# １９９３年度談話会・特別講演
# アブストラクト集

## Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

**Edited by T. Ozawa**

**Series ♯ 32. July, 1994**

## HOKKAIDO UNIVERSITY

## TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.

♯ 2: J.L. Heitsch, The Lefshetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.

♯ 3: K. Kubota (Ed.), 第12回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.

♯ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.

♯ 5: Y.Giga(Ed.),Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.

♯ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.

♯ 7: S. Izumiya,G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集,1988.

♯ 8: K. Kubota (Ed.), 第13回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.

♯ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.

♯ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring理論とK3曲面, 91 pages. 1988.

♯ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.

♯ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.

♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう"1987年7月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第14回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.

♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第15回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.

♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第16回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.

♯ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.

♯ 24: K. Kubota (Ed.), 第17回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

♯ 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28 〜 10.2 北海道大学での集中講義　講義録, 52 pages. 1993.

♯ 26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.

♯ 27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

♯ 28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.

♯ 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.

♯ 30: Y. Giga, Y.-G. Chen (Eds.), 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.

♯ 31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.

# １９９３年度談話会・特別講演アブストラクト

# 談話会・特別講演一覧（1993年度）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 4月14日（水） | * | G.A. Elliott | 氏（トロント大） | Some problems concerning amenable $C^*$-algebras |
| 2. | 4月20日（火） | * | 河津 清 | 氏（山口大・教育） | ランダム媒質の中の拡散過程について |
| 3. | 4月21日（水） | * | 神保秀一 | 氏（北大・理） | ＧＬ方程式と解の安定性 |
| 4. | 4月28日（水） | * | 前島 信 | 氏（慶応大・理工） | Self-similar stable process について |
| 5. | 5月12日（水） | * | 林 実樹広 | 氏（北大・理） | 有界正則関数環と同型問題 |
| 6. | 5月18日（火） | * | 吉田敬之 | 氏（京大・理） | 志村多様体のゼータ関数について |
| 7. | 5月18日（火） | | F. Shahidi | 氏（パデュウ大） | Automorphic L-functions and number theory |
| 8. | 5月19日（水） | * | 柳田英二 | 氏（東工大・理） | 界面の運動方程式と反応拡散方程式 |
| 9. | 5月26日（水） | | F. Campana | 氏（Univ. of Nancy 1） | On the universal covering of compact Kähler manifolds |
| 10. | 6月2日（水） | | 中居 功 | 氏（北大・理） | Universal 1st order PDE with complete integrals |
| 11. | 6月8日（火） | * | 原 隆 | 氏（東工大・理） | Self-avoiding walk in five or more dimensions |
| 12. | 6月10日（木） | * | 河野俊丈 | 氏（東大・数理科学） | Jones-Witten invariants and classical knot theory |
| 13. | 6月16日（水） | * | Steven Zucker | 氏（Johns Hopkins 大） | The boundary cohomology of locally symmetric varieties |
| 14. | 6月16日（水） | * | 福島正俊 | 氏（阪大・基礎工学） | フラクタル集合上のラプラス作用素のスペクトル解析 |
| 15. | 6月23日（水） | | Clara Chan | 氏（北大・理） | Shellings and subdivisions of convex polytopes |
| 16. | 6月30日（水） | * | 小野 孝 | 氏（Johns Hopkins 大） | オイラーと楕円曲線 |
| 17. | 7月1日（木） | * | 林 仲夫 | 氏（群馬大・工） | Regularity of solutions in time to nonlinear Schrödinger equations |
| 18. | 7月2日（金） | * | Francois Apéry | 氏（Univ. de Haute-Alsace） | The eversion of the cuboctahedron |
| 19. | 7月5日（月） | | Neil trudinger | 氏（ｵｰｽﾄﾗﾘｱ国立大/東大） | Curvature equations |
| 20. | 7月6日（火） | | Barnard Morin | 氏（Univ. Louis-Pasteur） | Piecewise linear models for the eversion of the sphere |
| 21. | 7月7日（水） | * | 土屋信雄 | 氏（桐陰学園横浜大） | ３次元多様体上の完備な葉層構造について |
| 22. | 7月14日（水） | * | Bernard Teissier | 氏（ENS） | Mixed multiplicities, mixed degrees, mixed volumes |
| 23. | 7月16日（金） | | Lê Dũng Tráng | 氏（パリ第７大） | Topology of complex polynomials |
| 24. | 7月20日（火） | | Yuri Tschinkel | 氏（ハーバード大） | Counting in Diophantine geometry |
| 25. | 8月4日（水） | * | 横山悦郎 | 氏（九工大・情報） | The effect of anisotropic growth speed for an interface on pattern formation during the growth of crystals |
| 26. | 8月4日（水） | * | 木村正人 | 氏（京大数理研（院）） | ２次元の曲率流れの方程式に対する一様収束評価付き数値解法 |
| 27. | 8月6日（金） | | 竹崎正道 | 氏（UCLA） | 関数解析における分類論について |
| 28. | 8月26日（木） | * | 西岡啓二 | 氏（慶応大・環境情報） | Differential algebraic function fields with no movable algebraic branches |
| 29. | 9月1日（水） | * | 渡辺文彦 | 氏（北大・理（院）） | Painlevé 方程式の超越解の分類 |
| 30. | 9月9日（木） | * | C. Dohmen | 氏（Univ. of Bonn） | Selfsimilar solutions of porous medium equations |
| 31. | 9月14日（火） | | 加藤和也 | 氏（東工大・理） | 楕円曲線の数論とＫ理論、ｐ進 Hodge 理論 |
| 32. | 9月16日（木） | * | 泉 脩藏 | 氏（近畿大・理工） | 多重根をとる多項式は次数が高い |
| 33. | 9月22日（水） | * | 小池茂昭 | 氏（埼玉大・理） | On the state-space constraint ploblem |
| 34. | 10月6日（水） | * | 菊地光嗣 | 氏（静岡大・教養） | 変数階数の擬微分作用素と Sobolev 空間について |
| 35. | 10月13日（水） | * | 酒井文雄 | 氏（埼玉大・理） | 特異平面曲線，巡回被覆平面，ザリスキー |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 36. | 10月14日（木）＊ | 溝口紀子 氏 | （東京学芸大） | 曲線の発展方程式の周期解 |
| 37. | 10月20日（水）＊ | 谷島賢二 氏 | （東大・数理科学） | 波動作用素の$L^p$有界性 |
| 38. | 10月27日（水）＊ | 内山充 氏 | （福岡教育大） | 自己共役作用素の可換性 |
| 39. | 10月28日（木）＊ | 山崎昌男 氏 | （一橋大・商） | distribution を初期値とする半線型熱方程式と Navier-Stokes 方程式 |
| 40. | 11月10日（水）＊ | 辻下徹 氏 | （北大・理） | 非有基的集合論とその応用 |
| 41. | 11月17日（水）＊ | 山口博史 氏 | （滋賀大・教育） | $\mathbb{R}^3$の平衡ベクトルポテンシャル |
| 42. | 11月17日（水）＊ | 小川卓克 氏 | （名大・理） | Two-dimensional nonlinear elliptic equation related to Trudinger-Moser inequality |
| 43. | 11月22日（月）＊ | X. Gómez-Mont 氏 | （CIMAT, Guanajuato） | Holomorphic foliations in the projective plane |
| 44. | 11月22日（月） | J.-P. Brasselet 氏 | （CIRM, Marseille） | About intersection of cycles |
| 45. | 11月24日（水）＊ | 郡敏昭 氏 | （早大・理工） | $\bar{\partial}$ 作用素と Dirac 作用素の境界条件付指数定理 |
| 46. | 11月24日（水）＊ | 宮岡洋一 氏 | （京大数理研） | 曲面上の曲線族について |
| 47. | 11月25日（木）＊ | D. Lehmann 氏 | （Univ. de Montpellier） | Residues of analytic sets invariant by a singular holomorphic vector field |
| 48. | 11月30日（火）＊ | P.A. Schweitzer 氏 | （Pontificia Univ.） | Kuperberg's $C^\infty$-counterexample to the Seifert conjecture — a flow on the three-sphere with no periodic tranjectories — |
| 49. | 12月 1日（水）＊ | G. Hector 氏 | （リヨン大） | Ends of leaves and classification of Lie foliations |
| 50. | 12月 7日（火） | 石村隆一・岡田靖則氏 | （千葉大・教養） | 複素領域の convolution equations について |
| 51. | 12月 8日（水）＊ | 津田一郎 氏 | （北大・理） | 複雑系： デーモンの数理をめざして |
| 52. | 12月 8日（水）＊ | 片山良一 氏 | （大阪教育大） | Inclusion からつくられる Cuntz-Krieger 環について |
| 53. | 12月15日（水）＊ | 友枝謙二 氏 | （大阪工大・一般教育） | Numerical approximations to interfaces for some nonlinear diffusion equations with absorption |
| 54. | 12月16日（木） | W. Fushchych 氏 | （ｳｸﾗｲﾅ科学ｱｶﾃﾞﾐｰ） | Symmetry and reduction of nonlinear equations of mathematical physics |
| 55. | 1月11日（火）＊ | 寺井直樹 氏 | （長野高専） | Cohen-Macaulay ASL について |
| 56. | 1月12日（水）＊ | 小林美治 氏 | （東邦大・理） | 書換えシステムとホモトピー |
| 57. | 1月13日（木）＊ | 宮崎誓 氏 | （長野高専） | Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity |
| 58. | 1月18日（火）＊ | 石毛和弘 氏 | （東工大・理） | The gradient theory of the phase transitions in Cahn-Hilliard fluids with the Dirichlet boundary conditions |
| 59. | 1月18日（火）＊ | Song-Sun Lin 氏 | （台湾国立交通大） | Singular solutions for semilinear elliptic equations |
| 60. | 1月25日（火）＊ | Bian Baojun 氏 | （中央大） | Remarks on uniqueness of harmonic maps from ball into sphere |
| 61. | 1月26日（水）＊ | 佐々木武 氏 | （神戸大・理） | 射影極小曲面の変換について |
| 62. | 2月 4日（金） | 小薗英雄 氏 | （名大・工） | Navier-Stokes equations in exterior domains |
| 63. | 2月10日（木）＊ | 松村英之 氏 | （名大・理） | 可換環論の歴史 |
| 64. | 2月14日（月）＊ | 藤田安啓 氏 | （富山大・理） | Completely positive measure をもつ integrodifferential equation の resolvent の正則性について |
| 65. | 2月15日（火）＊ | 鈴木治夫 氏 | （北大・理） | Residue and Maslov classes of some Lagrangian immersions with singularity |
| 66. | 2月16日（水） | 田中昇 氏 | （北大・理） | 微分式系に付随する変分問題 |
| 67. | 2月16日（水）＊ | 香城日出麿 氏 | （北大・理） | 平均曲率一定な有向閉部分多様体について |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 68. | 2月18日（金） | | 田　中　和　永 | 氏（名大・理） | Periodic solutions of singular Hamiltonian systems |
| 69. | 2月23日（水） | * | 藪　田　公　三 | 氏（奈良女子大・理） | 均質型空間（Coifman - Weiss 流）上の函数空間 |
| 70. | 3月　7日（月） | * | Y. Renardy | 氏（ｳﾞｧｰｼﾞﾆｱ工科大） | Instabilities in steady two-component flows |
| 71. | 3月16日（水） | * | 福　井　敏　純 | 氏（名工大） | Modified Nash triviality on real polynomial zeros (with S. Koike & M. Shiota) |
| 72. | 3月22日（火） | | 池　畑　秀　一 | 氏（岡山大・教養） | 環のＨ－分離拡大 |
| 73. | 3月22日（火） | | 名　和　範　人 | 氏（東工大・理） | 非線型 Schrödinger 方程式の爆発解 |
| 74. | 3月24日（木） | * | 森　本　芳　則 | 氏（京大・人間環境） | 無限次退化エゴロフ型作用素の局所可解性と準楕円性 |

# The classification problem for amenable C*-algebras

George A. Elliott

**1.** On considering the well known classification of amenable von Neumann algebras ([7], [26], [9], [8], [24]), it seems natural to ask whether an analogue of this exists in the setting of C*-algebras.

The most naive form of this question, but perhaps also the most natural, is whether the class of amenable von Neumann algebras (with separable predual) can just be replaced by the class of (separable) amenable C*-algebras, — which are those which always generate amenable von Neumann algebras ([8], [25]).

Since the invariant for amenable von Neumann algebras — the Connes-Takesaki flow of weights ([9], [26]) — may perhaps be considered as being K-theoretical in nature (it is based on the unitary equivalence classes of weights), it seems tempting to ask if K-theoretical data (loosely speaking, data derived only from unitary equivalence classes of elements of the algebra) are also sufficient to determine an amenable C*-algebra. There is of course also the precedent of AF algebras — inductive limits of sequences of finite-dimensional C*-algebras ([23], [10], [3], [14]). The question of going beyond this to other inductive limits was raised soon afterwards by Effros in [11].

One notable consequence of a K-theoretical classification would be that an amenable C*-algebra, not obviously arising from a certain elementary construction, such as that of inductive limit of C*-algebras of type I, could be shown to arise in this way simply by K-theoretical calculations. Such a calculation, for instance, would show that the irrational rotation C*-algebra must be an inductive limit of finite direct sums of matrix algebras over

$C(\mathbb{T})$. (That this obtains at the level of K-theory follows from [15], [30], and [28].) Perhaps with such considerations in mind, Effros suggested in [11] and [12] that the irrational rotation $C^*$-algebra might be such an inductive limit.

**2.** Recently, the irrational rotation $C^*$-algebra has been shown to have this form ([20]). Other amenable $C^*$-algebras have also been shown to be inductive limits of $C^*$-algebras of type I, — the first two such results appearing simultaneously in [1] and in [29]. (Subsequent results were [27], [4], and [5]; these all preceded, and indeed led to, [20].)

**3.** Recently, also, extensions of the AF algebra classification have been obtained ([16], [18], [19]).

Roughly speaking, it seems to be possible to deal with matrix algebras over $C(\mathbb{T})$ in much the same way as with matrix algebras over $\mathbb{C}$. In other words, it appears that the methods used in the AF algebra classification theorem can be extended to classify inductive limits of sequences of finite direct sums of matrix algebras over the commutative $C^*$-algebra $C(\mathbb{T})$, in terms of K-theoretical invariants (which should now include the space of traces).

The case that the inductive limit $C^*$-algebra is of real rank zero ([6]), i.e., has the property that each selfadjoint element can be approximated by one with finite spectrum, was dealt with in [16]. This case includes, for example, the case that the inductive limit is simple with unique trace ([2]).

The case that the inductive limit $C^*$-algebra is simple and has $K_1$ equal to zero was dealt with in [18]. (As pointed out by Thomsen, if the inductive limit has $K_1$ equal to zero, it can be expressed as an inductive limit of finite direct sums of matrix algebras over $C([0,1])$, rather than over $C(\mathbb{T})$); in the case of real rank zero it is easy to show that such an inductive limit must be AF, and when the real rank is not zero, attention can be concentrated on the properties of traces, intervals not presenting anything like the same topological difficulties as circles.)

The case of general inductive limits of sums of matrix algebras over C(T) may, I think, be expected to yield to the methods now available. One should expect to combine the methods of [16], or rather, the substantial sharpening of these methods by Su in [31], with the methods of [18]. In the simple case, this appears to work ([19]).

With $T^2$ in place of T, on the other hand, the problem becomes much more difficult. (An interesting case of this is dealt with in [21], using the result of [20].)

4. A satisfactory classification should also provide constructions of the algebras considered. Ideally, one would perhaps hope for a natural construction, or functor, from invariant to algebra. At the very least, there should exist an algebra homomorphism corresponding to any given homomorphism at the level of the invariant.

If the requirement of functoriality is not imposed, then the present results would appear to be satisfactory from the point of view of constructions beginning from the invariant. An analysis of the automorphism group of an inductive limit of direct sums of matrix algebras over C(T), carried out in [22], yields in particular that the automorphism group of the irrational rotation $C^*$-algebra is an extension of a (topologically) simple Polish group by the group $GL(2, \mathbb{Z})$.

5. The question also arises, once one has a complete invariant, whether the possibilities that arise can be described in an intrinsic way. (This problem in the case of AF algebras was solved in [13], in which dimension groups defined as inductive limits were characterized abstractly.)

For the case of inductive limits of sequences of direct sums of matrix algebras over C(T), assumed to be of real rank zero, such a description of the invariant was given in [17].

(It is an analogue of that given for dimension groups in [13], but for what may perhaps be called graded dimension groups.)

If the assumption of real rank zero is dropped and one restricts to the simple case, with $K_1 = 0$ and $K_0$ of rank one, then a simple abstract description of the possibilities for the invariant was given by Thomsen in [32]: the additional information necessary for the classification given in [18] consists of an arbitrary (metrizable) simplex.

## References


1. B. Blackadar, Symmetries of the CAR algebra, *Ann. of Math.* **131** (1990), 589–623.
2. B. Blackadar, O. Bratteli, G. A. Elliott, and A. Kumjian, Reduction of real rank in inductive limits of C*-algebras, *Math. Ann.*, to appear.
3. O. Bratteli, Inductive limits of finite dimensional C*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **171** (1972), 195–234.
4. O. Bratteli, D. E. Evans, and A. Kishimoto, Crossed products of totally disconnected spaces by $Z_2 * Z_2$, preprint.
5. O. Bratteli and A. Kishimoto, Non-commutative spheres III: Irrational rotations, preprint.
6. L. G. Brown and G. K. Pedersen, C*-algebras of real rank zero, *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 130–149.
7. A. Connes, Classification of injective factors, *Ann. of Math.* **109** (1976), 73–115.
8. A. Connes, On the cohomology of operator algebras, *J. Funct. Anal.* **28** (1978), 173–185.
9. A. Connes and M. Takesaki, The flow of weights on factors of type III, *Tôhoku Math. J.* **29** (1977), 473–575.
10. J. Dixmier, On some C*-algebras considered by Glimm, *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 182–203.
11. E. G. Effros, Dimensions and C*-algebras, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 46, Amer. Math. Soc., Providence, 1981.
12. E. G. Effros, On the structure theory of C*-algebras: some old and new problems, *Operator Algebras and Applications* (edited by R. V. Kadison), *Proc. Symp. Pure Math.* **38** (1982), Part 1, pages 19–34.
13. E. G. Effros, D. E. Handelman, and C.-L. Shen, Dimension groups and their affine representations, *Amer. J. Math.* **102** (1980), 385–407.
14. G. A. Elliott, On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras, *J. Algebra* **38** (1976), 29–44.

15. G. A. Elliott, On totally ordered groups, and $K_0$, *Ring Theory, Waterloo. 1978* (editors, D. Handelman and J. Lawrence), Lecture Notes in Mathematics 734. Springer-Verlag, New York, 1979, pages 1–49.
16. G. A. Elliott, On the classification of C*-algebras of real rank zero, preprint.
17. G. A. Elliott, Dimension groups with torsion, *International J. Math.* **1** (1990), 361–380.
18. G. A. Elliott, A classification of certain simple C*-algebras, preprint.
19. G. A. Elliott, A classification of certain simple C*-algebras, II, in preparation.
20. G. A. Elliott and D. E. Evans, The structure of the irational rotation C*-algebra, preprint.
21. G. A. Elliott and G. Gong, On inductive limits of matrix algebras over the two-torus, in preparation.
22. G. A. Elliott and M. Rørdam, The automorphism group of the irrational rotation C*-algebra, preprint.
23. J. G. Glimm, On a certain class of operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 318–340.
24. U. Haagerup, Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type $III_1$, *Acta Math.* **158** (1987), 95–148.
25. U. Haagerup, All nuclear C*-algebras are amenable, *Invent. Math.* **112** (1990), 499–523.
26. W. Krieger, On ergodic flows and the isomorphism of factors, *Math. Ann.* **223** (1976), 19–70.
27. A. Kumjian, An involutive automorphism of the Bunce-Deddens algebra, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **10** (1988), 217–218.
28. M. Pimsner and D. Voiculescu, Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C*-algebras, *J. Operator Theory* 4 (1980), 93–118.
29. I. F. Putnam, On the topological stable rank of certain transformation group C*-algebras, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **10** (1990), 197–207.
30. M. A. Rieffel, C*-algebras associated with irrational rotations, *Pacific J. Math.* **93** (1981), 415–429.
31. H. Su, On the classification of C*-algebras of real rank zero: inductive limits of matrix algebras over graphs, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **13** (1991), 223–228.
32. K. Thomsen, Inductive limits of interval algebras: the tracial state space, preprint.

Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, Ontario
Canada M5S 1A1

and

Mathematics Institute,
Universitetsparken 5,
DK-2100 Copenhagen Ø,
Denmark

# Random Environment に関するトピック

河津清（山口大学）

§1. Extinction probability of Branching processes in randim environment

$\varphi_{\zeta_n}$ を environment$\zeta_0.\zeta_1,\cdots$ における第 $n$ 世代の確率母関数とし、$\{Z_n, n\geq 1\}$ を第 $n$ 世代の人口とする。environment $\bar{\zeta}=\{\zeta_n\}$ はある独立変数列としておく。このとき、次の量を考察して見る。

$$P(Z_n\to 0 \text{ as } n\to\infty|\bar{\zeta},\ Z_0=1)=q(\bar{\zeta}),$$

$$P(Z_n\to 0 \text{ as } n\to\infty|\bar{\zeta},\ Z_0=k)=q(\bar{\zeta})^k,$$

$$q_k=E[q(\bar{\zeta})^k].$$

次の優臨界条件を仮定しておく。

1. $E[\log\varphi'_\zeta(1)^-]<E[\log\varphi'_\zeta(1)^+]$

2. $E[-\log(1-\varphi_\zeta(0))]<\infty$

明らかに、environment が常数の場合における Galton-Watson 過程では

$$q_k=q^k,\ k=1,2,\cdots.$$

となっているのだが、 $\xi=\log\varphi'_\zeta(1),\ F(\theta)=E[e^{-\theta\xi}]$ とおいてみるとき。次の命題が出されている。

命題 (Grey- Zhunwei) 次を満たす$\theta_0>0$ があったとせよ。

$F(\theta_0)=1,\ F'(\theta_0)<\infty$

このとき次の事が成り立つ。

*(a)* $\liminf_{k\to\infty}k^{\theta_0}q_k>0,$

*(b)* $E[(1-\varphi_\zeta(0)_0^{-\theta}]<\infty\Rightarrow q_k=o(k^{-\theta}),\ k\to\infty\ \theta<\theta_0.$

このような、古典的な確率過程と、environmnent の影響をうけた確率過程の比較研究はさらに発展させらるべきであろう。

§2. Diffusion process in random environment

$\{W(x), x\geq 0\}$ と $\{W(-x), x\geq 0\}$ を独立な Brownian 運動で原点を通過するものとし、$\kappa$ を正の常数とする。このとき、形式的に次の確率微分方程式で定まる確率過程を *Diffusion process in random environment* と呼ぶ。

$$dX(t)=dB(t)-\frac{1}{2}(W'(X(t))-\frac{\kappa}{2})dt, X(0)=0$$

此の過程は Kesten-Kozlov-Spiyzer の拡散モデルと考えられている。$0<\kappa<1$ の場合に、完全に極限定理が得られれた。他の場合も大数の法則に対応する結果を報告した。

# GL 方程式と解の安定性

神保　秀一

Ginzburg Landau ( GL ) 方程式は低温超伝導の状態を記述するモデルとして導入された．$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界をもつ有界領域とし，次の汎関数を考える．$(\Phi, A)$ を変数として

$$(1) \qquad \mathcal{H}(\Phi, A) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}|(h\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 \right\} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\mathrm{rot}A|^2 dx$$

ただし，$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ なる関数．$\lambda > 0$ and $h > 0$ はパラメータ．$\Phi$ は波動関数，$A$ は磁場のベクトルポテンシャルをあらわす．この汎関数の極小値を与える $(\Phi, A)$ は実現可能な超伝導状態に対応する．一方，磁場の効果 ( $A$ ) を無視した次の汎関数も (1) の代用品としてしばしば扱われる．

$$(2) \qquad \mathcal{H}_0(\Phi) = \int_\Omega \left\{ \frac{h^2}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 \right\} dx.$$

これらの汎関数を停留させる $(\Phi, A)$, $\Phi$ を決める方程式（変分方程式）が GL 方程式である．

$$(3) \qquad \begin{cases} (h\nabla - iA)^2\Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ h\partial\Phi/\partial\nu - i(A \cdot \nu)\Phi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A + ih(\overline{\Phi}\nabla\Phi - \Phi\nabla\overline{\Phi})/2 + |\Phi|^2 A = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,A = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^c. \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} h^2\Delta\Phi + \lambda(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \partial\Phi/\partial\nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで，基本的に問題にしたいことは非自明な安定解の存在やその性質である．しかし，様々な場合によっていろいろなことがおこりそうなので一般的に強い主張をするのは難しそうである．上の方程式において状況を決めているのはパラメータや領域 $\Omega$ であるが，とくにどのような $\Omega$ について非自明な安定解が存在するであろうか？(どの様な領域に永久電流が存在するのかといってもよい)．また，(3) は (4) とどう関係するのか？凸領域の場合と回転対称の領域の場合にいくつかの結果が得られる．

# Self-similar stable process について

前島 信 （慶応大学理工学部）

self-similar process （自己相似的確率過程）とは、時間と空間の適当な変換の下で分布が不変となるような確率過程のことである。Brown 運動が自己相似性をもっていることは古くからしられていた。それ以外の Gauss 型 self-similar process である fractional Brownian motion もすでに Kolmogorov (1940) によって議論されている。一方、一般の self-similar process は、極限定理との関連で Lamperti (1961) によってきちんと確率論的に取り上げられ、「そのような確率過程は、つねに正規化されたある確率過程の極限になっている。また、正規化された確率過程の極限はつねに self-similar である」ことが示された。

確率過程において、自己相似性は比較的弱い性質で、確率過程の他の性質（例えば、マルコフ性や加法性）のように、それだけから色々なことがわかるようなものではない。しかし確率過程のある種の性質には自己相似性が本質的に係わっていることも知られている。その中で、Brown 運動や fractional Brownian motion は自己相似性のほかに、分布としての性質、Gauss 性と、定常増分性を持っている。そこで、それらを含むクラスとして、自己相似性と定常増分性プラス分布の性質、安定分布（ Gauss 分布を含む広いクラスの分布）であることを仮定したクラスを考えると色々なことがわかり、非常に良く研究されている。

この講演では、このクラスについて主に講演者自身の得た結果を中心に、以下のことを述べた。

1．self-similar stable process が存在するための、それぞれのパラメータに関する必要十分条件。

2．linear fractioanl stable motion と呼ばれるクラスについて。

3．harmonizable fractional stable motion と呼ばれるクラスについて。

4．それらの同等性、非同等性。それらのクラスのある特徴づけ。その他。

# 有界正則函数環と同型問題

(北大談話会, 1993.5.12)

北大・理 (教養) 林 実樹廣

**1.** はじめに.　複素領域 (リーマン面)$R$が与えられれば, その上の有界正則関数全体 $H^\infty(R)$ が決まる. $H^\infty(R)$ 自然な見方で可換 $\mathbf{C}$ 代数 (Banach 環) になっている. ここでは, 逆に, $\mathbf{C}$ 代数 $H^\infty(R)$ からリーマン面 $R$が決まるかどうかを考える.

