\widehat{\mathcal{A}_\kappa}$ への algebra homomorphism π で、$\pi(K) = \kappa - h^\vee$ を満たし、種々の良い性質を持つものが構成できる。$\widehat{\mathcal{A}_\kappa}$ の自然な表現と

して Fock spaces が定義され、π を通して、affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ が Fock spaces の上に定まるのである。これが、所謂 Wakimoto modules である。なお、この Fock spaces は、直感的には、dimension も codimension も無限次元のある subspace 上に台を持つ超函数の空間として定義される。

注意すべきことは、$\kappa = 0$ の場合と $\kappa \neq 0$ の場合とでは、$\widehat{\mathcal{A}_\kappa}$ の center の大きさが全く違うということである。$\widehat{\mathcal{A}_\kappa}$ の center は、$\kappa = 0$ のときは $\{p_i[m] \mid i = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}, m \in \mathbb{Z}\}$ から生成され、$\kappa \neq 0$ のときは $\{p_i[0] \mid i = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}, \}$ から生成される。これに呼応して、π を通して、条件 $k = -h^\vee$ と条件 $\kappa = 0$ が対応していることにも注意して欲しい。これらのことから容易に予想される通り、以下を示せる。

上の π は $\widehat{U}_{\kappa - h^\vee}$ から $\widehat{\mathcal{A}_\kappa}$ への homomorphism を与えるが、それを π_κ と書くことにする。このとき、次が成り立つ:

$$\pi_0(\text{center of } \widehat{U}_{-h^\vee}) \subset (\text{center of } \widehat{\mathcal{A}_0}).$$

すなわち、$\widehat{U}_{-h^\vee}$ の center の元は $\widehat{\mathcal{A}_0}$ の中では $\{p_i[m]\}$ の式で表わされる。

この事実を元にして、classical W-algebra = center of $\widehat{U}_{-h^\vee}$ の構造、さらには、quantum W-algebra の構造を調べるということが 1 つの目標である。Affine Lie algebra の boson 表示が、Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の多変数超幾何型積分表示を与えるように、W-algebra の理論にもなにがしかの面白い応用がある筈である。しかし、これ以上の話はまだ未完成であるので、これからの研究に期待されたい。

References

[FF] Feigin, B., Frenkel, E.: Representation of affine Kac-Moody algebras, bosonization and resolutions. In: Brink, L., Friedan, D., Polyakov, A.M. (eds.) Physics and Mathematics of Strings. Memorial volume for Vadim Knizhnik, pp. 271-316. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific 1990

[H] Hayashi, T.: Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture. Invent. math. **94**, 13-52 (1988)

[K1] Kuroki, G.: Fock space representations of affine Lie algebras and integral representations in the Wess-Zumino-Witten models. Commun. Math. Phys. **141**, 511-542 (1991)

[K2] Kuroki, G: Fock space representations of twisted affine Lie algebras. 数理解析研究所講究録 **778**, 42-49 (1992)

[W] Wakimoto, N.: Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. Commun. Math. Phys. **104**, 605-609 (1986)

BelavinのR行列に付随する"量子群"のA型アフィン・リー環の指標の空間への作用

長谷川 浩司　　東北大・理

BelavinのR行列

$$R(u)^{j\ k}_{j'\,k'} := \delta_{\substack{j+k,\, j'+k' \\ \mathrm{mod}\, n}} \frac{\theta^{(i'-j')}(u+\hbar)}{\theta^{(i'-i)}(\hbar)\,\theta^{(i-j')}(u)} \cdot H(u)$$

但 $\theta^{(j)}(u) := \sum_{\nu \in \frac{1}{2} - \frac{j}{n} + \mathbb{Z}} e^{2\pi i\left[(u+\frac{1}{2})\nu + \frac{\nu^2}{2} n\tau\right]}$, $H(u) := \dfrac{\prod_{\ell=0}^{n-1} \theta^{(\ell)}(u)}{\prod_{\ell=1}^{n-1} \theta^{(\ell)}(0)}$

