第２回 関数空間セミナー 報告集

１９９４年１月６～１月８日

代表者　澤島　侑子・中路　貴彦

Series ♯ 29. February, 1994

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.

♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.

♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第 12 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.

♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.

♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.

♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.

♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何 " 研究集会報告集,1988.

♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第 13 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.

♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.

♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.

♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.

♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.

♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.

♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.

♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.

♯ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.

♯ 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

♯ 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28 ～ 10.2 北海道大学での集中講義　講義録, 52 pages. 1993.

♯ 26: T. Nakazi (Ed.), 第 1 回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.

♯ 27: K. Kubota (Ed.), 第 18 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

♯ 28: T. Hibi (Ed.), 1992 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.

第2回　関数空間セミナー　　報告集

１９９４年１月６日～１月８日

代表者　　澤島　侑子
　　　　　中路　貴彦

目　　次

Remarks on Furuta's extension of the Fuglede-Putnam theorem to subnormal operators

斉藤 功　　東京理科大学 理学部

T. Furuta [3] は、次の Fuglede-Putnam の定理を subnormal operator の場合に拡張した。

定 理 A (Fuglede-Putnam)

$A \in B(H_1)$, $B \in B(H_2)$ が normal operator で $X \in B(H_2, H_1)$ を $AX = XB$ を満たす operator とする。このとき $A^*X = XB^*$ が成立する。

定 理 B (T. Furuta [3])

$A \in B(H_1)$, $B^* \in B(H_2)$ が subnormal operator で $X \in B(H_2, H_1)$ を $AX = XB$ を満たす operator とする。このとき $A^*X = XB^*$ が成立する。

では、どのようなときに上の式が成立するのだろうか。A_0、B_0 が normal で $A_0X_0 = X_0B_0$ とする。このとき

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、$AX = XB$ は

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

であり、$A^*X = XB^*$ は、

$$\begin{pmatrix} A_0^* & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0^* & 0 \\ 0 & B_1^* \end{pmatrix}$$

となるが、行列計算をすると (1,1) 成分が、上の式では $A_0X_0 = X_0B_0$ で、下の式では $A_0^*X_0 = X_0B_0^*$ となり他の成分は、どちらも 0=0 である。よって Fuglede-Putnam の定理より、$AX = XB$ より $A^*X = XB^*$ が得られる。

逆に [3] における Theorem B の証明と T.Ando [1] の subnormal operator の normal extension に関する結果を用いると、Theorem B の A、B は上の形となり A_0、A_1 は、それぞれ A の normal part 、pure part となり B_0、B_1 は、それぞれ B^* の normal part の adjoint 、pure part の adjoint となることがわかる。subnormal operator の pure part、normal part の定義と性質は次に示す。

定 義

$A \in B(H)$ が pure とは A の reducing subspace M で $A|M$ が normal となるものが、$\{0\}$ のみであることをいう。

補 題 C (see [4])

$A \in B(H)$ を subnormal operator とし、$H_p(A) = \vee\{A^n(A^*A - AA^*)x; x \in H, n \geq 0\}$、$H_n(A) = H_p(A)^{\perp}$ とする。ただし $\vee$ は、closed linear span を意味する。このとき $H_p(A)$ は、A の reducing subspace となり $A_p := A|H_p(A)$ は pure、 $A_n := A|H_n(A)$ は normal となる。

定 義

上の A_p と A_n をそれぞれ A の pure part、normal part という。

上で述べたことをまとめると

定 理

$A \in B(H_1)$, $B^* \in B(H_2)$ を subnormal とし $X \in B(H_2, H_1)$ を $AX = XB$ を満たす operator とする。このとき X は、

$$\begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ : \ H_n(B^*) \oplus H_p(B^*) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_p(A)$$

と表される。ただし $H_n(A)$, $H_p(A)$, $H_n(B^*)$, $H_p(B^*)$ は上の補題 C のものとする。よって $AX = XB$ は、

$$\begin{pmatrix} A_n^* & 0 \\ 0 & A_p^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ({B^*}_n)^* & 0 \\ 0 & ({B^*}_p)^* \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし A_n、 ${B^*}_n$ は A、B^* の normal part、A_p、 ${B^*}_p$ は A、B^* の pure part とする。

次の系は、上の定理から直ちに分かる。

系 1.

$A \in B(H_1)$, $B^* \in B(H_2)$ が subnormal で、$X \in B(H_2, H_1)$ が AX=XB を満たすとするとき、次が成立する。

(i) $A \in B(H_1)$ 又は $B^* \in B(H_2)$ が pure ならば、$X = 0$ となる。

(ii) X が injective ならば、B が normal となる。

(iii) X が dense range をもつならば、A が normal となる。

また、次のことが知られている。

定 理 D (Furuta, Matsumoto and Moriya [2]).

$S \in B(H)$ が hyponormal で $S^*(S^*S - SS^*) = (S^*S - SS^*)S$ が成立するなら、S は subnormal となる。

これと似たかたち $S(S^*S - SS^*) = (S^*S - SS^*)S^*$ については、次のことが言える。

系 2.

$S \in B(H)$ を subnormal operator で $S(S^*S - SS^*) = (S^*S - SS^*)S^*$ を満たす operator とすると S は normal となる。

定理の証明に定理 B の証明が必要なので次に述べる。(証明は、[3] のものである。)

定 理 B の 証 明 (T. Furuta).

$$N_A = \begin{pmatrix} A & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad K_1 = H_1 \oplus (K_1 \cap H_1^{\perp}),$$

$$N_B^* = \begin{pmatrix} B^* & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad K_2 = H_2 \oplus (K_2 \cap H_2^{\perp})$$

を A, B^* の normal extension とし、

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} A & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{22}^* & B_{12}^* \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix} \qquad \hat{X} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on $H_1 \oplus (K_1 \cap H_1^{\perp}) \oplus (K_2 \cap H_2^{\perp}) \oplus H_2$ とする。

このとき $\hat{A}$ は、 normal となり

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AX \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & XB \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $\hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A}$ となり、Fuglede-Putnam's theorem より $\hat{A}^*\hat{X} = \hat{X}\hat{A}^*$ となる。よってこれを計算すると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AX \\ 0 & 0 & 0 & A_{12}^*X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & XB_{12} & XB \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$A^*X = XB^*,$$

(1) $$A_{12}^*X = 0,$$

(2) $$XB_{12} = 0$$

となる。

定理の証明で使う T. Ando による subnormal operator の normal extension に関する定理を述べる前に、[1] で定義されている partial inverse の定義を述べる。

$T \in B(H)$ が self-adjoint のとき T の partial inverse T^{-1} を次で定義する。

$$T^{-1} \ : \ \mathrm{ran}\, T \oplus \ker T \longrightarrow H, \quad T^{-1}T = P, \quad T^{-1}(I-P) = 0.$$

ただし P は H から $\overline{\mathrm{ran}\, T}$ への orthogonal projection とする。また densely defined operator S が bounded ならその bounded extension も S で表す。

<u>定理 E (T. Ando).</u>

$S \in B(H)$ が subnormal ならば帰納的に $A_n, S_n \in B(H)$ を次のように定義できる。

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad S_0 = S, \\ A_n &= (A_{n-1}^2 + S_{n-1}^*S_{n-1} - S_{n-1}S_{n-1}^*)^{1/2}, \\ S_n &= A_nS_{n-1}A_n^{-1}, \end{aligned}$$

ただし A_n^{-1} は A_n の partial inverse とする。また、各 $n \geq 1$ に対し

$$A_{n-1}^2 + S_{n-1}^*S_{n-1} - S_{n-1}S_{n-1}^* \geq 0,$$

$$S_nA_n = A_nS_{n-1}$$

$A_nS_{n-1}A_n^{-1}$ は H 上の bounded operator

が成立して

$$N := \begin{pmatrix} S & A_1 & & & \\ & S_1 & A_2 & & \\ & & S_2 & A_3 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{on } H \oplus H \oplus H \oplus H \oplus \cdots$$

が、ノルム $\|S\|$ の bounded normal operator となる。

定理の証明.

記号は上の定理Bの証明のものと同じとする。定理Eより

$$K_i = H_i \oplus H_i \oplus H_i \oplus H_i \oplus \cdots, \quad (i = 1, 2),$$

$$A_{12} = ((A^*A - AA^*)^{1/2}, 0) : H_1 \oplus (H_1 \oplus H_1 \oplus H_1 \cdots) \longrightarrow H_1,$$

$$B_{12} = ((BB^* - B^*B)^{1/2}, 0) : H_2 \oplus (H_2 \oplus H_2 \oplus H_2 \cdots) \longrightarrow H_2$$

としてよい。(1), (2) より

$$(A^*A - AA^*)X = 0, \tag{3}$$

$$X(BB^* - B^*B) = 0 \tag{4}$$

となる。よって (3) と 定理 B より $(A^*A - AA^*)A^{*n}X = (A^*A - AA^*)XB^{*n} = 0$ となるので $X^*A^n(A^*A - AA^*) = 0$ となる。Lemma C より $X^*H_p(A) = 0$ となり、よって $H_p(A) \subseteq \ker X^*$ となって

$$H_n(A) \supseteq \overline{\operatorname{ran} X} \tag{5}$$

となる。同様に (4) の adjoint より $XH_p(B^*) = 0$ となり

$$H_p(B^*) \subseteq \ker X \tag{6}$$

となる。(5), (6) より

$$\begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : H_n(B^*) \oplus H_p(B^*) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_p(A)$$

と表される。

参考文献

[1] T. Andô, *Matrices of normal extensions of subnormal operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), **24** (1963), 91–96.

[2] T.Furuta, K. Matsumoto and N. Moriya, *A simple condition on hyponormal operators implying subnormality*, Math Japon **21** (1976), 357–362.

[3] T.Furuta, *Relaxation of normality in the Fuglede-Putnam theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **77** (1978), 324–328.

[4] M. Martin, M. Putinar, "Lectures on Hyponormal Operators," Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.

Hadamard 積の固有値に関するある予想について

北大　電子科学研　安藤　毅

1. Golden-Thompson 型の問題

Golden-Thompson 不等式というのは，Hermite 行列 H, K 関して

$$\mathrm{Tr}(e^{H+K}) \le \mathrm{Tr}(e^H e^K) = \mathrm{Tr}(e^{H/2} e^K e^{H/2}),$$

またさらにに一般の unitarily invariant norm $\|\cdot\|$ についても

$$\|e^{H+K}\| \le \|e^{H/2} e^K e^{H/2}\| \le \|e^H e^K\|.$$

が成り立つというものである．

当然 3 個以上の Hermite 行列の場合はどうなるかという問題があるが，対応する一般化は成り立たない．例えば

$$\mathrm{Tr}(e^{H_1+H_2+H_3}) \le \frac{1}{2}\{\mathrm{Tr}(e^{H_1}e^{H_2}e^{H_3}) + \mathrm{Tr}(e^{H_3}e^{H_2}e^{H_1})\}$$

も，また

$$\mathrm{Tr}(e^{H_1+H_2+H_3}) \le$$
$$\le \frac{1}{3}\{\mathrm{Tr}(e^{H_2/2}e^{H_1}e^{H_2/2}e^{H_3}) + \mathrm{Tr}(e^{H_3/2}e^{H_1}e^{H_3/2}e^{H_2}) + \mathrm{Tr}(e^{H_1/2}e^{H_2}e^{H_1/2}e^{H_3})\}$$

等も一般には正しくない．

$H_1, H_2, \dots, H_N$ を $n \times n$ Hermite 行列とする．全ての困難はこれらの非可換性に由来するわけであるから，これらを仮想的に可換化するために tensor 積を考えるのが自然であろう．e^{H_j} の代りに

$$I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underset{(j)}{e^{H_j}} \otimes I \otimes \cdots \otimes I$$

を考えると，可換化されて

$$e^{H_1} \otimes \cdots \otimes e^{H_N} = \prod_{j=1}^{N} I \otimes \cdots I \otimes \underset{(j)}{e^{H_j}} \otimes \cdots \otimes I \tag{1}$$

となる．これを log で変形すると

$$\log(e^{H_1} \otimes \cdots \otimes e^{H_N}) = \sum_{j=1}^{N} I \otimes \cdots I \otimes \underset{(j)}{H_j} \otimes \cdots \otimes I \tag{2}$$

となる．可換性より数の場合と同様にして，(1) から算術・幾何平均不等式

$$e^{H_1} \otimes \cdots \otimes e^{H_N} \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \underset{(j)}{e^{NH_j}} \otimes \cdots \otimes I \tag{3}$$

がでる．

仮想を現実に戻すために，ある基底（座標軸）を固定して各行列を行列要素で表示し，Hadamard 積（ i.e. 要素ごとの積）$\circ$ を考える:

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_N \longmapsto X_1 \circ \cdots \circ X_N \tag{4}$$

Hadamard 積に関しての最も基本的なのは次の Schur の積定理である（[9] 参照）:

$$A,\ B \geq 0 \implies A \circ B \geq 0. \tag{5}$$

定義から Hadamard 積演算は可換である： $A \circ B = B \circ A$. また A と単位行列 I との Hadamard 積は A の diagonal 行列となる．次の trivial な関係が重要である：

$$I \otimes \cdots I \otimes \underset{(j)}{A} \otimes \cdots \otimes I = A \circ I.$$

これからの考察で基本的なのは，対応 (4) が $\mathbb{M}_n \otimes \cdots \otimes \mathbb{M}_n$ から $\mathbb{M}_n$ への unital, (completely) positive linear map $\Phi(\cdot)$ に拡大されることである:

$$\Phi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_N) = X_1 \circ \cdots \circ X_N.$$

Unital, (completely) positive map の一般論から

$$\log \Phi(\mathbf{X}) \geq \Phi(\log \mathbf{X}) \qquad (\mathbf{X} > 0)$$

という逆 Jensen 型の不等式が成り立つので，(1) 及び (2) より次が出る:

$$\log(e^{H_1} \circ \cdots \circ e^{H_N}) \geq \{\sum_{j=1}^{N} H_j\} \circ I \tag{6}$$

同様に

$$\log(e^{-H_1} \circ \cdots \circ e^{-H_N})^{-1} \leq \{\sum_{j=1}^{N} H_j\} \circ I. \tag{7}$$

また (3) からは

$$e^{H_1} \circ \cdots \circ e^{H_N} \leq \{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{NH_j}\} \circ I \tag{8}$$

が導かれる．

$\mathcal{U} = \{$ unitary 行列の全体 $\}$ とし，$U \in \mathcal{U}$ を与えたとき各行列 X に

$$X(U) \equiv U^*XU \qquad (U \in \mathcal{U})$$

と書くと，$X \longmapsto X(U)$ は $*-$ 表現になり，どの unitarily invariant norm に関しても norm-preserving である．

さて，Hermite 行列 $\sum_{j=1}^N H_j$ はある $V \in \mathcal{U}$ で対角化できる：

$$\sum_{j=1}^N H_j(V) \circ I = (\sum_{j=1}^N H_j)(V) \circ I = \sum_{j=1}^N H_j(V)$$

したがって (6), (8) から

$$\log(e^{H_1(V)} \circ \cdots \circ e^{H_N(V)}) \geq \sum_{j=1}^N H_j(V)$$

及び

$$\{e^{-H_1(V)} \circ \cdots \circ e^{-H_N(V)}\}^{-1} \geq \{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N e^{-NH_j(V)}\}^{-1}$$

が得られる．これから

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \|e^{H_1(U)} \circ \cdots \circ e^{H_N(U)}\| \geq \|e^{H_1(V)} \circ \cdots \circ e^{H_N(V)}\| \geq \|e^{\sum_{j=1}^N H_j(V)}\| = \|e^{\sum_{j=1}^N H_j}\|,$$

及び (7) と次節での majorization の理論を使って

$$\begin{aligned}
\|e^{\sum_{j=1}^N H_j}\| &\geq \|e^{\{\sum_{j=1}^N H_j\} \circ I}\| \\
&\geq \sup_{U \in \mathcal{U}} \|\{e^{-H_1(U)} \circ \cdots \circ e^{-H_N(U)}\}^{-1}\| \geq \|\{e^{-H_1(V)} \circ \cdots \circ e^{-H_N(V)}\}^{-1}\| \\
&\geq \|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N e^{-NH_j(V)}\}^{-1}\| = \|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N e^{-NH_j}\}^{-1}\|
\end{aligned}$$

が得られる．これらをまとめると一つの Golden-Thompson 型不等式となる：

Theorem 1.

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} \|e^{H_1(U)} \circ \cdots \circ e^{H_N(U)}\| \geq \|e^{\sum_{j=1}^N H_j}\|, \tag{9}$$

$$\|e^{\sum_{j=1}^N H_j}\| \geq \sup_{U \in \mathcal{U}} \|\{e^{-H_1(U)} \circ \cdots \circ e^{-H_N(U)}\}^{-1}\| \geq \|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N e^{-H_j}\}^{-1}\|. \tag{10}$$

われわれは既に次のような事実を知っている：

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{\alpha Hj}\}^{N/\alpha} = e^{\sum_{j=1}^{N} H_j}, \tag{11}$$

$$\|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{\alpha H_j}\}^{N/\alpha}\| \searrow \|e^{\sum_{j=1}^{N} H_j}\| \qquad (\alpha\downarrow 0). \tag{12}$$

また対応して

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{-\alpha Hj}\}^{-N/\alpha} = e^{\sum_{j=1}^{N} H_j}, \tag{13}$$

$$\|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{-\alpha H_j}\}^{-N/\alpha}\| \nearrow \|e^{\sum_{j=1}^{N} H_j}\| \qquad (\alpha\downarrow 0). \tag{14}$$

一方 (8) および (10) から

$$\sup_{U\in\mathcal{U}} \|\{e^{\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{\alpha H_N(U)}\}^{1/\alpha}\| \le \|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{\alpha H_j}\}^{N/\alpha}\| \tag{15}$$

$$\sup_{U\in\mathcal{U}} \|\{e^{-\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-\alpha H_N(U)}\}^{-1/\alpha}\| \ge \|\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{-\alpha H_j}\}^{-N/\alpha}\| \tag{16}$$

であるので，次が収束定理が証明された：

Theorem 2.

$$\sup_{U\in\mathcal{U}} \|\{e^{\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{\alpha H_N(U)}\}^{1/\alpha}\| \searrow \|e^{\sum_{j=1}^{N} H_j}\| \quad (\alpha\downarrow 0) \tag{17}$$

及び

$$\sup_{U\in\mathcal{U}} \|\{e^{-\alpha H_1(U)}\circ\cdots\circ e^{-\alpha H_N(U)}\}^{-1/\alpha}\| \nearrow \|e^{\sum_{j=1}^{N} H_j}\| \quad (\alpha\downarrow 0) \tag{18}$$

が成り立つ.

2. Johnson-Bapat 予想

2 個の Hermite H, K 行列という特別な場合を考察しよう．この節の結果は主として[3]に基づいている．

Hermite H の固有値 $\lambda_j(H)$ はいつも大きい方から番号を付けることにする:

$$\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \cdots \geq \lambda_n(H).$$

また majorization に関して次の記号を使う:

$$\begin{aligned}
&H \succ K \overset{def}{\Longleftrightarrow} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(H) \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(K) \quad (k=1,2,\cdots,n), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(H) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(K) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \\
&\qquad \sum_{j=k}^{n} \lambda_j(H) \geq \sum_{j=k}^{n} \lambda_j(K) \quad (k=1,2,\cdots,n), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(H) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(K).
\end{aligned}$$

Majorization に関して知られている幾つかの基本的な事項について述べよう（詳しくは[2] 参照）:

(Schur) $H \succ H \circ I$, これから

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{H \circ I}) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{H}) \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{19}$$

(Araki-Hiai-Petz) ([1], [8] 参照)

$$\log(e^{H/2} e^{K} e^{H/2}) \succ H + K,$$

これから

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{H+K}) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{H/2} e^{K} e^{H/2}) \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{20}$$

2 つの positive definite な行列 A, B が与えれれたとき，$A \circ B$ の固有値と A, B それぞれの固有値のとの間の majorization 関係としては次が知られている．ここで AB と $A^{1/2}BA^{1/2}$ は similar であるから，固有値を共有し

$$\lambda_j(AB) = \lambda_j(A^{1/2}BA^{1/2}) > 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

であることに注意する．

(Bapat-Sunder) (Oppenheim 予想の解決 [5])

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\lambda_j(B) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{21}$$

一方，古典的な結果として次が知られている：

(Weyl-Horn)

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A)\lambda_j(B) \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{22}$$

したがって，次の結果は Bapat-Sunder の結果 (21) の改良となる：

Theorem 3. *(*Johnson-Bapat 予想 [10] の解決*)*

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB) \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{23}$$

［略証］ $A = e^H, B = e^K$ とする．

$$\begin{aligned} \log(A \circ B) &= \log(e^H \circ e^K) \\ &\geq \{\log(e^H) + \log(e^K)\} \circ I \\ &= (H + K) \circ I \qquad\qquad by \quad (4) \end{aligned}$$

これから更に

$$\begin{aligned} \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) &\geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{(H+K)\circ I}) \\ &\geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{H+K}) \qquad\qquad by \quad (19) \\ &\geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(e^{H/2}e^K e^{H/2}) \qquad by \quad (20) \\ &= \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB). \end{aligned}$$

Bapat-Sunder の結果は自然に N 個の Hadamard 積の場合に拡張されるが，Theorem 3 はあくまでも 2 個の場合に特殊な事実である．

Thoerem 3 の改良を試みよう．A, $B > 0$ に対して geometric mean $A\#B$ が定義される：

$$A\#B \equiv A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2} = B^{1/2}(B^{-1/2}AB^{-1/2})^{1/2}B^{1/2}.$$

明らかに

$$\begin{bmatrix} A & A\#B \\ A\#B & B \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} B & A\#B \\ A\#B & A \end{bmatrix} \geq 0$$

であるから Schur の積定理 (5) より次が出る:

$$A \circ B \geq (A\#B) \circ (A\#B). \tag{24}$$

もう一つ既知の事実を使おう:

(Hiai-Petz-Ando)([8], [4])

$$\prod_{j=l}^{n} \lambda_j(A\#B)^2 \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB) \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

一方 Theorem 3 から

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j((A\#B) \circ (A\#B)) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A\#B)^2 \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

であるから，次のような (23) の改良が得られる：

Theorem 4.