$R$が任意のリーマン面のとき, $\mathbf{C}$ 代数として, $R$上の有理型関数全体 $M(R)$ を考えれば, $M(R)$ の代数構造は $R$を決める. また, $R$が開リーマン面ならば, $\mathbf{C}$ 代数として, $R$上の正則関数全体 $A(R)$ を考えれば, $A(R)$ の代数構造は $R$を決める. これらは, よく知られている ([1]).

$\mathbf{C}$ 代数として, $H^\infty(R)$ を考えるときは自明な反例を除くための注意が必要になる.

(1) 除去可能特異点：リーマンの除去可能特異点定理で分かるように, 有界正則関数は内点に近い境界点には正則に拡張出来ることがある.

(2) Myrberg 型現象：単位開円板上の 2 葉の被覆面 $R$で, $H^\infty(R)$ が単位開円板上の物と同型になることがある. より一般には, リーマン面上の異なる二点 $p$, $q$の近傍で有界正則関数が同一な Taylor 展開を持つことが起こり得る.

次の Royden の定理を使うと, このような反例を一般論として除くことができる.

[定理] 一般に $A$ を $R$上の正則関数から成る部分環で, 定数以外の元含んでいるものとする. このとき, 関数族 $A$ に関する $R$の Royden's resolution と呼ぶところのリーマン面 $\widetilde{R}$ で, 以下の三性質を持つものがあり, 等角同値を除いて一意に決まる:

(a) 解析写像$\phi : R \to \widetilde{R}$と, $\widetilde{R}$上の正則関数環$\widetilde{A}$があって, $\widetilde{A} \circ \phi = A$.

(b) $A$ は$\widetilde{R}$の点を弱点分離する：孤立点からなる高々可算な集合 $E$があって, $\widetilde{R}$の異なる二点 $p$, $q$に対し, 関数$\widetilde{f} \in \widetilde{A}$があって, $f(p) \neq f(q)$.

(c) $\widetilde{R}$は性質 (a), (b) を満たすもののうち極大である.

この様なリーマン面$\widetilde{R}$は, 基本的には, $A$ を関数族として解析接続することで得られる. $A$ として $H^\infty(R)$ を考えると, $\widetilde{A} = H^\infty(\widetilde{R})$ となることがバナッハ環の一般論から示される. 従って, $H^\infty(R)$ の自然領域として$\widetilde{R}$を考えるのが良いと思われる.

以上の用語のもとに, 同型問題は次のように述べられる.

[同型問題] $H^\infty(R)$ と $H^\infty(R')$ が同型でその一方が定数関数以外の元を含むとするならば, リーマン面$\widetilde{R}$と$\widetilde{R'}$は等角同値か?

特別な場合にはこの問題は正しいことが分かっている：

(a) $R$, $R'$が平面領域のとき, 同型問題は成り立つ. (Chevalley-Kakutani, cf. [2])

(b) $R$上に, 極を持つ有理型関数であるコンパクト集合の外で有界となるものが存在する場合は, 同型問題が成り立つ.

この講演での主結果は, 残念なことに, 同型問題は一般には成立しないことを示すことにある. 定理の形で述べると,

[定理 1] 次の性質をもつリーマン面 $R$が存在する. $R$は bi-disc $\Delta^2 = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1\}$ の (複素)1 次元部分多様体であり, $R$上の任意の有界正則関数は$\Delta$上の有界正則関数に一意的に拡張される. 特に, $H^\infty(R)$ は $H^\infty(\Delta^2)$ と $\mathbf{C}$ 代数 (Banach 環) として同型になる.

$\Delta^2$の任意の 1 次元部分多様体 $R$について, $R$の正則関数の$\Delta^2$上への拡張は常にできるが, 一意的では有り得ない. 有界正則関数の拡張は一般にはできない ([3:7.5.3]). また, 一意性も一般には成り立たない. 従って,「有界」ということが上の定理で大切な点である.

**2.** $R$**の構成.** 最初に, 正数の増加列 $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ で $r_n \nearrow 1$ となるもの (任意でよい) を固定して考える. 別に, 自然数の列 $\{N_n\}_{n=1}^\infty$ を考える. 各 $N_n$は十分大きく取るが具体的には以下の構成の中で定める.

まず

$$E_n = \{a_{nk} : k = 0, \dots, N_n\}, \quad a_{nk} = r_n e^{2\pi i k/N_n}$$
$$E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$$
$$V = \{(z,w) \in \Delta^2 : z \in E \text{ or } w \in E\}.$$

とおく.

主張 **1** $N_n$を十分大きくすると $V$ 上の有界正則関数は$\Delta^2$上の有界正則関数に一意的に拡張される.

これは $f \in H^\infty(V)$ に対して,

$$(2) \quad S_n f(z,w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{k,l=1}^{N_n} \frac{f(a_{nk}, a_{nl})}{(a_{nk} - z)(a_{nl} - w)} \Delta a_{nk} \Delta a_{nl}, \quad \Delta a_{nk} = a_{nk} - a_{n\,k-1}.$$

とおくと, $S_n f$ は $\Delta_n = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 : |z| < r_n, |w| < r_n\}$ で正則である. 更に, $S_n f \to F$ は$\Delta^2$上で広義一様収束し, $||f||_\infty = ||F||_\infty$も示せる. 拡張の一意性はこの過程で明らかになる.

$V$は $E \times E$に属する点で交差している単位開円板の和集合である. これらの交差点を smooth に変形して $R$を作くる.

それには,

$$h_n(z) = \prod_{a \in E_n} (z-a), \qquad H_n(z,w) = h_n(z)h_n(w).$$

とおき, さらに, 小さい正数の列 $\{\delta_n\}$ を取り

$$H(z,w) = \frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_2}{H_1 H_2} + \cdots + \frac{\delta_n}{H_1 \cdots H_n} + \cdots$$

とおく. これは $\Delta^2$ で収束する有理型関数である.

主張 **2** $R = \{(z,w) \in \Delta^2 : 1 = H(z,w)\}$ とおく. 数列$\delta_n$ を十分小さく選べば, $R$ 上の有界正則関数は $\Delta^2$上の有界正則関数に一意的に拡張される.

この証明は,

$$H_1 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{H_2} + \frac{\delta_3}{H_2 H_3} + \frac{\delta_4}{H_3 H_4} + \cdots$$

$$(H_1 - \delta_1)H_2 = \delta_2 + \frac{\delta_3}{H_3} + \frac{\delta_4}{H_3 H_4} + \cdots$$

と書き換えて, $\delta_1, \delta_2, \ldots$ を順に十分小さく取ると, 境界に近づくほど $R$が $V$に (幾何的に) 近くなることから推察できる. 実際には, 主張 1 の証明を修正して確かめる.

以上により, 定理 1 が示された. 同型問題が否定的であることは次の事実を使えば容易にわかる.

**Fact**([3;7.3.3 Corollary]) $\phi$ が bi-disc $\Delta^2$ からそれ自身の上への一対一正則写像ならば, $\phi_1$, $\phi_2$ を単位開円板上の Möbius 変換として

$$\phi(z,w) = (\phi_1(z), \phi_2(w)) \text{ or } \phi(z,w) = (\phi_1(w), \phi_2(z))$$

と表される.

講演では触れなかったが, ここで構成した例を変形して, 点分離問題や稠密挿入問題にも否定的な解答を与えている. また, コロナ問題の反例にもなっている. (リーマン面に関してコロナ問題の反例は B. Cole により最初に作られた. ) さらには, Royden's resolution の高次元化も部分的な結果であるが考えることができることが分かっている.

## References


[1] 中井三留, リーマン面の理論, 森北出版 1980.

[2] W. Rudin, *Some theorems on bouded analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 78(1955), 333-342.

[3] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969

志村多様体のゼータ関数について

吉田敬之

$F$ を $n$ 次の総実代数体、$B$ を $F$ 上の四元数環で

$$B \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \cong M_2(\mathbf{R})^r \times \mathbf{H}^{n-r}, \qquad r > 0$$

をみたすものとする。ここに $\mathbf{H}$ は Hamilton quaternion algebra を表す。$\mathbf{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbf{Q}}$ から $\mathbf{C}$ の中への同型を fix し、$H = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ とおく。このとき、$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})/H$ は $F$ から $\mathbf{R}$ の中への同型写像全体と、従ってまた $F$ の archimedean places 全体とも同一視される。$\Omega$ を $B$ が split する archimedean places 全体から成る $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})/H$ の subset とする。$H' = \{g \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \mid g\Omega = \Omega\}$ とおき、$F'$ を $H'$ の固定体とする。このとき $F'$ は $F$ の reflex field と呼ばれ $\mathbf{Q}$ 上 $\sum_{\tau \in \Omega} \tau(x)$, $x \in F$ で生成される。$G = \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(B^\times)$ により $B^\times$ の定める $\mathbf{Q}$ 上の代数群を表す。$G$ の adele 化を $G_A$, $G_A$ の finite part を $G_{A_f}$ とかく。$G_{A_f}$ の open compact subgroup $K$ に対して、$F'$ 上定義された志村多様体 $S_K$ が定まる。$S_K$ の $F'$ 上の zeta 関数 $Z(s, S_K/F')$ は Langlands により決定されていて、その main part は $\prod_\pi L(s, \pi, r_1)^{m(\pi,K)}$ で与えられる。ここに $\pi$ は $G_A$ の有限個の automorphic representations の上を走り、$m(\pi, K) \in \mathbf{Z}$, $r_1$ は $G$ の L-group ${}^LG = GL(2, \mathbf{C})^n \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ の $2^r[F' : \mathbf{Q}]$ 次元表現である。

Carayol と Taylor により、$Z(s, S_K/F')$ の表示に現れる $\pi$ に対しては、$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ の 2 次元の $\lambda-$ adic representation $\sigma_\lambda$ があり、$L(s, \pi, r_0) = L(s, \sigma_\lambda)$ が成立することが知られている。ここに $r_0$ は ${}^LG$ の standard な $2n$ 次元表現を表す。一方、$Z(s, S_K/F')$ は、$S_K$ の $\ell$-adic etale cohomology groups における $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F')$ の表現により定義されるものである。このことから、$H = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F)$ の表現から、$H' = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/F')$ の表現を構成する一般的方法があるのではないか、と推測される。

講演ではまず $H$ の表現 $\sigma$ から $H'$ の表現 $\tau$ を構成する方法を説明した。この方法で作られた $\tau$ を $\otimes_\Omega \mathrm{Ind}_H^{H'} \sigma$ とかく。次に、

$$L(s, \sigma_\lambda) = L(s, \pi, r_0) \tag{1}$$

から、

$$L(s, \otimes_\Omega \mathrm{Ind}_H^{H'} \sigma_\lambda) = L(s, \pi, r_1) \tag{2}$$

が有限個の Euler factors を除いて得られることを示した。これで上の推測が正当化される。更に、Carayol と Taylor の結果を用いると、(2) は全ての Euler factors について成り立つことがわかる。この結果により、$Z(s, S_K/F')$ を与える Langlands の公式が、(若干の修正の後に) bad factors についても成り立つことを論じた。

# 界面の運動方程式と反応拡散方程式

柳田　英二　　（東工大・理・情報科学科）

$\Omega$ を $\mathbf{R}^N$ 内の開領域とし，$\Omega$ 内の界面 $\Gamma(t)$ が次の形の運動方程式に従って動いているとする．

$$a(x)V(x) = -(N-1)d(x)\kappa(x) - \langle \nabla d(x), \nu(x)\rangle + b(x), \qquad x \in \Gamma(t),$$

$$\langle \nu(x), n(x)\rangle = 0, \qquad x \in \partial\Gamma(t).$$

ただし，$a(x) > 0$，$d(x) > 0$，$b(x)$ は与えられた関数，$\kappa(x)$ および $\nu(x)$ はそれぞれ $\Gamma(t)$ の平均曲率および単位法線ベクトル，$V(x)$ は界面の法線方向の速度，$n(x)$ は $\partial\Omega$ の単位法線ベクトルである．この運動方程式はある種の反応拡散方程式の内部遷移層の動きを記述する方程式として導かれたもので，界面が $\partial\Omega$ と垂直に接しながら，その曲率や法線方向，位置に依存して連続的に変形していく様子を表わしている．特に，$a(x) \equiv 1$，$b(x) \equiv 0$，$d(x) \equiv 1$ の場合がいわゆる平均曲率流である

静止している界面（すなわち $V = 0$）を定常界面と呼ぶことにしよう．定常界面の近くから出発した他の界面がそのまま近くに留まるとき，この定常界面は安定であるという．本講演ではまず、定常界面のまわりで上の方程式を線形化することによって得られる（自己随伴）作用素の最大固有値の符号を調べることによって、界面の安定性が決定できることを示す．次に，いろいろな仮定のもとで定常界面の安定性を調べ，反応拡散方程式の定常解の安定性と共通した結果が成り立つことを示す．さらに，界面の運動方程式と反応拡散方程式に，他にも類似した現象が見られることを指摘する．

# Self-Avoiding Walk in Five or More Dimensions *

原 隆

東京工業大学 理学部 応用物理学教室

e-mail: hara@ap.titech.ac.jp

**Abstract**

**Self-Avoiding Walk (SAW) とは？：** $\mathbf{Z}^d \equiv \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) | x_j \in \mathbf{Z} \text{ for } j = 1, 2, \ldots, d\}$ を、 $d$-次元正方格子、$\mathbf{Z}^d$ の元を site と言う。この上で「長さ $n$ 」の（最近接） self-avoiding walk （以下略して SAW ）とは、

1. $(n+1)$ 個の site の列 $\omega \equiv (\omega(0), \omega(1), \ldots, \omega(n))$ 、 $\omega(i) \in \mathbf{Z}^d$ で、
2. $\|\omega(i) - \omega(i+1)\|_2 = 1$ for $i = 0, 1, \ldots, n-1$ （最近接の条件）及び
3. $\omega(i) \neq \omega(j)$ for $0 \leq i < j \leq n$ （自己回避の条件）を満たすもの

を言う。以下、長さ $n$ の SAW で、$x$ を出発して $y$ で終わるもの（つまり $\omega(0) = x, \omega(n) = y$ なるもの）の全体を $\Omega_n(x, y)$ 、 $\Omega(x, y) \equiv \cup_n \Omega_n(x, y)$ 、更に $\Omega_n(x) \equiv \cup_y \Omega_n(x, y)$ と書く。また、$\Omega_n(0)$ の要素の数（つまり長さ $n$ の SAW の数）を $c_n$ 、 $\Omega_n(0)$ 上の一様測度についての平均を $\langle\cdot\rangle_n$ で表す： $\langle\cdot\rangle_n \equiv \dfrac{1}{c_n} \sum_{\omega \in \Omega_n(0)} (\cdot)$ 。更に、$\omega$ の長さを $|\omega|$ で表す。

**注：** もし、上の３番目の条件（自己回避）が無ければ、これは simple random walk と呼ばれているものであり、下のような問題は単なる数え上げの問題で簡単にもとまってしまう。多分驚くべきことは、こんなに簡単に見える自己回避条件を付けることにより問題が多分に非マルコフ的になり、以下に述べる結果が（質問が発せられてから３０年以上もたった）最近まで得られていなかったという事であろう。

**基本的な疑問：** 今日、問題にしたいのは以下のような素朴な疑問である：

1. $n$-step SAW の総数 $c_n$ は $n$ と共にどう振る舞うか？
2. $n$-step SAW の端点と端点は平均してどのくらい離れているか？特に端点と端点の平均二乗距離 $\langle\|\omega(n)\|_2^2\rangle_n$ が $n$ と共にどう振る舞うか？
3. （無限に長い） SAW の全体はどのような分布則に従うか？

**結果［４、５］：** 次元が５以上（$d \geq 5$）の $\mathbf{Z}^d$ 上の SAW に対して、以下が成立する：

1. $c_n \sim A_d\,(\mu_d)^n$
2. $\ell_n^2 \sim D_d\, n$

---

*北海道大学数学教室談話会予稿、1993年6月8日

3. 適当にスケールすると長さ無限大の SAW の全体は Brown 運動に収束。より具体的には：$[0,1]$ から $\mathbf{R}^d$ への連続関数の全体を $C_d[0,1]$ と書く。長さ $n$ の SAW $\omega$ から（空間を $\sqrt{n}$、時間を $n$ でスケールして）、$\mathbf{R}^d$ 内の折れ線 $X^{(n)} \in C_d[0,1]$ を

$$X^{(n)}(t) \equiv \frac{\omega(m)+s\{\omega(m+1)-\omega(m)\}}{\sqrt{n}}, \qquad m \equiv \lfloor t/n \rfloor, \quad s \equiv t-m \tag{1}$$

のように定義すると、任意の $C_d[0,1]$ 上の連続関数 $f$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle f(X^{(n)}) \right\rangle_n = \int f\, dW_{D_d} \tag{2}$$

が成立。ここで $dW_D$ とは $C_d[\mathbf{R}]$ 上の拡散定数 $D$ の Wiener Measure である。

上で $A_d, D_d, \mu_d$ は次元による定数で、$D_d$ は拡散定数、$\mu_d$ は connective constant と呼ばれている。

**歴史的背景：** $\mu_d = \lim_{n\to\infty}(c_n)^{1/n}$ の意味での $\mu_d$ の存在は $c_n \geq (\mu_d)^n$ の下限と共に、1957年に Hammersley［2］が示している。これ以上細かい上限については、1964年 Kesten［3］による $c_n \leq (\mu_d)^{\{n+O(n^{2/(d+2)}\log n)\}}$ 以来、厳密な仕事の進展は無かったといってもよい。

しかし、その間に物理学者、化学者による様々な解析が試みられ、

$$c_n \sim A_d(\mu_d)^n\, n^{\gamma_d-1}, \qquad \ell_n^2 \sim D_d\, n^{2\nu_d} \tag{3}$$

$$\gamma_d = \begin{cases} 43/32 & (d=2) \\ 1.162... & (d=3) \\ 1 & (d \geq 4) \end{cases}, \qquad \gamma_d = \begin{cases} 3/4 & (d=2) \\ 0.588... & (d=3) \\ 1/2 & (d\geq 4) \end{cases} \tag{4}$$

なる振る舞いを示す〔ただし、$d=4$ では $c_n \sim (\mu_d)^n(\log n)^{1/4}$ のように対数的補正がつく〕だろうと現在では予想されている。上記の定理は大さっぱにいうと $d>4$ の部分を厳密に証明した事に当たる。

**証明の方法について：**

証明には Brydges と Spencer により開発［1］された lace expansion の方法を用いる。lace expansion は2点関数 $G_p(x,y) \equiv \sum_{\omega\in\Omega(x,y)} p^{|\omega|}$（$p$ はパラメーター）についての一種の self-consistent な恒等式を与える。これをうまく解く（と言うより、解の性質をうまく調べる）事により、$\sum_y G_p(x,y) = \sum_n c_n p^n$ の性質、ひいては $c_n$ そのものの性質を詳しく知ることができるのである。詳しくは原論文［4、5］参照。

**参考文献：**


1. D.C. Brydges and T. Spencer: Self-avoiding walk in five or more dimensions. *Commun. Math. Phys.* **97** (1985) 125-148

2. J.M. Hammersley: percolation processes, II. Connective constants. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **53** (1957) 642-645

3. H. Kesten: On the number of self-avoiding walks, II. J. Math. Phys. **5** (1964) 1124-1137

4. T. Hara and G. Slade: Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.* **147** (1992) 101-136

5. T. Hara and G. Slade: The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.* **4** (1992) 235-327

93年 6月 10日

# Jones-Witten invariants and classical knot theory

東大数理　河野俊丈

1980年代末に Witten により Chern-Simons gauge 理論に基づく3次元多様体の不変量が提唱され，その後の研究で，2次元共形場理論，量子群の1の巾根における表現との関連などが明らかにされてきた．ここでは Jones によるリンクの不変量をリーマン面の上の共形場理論におけるホロノミーとしてとらえ直すことにより，ザイフェルト種数，トンネル数など曲面と関連した結び目の不変量に関する情報が得られることを議論する．さらにリーマン面の基本群の表現空間の体積公式との関係；レベル無限大における不変量の漸近展開としてあらわれる Vassiliev 不変量と，結び目全体の空間のコホモロジーの weight filtration についてふれる．

## 1. Braid 群の monodromy 表現と Jones 多項式

$\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$，$\{I_\mu\}$ を Cartan-Killing form に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする．$V_1, \cdots, V_n$ を $\mathfrak{g}$ の表現空間として

$$\Omega_{ij} \in \mathrm{End}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)$$

を $\sum_\mu I_\mu \otimes I_\mu$ の $i$ 番目と $j$ 番目の成分への作用で定義する．

$$\omega = \frac{1}{\ell+2} \sum_{i<j} \Omega_{ij}\, d\log(z_i - z_j)$$

は Knizhnik-Zamolodchikov 接続とよばれ $SU(2)$，レベル $\ell$ Wess-Zumino-Witten 模型の holonomy を記述する．skein 関係式

$$t^{-1} V_{L+} - t V_{L-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{L_0}$$

で定義される Jones 多項式は，$V_1, \cdots, V_n$ が spin $\frac{1}{2}$ 表現であるときに，接続 $\omega$ の holonomy から構成できることが，モノドロミーの固有値に関する考察からわかる．spin $j$ 表現に対応した framed link の不変量を $J(L, j)$ と書くことにする．この不変量は表現のテンソル積の分解に関し，いわゆる fusion rule

$$v_i \cdot v_j = \sum N_{ij}^{k} v_k , \qquad i, j, k = 0, \dots, \frac{\ell}{2}$$

をみたすことがわかる. ここで $N_{ij}^{k}$ は Verlinde 等式

$$N_{ij}^{k} = \sum_{\alpha=0}^{\ell/2} \frac{S_{i\alpha} S_{j\alpha} S_{k\alpha}}{S_{0\alpha}} , \qquad S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{\ell+2}$$

で与えられる. Riemann 面上の共形場理論では Riemann 面 $\Sigma_g$ の pants 分解を用いて conformal block の空間 $\mathcal{H}_\Sigma$ と mapping class group の $\mathcal{H}_\Sigma$ への projective linear な作用が定義される. $\mathcal{H}_\Sigma$ は, 基本的には 3-holed sphere に関する上の fusion rule の組合せとして得られる. $\dim \mathcal{H}_\Sigma = \sum_j \left(\frac{1}{S_{0j}}\right)^{2g-2}$ である.