に付随して，生成元 $\{L(u)^{j}_{j'}\}_{j,j'=1,\cdots,n;\, u\in\mathbb{C}}$ と基本関係式

$$\sum_{j',k'=1}^{n} R(u-v)^{j'k'}_{j''k''}\, L(u)^{j}_{j'}\, L(v)^{k}_{k'} = \sum_{j',k'=1}^{n} L(v)^{k'}_{k''}\, L(u)^{j'}_{j''}\, R(u-v)^{jk}_{j'k'} \quad \left(\forall j, k, j'', k''\right)$$

で定義される代数$\mathcal{A}$を考える。$\mathcal{A}$は自然に$\mathbb{C}$上の双代数となる。("量子群") 次のことがわかっている。　[H1][FQ]

$\boxed{\text{事実.}}$ $\mathfrak{h}^*$をA_{n-1}型のweight空間，Λ_k:基本weight ($\Lambda_0=0$) とし $\bar{\varepsilon}_k := \Lambda_k - \Lambda_{k-1}$ とおく。$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$に対し

$$\phi(u)^{\ \lambda}_{j\ \mu} := \begin{cases} \theta^{(j)}(u - n\hbar\langle\mu, \bar{\varepsilon}_k\rangle) & : \lambda = \mu - \bar{\varepsilon}_k \text{ のとき} \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

$$\phi(u)^{j\ \mu-\bar{\varepsilon}_k}_{\ \ \mu} := \left[\phi(u)^{\ \mu-\bar{\varepsilon}_k}_{j\ \mu}\right]^{-1}_{j,k} \text{ の } (j,k) \text{ 成分}$$

$$\underset{x}{L}(u)^{j\ \lambda}_{j'\,\mu} := \phi(u-x)^{\ \ \lambda}_{j'\,\mu}\, \phi(u)^{j\lambda}_{\ \ \mu} \quad : x \in \mathbb{C}$$

↗

⑦とおく。すると次が成り立つ。

$$\sum_{j'',k'',\lambda''} R(u-v)^{j'k'}_{j''k''} L_x(u)^{j\lambda'}_{j'\lambda''} L_x(v)^{k\lambda}_{k'\lambda'} = \sum_{j',k',\lambda'} L_x(v)^{k'\lambda'}_{k''\lambda''} L_x(u)^{j'\lambda}_{j''\lambda'} R(u-v)^{jk}_{j'k'}.$$

さて $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ とし, $\mathfrak{h}^*$ 上の theta 函数の空間

$$Th_l := \left\{ f : \mathfrak{h}^* \text{上正則} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\lambda+\alpha) = f(\lambda) \\ f(\lambda+\alpha\tau) = f(\lambda)\cdot e^{-2\pi i l\left[\langle\lambda,\alpha\rangle + \frac{|\alpha|^2}{2}\tau\right]} \\ \quad (\forall\alpha : \text{root}) \end{array} \right\}$$

を考え, 更に $Th_l^W := \{ f \in Th_l \mid f(w\lambda) = f(\lambda) : \forall\lambda, \forall w \in W = \mathfrak{S}_n \}$ とする。良く知られた様に χ_Λ を $A_{n-1}^{(1)}$ の既約指標とすれば

$$Th_l^W \doteq \oplus_\Lambda \mathbb{C}\chi_\Lambda \quad (\Lambda \text{は level } l \text{ dominant integral weight を動く})$$

である。以下の結果[H2]は[S]の一般化を与える。

$\boxed{\text{定理}}$ (0) $\mathfrak{h}^*$ 上の函数 f に対し"差分作用素"を

$$(L_x(u)^j_{j'} f)(\mu) := \sum_{k=1}^{n} L_x(u)^{j\ \mu/\hbar-\varepsilon_k}_{j'\ \mu/\hbar} f(\mu - \hbar\varepsilon_k)$$

で定めると, これは A の表現を与える。

(1) $\quad L_{l\hbar}(u)^j_{j'}(Th_l^W) \subset Th_l^W$.

(2) $l=1$ のとき, (1)の部分表現は A の"定義表現"と同値。

i.e. $\quad L_\hbar(u)^j_{j'}\chi_{\Lambda_p} = \sum_{p'=0}^{n-1} L_\hbar(u)^{jp}_{j'p'}\cdot\chi_{\Lambda_{p'}}$ と書くと

$$L_\hbar(u)^{jp}_{j'p'} = R(u)^{jp}_{j'p'} \times H(\hbar)/H(u).$$

文献 [FQ] Fujii & Quano, Tokyo Univ. preprint

[H1],[H2] Hasegawa, preprint

[S] Sklyanin, Funct. Anal. & Appl. 16 (1982), ibid. 17 (1983).