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A\#B)^2 \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{25}$$

最後に transpose に関する注意を述べる．Hermite 行列 B の transpose B^T は各要素を complex conjugate に変えたものに他ならない．

Theorem 5.

$$\prod_{j=k}^{n} \lambda_j(A \circ B) \geq \prod_{j=k}^{n} \lambda_j(AB^T) \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{26}$$

これは diagonal を考えと

$$\log(B^T) \circ I = (\log B)^T \circ I = \log(B) \circ I$$

なることから Theorem 3 と同様にして出る．

(26) で k = n の場合は Fiedler [6], [7] により示されている．

論文 [3] が受理されてから，G. Visick から [11] が送られてきた．その中では，本質的には同様な方法で Theorem 3 及び Theorem 5 が証明されている．

3. 文献

REFERENCES

1. H. Araki, *On an inequality of Lieb and Thirring*, Lett. Math. Phys. **19** (1990), 167–170.
2. T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues*, Linear Algebra Appl. **118** (1989), 163–248.
3. ———, *Majorization relations for Hadamard prodcuts*, Linear Algebra Appl. (to appear).
4. T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities*, Linear Algbera Appl. **197-198** (1993), 113–133.
5. R. B. Bapat and V. S. Sunder, *On majorization and Schur products*, Linear Algebra Appl. **72** (72), 107-117.
6. M. Fiedler, *Über eine Ungleichung für positive definite Matrizen*, Math. Nachrichten **23** (1963), 197-199.
7. ———, *A note on the Hadamard prodcuts of matrices*, Linear Algebra Appl. **49** (49), 233–235.
8. F. Hiai and D. Petz, *The Golden-Thompson trace inequality is complemented*, Linear Algebra Appl. **181** (1993), 153-185.
9. R. A. Horn, *The Hadamard prodcts*, Proc. Symp. in Appl. Math. **46** (1990), 89–169.
10. C. R. Johnson and R. B. Bapat, *A weak multiplicative majorization conjecture for Hadamard products*, Linear Algebra Appl. **104** (1988), 246–247.
11. G. Visick, *A weak majorization involving the matrices $A \circ B$ and AB*, Linear Algebra Appl. (to appear).

Nonlinear Ergodic Theorems

東工大　理　高橋　渉

1. Introduction

Hilbert 空間HからHへの極大単調作用素Aに対して，初期値問題は

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0, & 0 < t < \infty \\ u(0) = x \end{cases}$$

で定義されるが，これは一意の解$u: [0,\infty) \to H$を持つ。いま$x \in D(A)$と$t \geqq 0$に対して，$S(t)x = u(t)$で$S(t)$を定義すると，これは$D(A)$上の非拡大写像となり，$D(A)$の閉包$X = \overline{D(A)}$に一意に拡張できる（XはAが極大であることより凸集合となる）。このように定義されたX上の写像の族$\mathcal{S} = \{S(t) : t \geqq 0\}$はつぎの４つの条件：

(1) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $\forall x \in X$, $t, s \geqq 0$;

(2) $S(0)x = x$, $\forall x \in X$;

(3) 任意の$x \in X$に対して，$t \mapsto S(t)x$は連続である；

(4) $\|S(t)x - S(t)y\| \leqq \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$, $t \geqq 0$

を満たし，さらに

$$A^{-1}(0) = \bigcap_{t \geqq 0} F(S(t))$$

となる．ただし，$F(S(t))$は$S(t)$の不動点の集合である．

一般に，Sを semitopological semigroup とし，Xを Banach 空間E

の部分集合とするとき，X上で定義された非拡大な写像の族 $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$で，(1)，(3)のような条件を満たすものを$X$上の nonexpansive semigroup というが，ここではこのような non-expansive semigroup に対する非線形エルゴード定理をHilbert空間と一様凸なBanach空間の場合で紹介する．すなわち，$C(S)$をS上の連続有界関数のつくるBanach空間とし，$\{\mu_\alpha\}$を$C(S)^*$の asymptotically invariant な means のネットとするとき，X上の軌道$\{T_t x : t\in S\}$に対して，

$$(\mu_\alpha)_t\langle T_t x,\ y^*\rangle = \langle x_\alpha,\ y^*\rangle,\quad \forall y^*\in E^*$$

によって定義される$\{x_\alpha\}$は$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$の共通不動点に弱収束するということを証明する（一般には，このような条件のもとでは強収束しないような反例がある）．最初の非線形エルゴード定理は1975年にBaillon [1]によって，つぎのような形で証明された： CをHilbert空間Hの有界閉凸集合とし，TをCからCへの非拡大写像とする．このとき，$x\in C$に対し，$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^k x$は$T$の不動点に弱収束する．このあと，この定理は実数パラメータの nonexpansive semigroup の場合で証明されたが，ここで紹介する非線形エルゴード定理はこれらを同時に拡張するばかりか，新しい形のエルゴード定理を得るのにも有効である．非線形エルゴード定理は最近では非線形最適化問題や像再生の問題などに応用されている．

2. 非線形エルゴード定理

まずHilbert空間における不動点定理と非線形エルゴード定理から述べることにしよう．その前に，いくつかの定義と記法を与えることにする．S を semitopological semigroup，すなわちHausdorff位相をもった半群で，任意の $s\in S$ に対して，$t\mapsto s\cdot t$，$t\mapsto t\cdot s$ がともに連続であるものとする．$B(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体で，ノルムは $\|f\|=\sup_s|f(s)|$ で与えられるBanach空間とする．X は $B(S)$ の subspace で 1 を含むものとする．このとき，$\mu\in X^*$（X^* は X の共役空間）が mean であるとは，$\|\mu\|=\mu(1)=1$ を満たすときをいう．$\mu\in X^*$ が mean である必要十分条件は

$$\inf_s f(s)\leqq\mu(f)\leqq\sup_s f(s),\ {}^\forall f\in X$$

であることはよく知られた事実である[11]．時と場合に応じて，$f\in X$ における μ の値を $\mu_t(f(t))$ と書く場合がある．$s\in S$ と $f\in B(S)$ に対して，$l_s f$，$r_s f$ が

$$(l_s f)(t)=f(st),\ (r_s f)(t)=f(ts),\ {}^\forall t\in S$$

で与えられる．X が 1 を含む $B(S)$ の subspace で，$l_s X\subset X$ であるとき，mean $\mu\in X^*$ は

$$\mu(f)=\mu(l_s f),\ {}^\forall s\in S,\ f\in X$$

を満たすなら left invariant であるといわれる．同様に right invariant mean も定義できる．invariant meanとは right かつ

left invariant な mean のことである．S が可換であるなら invariant mean は常に存在する [11]．つぎに Hilbert 空間での nonexpansive semigroup の定義を与えておこう．$C \subset H$ 上で定義された写像の族 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ が C 上の nonexpansive semigroup であるとは，(1) $T_{st}x = T_s T_t x$, $\forall s, t \in S$, $x \in C$; (2) $x \in C$ を固定したとき，$s \mapsto T_s x$ が連続である ; (3) $s \in S$ を固定したとき，$\|T_s x - T_s y\| \leqq \|x - y\|$, $\forall x, y \in C$ の3つの条件を満たすときである．$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ の共通不動点の全体は $F(\mathcal{S})$ で表される．非線形エルゴード定理を与える前にもう少し定義をしておこう．$C(S)$ は S 上の有界連続関数全体の集合であり，$RUC(S)$ は

$$RUC(S) = \{f \in C(S) : s \mapsto r_s f \text{ は連続}\}$$

で定義される 1 を含む $C(S)$ の closed subalgebra である．また，l_s, r_s のもとで invariant であることも知られている [6]．$\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし，ある $x \in C$ に対して，$\{T_s x : s \in S\}$ が有界であるとする．このとき，$u \in C$ と $v \in H$ に対して，関数 $f(t) = \|T_t u - v\|^2$ と $g(t) = \langle T_t u, v \rangle$ が $RUC(S)$ の元になることは Lau [5] によって知られている．最後に $RUC(S)$ 上の means の net $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ が asymptotically invariant であるとは，任意の $f \in RUC(S)$ と $s \in S$ に対して

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f) \to 0, \quad \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \to 0$$

が成り立つことである．l^∞ の元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ に対して，$\mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とすると，$\{\mu_n : n=1, 2, \cdots\}$ は asymptotically invariant な means の列となる．いまや Hilbert空間における一般的な非線形エルゴード定理を述べることにしよう。

定理　C を Hilbert空間 H の空でない部分集合とし，S を RUC(S) が invariant mean をもつような semitopological semigroup とする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし，ある $x\in C$ に対して，$\{T_t x : t\in S\}$ は有界で，

$$\bigcap_s \overline{co}\{T_{st}x : t\in S\}\subset C$$

となるものとする．このとき，$F(\mathcal{S})\neq\phi$ である．また，$\{\mu_\alpha : \alpha\in A\}$ を RUC(S) 上の asymptotically invariant な means の net とするとき，$\{T_{\mu_\alpha}x : \alpha\in A\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．ただし，$T_{\mu_\alpha}x$ は $(\mu_\alpha)_t\langle T_t x, y\rangle=\langle T_{\mu_\alpha}x, y\rangle, \forall y\in H$ を満たすただ1つの元である。

この定理はこれまでの種々の非線形エルゴード定理を一般化するばかりか，新しいエルゴード定理を得るのにも有効である．

C 上の nonexpansive semigroup の定義の(3)のかわりに，(3)′ $s\in S$ に対して，$\|T_s x-T_s y\|\leqq k_s\|x-y\|, \forall x, y\in C$ となる $k_s\geqq 0$ が存在する；で置きかえると，半群 $\mathcal{S}=\{T_s : s\in S\}$ は C 上の Lipschitzian semigroup といわれるが，これに対する共通不動点定理として

次のものがある．

定理　C を Hilbert 空間 H の空でない部分集合とし，X を 1 を含む $B(S)$ の subspace で，left invariant な submean をもつものとする．$\mathcal{S}=\{T_s : s\in S\}$ は C 上の Lipschitzian semigroup で，ある $x\in C$ に対して，$\{T_t x : t\in S\}$ は有界で，

$$\bigcap_s \overline{co}\{T_{st}x : t\in S\}\subset C$$

となるものとする．このとき，$u\in C$ と $v\in H$ に対して，関数 $f(t)=\|T_t u-v\|^2$, $h(t)=k_t^2$ が X の元となり，$\mu_t(k_t^2)\leqq 1$ となるならば，$T_s z=z, \forall s\in S$ となる $z\in C$ が存在する．

上の定理で submean とは "mean" と "lim sup" の概念を一般化したもので [7, 10]，この定理によって，S が left reversible である場合の不動点定理と，S が left amenable である場合の不動点定理が同時に証明されたことになる．

非線形問題を Banach 空間で取り扱うと一般には難しくなるが，非線形エルゴード定理もやはり Banach 空間の凸性やノルムの微分可能性などと関わりを持ち，非常に難しくなる．Banach 空間の非線形エルゴード定理を述べる前に定義を１つ与えておく．X を $B(S)$ の subspace で，1 を含み，$r_s(X)\subset X$ とする．このとき，X 上の連続線形汎関数のネット $\{\mu_\alpha\}$ が strong regular であるとは，(1) $\sup_\alpha\|\mu_\alpha\|<+\infty$；(2) $\lim_\alpha \mu_\alpha(1)=1$；
(3) $\lim_\alpha\|\mu_\alpha-r_s^*\mu_\alpha\|=0$, $\forall s\in S$ を満たすときをいう．

定理（Hirano-Kido-Takahashi [4]） E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とする．S を可換な semi-topological semigroup とし，X を $B(S)$ の subspace で，1 を含み，$r_s(X) \subset X$ なるものとする．C を E の closed convex 集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする．$u \in C$ と $x^* \in E^*$ に対して，関数 $f(s) = \langle T_s u, x^* \rangle$ は X に属するとし，$F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする．このとき，C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction P で，$PT_t = T_t P = P$, $\forall t \in S$ かつ $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ を満たすものが存在する．さらに，$\{\mu_\alpha\}$ を X^* の元からなる strongly regular なネットとし，$x \in C$ とすると，$T_{\mu_\alpha} x$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．

この定理の証明では，集合

$$\bigcap_s \overline{co}\{T_t x : t \geqq s\} \cap F(\mathcal{S})$$

がただ1点からなるということが本質的である．

References

[1] J. B. Baillon, Un théorème de type ergodic pour les contractions non linéares dans un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 280 (1975), 1511–1514.

[2] ——, Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 283 (1976), 75–78.

[3] Hirano, N., Kido, K. and W. Takahashi, Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 10 (1986), 229–249.

[4] ——, Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269–1281.

[5] A.T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space; J. Math. Analysis, 105 (1985), 514–522.

[6] T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, Illinois J. Math., 14 (1970), 630–641.

[7] Mizoguchi, N. and W. Takahashi, On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69–80.

[8] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253–256.

[9] ——, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 55–58.

[10] ——, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, Canadian J. Math., 44 (1992), 880–887.

[11] 高橋 渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

部分完全正値行列の CP completion について

古田　公司（武蔵工大）

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ を, 頂点の集合 $\mathcal{V}$ と 辺の集合 $\mathcal{E}$ をもつ位数 n の有限な無向グラフとする. すなわち $\mathcal{V} = \{1, \cdots, n\}$, $\mathcal{E} \subset \{(i,j) : i,j \in \mathcal{V}\}$ として, $\mathcal{E}$ は条件 (A) $(1,1), \cdots, (n,n) \in \mathcal{E}$, (B) $(i,j) \in \mathcal{E} \Rightarrow (j,i) \in \mathcal{E}$ をみたすものである.

n 次行列において, $(i,j) \in \mathcal{E}$ なる (i,j)-成分が確定している行列を $\mathcal{G}$-部分行列という. 成分がスカラー (あるいは $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素) の部分行列の completion については Dym, Gohberg [2], Grone, Johnson, Sá, Wolkowicz [4], Paulsen, Power, Smith [7] 等多くの研究がある. 例えば, スカラーを成分にもつ $\mathcal{G}$-部分行列は, その確定している成分から得られる各主小行列がすべて正値のとき $\mathcal{G}$-部分正値行列とよばれるが, Grone らは $\mathcal{G}$-部分正値行列の positive completion について次を示した.

<u>定理</u> ([4, Theorem 7]) $\mathcal{G}$ を有限な無向グラフとする. このとき (スカラーを成分にもつ) $\mathcal{G}$-部分正値行列が positive completion を持つための必要十分条件は $\mathcal{G}$ が chordal であることである. ここで $\mathcal{G}$ が chordal であるとは, 長さが 4 以上の cycle はすべて chord をもつことである.

次に $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体, $M_n = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ として, M_n の部分空間 $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{S}_\mathcal{G} = \{[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n : (i,j) \notin \mathcal{E} \text{ ならば } a_{ij} = 0\}$$

で定める. $\Phi = [T_{ij}]_\mathcal{G}\,(T_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ を $\mathcal{G}$-部分行列とし, $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ の $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ への写像 Λ_Φ を $\Lambda_\Phi([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = [a_{ij}T_{ij}]_{i,j=1}^n$ (ただし $(i,j) \notin \mathcal{E}$ なる (i,j) 成分は 0 とする) で定めるとき, Paulsen らは次を証明した.

<u>定理</u> ([7, Corollary 1.3]) 部分行列 Φ が positive completion をもつための必要十分条件は写像 Λ_Φ が完全正値であることである.

以下では Paulsen らの考察を一般化して C^*-代数の上の完全有界写像を成分にもつ部分行列の completion を考える.

<u>1. CP completion と グラフ</u>

$\mathcal{A}$ を単位元をもつ C^* 代数, $CB(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ を $\mathcal{A}$ の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への完全有界写像の全体とする. 最初に $CB(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ の元を成分にもつ $\mathcal{G}$-部分行列を考える. $CB(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ の元を成分にもつ n 次行列 $[\widetilde{\varphi}_{ij}]$ が $\mathcal{G}$-部分行列 $[\varphi_{ij}]_\mathcal{G}$ の CP completion であるとは

(i) $(i,j) \in \mathcal{E}$ ならば $\varphi_{ij} = \widetilde{\varphi}_{ij}$;

(ii) $\mathcal{A}$ の元を成分にもつ n 次行列の C^*-代数 $M_n(\mathcal{A})$ から $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ への写像 $[\widetilde{\varphi}_{ij}] : [a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto [\widetilde{\varphi}_{ij}(a_{ij})]_{i,j=1}^n$ が完全正値写像

となるときをいう.

スカラーの場合と同様にして, $\mathcal{G}$-部分行列 Φ の確定した成分から得られる各主小行列がすべて完全正値であるとき Φ を $\mathcal{G}$-部分完全正値行列という. $\mathcal{G}$-部分行列が CP completion をもつならばそれは $\mathcal{G}$-部分完全正値行列であるが, 逆は一般には成立しない. 最初にすべての $\mathcal{G}$-部分完全正値行列が CP completion をもつようなグラフ $\mathcal{G}$ を特徴づける.

<u>定理 1.1.</u> $\mathcal{G}$ を有限な無向グラフとする. このとき $CB(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ の元を成分にもつすべての $\mathcal{G}$-部分完全正値行列が CP completion をもつための必要十分条件は $\mathcal{G}$ が chordal であることである.

証明は次の命題 1.2, 1.3 と Grone らの定理の議論から得ることができる.

<u>命題 1.2.</u> ([8, Proposition 2.6]) $(\pi,\mathcal{K})$ を $\mathcal{A}$ の表現, $V\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ からヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ への有界線形作用素で $\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}$ が $\mathcal{K}$ で稠密であるものとする. $T_{ij}\,(i,j=1,\cdots,n)$ を $\pi(\mathcal{A})$ の可換子 $\pi(\mathcal{A})'$ の作用素として $\varphi_{ij}\in CB(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ を $\varphi_{ij}(a)=V^*T_{ij}\pi(a)V$ で定める. このとき $\Phi([a_{ij}]_{i,j=1}^n)=[\varphi_{ij}(a_{ij})]_{i,j=1}^n$ で定まる $M_n(\mathcal{A})$ の $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ への写像 Φ が完全正値であることと $[T_{ij}]_{i,j=1}^n\in M_n(B(\mathcal{K}))$ が正であることは同値である.

<u>命題 1.3.</u> $[\varphi_{ij}]_{\mathcal{G}}\,(\varphi_{ij}\in CB(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathcal{H})))$ を $\mathcal{G}$-部分行列とする. このとき $\mathcal{A}$ の表現 $(\pi,\mathcal{K})$, 作用素 $V\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ で $\pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}$ が $\mathcal{K}$ で稠密となるもの, および $T_{ij}\in\pi(\mathcal{A})'$ が存在して

$$\varphi_{ij}(a)=V^*T_{ij}\pi(a)V,\quad a\in\mathcal{A},\quad (i,j)\in\mathcal{E}$$

とかける.

<u>2. functional matrices の CP completion</u>

ここでは特別な場合として有界線形汎関数を成分にもつ $\mathcal{G}$-部分行列の CP completion について考察する. 線形汎関数を成分にもつ部分行列に対しては, CP completion と positive completion は同等であることがわかる.

<u>命題 2.1.</u> $\varphi_{ij}\in\mathcal{A}^*(i,j=1,\cdots,n)$ とする. このとき写像 $[\varphi_{ij}]:[a_{ij}]_{i,j=1}^n\in M_n(\mathcal{A})\to[\varphi_{ij}(a_{ij})]_{i,j=1}^n\in M_n$ が正値ならば, 完全正値である.

実際より一般的なことが成り立つ. 最初に次の命題を準備する.