## 2. 古典的な knot invariants の評価

右図のように knot $K$ に arc $\gamma$ を加えると $K \cup \gamma$ の管状近傍の補集合は genus 2 の handle 体と同相になる. knot $K$ の tunnel 数 $t(K)$ とはこのように arc $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ を加えると $K \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_t$ の近傍の補集合が handle 体と同相になるような $t$ の最小値である. $J(K, j)$ を mapping class group の $\mathcal{H}_\Sigma$ への作用を用いて書き下し, 作用の unitary 性を用いると次の不等式が得られる.

$$\sum_{j=0}^{\ell/2} |J(K, j)|^2 \leq S_{00}^{-2(t(K)+1)}$$

また conformal block の空間の次元公式を用いて Seifert genus の下からの評価が得られる.

## 3. 幾何的側面など

$\mathcal{M}_\Sigma$ を基本群の表現空間

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), SU(2)) / SU(2)$$

とおく. $\mathcal{M}_\Sigma$ は自然に symplectic structure $\omega$ をもち, moment map $\mu : \mathcal{M}_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{3g-3}$ が holonomy angle として定義され, また $T^{3g-3}$ の action が $\mathcal{M}_\Sigma$ の open dense set に与えられる (Jeffrey-Weitsman), さらに $\mathrm{Im}\,\mu$ の格子点の個数の考察から Witten による $\mathcal{M}_\Sigma$ の symplectic volume の公式

$$\mathrm{vol}(\mathcal{M}_\Sigma) = \lim_{\ell \to \infty} \frac{\dim \mathcal{H}_\Sigma}{\ell^{3g-3}}$$

を上の fusion rule との対応を用いて示すことができる.

Boundary cohomology of locally symmetric varieties

Steven Zucker

In my talk, I reported on the geometric aspects of "Boundary cohomology of Shimura varieties, I: Coherent cohomology on toroidal compactifications" (Annales ENS, to appear), the first of a series of articles written jointly with Michael Harris.

To state the main result, we must introduce a lot of notation. Let $G$ be a semisimple algebraic group defined over $\mathbb{Q}$, $D$ the symmetric space of non-compact type associated to $G(\mathbb{R})$ qua Lie group, $\Gamma$ an arithmetic subgroup of $G(\mathbb{Q})$, and $M = \Gamma\backslash D$. We assume henceforth that $D$ is Hermitian, so that $M$ is a complex quasi-projective variety, as shown in the work of Baily and Borel.

Let $P$ be a maximal $\mathbb{Q}$-parabolic subgroup of $G$, and $\mathcal{M}_P$ the associated boundary stratum in the Baily-Borel compactification. Associated to $\Gamma_P\backslash D_P$ is a tower of spaces

$$\mathcal{M}'_P \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{A}_P \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{M}_P, \tag{1}$$

in which the fibers of $\pi_1$ are abelian varieties (so $\pi_1$ is proper); $\pi_2$ is a principal algebraic torus bundle, with fiber $T_P$ coming from the center of the unipotent radical of $P$. A certain discrete group $\Gamma_{\ell,P}$ acts on the tower; it acts freely on $\mathcal{M}'_P$ (with $\Gamma_{\ell,P}\backslash\mathcal{M}'_P = \Gamma_P\backslash D_P$), trivially on $\mathcal{M}_P$, and horribly on $\mathcal{A}_P$ (unless $\Gamma_{\ell,P}$ is trivial).

Let $T_P \subset T_{P,\Sigma}$ be a $\Gamma_{\ell,P}$-equivariant smooth torus embedding; then put

$$\mathcal{M}'_{P,\Sigma} = \mathcal{M}'_P \times^{T_P} T_{P,\Sigma},$$

a $T_{P,\Sigma}$ bundle over $\mathcal{A}_P$. As $P$ varies, the above gives the "building blocks" for constructing a smooth toroidal compactification $\widetilde{M}$ of $M$.

Next, let $Z_1 = \mathcal{M}'_{P,\Sigma} - \mathcal{M}'_P$ be the divisor at infinity in $\mathcal{M}'_{P,\Sigma}$, $Z_2$ a $\Gamma_{\ell,P}$- and $T_P^c$-invariant neighborhood of $Z_1$ ($T_P^c$ here denotes the maximal compact subgroup of $T_P$), and $Z_3 = Z_2 - Z_1$ (a deleted neighborhood).

Let $\widetilde{\mathcal{F}}$ denote the canonical extension to $\mathcal{M}'_{P,\Sigma}$ (later, also to $\widetilde{M}$) of an automorphic vector bundle $\mathcal{F}$ on $\mathcal{M}'_P$, which is always of the form $\pi_2^{*}\mathcal{E}$ for some vector bundle $\mathcal{E}$ on $\mathcal{A}_P$. We recall that a $\overline{\partial}$-closed $(0,k)$-form $\eta$ on $M$ with values in $\mathcal{F}$, having moderate growth at infinity (like an automorphic form), defines a cohomology class in $H^k(\widetilde{M},\widetilde{\mathcal{F}})$. Let $r[\eta]$ be its restriction in

$$H^k(\Gamma_{\ell,P}\backslash Z_1, \widetilde{\mathcal{F}}|) \cong H^k_{\Gamma_{\ell,P}}(Z_1, \widetilde{\mathcal{F}}|); \tag{2}$$

and $\eta_P$ its constant term on $\Gamma_P\backslash D$, which has a restriction to $Z_2$ (by reduction theory). We compute the cohomology groups in (2), not only for $Z_1$ but also for $Z_2$ and $Z_3$, and proceed to show that there are compatible projections

$$H^k(\Gamma_{\ell,P}\backslash Z_j, \widetilde{\mathcal{F}}|) \to H^k_{\Gamma_{\ell,P}}(\mathcal{A}_P, \mathcal{E}).$$

(an isomorphism when $j = 1$).

**Theorem.** *$r[\eta]$ and $[\eta_P]$ have the same image in $H^k_{\Gamma_{\ell,P}}(\mathcal{A}_P, \mathcal{E})$.*

This is the algebraic analogue of the (easier) topological result for de Rham cohomology.

To prove it, we had to make a systematic study of differential forms on the real quotients of torus embeddings, and how it pertains to (1). As a final remark, we note that one can write

$$H^k_{\Gamma_{\ell,P}}(\mathcal{A}_P, \mathcal{E}) \cong \bigoplus_q H^{k-q}_{\Gamma_{\ell,P}}(\mathcal{M}_P, R^q(\pi_1)_*\mathcal{E}), \ldots,$$

for the Leray spectral sequence is, as in the topological case, canonically split.

# フラクタル集合上のラプラス作用素のスペクトル解析

大阪大学　基礎工学部　福島正俊

本要旨ではフラクタル集合上のラプラス作用素が導入された背景と経過を述べる。

フラクタル集合は B.Mandelbrot[1] の導入した極めてあいまいな概念であるが、ここでは自己相似集合　即ち距離空間上に与えられた有限個の縮小写像を不変にするコンパクト集合 K を指すものとする(J.Hutchinson[2])。　与えられた縮小写像の不動点の集合 $F_0$ の m 回反復像を $F_m$ とすると有限集合 $F_m$ の極限の閉包が K に一致する。例えば Sierpinski gasket K は辺の長さが 1 の正三角形の頂点を不動にする３つつの 1/2 相似写像で定まる。辺の中点を結んで得られる４つつの小三角形のうち逆三角形を除き残りの３っつの小三角形に同じ操作を施す。この操作の繰り返しで得られる辺の長さが $2^{-m}$ の小三角形の頂点の合併が $F_m$ に他ならない。フラクタル集合の数学的研究は当初そのハウスドルフ次元等の幾何学的性質に関心が持たれたが、物理学者達はそれを熱や波動を伝播する媒体として捉えるがために $F_m$ 上の random walk や差分作用素そしてその固有値や固有関数の系列に関心を払っていた。　　例えば R.Rammal-G.Toulouse[3] は Sierpinski gasket に対して、正規化された固有値分布の極限としての状態密度の挙動を観察して gasket のスペクトル次元を定式化した。これがフラクタル集合上の解析学の前史である。

80 年代の後半から始まるフラクタル集合上の解析学に於ては確率論的接近が先行した。先ず S.Kusuoka[4] が Sierpinski gasket K 上の拡散過程 (path が連続なマルコフ過程) を $F_m$ 上の random walk の極限として厳密に構成することに成功した。上で見たように random walk の空間 scale は $2^{-m}$ だが、　時間 scaleを $5^{-m}$ に取って speed up することにより自明でない拡散過程に収束する。このようにして得られた拡散過程は K 上の拡散過程のうち適当な対称性を満たすものとして特徴付けられ gasket 上のブラウン運動と呼ばれている。ブラウン運動が構成されたことはその生成作用素として gasket 上にラプラス作用素が intrinsic に定義されたことを意味しそこで解析学を展開する基礎が提供されたことになる。ほぼ同時期に [4] とは独立に S. Goldstein[5] が gasket 上のブラウン運動を構成したと発表したが詳しい証明は述べられていない。　その後 M.T.Barlow-E.A.Perkins[6]がその別構成を実行し推移確率密度の精細な評価を与えた。そして T.Lindstrom[7] は Sierpinsi gasket, Koch curve, snow flake 等を含む有限分岐的な自己相似集合の族として nested fractals なる族を導入し Barlow-Perkins の方針に沿ってその上のブラウン運動を構成した。

一方、J.Kigami[8] は gasket K の場合に $F_m$ 上の random walk に対応する差分作用素の繰り込み極限として得られる C(K)上の非有界作用素としてラプラス作用素を直接解析的に構成した。　続いて M.Fukushima-T.Shima[9] は、K 上の任意の実関数の $F_m$ への制限に対して random walk に対応する二次形式を考えるとその $(5/3)^m$ 倍が m と共に増大することに注意し、その極限が有限となる K 上の関数族上に正則で局所性を持つ Dirichlet 形式を構成した。　現在では Dirichlet 形式を作ることがブラウン運動やラプラス作用素を構成する最も手っとり早い方法であることが知られている。　実際 S. Kusuoka[10] は Lindstrom の nested fractals に対し、また J.Kigami[11] は post critically finite self-similar sets と呼ばれる有限分岐的なフラクタル集合族に対してこの方法を系統的に展開している。

このように有限分岐的なフラクタル集合上のラプラス作用素が厳密に定式化されたのに伴いその固有値，固有関数，スペクトルの研究が進行し，通常のユークリッ空間の場合と異なる特異な性質が解明されつつある([9],[12]--[18])。


[1] B. Mandelbrot, Fractals, form, chance, and dimension, Freeman and co, San Francisco, 977

[2] J.E.Hutchinson, Fractals and self similarity, Indiana Univ. Math.J. 30(1981), 713-747

[3] R.Rammal and G.Toulouse, Random walks on fractal structures and percolation clustars, J.Physique Lett.43(1982), L13-L22

[4] S. Kusuoka, Diffusion processes on a fractal, in "Probabilistic methods on Mathematical Physics",ed.by K.Ito and N.Ikeda, Kinokuniya and North-Holland, 1987, pp.251-274.

[5] S. Goldstein, Random walks and diffusions on fractals,in"Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems", ed. by H.Kesten, IMA Math. Appl.8, Springer, New York, 1987, pp 121-128.

[6] M.T. Barlow and E.A. Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, Probab.Th.Rel.Fields 79(1988),543-623.

[7] T. Lindstrom, Brownian motion on nested fractals, Memoirs of Amer. Math.Soc. 420, 1990

[8] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpinski spaces,Japan J.Appl. Math.6(1989),259-290

[9] M. Fukushima and T.Shima, On a spectral analysis for the Sierpinski gasket, Potential Analysis 1(1992),1-35

[10] S.Kusuoka, Diffusion processes on nested fractals, Lecture Note at Nankai Univ. 1989, to appear in LNM Springer

[11]J. Kigami,Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, to appear in TAMS

[12]T. Shima, On eigenvalue problems for the random walks on the Sierpinski pre-gasket, Japan J. Indus.Appl.Math.8(1991),127-141

[13]T. Shima, Lifschtz tails for romdom Scrodinger operators on nested fractals, Osaka J. Math.29(1992), 749-770

[15]M. Fukushima, Dirichlet forms, diffusion processes and spectral dimensions for nested fractals",in "Ideas and methods in mathematical analysis,stochastics, and applications" eds.by Albeverio,Fenstad, Holden, Lindstrom, pp151-161, Cambridge Univ. Press 1992

[16]J.Kigami and M.L.Lapidus, Weyl's problem for the spectral distributions of Lapalacian on p.c.f.self-similar fractals, Commun. Math.Phys,to appear

[17]L.Malozemov, The integrated density of states for the difference Laplacian on the modified Koch graph, Commun.Math.Phys.,to appear

[18]M.Fukushima and T.Shima, On discontinuity amd tail behaviours of the integrated disity of states for nested pre-fractals, preprint

# オイラーと楕円曲線 (平成5, 6月30日)

小野孝

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = u^2 \\ x^2 + 6y^2 = v^2 \end{cases} \tag{1}$$

を自然数 $(x, y, u, v)$ で解くことを Euler が彼の "Elements of Algebra" (英訳, Springer, 1984, 第14章, pp 422–423) でやっている. $(1, 2, 3, 5)$, $(191, 60, 209, 241)$ を解として得ている. 彼の方法はもちろん現代的ではない. (1) を現代的に扱う自然な方法として

$$\begin{cases} \text{Hopf 写像 を用いる} & (2) \\ \text{楕円曲線 を用いる} & (3) \end{cases}$$

の二つをとりあげる. (2) の方法で $(1, 2, 3, 5)$ を得た後 (3) をこの解に適用して第二の解 $(191, 60, 209, 241)$ が出来ることを説明する.

Hopf 写像とは: $(Z, Q)$, $(X, q)$ を体 $K$ 上の二次空間の間の二次写像 $h$ で

$$q(h(z)) = Q(z)^2, \quad z \in Z \tag{4}$$

を満足するもの. さて このような Hopf 写像を二つとる: $h_i$, $i=1,2$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, shift left, "h_1"] \arrow[rr, shift right, "h_2"'] \arrow[dr, shift left, "Q_2"] \arrow[dr, shift right, "Q_1"'] & & X \arrow[dl, shift left, "q_1"] \arrow[dl, shift right, "q_2"'] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

$$C = \{z \in Z \,;\ h_1(z) = h_2(z)\} \tag{5}$$

とおく. 又 写像

$$\Phi : C \longrightarrow X \times K \times K \tag{6}$$

を

$$\Phi(z) = (h_1(z) = (h_2(z)), \ Q_1(z), \ Q_2(z)) \tag{7}$$

で定義する。(4) より $(x, u, v) \in \mathrm{Im}\,\Phi$ は連立方程式

$$\begin{cases} g_1(x) = u^2 \\ g_2(x) = v^2 \end{cases} \qquad (8)$$

を満足する。この方法を (1) に用いると解 $(1, 2, 3, 5)$ が得られる。

一方，(1) と楕円曲線との関係は (1) の $\mathbb{C}$，つまり $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$，における解の全体を $E(2, 6)$ とすると Jacobi の4つのテータ函数を用いて同型 $\Theta$:

$$\mathbb{C}/D \xrightarrow{\sim} E(2, 6) \qquad (9)$$

($D$ はある格子群) が得られるので $E(2, 6)$ に群構造が入る。この演算に関して最初の解 $(1, 2, 3, 5)$ の2倍をとると才二の解 $(191, 60, 209, 241)$ が得られる。このようにして $E(2, 6)$ の Mordell-Weil rank が $> 0$ ることがわかる。

試みに (1) の Weierstrass 標準形を求めると

$$y^2 = x^3 - 2^6 \cdot 3^3 \cdot 7x + 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \qquad (10)$$

となる。(10) だけ見ても rank のことはすぐにはわからない。

# REGULARITY IN TIME OF SOLUTIONS TO NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS

NAKAO HAYASHI

Department of Mathematics, Faculty of Engineering
Gunma University, Kiryu 376, Japan

This is the joint work with Prof. K.Kato (Department of Mathematics, Faculty of Science, Osaka University, Toyonaka 560 Japan).

We consider the regularity of solutions to nonlinear Schrödinger equations of the form

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = F(u, \bar{u}), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = \phi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

where $F$ is a polynomial of degree $p$ with complex coefficients. We prove that if the initial function $\phi$ is in some Gevrey class, then there exists a positive constant $T$ such that the solution $u$ of (1) is in the Gevrey class of the same order as in the initial data in time variable $t \in [-T, T] \backslash 0$. In particular we show that if the initial function $\phi$ has an analytic continuation on the complex domain $\Gamma_{A_1,A_2} = \{z \in \mathbb{C}^n; z_j = x_j + iy_j, -\infty < x_j < +\infty, -A_2 - (\tan\alpha)|x_j| < y_j < A_2 + (\tan\alpha)|x_j|, j = 1, 2, \cdots, n, A_2 > 0\}$, where $0 < \alpha = \sin^{-1} A_1 < \pi/2$ and $0 < A_1 < 1$, then there exist positive constant $T$ and $\beta$ such that the solution $u$ of (1) is analytic in time variable $t \in [-T, T] \backslash 0$ and has an analytic continuation on $\{z_0 = t + i\tau; |arg z_0| < \beta < \pi/2, |t| < T\}$, where

$$\sin\beta < \min\{\frac{\sqrt{2}A_1}{1+\sqrt{2}A_1}, \frac{2A_2}{3A_2 + \sqrt{2e}(1+R)}\}$$

when $|x| < R$.

For the proof, see [1]

1. N.Hayashi and K.Kato, *Regularity in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, to appear in J. Funct. Anal..

# EVERSION OF THE CUBOCTAHEDRON

FRANÇOIS APÉRY

The first polyhedral eversion of the sphere has been constructed by B. Morin using a sequence of elementary moves to deform a polyhedron with twelve vertices. Here, we want to construct another version of such a polyhedral sphere eversion defined by only two steps, namely the first one, the so-called polyhedral gastrula, and the middle one, the so-called polyhedral halfway model. The eversion is obtained by linear interpolation between vertices of the first step and the middle step, and by a symmetry property. Here is the result:

**Theorem 1.** *There exist a polyhedron $C$ and a homotopy $C \times [-1,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ where $C$ is defined by a twelve vertices triangulation of the sphere, such that:*

(*i*) $f_t = f(\cdot, t)$ *is locally one-to-one, and affine in restriction to each face of $C$, for all $t \in [0,1]$,*
(*ii*) $f(x, \cdot)$ *is affine in restriction to $[0,1]$, for all $x \in C$,*
(*iii*) $f_1$ *is an embedding (one-to-one),*
(*iv*) *there exists a symmetry $\sigma$ with respect to a plane, such that*

$$f_{-t} = \rho \circ f_t \circ \sigma \circ \rho^{-1} \quad \forall t \in [-1,1],$$

*where $\rho$ denotes the rotation of angle $\pi/2$ around the vertical axis $\overrightarrow{OZ}$.*

The polyhedron $C$ is a cuboctahedron where the square faces have been appropriately divided into two triangles in such a way to add an equatorial square, and two orthogonal edges on the polar squares. The halfway step is the same as in the polyhedral Morin's eversion, and the starting step is given by a polyhedral version of the embbedding of the sphere, known as gastrula in embryology, where the north hemisphere is pushed inside the south one, while the equatorial circle is shrinked. Provided with this eversion, we are able to prove the following transversality result.

**Theorem 2.** *The foregoing polyhedral eversion $f$ is transversal except for eleven values of $t$ at which the transition is generic. Using polyhedral versions of the six generic transitions, we are lead to the following sequence:*

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0)(\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0)(\mathbf{T}^+\mathbf{T}^+)(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1)(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1)$$
$$(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1)(\mathbf{T}^-\mathbf{T}^-)(\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2)(\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2)\mathbf{D}_2.$$

Parenthesis indicate that the corresponding generic transitions occur simultaneously. Notation are those introduced in "An algebraic halfway model for the eversion of the

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

sphere", Tôhoku Math. J. Vol.44 (1992), 103-150. Notice that it is possible to smooth the foregoing eversion by a standard procedure, and, thanks to the infinitely many extra degrees of freedom so obtained, we can easily simplify the sequence of generic transitions, so that it becomes:

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{D}_0\mathbf{D}_0)(\mathbf{T}^+\mathbf{T}^+)(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1\mathbf{Q}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1)(\mathbf{T}^-\mathbf{T}^-)(\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2)\mathbf{D}_2.$$

During the previous simplification, the double surface (immersed in $\mathbb{R}^4$) of the eversion did not topologically change, as we can check by computing its Euler characteristic, according to Morse theory:

$$\chi = 5 - 9 + 5 = 3 - 5 + 3 = 1.$$

F.S.T., F-68093 Mulhouse Cédex, France.

No.

# 3次元多様体上の完備な葉層構造について

桐蔭大・工　土屋信雄

§1 問題　$M^3$をコンパクトな3次元多様体，$\mathcal{F}$を$M$上の余次元1の葉層構造とする。次の問題が自然に考えられる。

問題1　$M$の位相（$\pi_1 M$, $H_1 M$, $M$の幾何構造等）と，$\mathcal{F}$の位相（コンパクト葉の存在，例外葉の存在，$\mathcal{F}$の横断的構造等）の関係を調べよ。

この方向で次のような結果がある。

定理（Plante, Ghys-Sergiescu）　$\pi_1 M^3$が巾零または可解であるとき，$M$上の$C^\omega$-級葉層$\mathcal{F}$でコンパクト葉を持たないものは，知られているモデルと同相である。

定理（Ghys, 松元）　$M$が閉曲面の単位接バンドルと同相であるとき，$M$上の$C^\omega$級葉層でコンパクト葉を持たないものは，知られているモデルと同相である。

上の2つの定理にあらわれる葉層は，§2で定義する意味で完備であり，また横断的な幾何構造（アファイン構造または射影構造）を持つ。

§2 完備性　$(M^3, \mathcal{F})$を3次元多様体の$C^\omega$-級葉層とする。このとき$(M, \mathcal{F})$の普遍被覆$(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$は，$\mathbb{R}^3$の$\mathbb{R}^2$による葉層であり，その葉空間$X = \tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}}$は，Hausdorffとは限らない1次元多様体となる。

一般には，$X$はいくらでも複雑になり得る。ここでは最も簡単な場合を考える。

定義　$(M, \mathcal{F})$が完備であるとは，$\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}} \cong \mathbb{R}$であること。

問題1を特殊化して次の問題を考える。

<u>問題2　完備で，横断的にアファインである葉層$\mathcal{F}$について問題1を考えよ。</u>

§3 モデル　完備で横断的にアファインである葉層のモデルとして次のような構成を考える。

$N^3$を，境界のある，$S^1$上の曲面バンドルとする。$\mathcal{F}_N$を$N$上の，閉1次形式で定まる葉層で，$N$の境界$\partial N$に横断的なものとする。$f=\{f_i\}$を$\partial N$の連結成分の間の同相写像で，$\mathcal{F}|_{\partial N}$を保ち，横断方向にアファインであるものとする。$M$を$N$の$f$による商空間とすると，$M$上に，$\mathcal{F}_N$からinduceされる葉層構造$\mathcal{F}_M$ができる。

$\mathcal{F}_M$は完備であり，横断的にアファインである。$\mathcal{F}_M$を「モデル」と呼ぶ。

§4 結果　$M^3$がグラフ多様体とは，$M$を，埋め込まれた何個かのトーラスで切断して得られるコンパクト多様体$N$がザイフェルト空間の構造を持っていることを言う。

得られた結果は次のとおりである。

定理　$M$をグラフ多様体，$\mathcal{F}$を$M$上の横断的にアファインな葉層でコンパクト葉をもたないものとする。

そのとき，$M$内に埋め込まれたトーラスの族$\mathcal{T}$で，次の性質をみたすものが存在する。

(1) $M$を$\mathcal{T}$で切断して得られる多様体$N$は$S^1$上の曲面バンドルである。

(2) $\mathcal{F}$を$N$に制限した葉層$\mathcal{F}_N$は，閉1形式で定まる。

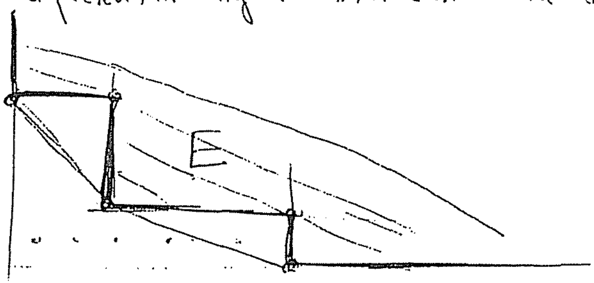
(3) $\mathcal{F}$は，$(N, \mathcal{F}_N)$から得られるモデルと同相である。特に$\mathcal{F}$は完備である。

B. Teissier

Mixed multiplicities, mixed degrees, mixed volumes.