高次 Specht 多項式と対称群の表現

山田裕史（都立大 数学）

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現が n 個のマス目をもつ Young 図形 $\lambda \vdash n$ でパラメトライズされることはよく知られています。ここではまずその具体的な構成法の一例を復習しましょう。Young 図形 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \vdash n$ (i.e., $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=n$) のマス目に数字 1 から n を一回づつ書き入れたものを盤といいます。盤 T に対して多項式 $\Delta_T \in \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$ が次のように定義されます。T の第 j 列の数字が $a_{j1},\ldots,a_{j\mu_j}$ のとき $\Delta_T = \prod_{j=1}^{\lambda_1} \xi_{a_{j1}\ldots a_{j\mu_j}}$ とします。ただし $\xi_{a_1\ldots a_r} = \prod_{\alpha<\beta}(x_{a_\alpha}-x_{a_\beta})$ です。($\xi_a = 1$ とします。) この多項式 Δ_T を T に付随する <u>Specht 多項式</u>と呼びます。Young 図形 λ を台にもつ盤の全体 Tab(λ) には $\mathfrak{S}_n$ が数字の入れかえで作用しています。そこで V(λ) を $\{\Delta_T; T\in \mathrm{Tab}(\lambda)\}$ で張られる $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$ の部分空間とおくと $\mathfrak{S}_n$ は V(λ) にも作用しています。

<u>事実</u> [W.Specht,1935]. (1) V(λ) は $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を与える。
(2) V(λ) の基底として $\{\Delta_T; T\in \mathrm{STab}(\lambda)\}$ がとれる。ここで STab(λ) は λ を台にもつ標準盤（すなわち数字が右向き、及び下向きに増加しているような盤）全体の集合。

旗多様体 GL(n)/Borel のコホモロジー環 $R = \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(e_1,\ldots,e_n)$ を考えます。ここで $(e_1,\ldots,e_n)$ は初等対称函数 $e_j (1\leq j\leq n)$ で生成されるイデアルです。この R にも $\mathfrak{S}_n$ が作用しますが、この表現は正則表現です。すなわち全ての既約表現がその次元に等しい重複度で登場します。$R = \bigoplus_{j\geq 0} R_j$ と次数により分解したとき 各 R_j にどの既約表現がいくつ出てくるかを示す公式も知られています [A.A.Kirillov,1984]。先ほどの V(λ) は

λ に対応する既約表現のうち最低次 $(=n(\lambda):=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\lambda_i)$ に登場するものに他なりません。そこで、"R の各既約成分を具体的に実現し、その基底を求めよ" という問題が考えられます。先日 A.Lascoux にきいたらこの問題は結構有名らしくていろいろな人達が考えているそうです。ただし、今回の我々の形のような答えは少なくとも過去の文献にはないようです。また R の基底として最近一部で、はやっている Schubert 多項式は各既約成分の基底にはなっていません。

我々（というのは同僚の寺杣氏と私のことですが）の結果を述べましょう。Young 図形 $\lambda\vdash n$ に対して $S\in \mathrm{STab}(\lambda)$ を 1 つ固定します。S の指数盤 $i(S)$ を次のように定義します。例えば $S=\begin{matrix}1&2&5\\3&6&\\4&&\end{matrix}$ に対し $i(S)=\begin{matrix}0&0&2\\1&3&\\2&&\end{matrix}$,

すなわち S の数字 1 は指数 0 をもち、S の数字 k が指数 p をもっているとき k+1 が S において k の右上にあるか、左下にあるかによって k+1 の指数はそれぞれ p か p+1 になるわけです。λ を台にもつ盤 $T\in \mathrm{Tab}(\lambda)$ に対し、多項式 $x_T^{i(S)}$ が定義されます。S が上のもので、例えば $T=\begin{matrix}3&2&5\\6&1&\\4&&\end{matrix}$