<u>命題 2.2.</u> $\varphi_{ij}\in CB(\mathcal{A},\mathcal{B}(\mathcal{H}))\,(i,j=1,\cdots,n)$ に対し次は互いに同値:
(i) $\Phi=[\varphi_{ij}]:[a_{ij}]_{i,j=1}^n\in M_n(\mathcal{A})\mapsto[\varphi_{ij}(a_{ij})]_{i,j=1}^n\in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ が完全正値;
(ii) $\Gamma_\Phi:[a_{ij}]_{i,j=1}^n\in M_n(\mathcal{A})\mapsto\sum_{i,j=1}^n\varphi_{ij}(a_{ij})\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ が完全正値;
(iii) $\Phi^{(0)}:a\in\mathcal{A}\mapsto[\varphi_{ij}(a)]_{i,j=1}^n\in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ が完全正値.

(証明) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) のみ示す. (i) $\Rightarrow$ (ii). 写像 $\theta:M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $[a_{ij}]_{i,j=1}^n\mapsto\sum_{i,j=1}^n a_{ij}$ で定めると θ は完全正値である. よって $\Gamma_\Phi=\theta\circ\Phi$ は完全正値である.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $e_{ij}\,(i,j=1,\cdots,n)$ を M_n の標準的行列単位とする. このとき $M_n(\mathcal{A})$ と $\mathcal{A}\otimes M_n$ は写像 $[a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\otimes e_{ij}$ により同一視される. 今写像 $\iota : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(M_n(\mathcal{A}))$ を $[a_{ij}]_{i,j=1}^n \mapsto [a_{ij}\otimes e_{ij}]_{i,j=1}^n$ で定めると, ι は完全正値であり, $\Phi = (\Gamma_\Phi \otimes id_n)\circ\iota$ となる. したがって ι は完全正値である. (証終)

<u>系 2.3.</u> $m \geq 1$ とし, $\varphi_{ij} : \mathcal{A} \to M_m\,(i,j=1,\cdots,n)$ を有界線形写像とする. このとき写像 $[\varphi_{ij}] : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(M_m)$ が m-正値ならば, 完全正値である.

(証明) $\theta : M_n(M_m) \to M_m$ は完全正値だから $\Gamma_\Phi = \theta\circ\Phi : M_n(\mathcal{A}) \to M_m$ は m-正値である. 一般に C^*-代数から M_m への m-正値写像は完全正値だから Γ_Φ は完全正値となり, したがって命題 2.2 (ii) $\Rightarrow$ (i) より Φ は完全正値となる. (証終)

系 2.3 で $m=1$ とおくと命題 2.1 が得られる. 一方, 定義域が有限次元の場合には次を得る.

<u>系 2.4.</u> $m \geq 1$ とし, $\varphi_{ij} : M_m \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\,(i,j=1,\cdots,n)$ を有界線形写像とする. このとき写像 $[\varphi_{ij}] : M_n(M_m) \to M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ が m-正値ならば, 完全正値である.

(証明) M_m から C^*-代数への m-正値写像は完全正値であるということを用いて, 命題 2.2 (iii) $\Rightarrow$ (i) を適用する. (証終)

グラフ $\mathcal{G} = (\mathcal{V},\mathcal{E})$ に対し $M_n(\mathcal{A})$ の部分空間 $\mathcal{S}_\mathcal{G}(A)$ を

$$\mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \{[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(\mathcal{A}) : (i,j)\notin\mathcal{E}\ \text{ならば}\ a_{ij}=0\}$$

で定める. $\mathcal{G}$ が無向グラフであることから $\mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A})$ は自己共役であり, $M_n(\mathcal{A})$ の単位元をもつ. 次に $\mathcal{G}$-部分行列 $\Phi = [\varphi_{ij}]_\mathcal{G}\,(\varphi_{ij}\in A^*)$ に対し, 写像 $\Lambda_\Phi : \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to M_n$, $\Gamma_\Phi : \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ をそれぞれ

$$\Lambda_\Phi([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = [\varphi_{ij}(a_{ij})]_{i,j=1}^n,$$
$$\Gamma_\Phi([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij}(a_{ij}), \quad [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A})$$

で定める. ここで $(i,j)\notin\mathcal{E}$ のときは $\varphi_{ij}(a_{ij})=0$ とする. このとき有界線形汎関数を成分にもつ $\mathcal{G}$-部分行列が CP completion を持つための条件について次の定理が得られる.

<u>定理 2.5.</u> $\Phi = [\varphi_{ij}]_\mathcal{G}\,(\varphi_{ij}\in\mathcal{A}^*)$ を $\mathcal{G}$-部分行列とするとき, 次は互いに同値:

(i) Φ が positive completion をもつ;
(ii) $\Lambda_\Phi : \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to M_n$ が正値;
(iii) $\Gamma_\Phi : \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ が正値;
(iv) $\mathcal{A}$ の表現 $(\pi,\mathcal{K})$ とベクトル $\xi_1,\cdots,\xi_n\in\mathcal{K}$ が存在して, $(i,j)\in\mathcal{E}$ に対し $\varphi_{ij}(\cdot) = \langle\pi(\cdot)\xi_j,\xi_i\rangle$ とかける.

(証明) (iii) $\Rightarrow$ (iv) のみ示す. Γ_Φ が正値であるとすると, Krein の定理から $M_n(\mathcal{A})$ 上の正の汎関数 $\widetilde{\Gamma}_\Phi$ で, $A \in \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A})$ に対し $\widetilde{\Gamma}_\Phi(A) = \Gamma_\Phi(A)$ となるものが存在する. $\widetilde{\Gamma}_\Phi$ に Gelfand-Naimark-Segal 構成定理を用いると, $M_n(\mathcal{A})$ の表現 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ と $\xi \in \mathcal{H}_\rho$ が存在して $\widetilde{\Gamma}_\Phi(A) = \langle \rho(A)\xi, \xi \rangle$, $A \in M_n(\mathcal{A})$ となる. $e_{ij}\,(i,j = 1, \cdots, n)$ を M_n の標準的行列単位として $\mathcal{H}_\rho$ の閉部分空間 $\mathcal{K}$ を $\mathcal{K} = \rho(1 \otimes e_{11})\mathcal{H}_\rho$ で定める. 次に $\mathcal{A}$ の表現 $(\pi, \mathcal{K})$ とベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathcal{K}$ を $\pi(a) = \rho(a \otimes e_{11})|_\mathcal{K}$, $\xi_i = \rho(1 \otimes e_{1i})\xi$ で定める. このとき $(i,j) \in \mathcal{E}$ に対しては $a \otimes e_{ij} \in \mathcal{S}_\mathcal{G}(\mathcal{A})$ であるから

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij}(a) &= \Gamma_\Phi(a \otimes e_{ij}) \\
&= \widetilde{\Gamma}_\Phi(a \otimes e_{ij}) \\
&= \langle \rho(a \otimes e_{ij})\xi, \xi \rangle \\
&= \langle \pi(a)\xi_j, \xi_i \rangle
\end{aligned}$$

となり, $\varphi_{ij}(a) = \langle \pi(a)\xi_j, \xi_i \rangle$ を得る. (証終)

3. Completely bounded multipliers

2. の議論を局所コンパクト群の Fourier 代数の completely bounded multiplier の場合に応用する. 以下 G を局所コンパクト群, $C^*(G)$ を G の群 C^* 代数とする. G 上の関数 φ で, G のユニタリー表現 $(\pi, \mathcal{K})$ と $\xi, \eta \in \mathcal{K}$ により $\varphi(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle\ (x \in G)$ と表わされるものの全体を $B(G)$ で表わす. $B(G)$ は G 上の正定値関数の全体 $P(G)$ の線形結合と一致する. $B(G)$ は $C^*(G)$ の双対空間 $C^*(G)^*$ と同一視され, この同一視から得られる双対ノルムにより, G 上各点ごとの積に関して Banach 代数となる. 特に G の左正則表現 $(\lambda, L^2(G))$ と $g, h \in L^2(G)$ により $u(x) = \langle \lambda(x)h, g \rangle\ (x \in G)$ と表わされる関数 u の全体を $A(G)$ で表わすと, $A(G)$ は $B(G)$ の閉イデアルとなる. $A(G)$ を G の Fourier 代数と呼ぶ. $A(G)$ の双対空間は G の群 von Neumann 代数 $VN(G)$ と同一視される.

G 上の関数 φ が $A(G)$ の multiplier であるとは, 任意の $u \in A(G)$ に対し $\varphi u \in A(G)$ となるものをいう. この場合閉グラフ定理より, φ による掛け算は $A(G)$ 上の有界線形作用素となる. $A(G)$ の multiplier φ が completely bounded multiplier であるとは, φ の共役作用素 $\mathcal{M}_\varphi$ が $VN(G)$ 上の完全有界写像となるときをいう. $A(G)$ の completely bounded multiplier の全体を $M_0A(G)$ で表わす. 一般に $B(G) \subset M_0A(G)$ である.

最初に $B(G)$ の元を成分にもつ行列について考察する.

<u>補題 3.1.</u> $A_{ij}, B_{ij} \in M_n\,(i,j = 1, \cdots, k)$ とする. このとき行列 $[A_{ij}]_{i,j=1}^k$, $[B_{ij}]_{i,j=1}^k$ が $M_k(M_n)$ において正ならば $[\mathrm{Tr}(A_{ij}B_{ji})] \in M_k$ も正である. ここで Tr はトレースを表わす.

<u>命題 3.2.</u> $\varphi_{ij} \in B(G)\,(i,j = 1, \cdots, n)$ とするとき, 次は互いに同値:

(i) $[\varphi_{ij}] : M_n(C^*(G)) \to M_n$ が正値;

(ii) M_n値関数 $x \in G \mapsto \Phi(x) = [\varphi_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$ が正定値. ここで Φ が正定値であるとは, 任意の $m \geq 1$ と 任意の $x_1, \cdots, x_m \in G$ に対し行列 $[\Phi(x_i^{-1}x_j)]_{i,j=1}^m \in M_m(M_n)$ が正になるときをいう;

(iii) $[\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}] : M_n(VN(G)) \to M_n(VN(G))$ が完全正値.

(証明) (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) のみ示す. (ii) $\Rightarrow$ (iii). 各 $k \geq 1$ に対し $[\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}]$ が k-正値であることを示す. このためには, $a_1, \cdots, a_{nk} \in VN(G)$, $\xi_1, \cdots, \xi_{nk} \in L^2(G)$ に対し行列

$$\mathbf{A} = \left[\langle \mathcal{M}_{\varphi_{ij}}(a^*_{n(p-1)+i}a_{n(q-1)+j})\xi_{n(q-1)+j}, \xi_{n(p-1)+i}\rangle\right]_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq p,q\leq k}}$$

が $M_k(M_n)$ で正であることを示せば十分である. ここで $a_s = \sum_{r=1}^m \alpha_{r,s}\lambda(x_r)$ ($\alpha_{r,s} \in \mathbb{C}$, $X_r \in G$) と仮定してよい. 右辺の行列を等式 $\mathcal{M}_\varphi(\lambda(x)) = \varphi(x)\lambda(x)$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [\mathrm{Tr}(A_{ij}B_{(q,j),(p,i)})]_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq p,q\leq k}},\\ A_{ij} &= [\varphi_{ij}(x_r^{-1}x_{r'})]_{r,r'=1}^m,\\ B_{(p,i),(q,j)} &= [\langle \xi_{r,n(p-1)+i}, \xi_{r',n(q-1)+j}\rangle]_{r,r'=1}^m\end{aligned}$$

となる. 仮定より $[A_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(M_m)$, $[B_{(p,i),(q,j)}]_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq p,q\leq k}} \in M_{nk}(M_m)$ は正だから補題 3.1 より $\mathbf{A}$ は正であることがわかる.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). $k \geq 1$, $x_1, \cdots, x_k \in G$ に対し $[\varphi_{ij}(x_s^{-1}x_t)]_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq s,t\leq k}}$ が正なることをいう. ベクトル $\xi \in L^2(G)$, $||\xi||_2 = 1$ をとり, $\alpha_{1,1}, \cdots, \alpha_{k,n} \in \mathbb{C}$ とする.

$$\varphi_{ij}(x_s^{-1}x_t) = \langle \mathcal{M}_{\varphi_{ij}}(\lambda(x_s^{-1}x_t))\lambda(x_t^{-1})\xi, \lambda(x_s^{-1})\xi\rangle$$

だから, $\xi_s = \lambda(x_s^{-1})\xi$, $\eta_{si} = \alpha_{s,i}\xi_s$ とおくと

$$\begin{aligned}&\left\langle [\varphi_{ij}(x_s^{-1}x_t)]_{\substack{1\leq i,j\leq n\\1\leq s,t\leq k}} \begin{pmatrix}\alpha_{1,1}\\ \vdots \\ \alpha_{k,n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_{1,1}\\ \vdots \\ \alpha_{k,n}\end{pmatrix}\right\rangle\\ &\qquad = \left\langle [\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}] \otimes id_k\left([A_{st}]_{s,t=1}^k\right)\begin{pmatrix}\eta_{1,1}\\ \vdots \\ \eta_{k,n}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_{1,1}\\ \vdots \\ \eta_{k,n}\end{pmatrix}\right\rangle \geq 0\end{aligned}$$

となる. ここで $A_{st} \in M_k(VN(G))$ は成分がすべて $\lambda(x_s^{-1}x_t)$ の行列を表わす. (証終)

次に完全有界写像 $\mathcal{M}_\varphi$ ($\varphi_{ij} \in M_0A(G)$) を成分にもつ $\mathcal{G}$-部分行列が CP completion をもつための条件を与える. 一般に写像 $\mathcal{M}_\varphi$ が完全正値であることと $\varphi \in P(G)$ であることが同値であることから, $\mathcal{G}$-部分行列 $[\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}]_\mathcal{G}$ が CP completion をもつな

らば $\varphi_{ij} \in B(G)$ となることがわかる. したがって定理 2.5, 命題 3.2 より次の定理を得る.

定理 3.3. $[\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}]_{\mathcal{G}}\,(\varphi_{ij} \in B(G))$ を $\mathcal{G}$-部分行列とするとき, 次は互いに同値:

(i) $[\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}]_{\mathcal{G}}$ が完全有界写像 $\mathcal{M}_{\varphi}$ による CP completion をもつ;

(ii) $\Phi = [\varphi_{ij}]_{\mathcal{G}}$ が positive completion をもつ;

(iii) $\Lambda_{\Phi} : \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(C^*(G)) \to M_n$ が正値;

(iv) $\Gamma_{\Phi} : \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(C^*(G)) \to \mathbb{C}$ が正値;

(v) G のユニタリー表現 $(\pi, \mathcal{K})$ とベクトル $\xi_1, \cdots, \xi_n \in \mathcal{K}$ が存在して, $(i,j) \in \mathcal{E}$ に対し $\varphi_{ij}(\cdot) = \langle \pi(\cdot)\xi_j, \xi_i \rangle$ とかける.

次の条件 (i') が定理 3.3 の各条件と互いに同値であるということは自然に予想される:

(i') $[\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}]_{\mathcal{G}}$ が $VN(G)$ 上の完全有界写像による CP completion をもつ.

実際, 特殊な群に対しては予想が正しいことが示される. 局所コンパクト群 G が amenable (resp. inner amenable) であるとは, $L^\infty(G)$ 上の状態 m で, 任意の $f \in L^\infty(G)$, $x \in G$ に対し $m({}_xf) = m(f)$ (resp. $m({}_{x^{-1}}f_x) = m(f)$) となるものが存在するときをいう. ここで ${}_xf(y) = f(xy)$, ${}_{x^{-1}}f_x(y) = f(x^{-1}yx)$ である. すべてのコンパクト群, 可解群 (特に可換群) は amenable である. またすべての離散群, amenable な群は inner amenable である. 一方連結な群に対しては, amenable であることと inner amenable であることは同等である [5].

定理 3.4. G が amenable, または unimodular, inner amenable のとき, 定理 3.3 の条件 (i) と条件 (i') は互いに同値である.

(証明) (i') $\Rightarrow$ (i) を示せば十分である. $[\Psi_{ij}]\,(\Psi_{ij} \in CB(VN(G), \mathcal{B}(L^2(G))))$ を $\mathcal{G}$-部分行列 $\Phi = [\mathcal{M}_{\varphi_{ij}}]_{\mathcal{G}}$ の CP completion とする. 最初に G が amenable であるとする. ベクトル $\xi \in L^2(G)$, $\|\xi\|_2 = 1$ を固定する. $x, y \in G$, $1 \leq i, j \leq n$ に対し, G 上の関数 $\varphi_{ij}^{x,y}$ を

$$\varphi_{ij}^{x,y}(z) = \langle \Psi_{ij}(\lambda(y^{-1}x))\lambda(x^{-1}z)\xi, \lambda(y^{-1}z)\xi \rangle, \quad z \in G$$

で定める. 次に m を $L^\infty(G)$ 上の不変状態とし, G 上の関数 $\psi_{ij}\,(i,j = 1, \cdots, n)$ を $\psi_{ij}(y^{-1}x) = m(\varphi_{ij}^{x,y})\,(x, y \in G)$ で定める. m が不変であることから ψ_{ij} は well-defined である. また $(i,j) \in \mathcal{E}$ に対しては $\varphi_{ij} = \psi_{ij}$ となる. さらに関数 $x \in G \mapsto [\psi_{ij}(x)]_{i,j=1}^n \in M_n$ は正定値である. したがって命題 3.2 より $[\mathcal{M}_{\psi_{ij}}]$ が Φ の CP completion となる.

次に G が inner amenable であるとする. このとき群 von Neumann 代数 $VN(G)$ 上に有限なトレース τ が存在する. $\tau(1) = 1$ とする. このとき G 上の関数 $\psi_{ij}\,(i,j = 1, \cdots, n)$ を $\psi_{ij}(x) = \tau(\Psi_{ij}(\lambda(x))\lambda(x)^*)\,(x \in G)$ で定めると, $(i,j) \in \mathcal{E}$ に対しては

$\varphi_{ij} = \psi_{ij}$ であり，さらに補題 3.1 から関数 $x \in G \mapsto [\psi_{ij}(x)]_{i,j=1}^n \in M_n$ が正定値であることかわかる．よって命題 3.2 より $[\mathcal{M}_{\psi_{ij}}]$ が Φ の CP completion となる．(証終)

参考文献

1. J. de Cannière and U. Haagerup, Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups, Amer. J. Math. **107** (1984), 455–500.
2. H. Dym and I. Gohberg, Extensions of band matrices with band inverses, Linear Algebra Appl. **36** (1981), 1–24.
3. P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 181–236.
4. R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sá and H. Wolkowicz, Positive definite completions of partial Hermitian matrices, Linear Algebra Appl. **58** (1984), 109–124.
5. A. T. Lau and A. L. T. Paterson, Inner amenable locally compact groups, Trans. Amer. Math. Soc. **325** (1991), 155–169.
6. V. I. Paulsen, "Completely bounded maps and dilations", Pitman Research Notes in Mathematics Series, 146, Longman Scientific & Technical, 1986.
7. V. I. Paulsen, S. Power and R. R. Smith, Schur products and matrix completions, J. Funct. Anal. **85** (1989), 151–178.
8. V. Paulsen and C.-Y. Suen, Commutant representations of completely bounded maps, J. Operator Theory **13** (1985), 87–101.