Let $k$ be a field, and $R$ a noetherian $k$-algebra. Let $q$ be an ideal in $R$ such that the vector space $R/q$ over $k$ is finite dimensional.

For example, an ideal $q$ generated by monomials in the polynomial ring $k[x_1, \dots, x_d]$ is represented by a "staircase" in the first quadrant of $\mathbb{R}^d$




each monomial $x_1^{a_1} \dots x_d^{a_d}$ being represented by the point $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$.

The dimension of $R/q$, where $R$ is the localization $k[x_1, \dots, x_d]_{(x_1, \dots x_d)}$ is the number of integral points in the staircase (i.e., below the broken line) and it is finite if and only if the covolume ($\mathrm{covol}\, E$) is finite.

On the other hand, as $\nu \to \infty$ $\dim_k R/q^\nu = \frac{\nu^d}{d!} e(q) + O(\nu^{d-1})$ where $d$ is the Krull dimension of the ring $R$. (In the special case of monomial ideals, $e(q) = d!\,\mathrm{covol}(E)$.) The integer $e(q)$ is called the multiplicity of $q$ in $R$. It turns out that there is a formula for the multiplicity of products

$$e(q_1^{\nu_1} \cdot q_2^{\nu_2}) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} e(q_1^{[i]}, q_2^{[d-i]})\, \nu_1^i \nu_2^{d-i}$$

and also one for

$$\mathrm{Covol}(\nu_1 E_1 + \nu_2 E_2) = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \mathrm{Covol}(E_1^{[i]}, E_2^{[d-i]})\, \nu_1^i \nu_2^{d-i}$$

hence $\quad e(q_1^{[i]}, q_2^{[d-i]}) = d!\, \mathrm{Covol}\cdot(E_1^{[i]}, E_2^{[d-i]})$.

If $\bar{q}$ denotes the integral closure of the ideal $q$, and if we set $e_i = e(q_1^{[i]}, q_2^{[d-i]})$ we have

1) Inequalities, $\quad \frac{e_d}{e_{d-1}} \geq \frac{e_{d-1}}{e_{d-2}} \geq \frac{e_{d-2}}{e_{d-3}} \geq \dots \geq \frac{e_1}{e_0} \quad$ (which imply $e(q_1 q_2)^{1/d} \leq e(q_1)^{1/d} + e(q_2)^{1/d}$)

2) Equality $e(q_1 q_2)^{1/d} = e(q_1)^{1/d} + e(q_2)^{1/d}$ implies that there exist integers $a, b$ such that $\overline{q_1^a} = \overline{q_2^b}$.

Similar results hold then for covolumes, and are an avatar of the Brunn-Minkowski inequality for volumes $\mathrm{Vol}(K_1 + K_2)^{1/d} \geq \mathrm{Vol}(K_1)^{1/d} + \mathrm{Vol}(K_2)^{1/d}$, which implies the isoperimetric inequality.

# The effect of anisotropic growth speed of an interface on pattern formation during the growth of crystals

Etsuro Yokoyama
Faculty of Computer Science and Systems Engineering,
Kyushu Institute of Technology

The formation of patterns in crystal growth is a free-boundary problem in which the interface that separates the crystal from a nutrient phase moves under the influence of nonequilibrium conditions. The local growth speed of an interface can be determined by solving the diffusion equations that take into account both a diffusion process for the transport of latent heat and/or solute liberated at the interface, and an interface kinetic process for transformation of an amorphous phase into a crystalline phase at the interface at a rate determined by the deviation from local equilibrium conditions, which depend on interface curvature and surface tension.

In this study, first, we examine by numerical methods the influence of sinusoidal anisotropies of surface tension and interface kinetics having fourfold symmetry on the formation or suppression of corners of a two-dimensional crystal, starting from a crystal of circular shape, under conditions such that the growth is governed only by interface kinetics processes. Our results display many of the features derived from general consideration by Angenet and Gurtin (1989). Second, we show the severe anisotropy of interface kinetics, for which the kinetic coefficient has singularities in the form of deep cusps, plays a very important role in the formation of polyhedral features in the absence of surface tension, such as for snow crystals, for which the growth is controlled by both the transport process through air toward the crystal surface and the interface kinetic process for incorporating molecules into a crystal lattice. Finally, we present the update numerical model for time evolution of an interface that accounts for the transport of energy through bulk phases, and anisotropic interface kinetics and surface tension.

# 2次元の曲率流れの方程式に対する一様収束評価付き数値解法

木村 正人

京都大学 数理解析研究所

e-mail:masato@kurims.kyoto-u.ac.jp

本講演では、2次元の曲率流れの方程式に対する新しい差分スキームを紹介し、それによって数値的に得られる曲線（折れ線）が厳密解の曲線に“一様収束”することを示す。

2次元の曲率流れとは、時間 $t$ をパラメーターとする滑らかな Jordan 曲線の族 $\{\Gamma(t)\}$ でその外向き法線方向の速度 $v$ が $-\kappa$ （$\kappa$ はその点における曲率を表し、曲線が凸ならば正とする）に等しいものを言う。問題は $t=0$ における滑らかな Jordan 曲線 $\Gamma(0)$ を与え、$v=-\kappa$ を満足する $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ を求めることである。

今回、提案する差分スキームは次の様である。$\Delta t > 0$ を微小な時間方向の差分ステップとし、$\{\varphi_j^k\}_{j=1}^n \subset \mathbf{R}^2$ を厳密解 $\Gamma(k\Delta t)$ を近似する $n$ 個の点とする。

**Numerical Scheme**

パラメーター $\mu \in (0,1)$, $\lambda > 0$, $n \in \mathbf{N}$ を固定し、$h := 1/n$, $\Delta t := \lambda h^2$ と置く。$\Gamma(0)$ を近似する $n$ 個の点 $\{\varphi_j^0\}_{j=1}^n$ を取り、$k = 0,\ 1,\ 2, \cdots$ に対して、$\Gamma((k+1)\Delta t)$ を $\{\varphi_j^k\}_{j=1}^n$ から次の様に構成する。

1. $d_j^k := |\varphi_{j+1}^k - \varphi_j^k|$, $\quad l_k := \sum_{i=1}^n d_i^k$, $\quad b_j^k := \dfrac{d_j^k - l_k h}{\lambda h^3}$, と置き、$\{a_j^k\}_{j=1}^n \subset \mathbf{R}$ を次の連立一次方程式を解いて決める。

$$\begin{cases} a_{j+1}^k - a_j^k = -h b_j^k \quad (j = 1, \cdots, n), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^k = 0. \end{cases}$$

2. 各 $j$ に対し、

$$d_i := |\varphi_{j+i}^k - \varphi_j^k|, \qquad \tau_i := \frac{i}{|i|}\frac{\varphi_{j+i}^k - \varphi_j^k}{d_i} \quad (i = -2,\ -1,\ 1,\ 2),$$

$$V_j^k := \mu\frac{2(\tau_1 - \tau_{-1})}{d_1 + d_{-1}} + (1-\mu)\frac{2(\tau_2 - \tau_{-2})}{d_2 + d_{-2}} + a_j^k\frac{-\tau_2 + 4\tau_1 + 4\tau_{-1} - \tau_{-2}}{6},$$

と置き、$t = (k+1)\Delta t$ における数値解を

$$\varphi_j^{k+1} := \varphi_j^k + \Delta t V_j^k$$

によって定める。

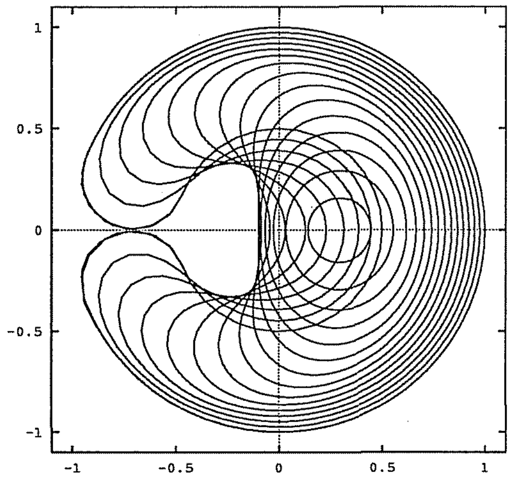
このスキームに対する主な誤差評価として今回次の様なものが得られた。

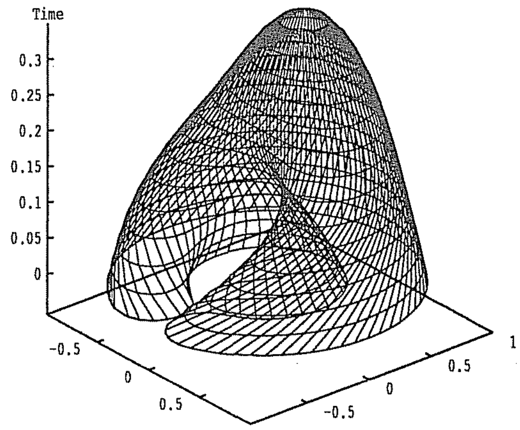
$\mu \in (0,1)$ と $T \in (0,T^*)$ （$T^*$ は厳密解の消滅時間）を任意に定め、それに対して十分小さく $\lambda$ を固定する。$\Gamma(0)$ と $\varphi_j^0$ に関するある仮定のもとで、

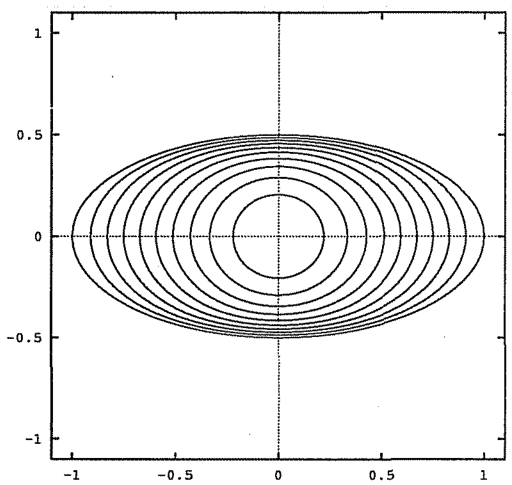
$$\text{error} = \max_{j,0\leq k\leq T/\Delta t} dist(\varphi_j^k, \Gamma(k\Delta t))$$

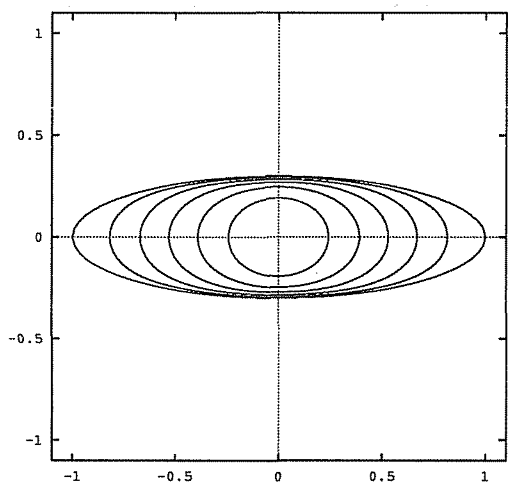
が $n \to \infty$ の時、$n^{-2}$ のオーダーで 0 に近付く。

本講演では得られた誤差評価をその証明の概略と共に定理の形で厳密に述べる。また、 OHP による数値計算結果の紹介も合わせて行なう予定である。



談話会での講演要旨です。

**表題：** Differential algebraic function fields with no movable algebraic branches

**要旨：** 梅村氏は『パンルヴェ第一関数 $P_I$ の既約性の第2証明』という論文で、この関数が1階代数的微分方程式の解や代数群からつくられる関数などから代数的操作や合成を経て得られるならば、実際には1階代数的微分方程式の解を本質的には必要としない、という命題を述べています。証明には $P_I$ の初期値に関する関数論的特質が用いられていています。

この性質を微分代数的に言い換えるとどうなるかを考えてみました。完全に同じ内容を表現することはできませんでしたが、Picard が考えた『sub-uniform』（Forsyth の用語）に近い概念を得ました。それはつぎのようなものです。まず、動く代数的特異点をもたないという概念を普通の解析的な言い方をまねて定義します。動く代数的特異点をもたない微分方程式の一般解が、たとえ局所的に任意定数のまわりで代数的な関数と微分代数的に従属であっても、その一般解も局所的に任意定数のまわりで代数的な関数とみることができるとき、その一般解を概一価であるといいます。講演では plain といいました。sub-uniform と概一価の違いがどこにあるかはまだよくわかっていません。このような一般解に対しては梅村氏の得たと同じような命題が成立します。パンルヴェ第一関数は概一価になります。証明はその既約性によりますが、一価性から示すこともできそうです。しかし、いまのところ分かりません。sub-uniform に関係した結果のいくつかは概一価性でも成立します。

たとえば、つぎのようなことがいえます。

$F(w'', w', w)$ を変数に関して同次とする。$F(w'', w', w) = 0$ の一般解が概一価であるためには、つぎの2条件が同時にみたされることが必要十分である。

1) $v = w'/w$ は動く代数的分岐点をもたない。

2) $K(v, v')/K$ におけるすべての素因子 $P, \nu(t') = 0$ にたいして、微分 $vdt$ の位数は少なくとも $-1$ であり、その留数は整数である。

以上です。

西 岡 啓 二

No. /

Date

# Painlevé方程式の超越解の分類

1993年9月1日　　渡辺文彦

Painlevé方程式は、PainlevéとGambierとにより、1900年頃発見された動く分岐点をもたない2階の代数的常微分方程式であり、全部で6本あるが、発見当初からの懸案として、Painlevé方程式の既約性ということが問題になっていた。従来この問題は、数学的定式化などが難しく未解決のままであったが、1980年代後半に西岡、梅村両氏により、Painlevé第1方程式の既約性が証明されるに至り、この問題の解決の糸口が見出された。私は梅村氏との共同研究で残り5本のPainlevé方程式の既約性に取組んだ結果、6本のPainlevé方程式に共通なある数学的構造を抽出し、それに着目することにより既約性証明が大変系統的に行えることを見出した。また、この証明方法の副産物として、Painlevé方程式の全ての超越解（代数函数でない解）を分類することに成功した。

本講演では、以上のことがらの概略を説明した。

文献

(1) Umemura, H., and Watanabe, H., On the solutions of the second and fourth Painlevé equations, preprint.

(2) Umemura, H., and Watanabe, H., On the solutions of the third Painlevé equation, preprint.

(3) Watanabe, H., On the solutions of the fifth Painlevé equation, preprint.

# Bounded, Global Solutions of a Haraux-Weissler Equation and Their Large Time Behaviour

BY

Claus Dohmen

We consider the qualitative behaviour of solutions of a generalized Haraux-Weissler equation with $m > 0$, $p > 1$, and $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$:

$$(P_\gamma) \qquad \begin{aligned} V'' + \frac{N-1}{\eta}V' + \beta\eta U' + \alpha U + \gamma|U|^{p-1}U &= 0 \qquad \text{in } I\!R^+, \\ V := |U|^{m-1}U, \qquad \alpha, \beta > 0, \qquad \alpha(m-1) + 2\beta &= 1, \\ V'(0) = 0, \qquad V(0) &= a > 0. \end{aligned}$$

An equation of this type arises when radial, selfsimilar solutions

$$u(x,t) = t^{-\alpha}U(\eta), \qquad \eta = |x|t^{-\beta},$$

of the porous medium equation with reaction term –

$$(PME) \qquad u_t - \Delta(|u|^{m-1}u) = \gamma\,|u|^{p-1}u \qquad \text{in } I\!R^N \times (0,T),$$

– are studied. In this case the parameters $\alpha$, $\beta$ are given by

$$\alpha := \frac{1}{p-1}, \qquad \beta := \frac{p-m}{2(p-1)}.$$

In case $\gamma = 0$ the parameters are only subject to the condition

$$\alpha(m-1) + 2\beta = 1,$$

which means that there is a one parameter family of values admissable for selfsimilar solutions. This corresponds to a scaling invariance: If $U$ is a solution, so is $U_\lambda(\eta) := \lambda^{-2}U(\lambda^{m-1}\eta)$ for all $\lambda > 0$. Hence we can normalize $V(0) = 1$ and vary $k$. This scaling invariance is no longer true in case $\gamma \neq 0$, but nevertheless in this paper we want to consider $\alpha$ and $\beta$ as parameters subject only to this condition.

There is a vaste literature on nonnegative solutions to $(P_\gamma)$ , as in many models these are of special interest. But in recent years scientists became also interested in solutions with sign changes.
Selfsimilar solutions, however, can be used to describe the large time asymptotics of general solutions of the Cauchy-Problem with initial data of nonzero mass (see [KV]): Roughly speaking, if $m > \frac{(N-2)_+}{N}$ and the initial data $u_0$ have nonzero mass and, if $m > 1$, compact support, then the solution of the Cauchy-problem converges uniformly in $I\!R^N$ to the nonnegative selfsimilar solution – known as the Barenblatt-solution – with the same mass. Please note that no sign restriction is imposed on $u_0$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Similar results are conjectured – and in parts already proved, see [HV], [BHV] and [KV] – also in case of initial data with zero mass; this asymptotics being described by selfsimilar solutions with sign changes.

In this paper we establish an existence and uniqueness result and describe the possible large time behaviour of solutions of $(P_\gamma)$. It turns out that this can be done in terms of

$$k := \frac{\alpha}{\beta}, \qquad L := \lim_{\eta \to \infty} \eta^k U(\eta).$$

This problem is already solved for two special cases of $(P_\gamma)$ , namely $\gamma = 0$ and $\gamma \neq 0$, but $m = 1$. The first case was considered in [BHV], [D1] and [H]:
In the singular case $m < 1$ and the linear case $m = 1$ existence and uniqueness of global, classical solutions can easily derived by energy methods, whereas in the degenerate case $m > 1$ the solution $U$ is in general only continuous. Hulshof in [H] showed that the appropriate concept of solution is

$$U \in C^0_{loc}(\mathbb{R}^+), \quad V \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^+), \quad U, V' \text{ absolutely continuous.}$$

As absolute continuity in one dimension is equivalent to the $L^1$-property of the derivative, this means $U'$, $V'' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ and the differential equation is satisfied in a weak sense with test functions in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Sign changes for $U$ occur, if and only if $V'$ is not zero at a point where $U$ vanishes. If $V' = 0$ at such a point, the solution has to be continued by the zero function.
Within this class Hulshof was able to establish an existence and uniqueness result for solutions of $(P_0)$.

In case $\gamma \neq 0$ only the semilinear case $m = 1$ has been considered. Among other results Haraux and Weissler in [HW] proved existence and uniqueness of classical, global solutions. The limit $L$ always exists and is finite; if $L = 0$, then the solution decays exponentially.
Haraux and Weissler only dealt with the case of a forcing term $\gamma = 1$, but this particular result can easily be carried over to the case $\gamma = -1$.
In the degenerate case $m > 1$ with $\gamma = -1$ Peletier and Terman ([PT]) obtained existence of a nonnegative solution of $(P_\gamma)$ with compact support, if $p \in (m, m + \frac{2}{N})$. This solution gives rise to a very singular solution of $(PME)$, i.e. a solution more singular than the fundamental solutions. Their approach can not be carried over to solutions with sign changes. Also the problem of determining the general large time behaviour was left open.

Summarizing the known results, it seems that the reaction term $\gamma|U|^{p-1}U$ has no qualitative influence on the large time behaviour of $U$. This is true indeed for a wide parameter range:

**Theorem :**
Let $m > 0$, $p > 1$ and $\alpha s + \gamma|s|^{p-1}s > 0$ for all $s \in (0, U(0)]$. Then there exists a unique solution $V$ of $(P_\gamma)$, i.e. a function $U$ satisfying

$$U \in C^0_{loc}(\mathbb{R}^+), \quad V \in C^1_{loc}(\mathbb{R}^+), \quad U, V' \text{ absolutely continuous,}$$

which solves the differential equation in a weak sense with test functions in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Moreover $L$ always exists and is finite. If $L = 0$, then the large time behaviour of $V$ is as follows:
(i) If $m > 1$, then $V$ has compact support.

(ii) If $m = 1$, then $V$ decays exponentially.
(iii) If $m < 1$, then $\eta^{\frac{2m}{1-m}} V(\eta) \leq C$ and in case of finitely many zeroes $V$ converges to this constant.

Sketch of the proof:
To prove existence, rewrite the equation as

$$\begin{aligned} V' &= W \\ W' &= \frac{N-1}{\eta} W - (\alpha - \beta N) U - \gamma U^p \\ V(0) &= a, \qquad W(0) = 0. \end{aligned}$$

Classical methods yield a local solution, which can be extended to a global one in view of the energy estimate

$$\frac{d}{d\eta}\left\{ \frac{1}{2}|V'(\eta)|^2 + m\int_0^{U(\eta)} (\alpha s + \gamma s^p)|s|^{m-1} ds \right\} \leq 0.$$

Uniqueness in case $m \leq 1$ is clear, for the other cases it is a by-product of the classification result. This classification is done by an analysis of the phase plane in terms of $t = ln\eta$ and

$$\begin{aligned} f(t) &:= \eta^{\frac{2m}{1-m}} V(\eta), \quad g(t) := f'(t) - \frac{2m}{1-m} f(t), \qquad \text{if } m < 1, \\ x(t) &:= \frac{\eta V'(\eta)}{V(\eta)}, \quad y(t) := \eta^2 |U(\eta)|^{1-m}, \qquad \text{if } m > 1. \end{aligned}$$

These transformations were already used by Hulshof e.al. to classify the solutions of $(P_\gamma)$ with $\gamma = 0$, see [BHV], [D1] and [HV]. The results obtained there are stronger than the ones obtained here, as in case $\gamma = 0$ the transformations yield autonomous systems.
For details we would like to refer to [D2].