ならば $x_T^{i(S)}=x_1^3\,x_2^0\,x_3^0\,x_4^2\,x_5^2\,x_6^1$ です。T からできる Young 対称子を $e_T=\sum_{\tau\in C(T)}\sum_{\sigma\in R(T)}(\mathrm{sgn}\,\tau)\tau\sigma\in \mathbb{Q}\mathfrak{S}_n$ とします。ここで $C(T),R(T)$ はそれぞれ T の垂直置換群、水平置換群です。そこで高次 Specht 多項式を

$\Delta_T^S=e_T(x_T^{i(S)})$ と定義します。S として（上の例で） $\begin{matrix}1&2&3\\4&5&\\6&&\end{matrix}$ をとると

$i(S)=\begin{matrix}0&0&0\\1&1&\\2&&\end{matrix}$ となって Δ_T^S は定数倍を除いて Specht 多項式 Δ_T に一致します。

定理　$\{\Delta^{S}_{T};\ S, T \in \mathrm{STab}(\lambda),\ \lambda \vdash n\}$ は R の基底となり、各 $\lambda \vdash n$, $S \in \mathrm{STab}(\lambda)$ に対して　$\{\Delta^{S}_{T};\ T \in \mathrm{STab}(\lambda)\}$ は $V(\lambda)$ と同型な $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の基底を与える。

この定理は対称群のみならず、B 型 Weyl 群、さらには inprimitive な複素鏡映群　$(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n = (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$　($r=2$ のときが B 型 Weyl 群）にまで一般化されます。この一般化の段階で東京商船大の有木氏の協力をあおぎました。くわしくは Ariki-Terasoma-Yamada の論文をご覧下さい。

INTERSECTION THEORY FOR TWISTED CYCLES AND HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

Masaaki Yoshida

Consider the multi-valued function on complex $(t_1, \dots, t_r)$-space $\overline{T}$, with parameters x_{ij} :

$$U(t,x) = \prod_{j=1}^{n} L_j(t)^{\alpha_j - 1},$$

where $L_j(t,x) = \sum_{i=0}^{r} x_{ij} t_i \quad j = 1, \dots, n,\ t_0 = 1$; the n hyperplanes $\{t \mid L_j = 0\}$ of $\overline{T}$ and the hyperplane at infinity are supposed to be in general position, i.e. any $(r+1)$-minor of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{01} & \cdots & x_{0n} \\ 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{r1} & \cdots & x_{rn} \end{pmatrix}$$

does not vanish; such $x = (x_{ij})$ represents a point on the configuration space $X(r+1, n+1)$ of $n+1$ hyperplanes in general position in the r-dimensional projective space. The complex constants α_j are supposed to satisfy the following condition: $\alpha_j,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \notin \mathbb{Z}$. Put $\Omega = dU(t)/U(t)$; it is a holomorphic 1-form on $T = T(x) := \overline{T} - \cup\{t \mid L_j = 0\}$. Through the covariant derivative $\nabla_\Omega = d + \Omega\wedge$, we have the twisted de Rham theory (see Section 1): the twisted homogogy groups and the twisted cohomogogy groups are defined and, *roughly speaking, they are dual each other.* Let $H_p(T, \mathcal{L}_\Omega)$ and $H_p^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega)$ be the p-th twisted homology group and the p-th locally finite twisted homology group, respectively, where $\mathcal{L}_\Omega$ is a locally constant sheaf of ∇_Ω-horizontal sections. The following is known:

$$H_p^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega) = \begin{cases} 0 & p \neq r \\ \text{dual of } H_r(T, \mathcal{L}_\Omega^\vee) & p = r, \end{cases}$$

where $\mathcal{L}_\Omega^\vee$ is the dual sheaf of $\mathcal{L}_\Omega$; $\dim H_r(T, \mathcal{L}_\Omega) = \binom{n-1}{r}$; there is an isomorphism $reg_\Omega : H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega) \to H_r(T, \mathcal{L}_\Omega)$ called the regularization, which is the inverse of the natural map $H_r(T, \mathcal{L}_\Omega) \to H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega)$. The non-degenerate pairing

$$I : H_r(T, \mathcal{L}_\Omega^\vee) \times H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega) \to \mathbb{C}$$

is called the intersection form. The purpose of the present talk is to study this form.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