Singularly Positive Definite Sequences と
モーメント問題 (truncated) の解の端点

伊藤隆司　（武蔵工大）

I **Trigonometric Moments.** $\{c_0,c_1,\cdots,c_N\}$ を positive definite な複素数列とします。すなわち、次の Toeplitz 行列 T_Nが正行列であるとします。

$$(1)\qquad T_N=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_N \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{N-1} \\ & \cdots & & \\ c_{-N} & c_{-N+1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix} > 0 \qquad (ここに、c_{-k}=\overline{c_k}\ ,\ 0\leqq k\leqq N\ )$$

この列に対して、N次までのモーメントが c_n と一致する単位円周上の正測度 μ ：

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}d\mu(\theta) = c_n \qquad (0\leqq n\leqq N)$$

を表現測度又は解と呼びます。このとき、表現測度の全体 $\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ は weak * compact な凸集合です。以下で、$\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ の端点を問題にします。

1. singularly positive definite seqences （ s.p.d. 列）.　まず、$\{c_0,\cdots,c_N\}$　を拡張することを考えます。zを付け加えた列$\{c_0,\cdots,c_N,z\}$ に従属した Toeplitz 行列 $T_{N+1}(z)$について、

$$T_{N+1}(z)=\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} & & \\ & T_N & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} z \\ c_N \\ \cdot \\ c_1 \end{matrix} \\ \hline \bar{z}\ \ c_{-N}\ \cdots\ c_{-1} & c_0 \end{array}\right]$$

これの行列式と小行列式との関係（ Sylvester の定理）から、次の等式が成立します。

$$(2)\qquad |T_{N-1}|\,|T_{N+1}(z)| = |T_N|^2 - |T_{N-1}|^2\,|z-c|^2$$

ここに、

$$c=\frac{(-1)^N}{|T_{N-1}|}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N & 0 \\ c_0 & c_1 & & c_{N-1} & c_N \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & \cdots & & \\ \cdot & & & & \\ c_{-N+1} & c_{-N+2} & \cdots & c_0 & c_1 \end{vmatrix}$$

この (2) から、$\{c_0, \cdots, c_N, z\}$ が positive definite であるための必要かつ十分条件はzが半径が $\frac{|T_N|}{|T_{N-1}|} > 0$、中心がcである円の内部にあることがわかります。しかし、z をこの円周上にとるときには $\{c_0, \cdots, c_N, z\}$ は non−negative definite ですが strictly には positive definite でないことになります。そこで、次の定義を導入します。複素数列 $\{d_0, \cdots, d_M, d_{M+1}\}$ が **singularly positive definite** （**s.p.d.**）であるとは $\{d_0, \cdots, d_M\}$ は strictly positive definite であり、かつ $\{d_0, \cdots, d_M, d_{M+1}\}$ は non−negative definite であるが strictly には positive definite でないこととします。上の考察から、positive definite な列 $\{c_0, \cdots, c_N\}$ から出発して、それを任意の長さの singularly positive definite な列 $\{c_0, \cdots c_N, \cdots c_M, c_{M+1}\}$ $(N \leq M)$ に拡張することが可能なことがわかります。この拡張列を単に $\{c_0, \cdots, c_N\}$ の **singular extension** と呼ぶことにします。

2. s.p.d. 列の表現測度． $\{c_0, \cdots, c_M, c_{M+1}\}$を s.p.d. 列とします。ここで示したいことは、この列は唯一つの表現測度を持ち、それは離散測度で、その台と重みは M+1 次までのモーメント c_n（$0 \leq n \leq M+1$）によって具体的に決められることです。そのためには準備を必要とします。

M+1 次以下の多項式全体 Π_{M+1} に普通のようにして non−negative definite な内積が入ります。

$$[A(z),B(z)] = \sum_{n,m=0}^{M+1} c_{n-m} a_n \overline{b_m} \quad \left(A(z)=\sum_{n=0}^{M+1} a_n z^n,\ B(z)=\sum_{n=0}^{M+1} b_n z^n\right)$$

しかし、M 次以下の多項式全体Π_M（$\subset \Pi_{M+1}$）上では、$\{c_0, \cdots, c_M\}$の positive definite より、普通の意味の内積が入っています。よく知られているように、Π_M の正規直交基底として、次の$P_n(z)$（$0 \leq n \leq M$）があります。

$$(3) \qquad P_0(z)=1\ ,\ P_n(z)=\frac{1}{\sqrt{|T_{n-1}||T_n|}} \begin{vmatrix} & c_M \\ & \cdot \\ T_{M-1} & c_1 \\ 1, z, \cdots & z^{M+1} \end{vmatrix} \qquad (1 \leq n \leq M)$$

これらの$P_n(z)$ の外に、M+1 次の多項式 $P_{M+1}(z)$ を次のように定義します。

$$(4) \qquad P_{M+1}(z)=\frac{1}{|T_M|} \begin{vmatrix} & c_{M+1} \\ & c_M \\ T_M & \cdot \\ & c_1 \\ 1\ z \cdots & z^{M+1} \end{vmatrix}$$

$\{c_0, \cdots, c_M, c_{M+1}\}$の singularity より、任意の $A(z) \in \Pi_{M+1}$ に対して

$$[A(z), P_{M+1}(z)]=0$$

となっています。次に、Π_M における evaluation polynomial $E_M^w(z)$ を用いるのが、以下の議論にとって便利です。任意の $A(z) \in \Pi_M$ に対して $[A(z), E_M^w(z)]=A(w)$となる多項式 $E_M^w(z)$ が存在しますが、知られているように、$E_M^w(z)$ の具体的な形は

(5) $$E_M^w(z)=\frac{-1}{|T_M|}\left|\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & T_M & & \bar{w} \\ & & & \cdot \\ & & & \bar{w}^M \\ \hline 1 & z & \cdot\cdot & z^M \quad 0 \end{array}\right|$$

となります。

3つの多項式 $P_{M+1}(z)$, $P_M(z)$, $E_M^w(z)$ の間に、次の (6) の関係が成立します。これは、positive definite の場合に知られている Christoffel−Darboux formula の singularly positive definite の場合への対応と考えられるものです。

Lemma *次の等式が成立する（ Christoffel−Darboux formula と呼ぶことにします）*

(6) $$(1-\bar{w}z)E_M^w(z)=\overline{P_{M+1}(0)}E_M^w(0)P_{M+1}(z)-\sqrt{\frac{|T_{M-1}|}{|T_M|}}\,\overline{P_{M+1}(w)}zP_M(z)$$

略証　M次の多項式 $\frac{|T_{M-1}|}{|T_M|}P_{M+1}(z)-\sqrt{\frac{|T_{M-1}|}{|T_M|}}zP_M(z)$ が $E_M^0(z)$ の定数倍であることが示されて、まず次が成立します。

(7) $$\frac{|T_{M-1}|}{|T_M|}P_{M+1}(z)=\sqrt{\frac{|T_{M-1}|}{|T_M|}}zP_M(z)+P_{M+1}(0)E_M^0(z)$$

次に、この式と singularity $[P_{M+1}(z),P_{M+1}(z)]=0$ より $|P_{M+1}(0)|=1$ が示されます。これを用いて、証明すべき等式 (6) の　左辺 ― 右辺 $=R(z,w)$ が、zについてM次の多項式で、さらに定数項が0であることがわかります。このことから、$R(z,w)$ の $P_n(z)$ （$0\leqq n\leqq M$ ）についての展開の係数がすべて0であることが示され、$R(z,w)\equiv 0$ が結論されます。

Christoffel−Darboux formula (6) の結果として、次の (8), (9) が出ます。

(8) 　$P_{M+1}(z)$ の根はすべて単位円周上にあり、単根です。
（しかし、$P_M(z)$ の根はすべて単位円の内部にあることを注意します）

(9) 　$P_{M+1}(z)$ の根を $a_1,a_2,\cdot\cdot\cdot,a_{M+1}$ とするとき、$\frac{1}{\sqrt{E_M^{a_k}(a_k)}}E_M^{a_k}(z)$ （$1\leqq k\leqq M+1$ ）は Π_M の正規直交基底をつくります。

(8), (9) より次の定理が容易に示されます。

Theorem 1. *$\{c_0,\cdot\cdot\cdot,c_M,c_{M+1}\}$ を s.p.d. 列とします。このとき、この列は唯一の表現測度を持ち、その表現測度　μ は次で与えられます。*

a)　*μ の台は $P_{M+1}(z)$ の根　$a_1,a_2,\cdot\cdot\cdot,a_{M+1}$ です。*

b)　*μ の点 a_k における重みは $\frac{1}{E_M^{a_k}(a_k)}>0$ （$1\leqq k\leqq M+1$ ）です。*

すなわち、

$$(10)\qquad \mu=\sum_{k=1}^{M+1}\frac{1}{E_M^{a}{}^k(a_k)}\delta_{a_k}$$

この　μ を以下 $\mu(c_0,\cdots,c_M,c_{M+1})$ と書くことにします。

3. $\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ **の端点．** $\{c_0,c_1,\cdots,c_N\}$ を positive definite な列とします。まず、次のことに注意します。

Lemma. *$\mu\in\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ に対して、次は同値です。*

a) *μ が $\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ の端点である*
b) *$L^1(\mu)$ は $\{e^{\pm in\theta}\,|\,0\leq n\leq N\}$ から生成される。*
c) *μ は台が 2N+1 個以下の点よりなる離散測度である。*

$\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ の端点は次のようになります。

Theorem 2. *$\mathfrak{M}(c_0,\cdots,c_N)$ の端点の全体は長さが２倍以下の singular extension $\{c_0,\cdots c_N,\cdots c_M,c_{M+1}\}$ $(N\leq M\leq 2N)$ の表現測度 $\mu(c_0,\cdots,c_M,c_{M+1})$ の全体と一致する。*

II Power Moments. $\{s_0,\cdots,s_{2N}\}$ を positive definite な実数列とします。すなわち、次の Hankel 行列 H_Nを正行列とします。

$$H_N=\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_{N+1} \\ & & \cdot & \cdot & \\ s_N & s_{N+1} & \cdot & \cdot & s_{2N} \end{bmatrix} > 0$$

この列に対して、２Ｎ次までのモーメントが s_n $(0\leq n\leq 2N)$ と一致する実数直線上の正測度μ ：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^n d\mu(x)=s_n\quad(0\leq n\leq 2N)$$

が表現測度又は解と呼ばれます。表現測度の全体 $\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})$ は凸集合ですが、 trigonometric moments の場合と違って、 weak * compact ではありません。しかし、$\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})$ の端点については、trigonometric moments の場合と全く同様な結果が成立します。大部分の議論では Toeplitz 行列が Hankel 行列に代わるだけです。

実数列 $\{s_0,\cdots,s_{2M},s_{2M+1},s_{2M+2}\}$ が singularly positive definite （ s.p.d. ）であるとは $\{s_0,\cdots,s_{2M}\}$ は strictly に positive definite であり、かつ $\{s_0,\cdots,s_{2M},s_{2M+1},s_{2M+2}\}$ は non−negative definite であるが strictly positive definite でないこととします。与えられた positive definite な列 $\{s_0,\cdots,s_{2N}\}$ から出発して、任意の長さの s.p.d. 列 $\{s_0,\cdots,s_{2M},s_{2M+1},s_{2M+2}\}$ に拡張することは可能です。この拡張をもとの列の singular extension と呼ぶこと等 trigonometric moments の場合と同様です

1. s.p.d. 列の表現測度． $\{s_0,\cdots,s_{2M},s_{2M+1},s_{2M+2}\}$ を s.p.d. な列とします。必要な多項式で、 trigonometric moments の場合に対応しているものをあげますと、(11) が Π_M の正規直交基底、(12) が Π_M の evaluation polynomial $E_M^{w}(z)$ です。

$$(11)\quad P_0(x)=1,\ P_n(x)=\frac{1}{\sqrt{|H_{n-1}|\,|H_n|}}\left|\begin{array}{c|c} H_{n-1} & \begin{matrix} s_n \\ s_{n+1} \\ \cdot \\ s_{2n-1}\end{matrix} \\ \hline 1\ x\ \cdot\ \cdot\ \cdot & x^n \end{array}\right| \quad (1\leqq n\leqq M)$$

$$(12)\quad E_M^{w}(x)=\frac{-1}{|H_M|}\left|\begin{array}{c|c} H_M & \begin{matrix} 1 \\ \overline{w} \\ \cdot \\ \overline{w}^M\end{matrix} \\ \hline 1\ x\ \cdot\ \cdot\ x^M & 0 \end{array}\right|$$

次の多項式 $P_{M+1}(z)$（ M+1 次）が表現測度の台を決める多項式となります。

$$(13)\quad P_{M+1}(x)=\frac{1}{|H_M|}\left|\begin{array}{c|c} H_M & \begin{matrix} s_{M+1} \\ s_{M+2} \\ \cdot \\ s_{2M+1}\end{matrix} \\ \hline 1\ x\cdot\ \cdot\ \cdot & x^{M+1} \end{array}\right|$$

Christoffel−Darboux formula に対応するものは次のようになります。

$$(14)\quad (x-\overline{w})E_M^{w}(x)=\sqrt{\frac{|H_{M-1}|}{|H_M|}}\left[\overline{P_M(w)}P_{M+1}(x)-\overline{P_{M+1}(w)}P_M(x)\right]$$

この等式から次の (15), (16) が出ます。

(15) $P_{M+1}(x)$ の根はすべて実数直線上にあり、単根です。

(16) $P_{M+1}(x)$ の根を $a_1,a_2,\cdot\cdot\cdot,a_{M+1}$ とするとき、$\dfrac{1}{\sqrt{E_M^{a_k}(a_k)}}E_M^{a_k}(z)$ （$1\leqq k\leqq M+1$）は Π_M の正規直交基底をつくります。

Theorem 3. *$\{s_0,\cdot\cdot\cdot,s_{2M},s_{2M+1},s_{2M+2}\}$ を s.p.d. な列とします。このとき、この列は唯一つの表現測度 μ を持ち、それは次で与えられます。*

a) μ の台は $P_{M+1}(x)$ の根 $a_1,a_2,\cdot\cdot\cdot,a_{M+1}$ です。

b) μ の点 a_k における重みは $\dfrac{1}{E_M^{a_k}(a_k)}>0$ （$1\leqq k\leqq M+1$）です。

すなわち、

$$(17)\quad \mu=\sum_{k=1}^{M+1}\frac{1}{E_M^{a_k}(a_k)}\delta_{a_k}$$

（これを $\mu(s_0,\cdots,s_{2M+2})$ *と書くことにします）。*

2. $\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})$ **および** $\mathfrak{M}^*(s_0,\cdots,s_{2N})$ **の端点．** $\{s_0,\cdots,s_{2N}\}$ を positive definite とします。まず、trigonometric moments の場合と同じように、次が成立します。

Theorem 4. $\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})$ *の端点の全体は長さが2倍以下の singular extension* $\{s_0,\cdots,s_{2M},s_{2M+1},s_{2M+2}\}$ *（$N\leqq M\leqq 2N$）の表現測度* $\mu(s_0,\cdots,s_{2M+2})$ *の全体と一致する。*

次に、$\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})$ は weak *位相で閉でないだけでなく、norm 位相でも、常に閉ではないことがわかります。すなわち、次のことが成立します。

Theorem 5. $\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})$ *は常に norm 位相で閉ではなく、その閉包は norm 位相と weak *位相で同一であり、次の b) が成立する。*

a) $\overline{\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})}^{\,norm}=\overline{\mathfrak{M}(s_0,\cdots,s_{2N})}^{\,weak*}=\mathfrak{M}^*(s_0,\cdots,s_{2N})$

b) $\mathfrak{M}^*(s_0,\cdots,s_{2N})=\left\{\mu\geqq 0 \text{ on } \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{+\infty}x^k d\mu(x)=s_k(0\leqq k\leqq 2N-1)\text{かつ}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2N}d\mu(x)\leqq s_{2N}\right\}$

$\mathfrak{M}^*(s_0,\cdots,s_{2N})$ の端点については次の Theorem 6 が成立します。そのために、一つの呼び方を導入します。$\{s_0,\cdots,s_{2N}\}$ に対して、s.p.d. 列 $\{t_0,\cdots,t_{2M},t_{2M+1},t_{2M+2}\}$（$N\leqq M$）で $t_k=s_k$（$0\leqq k\leqq 2N-1$）かつ $t_{2N}\leqq s_{2N}$ となるものを dominated singular extension と呼ぶことにします。

Theorem 6. $\mathfrak{M}^*(s_0,\cdots,s_{2N})$ *の端点全体は次のいずれかの s.p.d. 列* $\{t_0,\cdots,t_{2M},t_{2M+1},t_{2M+2}\}$ *の表現測度* $\mu(t_0,\cdots,t_{2M+2})$ *の全体と一致する。*

a) $N-1\leqq M\leqq 2N-1$ *で dominated singular extension*

又は

b) $M=2N$ *で singular extension*

以上

一つ一つ関係箇所を指摘しませんでしたが、次の論文を参照しました。

[1] N.I.Akhiezer, *The classical moment problem,* Oliver & Boyd,Edinburgh,1965

[2] R.G.Douglas, *On extremal measures and subspace density,* Michigan Math.J.11(1964),243−246

[3] U.Grenander and G.Szegö, *Toeplitz forms and their applications,*University of California Press,Berkeley,1958

[4] M.G.Krein, *The idea of P.L.Chebyshev and A.A.Markov in the theory of limiting values of integrals and their further development,* Uspehi Math.Nauk(N.S.)6(1951),3−120;Amer.Math.Soc. Transl.Ser.2,12(1959)1−122

[5] H.J.Landau, *The classical moment problem:Hilbertian methods,*J.Funct.Anal.38(1980)255−272

[6] H.J.Landau, *Maximum entropy and the moment problem,* Bull.Amer.Math.Soc.,vol.16,no.1,(1987) 47−77

終りに、この発表内容は有本彰雄氏（武蔵工大、経営工学）との協同研究であることを申し添えます。

Pointwize Ergodic Theorem For Order Preserving Mapping

Yumiko Takeuchi
Nippon Steel Corporation

1 Introduction

Recently, pointwise convergence of "nonlinear average" of mappings in $L^1(E,\mu)$ has been studying (see [2], [4] and [5]), and interesting ergodic theorems for the average were obtained. One of them is an ergodic theorem by M.Lin and R.Wittmann [4]. Their result reads as follows; Let T be an order preserving , order continuous, L^1 norm decreasing, L^∞ nonexpansive and positively homogeneous mapping on $L^1(E,\mu)$ of a σ-finite measure space, let A_nf is defined by $S_0f = f,\ S_nf = f + T(S_{n-1}f)\ (n \in \mathrm{N})$ and $A_nf = \frac{1}{n+1}S_nf\ (n \in \{0\} \cup \mathrm{N})$, and let $1 < p < \infty$. If T has no invariant functions except 0 in $L^p(E,\mu)$, nonlinear average A_nf of T converges to 0 almost everywhere for any $f \in L^p(E,\mu)$. The other is R.Wittmann's pointwise ergodic theorem [5] which says that for an order preserving, integral preserving, positively homogeneous and L^∞ nonexpansive mapping on $L^1(E,\mu)$ with $\mu(E) < \infty$, and for any $f \in L^1(E,\mu)$ the above average A_nf of T converges to an element of $L^1(E,\mu)$ almost everywhere.

In this paper, we investigate the almost everywhere convergence of the average A_nf of T for the case that the mapping T on $L^1(E,\mu)$ of a σ-finite measure space has a strictly positive invariant function. Our result (Theorem 3.1) includes R.Wittmann's ergodic theorem, and is applicable to more generalized mappings. And we give an example of a mapping (Example 3.4) which is not integral preserving, but which satisfies all the assumptions of our theorem.

2 Absorbing sets, invariant sets and a maximal ergodic lemma

Throuhout this paper (E,μ) is a σ-finite measure space, and $L^1(E,\mu)$ is simply denoted by L^1 and $L^1(E,\mu)_+ = \{f \in L^1 | f \geq 0\}$ by L^1_+. And expressions involving measurable functions or sets have to be understood in the almost everywhere sense. We write $(f \vee g)(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$, $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}$, and $f_+ = f \vee 0,\ \ f_- = f \wedge 0$ for measurable functions $f,\ g$.

We also use the shorthand notation $\{f \geq 0\}$ for $\{x \in E | f(x) \geq 0\}$. Next we define the relevant properties for a mapping T on L^1_+ ; T is said to be order preserving if

$$f \geq g \implies Tf \geq Tg \ \ (f,\ g \in L^1).$$

T is called integral preserving on L^1_+ if

$$\int Tf d\mu = \int f d\mu \ \ (f \in L^1_+).$$

Note that an order preserving mapping which is integral preserving on L^1_+ is nonexpansive on L^1_+; see [3]. T is said to be positively homogeneous on L^1_+ if $T(\alpha f) = \alpha Tf$ $(f \in L^1_+,\ \alpha \geq 0)$.

From now on T will always be an order preserving mapping on L^1, and we put

$$F(T)_+ = \{k \in L^1_+ | Tk = k\}$$

and

$$SF(T)_+ = F(T)_+ \cap \{k \in L^1_+ | k > 0\ (a.e.)\}.$$

A measurable set $A \subset E$ is called absorbing with respect to T, if $\chi_{E\setminus A} T(\chi_A f) = 0$ $(\forall f \in L^1_+)$, and is called invariant with respect to T, if $SF(T)_+ \neq \emptyset$ and $\chi_A k \in F(T)_+$ $(\forall k \in SF(T)_+)$. In ergodic theory, absorbing sets and invariant sets play an important role.

LEMMA 2.1 *If T is integral preserving and positively homogeneous on L^1_+, and $SF(T)_+ \neq \emptyset$, then the following three conditions are equivalent:*

(i) $A \subset E$ *is absorbing* ;
(ii) $A \subset E$ *is invariant* ;
(iii) $\exists k \in SF(T)_+$ *s.t.* $\chi_A k \in F(T)_+$.

PROOF. We will show that (iii) implies (i). We set $E_n = A \cap \{k \geq 1/n\}$ $(n \in \mathrm{N})$, then we have $0 \leq \chi_{E_n} \leq n\chi_A k$. We first assume that $f \in L^1_+$ is bounded i.e. there exists $M > 0$ such that $0 \leq f \leq M$. $0 \leq \chi_{E_n} f \leq Mn\chi_A k$ implies $0 \leq T(\chi_{E_n} f) \leq Mn\chi_A k$ because T is positively homogeneous on L^1_+ and $\chi_A k \in F(T)_+$. Hence $\chi_{E\setminus A} T(\chi_{E_n} f) = 0$ holds for any $n \in \mathrm{N}$. Since T is nonexpansive on L^1_+, we have $\chi_{E\setminus A} T(\chi_A f) = 0$. If $f \in L^1_+$ is arbitrary, setting $f_m = f \wedge m$ $(m \in \mathrm{N})$, we have $\chi_{E\setminus A} T(\chi_A f_m) = 0$ for any $m \in \mathrm{N}$. Therefore we obtain $\chi_{E\setminus A} T(\chi_A f) = 0$. □

REMARK 2.2 The last part of the proof above which shows that (iii) $\implies$ (i) holds if T is nonexpansive and positively homogeneous on L^1_+, and $SF(T)_+ \neq \emptyset$.