**Literature:**

[BHV] F. Bernis, J. Hulshof, J.L. Vasquez, "A very singular solution for the equation $z_t = |z_{xx}|^{m-1} z_{xx}$ and the asymptotic behaviour of general solutions", Preprint W90-25, Univ. Leiden, Netherlands (1990)

[D1] C. Dohmen, "Selfsimilar Solutions of the Porous Medium Equation Without Sign Restriction" Preprint No.267, SFB 256 Nonlinear Partial Differential Equations, Bonn (1993), submitted to *Journal Differential Equations*

[D2] C. Dohmen, Large Time Behaviour of Solutions of a Generalized Haraux-Weissler Equation, submitted to *Differential and Integral Equations*

[H] J.Hulshof, Similarity solutions of the porous medium equation with sign changes, *J.Math.Anal. Appl.***157**, pp.75-111 (1991)

[HV] J.Hulshof, J.L.Vasquez, "The Dipole Solution for the Porous Medium Equation in Several Space Dimensions", IMA Preprint Series # 842 (1991)

[HW] A. Haraux, F.B. Weissler, Non-Uniqueness for a Semilinear Initial Value Problem, *Indiana Univ.M.J.* **31**, pp.167-189 (1982)

[KV] S.Kamin, J.L.Vasquez, "Asymptotic Behaviour of Solutions of the Porous Medium Equation with sign changes", *SIAM J.Math.Anal.***22**, pp.34-45 (1991)

Sep. 16, 1993　北海道大学数学談話会原稿　　　　　　　　　　　近畿大学理工　泉 脩藏

# 多重根をとる多項式は次数が高い

★　$F\equiv F(x)$ を多項式とする。方程式 $F=0$ が原点で t 重根をとればFの次数はもちろん t 以上でなければならない。このことを$\mathbb{C}^n$の解析集合上で考えるとどうなるか？

★　Vを$0\in\mathbb{C}^n$の近傍で定義された解析集合とする。収束巾級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ $(x=(x_1,\ldots,x_n))$ の元のうちでV上の0の近傍で0となるものの全体をJとすると、これは$\mathbb{C}\{x\}$のイデアルとなる。剰余環 $O\equiv\mathbb{C}\{x\}/J$ はV上の正則函数の芽のなす環とみなされる。$x_1,\ldots,x_n$（の像）で生成されるOのイデアルmは、Oの唯一つの極大イデアルである。多項式Fに対して、$F|V=0$が原点で t 重根をとることを、$\nu(F)\equiv\sup\{p: F\in m^p\}=t$ となることと考える（Fの低次項ををJの元で相殺して Taylor 展開が始まる斉次項の次数を高くするときその最大値が t）。$\nu(F)$を、FのV上での0における位数という。そこで deg F と $\nu(F)$ を比較する。そのために $\nu(F)$ の deg F に関する増大位数を定義する：

$$\alpha_{V,0}\equiv\limsup_{\deg F\to\infty}\sup\{\log\nu(F)/\log\deg F\}$$

Ｉ．（[2]）Vを原点で正次元で既約とし、Vの集合芽$V_0$を含む最小の代数的集合を$[V_0]$とすると、$\alpha_{V,0}\geqq\dim[V_0]/\dim V_0$（$\geqq 1$）となる。

これは$[V_0]$の Hilbert 函数と$V_0$の Samuel 函数を較べるとすぐ出る。$\alpha_{V,0}=\infty$ となりＩで等号が成立しない例はある（上田氏）。

II．（[1], [2]）上の定理と同じ条件下で、次は同値である。

(i)　Vが代数集合の解析的既約成分である。

(ii)　$a>0$があって、任意のFに対して、$a\cdot\deg F\geqq\nu(F)$。　(iii)　$\alpha_{V,0}=1$。

これによって$\alpha_{V,0}$をVの0における超越位数と呼んでもさしつかえないであろう。今ある(i)⇒(ii)の証明はたいへん長く難しい。簡単な証明があるはずである。(ii)⇒(iii)は自明。(iii)⇒(i)はＩからただちに出る。

★　$y=x\cdot\exp x$ のグラフの原点における超越位数は２である。これは最も初等的な微分方程式の初期値に関する一意性から導かれる。この方法を応用すると次の一般化が得られる。

III．（[3]）

$$\Phi_\lambda(x)\equiv\frac{\sum_{1\leqq\mu\leqq s}\sum_{-1\leqq\gamma\leqq 1}g_{\lambda\mu}(x)\cdot\exp\gamma f_\mu(x)}{\sum_{1\leqq\mu\leqq s}\sum_{-1\leqq\gamma\leqq 1}g_\mu(x)\cdot\exp\gamma f_\mu(x)}\qquad(1\leqq\lambda\leqq n)$$

（$f_\mu,\ g_{\lambda\mu}\in\mathbb{C}[x]$　$(x\equiv(x_1,\ldots,x_m))$；$\deg f_\mu\leqq 1$）を成分とする解析集合の間の正則写像の芽 $\Phi:\mathbb{C}^m{}_0\longrightarrow V_\xi\subset\mathbb{C}^n$ が引き起こす局所環の準同型が単射（$V_\xi$がΦの像の解析的閉包）であるとする。$s_1\equiv\dim_{\mathbb{Q}}\{\mathbb{Q}D_1f_1+\ldots+\mathbb{Q}D_if_s\}$　$(D_i\equiv\partial/\partial x_i)$ とおくと、$\alpha_{V,\xi}\leqq\max s_i+1$ となる。

★　IIIがそのままでは適用できない $y=x^2\cdot\exp x^2$ のグラフの、原点における超越位数でも２であることがわかる。αが有限であるためのもっと良い十分条件は？

★　位数と次数の相互評価式は超越数論で大変重要な意味をもっている。多変数版 Schwarz の lemma 等、正則函数の増大度とも関係が深い。(cf. [1])

[1] Increase, convergence and vanishing of functions along a Moishezon space. J. Math. Kyoto Univ. 32, 245-258 (1992).　[2] A criterion of algebraicity of analytic set germs. Proc. J. Acad. 68, 307-309 (1992).　[3] Transcendental order of set germs parametrized by ratios of exponential polynomials. in preparation.

# On state constraint problem for 1st order PDEs

小池　茂昭　（埼玉大学・理学部）

## １． 序

次のような Bellman 方程式を考える。

$$\max_{a\in A}\{\lambda u(x)-\langle g(x,a),Du(x)\rangle-f(x,a)\}=0 \quad x\in\Omega \tag{1}$$

但し，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$は有界領域，$g:\overline{\Omega}\times A\to\mathbf{R}^n$と $f:\overline{\Omega}\times A\to\mathbf{R}$ は既知関数で，適当な滑らかさ（Lipschitz 連続）を仮定する。$u:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}$ が未知関数である。$A$ はコントロール・パラメーターと呼ばれる。

ここでは，Dirichlet や Neumann 問題でなく，制御理論において重要な State-space constraint（略して，SC）問題を考える。

(1) に対する SC 問題の解は，形式的に次の値関数（value function）で表される。

$$V(x)=\inf\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(X(t),\alpha(t))dt$$

但し，$\alpha(t)$ は $A$ に値を持つ可測関数，$X(t)$ は，その$\alpha(\cdot)$ を用いた次の微分方程式の解である。

$$\begin{cases} dX(t)/dt=g(X(t),\alpha(t)) & \text{for} \quad t>0 \\ X(0)=x. \end{cases} \tag{2}$$

更に，SC 問題では，この $X(\cdot)$ が$\overline{\Omega}$内にずっと留まるような $X(\cdot)$ について infを取っている；つまり，

$$X(t)\in\overline{\Omega} \quad \text{for all} \quad t\geq 0. \tag{3}$$

勿論，(3) が任意の $x\in\overline{\Omega}$（(2) 式の初期条件）に対して成立するためには，各点 $x\in\partial\Omega$で領域内に押し戻すベクトル場 $g(x,a)$（for some $a\in A$）の存在を仮定する。

Soner（[S]）は，このVが満たすべき境界条件を提唱し，連続関数の範疇で（その境界条件下で）一意性を示した。具体的には，次の式を満たすものを，SC問題の解とした。

$$
(4) \qquad \begin{cases} H(x,u(x),Du(x)) \leq 0 & \text{in } \Omega \\ H(x,u(x),Du(x)) \geq 0 & \text{on } \overline{\Omega}. \end{cases}
$$

ここで，$H:\overline{\Omega}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ は次のものである。

$$
H(x,r,p)=\max_{a\in A}\{\lambda r-\langle g(x,a),p\rangle-f(x,a)\}.
$$

一般に，$u$ に微分可能性は期待できないので，(4) 式は粘性解での意味での不等式である。

連続性の仮定（少なくとも境界付近で）をはずすと，技巧的な理由より，一意性を得るのは大変困難である事を注意しておく。

## ２． 結論

我々は，[S] と同じ仮定の下，動的計画原理より，Soner の提唱したものより多くの境界条件を値関数は満たすことを示し，その境界条件を満たすものを SC 問題の解と定式化することで連続性を仮定することなく一意性を示した。(具体的に，その条件については [I-K] を参照。)

Soner が粘性解の範疇でSC問題を扱って以来，技巧的には，SC問題は，Dirichlet問題の一種と考えられてきたが，今回の新しい境界条件によって，むしろ Oblique（又は，Neumann）問題の一種と捉えられる事が分かった。

## 参考文献


[I-K] H. Ishii and S. Koike, A new formulation of state constraints problem of first-order PDEs, submitted.

[S] M. H. Soner, Optimal control with state-space constraint I, *SIAM J. Control and Optimization*, **24** (1986) 552-562.

# 変数階数の擬微分作用素とSobolev空間について

菊地光嗣（静岡大教養）

ここでは空間内の位置 $x$ によって階数が変化するような擬微分作用素を考える。このような作用素は確率論における stable-like process の問題であらわれるが、[3] においてその目的のために変数階数の擬微分作用素がくわしく論じられている。

変数階数の擬微分作用素をまず定義する：

<u>定義</u>　$\sigma \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$；$\sigma$ のすべての偏導函数が有界$\}$

まず　$S^\sigma_{\rho,\delta} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$　$(0 \leq \delta < \rho \leq 1,\ \delta < 1)$ を

$$S^\sigma_{\rho,\delta} = \{ p(x,\xi)\ ;\ \forall\alpha\ \forall\beta \text{ 多重指標 } \exists C_{\alpha\beta} \text{ 定数 s.t.}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{\sigma(x)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \}$$

で定義する。次に $p \in S^\sigma_{\rho,\delta}$ に対し作用素 $P: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, p(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

$$\left( \text{但し} \quad \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\, dx \right)$$

このとき $P$ を $p(x,\xi)$ を symbol とする擬微分作用素といい $P = p(X, D_x)$ とかく。逆に $P$ に対しその symbol を $\sigma(P)$ とかく。

$S^\sigma_{\rho,\delta}$ の元を symbol とする擬微分作用素の全体を $\mathcal{S}^\sigma_{\rho,\delta}$ とかく。

変数階数の擬微分作用素やそれに関連する函数空間については[2]やそこに引用されている多くの文献においてかなり議論されているが、それらでは $\sigma(x) = s + \psi(x)$ $(s \in \mathbb{R},\ \psi \in \mathcal{S})$ と表わされる場合のみを扱っている。

[3]では変数階数の場合においても擬微分作用素の algebra が成立することが示されている。さらに[3]では放物型方程式に対する基本解も構成されているが、方程式は定数階数の Sobolev 空間の上で解いている。そこでここでは Sobolev 空間も変数階数にしてみる。

定義 $H^{\sigma(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \{ u \in H^{-\infty}(\mathbb{R}^n);\ \langle D_x \rangle^{\sigma(x)} u \in L^2(\mathbb{R}^n) \}$

と定義し、さらに内積を

$$(u, v)_\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_x \rangle^{\sigma(x)} u \cdot \overline{\langle D_x \rangle^{\sigma(x)} v}\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \langle D_x \rangle^{\underline{\sigma}} u \cdot \overline{\langle D_x \rangle^{\underline{\sigma}} v}\, dx$$

$$\left( 但し \quad \underline{\sigma} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sigma(x) \right)$$

と定める。

上のように $H^{\sigma(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を定義すると $H^{\sigma(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は Hilbert 空間となり、さらに定数階数と同じような性質をもつことがわかったので報告する。

なお この研究は 根来彬氏（静岡大教養）との共同研究です。

# 参考文献


[1] H. Kumano-go, Pseudo-Differential Operators, The MIT press, 1981.

[2] H. G. Leopold, *On function spaces of variable order of differentiation*, Forum Math., **3** (1991) 1 - 21.

[3] A. Negoro, *Stable-like process : construction of the transition density and the behavior of sample paths near* $t = 0$ , to appear in Osaka J. Math.

# 特異平面曲線，巡回被覆，ザリスキー

埼玉大理　酒井文雄

曲面論の応用によって，平面曲線に関する良い結果が得られることがある．宮岡型の不等式，被覆曲面の不変量などが用いられる．$C$を射影平面曲線とすし，$C$の次数を$d$としておく．$C$の各特異点のミルナー数の総和を全ミルナー数と呼び，$\mu(C)$ で表す．これは$C$の特異度を計る度合いである．$C$の特異点解消の全逆像に関するlog-宮岡不等式から，次の評価式が得られる．

不等式I
$$\mu(C) \leq \frac{\nu}{2\nu+1}(2d^2-3d)$$
また，被覆指数付きの宮岡型不等式の帰結として，次の評価式が得られる．

不等式II $C$がADE特異点のみを持つ場合，$d \geq 6$ならば，不等式
$$\mu(C) \leq \frac{5}{6}d^2 - d + \sum_{p \in \mathrm{Sing}C}(\frac{2}{\ell_p}-1)$$
が成立する。

次に$C$で分岐する被覆を用いる方法を紹介する．$C$のアフィン部分の定義方程式を$f(x,y)$としておく．$n$を$d$の約数とするとき，巡回被覆曲面$z^n = f(x,y)$を考える．$C$

の特異点 $p$ は正規特異点$\tilde{p}$に対応する．この曲面の　非特異射影モデル $X_n$のネーター公式を変形することによって，次の形の不等式が成立する．

不等式 III

$$\mu(C) < (\frac{2}{3}+\frac{1}{6n})d^2-\frac{3}{2}d+\frac{n}{n-1}+\frac{2}{n-1}\sum_{p\in \mathrm{Sing}(C)} c_{\tilde{p}}+b_1(X_n)$$

したがって，$X_n$の消滅定理あるいは評価式があれば$\mu(C)$の新しい評価式が得られる．ザリスキーの次の結果は非常に有用である．

定理 $C$が既約で $n$ が素数の巾ならば，$b_1(X_n)=0$ である．

上記の評価式はどれが最良ということはなく，適用するケースによって異なる．通常尖点 $\{y^2-x^3=0\}$ のみを持つ $d$ 次既約平面曲線に適用してみる．$s(d)$ でそのような $d$ 次曲線の特異点の個数の最大値とすると，不等式 II から，

$$s(d) \leq \frac{5}{16}d^2-\frac{3}{8}d$$

が得られる．このことから，limsup $s(d)/d^2 \leq \frac{5}{16}$が従う．平野厚子さんは修論において $\lim s(C_k)/d(C_k)^2 = 9/32$ となる曲線の列を構成した．

上記のザリスキーの結果は $C$が既約でないときには，その成分の個数を $r$とするとき，次の結果に拡張されることが判明した．今後の応用が期待される．

定理 $n$ が素数の巾ならば，$b_1(X_n) \leq (n-1)(r-1)$ が成立する．

# 曲線の発展方程式の周期解

溝口紀子　(東京学芸大・教育)

$T>0$, $K=(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})\times(\mathbf{R}/T\mathbf{Z})$, $f:K\to\mathbf{R}$ とし

$$u_t=u^2(u_{xx}+u-f) \quad \text{in } K \tag{1}$$

を考える。

方程式 (1) は　平面上の閉凸曲線の運動方程式

$$V=k-q(\vec{n},t) \tag{2}$$

(ただし、$V$ : 内向き成長速度, $k$ : 内向き曲率, $q$ : $t$ に関して $T-$周期的) を Gauss 媒介変数 $x$ で表すことによって得られる。このとき，閉凸曲線の運動を表すための必要十分条件として，方程式 (1) の解 $u$ は

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{ix}}{u(x,t)}dx=0, \quad {}^{\forall}t\in[0,T) \tag{3}$$

をみたさなければならない。

方程式 (1) に対して　次の結果を得る。

**定理.** $f, f_t\in C(K)$, $f>0$ で,

$$\int_0^{2\pi} f(x,t)e^{ix}dx=0, \quad {}^{\forall}t\in[0,T)$$

ならば, (3) をみたすような 方程式 (1) の正値解 $u\in\bigcap_{p>1}W_p^{2,1}(K)$ が存在する。

**(証明)**　方程式 (1) を解くために, まず,$f$を smooth とし, 次の近似方程式を考える：

$$u_t=(u+\varepsilon^2)^2\left(u_{xx}+\frac{u^2}{(u+\varepsilon^2)^2}\left(u+\frac{\varepsilon}{\xi_\varepsilon(u)}-f\right)\right) \quad \text{in } K \tag{4}$$

ただし,

$\xi_\varepsilon$ : smooth $, \xi_\varepsilon'(s) \geq 0, ^\forall s > 0, \xi_\varepsilon(s) = s + \varepsilon^2, ^\forall s \geq m\varepsilon,$

$\max(s+\varepsilon^2, m\varepsilon) \leq \xi_\varepsilon(s) \leq^\exists C \max(s+\varepsilon^2, m\varepsilon), ^\forall s > 0,$

$\dfrac{1}{m} < \min\limits_K f$

$b > 0$ s.t. $bs + \dfrac{s^2}{(s+\varepsilon^2)^2}(s + \dfrac{\varepsilon}{\xi_\varepsilon(s)} - f) \geq 0, ^\forall s > 0$ をとる。$^\forall v \in C(K)$ に対して,

$$u_t = (u+\varepsilon^2)^2(u_{xx} - bu + v) \quad \text{in } K$$

の解 $u$ が $W_p^{2,1}(K)$ で一意的に存在するので, $T$ を $v$ に $u$ を対応させるような写像とすると, $T : C(K) \to C(K)$ 連続, compact になる。$\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$\phi(s) = \begin{cases} bs + \dfrac{s^2}{(s+\varepsilon^2)^2}(s + \dfrac{\varepsilon}{\xi_\varepsilon(s)} - f), & s > 0 \\ 0 & s \leq 0 \end{cases}$$

とすると, $T \circ \phi$ の 0 でない不動点は方程式 (4) の正値解である。

次の　a priori 評価を得る:

$^\exists M, ^\exists \delta > 0 : |f|_\infty, |f_t|_\infty$ にのみ依存 s.t.

$^\forall \varepsilon > 0, ^\forall u > 0$ : sol. of (4) に対して

$$\delta \leq u(x,t) \leq M, \quad ^\forall(x,t) \in K$$

このことから,　適当な $R, r > 0; R > r$ をとると

$$\deg\,(I - T\circ\phi, B_R(0), 0) = 0,\ \deg\,(I - T\circ\phi, B_r(0), 0) = 1$$

従って, $^\forall \varepsilon > 0$ に対して　(4) の正値解 $u_\varepsilon$ が存在する。

このとき,

$$^\exists C > 0 \text{ s.t. } \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{u_\varepsilon(x,t) + \varepsilon^2} dx\right| \leq C\varepsilon, \quad ^\forall \varepsilon > 0$$

だから　$u_\varepsilon$ の極限 $u$ は (3) をみたす　方程式 (1) の解である。$f$ が一般の場合は, smooth な関数で近似すればよい。

# Schrödinger 作用素に対する波動作用素の $L^p$ 有界性とその応用

東京大学数理科学研究科　谷　島　賢　二

この講演では Schrödinger 作用素の対

$$H = H_0 + V, \qquad H_0 = -\Delta = -(\partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_m^2)$$

に対する波動作用素

$$W_\pm = \mathrm{s}-\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0} \tag{1}$$

が，ポテンシャル $V$ に対する適当な仮定の下で，任意の $1 \le p \le \infty$ に対して $L^p(R^m)$ 空間上での有界作用素に拡張されることを示し，そのいくつかの応用を与える。

質量が $m$ の量子力学的粒子が $R^m$ の中をポテンシャル $V(x)$ による力の場内で運動するとする。粒子の状態は $L^2(R^m)$ の $\|u\| = 1$ なる関数で記述され，その時間変化は Schrödinger 作用素 $H = -(1/2m)\Delta + V(x)$ を用いた Schrödinger 方程式

$$i\frac{du}{dt} = (-\Delta + V(x))u(t,x) \tag{2}$$

の解作用素 $\exp(-itH) : u \to \exp(-itH)u$ によって与えられる。

$e^{-itH}u$ の $t \to \pm\infty$ における挙動と $H$ のスペクトル構造との間には密接な関係があり，$H$ の点スペクトル部分空間 $L^2_p(H)$，連続スペクトル部分空間 $L^2_c(H)$ はそれぞれ，粒子の束縛状態，散乱状態に対応する。即ち，$u \in L^2_p(H)$ の状態の粒子は未来永劫有限な領域に存在するのに対し，$u \in L^2_c(H)$ の粒子は $t \to \pm\infty$ で任意の有界領域から飛び出してしまう。

散乱状態の粒子は $t \to \pm\infty$ において無限遠に飛び去り，そこでは力の影響なしの状態に漸近すると期待されよう。そこで散乱理論では，$\exp(-itH)u$ の $t \to \pm\infty$ でのふるまいを，波動作用素 (1) を用いて調べる。波動作用素 (1) が存在すれば，自由運動 $e^{-itH_0}u$ に漸近する状態 $e^{-itH}u_\pm$, $u_\pm \in L^2_c(H)$, が存在する。また，任意の $e^{-itH}u$, $u \in L^2_c(H)$, が自由運動に漸近するか否かは，

$$Image\ W_\pm = L^2_c(H) \quad ? \tag{3}$$

と同値である。(3) が成り立つとき，波動作用素は完備であるという。$V(x)$ が $|x| \to \infty$ において $V(x) = O(|x|^{-1-\epsilon})$, $\epsilon > 0$ の様に減衰すれば，波動

作用素は存在して完備である。この時，$W_\pm$ は $L^2(R^m)$ から $L^2_c(H)$ へのユニタリ作用素である

この様な物理的な観点から興味のほかに，波動作用素は数学的にも興味深い性質をもつ。定義から直ちに

$$e^{-itH}W_\pm = W_\pm e^{-itH_0} \tag{4}$$

が成立する。(4) から，Fourier 変換と functional claculus を用いれば，$R$ 上の任意の Borel 関数 $f$ に対して，

$$f(H)P_c(H) = W_\pm f(H_0)W_\pm^*$$

が成り立ち，$W_\pm$ は二つの作用素 $f(H_0)$ と $f(H)$ の連続スペクトル部分 $f(H)P_c(H)$ を結ぶ作用素であることがわかる。これから，$W_\pm$ の作用素論的な性質を知れば，$f(H)$ の性質はすべて，$f(H_0)$ の性質から導けることが知れる。我々の主定理は次である。$m_* = (m-1)/(m-2)$ , $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$ と書く。

**仮定 1** $V(x)$ は $R^m$, $m \geq 3$ 上の実数値関数で，適当な$\sigma > 2/m_*$ に対して $\mathcal{F}(\langle x\rangle^\sigma V) \in L^{m_*}(R^m)$, 更に次の *(1), (2)* のいずれかを満たす。

*1.* $\|\mathcal{F}(\langle x\rangle^\sigma V)\|_{L^{m_*}(R^m)}$ は十分小さい。

*2.* 空間次元 $m = 2m' - 1$ は奇数で $|\alpha| \leq \max\{0, m'-4\}$ を満たす任意の$\alpha$ に対して

$$|(\partial^\alpha V/\partial x^\alpha)(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-\delta}, \qquad \delta > \max(m+2, 3m/2-2).$$

**定理 1** $V$ が上の仮定を満たし，更に 0 は $H$ の固有値でもレゾナンスでもないとする。この時，任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して，波動作用素 $W_\pm$ は $L^p(R^m)$ 上の有界作用素に拡張される。

この定理は例えば次のように用いられる。

**定理 2** 定理 *1* の仮定が成り立つものとする。この時，任意の $2 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, に対して定数 $C_p > 0$ が存在して

$$\| e^{-itH}P_c(H)f \|_p \leq C_p |t|^{m(1/p-1/2)} \| f \|_q, \quad f \in L^2 \cap L^q.$$

# 参考文献


[1] Yajima, K., *The $L^p$-continuity of wave operators for Schrödinger operators*, preprint

# 自己共役作用素の可換性

内　山　　充

私はヒルベルト空間の縮小作用素の canonical model theory について勉強してきたが，最近　自己共役作用素の可換性に興味を持ち，いくつかの結果を得たので，それを報告します。

§１　巾（べき）

有界作用素　Ｔ　について　$T \geqq 0$ とはすべてのベクトル　ｘについて
$(Tx, x) \geqq 0$　を意味する。　$\mathrm{Re}\ T \geqq 0$　なるとき　Ｔは
アクレティブ　と呼ばれる。

補助定理( DePrima, Richard ) 全ての n について

$T^n$ が アクレティブ　⇒　$T \geqq 0$

まず，これを次のように拡張しよう。

定理１．　$\mathrm{Re}\ X \geqq \mathrm{Re}\ Y$，全ての n について　$X^n + Y^n$ が自己共役

⇒　$X = T \oplus s, a.$　$Y = T^* \oplus s, a.$

定理２．　$\mathrm{Re}\ X \geqq \mathrm{Re}\ Y$，　$X^n + Y^n \geqq 0$

⇒　Ｘ，Ｙ　は共に　s，a．

これらで，　$\mathrm{Re}\ X \geqq \mathrm{Re} Y$　は必要である。

定理３．　$A \geqq 0$，$B \geqq C$

$AB^n + C^n A \geqq 0$

⇒　ＡはＢ，Ｃと可換である。

系１．　$A \geqq 0$，　$AB^n + B^n A \geqq 0$　⇒　ＡとＢは可換

系２．　$0 \geqq A, B$　すべてのｎ，$t > 0$ について　$A^2 \leqq (A + tB^n)^2$

⇒　ＡとＢは可換

§２．　スペクトル順序

自己共役作用素　Ａ，Ｂ　が　スペクトル族

$E(\lambda)$, $F(\lambda)$,　をもつとき

$A \precsim B$　とは　$E(\lambda) \geqq F(\lambda)$　（すべての $\lambda$）を意味する。

定理（Olson）　$0 \leqq A, B$　のとき

$$A \precsim B \Leftrightarrow A^n \leqq B^n \quad (\text{すべての } n)$$

定理４．　$A \leqq B \Leftrightarrow \exp tA \leqq \exp tB \quad (t > 0)$

$$\Leftrightarrow \exp(-tB) \leqq \exp(-tA)$$

系３．　$A \precsim B$,　ＣがＡ，Ｂに可換　$\Rightarrow$　$A + C \precsim B + C$

定理５．　$\exp(tA) \leqq \exp(t(A + sB))$，（すべての $s$, $t > 0$）

$\Rightarrow$　ＡとＢは可換

Ａ，Ｂが有限行列のときは条件をゆるめる事ができる。

系４．　$W \ni 1$ は作用素から成る線形空間．　$W = W^*$

Ｗ内の　$X, Y \geqq 0$　について

$$\exp\left(\frac{1}{2}(X + Y)\right) \leqq \frac{1}{2}(\exp X + \exp Y)$$

$\Rightarrow$　Ｗ の元は可換

定理６．　$H(s)$　は区間　で定義された実解析関数で，自己共役作用素を値にとる。

$H(s)$ がスペクトル順序で単調ならば　$H(s)$　の元は全て可換である。

# Semilinear heat equations
# and the Navier-Stokes equation
# with distributions as initial data

Masao Yamazaki (Hitotsubashi University)

This is a joint work with H. Kozono (Nagoya University).