In order to take an explicit basis of the homology group, we first assume that the x_{ij}'s are given by

$$\mathring{x} = (\mathring{x}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & (-\xi_1)^r & \cdots & (-\xi_n)^r \\ 0 & (-\xi_1)^{r-1} & \cdots & (-\xi_n)^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\xi_1 & \cdots & -\xi_n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

for some real ξ_j such that $\xi_1 < \cdots < \xi_j < \cdots < \xi_n$; we choose $\binom{n-1}{r}$ bases $D_P \in H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega^\vee)$ and $D_P^\vee \in H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega)$ indexed by

$$P = (p_1, \ldots, p_r), \quad 1 \leq p_1 < \cdots < p_r \leq n-1,$$

with support on chambers :

$$\{t \in T_{\mathbb{R}} \mid (-1)^{P(j)} L_j(t) > 0, 1 \leq j \leq n\},$$

where $T_{\mathbb{R}} = T \cap \mathbb{R}^r$ and $P(j) :=$ cardinarity of $\{i \mid p_i < j\}$. For the bases $D_P(\Omega) := reg_\Omega D_P \in H_r(T, \mathcal{L}_\Omega^\vee)$ and $D_P^\vee \in H_r^{lf}(T, \mathcal{L}_\Omega)$, we shall compute the intersection numbers $D_P(\Omega) \cdot D_Q^\vee$.

Any other $x \in X = X(r+1, n+1)$ can be joined to $\mathring{x}$ by a path in the configuration space $X(r+1, n+1)$, so one can know the intersection pairing at x. There are infinitly many such paths but it does not matter which path you choose, because the intersection form is invariant under the monodromy group. Let us state it more precisely. The intersection matrix at $\mathring{x}$ is defined by

$$I = I(r+1, n+1; \alpha) = (D_P(\Omega) \cdot D_Q^\vee)_{P,Q}.$$

For any loop γ in X with base point $\mathring{x}$, by the local triviality of the bundle $\cup_{x \in X} H_r(T(x), \mathcal{L}_\Omega^\vee)$, the cycles $D_P \in H_r(T(\mathring{x}), \mathcal{L}_\Omega^\vee)$ can be continued along γ; let D_P^γ be the consequent cycle. There is an invertible matrix $M(\gamma) = (M_{PQ}(\gamma))_{P,Q}$ depending only on the homotopy class of γ such that $D_P^\gamma = \sum_Q M_{PQ}(\gamma) D_Q$. The monodromy group $\Gamma(r+1, n+1; \alpha)$ is the group consisting of such $M(\gamma)$'s; the entries of the matrix $M(\gamma)$ are rational functions of $c_j := \exp 2\pi\sqrt{-1}\alpha_j$. We have the following invariance:

$$M I \, {}^t\overset{\vee}{M} = I \quad \text{or equivalently} \quad I^{-1} = {}^t\overset{\vee}{M} I^{-1} M, \quad M \in \Gamma(r+1, n+1; \alpha),$$

where $\vee$ is the operation taking α_j to $-\alpha_j$ (so that c_j to c_j^{-1}) for all j.

Department of Mathematics, Kyushu University 33, Fukuoka 812, Japan

Peter Slodowy (Hamburg Univ.) Feb. 24, 1993

"Small nilpotent orbits and simple singularities"

The purpose of this talk is to give a survey of old and more recent constructions relating the so called simple singularities (also called Kleinian or rational double points) and their deformation theory to the geometry of nilpotent orbits in the simple Lie algebras which share the same Coxeter-Dynkin diagram (of type A, D, E). Thus, we will first sketch the Brieskorn-Grothendieck construction of 1970 involving subregular, i.e. big nilpotent orbits and transversal slices to these orbits. Then we will explain a construction due to F. Knop (1987), which uses hyperplane sections of the minimal nontrivial nilpotent orbit in the projective Lie algebra. Both constructions can be performed also with Lie algebras of type B, C, F, G. In the first approach, this was done by us long ago (1978). Here the situation can be understood in terms of (simple) singularities with additional symmetries related to "foldings" of root systems and diagrams. Unfortunately, Knop's construction for Lie algebras of type B, C, F, G yields quite different singularities (without symmetries), at a first glance at least. Recently, while visiting RIMS, Kyoto, and in joint work with S. Helmke from Hamburg, we have enlarged Knop's construction by taking into account some bigger (but still "small") nilpotent orbits as well as deformations of singularities inside singular varieties to show that his findings are related to our old ones in a natural way (we might talk in some more detail about these matters in a separate seminar).