For T and any $f \in L^1$ we define

$$S_n^* f = \sup_{0 \le j < n} S_j f \quad (n \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}).$$

PROPOSITION 2.3 *Let T be nonexpansive on L^1_+ and $T0 = 0$, and let there exist $h_0 \in L^1_+$ such that $T(\alpha h_0) \le \alpha h_0$ for any $\alpha > 0$. Then, for any $f \in L^1$ and $D = \{S^*_\infty f = \infty\}$, we have*

$$\lim_{t \to \infty} \|\frac{1}{t} T(t\chi_D h_0) - \chi_D h_0\| = 0.$$

PROOF. We put $S_{-1} f = 0$, then $f = S_j f - T(S_{j-1} f) \ge S_j f - T((S_n^* f)_+)$ $(0 \le j < n)$. Hence $f \ge S_n^* f - T((S_n^* f))$ $(n \in \mathrm{N})$ holds, and $(S_n^* f)_+ \le f_+ + T((S_n^* f)_+)$ follows. Since T is norm decreasing on L^1_+, we have

$$\|T((S_n^* f)_+) + f_+ - (S_n^* f)_+\| \le \|T((S_n^* f)_+)\| + \|f_+\| - \|(S_n^* f)_+\| \le \|f_+\|.$$

Therefore

$$\|(S_n^* f)_+ - T((S_n^* f)_+)\| \le 2\|f_+\|. \tag{1}$$

We set $g_{n,t} = (S_n^* f)_+ \wedge th_0$ for any $n \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ and $t > 0$. Then (1) implies

$$\|g_{n,t} - T((S_n^* f)_+) \wedge th_0\| \le 2\|f_+\| \tag{2}$$

for $n \in \mathrm{N}$ and $t > 0$. Since $g_{n,t} \le (S_n^* f)_+$ and $g_{n,t} \le th_0$, we have

$$Tg_{n,t} \le T((S_n^* f)_+) \wedge th_0. \tag{3}$$

Using (1) and (2), we have

$$\|Tg_{n,t}\| \ge \|T((S_n^* f)_+) \wedge th_0\| - 4\|f_+\|.$$

Because of (3),

$$\|T((S_n^* f)_+) \wedge th_0 - Tg_{n,t}\| \le 4\|f_+\|. \tag{4}$$

Together with (2), we obtain

$$\|g_{n,t} - Tg_{n,t}\| \le 6\|f_+\| \quad (n \in \mathrm{N}). \tag{5}$$

And therefore

$$\|g_{\infty,t} - Tg_{\infty,t}\| \le 6\|f_+\| \quad (t > 0). \tag{6}$$

Because $\chi_D g_{\infty,t} = \chi_D(th_0)$, we have

$$\frac{1}{t}\|g_{\infty,t} - t\chi_D h_0\| = \|\frac{1}{t}\chi_{E \setminus D} g_{\infty,t}\|. \tag{7}$$

Hence we have

$$\lim_{t \to \infty} \|\frac{1}{t}\chi_{E \setminus D} g_{\infty,t}\| = 0. \tag{8}$$

Because of (6) and (7),

$$\|\frac{1}{t}T(t\chi_D h_0) - \chi_D h_0\| \leq 2\|\frac{1}{t}\chi_{E\setminus D} g_{\infty,t}\| + \frac{6}{t}\|f_+\|.$$

Therefore $\lim_{t\to\infty} \|\frac{1}{t}T(t\chi_D h_0) - \chi_D h_0\| = 0$ follows from (8). $\square$

COROLLARY 2.4 *Let T be nonexpansive and positively homogeneous on L^1_+, and let $SF(T)_+ \neq \emptyset$ hold. Then the set D is absorbing for any $f \in L^1$.*

PROPOSITION 2.5 *Let T be integral preserving and positively homogeneous on L^1_+, and let $SF(T)_+ \neq \emptyset$ hold. Then, for any invariant set A of E, we have*

$$\int \chi_{E\setminus A} Tf d\mu \leq \int \chi_{E\setminus A} f d\mu \quad (f \in L^1_+).$$

PROOF. Since A is absorbing by Lemma 2.1, $T(\chi_A f) \leq \chi_A Tf$ for any $f \in L^1_+$. Hence we obtain the above inequality. $\square$

The following theorem is a maximal ergodic lemma for order preserving mappings.

THEOREM 2.6 *Let T be an order preserving mapping on L^1 and let A be a measurable set of E such that*

$$\int \chi_A Tg d\mu \leq \int \chi_A g d\mu \quad (\forall g \in L^1_+).$$

Let further there exist $k_0 \in SF(T)_+$ such that $nk_0 \in SF(T)_+$ for every $n \in N$. Then, for any $f \in L^1$ and $D = \{S^*_\infty f = \infty\}$, we have

$$\int_D \chi_A f d\mu \geq 0.$$

PROOF. Since $(Tf - k)_+ \leq T(f \vee k) - k$ for $k \in SF(T)_+$ and any $f \in L^1$, we have

$$\int \chi_A (Tf - k)_+ d\mu \leq \int \chi_A (f - k)_+ d\mu. \tag{9}$$

Setting $D_n = \{S^*_n f > k\}$ ($n \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$), we will prove first that

$$\int_{D_n} \chi_A f d\mu \geq 0 \quad (n \in \mathrm{N}). \tag{10}$$

As shown in the proof of Proposition 2.3, we have $f \geq S^*_n f - T((S^*_n f)_+)$ ($n \in \mathrm{N}$). Thus

$$
\begin{aligned}
\chi_{D_n} f &\leq \chi_{D_n}(S_n^* f)_+ - \chi_{D_n} T((S_n^* f)_+) \\
&= \chi_{D_n}\{(S_n^* f)_+ - k\} - \chi_{D_n}\{T((S_n^* f)_+) - k\} \\
&\leq \{(S_n^* f)_+ - k\}_+ - \{T((S_n^* f)_+) - k\}_+.
\end{aligned}
$$

Integrating this ineqality on A and using (9), we obtain (10). Since $D_n \uparrow D_\infty$ we have

$$\int_{D_\infty} \chi_A f d\mu \geq 0. \tag{11}$$

Applying (11) with $k = nk_0$, the assertion follows from $\{S_\infty^* f > nk_0\} \downarrow D$. □

3 Pointwise ergodic theorem

For an order preserving mapping T on L^1 we define a mapping $\tilde{T}$ on L^1 by setting $\tilde{T} f = -T(-f)$ $(f \in L^1)$. And define $\tilde{S}_n$, $\tilde{S}_n^*$ $(n \in \mathrm{N} \cup \{\infty\})$ analogously. And we denote $L_+^1 \cup (-L_+^1)$ by $L_\pm^1$.

THEOREM 3.1 *Let an order preserving mapping T on L^1 of a σ-finite measure space satisfying the following;*

(i) *T is nonexpansive and positively homogeneous on $L_\pm^1$.*

(ii) *There exists $k_0 \in SF(T)_+$ such that*

$$T(f + tk_0) = Tf + tk_0 \quad (\forall f \in L^1, \forall t \in R). \tag{12}$$

And let there exist an order preserving mapping T_0 on L^1 satisfying the following;

(i) *T_0 is integral preserving and positively homogeneous on $L_\pm^1$.*

(ii) *$T \leq T_0$ on L_+^1 and $T \geq T_0$ on $-L_+^1$.*

Then, for any $f \in L^1$, the average $A_n f$ of T converges a.e. to an element of L^1.

PROOF. Let $f \in L^1$ be given. We assume

$$\mu(\{\liminf_n A_n f < \limsup_n A_n f\}) > 0.$$

Since $k_0 > 0$, there exist α, $\beta \in \mathrm{R}$ such that

$$\mu(\{\liminf_n A_n f < \alpha k_0 < \beta k_0 < \limsup_n A_n f\}) > 0. \tag{13}$$

Because of (12), we have $S_n(f - \beta k_0) = S_n f - (n+1)\beta k_0$ and $\tilde{S}_n(\alpha k_0 - f) = (n+1)\alpha k_0 - \tilde{S}_n f$. Hence

$$\overline{E} = \{S_\infty^*(f - \beta k_0) = \infty\} \supset \{\limsup_n A_n f > \beta k_0\},$$

and

$$\underline{E} = \{S_\infty^*(\alpha k_0 - f) = \infty\} \supset \{\liminf_n A_n f < \alpha k_0\}.$$

Thus (13) implies

$$\mu(\overline{E} \cap \underline{E}) > 0. \tag{14}$$

Because $\underline{E}$ is absorbing with respect to $\tilde{T}$ by Corollary 2.4 and $\tilde{T}(\chi_{\underline{E}} k_0) \le \chi_{\underline{E}} k_0$ as shown in the proof of Lemma 2.1, we have $T(\chi_{E \backslash \underline{E}} k_0) \ge \chi_{E \backslash \underline{E}} k_0$. Since $T \le T_0$ on L_+^1 and T_0 is integral preserving, we have $k_0 \in SF(T_0)_+$ and $T(\chi_{E \backslash \underline{E}} k_0) = \chi_{E \backslash \underline{E}} k_0$. Then $E \backslash \underline{E}$ is invariant with respect to T_0 by Lemma 2.1. By Proposition 2.5 and $T \le T_0$ on L_+^1, we have

$$\int \chi_{\underline{E}} T g d\mu \le \int \chi_{\underline{E}} g d\mu \quad (g \in L_+^1).$$

Therefore, by Theorem 2.6, we obtain

$$\int_{\overline{E}} \chi_{\underline{E}}(f - \beta k_0) d\mu \ge 0. \tag{15}$$

Since $\tilde{T} \le \tilde{T}_0$ on L_+^1, we obtain

$$\int_{\underline{E}} \chi_{\overline{E}}(\alpha k_0 - f) d\mu \ge 0 \tag{16}$$

by replacing T by $\tilde{T}$, $f - \beta k_0$ by $\alpha k_0 - f$. Then we have

$$(\alpha - \beta) \int_{\overline{E} \cap \underline{E}} k_0 d\mu \ge 0,$$

this contradits $\alpha < \beta$ because of (14). Hence $A_n f$ converges a.e..
We set $f^* = \lim_{n\to\infty} A_n f$, $(f_+)^* = \lim_{n\to\infty} A_n(f_+)$, $(-f_-)^* = \lim_{n\to\infty} A_n(-f_-)$ and denote the average of T_0 by $(A_0)_n f$. Using Fatou's lemma, we obtain

$$\begin{aligned} \int (f^*)_+ d\mu &\le \int (f_+)^* d\mu \le \liminf_n \int A_n(f_+) d\mu \\ &\le \liminf_n \int (A_0)_n (f_+) d\mu = \int f_+ d\mu < \infty \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int (f^*)_- d\mu &\le -\int (-f_-)^* d\mu \le -\limsup_n \int A_n(-f_-) d\mu \\ &\le -\limsup_n \int (A_0)_n (-f_-) d\mu = \int f_- d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Therefore f^* belongs to L^1. This completes the proof. □

COROLLARY 3.2 *Let T be integral preserving and positively homogeneous on $L^1_{\pm}$, and let there exist $k_0 \in SF(T)_+$ such that*

$$T(f + tk_0) = Tf + tk_0 \quad (\forall f \in L^1, \forall t \in R). \tag{17}$$

Then, for any $f \in L^1$, the average $A_n f$ converges a.e. to an element f^* of L^1. Further we have

$$\int f^* d\mu = \int f d\mu,$$

$A_n f$ converges to f^* in L^1 norm, and f^* is an invariant function with respect to T.

PROOF. By Theorem 3.1, it is clear that $A_n f$ converges to $f^* \in L^1$ a.e.. We define $L^1(k_0)$ by $\{f \in L^1 | f + tk_0 \in L^1_{\pm}, \exists t \in \mathrm{R}\}$, then T is integral preserving and positively homogeneous on $L^1(k_0)$. For an arbitrary $f \in L^1$, setting $\underline{f}_m = f \wedge mk_0 \in L^1(k_0)$ and $\overline{f}_m = f \vee (-mk_0) \in L^1(k_0)$ $(m \in \mathrm{N})$, we have

$$\int \underline{f}_m d\mu = \int T\underline{f}_m d\mu \leq \int Tf d\mu \leq \int T\overline{f}_m d\mu = \int \overline{f}_m d\mu.$$

Because $\lim_{m\to\infty} \int \underline{f}_m d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \overline{f}_m d\mu = \int f d\mu$, we obtain $\int Tf d\mu = \int f d\mu$. And therefore T is nonexpansive on L^1, hence we have

$$\|T(\alpha f) - \alpha Tf\| \leq \|T(\alpha f) - T(\alpha \underline{f}_m)\| + \|T(\alpha \underline{f}_m) - \alpha T\underline{f}_m\| + \|\alpha T\underline{f}_m - \alpha Tf\| \leq 2\|f - \underline{f}_m\|.$$

As $m \to \infty$, we obtain $T(\alpha f) = \alpha Tf$ $(\alpha \geq 0)$.
Setting $\lim_{n\to\infty} A_n \underline{f}_m = \underline{f}_m{}^*$, and $\lim_{n\to\infty} A_n \overline{f}_m = \overline{f}_m{}^*$, we have $\underline{f}_m{}^* \leq f^* \leq \overline{f}_m{}^*$. Since $A_n \underline{f}_m \leq A_n(mk_0) = mk_0$ and $A_n \overline{f}_m \geq A_n(-mk_0) = -mk_0$ $(n \in \mathrm{N})$, by Fatou's lemma, we have

$$\int \underline{f}_m{}^* d\mu \geq \limsup_n \int A_n \underline{f}_m d\mu = \int \underline{f}_m d\mu$$

and

$$\int \overline{f}_m{}^* d\mu \leq \liminf_n \int A_n \overline{f}_m d\mu = \int \overline{f}_m d\mu.$$

Hence we obtain $\int f^* d\mu = \int f d\mu$. Setting $f_m = (f \wedge mk_0) \vee (-mk_0)$ $(m \in \mathrm{N})$ and $\lim_{n\to\infty} A_n f_m = f_m^*$, $A_n f_m$ converges to f_m^* in L^1 norm because $|A_n f_m| \leq mk_0$ $(n \in \mathrm{N})$. Therefore the norm convergence of $A_n f$ follows. Since we have

$$T(A_n f) = \frac{n+2}{n+1} A_{n+1} f - \frac{1}{n+1} f,$$

the last conclusion is followed as $n \to \infty$. $\square$

REMARK 3.3 Corollary 3.2 and R.Wittmann's ergodic theorem [5, theorem 3.8] are equivalent. Because T is integral preserving and positively homogeneous on L^1 as in the proof of Corollary 3.2.

The following example of T satisfies the assumptions of Theorem 3.1, and however, T is not integral preserving.

EXAMPLE 3.4 Let $E = \mathrm{R}$, μ be the Lebesgue measure, and $0 < \alpha < 1$. For any $f \in L^1$ we define

$$T = \begin{cases} (1-\alpha)\{f(x) \vee f(-x)\} + \alpha\{f(x) \wedge f(-x)\} & (x \geq 0) \\ f(x) \wedge f(-x) & (x \leq 0). \end{cases}$$

Now we set

$$T_0 = \begin{cases} f(x) \vee f(-x) & (x \geq 0) \\ f(x) \wedge f(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

and

$$k_0 \in L^1 \textit{ such that } k_0 > 0 \textit{ and } k_0(x) = k_0(-x).$$

Then all the assumptions of Theorem 3.1 are fullfilled, therefore it is showed that the average $A_n f$ of T converges a.e. for any $f \in L^1$.

The same is true of the case of $E = (-a, a)$ for some $a > 0$. In this case, since T is not integral preserving either, R.Wittmann's ergodic theorem [5] is not applicable.

References

[1] U.Krengel, *Ergodic Theorems*, de Gruyter Studies in Math. 6, Berlin-New York (1985).

[2] U.Krengel, *An example concerning the nonlinear pointwise ergodic thorem*, Berlin-New York (1985).Israel J. Math. 58 (1987), 193-197.

[3] U.Krengel, M.Lin, *Order preserving nonexpansive operators in L^1*, Israel J. Math. 58 (1987), 170-192.

[4] M.Lin, R.Wittmann, *Pointwise ergodic theorems for certain order preserving mappings in L^1*, Almost Everywhere Convergence II (1991).

[5] R.Wittmann, *Hopfs ergodic theorem for nonlinear operators*, Math. Ann. 289 (1991), 239-253.

Representation of Convex Operators

Naoto Komuro

Mathematics Laboratory, Asahikawa College,

Hokkaido University of Education

Asahikawa 070

§1 Introduction

Let X, Y be real topological vector spaces and assume that Y is also an order complete vector lattice. An Operator $F : X \longrightarrow Y$ is said to be convex if the domain of F (denoted by $D(F)$) is a convex set of X and

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y),$$

for all $x, y \in D(F)$ and $\lambda \in (0,1)$. By $L(X,Y)$, we denote the space of all continuous linear operators of X into Y. An element A of $L(X,Y)$ is called a subgradient of F at $x \in D(F)$ if $A(y-x) \leq F(y) - F(x)$ for all $y \in D(F)$. The set of all subgradients of F at x is called the subdifferential of F at x and denoted by $\partial F(x)$. Furthermore, the conjugate operator F^* and F^{**} are defined as follows. For $A \in L(X,Y)$,

$$F^*(A) = \bigvee_{x \in D(F)} (A(x) - F(x)),$$

$$D(F^*) = \{A \in L(X,Y) \mid \bigvee_{x \in D(F)} (A(x) - F(x)) \quad \text{exists} \},$$

where $\bigvee$ denotes the lattice supremum in Y. Since X can be identified with a subspace of $L(L(X,Y),Y)$, we restrict the domain of F^{**} to X, and

$$F^{**}(x) = \bigvee_{A \in D(F^*)} (A(x) - F^*(A)),$$

$$D(F^{**}) = \{x \in X \mid \bigvee_{A \in D(F^*)} (A(x) - F^*(A)) \quad \text{exists} \}.$$

F^* and F^{**} are also convex operators. For a real valued convex function f, it is well known that f satisfies $f^{**} = f$ if and only if f is lower semicontinuous (Fenchel-Moreau theorem). Moreover f is continuous at an interior point x of $D(F)$, then f is subdifferentiable at x, that is $\partial f(x) \neq \emptyset$. For the generalized theory of convex operators, we need the extensions of these fundamental facts. In [8] and other papers, some sufficient conditions for these facts are given. However, they require some strong assumptions concerning the relation between the order structure and the topological structure of Y for example. Our purpose in this report is to give another approach to investigate convex operators by using convex integrands. In §2, we deal with the case of $X = \mathbb{R}^d$ and some basic results shall be shown. In §3, we shall extend these results to the case where $\mathbb{R}^d$ is replaced by an infinite dimensional Banach space. Though we still need some assumptions, they shall free one from the need to consider the order structure of Y.

§2 Results in finite dimensional cases

Let (Ω, Σ, μ) be a σ-finite complete measure space and let $S(\Omega)$ be the space of finite valued measurable functions on Ω. f and g of $S(\Omega)$ are identified if they differ only on a set of μ-measure zero. With the usual ordering, $S(\Omega)$ is an order complete vector lattice. In most cases in applications, the range of convex operators can be regarded as subspaces of $S(\Omega)$ for some measure spaces Ω. Therefore it is not so restrictive to consider only the class of convex operators whose values are in $S(\Omega)$.

A function $f : X \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is called a convex integrand, if for each $t \in \Omega$ the function $f(\cdot, t)$ is convex. A convex integrand f is said to be proper, if for every $t \in \Omega$, $f(\cdot, t) \not\equiv +\infty$. It is convenient to say that a proper convex integrand f has a constant domain, if $D(f(\cdot, t))$ does not depend on $t \in \Omega$ where $D(f(\cdot, t)) = \{x \in X \mid f(x, t) < \infty\}$. If a proper convex integrand f has a constant domain and $f(x, \cdot)$ is measurable for each $x \in X$, the operator $F : X \longrightarrow S(\Omega)$ which acts according to the formula

$$(F(x))(t) = f(x, t), \qquad (a.e. t \in \Omega), \tag{1}$$

is convex and $D(F) = D(f(x, \cdot))$. Conversely, if there exists a convex integrand f satisfying (1) for a convex operator F, we call f a representation of F. In this section, we consider only the case of $X = \mathbb{R}^d$. We have in this case the following fundamental theorem without any assumptions.