In this talk we consider the Cauchy problem for semilinear heat equations on $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) + f\bigl(u(t,x)\bigr) \quad \text{in} \quad ]0,\infty[\times\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(0,x) = a(x) \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where $f(\sigma)$ is a locally Lipschitz continuous function on $\mathbb{C}$ satisfying

$$f(0) = 0 \quad \text{and} \quad |f(\sigma) - f(\rho)| \le C|\sigma - \rho|\left(|\sigma|^{\gamma-1} + |\rho|^{\gamma-1}\right) \tag{3}$$

for every $\sigma$, $\rho \in \mathbb{C}$ with some constants $\gamma > 1$ and $C > 0$. A typical example of $f(\sigma)$ satisfying (3) is $f(\sigma) = \pm|\sigma|^{\gamma-1}\sigma$.

We also consider the Cauchy problem for the Navier-Stokes equation on $\mathbb{R}^n$ for $n \ge 2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u + (u\cdot\nabla_x)u + \nabla_x\pi = 0 \quad \text{in} \quad ]0,\infty[\times\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\nabla_x \cdot u = 0 \quad \text{in} \quad ]0,\infty[\times\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$u(0,x) = a(x) \quad \text{on} \quad \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Suppose throughout this talk that the initial velocity $a(x)$ satisfies $\nabla_x \cdot a(x) = 0$.

We construct new function spaces in the same way as the Besov spaces, based on the Morrey spaces in place of the standard $L^p$-spaces, and to show that, if the initial data $a(x)$ belongs to some function spaces above and its norm is sufficiently small, then the Cauchy problems (1)–(2) and (4)–(6) admit unique time-global strong solutions with a bound near $t = 0$, provided that the function $f(\sigma)$ in (1) satisfies (3) with some constant $\gamma > 1 + 2/n$.

We begin with the definition of the Morrey spaces. For $p$ and $q$ satisfying $1 \le q \le p < \infty$, the *Morrey space* $\mathcal{M}^p_q$ is defined as the set of functions $u(x) \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\left\|u\,\middle|\mathcal{M}^p_q\right\| = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\sup_{R>0} R^{n/p-n/q}\left\|u\,|L^q\left(B(x_0,R)\right)\right\| < \infty,$$

where $B(x_0,R)$ denotes the closed ball in $\mathbb{R}^n$ with center $x_0$ and radius $R$.

For $p$ and $q$ as above, $r \in [1,\infty]$ and $s \in \mathbb{R}$, we introduce the space $\mathcal{N}^s_{p,q,r}$, a subspace of $\mathcal{S}'$, as the real interpolation space $\mathcal{N}^s_{p,q,r} = \left((-\Delta)^{-s_1/2}\mathcal{M}^p_q, (-\Delta)^{-s_2/2}\mathcal{M}^p_q\right)_{\theta,r}$, where $s_1 \ne s_2$, $\theta \in ]0,1[$ and $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$.

Then we can state our main result for (1)–(2).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

**Theorem 1.** *Suppose that $f(\sigma)$ satisfies (3) with some constant $\gamma > 1 + 2/n$, and let $p$ and $q$ be real numbers such that $\gamma \le q \le p$ and that $n(\gamma - 1) < 2p < n\gamma(\gamma - 1)$. Then there exist a positive number $\delta_0$ and a continuous, strictly increasing function $\omega(\delta)$ on $[0, \delta_0]$ satisfying $\omega(0) = 0$ such that, for every $a(x) \in \mathcal{N}^{n/p-2/(\gamma-1)}_{p,q,\infty}$ satisfying $\delta = \left\| a(x) \left| \mathcal{N}^{n/p-2/(\gamma-1)}_{p,q,\infty} \right.\right\| \le \delta_0$, there uniquely exists a solution $u(t,x)$ of (1) on $]0,\infty[ \times \mathbb{R}^n$ in the space $L^\infty\left(]0,\infty[, \mathcal{N}^{n/p-2/(\gamma-1)}_{p,q,\infty}\right)$. The solution $u(t,x)$ is continuously differentiable in $t$ and twice continuously differentiable in $x$, and satisfies $\sup_{t>0} t^{1/(\gamma-1)-n/2p} \left\| u(t,\cdot) \left| \mathcal{M}^p_q \right.\right\| \le \omega(\delta)$ and $u(t,\cdot) \to a$ in the weak-$*$ topology of the space $\dot{B}^{-2/(\gamma-1)}_{\infty,\infty}$ as $t \to +0$.*

**Example.** Suppose that $1 \le \gamma < p < \infty$. Then we have

$$u(x) = \prod_{j=1}^{n} (x_j)_+^{-1/p} \in \mathcal{M}^p_\gamma \subset \mathcal{N}^0_{p,\gamma,\infty}.$$

It follows that $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x) = -\dfrac{1}{p}\,\mathrm{p.f.}(x_1)_+^{-1-1/p} \prod_{j=2}^{n} (x_j)_+^{-1/p} \in \mathcal{N}^{-1}_{p,\gamma,\infty}$.

On the other hand, if $n \ge 3$, we have $1 + \dfrac{2}{n} < \rho(n) = \dfrac{3 - n + \sqrt{n^2 - 2n + 9}}{2} < 2$. Hence, for every $\gamma \in ]\rho(n), 2[$, we have $1 + 2/n < \gamma$. Putting $p = n(\gamma-1)/(3-\gamma)$, we have $n/p - 2/(\gamma - 1) = -1$. The inequality $\gamma^2 - (3-n)\gamma - n > 0$ implies $\gamma < p$. Further, the inequality $1 < \gamma < 2$ implies $(3-\gamma)\gamma - 2 > 0$, and hence

$$n(\gamma - 1) < \frac{2n(\gamma-1)}{3-\gamma} = 2p < n\gamma(\gamma - 1).$$

It follows that the distribution $c(\partial u/\partial x_1)(x)$ can be taken as the initial value of Theorem 1 with $q = \gamma$, provided that the constant $c$ is sufficiently small.

We next state our main result for (4)–(6).

**Theorem 2.** *For every $p$ and $q$ such that $1 \le q \le p < \infty$ and that $n < p$, there exist a positive constant $\delta_0$ and a continuous, strictly increasing function $\omega(\delta)$ on $[0, \delta_0]$ satisfying $\omega(0) = 0$ such that, for every $a(x) \in \mathcal{N}^{n/p-1}_{p,q,\infty}$ satisfying $\nabla_x \cdot a(x) = 0$ and $\delta = \left\| a(x) \left| \mathcal{N}^{n/p-1}_{p,q,\infty} \right.\right\| \le \delta_0$, there uniquely exists a solution $u(t,x)$ of (4)–(5) in $C^\infty(]0,\infty[ \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty\left(]0,\infty[, \mathcal{N}^{n/p-1}_{p,q,\infty}\right)$ satisfying $\sup_{t>0} t^{1/2-n/4p} \left\| u(t) \left| \mathcal{M}^{2p}_{2q} \right.\right\| \le \omega(\delta)$ and $u(t,\cdot) \to a$ in the weak-$*$ topology of the space $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ as $t \to +0$.*

**Example.** We have $\mathrm{p.v.}\,\dfrac{1}{x} \in \mathcal{N}^0_{1,1,\infty}(\mathbb{R})$, since it is the Hilbert transform of the measure $\delta(x) \in \dot{B}^0_{1,\infty}(\mathbb{R}) = \mathcal{N}^0_{1,1,\infty}(\mathbb{R})$. (Note that $\mathrm{p.v.}\,\dfrac{1}{x} \notin \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$.) Hence we have $\mathrm{p.v.}\,\dfrac{1}{x_1} \in \mathcal{N}^0_{n,1,\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{N}^{n/p-1}_{p,p/n,\infty}(\mathbb{R}^n)$ for every $p > n$. It follows that $c\left(0, \cdots, 0, \mathrm{p.v.}\,\dfrac{1}{x_1}\right)$ can be taken as the initial value of Theorem 2 with $q \in [1, p/n]$ for every $n \ge 2$, provided that the constant $c$ is sufficiently small.

# 非有基的集合論とその応用

北海道大学理学部　数学教室
辻下　徹

1993.11.10

自分自身を含む集合は、今世紀後半になって数学の世界から姿を消してしまっていたが、理論的計算機科学のプロセス理論を数学的に基礎付ける試みのなかから８０年代後半に再び姿を現し、積極的な役割を果たしはじめている。Aczel はこの種の集合の振る舞いを明確に規定する公理（AFA: Anti-foundation axiom）を見いだし、Zermero-Fraenkel の公理系の中の有基性公理を AFA に置き換えたもののモデルを構成し ([1])、非有基的集合論（non-well-founded set theory）[1]を構築した（わかりやすい紹介としては [2],[3] がある）。

この集合論はプロセス研究にとどまらず、種々の循環的様相を内包する現象の分析・理解を容易にする簡明な記述法を与えており、数学者に馴染み深い集合論の枠組の表現力を飛躍的に増大させた。

談話会では、非有基的集合論の概要を解説し、その有用性を示す例をいくつか紹介した。

## 参考文献

[1] P.Aczel, *Non-well-founded Sets,* CSLI Lecture Notes No. 14, Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University, 1988.

[2] J.Barwise and J.Etchemendy, *The Liar, An Essay on Truth and Circularity*, Oxford Univ. Press, 1987.

[3] J.Barwise and L.Moss, Hypersets, The Mathematical intelligencer, 13(4), p.31–41, 1991.

[1]これを Hyperset theory と呼ぶ人達もいる。

# 内容の概略

- 非有基的集合論の概要
  - Zermelo Fraenkel の公理系
  - 集合の picture, graph の decoration, bisimulation
  - Aczel の非有基性公理 AFA
  - AFA の技術的意義
    - 集合方程式系の解の一意性
    - クラス作用素の固定点の存在
  - AFA の象徴的意義
- 応用例
  - 非有基的文：自己参照文
    - ゲーデル文:非有基的集合論の不完全性
    - 状況理論：自己参照文
  - 知識論理のモデル
  - プロセスの歴史表示から集合表現への変換
  - 超準数学の基礎付け：内的集合論のモデルの構成

# $\boldsymbol{R}^3$ での平衡ベクトルポテンシャルについて

山口博史（滋賀大学　教育学部）

<u>序。</u> 3次元ユークリッド空間に置かれた任意の滑らかな電導体に＋１の電荷を与えると，電荷はその表面に均衡に分布し、それより生じる電場が導体内では恒等的に0となる状態、いわゆる平衡状態に到る。その時の電荷分布は平衡電荷分布と言われる。これより空間内に平衡電場が生じる。この事実はポテンシャル論の基盤の一つになっている。この講演では、ソレノイドの一般化として、磁場についても同様のことが言えることを述べる。

<u>面電流。</u> 先ず、$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル場 $J(x) = (f_1, f_2, f_3)$ が次の二条件: (1) $f_i \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3)$, (2) $\operatorname{div} J(x) = 0$, を満たす時、$Jdv_x$ を体積電流と言う。但し、$dv_x$ は $\boldsymbol{R}^3$ の体積要素。空間内の任意の閉曲線 $\gamma$ に対して、$\gamma$ を通過する $Jdv_x$ の全電流を $J[\gamma] = \int_Q J(y) \cdot n_y \, dS_y$ で定義する。ここに、$Q$ は $\partial Q = \gamma$ となる曲面、$n_y$ は $Q$ の点 $y$ における単位外法線ベクトルを表す。

次に、$D$ は滑らかな閉曲面 $\Sigma$ で囲まれた領域とし、$D' = \boldsymbol{R}^3 \setminus (D \cup \Sigma)$ とする。曲面 $\Sigma$ 上のベクトル場 $J(x) = (f_1, f_2, f_3)$ が次の二条件：

1. $f_i \in C^\infty(\Sigma)$
2. $dS_x$ を $\Sigma$ の面素とする時、超関数の意味で $J_n dv_x \to J dS_x (n \to \infty)$ となる体積電流の列 $\{J_n dv_x\}_{n=1,2,\ldots}$ が存在する

を満たすとき、$JdS_x$ を $\Sigma$ 上の面電流と言う。次のベクトル値積分を考える：

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{J(y)}{\|x-y\|} \, dS_y & (x \in \boldsymbol{R}^3) \\ B(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{x-y}{\|x-y\|^3} \times J(y) \, dS_y & (x \in D \cup D'). \end{aligned}$$

Biot-Savart に従って、$A(x)$ を面電流 $JdS_x$ のベクトルポテンシャル、$B(x)$ を $JdS_x$ より生じる磁場と言う。$B(x)$ は $\Sigma$ に沿って次の $gap$ を有する：

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} B(x) - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D'}} B(x) = n_{x_0} \times J(x_0) \qquad \text{for } x_0 \in \Sigma.$$

任意の閉曲線 $\gamma \subset D \cup D'$ に対して、$\Sigma$ 上の面電流 $JdS_x$ の $\gamma$ を通過する全電流を $J[\gamma] = \lim_{n\to\infty} J_n[\gamma]$ で定義する．但し、$\{J_n dv_x\}_{n=1,2,\ldots}$ は 2 で述べたものである。

<u>平衡面電流に関する主定理。</u> 今、$\Sigma$ 上の面電流 $JdS_x$ から生じる $D \cup D'$ 上の磁場 $B(x)$ が、偶々、$D'$ 上で恒等的に0になったとする。このとき、$JdS_x$

を $\Sigma$ 上の平衡面電流と名ずける。そのベクトルポテンシャル $A(x)$ を平衡ベクトルポテンシャル、$B(x)$ を平衡磁場と言う。

**定理.** $\{\gamma_i\}_{i=1,2,\cdots,q}$ を $D$ の 1 次元ホモロジー基底とする。このとき、

1. 各 $i$ $(1 \leq i \leq q)$ に対して、$J_i[\gamma_j] = \delta_{ij}$ $(1 \leq \forall j \leq q)$ を満たす平衡面電流 $J_i dS_x$ が一意的に存在する.
2. $\Sigma$ 上の任意の平衡面電流は $\{J_i dS_x\}_{i=1,2,\cdots,q}$ の一次結合で表せる。

平衡面電流はある種の極値的性質を持つことが証明出来る。更に、$\Sigma$ 上に条件: $I_0[\gamma_j] = \delta_{ij}$ $(1 \leq \forall j \leq q)$ を満たす面電流 $I_0 dS_x$ が与えられたとする。$I_0 dS_x$ は磁場 $B_0(x)$ を生じる。その磁場は、自然に、条件: $I_1[\gamma_j] = \delta_{ij}$ を満たす$\Sigma$ 上の面電流 $I_1 dS_x$ を生じる。$I_1 dS_x$ は磁場 $B_1(x)$ を生じ、$B_1(x)$ は、自然に、条件: $I_2[\gamma_j] = \delta_{ij}$ を満たす $\Sigma$ 上の面電流 $I_2 dS_x$ を生じる。以下同様にして、逐次的に $\Sigma$ 上の面電流の列 $I_0 dS_x, I_1 dS_x, I_2 dS_x, \cdots$ が得られる。このとき、この列 $\{I_n dS_x\}_n$ は定理の 1 に述べた平衡面電流 $J_i dS_x$ に収束することが証明される。即ち、物理的思考実験によって、平衡面電流に到達出来ることが分かる。

# TWO–DIMENSIONAL NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS RELATED TO TRUDINGER–MOSER'S INEQUALITY

TAKAYOSHI OGAWA† AND TAKASHI SUZUKI‡

† Department of Mathematics
Nagoya University

‡ Department of Mathematics
Ehime University

We are concerned with the following nonlinear elliptic equations:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u e^{u^2}, & x \in B, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ is a unit disk in $\mathbb{R}^2$ and $\lambda$ is a positive parameter. We consider a family of solutions of (1) satisfying

$$\|u\|_{L^\infty} \to \infty \quad \text{as } \lambda \to 0. \tag{2}$$

The nonlinearity of the equation (1) is the Sobolev critical exponent in two dimension. For any domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, It is well known that the Sobolev space $H_0^1(\Omega)$ is continuously imbedded in $L^p(\Omega)$ for any $p < \infty$ but is false in the case $p = \infty$. Trudinger [18] showed that for any $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|\nabla u\|_2 = 1$, there are two constants $\alpha > 0$ and $C > 0$ such that

$$\int_\Omega \exp\{\alpha u^2\} dx \le C|\Omega|. \tag{3}$$

Later, Moser [8] simplified the proof and improved that (3) is also valid for $\alpha \le 4\pi$. Here $4\pi$ is the best constant of the isoperimetric inequality. Further extensions for this inequality, see Ogawa-Ozawa [11] and Ozawa [13].

Concerning our problem (1), there are two different approaches. One is the variational method. When we consider the maximizing problem of the functional

$$\int_\Omega \exp\{\alpha u^2\} dx \quad \text{for } u \in H_0^1(\Omega), \quad \|\nabla u\|_2 = 1 \tag{4}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

on a bounded domain. Then the extremal function (if it is achieved) becomes a solution of (1). Shaw [15] showed the existence of a positive solution of (1) for each parameter $\lambda > 0$ (see also Adimurti [1]). When the domain is a ball in $\mathbb{R}^n$, the maximum can be attained by some function even when $n = 2$ and $\alpha = 4\pi$ (Carleson-Chang [5]).

When the domain is a unit disk, all the positive smooth solutions must be radially symmetric by Gidas-Ni-Nirenberg's result [6]. Therefore the Dirichlet problem may be written as the nonlinear ordinary differential equation:

$$\begin{cases} -u_{rr} - \dfrac{1}{r}u_r = \lambda u e^{u^2}, & x \in [0,1), \\ u(1) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

By solving (5), we can obtain the details of the properties of the positive solution of (1), which is the second method. Atkinson-Peletier [2], [3] applied the shooting method to (5) and proved the existence of radially symmetric solution of (1) satisfying

$$\|u\|_{L^\infty} \to \infty \text{ as } \lambda \to 0.$$

Our aim is to specify more precise behavior of the family of solutions $\{(u, \lambda)\}$ as $\lambda \to 0$. We have three results. First one states a *global behavior* of the solutions.

**Theorem A.** *Let $u$ be a positive solution of* (1) *with the blow up condition* (2). *That is*

$$\|u\|_{L^\infty(B)} = u(0) \to \infty \text{ as } \lambda \to 0.$$

*Then we have*

$$u(x) \to 0 \text{ as } \lambda \to 0$$

*for all $x \in B \setminus \{0\}$. Moreover we have*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \int_B u e^{u^2} dx = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda \int_B (e^{u^2} - 1) dx = 0, \tag{7}$$

$$\underline{\lim}_{\lambda \to 0} \int_B |\nabla u|^2 dx \geq 4\pi. \tag{8}$$

This theorem says that the solution satisfying (2) must blow-up only at the origin. The inequality (8) shows that the solution concentrates to the origin with its energy density $|\nabla u|^2$. The lower bound in (9) arise from the sharp exponent of the Trudinger inequality (3).

The second result is a *microscopic behavior* near the origin. When we rescale the solution by some sequence, then the solution has a limit function.

**Theorem B.** *There is a subsequence $\{(u_m, \lambda_m)\}$ of a family of solutions of* (1) *with* (2) *and a scaling sequence $\{\gamma_m\}$ such that $\gamma_m \to 0$ as $\lambda_m \to 0$ which satisfy*

$$u^2(\gamma_m x) - u^2(\gamma_m) \to 2\log(\frac{2}{1+|x|^2}) \quad \text{as } \lambda_m \to 0 \tag{9}$$

*locally uniformly on $B \setminus \{0\}$.*

The limit function of (9) is an exact solution of $-\Delta v = 2e^v$. Remark that since the nonlinearity of our problem is nonhomogeneous, the usual scaling $u \to \gamma^\mu u(\gamma x)$ does not work well. ( For other nonlinearity or the higher dimensional case, see Nagasaki-Suzuki [9] and Itoh [7].)

The property (9) was firstly observed by Carleson-Chang in an implicit way. Later Struwe [16] obtained a similar result for the non-compact maximizing sequence for the variational problem (4) for the case $\alpha = 4\pi$. Our result Theorem B is, however, different from theirs, because in our case, each factor of the sequence $\{(u_m, \lambda_m)\}$ satisfies the equation (1). Moreover even the energy integral might blow up as $\lambda \to 0$ and therefore we can not obtain a priori estimate of $\{u_m\}$ from the Dirichlet integral. This is the crucial difference from the variational setting.

For the uniform convergence, if we assume the smallness on the energy for the asymptotic solution, then we have the following.

**Theorem C.** *Let $\{(u_m, \lambda_m)\}$ be the same as in Theorem B. If we additionally assume that*

$$E_0 \equiv \limsup_{\lambda_m \to 0} \int_B |\nabla u_m|^2 dx < 6\pi$$

*Then the convergence in Theorem B is uniform on $B$, that is,*

$$u^2(\gamma_m x) - u^2(\gamma_m) \to 2\log(\frac{2}{1+|x|^2}) \quad \text{as } \lambda_m \to 0 \tag{10}$$

*uniformly on $B$.*

Theorem C is proved by the aid of Brezis-Merle's ([4]) result.

**Lemma.** *Let $u$ be a solution of*

$$\begin{cases} -\Delta u = Ve^u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

*where $\Omega$ is any bounded domain in $\mathbb{R}^2$.*

(1) *If $V \in L^p(\Omega)$ and $e^u \in L^{p'}(\Omega)$ with $1 < p < \infty$, then*

$$u \in L^\infty(\Omega).$$

(2) *Let $\{(u_n, V_n)\}$ be a family of solutions to* (12) *with $\|V_n\|_p \le C$, $\|V_n e^{u_n}\|_1 \le \varepsilon < 4\pi/p'$. Then*

$$\|u_n\|_\infty \le C \quad \text{independent of } n.$$

## REFERENCES


[1] Adimurthi, *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n-Laplacian*, Ann. Scuo. Norm. Sup. Pisa **17** (1990), 393–413.

[2] F.V. Atkinson and L.A.Peletier, *Ground states of* $-\Delta u = f(u)$ *and the Emden-Fowler equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **93** (1986), 103–127.

[3] F.V. Atkinson and L.A.Peletier, *Ground states and Dirichlet problems for* $-\Delta u = f(u)$ *in* $\mathbb{R}^2$, Arch. Rat. Mech. Anal. **96** (1986), 147–165.

[4] H. Brezis and F. Merle, *Uniform estimate and blow-up behavior for solutions of* $-\Delta u = V(x)e^u$ *in two dimensions*, Commun. P.D.E. **16** (1991), 1223–1253.

[5] L. Carleson and S-Y. A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J.Moser*, Bull. Sc. math. **110** (1986), 113–127.

[6] B. Gidas, Ni W-M. and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.

[7] T. Itoh, *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear elliptic equations with the critical Sobolev exponent*, Preprint, Tokai University.

[8] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N.Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **11** (1971), 1077–1092.

[9] K.Nagasaki and T.Suzuki, *Asymptotic analysis for two dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated noninearities*, Asymptotic Anal. **3** (1990), 173–188.

[10] T. Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations*, Nonlilnear Anal. T.M.A **14** (1990), 765–769.

[11] T. Ogawa and T.Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 531–540.

[12] T. Ogawa and T.Suzuki, *Nonlinear elliptic equations with critical growth related to the Trudinger inequality*, Preprint Nagoya University.

[13] T. Ozawa, *On critical cases of Sobolev inequalities*, Preprint Hokkaido University.

[14] S.J. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Dokl.Akad. Nauk. SSSR **165** (1965), 1408–1411.

[15] Mei-Chi Shaw, *Eigenfunctions of the nonlinear equation* $\Delta u + \nu f(x, u) = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$, Pacific J. Math. **129** (1987), 349–356.

[16] M. Struwe, *Critical points of embeddings of* $H_0^{1,n}$ *into Orlicz spaces*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Nonlineaire. **5** (1988), 425–464.