Global existence theorem for semilinear wave equations with non compact data

津田谷公利　　　　北海道大学理学部

半線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^{p-1}u, & (x,t) \in R^n \times (0,\infty)\ (p>1), \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in R^n,\ (n=2,3) \end{cases} \tag{1}$$

を考える．初期値 $f(x)$, $g(x)$ は小さいものとし，解の class は C^2級であるとする．次のような結果が今までに知られている．

今までに知られている結果

(i) 初期値 $f(x)$, $g(x)$ が smooth で compact support をもつ場合

•$n=3$ のとき

$p > 1+\sqrt{2}$, data が十分小 $\Rightarrow$ (1) の C^2級の大域解が存在する ([5]).

$1 < p \le 1+\sqrt{2} \Rightarrow$ (1) の大域解は存在しない ([5, 6, 9]).

•$n=2$ のとき

$p > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, data が十分小 $\Rightarrow$ (1) の C^2級の大域解が存在する ([4]).

$1 < p \le \frac{3+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow$ (1) の大域解は存在しない ([3, 9]).

(ii) 初期値 $f(x) \in C^3(R^n)$, $g(x) \in C^2(R^n)$ が compact support をもたない場合

$$\sum_{|\alpha|\le 3} |D_x^\alpha f(x)| + \sum_{|\beta|\le 2} |D_x^\beta g(x)| \le \frac{\varepsilon}{(1+|x|)^{1+k}}, \quad k>0,\ \varepsilon>0 \tag{2}$$

$$f(x) = 0,\ g(x) \ge \frac{\varepsilon}{(1+|x|)^{1+k}}, \qquad \varepsilon > 0 \tag{3}$$

•$n=3$ のとき

(2) を仮定すると

$$\left.\begin{array}{lcl} p & > & 1+\sqrt{2} \\ k & > & \frac{2}{p-1} \\ \varepsilon & : & \text{十分小 dep. on } p,k \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(1) の } C^2 \text{級の大域解が存在する ([2]).}$$

(3) を仮定すると

$$\left.\begin{array}{l} p > 1+\sqrt{2} \\ 0 < k < \frac{2}{p-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(1) の大域解は存在しない ([2]).}$$

$n=2$ ではどうか．

定理 1　　$n=2$ とし，(2) を仮定する．$k > \frac{2}{p-1}$, $p > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ で ε が p, kに依存して十分小ならば (1) の C^2級の大域解がただ 1 つ存在する．

定理 2　　$n=2$ とし，(3) を仮定する．$p>\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $0<k<\frac{2}{p-1}$ ならば (1) の大域解は存在しない．

注意 1　　Agemi and Takamura[1], Kubota[8] も独立して違う方法で定理１，２と同じような結果を出している．

$k=\frac{2}{p-1}$ のとき解はどうなるか．

定理 3　　$n=2,3$ とし (2) を仮定する．$k=\dfrac{2}{p-1}$, $p>\begin{cases}1+\sqrt{2} & (n=3)\\ \frac{3+\sqrt{17}}{2} & (n=2)\end{cases}$ で ε が p, kに依存して十分小ならば (1) の C^2級の大域解がただ１つ存在する．

注意 2　　Kubota[8] は $k=\dfrac{2}{p-1}$かつ $k\neq\begin{cases}1 & (n=3)\\ \frac{1}{2} & (n=2)\end{cases}$ のときの大域解の存在を証明している．

次に，$0<k<\frac{2}{p-1}$のときの解の life span の下からの評価を考える．life span $T^*=T^*(\varepsilon)$ を，$x\in R^n(n=2,3)$, $0\leq t<s$ に対して (1) の C^2級の解が存在するような s の supremum とする．

定理 4　　$n=2,3$ とし (2) を仮定する．$0<k<\dfrac{2}{p-1}$, $p>\begin{cases}1+\sqrt{2} & (n=3)\\ \frac{3+\sqrt{17}}{2} & (n=2)\end{cases}$ ならば (1) の局所解が存在し，さらに p,kに依存する十分小さい定数 $\varepsilon_0, C_0>0$ が存在して，

$$T^*(\varepsilon)\geq C_0\varepsilon^{\frac{p-1}{k(p-1)-2}}\qquad \text{for } 0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$$