THEOREM 1. *Every convex operator $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow S(\Omega)$ has at least a representation.*

By the conjugate of the convex integrand f, we mean the integrand f^* on $X^* \times \Omega$ defined by

$$f^*(x^*, t) = \sup_{x \in D(f(\cdot,t))} \{< x^*, x > - f(x,t)\},$$

where X^* is the dual of X. The biconjugate integrand f^{**} is given by

$$f^{**}(x, t) = \sup_{x^* \in D(f^*(\cdot,t))} \{< x^*, x > - f^*(x^*,t)\},$$

for $x \in X$. If f is a proper convex integrand, then so are f^* and f^{**}. A proper convex integrand f is said to be normal if for each $t \in \Omega$, $f(\cdot, t)$ is lower semicontinuous and f is $\mathfrak{B} \otimes \Sigma$ measurable where $\mathfrak{B}$ denotes the σ-algebra of Borel subsets of X and $\mathfrak{B} \otimes \Sigma$ is the σ-algebra in $X \times \Omega$ generated by the sets $B \times S$ with $B \in \mathfrak{B}$ and $S \in \Sigma$. In [1],[5],[7], one can find some different ways to define the normality which are all equivalent. Normality ensures in particular that for every measurable function $x : \Omega \longrightarrow X$, the function $t \longrightarrow f(t, x(t))$ is also measurable, and it is extremely important in applications. Moreover, it is known that if f is normal then so are f^* and f^{**}. Note that for a convex operator F, the representation of F is not uniquely determined, and F does not always have a normal representation.

THEOREM 2. *If a convex integrand f represents a convex operator $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow S(\Omega)$, then f^* and f^{**} are normal representation of F^* and F^{**} respectively.*

REMARK: $L(\mathbb{R}^d, S(\Omega))$ can be identified with $S(\Omega)^d$ by corresponding $(\varphi_1, \cdots, \varphi_d) \in S(\Omega)^d$ to $A \in L(\mathbb{R}^d, S(\Omega))$ with $A : \mathbb{R}^d \ni (x_1, \cdots, x_d) \longrightarrow \sum_{i=1}^d x_i \varphi_i \in S(\Omega)$. Hence we can consider $\mathbb{R}^d$ to be a subspace of $L(\mathbb{R}^d, S(\Omega))$, and the domain of F^* in Theorem 2 is restricted to $\mathbb{R}^d$. For $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_d) \in S(\Omega)^d$, we can prove $(F^*(\varphi))(t) = f^*(\varphi(t), t)$ for almost every $t \in \Omega$.

By Theorem 2, we obtain the following two theorems.

THEOREM 3. *A convex operator $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow S(\Omega)$ satisfies $F^{**} = F$ if and only if $f^{**} = f$ for some representation f.*

THEOREM 4. *A convex operator $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow S(\Omega)$ satisfies $F^{**} = F$ if and only if F has a normal representation.*

To end this section, we shall give a generalization of Fencel-Moreau theorem. For a convex operator $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow S(\Omega)$ and for $z \in D(F)$, denote

$$S_F(z) = \{\varphi \in S(\Omega)_+ \mid F(U) \subset F(z) - \varphi + S(\Omega)_+, \text{ for some neighborhood U of z }\},$$

where $S(\Omega)_+ = \{\varphi \in S(\Omega) \mid \varphi(t) \geq 0 \quad \text{for almost every } t \in \Omega \}$.

THEOREM 5. *Let $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow S(\Omega)$ be a convex operator and take a point $x \in D(F)$. Then $F^{**}(x) = F(x)$ if and only if $S_F(x) \neq \emptyset$ and $\bigwedge S_F(x) = 0$.*

The condition given in Theorem 5 is considered to be a generalization of the notion of lower semicontinuity for convex operators. By birtue of Theorem 2 and Theorem 3, we can give a simple proof of this theorem.

§3 INFINITE DIMENSIONAL CASES

Convex integrands on infinite dimensional spaces has been studied in many papers ([1], [6]). The properties of normal convex integrands stated in §2 are all valid in infinite dimensional cases. However, there are usual problems of the multiplicity of topologies and dualities. We shall use some continuity conditions to prove an extension of Theorem 1.

THEOREM 6. *Let X be a separable reflexive Banach space and let $F : X \longrightarrow S(\Omega)$ be a convex operator. Suppose that for every $x \in X$, $t \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}(x)$, $(\mu(\tilde{\Omega}(x)) = 0)$, and $\varepsilon > 0$,* *there exists $\delta = \delta(x, t, \varepsilon) > 0$ such that $\|x - y\| < \delta$ implies $|(F(x))(t) - (F(y))(t)| < \varepsilon$. Then F has a normal representation.*

The condition of F in Theorem 6 is considered to be the continuity with respect to the topology of almost everywhere convergence in $S(\Omega)$. Let $\mathfrak{F}(X, \Omega)$ be the set of all convex operators $F : X \longrightarrow S(\Omega)$ satisfying the continuity condition in Theorem 6.

PROOF: Let E be a countable dense subset of X. We can assume that E is midpoint convex, that is, $x, y \in E$ implies $\frac{1}{2}(x + y) \in E$. By D, we denote the set of all rational number of the form $\lambda = \frac{n}{2^m} \in [0, 1]$. For each $x, y \in E$ and $\lambda \in D$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ belongs to E and by the convexity of F,

$$(F(\lambda x + (1 - \lambda)y))(t) \leq \lambda(F(x))(t) + (1 - \lambda)(F(y))(t) \tag{2}$$

holds for all $t \in \Omega \setminus \Omega_1(x, y, \lambda)$ where $\Omega_1(x, y, \lambda) \subset \Omega$ is μ-measure zero. Take the union of $\Omega_1(x, y, \lambda)$ over all $x, y, \in E$ and $\lambda \in D$, and denote it by Ω_2. Then $\mu(\Omega_2) = 0$ and (2) holds on $\Omega \setminus \Omega_2$ for all $x, y \in E$ and $\lambda \in D$. Hence if we define $f(x, t)$ on $E \times \Omega$ by $f(x, t) = (F(x))(t)$ for $x, y \in E$ and $t \in \Omega$, then f satisfies

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y, t) \leq \lambda f(x, t) + (1 - \lambda)f(y, t) \tag{3}$$

for all $x, y \in E$, $\lambda \in D$, and $t \in \Omega \setminus \Omega_2$. For arbitrary $x \in X$ and $\varepsilon > 0$, take $\tilde{\Omega}(x)$ and $\delta > 0$ as in the continuity condition. If $y \in E \cap V_\delta(x)$, then $|(F(x))(t) - f(y, t)| < \varepsilon$ holds for $t \in \Omega \setminus (\Omega_2 \cup \tilde{\Omega}(x))$, where $V_\delta(x)$ denotes the δ-neighborhood of x. Hence for each $t \in \Omega \setminus (\Omega_2 \cup \tilde{\Omega}(x))$, $f(\cdot, t)$ is bounded on $V_\delta(x) \cap E$, and by (3), this implies the uniformly continuity of $f(\cdot, t)$ on $V_\delta(x)$. Thus we can define $f(x, t)$ on $X \times \Omega$ by the usual way of taking limit. f is obviously a convex integrand, and for every $x \in X$, we can take a sequence $\{x_n\}$ of E which tends to x. Again by the continuity condition of F, we obtain

$$\begin{aligned}(F(x))(t) &= \lim_{n \to \infty} (F(x_n))(t) \\ &= \lim_{n \to \infty} f(x_n, t) \\ &= f(x, t)\end{aligned}$$

for almost every $t \in \Omega$, and this completes the proof.

In the infinite dimensional cases, the definitions of F^* and F^{**} depend on the meaning of $L(X, S(\Omega))$. Under the hypothesis in Theorem 6, we define $L(X, S(\Omega))$ as the set of all linear operators satisfying the continuity condition in Theorem 6. Then we can get the following fundamental result.

THEOREM 7. *Let X be a separable reflexive Banach spaces. Then Theorem 3 and Theorem 4 remain valid for $F \in \mathfrak{F}(X, \Omega)$.*

Since the representation f obtained in Theorem 6 is normal, we have by Theorem 7 that

THEOREM 8. *Let X be a separable reflexive Banach space. If $F \in \mathfrak{F}(X, \Omega)$, then F satisfies $F^{**} = F$.*

REFERENCES

1. C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Springer Verlag Berlin (1977).
2. N. Komuro, *On basic properties of convex functions and convex integrands*, Hokkaido Math. J. **18 No.1** (1989), 1–30.
3. ———, *Convex operators and convex integrands*, Proc. Japan Acad. **65 A No.3** (1989), 77–80.
4. S. S. Kutateladze, *Convex operators*, Russian Math. Survey **34** (1979).
5. R.T.Rockafellar, *Integrals which are convex functions II*, Pacific J. Math. **39** (1971), 439–469.
6. ———, *Convex integral functionals and duality*, Contributions to nonlinear analysis, Academic Press (1971), 215–236.

7. ———, *Integral functionals, Normal integrands, and Measurable selections*, Springer Verlag Berlin (1976), 157–207.

8. J. Zowe, *A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattice*, J. Math. Anal. Appl. **50** (1975), 273–287.

9. ———, *The saddle point theorem of Kuhn and Tucker in ordered vector spaces*, J. Math. Anal. Appl. **57** (1977), 41–55.

ある測度の空間N(σ)とF.-M.Rieszの定理について

城西大学理学部　　山口 博

(G, X) を局所コンパクト可換群Gが局所コンパクトHusdorff空間Xに作用する位相変換群とする。M(X)をX上の有界正則測度全体の空間とし、M(G), $L^1(G)$をG上の測度環及び群環とする。$G^\wedge$をGの dual group とする。$G^\wedge$の閉集合Eは$M_E(G)=\{\lambda\in M(G):\lambda^\wedge=0 \text{ on } E^c\}\subset L^1(G)$のときRiesz 集合と呼ばれる。$\lambda\in M(G)$, $\mu\in M(X)$に対して、$\lambda*\mu\in M(X)$を

$$\lambda*\mu(f)=\int_X\int_G f(g\cdot x)d\lambda(g)d\mu(x) \qquad (f\in C_0(X))$$

により定義し、$J(\mu)=\{h\in L^1(G): h*\mu=0\}$ とおく。そして、$sp(\mu)=\cap\{h^{\wedge-1}(0): h\in J(\mu)\}$により、$\mu$の spectrum $sp(\mu)$を定義する。X上の (positive) quasi-invariant Radon 測度σにたいして、$N(\sigma)=\{\mu\in M(X): h*\mu\ll\sigma \quad (\forall h\in L^1(G))\}$ とおく。 ここでは、$G^\wedge$のどのような（閉）集合Eにたいし、

$$(*) \qquad \mu\in N(\sigma),\ sp(\mu)\subset E \ \Rightarrow\ \mu\ll\sigma \qquad ?$$

ということを考えてみる。

$N(\sigma)$に関しては、一般に$L^1(\sigma)\subset N(\sigma)\subset M(X)$ (cf. [4])の関係があるが、変換群(G, X) 及びσのとりかたにより、$L^1(\sigma)=N(\sigma)$, $N(\sigma)=M(X)$、$L^1(\sigma)\subsetneq N(\sigma)\subsetneq M(X)$ のそれぞれの場合がおこることがある。又、$N(\sigma)$については、[5] で次のような一つの特徴付けが与えられている： Gのσ－compact open subgroup G_0 にたいして、$I(\sigma)=\{Y\subset X: \text{Borel set}, \exists\ B\supset Y: \text{Borel set s.t. } G_0\cdot B=B \text{ and } \sigma(B)=0\}$ とおく。

<u>定理A</u> (cf. [5, Th. 4]).　　$\mu\in M(X)$ にたいして、次は同値。

(i)　$\mu\in N(\sigma)$.

(ii)　μ vanishes on $I(\sigma)$.

又、この結果から、$N(\sigma)$ は M(X) の L-subspace になることがわかる。

次に、(＊) について、[1] の一つの結果について述べる。$\mu\in M(X)$に対して、$\mu=\mu_a+\mu_s$ を μ の σ に関する Lebesgue 分解とする。$G^\wedge$の閉集合の族 $Ç_0\ (=Ç_0(\sigma))$ と $Ç_0^{\,0}\ (=Ç_0(\sigma)^0)$ を次のように定義する。

$$Ç_0=\{\Lambda\subset G^\wedge: \text{閉集合、}\mu\in M(X),\ sp(\mu)\subset\Lambda \Rightarrow sp(\mu_s)\subset\Lambda\};$$

$$Ç_0^{\,0}=\{\Lambda\in Ç_0: \forall\Lambda'\subset\Lambda: \text{閉集合} \Rightarrow \Lambda'\in Ç_0\}.$$

次の命題は［1］で G がコンパクト可換群のとき得られているが、同様にして G が局所コンパクト可換群のときも得られる。

<u>命題B</u>（cf.［1］）.
$\Lambda \in \c{C}_0{}^{0}$. $\mu \in N(\sigma)$, $sp(\mu) \subset \Lambda \Rightarrow \mu \ll \sigma$.

最後に、ある特別な変換群において、（＊）について考えてみる。
○　変換群（G, X）において、G がコンパクト可換群の場合には、［1］で次の結果が得られている。

<u>定理C</u>（cf.［1，Th. 4.10］）.
E：Riesz 集合. $\mu \in N(\sigma)$, $sp(\mu) \subset E \Rightarrow \mu \ll \sigma$.

○　X が局所コンパクト可換群で、実数 R から X への連続準同型が存在する場合。すなわち、X を G と表したとき、R から局所コンパクト可換群 G への連続準同型が存在する場合：　G を局所コンパクト可換群とし、$\phi: G^{\wedge} \to R$ を自明でない連続準同型とする。$1 \in \phi(G^{\wedge})$ とし、$\phi: R \to G$ を ϕ の dual homomorphism とする（i.e.,（$(\phi(t), \gamma) = \exp(i\phi(\gamma)t)$（$t \in R$, $\gamma \in G^{\wedge}$））とする。そこで、R の G 上の作用を $t \cdot x = \phi(t) + x$（$t \in R$, $x \in G$）により定義すると、（位相）変換群（G, X）が得られる。

<u>定理D</u>.　$E \subset R$：閉集合. $K(\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon]$（$0 < \varepsilon < 1/6$）. $E + K(\varepsilon)$: R の Riesz 集合. σ：G 上のquasi-invariant Radon 測度. $\mu \in M(G)$.
$sp(\mu) \subset E \Rightarrow sp(\mu_a) \subset E$, $sp(\mu_s) \subset E$.

この定理Dと命題Bより、次の系が得られる。

<u>系</u>.　E は定理D の条件を満たす R の閉集合. σ：G 上の quasi-invariant Radon 測度. $\mu \in N(\sigma)$.
$sp(\mu) \subset E \Rightarrow \mu \ll \sigma$.

注意. 系（又は定理D）の条件を満たす閉集合 E の例をあげておく。

(i) $E=[0,\infty)$ とすると、$E+K(\varepsilon)=[-\varepsilon,\infty)$ $(0<\varepsilon<1/6)$ は R の Riesz 集合。

(ii) $F'=\{n_k\in N : n_{k+1}/n_k>3\ (k=1,2,\cdots)\}$. $F=F'\cup(-F')$. $E=F+K(\delta)$ $(0<\delta,\ \varepsilon+\delta<1/6)$. すると、$E+K(\varepsilon)=F+K(\varepsilon+\delta)$ は R の Riesz 集合。

注意 (R, X)：実数 R が 局所コンパクト Hausdorff 空間 X に作用する(位相)変換群。σ : X 上の quasi-invariant Radon 測度。$\mu\in N(\sigma)$, $sp(\mu)\subset[0,\infty)$。すると、$\mu\ll\sigma$。

これは、[2, Th.5] より $[0,\infty)\in Ç_0{}^0$ となり、命題Bより得られる。

参考文献

[1] C. Finet and V. Tardivel-Nachef, Lacunary sets on transformation groups, (preprint).

[2] F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967), 33-57.

[3] G. Godefroy, On Riesz subsets of abelian discrete groups, Israel. J. Math. 61 (1988), 301-331.

[4] S.L. Gulick, T.S. Liu and A.C. van Rooij, Group algebra modules II, Canad. J. Math. 19 (1967), 151-173.

[5] T.S. Liu, A. van Rooij and J.K. Wang, Transformation groups and absolutely continuous measures II, Indag. Math. 32 (1970), 57-61.

[6] H. Yamaguchi, Idempotent multipliers on the space of analytic singular measures, Hokkaido Math. J. 14 (1985), 49-73.

[7] H. Yamaguchi, The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups, II, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 345-359.

[8] H. Yamaguchi, Absolute continuity of measures on compact transformation groups, Hokkaido Math. J. 22 (1993), 25-33.

Functions with Lipschitz condition

S.Koshi ; Utsunomiya University

Non-linear operators on Banach lattice with Lipschitz condition are studied by Prof. I. Sawashima. I attended her lectures on this matter two times at Hokkaido University in the last term of 1992 and at Keio University in first term of July 1993. I am quite impressed. I find that even if in the case of finite-dimensional spaces it is not well known .

After that, I studied these topics and found out theory of functions with Lipschitz condition is quite related to convex analysis. I hope these consideration will be some progress to convex analysis theory. In this short note, I will state some results.

Let E be a normed space with real scalars. A real valued function f is said f has Lipschitz condition if there exists some positive constant C with

$$(\star) \qquad | f(x) - f(y) | \leq C \| x - y \| \qquad \text{for } x, y \in E.$$

It is easy to see that totality of functions having Lipschitz condition ($\star$) constitutes a Banach space with the following norm

$$\| f \|_{Lip} = \sup \left(\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} , x \neq y \right) + | f(0) |$$

This space is denoted by $Lip(E)$. The totality of $f \in Lip(E)$ with $f(0) = 0$ is a closed linear subspace of $Lip(E)$. This space is denoted by $Lip(E)_0$. $Lip(E)_0$ is with codimension 1 to $Lip(E)$.

Then we have the following theorem in the simplest case :

Theorem 1 $\quad Lip(\mathbf{R})_0$ is isometric onto $L_\infty(\mathbf{R})$.

Proof. Let $f \in Lip(\mathbf{R})_0$. Then f is absolutely continuous. Hence

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt$$

for derivative f' of f.

Then we have

$$\|f\|_{Lip} = \mathbf{esssup}\{\mid f'(t) \mid, t \in \mathbf{R}\}$$

$f \rightarrow f'$ is one to one and linear.

Next, we shall consider the case of $\mathbf{R^n}$. We only deal with the case of n = 2 in the following, since the case of n > 2 is same as n = 2.

Let $f = f(\ x, y\ )$ be a two times continuousely differentiable function. Let θ be with $0 \leq \theta \leq 2\pi$. We shall consider the partial derivative of f at (a,b) along the straight line between (a,b) and (a + tcosθ, b + tsinθ) for t $\in \mathbf{R}$. Then we have the following :

Lemma 2

$$\frac{df(a + tcos\theta, b + tsin\theta)}{dt} = f_x(a,b)cos\theta + f_y(a,b)sin\theta.$$

Lemma 3

$$Max\{f_x(a,b)cos\theta + f_y(a,b)sin\theta; 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = \sqrt{f_x^2(a,b) + f_y^2(a,b)}$$

Lemma 4

$$\|f\|_{Lip} = sup\{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}\}.$$

We shall consider the Banach space $L_\infty(\mathbf{R}^2)\times L_\infty(\mathbf{R}^2)$ with the norm

$$(\star\star) \qquad \|(f,g)\| = \mathbf{esssup}\{\sqrt{f^2+g^2}\}$$

for $f, g \in L_\infty(\mathbf{R}^2)$.

Let $(f\ ,\ g)$ be pairs of bounded 2 times continuousely partial differentiable functions on $\mathbf{R}^2$ with $f_y = g_x$.

The totality of such pairs of functions is a normed linear subspace with the norm $(\star\star)$. The completion of such linear subspace is denoted by $\mathbf{S}(\mathbf{R}^2)$.

Then we have :

Theorem 5

$Lip(\mathbf{R}^2)_0$ is isometric onto $\mathbf{S}(\mathbf{R}^2)$.

Next, we shall consider another type of functions on $\mathbf{R}^2$. Let f be a function on $\mathbf{R}^2$ satisfying Lipschitz condition with the following conditions :

$$\int_a^c f(x,b)dx + \int_b^d f(c,y)dy = \int_b^d f(a,y)dy + \int_a^c f(x,d)dx$$

for all (a,b) and (c,d) $\in\mathbf{R}^2$.

The totality of such functions f is denoted by $\mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$.

By the usual calculation, $f\in\mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$ if and only if

$$f_x(a,b) = f_y(a,b)$$

for all $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

Then, if we change variables x, y to another vavriables u, v with

$$\frac{x+y}{2} = u,$$

$$\frac{x-y}{2} = v$$

Hence we have :

$$f_u(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2f_x = 2f_y$$

$$f_v(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

It means that

$$f(x,y) = f(x', y')$$

whenever $x - y = x' - y'$ or f is constant on the line $y = x + v$ for all $v \in \mathbf{R}$.

Hence we have :

Theorem 6

$\mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$ is isometric onto $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$.

Let E be a normed lilnear space. Similary, we can define $\mathbf{P}(E)$ as same as $\mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$.

Theorem 7

$$\mathbf{P}(E) \text{ is isometric onto } \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R}).$$

We can discuss these theorems in arbitrary normed linear space and relationship between convex analysis and functions with Lipschitz condition.