[17] T. Suzuki, *Introduction to geometric potential theory*, Functional -Analitic Method for Partial Differential Equations (Springer Lecture Notes in Math. 1450), H.Fujita, T.Ikebe, S.T. Kuroda eds., 1990, pp. 88–103.

[18] T. Suzuki, *Harnack principle for spherically subharmonic functions*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Nonlineaire.

[19] N.Trudinger, *On imbedding into Orlicz space and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–484.

"On Holomorphic Foliations in $\mathbb{C}P^2$"

by Xavier Gómez Mont

A polynomial vector field in 2 complex variables gives rise to a holomorphic foliation of $\mathbb{C}P^2$ (or $\bar{\mathbb{C}}\times\bar{\mathbb{C}}$) by its integral curves. To introduce them, we considered linear vector fields, and Ricatti equations

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{a(z_1)z_2^2 + b(z_1)z_2 + c(z_1)}{d(z_1)} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}[z_1]$$

These equations are ~~ch~~ caracterized by their holonomy (or monodromy) map

$$\rho : \pi_1(\bar{\mathbb{C}} - \{d(z_1)=0\}) \longrightarrow PSL(2,\mathbb{C})$$

We generalize this procedure, and associate to a general polynomial vector field $X$, and a ~~...~~ closed curve $\alpha$ in the $z_1$-plane a "global monodromy map"

$$H_\alpha : \bar{\mathbb{C}} - \beta \longrightarrow \bar{\mathbb{C}} - \gamma$$

where $\beta$ and $\gamma$ are curves in $\bar{\mathbb{C}}$, and the map associates initial to final conditions, obtained by lifting $\alpha$ to the leaves. $H_\alpha$ is a bijective holomorphic map that has sided continuous extensions to $\beta$.

In general, we analyse this kind of maps and the dynamics of its iteration. We study partial homographies, i.e. functions $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ defined by elements in $PSL(2,\mathbb{C})$ on an open decomposition $U_1 \cup \ldots \cup U_r$ of $\bar{\mathbb{C}} - \beta$.

We show computer pictures of this kind of dynamics, showing the surprising fact that the discontinuity along $\beta$ does not destroy the regularity properties of the conformal map.

Using a coding, we associate an itinerary; and with its help we can prove:

Theorem: Let $H : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ be a partial homography satisfying generic conditions; then for almost every point $z_0$ the orbit $\{H^n(z_0)\}$ converges to a periodic orbit.

# $\bar\partial$-作用素とDirac作用素の境界条件付指数定理 —— 早大理工 郡敏昭

複素平面上の$\bar\partial$-作用素が $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$ と極表示されること、$S^1=\{|z|=1\}$上の函数のフーリエ展開式において、$e^{in\theta};\ n\geqq 0$, が$\mathbb{C}$上の正則函数$z^n$に延長され、$e^{-in\theta};\ n\geqq 1$, が$\frac{1}{z}$の、したがって∞を中心とする正則函数に延長されること、は大変よく知られている。

$\mathbb{C}^2$上のディラック作用素の極分解 $D=\gamma_0(\overset{\text{エヌ}}{\partial_n}-\overset{\text{ピー}}{P})$、ただし$\partial_n$はradial方向微分で$P$は$S^3=\{|z|=1\}$上のハミルトニアンであり、$\gamma_0$はchiral作用素である、を利用して$P$の(正の)固有値に対応した固有スピノールは$\mathbb{C}^2$上のzero mode spinor $\varphi$; $D\varphi=0$, へと延長され、$P$の負の固有値に対応した固有スピノールは、∞点を中心とした側のzero mode spinorに延長されることが示された。

また、$S^3$上に$P$の固有函数で定まるpolarizationにより無限次元グラスマン多様体が定義されるが、この各元がディラック作用素$D$の境界条件と解釈されることを解説し、その指数定理(Atiyah-Singer-Patodi型指数定理)を述べた。

# 一般型曲面上の曲線について

京都大学数理解析研究所　宮岡洋一

「標準束は代数多様体の性質をよく反映する」、というのが、イタリア学派に端を発し、飯高によって意識化された代数多様体分類理論の原理であり、「多様体はその上の曲線によって統制される」というのが森理論の背後にある哲学である。たとえば、標準束が負（微分幾何の言葉でいえば Ricci 曲率が正）であるような多様体は有理曲線の族で完全に覆われてしまうことが知られている。また逆に、小平次元が非負（ほぼ Ricci 曲率が非正に対応する）なら、有理曲線の族で完全に覆われることは決してないことがすぐわかる。いいかえれば、有理曲線が十分たくさんあることと、標準束が非負にならないこととがぴったり対応している。

しかし、小平次元（または Ricci 曲率）が０のときは、アーベル多様体のように、有理曲線を一切含まないものもあれば、その多様体に含まれる有理曲線の和集合が稠密になることもしばしばある。実際、Ｋ３曲面ではほとんど常に後者であるという D. Mumford の結果がある。したがって小平次元が中間のときは、事態はさらに複雑になる。

このように、多様体上の有理曲線の挙動は一般にはかなり複雑で統制するのが難しいが、小平次元が最大、もしくは標準束が正のときは、有理曲線はあまりたくさんはないであろうことが、経験則として予想されてきた。さらに強く、G. Faltings によって証明されたMordell 予想の幾何学的類似として Serge Lang は１９８８年頃に次のような大胆な予想をたてた。

**予想。** Ｘ を一般型の（小平次元が最大値をとること。おおざっぱないいかたをすれば、Ricci 曲率が負であるということ）代数多様体とすれば、Ｘ のなかに解析的閉部分集合 Ｙ ≠ Ｘ があって、複素平面から Ｘ への定数でない正則写像は、すべて Ｙ のなかへの写像である。

この予想については、小林昭七の双曲幾何・微分幾何の立場からさまざまな試みがなされているけれども、二次元の場合でさえも、決定的結果は得られていない。（曲面に位相的条件をつけたときは、F. Bogomolov による結果がある。）

この講演では、二次元の場合の Lang 予想の代数版が、部分的にではあるが成立するという S. LU（Yale 大学）との共同研究を紹介した。すなわち、

**定理。** Ｘ を一般型代数曲面とする。Ｘ 上の有理曲線もしくは楕円曲線 Ｃ でその特異点がつぎの（１）～（４）いずれかの性質をもつものは有限個しかない。

（１） Ｃ の特異点はすべて通常二重点。
（２） Ｃ の特異点はすべて通常三重点（これは、講演後にできた結果）。
（３） Ｃ の特異点の重複度はすべて４以上。
（４） Ｃ は通常特異点をもたない。

これらの性質は相補的であるから、一般の場合にも証明可能と思われるが、テクニック上の難点があって、現時点ではまだできていない。

われわれの方法は、Ｃ に付随した対数特異点をもつ有理１形式にたいする Bogomolov - 宮岡 - 酒井型の不等式をもちいるもので、上記の定理は次の「エフェクティヴな」結果の系として得られる。特に、このような曲線の個数を上から評価することも原理的には可能である。

**定理。** Ｘ を一般型代数曲面とし、Ｘ 上の種数 ｇ の既約曲線 Ｃ でその特異点が上定理の（１）～（４）いずれかの性質をもつものとする。このとき、ｇ と Ｘ の Chern 数の関数 $A(g, X)$ があって、$(C, K) \leqq A(g, X)$ が成り立つ。ここに Ｋ は標準因子を表わす。

# Residues for singular subvarieties which are invariant by an holomorphic vector field

Daniel Lehmann (11/25/1993)

(forthcoming joint paper with T. Suwa)

In [CS], Camacho and Sad defined an index for a smooth complex curve invariant by an holomorphic vector field with singularities on a complex surface, at any point of the curve which is a singular point of the vector field, and which is isolated in the curve for this property; they proved, when the curve is compact and when the singular points of the vector field which are on the curve are isolated, that the sum of the corresponding indices is the Chern number of the normal bundle to the curve. In [LN] A.Lins Neto generalized this definition and this formula to the case where the invariant curve may have singularities, while in [L], we generalized them for any dimension to the situation of a smooth complex submanifold $V$ invariant by an holomorphic vector field with singularities in a complex manifold $W$.

We shall now give a common extension of these two situations to the case where $V$ is now an analytic subvariety (not necessarily everywhere smooth) of a smooth complex manifold $W$.

[CS] C.Camacho et P.Sad: Invariant varieties through singularities of holomorphic vectorfields, *Annals of Maths.*115 (1982) 579-595,

[L] D.Lehmann: Résidus des sous variétés invariantes d'un feuilletage singulier, *Annales de l'Institut Fourier*, vol.41 fasc.1, 211-258, (1991).

[LN ] A.Lins Neto: Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two, *Springer Lecture Notes 1345 (1986)*, Conference on holomorphic dynamics, Mexico, 192-232,

# Kuperberg's $C^\infty$ counterexample to the Seifert Conjecture – A flow on the 3-sphere with no periodic trajectories

Paul A. SCHWEITZER,S.J.
Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, Brazil
*e-mail address:* pauls@mat.puc-rio.br

In 1950 Seifert [Se] showed that every flow sufficiently $C^0$ close to the flow along the fibers of the Hopf fibration $S^3 \to S^2$ has a periodic trajectory. He asked whether every non-singular flow on $S^3$ has a periodic trajectory, and the affirmative response became known as the Seifert Conjecture (although he did not conjecture it!).

In 1972 a $C^1$ counterexample was discovered [Sc].The construction used a "plug", a flow on $T_0^2 \times I$ (where $T_0^2$ is the torus with a small open disk removed and $I$ is the interval $[0,1]$) obtained by spiralling the original flow lines $\{\text{point}\} \times I$ in the direction of the Denjoy flow [D] on $T^2$. Denjoy proved that his flow cannot be $C^2$, so this construction also cannot be $C^2$. Then in the mid-1980's Jenny Harrison [H] modified this construction to get a $C^2$ counterexample by producing a remarkable $C^2$ diffeomorphism of the plane with an invariant fractal circle on which the diffeomorphism has Denjoy behavior. The length of the fractal circle is infinite, so Denjoy's argument does not apply.

Two months ago topologists throughout the world were surprised and delighted by Krystyna Kuperberg's $C^\infty$ construction of a non-singular flow on $S^3$ with no periodic trajectories [K]. She uses the Wilson plug [W] on $E \times I$, where $E$ is the planar annulus $\{1 \leq r \leq 3\}$, with two circular trajectories $T_1$ and $T_2$ at $(r,z) = (2,1/4)$ and $(r,z) = (2,3/4)$ respectively, in cylindrical coordinates $(r,\theta,z)$. Her ingenious idea is to perform two "self-insertions" of Wilson's plug into itself, replacing intervals in $T_1$ and $T_2$ by trajectories which spiral around a minimal set inside the new plug. Essentially, the trajectories entering Wilson's plug on the cylinder $r = 2$ are cut open, and the self-insertion performs the same operation on $T_1$ and $T_2$.

A careful analysis using the radial coordinate $r$ (which is constant along trajectories in the Wilson plug) is used to show that the resulting plug on

$H \times I$ (where $H$ is the torus minus two small open disks) has the following properties:

(1) it has "matched ends", that is, if a trajectory goes from $(p, 0)$ to $(q, 1)$ for some points $p, q \in H$, then $p = q$;

(2) there is a point $p \in H$ such that the trajectory entering the plug at $(p, 0)$ has its $\omega$-limit set contained in the interior of the plug;

(3) there is no periodic trajectory in the interior of the plug.

From these properties it follows that the plug can be inserted into a flow on $S^3$ (or on any other 3-manifold) to open isolated periodic trajectories, without creating any new ones, thus yielding the $C^\infty$ counterexample.

The Kuperberg plug can easily be embedded into a cylinder $D^2 \times I$ and then this cylinder can be rotated around $R^2 \times \{0\}$ in $R^n = R^2 \times R^{n-2}$ to yield a $C^\infty$ plug which smoothly opens compact leaves of codimension 2 smooth foliations on $n$-manifolds.

Two interesting open questions remain:

1. What are the possible minimal sets of flows on $S^3$?
2. Gottschalk's Problem: Does there exist a minimal flow on $S^3$ (that is, a flow with each trajectory dense)?

## REFERENCES


[D] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore,* J. Math. Pures Appl. 11 (1932), 333-375.

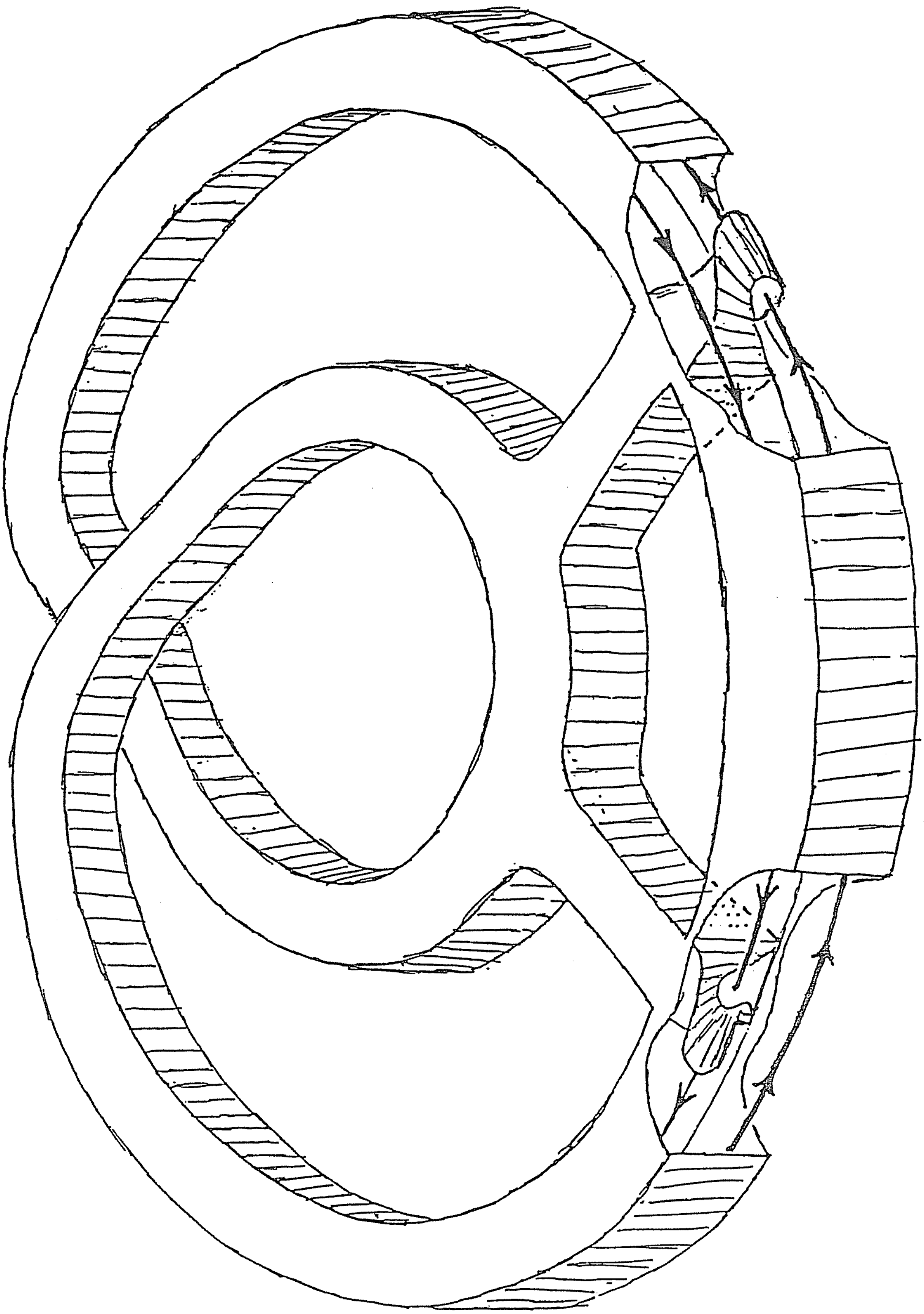
[H] J. Harrison, *A $C^2$ counterexample to the Seifert Conjecture,* Topology 27 (1988), 249-278.

[K] K. Kuperberg, *A $C^\infty$ counterexample to the Seifert Conjecture in dimension three,* preprint, 1993 (preliminary version).

[Sc] P.A. Schweitzer, *Counterexamples to the Seifert Conjecture and opening closed leaves of foliations,* Annals of Math. 100 (1974), 386-400.

[Se] H. Seifert, *Closed integral curves in 3-space and isotopic two-dimensional deformations,* Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 287-302.

[W] F.W. Wilson, *On the minimal sets of non-singular vector fields,* Annals of Math. 84 (1966), 529-536.



Ends of leaves and classification of Lie foliations

Gilbert Hector
Université de Lyon - 1, France

# BOUTS DE FEUILLES ET CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES DE LIE

G. HECTOR et S. MATSUMOTO

## 1 Introduction

Il est bien connu que toutes les feuilles d'un feuilletage de Lie sur une variété compacte sont difféomorphes entre elles. Il est alors naturel de se demander:

i) quelles sont les variétés non compactes qui peuvent être feuilles d'un feuilletage de Lie;

ii) dans quelle mesure le type des feuilles détermine l'algèbre de Lie structurale du feuilletage et son groupe d'holonomie.

Dans ce travail, on étudiera ces deux questions en relation avec l'espace des bouts de la feuille-type.

Le théorème de structure de Fédida ([1]) nous permettra, sans perte de généralité, de nous restreindre aux cas des feuilletages minimaux (i.e. à feuilles denses). Le lecteur pourra étendre lui-même les résultats obtenus aux feuilletages Riemanniens grâce au théorème de structure de P. Molino ([5]).

## 2 Description des résultats

Soient alors $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, $G$ le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant et $\mathcal{F}$ un $\mathfrak{g}$-feuilletage de Lie minimal sur une variété compacte $M$. On désignera par

i) $\Gamma \subset G$ le sous-groupe d'holonomie de $\mathcal{F}$,

ii) $L$ la feuille type et $End(L)$ l'espace de ses bouts.

La minimalité de $\mathcal{F}$ est équivalente à la condition $\overline{\Gamma} = G$.

On se propose de montrer les résultats suivants:

**Théorème 1** *Il y a trois types possibles d'espaces de bouts pour $L$: un point, un couple de points ou un ensemble de Cantor.*

On notera que cet énoncé est le correspondant exact du théorème de Freudenthal ([2]) pour les bouts des groupes dénombrables de type fini. L'analogie avec la théorie de groupes est en fait bien plus forte et comme Stallings ([6]) l'a fait pour les groupes, on fait une description précise des cas où $L$ a soit 2 bouts, soit un Cantor de bouts.

**Théorème 2** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

*i) $L$ a 2 bouts;*

*ii) $\Gamma$ (et donc $G$) est abélien et il existe un sous-groupe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ discret uniforme dans $G$ qui définit une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Gamma_0 \cong \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

*iii) le feuilletage $\mathcal{F}$ est Morita-équivalent à un flot linéaire $(T, \mathcal{L})$ sur un tore $T$ de dimension convenable; celui-ci est donc le classifiant du groupoïde d'holonomie de $\mathcal{F}$.*

On remarquera que $\Gamma_0$ n'est bien sûr pas unique.

**Théorème 3** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

*i) $End(L) \cong$ Cantor*

*ii) il existe un unique sous-groupe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ qui est distingué dans $\Gamma$ (et donc dans $G$), discret uniforme dans $G$ et tel que $\Gamma/\Gamma_0$ est libre.*

*iii) Le feuilletage $\mathcal{F}$ a pour classifiant un "feuilletage" obtenu par suspension de la paire compacte $(G/\Gamma_0, \Gamma/\Gamma_0)$ au-dessus d'un bouquet de cercles. Ce classifiant a le type d'homotopie d'une variété.*

**Corollaire 4** *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, non commutative, les feuilles de tout $\mathfrak{g}$-feuilletage de Lie ont exactement un bout.*

**Corollaire 5** *Si $\mathcal{F}$ n'est pas minimalisable, $L$ a un bout (cf. X. Masa, [4]).*

En résumé, on peut dire que "génériquement" les feuilles des feuilletages de Lie ont exactement un bout. La description des classifiants permettra des applications intéressantes aux calculs de cohomologies feuilletées, par exemple.

Enfin, on remarquera que l'on construit aisément des exemples des trois types de situation.

## References


[1] E. FEDIDA – Sur les feuilletages de Lie. C.R.A.S. Paris, 272 (1971), 999-1001.

[2] H. FREUDENTHAL – Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Zeit., 33 (1931), 692-713.

[3] A. HAEFLIGER – Groupoïdes d'holonomie et classifiants. Astérisque, 116 (1984), 70-97.

[4] X. MASA – Duality and minimality in Riemannian foliations. Comment. Math. Helvetici, 67 (1992), 17-27.

[5] P. MOLINO – Géométrie globale des feuilletages riemanniens. Proc. Kon. Ned. Akad., A 85 (1982), 45-76.

[6] J. STALLINGS – Group Theory and three-dimensional manifolds. Yale University Press, 1971.

複雑系: デーモンの数理をめざして

津田一郎　北大 数学

複雑系、特に脳の理論を構築するためのひとつの試みとして、内部に巧妙な機構を有するシステムを構成することを考えている。
システムの内部に存在して、システムの自己組織能力や自律プログラムの能力をもつ機構をここでは簡単にデーモンと呼んだ。
現在二つの方向からデーモンの構成を試みている。ひとつは変形された多体ビリアードの反エルゴード性をとおして、もうひとつはフラクタルなアトラクターをもつ4次元非カオスのモデルの構成をとおしてである。
前者では、多数のビリアード球の秩序形成が観測された。これは、従来知られている平衡構造、散逸構造の他に第三の構造が存在することを示唆している。
後者の構成は、スメイルのソレノイドを拡張し、四次元微分同相写像をそのアトラクターがあらゆる方向への射影において微分不可能になるように陽に作ることによっている。方程式の構成の仕方からこの系は公理 A 力学系の例になっている。

# A GENERALIZED CUNTZ ALGEBRA $\mathcal{O}_N^M$

YOSHIKAZU KATAYAMA

Division of Mathematical Science, Osaka kyoiku University

Let $M$ be a von Neumann algebra with a faithful normal tracial state $\tau$ and $N$ be a von Neumann subalgebra of $M$. We construct a tensor algebra $T_N(M)$ relative to $N$ ;

$$\begin{cases} T_N^p(M) = L^2(M) \otimes L^2(M) \otimes \cdots \otimes L^2(M) \\ T_N^0(M) = L^2(N) \end{cases}$$

where $L^2(M)$ and $L^2(N)$ are Hilbert spaces with respect to the trace $\tau$ and $\otimes$ means the $N$-relative tensor product $\otimes_N$ and

$$T_N(M) = \sum_{p=0}^{\infty \oplus} T_N^p(M).$$

Then $T_N(M)$ is also $N$-bimodule.

For $x \in M$, a creation operator $o(x)$ is defined by

$$\begin{cases} o(x)x_1 \otimes \cdots \otimes x_p = x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, & x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \in T_N^p(M) \\ o(x)x_0 = xx_0, & x_0 \in T_N^0(M). \end{cases}$$

Then an annihilation operator $o(x)$ is the following;

$$\begin{cases} o(x)^* x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p = E(x^* x_1) x_2 \otimes \cdots \otimes x_p \\ o(x)^* x_0 = 0. \end{cases}$$

where $E$ is the conditional expectation of $M$ onto $N$ with respect to $\tau$.

A $N$-rank one operator $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \boxtimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q)$ is defined by

$$\{(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \boxtimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q)\}(z_1 \otimes \cdots \otimes z_r)$$

$$= \delta_{q,r} x_1 \otimes \cdots \otimes x_p < z_1 \otimes \cdots \otimes z_r, y_1 \otimes \cdots \otimes y_q >_N$$

where

$$< z_1 \otimes \cdots \otimes z_q, y_1 \otimes \cdots \otimes y_q >_N = E(y_q^* \cdots (E(y_2^*(E(y_1^* z_1) z_2) \cdots z_q).$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Let $\{u_i\}_{i=1}^{n}$ be a Pimsner-Popa bases for $M \supset N$. Then $o(u_i)$ are isometries for $0 \leq i \leq n-1$ and $o(u_n)$ may be a partially isometry such that

$$\sum_{i=1}^{n} o(u_i)o(u_i)^* = 1_{T_N(M)} - 1 \boxtimes 1$$

A $N$-compact operator algebra $K_N(M)$ is the $C^*$-algebra generated by all of $N$-rank one operators. A $C^*$-algebra $\mathcal{P}_N^M$ is generated by all creation operators and an identity operator. Then the $N$-compact operator algebra $K_N(M)$ turns out to be a closed ideal of $\mathcal{P}_N^M$. A quotient $C^*$-algebra $\mathcal{O}_N^M$ of $\mathcal{P}_N^M$ by $K_N(M)$ is called a generalized Cuntz algebra. The coset of $o(x)$ in $\mathcal{O}_N^M = \mathcal{P}_N^M/K_N(M)$ is also denoted by $o(x)$ without any confusion. Note that if $M = \mathbf{C}^n$ and $N = \mathbf{C}$, $\mathcal{O}_N^M$ is a Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$([3]). A guage action $\alpha$ of the torus $T$ into $Aut(\mathcal{O}_N^M)$ can be defined by

$$\alpha_t(o(x)) = o(e^{it}x), t \in T.$$

By the use fo Pimsner-Popa bases, the fixed point algebra $(\mathcal{O}_N^M)^T$ is isomorphic to a inductive limit algebra of a reduced von Neumann algebra of $M_n(\mathbf{C}) \otimes \cdots \otimes M_n(\mathbf{C}) \otimes N$.