をみたす．

注意 3　　(3) を仮定した場合，

$0<k<\dfrac{2}{p-1}$, $p>\begin{cases}1+\sqrt{2} & (n=3)\\ \frac{3+\sqrt{17}}{2} & (n=2)\end{cases}$ ならば

$$T^*(\varepsilon)\leq C_0'\varepsilon^{\frac{p-1}{k(p-1)-2}}$$

である ([1, 2, 10])．

References

1. R. Agemi and H. Takamura, Hokkaido Math. J. 21(1992), 517-542.
2. F. Asakura, Comm. P.D.E 11, No. 13(1986), 1459-1487.
3. R. T. Glassey, Math. Z. 177(1981), 323-340.
4. R. T. Glassey, Math. Z. 178(1981), 233-261.
5. F. John, Manuscripta Math. 28(1979), 235-268.
6. F. John, Nonlinear wave equations, Formation of singularities, Amer. Math. Soc. Providence, 1990.
7. M. Kovalyov, Comm. P.D.E 12, No. 5(1987), 471-501.
8. K. Kubota, Preprint.
9. J. Schaeffer, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 101A(1985), 31-44.
10. K. Tsutaya, to appear in Journal of Diff.Eq..

1993年3月3日　談話会要旨

「超幾何微分方程式系の Symmetry Algebra について」

齋藤 睦　（北大理）

本講演では、1985年頃からロシアのゲルファント及びその共同研究者等によって研究のめざましい一般超幾何微分方程式系の成り立ちを述べ、また、その Symmetry Algebra を定義し、その構造について言及する。また、時間があれば、その表現についても言及したい。

ほとんどの超幾何方程式系に関する講演がそうであるように、本講演でも その introduction としてガウスの超幾何函数について述べる。 このガウスの場合の Symmetry について述べるが、通常の超幾何函数の定義では、その symmetry が綺麗に記述できないことから一般超幾何微分方程式系の定義に至る。

次に、一般超幾何微分方程式系の Symmetry Algebra を定義し、その構造を主定理として述べる。 また、Symmetry Algebra の１階以下の微分作用素からなる部分 Lie環として Symmetry Lie Algebra を捉え、また、その Reductive part について解説する。 これは A 型と C 型の単純 Lie 環より成る。

最後に Symmetry Algebra の Weight 表現についても言及したい。

題目：ニューマークの方法の誤差評価と
水の波線形非定常問題の有限要素計算

松本美保子（電通大）

概要：ヒルベルト空間X上の自己共役作用素Aを用いた定数係数二階線形非定常問題
$\frac{d^2}{dt^2}\varphi + A\varphi = \psi$ を考える。作用素AをXの有限次元部分空間 X_h 上の正定値有界自己共役作用素 A_h におきかえ、さらに時間方向tをニューマークの方法により離散化した問題の解の誤差評価を与える。

これらの結果は、水の波線形時間発展問題

$$\begin{cases} -\Delta\Phi = 0 & \text{in } \Omega \ (\text{静止水域}) \\ \Phi_{tt} + g\frac{\partial}{\partial n}\Phi = \Psi & \text{on } \Gamma_0 \ (\text{静止水面}) \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi = 0 & \text{on } \Gamma_1 \ (\text{固体壁}) \\ \Phi(0,x) = \Phi^1(x),\ \Phi_t(0,x) = \Phi^0(x) & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \qquad \partial\Omega = \overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1}$$

の有限要素近似の誤差解析を与えるために開発した手法を、抽象的に整理したものである。//

（水の波の方程式の部分は、省略して頂いてもかまいません。）

以上

S^1のＰＬ同相写像のなす群について

橋口　徳一（日本大学　理工学部）

1　Anosov 葉層のＰＬ化

Σ_gを種数$g(\geq 2)$の有向閉曲面とし，定負曲率-1をもつRiemann計量を与えておく。$T_1\Sigma_g$をΣ_gの単位接ベクトル束とすると，測地流s_tが$T_1\Sigma_g$上に定義され，これは良く知られているようにAnosov流である。従って，$T_1\Sigma_g$に不安定葉層と呼ばれる余次元1の葉層F^uが存在する。F^uの各葉は，$T_1\Sigma_g$の各ファイバーと横断的に交わっているので，全ホロノミー準同型