We shall list up these consideration in the following titles without any explanation and these results will be stated in another paper.

(1) Subdifferential

(2) Duality theory (in the sense of convex analysis)

(3) Applications to non-linear operator theory.

Periodic Solutions for Curve Evolution Equations

Noriko Mizoguchi

This is a joint work with Prof. Giga of Hokkaido University.

We consider the quasilinear parabolic equation

$$u_t = u^2(u_{xx} + u - f) \quad \text{in } K, \tag{1}$$

where $K = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}) \times (\mathbf{R}/T\mathbf{Z})$ with $T > 0$ and f is a positive function on K. The purpose of this paper is to prove the following result.

Theorem 1. If f is a positive continuous function on K with $f_t \in C(K)$ such that

$$\int_0^{2\pi} f(x,t)e^{ix}dx = 0 \quad \text{for all } t, \tag{2}$$

then there exists a positive solution $u \in \bigcap_{p>1} W_p^{2,1}(K)$ of the equation (1) satisfying the condition

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{u(x,t)}dx = 0 \quad \text{for all } t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

We remark that the assumption (2) is necessarily satisfied provided that there is a positive solution of (1) satisfying (3). In fact, multiplying $u^{-2}e^{ix}$ with (1) and integrating over $(0, 2\pi)$ yields

$$-\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{u}dx = -\int_0^{2\pi} fe^{ix}dx.$$

If u satisfies the constraint (3), f must satisfy (2).

Our main result yields the existence of a periodic-in-time solution (up to translation)for an evolution equation of curves whose normal speed equals the curvature minus a given time periodic function depending on curves through its normals. Let $\{\Gamma_t\}$ be a smooth one parameter family of closed, embedded curves in a plane bounding a bounded domain. Let $\mathbf{n}$ denote the inward unit normal vector field on Γ_t. Let V denote the normal velocity of Γ_t in the direction of $\mathbf{n}$. We consider an equation for Γ_t of the form

$$V = k - q(\mathbf{n}, t), \tag{4}$$

where k is the inward curvature and q is a given function. The equation (4) is an example of curvature flow equation with anisotoropy ([13]). If Γ_t is convex, one can parameterize Γ_t by a Gauss map by introducing $\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ such that $\mathbf{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$. The evolution of curvature k is expressed as

$$k_t = k^2(V_{\theta\theta} + V)$$

if we use $\theta-$ cordinates ([13]). Applying this identity to (4) yields an evolution equation of curvature

$$k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k - (Q_{\theta\theta} + Q)) \quad \text{with} \quad Q(\theta, t) = q(\cos\theta, \sin\theta, t), \tag{5}$$

where k and Q are $2\pi-$ periodic in θ. We next recover (4) form (5). For k a curve parametrized by the Gauss map is given by

$$Z(\theta, t) = (\int_0^\theta \frac{\sin\sigma}{k(\sigma, t)} d\sigma, -\int_0^\theta \frac{\cos\sigma}{k(\sigma, t)} d\sigma).$$

If k solves (5), then integarating by parts yields

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = ((k-Q)\cos\theta - (k_\theta - Q_\theta)\sin\theta - (k-Q)|_{\theta=0}, (k-Q)\sin\theta + (k_\theta - Q_\theta)\cos\theta - (k_\theta - Q_\theta)|_{\theta=0}).$$

Translate Z by

$$X_0(t) = (\int_0^t (k-Q)(0,\tau)d\tau, \int_0^t (k_\theta - Q_\theta)(0,\tau)d\tau),$$

so that new curve $X(\theta, t) = Z(\theta, t) + X_0(t)$ fulfills

$$V = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = k - q.$$

We thus obtained the curve

$$\Gamma_t = \{X(\theta, t) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

satisfying (4). The equation (4) and (5) are equivalent through X. However to be Γ_t is closed we need $X(0,t) = X(2\pi, t)$ which is equivalent to the constraint

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{k(\theta, t)} d\theta = 0.$$

If we set $u = k, x = \theta$, this is nothing but the constraint (3). Since the condition (2) is automatically satisfied for $f = Q_{\theta\theta} + Q$, Theorem 1 yields a periodic-in-time solution Γ_t (up to translation in space) of (4).

We also note that f is a positive function if and only if the Frank diagram of q is strictly convex (see [12]).

The initial value problem for (5) with $q = 0$ was derived in [9] and extensively studied by Gage and Hamilton [11] for the curve shortening problem. Since a circle shrinks to a point in a finite time for the curve shortening equation (4) with $q = 0$, the curvature may blow up in a finite time. Blow up profiles for convex immersed curves were classified by Angenent [2] based on a result of [1] under the self-similar growth assumption for curvatures. There may happen that curvature growth is faster than self-similar rate. Its asysmptotic profile is studied in [2] via (4) with $q = 0$. Recently, more precise profile is obtained by Angenent and Velazquez [3] by studying (4) itself. The iunitial boundary value problem for higher dimensional version of (1) with $f = 0$

$$u_t = u^2(\Delta u + u)$$

in a bounded domain with zero boundary data was studied in [8] and [10] for positive initial data. The existence of blow up phenomena depends on the first eigenvalue of the Laplace operator with zero boundary condition. These authors studied whether a solution blows up and they estimated the size of blow up sets. However it seems that there are no results concerning the periodic problem for the equation (1).

We make use of the Leray-Schauder degree theory to show this theorem. The existence of periodic solutions for semilinear parabolic equations was obtained by the degree theory in Esteban [6], [7], Hirano and the second author [14] and so on. But constracting homotopies to solve the equation(1) is more difficult than that in the above papers because the equation (1) is degenerate and our desired solution should satisfy the constraint (3).

We shall select desired solution by introducing a kind of penalty method since not all solutions satisfy the constraint (3). Explaining heuristically, for small $\varepsilon > 0$, we consider the penalized equation

$$u_t = u^2(u_{xx} + u + \frac{\varepsilon}{u} - f) \quad \text{in } K. \tag{6}$$

For a solution u of this equation, we observe that the condition (2) implies

$$-\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{u} dx = \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{u} dx$$

by multiplying (6) with $u^{-2}e^{ix}$ and integrating over $(0, 2\pi)$. Since u is periodic in time, this implies that u satisfies the constraint (3). A penalty method is adapted in various evolution equations to introduce constraints of solutions. For example, it was used to constract a solution u satisfying a constraint $|u| = 1$ for the harmonic gradient flow equations in Chen [4], Chen and Struwe [5] and Keller, Rubinstein and Sternberg [15].

We introduce the following approximate equation

$$u_t = (u + \varepsilon^2)^2 (u_{xx} + \frac{u^2}{(u+\varepsilon^2)^2}(u + \frac{\varepsilon}{\xi_\varepsilon(u)} - f)) \quad \text{in } K, \tag{7}$$

where $\frac{1}{m} < \min_K f$ and ξ_ε is a smooth increasing function on $\mathbf{R}$ such that

$$\xi_\varepsilon(s) = s + \varepsilon^2 \quad \text{for all } s \geq m\varepsilon$$

and

$$\max(s + \varepsilon^2, m\varepsilon) \leq \xi_\varepsilon(s) \leq C \max(s + \varepsilon^2, m\varepsilon) \quad \text{for all } s > 0.$$

The Leray-Schauder degree is computed in a small and a large ball in $C(K)$, respectively, which implies the existence of a positive solution of (7). We seek for a solution of (1) as a limit of solutions of (7). In the limiting procedure, a priori upper and lower bounds are required. To do that, inequalities of Harnack type in time and space directions play a crucial role. We refer to [12] for details.

References

[1] U. Abresch and J. Langer, The normalized curve shortening flow and homothetic sholutions, J. Differential Geometry 23 (1986), 175-196.

[2] S. Angenent, On the formation of singularities in the curve shortening flow, J. Differential. Geometry 33 (1991), 601-633

[3] S. Angenent and J. J. L. Velázquez, Asymptotic behavior of singularities in the curve shortening flow, in preparation.

[4] Y. Chen, The weak solutions to the evolution problem of harmonic maps, Math. Z. (1989), 69-74.

[5] Y. Chen and M. Struwe, Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps, Math. Z. (1989), 83-103.

[6] M. Esteban, On periodic solutions of periodic parabolic problems, Tans, Amer. Math. Soc. 93 (1986), 171-189.

[7] ________, A remark of the existence of positive periodic solutions of superlinear parabolic problems, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 131-136.

[8] A. Friedman and B. Mcleod, Blow up of solutions of nonlinear degenerate parabolic equations, Arch. Rational. Mech. Anal. 96 (1986), 55-80.

[9] M. Gage, Curve shortening makes convex curves circular, Invent. Math. 76 (1984), 357-364.

[10] ________, On thge size of the blow-up set for a quasilinear parabolic equation, Contemporary Math. 127 (1992), 41-58.

[11] M. Gage and R. Hamilton, The shrinkings of convex plane curves by the heat equation, J. Differential Geometry 23 (1986), 69-96.

[12] Y. Giga and N. Mizoguchi, Existence of periodic solutions for equations of evolving curves, preprint.

[13] M. Gurtin, Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane, Oxford Press, United Kingdom (1993).

[14] N. Hirano and N. Mizoguchi, Positive unstable periodic solutions for superlinear parabolic equations, preprint.

[15] J. Keller, J. Rubinstein and P. Sternberg, Reaction-diffusion process and evolution to harmonic maps, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), 1722-1733.

The Dirichlet problem for the heat operator in non-cylindrical domains

HISAKO WATANABE

1. Introduction

Let Ω be a bounded C^1-domain in $\mathbf{R}^n$ and set

$$\Omega_T = \Omega \times (0,T), \qquad S_T = \partial\Omega \times (0,T).$$

E. B. Fabes and M. N. Rivière proved a Fatou type theorem for the heat operator in [FR]; If $1 < p < +\infty$, then for each $f \in L^p(S_T)$ there exists a function $g \in L^p(S_T)$ such that the double layer potential u of g is caloric in Ω_T and has the limit $f(P)$, nontangentially on the hyperplane $t = t_1$, at almost every point $P = (p, t_1) \in S_T$ with respect to the surface measure of S_T.

Moreover in the case $p \geq 2$ it has been known that this result is still valid even if Ω is a bounded Lipschitz domain and an approach region is replaced by a parabolic nontangential one (cf.[FS], [B1],[B2]).

In this report we consider the initial-Dirichlet problem for the heat equation in a bounded non-cylindrical domain.

More precisely it is assumed that a bounded domain D in $\mathbf{R}^{n+1}$ lies in the strip $0 < t < T$ and ∂D is the union of three closed sets, B_D, T_D and S_D, which satisfy the following condition (I), (II) and (III), respectively.

(I) B_D is given locally at $(x_o, t_o) \in B_D$ by $t = 0$.

(II) T_D is given locally at $(x_o, t_o) \in T_D$ by $t = T$.

(III) S_D is given locally at $(x_o, t_o) \in S_D$ by a C^1-function ϕ such that the spatial gradient of ϕ and $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ are α-Hölder continuous in the space variables and $\frac{\alpha}{2}$-Hölder continuous in the time variable.

Furthermore, we assume that D satisfies the following conditions:

(d_1) The set

$$I_\tau := D \cap \{(x, \tau) : \ x \in \mathbf{R}^n\}$$

is a domain in the hyperplane $t = \tau$ for each τ, $0 < \tau < T$.

(d_2) There exists a simple continuous curve in D connecting some point of B_D to some point of T_D along which the t-coordinate is nondecreasing.

In this domain we consider the initial-Dirichlet problem

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \quad \text{on } D, \\ u &= f \quad \text{on } S_D, \\ u &= 0 \quad \text{on } B_D. \end{aligned}$$

If S_D is locally represented by a function ϕ such that $D_x^2\phi$ and $D_t\phi$ are α-Hölder continuous, then it is known that the above initial-Dirichlet problem has a unique classical solution on $\bar{D}$ for all functions f on S_D such that

$$|f(X) - f(Y)| \leq c_f \delta(X,Y)^\lambda$$

for all X, $Y \in S_D$ and for some positive real numbers c_f, λ (cf. [F, Theorem 7, p.65]). Recall that the parabolic distance $\delta(X,Y)$ is defined by

$$\delta(X,Y) = (|x-y|^2 + |t-s|)^{1/2},$$

for $X = (x,t)$ and $Y = (y,s)$.

We intend to solve the above problem for a function $f \in L^p(\sigma)$, where σ is the surface measure of S_D. For this purpose we introduce a mixed layer potential kernel

(1.1)

$$\begin{aligned} k(X,Y) &:= -\langle \nabla_y W(X-Y), N_y \rangle - \frac{1}{2} W(X-Y) N_s \\ &= \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)})}{2(4\pi)^{n/2}(t-s)^{n/2+1}} (\langle y-x, N_y \rangle + (s-t)N_s) \end{aligned}$$

if $t > s$ and $k(X,Y) = 0$ otherwise, for $X = (x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ and $Y = (y,s) \in \partial D$, where

$$W(X) = W(x,t) = \begin{cases} \frac{\exp(-\frac{|x|^2}{4t})}{(4\pi t)^{n/2}} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and $\langle\ ,\ \rangle$ is the inner product in $\mathbf{R}^n$ and (N_y, N_s) is the unit outward normal to ∂D at Y.

Using this kernel, we define a mixed layer potential, for $f \in L^p(\sigma)$ and $X \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus S_D$,

$$\Phi f(X) = \int k(X,Y) f(Y) d\sigma(Y). \tag{1.2}$$

To study the boundary behavior of the potetial Φf, we consider a parabolic approach region at $Z = (z, s) \in S_D$

$$\Gamma_\eta(Z) = \{X = (x, t) \in D : \langle z - x, N_z \rangle > \eta \delta(X, Z)\}.$$

Using these mixed layer potentials and estimating them by parabolic maximal functions, we will prove the following theorem in §5.

Theorem. *Let $p > 1$ and $f \in L^p(\sigma)$. Then there exists a function $g \in L^p(\sigma)$ such that the mixed layer potential $u \equiv \Phi g$ satisfies the heat equation in D and*

$$\lim_{X \to Z, X \in D} u(X) = 0 \quad \text{for all } Z \in B_D \setminus S_D,$$

$$\lim_{X \to Z, X \in \Gamma_\eta(Z)} u(X) = f(Z) \text{ for } \sigma - \text{almost every point } Z \in S_D.$$

Remark. In this report we considered the initial-Dirichlet problem for the heat operator L. But our method is useful for more general parabolic operators L, for example, the uniformly parabolic operators L. By using the fundamental solution of L instead of W and introducing adequate kernels correponding to $k(X, Y)$, one will obtain similar results to our theorems for the uniformly parabolic operators.

2. Estimates of the kernel k

We denote by (x, t) a point X in $\mathbf{R}^{n+1}$, where $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x', x_n)$ are space variables and t is the time variable. We consider the heat operator L defined by

$$L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

and the adjoint operator of L defined by

$$L^* = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Let Ω be a bounded piecewise smooth domain in $\mathbf{R}^{n+1}$ and u, v be smooth functions on $\overline{\Omega}$. Using the divergence theorem, we obtain

$$\text{(2.1)} \qquad \int_\Omega (uL^*v - vLu)\,dxdt = \int_{\partial\Omega} \{\langle (u\nabla v - v\nabla u), N_x \rangle + uvN_t\}\,dS,$$

where ∇ indicates the n-dimensional spatial gradient operator. If $Lu = L^*v = 0$ in Ω, then (2.1) implies

$$\int_{\partial\Omega} \{((u\nabla v - v\nabla u), N_x) + uvN_t\} dX = 0. \tag{2.2}$$

It is well-known that, for $(x_o, t_o) \in \mathbf{R}^{n+1}$ and the function W defined in §1, the function $v(x,t) = W(x_o - x, t_o - t)$ is a C^∞-function in the half space $t < t_o$ and $L^*v = 0$ in this space. Furthermore $v = 0$ in the half space $t > t_o$.

We see that the kernels W and k defined in §1 have the following properties.

Lemma 2.1 (a) *$W(X - Y) \leq c\delta(X,Y)^{-n}$ for all X, $Y \in \mathbf{R}^{n+1}$,*
(b) *$|\nabla_y W(X - Y)| \leq c\delta(X,Y)^{-n-1}$ and $|\nabla_x W(X - Y)| \leq c\delta(X,Y)^{-n-1}$ for all X, $Y \in \mathbf{R}^{n+1}$, $X \neq Y$,*
(c) *$|k(X,Y)| \leq c\delta(X,Y)^{\alpha-n-1}$ for all X, $Y \in S_D$.*

Lemma 2.2. *Let $0 < \beta \leq 1$ and $X = (x, t_1)$, $Z = (z, t_2) \in S_D$. If $Y = (y, s) \in S_D$, $Y \neq X$, $Y \neq Z$, then*

$$\begin{aligned}&|k(X,Y) - k(Z,Y)| \\ &\leq c\delta(X,Z)^\beta(\delta(X,Y)^{\alpha-\beta-1-n} + \delta(Z,Y)^{\alpha-\beta-1-n}).\end{aligned}$$

3. Parabolic maximal functions

Let us introduce a maximal function with respect to parabolic cylinders in $\mathbf{R}^n$, instead of balls. More precisely for $X = (x,t) \in \mathbf{R}^n$ and $r > 0$ we denote by $C_r(X)$ the bounded cylinder

$$\{Y = (y, s) : Y \in \mathbf{R}^n : |y - x| < r,\ |s - t| < r^2\}$$

and call it a parabolic cylinder. Let $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$. We define the parabolic maximal function by

$$\mathcal{M}f(X) = \sup\{\frac{1}{|C_r(X)|}\int_{C_r(X)} |f(Y)|dY : r > 0\},$$

where $|C_r(X)|$ stands for the measure of $C_r(X)$ with respect to the n-dimensional Lebesgue measure.

We see that the same covering lemma as the lemma on p.9 in [S] is also valid for parabolic cylinders. Using this we obtain the following estimate for the parabolic maximal function by the analogous method as Theorem 1 on p.5 in **[S]**.

Lemma 3.1. (a) *For* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *and* $b > 0$ *we set*

$$E_{f,b} = \{X \in \mathbf{R}^n : \mathcal{M}f(X) > b\}.$$

Then there exists a constant c such that

$$|E_{f,b}| \leq \frac{c}{b}\|f\|_1,$$

for every $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *and* $b > 0$.

(b) *Let* $p > 1$. *Then there exists a contant c such that*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq c\|f\|_p \quad \textit{for every } f \in L^p(\mathbf{R}^n).$$

4. Estimates of layer potentials

Recall that, for $f \in L^p(\sigma)$ and $X \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus S_D$,

$$\mathcal{D}f(X) = -\int \langle \nabla_y W(X-Y), Ny\rangle f(Y)d\sigma(Y)$$

and

$$\mathcal{S}f(X) = -\int W(X-Y)f(Y)d\sigma(Y).$$

To study the boundary behavior of the functions $\mathcal{D}f$ and $\mathcal{S}f$, we consider parabolic approach regions at $Z = (z, t_0) \in S_D$

$$\Gamma_\eta(Z) = \{X = (x,t) \in D : \langle z - x, N_z\rangle > \eta\delta(X,Z)\}$$

and

$$\Gamma_\eta^e(Z) = \{X = (x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \overline{D} : \langle x - z, N_z\rangle > \eta\delta(X,Z)\}$$

for a positive real number η satisfying $\eta < 1$.

Let v be a function defined on $\mathbf{R}^{n+1} \setminus S_D$. We set

$$(v)_\epsilon^*(Z) = \sup\{|v(X)| : \ X \in \Gamma_\eta(Z) \cap B(Z,\epsilon)\}$$

and

$$(v)_\epsilon^{**}(Z) = \sup\{|v(X)| : \ X \in \Gamma_\eta^e(Z) \cap B(Z,\epsilon)\}$$

for $Z \in S_D$ and $\epsilon > 0$.

The layer potentials $\mathcal{D}f$ and $\mathcal{S}f$ are estimated as follows.

Lemma 4.1. *Let $f \in L^p(\sigma)$. Then there exist positive real numbers c and ϵ such that*

$$\|(\mathcal{D}f)^*_\epsilon\|_p \leq c\|f\|_p, \quad \|(\mathcal{D}f)^{**}_\epsilon\|_p \leq c\|f\|_p$$

and

$$\|(\mathcal{S}f)^*_\epsilon\|_p \leq c\|f\|_p, \quad \|(\mathcal{S}f)^{**}_\epsilon\|_p \leq c\|f\|_p,$$

where c is a constant independent of f and

$$\|f\|_p = \left(\int |f(Y)|^p d\sigma(Y)\right)^{1/p}.$$

Let us now introduce another kernel h defined by

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= -\langle \nabla_y W(X-Y), N_y\rangle - W(X-Y)N_s \\ &= k(X,Y) - \frac{1}{2}W(X-Y)N_s \end{aligned}$$

for $X = (x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ and $Y = (y,s) \in \partial D$, if $t > s$ and $h(X,Y) = 0$ otherwise.

Furthermore we set $I_D = S_D \cup B_D$.

Lemma 4.2. *The kernel h has the following properties:*

(a) *If $X \in D$, then*

$$\int_{I_D} h(X,Y)dS(Y) = 1.$$

(b) *If $X \notin \overline{D}$, then*

$$\int_{I_D} h(X,Y)dS(Y) = 0.$$

(c) *If $Z \in S_D \setminus B_D$, then*

$$\int_{I_D} h(Z,Y)dS(Y) = \frac{1}{2}.$$

We next introduce operators K and K^* which map the family of all Borel measurable functions on S_D into itself. We define, for $X \in S_D$

$$Kf(X) = \int k(X,Y)f(Y)d\sigma(Y)$$

if it is well-defined and $Kf(X) = 0$ otherwise. Similarly we also define

$$K^*f(Y) = \int k(X,Y)f(X)d\sigma(X)$$

if it is well-defined and $K^*f(Y) = 0$ otherwise.

Then we can prove the following lemma.

Lemma 4.3. *Let $p > 1$. Then K is a compacr operator on $L^p(\sigma)$.*

Using the operator K, the estimate in Lemma 4.1 and the properties in Lemma 4.2, we have

Lemma 4.4. *Let $p > 1$ and $f \in L^p(\sigma)$. Then*

$$\lim_{X \to Z, X \in \Gamma_\eta(Z)} \Phi f(X) = Kf(Z) + \frac{1}{2}f(Z)$$

for σ-almost every point $Z \in S_D$ and

$$\lim_{X \to Z, X \in \Gamma_\eta^e(Z)} \Phi f(X) = Kf(Z) - \frac{1}{2}f(Z)$$

for σ-almost every point $Z \in S_D$.

Moreover we have

Lemma 4.5. *Let $p > 1$ and $f \in L^p(\sigma)$. If $Kf + \frac{1}{2}f = 0$, then $f = 0$.*

5. Proof of Theorem

Finally we prove our theorem.

Let $f \in L^p(\sigma)$. Since K is a compact operator on $L^p(\sigma)$ by Lemma 4.3 and $K + \frac{1}{2}I$ is injective by Lemma 4.5, there exists a function $g \in L^p(\sigma)$ such that

$$(K + \frac{1}{2}I)g = f.$$

Lemma 4.4 yields

$$\lim_{X\to Z, X\in\Gamma_\eta(Z)} \Phi g(X) = (K + \frac{1}{2}I)g(Z) = f(Z)$$

for σ-almost every point $Z \in S_D$. Moreover it is obvious that Φg satisfies the heat equation in D and

$$\lim_{X\to Z, X\in D} \Phi g(X) = 0 \text{ for every } Z \in B_D \setminus S_D.$$

Thus we see that $u \equiv \Phi g$ is the desired function. Q.E.D.

References

[B1] R. M. Brown, The method of layer potentials for the heat equation in Lipschitz cylinders, Amer. J. Math., **111** (1989), 339–379.

[B2] R. M. Brown, The initial–Neumann problem for the heat equation in Lipschitz cylinders, Trans. Amer. Math. Soc., **320** (1990), 1–52.

[F] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, New York, 1964.

[FR] E. B. Fabes and N. M. Rivière, Dirichlet and Neumann problems for the heat equation in C^1 cylinder, Proc. Sympos. Pure Math., **35** (1979), 179-196.

[FS] E.B.Fabes and S.Salsa, Estimates of caloric measure and the initial-Dirichlet problem for the heat equation in Lipschitz cylinders, Trans. Amer. Math. Soc., **279** (1983), 635–650.

[S] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton, New Jersey, 1970.

[W] H. Watanabe, The initial-boundary value problems for the heat operator in non-cylindrical domains, Preprint.

Hisako Watanabe
Department of Mathematics
Ochanomizu University
Otsuka, Bunkyō-ku
Tokyo 112
Japan

Ergodicitly of Lipschitz dual operators

By

Ikuko Sawashima

Department of Mathematics, Ochanomizu University

Let E be a Banach space with the scalar field Φ = C or R and let E^* be the dual space of E. We define the *Lipschitz dual* $E^\#$ *of* E as the space of all Lipschitz continuous functionals on E with the value 0 at 0. Addition and scalar multiplication in $E^\#$ are usual addition and scalar multiplication as functions on E and the norm $\|x^\#\|_L$ in $E^\#$ is the Lipschitz coefficient of $x^\#$, i.e.,

$$\|x^\#\|_L = \sup\{|x^\#(x) - x^\#(y)|/\|x - y\|; x \neq y\} \qquad \text{for } x^\# \in E^\#.$$

It is clear that $E^* \subset E^\#$ and $\|x^*\| = \|x^*\|_L$.

Let T be a Lipschitz continuous opearator in E with $T0 = 0$. Then we define the *Lipschitz dual operator* $T^\#$ *of* T in $E^\#$ as an operator that maps each element $x^\#$ in $E^\#$ to the composite of T and $x^\#$, i. e.

$$T^\# x^\#(x) = x^\#(Tx) \qquad \text{for } x \in E.$$

The restriction of $T^\#$ to E^* is denoted by $T^\#|_{E^*}$. $T^\#|_{E^*}$ maps E^* to $E^\#$.

In this report, I will give some ergodic properties of the Lipschitz dual operators.

1. Properties of $E^\#$ and $T^\#$

We will summerize the most important properties of the Lipschitz duals, those we reported in [5].

Proposition 1. *The Lipschitz dual space $E^\#$ of E is a Banach space and the dual space E^* of E is a closed subspace of $E^\#$.*

Proposition 2. *The closed unit ball in the Lipschitz dual space $E^\#$ is $\sigma(E^\#, E)$-compact and the dual space E^* of E is a $\sigma(E^\#, E)$-closed subspace of $E^\#$.*

Proposition 3. *Let T be a Lipschitz continuous operator in E with $T0 = 0$. Then*

(1) *the Lipschitz dual* $T^{\#}$ *of* T *is a bounded linear operator in* $E^{\#}$ *and*

(2) $$\|T\|_L = \|T^{\#}\| = \|T^{\#}|_{E^*}\|,$$

where $\|\ \|$ *is the usual norm for bounded linear operators,*

2. Ergodicity of the Lipschitz dual operator

Let $L(E)$ be the set of all Lipschitz continuous operators in E, each of which maps 0 to 0. It can be proved that $L(E)$ is a Banach algebra with usual addition, scalar multiplication, composite of operators and the norm $\|\ \|_L$.

Let S be a Hausdorff space with respect to a topology τ and s_n, $n = 1,2,\ldots$, be a sequence in a compact subset of S. Further let $\mathfrak{F}$ be a free ultrafilter of N, that is, $\mathfrak{F}$ be a maximal filter including all subsets $\{n;\ n \geq m\}$ $m = 1,2,\ldots.$ Then we define the *filter limit* of $\{s_n\}$ for $\mathfrak{F}$, denoted by τ-$\mathfrak{F}$-lim s_n, as follows;

$$\tau\text{-}\mathfrak{F}\text{-}\lim s_n = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} [\text{closure of } \{s_n;\ n \in F\}].$$

Since S is a Hausdorff space and $\{s_n\}$ is in the compact set, τ-$\mathfrak{F}$-lim s_n is determined as an element in the compact set. The *cluster set* of $\{s_n\}$ means the intersection of all closures of sets $\{s_n;\ m \leq n\}$, $m = 1, 2,\ldots.$ It is easily proved that, for every free ultrafilter $\mathfrak{F}$, τ-$\mathfrak{F}$-lim s_n is determined as an element in the cluster point of $\{s_n\}$ and, inversely, every cluster point of $\{s_n\}$ is the filter limit of $\{s_n\}$ for a certain free ultrafilter of N [1].

Hereafter, the topology $\sigma(E^{\#}, E)$ is simply denoted by w$^{\#}$. Let $\{T_n\}$ be a sequence of operators in $L(E)$. If $\sup \|T_n\|_L < \infty$, $\{T_n\}$ is said to be *norm bounded* and if, for every $x \in E$ and $x^* \in E^*$, $x^*(T_n x)$ is convergent to a scalar as $n \to \infty$, $\{T_n\}$ is said to be a *weak Cauchy sequence*. The w$^{\#}$*-cluster set* of $\{T_n^{\#} x^*\}$ is the intersection of all w$^{\#}$-closures of sets $\{T_n^{\#} x^*;\ m \leq n\}$, $m = 1, 2,\ldots$, which is denoted by $\mathrm{Cl}(T_n^{\#} x^*)$.

Lemma 1. *Let* T_n, $n = 1,2,\ldots$, *be operators* contained in $L(E)$. *If there exists an element* $x^\# \in E^\#$ *such that* $\sup \|T_n{}^\# x^\#\|_L < \infty$, *then*

(1) *for every free ultrafilter* $\mathfrak{F}$, $w^\#$-$\mathfrak{F}$-lim $T_n{}^\# x^\#$ *exists in* $\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^\#)$,

(2) $\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^\#)$ *is represented as the set of the filter limits of* $\{T_n{}^\# x^\#\}$ *for all free ultrafilters of* N *with respect to* $w^\#$, i.e.

$$\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^\#) = \{\ w^\#\text{-}\mathfrak{F}\text{-}\lim T_n{}^\# x^\#\ ;\ \mathfrak{F} \textit{ is a free ultrafilter of } \mathrm{N}\ \}.$$

Proof. Notice that any closed ball in $E^\#$ is $w^\#$-compact by Proposition 2. Then (1) and (2) are clear by the fact for filter limits, which is mentioned before.

Lemma 2. *Let* $\{T_n\}$ *be a norm bounded sequence of operators contained in* $L(E)$. Then

(1) *for every* $x^\# \in E^\#$, $\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^\#)$ *is a non empty* $w^\#$*-compact set*,

(2) $\{T_n\}$ *is a weak Cauchy sequence if and only if, for every* x^*, $\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^*)$ *consists of one and only one element.*

Proof. Since $\|T_n\|_L = \|T_n{}^\#\|$ by Proposition 3,(1)is clear by Lemma 1. Let $\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^*)$ consists of one and only one element $y^\#{}_{x^*}$ for each $x^* \in E^*$. Then $w^\#$-$\mathfrak{F}$-lim $T_n{}^\# x^* = y^\#{}_{x^*}$ for every free ultrafilter $\mathfrak{F}$ by Lemma 1. Hence $w^\#$-lim $T_n{}^\# x^* = y^\#{}_{x^*}$ for $x^* \in E^*$, which means that, for every $x \in E$, $x^*(T_n x)$ converges to $y^\#{}_{x^*}(x)$. Namely, $\{T_n\}$ is a weak Cauchy sequence. To show 'only if' part of (2), let $\{T_n\}$ be a weak Cauchy sequence of operators of $L(E)$. Then, for every $x^* \in E^*$ and $x \in E$, $x^*(T_n x)$ converges to a scalar, which is denoted by $Px^*(x)$. Thus

$$\begin{aligned}|Px^*(x) - Px^*(y)| &= \lim |x^*(T_n x) - x^*(T_n y)| \\ &\le \sup \|T_n\|_L \|x - y\| \|x^*\|.\end{aligned}$$

Hence, Px^* is Lipschitz continuous and $Px^*(0) = 0$. It follows that $Px^* \in E^\#$ and $w^\#$-lim $T_n{}^\# x^* = Px^*$. Therefore, by Lemma 1, $\mathrm{Cl}(T_n{}^\# x^*)$ consists of one and only one element Px^*.

Theorem 1. *Let* T *and* T_n, $n = 1,2,\ldots,$ *be operators contained in* $L(E)$ *and satisfy the following conditions* (i) *and* (ii) ;

(i) $\{T_n\}$ *be norm bounded.*

(ii) *for every* x *in* E, $T_n x - T_n Tx$ be $\sigma(E,E^{\cdot})$*-convergent to* 0 *as* $n \to \infty$.

Then, one and only one of the following cases happens;

(1) $T_n x$ *converges weakly to* 0 for every $x \in E$,

(2) *there exists a nonzero* bounded linear operator P in $E^{\#}$ such that

(a) $Px_0{}^{\cdot} \neq 0$ *for cirtain* $x_0{}^{\cdot} \in E^{\cdot}$,

(b) $P|_{E^{\cdot}}$ *maps* $E^{\cdot}$ *into* $F(T^{\#})$, *where* $F(T^{\#})$ *denotes the set of all fixed points of* $T^{\#}$.

Proof. If $Cl(T_n{}^{\#}x^{\cdot})$ consists of only 0 for each elements $x^{\cdot} \in E^{\cdot}$, then the case (1) happens by Lemma 2 (2). If the case (1) does not happen then there exists an element $x^{\cdot}{}_0 \in E^{\cdot}$ such that $Cl(T_n{}^{\#}x^{\cdot}{}_0)$ contains at least nonzero element $y^{\#}{}_0$. Hence, by Lemma 1 (2), there exists a free ultrafilter $\mathfrak{F}_0$ such that

$$w^{\#}-\mathfrak{F}_0\text{-}\lim T_n{}^{\#}x^{\cdot}{}_0 = y^{\#}{}_0 \neq 0.$$

Put

$$Px^{\#} = w^{\#}-\mathfrak{F}_0\text{-}\lim T_n{}^{\#}x^{\#} \quad \text{for every } x^{\#} \in E^{\#}.$$

Then it can be proved easily along the way to the proof of Lemma 2, that $Px^{\#} \in E^{\#}$,

$$\|Px^{\#}\|_L \leq \sup \|T_n\|_L \|x^{\#}\|$$

and linearity of P, since the process of taking the filter limit of scalars keeps linearity and modulus. Therefore P is a bounded linear operator from $E^{\#}$ into $E^{\#}$. To prove that $Px^{\cdot}$ is a fixed point of $T^{\#}$, we need Condition (ii). Let $x^{\cdot} \in E^{\cdot}$. Then, for every $x \in E$,

$$\lim \{T_n{}^{\#}x^{\cdot}(x) - T_n{}^{\#}x^{\cdot}(Tx)\} = \lim \{x^{\cdot}(T_n x) - x^{\cdot}(T_n Tx)\} = 0,$$

whence

$$\mathfrak{F}_0\text{-}\lim \{T_n{}^{\#}x^{\cdot}(x)\} = \mathfrak{F}_0\text{-}\lim \{T_n{}^{\#}x^{\cdot}(Tx)\}.$$

Therefore

$$Px^{\cdot}(x) = Px^{\cdot}(Tx) = T^{\#}Px^{\cdot}(x),$$

which shows that P is an operator from E^* into $F(T^\#)$.

Remark 1. The condition (i) in Theorem 1 is equivalent to the following condition;

(i′) for each $x^* \in E^*$, there exists a positive number K_{x^*} such that

$$\| T_n{}^\# x^* \|_L \leq K_{x^*} \quad \text{for all } n = 1, 2, \ldots .$$

Because, if T satisfies (i′) then, by the principle of uniform boundedness, $\sup_n \| T_n{}^\# |_{E^*} \| < \infty$. By Proposition 3 (2), T satisfies Condition (i). That Condition (i) implies (i′) is obvious.

Remark 2. Assume the same with Theorem 1, but substitute the the following condition (ii′) for Condition (ii) and add the condition (iii);

(ii′) for every $x \in E$ and $x^\# \in E^\#$, $x^\#(T_n x) - x^\#(T_n Tx)$ converges to 0.

(iii) $F(T^\#) \subset F(T_n{}^\#)$.

Then, for each free ultrafilter $\mathfrak{F}$, an operator P defined on $E^\#$ as

$$Px^\# = w^\# - \mathfrak{F} - \lim T_n{}^\# x^\#$$

is a bounded linear operator from $E^\#$ *onto* $F(T^\#)$.

We will apply the Theorem 1 to the Cesàro-mean of T. Denote the Cesàro-mean of T and $T^\#$ with

$$M_n = M_n(T) = (I + T + \ldots + T^{n-1})/n,$$

$$M_n(T^\#) = (I + T^\# + \ldots + T^{\# n-1})/n.$$

Then we have that

$$(M_n(T))^\# |_{E^*} = M_n(T^\#)|_{E^*},$$

$$M_n - M_n T = I/n + T^n/n,$$

$$M_n(T^\#) - M_n(T^\#)T^\# = I/n + (T^{\# n})/n.$$

Using Theorem 1 with $T_n = M_n(T)$, we have immediately the following Theorem 2;

Theorem 2. *Let T be an operator contained in* $L(E)$ *and satisfy the following conditions;*

(i) $\sup \| M_n \|_L < \infty$,

(ii) *for every x in E, $(T^n x)/n$ converges weakly to* 0 *as $n \to \infty$.*
Then, one and only one of the following cases happens

(1) *M_n converges weakly to* 0,

(2) *there exists a nonzero* bounded linear operator P in $E^{\#}$ such that

(a) $Px_0^* \neq 0$ for cirtain $x_0^* \in E^*$,

(b) $P|_{E^*}$ *maps* E^* *into* $\mathrm{F}(T^{\#})$.

Theorem 3. *Let T be an operator contained in* $\mathrm{L}(E)$ *and satisfy the following conditions*;

(i) $\sup \|M_n(T^{\#})\| < \infty$

(ii) $\|(T^n x)/n\| \to 0$ *for every $x \in E$.*

Then, there exists a bounded linear operator P in $E^{\#}$, which has the following properties;

(1) $P = T^{\#}P = PT^{\#}$, $P^2 = P$,

(2) *the range of P coincides with* $\mathrm{F}(T^{\#})$,

(3) $Px^{\#} \in \mathrm{Cl}(M_n(T^{\#})x^{\#})$

$\subset$ w$^{\#}$*-closed convex hull of* $\{(T^{\#})^n x^{\#}\ ; n = 0,1,\ldots\}$.

Remark. If T is non-expansive then T clearly satisfies the conditions (i) and (ii). If

$$\sup\{(\|I\|+\|T\|_{\mathrm{L}}+\ldots+\|T^{n-1}\|_{\mathrm{L}})/n\} < \infty,$$

then

$$\sup \|M_n(T^{\#})\| < \infty.$$

Condition (ii) is equivalent to a condition that, for every $x^{\#} \in E^{\#}$, $((T^{\#})^n x^{\#})/n$ converges to 0 in w$^{\#}$-topology. Because, the functional $e^{\#}$ defined as $e^{\#}(x) = \|x\|$ is an element of $E^{\#}$.

Proof. Let $\mathfrak{F}$ be a free ultrafilter of N. Then, for each $x^{\#} \in E^{\#}$, w$^{\#}$-$\mathfrak{F}$-lim $M_n(T^{\#})x^{\#}$ exists in $\mathrm{Cl}(M_n(T^{\#})x^{\#})$ by Condition (i) and Proposition 2. Define an operator P as

$$Px^{\#} = \mathrm{w}^{\#}\text{-}\mathfrak{F}\text{-}\lim M_n(T^{\#})x^{\#} \quad \text{for } x^{\#} \in E^{\#}.$$

Then P is an operator in $E^\#$ and P clearly has property (3). Since

$$
\begin{aligned}
|\{M_n(T^\#)x^\# - M_n(T^\#)T^\# x^\#\}(x)| &= |\{x^\#/n - (T^{\# n}x^\#)/n\}(x)| \\
&= |x^\#(x)/n - x^\#(T^n x)/n| \\
&\leq |x^\#(x)/n| + |x^\#(T^n x)/n| \\
&\leq \|x^\#\|_L(\|x/n\| + \|(T^n x)/n\|,
\end{aligned}
$$

$\{M_n(T^\#)x^\# - M_n(T^\#)T^\# x^\#\}$ w$^\#$-converges to 0 as $n \to \infty$ by Condition (ii). And $\{M_n(T^\#)x^\# - T^\# M_n(T^\#)x^\#\}$ also w$^\#$-converges to 0 as $n \to \infty$. Because, $T^\#$ and $M_n(T^\#)$ are commutative by the linearity of $T^\#$. Hence, for each $x^\# \in E^\#$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}^\#\text{-}\mathfrak{F}\text{-}\lim M_n(T^\#)x^\# &= \mathrm{w}^\#\text{-}\mathfrak{F}\text{-}\lim T^\# M_n(T^\#)x^\# \\
&= \mathrm{w}^\#\text{-}\mathfrak{F}\text{-}\lim M_n(T^\#)T^\# x^\#
\end{aligned}
$$

which implies the first equality of (1) and $Px^\# \in \mathrm{F}(T^\#)$ for all $x^\# \in E^\#$. For every $y^\# \in \mathrm{F}(T^\#)$, clearly holds $M_n(T^\#)y^\# = y^\#$. Therefore, the range of P coincides with $\mathrm{F}(T^\#)$ and $P^2 = P$.

References

[1] N.Bourbaki, Topologie générale. Chap.I, Hermann, Paris(1951).

[2] John B.Conway, A Course in Functional Analysis, Springer, New York(1985).

[3] N.Dunford & J.Schwartz, Linear Operators.I, Interscience, New York(1958)

[4] U.Krengel, Ergodic Theorems, Waler de Gruyter, Berlin·New York (1985)

[5] I.Sawashima, 順序を保存する作用素の固有値について,第1回関数空間セミナー報告集,Series # 26, 1993, pp35-40.