$$\Psi_g : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$$

が得られる。これは，通常のFuchs群の表現である。このΨ_gは，以下に示すように

$$\Phi_g : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{PL}_+(S^1)$$

と位相共役である。ここで，$\mathrm{PL}_+(S^1)$はS^1の向きを保つ区分線形な同相写像のなす群である。

Ghysによって次の定理が示された。

定理([G])．s_tは，不安定葉層もこめて，ある$A_g \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$が2次元トーラスへ誘導するAnosov微分同相写像$\hat{A}_g$の懸垂流に，何回かDehn手術を施して得られるAnosov流と位相的に同型である。

（注意１）行列A_gは具体的に求める事ができて([H1])，

$$A_g = \begin{pmatrix} 2g^2-1 & 2g(g-1) \\ 2g(g+1) & 2g^2-1 \end{pmatrix}。$$

懸垂流の不安定葉層は，横断的にアフィン構造を持つが，この不安定葉層に，ホロノミーを持つleaf curveに沿ってDehn手術を施して得られる葉層は，横断的には折れ点を持ち，区分線形な構造を持つ事になる。こうして得られた葉層の全ホロノミー準同型がΦ_gであり，上の定理よりΨ_gと位相共役である。Φ_gの具体的な記述は求められている([H2])。

$T_1\Sigma_g$は，次のBrieskorn多様体

$M_g = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3; z_1^{g+1} + z_2^{2g+2} + z_3^{2g+2} = 0, |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}$

の$2g+2$重coveringであり，それを

$$p : T_1\Sigma_g \to M_g$$

と書く。M_gは，S^2上の３つの特異ファイバーを持つ Seifert 多様体であり，そのファイバーに横断的な葉層がpによって$T_1\Sigma_g$から誘導される。従って，準同型

$$\phi_g : \pi_1(M(g+1, 2g+2, 2g+2))/_{\langle z\rangle} \to \mathrm{PL}_+(S^1)$$

が得られる ([EHN])。ここで，z は general ファイバーの class，また，Milnor により $\pi_1(M(g+1,2g+2,2g+2))/_{\langle z\rangle}$ は三角群 $\Gamma_g = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3; \tau_1^{g+1} = \tau_2^{2g+2} = \tau_3^{2g+2} = \tau_1\tau_2\tau_3 = 1\rangle$ と同型である。

p から $p_* : \pi_1(\Sigma_g) \to \Gamma_g$が誘導され，次が成り立つことがわかる。

命題．$\Phi_g = \phi_g \circ p_*$。

（注意２）具体的には，$\phi_g(\tau_2) = \frac{1}{2g+2}$の回転，$\phi_g(\tau_1)$ の折れ点の数＝４。

2 ϕ_2, Φ_2の摂動

以下，$g = 2$とする。

Φ_2を摂動させたい訳だが，まず，ϕ_2を摂動させる事ができるかどうかを調べると，

定理１． ϕ_2は，回転による共役を除いて,（注意２）の２つの条件を保ったまま摂動させることはできない。

（注意３）τ_2の像 $= \frac{1}{6}$という条件は，$\mathrm{PL}_+(S^1)$ の元による共役で常に実現される。

定理１より，Φ_2は（折れ点の数を変えないという条件の下では）p_*を経由したまま摂動させることはできない。一方，次の事が言える。

定理２． Φ_2は，表現空間 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), \mathrm{PL}_+(S^1))/_{conj.}$ 内で，自由度４をもつ摂動をさせることができる。

参考文献

[EHN] D.Eisenbud,U.Hirsch and W.Neumann, *Transverse foliation of Seifert bundle and self homeomorphisms of the circle*, Comment. Math. Helvetici 56(1981),636-660

[G] E.Ghys, *Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey*, Ann. Inst. Fourier 37(1987),59-76

[H1] N.Hashiguchi, *On the Anosov diffeomorphisms corresponding to geodesic flows on negatively curved closed surfaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 37(1990),485-494

[H2] N.Hashiguchi, *PL-representations of Anosov foliations*, Ann. Inst. Fourier 42(1992),937-966