**Theorem 1.** *If $M \supset N$ is a factor-subfactor pair with a finite index [M N], then there is a guage invariant state $\phi$ on $\mathcal{O}_N^M$ such that*

$$\phi(o(x_1)\cdots o(x_n)o(y_m)^* \cdots o(y_1)^*)$$

$$= \delta_{n.m}[MN]^{-n}\tau(E(x_1 \cdots E(x_{n-1}E(x_n y_n^*)y_{n-1}^*)\cdots y_1^*)$$

*and $\phi$ is a unique KMS-state with respect to the guage action and inverse temperature -log [M N].*

Let $G$ be a finite group. We consider the two following cases

$$M = L^\infty(G) \rtimes_\alpha G, \qquad N = L^\infty(G), \qquad \text{canonical trace } \tau \text{ on } M$$

and

$$M = W^*(G) \rtimes_\delta G, \qquad N = W^*(G), \qquad \text{canonical trace } \tau \text{ on } M$$

where $\alpha$ is translation on G and $\delta$ is a canonical co-action of G.

The Cuntz algebra $\mathcal{O}_{|G|}$ is generated by isometries $S_g, g \in G$. A canonical co-action $\delta_1$ of $G$ on $\mathcal{O}_{|G|}$ is defined by $\delta_1(S_g) = S_g \otimes \lambda(g)$([1]). A canonical action $\alpha^1$ of $G$ on $\mathcal{O}_{|G|}$ is defined by $\alpha_h^1(S_g) = S_{hg}$.

**Proposition 2.** *The generalized Cuntz algebras $\mathcal{O}_{L^\infty(G)}^{L^\infty(G)\rtimes_\alpha G}$ and $\mathcal{O}_{W^*(G)}^{W^*(G)\rtimes_\delta G}$ are isomorphic to $\mathcal{O}_{|G|} \rtimes_{\delta_1} G$ and $\mathcal{O}_{|G|} \rtimes_{\alpha^1} G$ respectively.*

**Proposition 3.** *([2]) The two crossed products $\mathcal{O}_{|G|} \rtimes_{\delta_1} G$ and $\mathcal{O}_{|G|} \rtimes_{\alpha^1} G$ are isomorphic to $\mathcal{O}_{|G|}$.*

**Proposition 4.** *Let $M \supset N$ be finite dimensional algebras and $N$ be commutative. $\lambda$ is the Perron-Frobenius eigen value of $X^tX$ where $X$ is adjacent matrix of the inclusion $M \supset N$.*

*Then we have*

*(1)* $(\mathcal{O}_N^M)^T$ *is AF-algebra which Bratteli diagram is the repetition of labelled bicolored graph associated with* $X^tX$

*(2)* $\mathcal{O}_N^M$ *is isomorphic to Cuntz-Krieger algebra* $O_A$ *([4]) where A is the adjacent matrix of the line graph* $\ell(X^tX)$ *of* $X^tX$.

Let $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on (N,N)-bimodule $L^2(N) \oplus L^2(M)$. The group $U(N,M)$ is defined by

$$\{A \in B(L^2(N) \oplus L^2(M)); \text{invertible with } A^*JA = J \text{ as (N,N)-operator}\}.$$

Then $A \in U(N,M)$ is represented by

$$\begin{pmatrix} a_0 & <\cdot, h_1>_N \\ h_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

where $a_0 \in Z(N)h_1, h_2 \in N' \cap M$ and $A_1 \in N' \cap M_1$.

**Theorem 5.** *The group* $U(N,M)$ *is continuously embedded in* $Aut(\mathcal{O}_N^M)$ *by*

$$\alpha_A(o(h)) = \{a_0 1 - o(h_2)\}^{-1}\{- < h, h_1 >_N 1 - o(A_1 h)\}.$$

**Theorem 6.** *Let* $(A \supset B \supset D, A \supset C \supset D)$ *be a extremal commuting square with* $span(CB) = span(BC) = A$. *Then* $\mathcal{O}_B^A$ *contains* $\mathcal{O}_D^C$ *and there exists a conditional expectation E from* $\mathcal{O}_B^A$ *onto* $\mathcal{O}_D^C$ *by*

$$E(o(h)) = o(E_C(h))$$

*for* $h \in A$. *Moreover Watatani's index* $E =$ *[B,D].*

## References


1. J. Cuntz, *Regular action of Hopf algebras on the* $C^*$*-algebras generated by a Hilbert space,* Preprint Heidelberg 1991.
2. J. Cuntz and D. E. Evans, *Some remarks on the* $C^*$*-algebras associated with certain topological Markov chain,* Math. Scand. **48** (1981), 235–240.
3. D. E. Evans, *On* $\mathcal{O}_n$, Publ. Res. Inst. Math. **16** (1980), 915–927.
4. J. Cuntz and W. Krieger, *A class of* $C^*$*-algebras and topological Markov chain,* Invention Math. **56** (1980), 251–268.

# Numerical Approximations to Interfaces for Some Nonlinear Diffusion Equations with Absorption

友枝謙二*, 中木達幸**
Kenji TOMOEDA and Tatsuyuki NAKAKI

## 1. Introduction.

We are concerned with the propagation of thermal waves in absorbing medium occupying all of $R^1$ in which there is the interaction between diffusion and absorption. To describe such a phenomenon we may use the nonlinear diffusion equation with absorption which is well known as the description of the flow of the liquids through the homogeneous porous medium. Our problem is written in the following form of the initial value problem:

$$v_t = (v^m)_{xx} - cv^p, \quad x \in R^1, t > 0, \quad (1.1)$$
$$v(0,x) = v^0(x), \qquad x \in R^1, \quad (1.2)$$

where $m(>1)$, $p(>0)$ and $c(>0)$ are constants, and $v^0(x) \in C^0(R^1)$ is nonnegative and has compact support. In a heated plasma $v$ denotes the temperature and $-cv^p$ describes the losses caused by radiation. We may take $p = 0.5$ for bremsstrahlung radiation and $0.5 \leq p \leq 2$ for synchrotron radiation ([7]).

Since the diffusion rate $mv^{m-1}$ is vanishes at points where $v = 0$, the initial support propagates at finite speed, that is, there appear interface curves between the region where $v > 0$ and the region where $v = 0$. The behavior of the support is governed by the interaction between diffusion and absorption. The support expands in the case where diffusion can supply heat from the hot area faster than absorption cools the medium. This implies that supp $v(t,\cdot)$ never become disconnected, even if the initial function $v^0(x)$ has zeros in the interval $(\alpha_1, \alpha_2)$, where $[\alpha_1, \alpha_2] = \text{supp } v^0(x)$. In the opposite case, the support shrinks and becomes disconnected. Moreover, there is the possibility of the initial support to split into several disjoint sets, even if $v^0(x)$ is positive on $(\alpha_1, \alpha_2)$. This motivates us to investigate the problem "How do the support vary when $t$ varies?" For this end we consider the behavior of supp $v(t,\cdot)$ for the following two cases:

Case 1. There exist nonnegative functions $w_j(x) \in C^0(R^1)(j = 1,2)$ with compact support such that

$$v^0(x) = w_1^0(x) + w_2^0(x), \quad (1.3)$$

where $[\alpha_1, 0] = \text{supp } w_1^0(x)$ and $[0, \alpha_2] = \text{supp } w_2^0(x)$;

Case 2. $v^0(x) \in C^0(R^1)$ satisfies

$$v^0(x) > 0 \quad \text{on } (\alpha_1, \alpha_2). \quad (1.4)$$

From analytical points of view, there are some results concerning the behavior of supp $v(t,\cdot)$, which is stated as follows. For $p \geq 1$ supp $v(t,\cdot)$ expands as $t$ increases, which implies that there does not appear the splitting of supp $v(t,\cdot)$ in Cases 1 and 2 ([1],[2],[3],[4]). For $0 < p < 1$ there are Kersner's results [5], which is useful to determine whether supp $v(t,\cdot)$ becomes disconnected or not in Case 1 (see Theorem 2 and Remark 2). In Case 2 the possibility of the initial support to split was numerically suggested by Rosenau and Kamin [7].

In this talk, we treat such a problem from numerical points of view in the specific case where $m+p = 2$ and $0 < p < 1$. By using the difference approximations which converge to the exact solution, we partially improve Kersner's [5] in Case 1, and obtain the sufficient condition under which the initial support begins to split into at least two disjoint sets in Case 2.

## 2. Main Results.

For the space mesh $h$ tending to zero we are able to construct the numerical solutions $v_h \equiv u_h^{1/(m-1)}$ such that $v_h$ uniformly converges to the unique weak solution of (1.1)-(1.2) for $v^0(x) \in W$ (see [6],[8]). Here

*大阪工業大学一般教育科
**福岡教育大学数学教室

連絡先　FAX: *06-957-2137, **0940-35-1710　E-mail: *CMS01@JPNOIT10.BITNET, **nakaki@fukuoka-edu.ac.jp

the numerical solution $u_h(t,x)$ is the difference approximation for the solution of the following problem instead of (1.1)–(1.2) by setting $u = v^{m-1}$:

$$u_t = muu_{xx} + a(u_x)^2 - c', \tag{2.1}$$
$$u(0,x) = u^0(x) \equiv (v^0(x))^{m-1}, \tag{2.2}$$

where $a = \frac{m}{m-1}$, $c' = (m-1)c$, and $W$ is the set of all nonnegative functions $\varphi(x) \in C^0(R^1)$ with compact support which satisfy
(i) $\Phi(x) \equiv \varphi(x)^{m-1} \in BV(R^1)$ and $\Phi_x(x) \in L^\infty(R^1) \cap BV(R^1)$;
(ii) $\Phi_x(x)$ is absolutely continuous on $I = \text{supp } \varphi(x)$ and $\text{ess.inf}_I \Phi_{xx}(x)$ is finite.

**Theorem 1** *For $v^0(x) \in W$, assume $M$ and $\varepsilon$ are positive constants such that $u_x^0(x) \geq M$ for $x \in [\alpha_1, \alpha_1 + \varepsilon)$. Let $\{\xi_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ be the numerical interfaces with $\xi_0 = \alpha_1$. Then, for each positive constant $M' < M$ there exist positive constants $\bar{T}$ and $\bar{h}$ such that $(u_h^n)_x(\xi_n) \geq M'$ for all $t_n \leq \bar{T}$ and $h < \bar{h}$. Moreover, the numerical interface curve $\xi_h(t)$, which is defined by piecewise-linearly interpolating $(t_n, \xi_n)$ $(n \geq 0)$, converges uniformly to the exact one on $[0, \bar{T}]$.*

From the construction of the difference scheme, the numerical interfaces $\{\xi_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ are approximately written as

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{c' k_{n+1}}{(u_h^n)_x(\xi_n)} - a(u_h^n)_x(\xi_n + 2h)k_{n+1}, \\ k_{n+1} &= t_{n+1} - t_n,\end{aligned} \tag{2.3}$$

which plays an important role in determining the behavior of supp $v(t,\cdot)$.

**Theorem 2.** *In Case 1, assume $w_j^0(x) \in W (j = 1,2)$. Put $W_j(x) = (w_j^0)^{m-1}(x)$ $(j = 1,2)$.*
*Suppose*

$$a\left((W_1)_x(-0)\right)^2, \quad a\left((W_2)_x(+0)\right)^2 > c'. \tag{2.4}$$

*Then there exist a positive constant $\bar{T}$ such that supp $v(t,\cdot)$ is connected for each $t \in [0, \bar{T}]$.*
*Suppose*

$$a\|(W_j)_x\|_\infty^2 < c' \quad (j = 1,2). \tag{2.5}$$

*Then supp $v(t,\cdot)$ is disconnected for each $t \in (0, T_*)$, where $T_* = \min(T_1^*, T_2^*)$ and $T_j^*$ is the extinction time of the solution of (1.1) with $v^0(x) = w_j^0(x)$.*

**Remark 1.** It is clear that the first assertion of Theorem 2 holds, when the orders of vanishing of the functions $(w_j^0(x))^{m-1}(j = 1,2)$ at $x = 0$ are less than 1.

**Remark 2.** Kersner [5] obtained the second assertion of Theorem 2 by constructing the supersolutions for the initial functions

$$v^0(x) = K_j((\alpha_j - x)x)^{s/(m-1)} \quad (j = 1,2). \tag{2.6}$$

For $s = 1$ his sufficient condition coincides ours. For $s = 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ his sufficient condition is

$$4K_j^{2(m-1)}\left(\tfrac{\alpha_j}{2}\right)^{2+4\varepsilon}(1+\varepsilon)(1+m\varepsilon) \leq \frac{c(m-1)^2}{m}. \tag{2.7}$$

Our sufficient condition is

$$4K_j^{2(m-1)}\left(\tfrac{\alpha_j}{2}\right)^{2+4\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^{2\varepsilon}\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+2\varepsilon} \leq \frac{c(m-1)^2}{m}. \tag{2.8}$$

We find that the conditions imposed on $K_j$ $(j = 1,2)$ by (2.8) are weaker than those imposed by (2.7).

**Theorem 3.** *In Case 2, let $v^0(x) \in W$ and $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta_2 < \alpha_2$. Assume*

$$\begin{aligned}\frac{u^0(\beta_j)}{c' - m\|u^0\|_\infty \text{ess.inf}_I u_{xx}^0(x)} &> \\ \frac{\|u^0\|_{L^1(\gamma_1,\gamma_2)}}{(c' - a\|u_x^0\|_\infty^2)(\gamma_2 - \gamma_1) - m\|u^0\|_\infty TV(u_x^0)} &> 0\end{aligned} \tag{2.9}$$

*for $j = 1,2$. Then there exist $\bar{t} > 0$ and $\bar{x} \in [\gamma_1, \gamma_2]$ such that $u(\bar{t}, \bar{x}) = 0$ and $u(\bar{t}, \beta_j) > 0$ $(j = 1,2)$.*

This theorem shows the existence of $t = \bar{t}$ at which supp $v(t,\cdot)$ begins to split. However, we don't know whether supp $v(t,\cdot)$ is connected or not for $t > \bar{t}$.

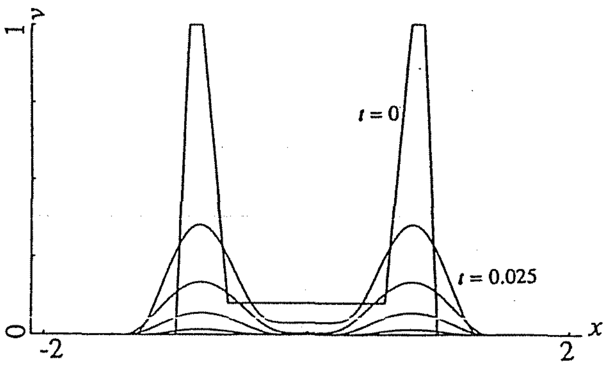



**Figure** Numerical solution with $m = 1.5, p = 0.5, c = 10$ and $t = 0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$.

**References.**


[1] M. Bertsch, R. Kersner and L.A. Peletier, Nonlinear Anal., **9** (1985), 987–1008.

[2] M.E. Gurtin and R.C. MacCamy, Math. Biosci., **33** (1977), 35–49.

[3] M.A. Herrero and Vázquez, SIAM J. Math. Anal., **18** (1987), 149–167.

[4] A.S. Kalashnikov, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., **14** (1974), 891–905.

[5] R. Kersner, Vestnik. Mosk. Univers. Mat., **33** (1978), 44–51.

[6] T. Nakaki, Hiroshima Math. J., **18** (1988), 373–397.

[7] P. Rosenau and S. Kamin, Physica **8D** (1983), 273–283.

[8] K. Tomoeda and T. Nakaki, Appl. Math. Lett.**5** (1992), 41-47.

# Buchsbaum複体のh-列について

寺井 直樹(長野高専)

まず全般的に[H], [S] にそって定義, 背景を述べる。

$V = \{x_1, \cdots, x_n\}$ を finite set とする。

$\Delta$ が vertex set $V$ 上の simplicial complex であるとは

$\Delta$ は $V$ の subset の family で, 次の条件をみたすもの

とする。 (i) $\{v\} \in \Delta$ for ${}^{\forall} v \in V$

(ii) $\sigma \in \Delta,\ \tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$

$\sigma \in \Delta$ に対し, $\dim \sigma = \# \sigma - 1$ とする。

$\dim \sigma = i$ のとき $\sigma$ を $\Delta$ の $i$-face と言う。

$\dim \Delta$ を $\max_{\sigma \in \Delta} \dim \sigma$ で定義する。

$d := \dim \Delta + 1$ とおく。

$f_i := \#\{i\text{-face in } \Delta\}$ $(0 \leqq i \leqq d-1)$, $f_{-1} := 1$

とおいたとき, $f(\Delta) := (f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ を $\Delta$ の $f$-vector

と呼ぶ. また, $\sum_{i=0}^{d} f_{i-1} (\lambda - 1)^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} h_i \lambda^{d-i}$ によって

$\Delta$ の $h$-vector $h(\Delta) := (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ を定義する。

以下, $k$ を体とする。

<u>Def.</u> $\Delta$ の Stanley-Reisner ring $k[\Delta]$ を

$$k[\Delta] = k[x_1, \cdots, x_n] / I_\Delta$$

によって定義する。

ただし $I_\Delta = (x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid x_{i_1} < \cdots < x_{i_r},\ \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}\} \notin \Delta)$

とする。

Def. $\Delta$ が Cohen-macaulay (以下 C.M) over $k \underset{def}{\Leftrightarrow} k[\Delta]$ が C.M ring
$\Delta$ が Buchsbaum (以下 Bbm) over $k \underset{def}{\Leftrightarrow} k[\Delta]$ が Bbm ring
と定義する.

さて、正の整数 $f, i$ に対して.

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j}$$

$$n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geqq j \geqq 1$$

なる表示が unique に存在する.

このとき.

$$f^{(i)} := \binom{n_i}{i+1} + \binom{n_{i-1}}{i} + \cdots + \binom{n_j}{j+1}$$

$$f^{\langle i \rangle} := \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{n_j+1}{j+1}$$

$$0^{\langle i \rangle} := 0$$

と定義する.

すると、一般の simplicial complex の f-vector について次のことが知られている。

定理 (Kruskal, Katona)

$f = (f_0, \cdots, f_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ とすると次は同値

(i) $f(\Delta) = f$ となる $d-1$ 次元 simplicial complex が存在する。

(ii) $0 < f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)} \quad (0 \leq i \leq d-2)$

また Cohen-macaulay complex の h-vector については.
次の結果が知られている.

定理 (Stanley)

$h = (h_0, \cdots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ とすると次は同値

(i) $h(\Delta) = h$ となる $d-1$ 次元 C.M simplicial complex が存在する.

(ii) $h_0 = 1, \quad 0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{\langle i \rangle} \quad 1 \leq i \leq d-1$

そこで、同様のことを $\Delta$ が Buchsbaum の場合も考えられないだろうか？ という問題があらわれてくる。
すなわち、

<u>Problem</u> Buchsbaum complex の $h$-vector を特徴づけよ。
しかし、これは難問で"将来の課題"である。
そこで、この講演では、Buchsbaum complex の $h$-vector であるための1つの必要条件について述べ、
また、低次元の場合におけるその十分性について(ある程度の)考察をしてみたいと思う。

<u>定理</u> $\Delta$ を $(d-1)$ 次元の Buchsbaum complex とし、
$h(\Delta) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$ とする。
このとき、

$$d h_d + h_{d-1} \geqq 0$$
$$\binom{d}{2} h_d + (d-1) h_{d-1} + h_{d-2} \geqq 0$$
$$\vdots$$
$$\binom{2d-2}{d} h_d + \binom{2d-3}{d-1} h_{d-1} + \cdots + (d-1)h_1 + h_0 \geqq 0$$
$$\vdots$$

## 参考文献

[H] 日比孝之：有限数列と単体的複体の組合せ論 in "数理研講究録 代数的組合せ論の研究" 114－122

[S] R. P. Stanley："Combinatorics and Commutative Algeba" Birkhäuser, 1983

## Rewriting Systems and Homotopy

小林 美治 (東邦大)

Recently, so called rewriting techniques have been of interest in various areas such as algebra, logic and computer sciences, not only from a practical point of view but also from a theoretical point of view.

Here we consider only string rewriting systems, that is, rewriting systems on a free monoid. As is well known, if a monoid is presented by a finite complete system, the word problem for the monoid is solvable. Thus, it is an important and interesting question to ask how much it is universal. Is there a good condition characterizing monoids with finite complete presentation ?

In 1987 Squier proved that if a monoid M is defined by a finite complete rewriting system, then the monoid algebra of M over the integers $\mathbb{Z}$ satisfies the homological finiteness condition $FP_3$, and using this fact he gave a monoid which has a solvable word problem but cannot be presented by a finite complete system. In his next paper he introduced another (probably more general) finiteness property on finitely presented monoids. He considered some relations called the homotopy relations between paths in the graph associated with a finite monoid presentation. If the full homotopy relation is finitely generated, the presentation is said to be of finite derivation type. Squier proved that this finiteness property is an intrinsic condition of the monoid not depending on its individual presentation. Moreover he proved that if a monoid M is presented by a finite complete system, then M has finite derivation type. Exhibiting a monoid which has $FP_\infty$ but does not have finite derivation type, he could succeeded to show that the property $FP_\infty$ does not implies the existence of a finite complete presentation.

Recently, Otto, Cremanns and Lafont showed that if a monoid has finite derivation type then it satisfies $FP_3$.

By means of the homotopy relations we can define the fundamental groups of a presentation. These notions are natural and interesting in themselves. In my talk I will discuss basic properties of the homotopy relations and the fundamental groups of monoid presentations.

# Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity

宮崎　誓　（長野高専）

本講演は、L.T.Hoa 氏（Institute of Math., Hanoi）との共同研究である。

$K$を標数 0 の代数閉体とし、$X$を $d$ 次元の $\mathbf{P}_K^N$の非退化な閉部分多様体とする。また、$\mathbf{P}_K^N$の座標環を $P = K[X_0, \ldots, X_N]$、$X$の座標環を $R = P/I$とする。

$X$の Castelnuovo-Mumford regularity とは、

$$H^i(\mathbf{P}_K^N, \mathcal{I}_X(r-i)) = 0 \text{ for } i \geq 1$$

を満たす最小の整数 $r$のことをいい、$r = \mathrm{reg}X$と書く。

さて、この $\mathrm{reg}X$は、$X$のイデアル $I$のシジジーの生成元の次数を制御する重要な量であるが、次の予想がある。

[Eisenbud-Goto 予想]

$$\mathrm{reg}X \leq \deg X - \mathrm{codim}X + 1$$

さらに、次の概念を導入する。$X$が $k$-Buchsbaum とは、

$$(X_0, \ldots, X_N)^k \oplus_{\ell \in \mathbf{Z}} H^i(\mathbf{P}_K^N, \mathcal{I}_X(\ell)) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq d$$

のときにいう。

さて，$k \geq 1$ とし，$X$が $k$-Buchsbaum であると仮定しよう．さて、1988 年以来、(1) [S-V2], (2) [H-MR-V], (3) [H-V] により，次のことが示されてきた。

$$
\begin{aligned}
&(1) & \mathrm{reg}X &\leq \lceil (\deg X - 1)/\mathrm{codim}X \rceil + (2^d - 1)k + 1 \\
&(2) & \mathrm{reg}X &\leq \lceil (\deg X - 1)/\mathrm{codim}X \rceil + (2^d - 1)k + 1 - d \\
&(3) & \mathrm{reg}X &\leq \lceil (\deg X - 1)/\mathrm{codim}X \rceil + \frac{d(d+1)}{2}k + 1 - d
\end{aligned}
$$

次は、我々の主定理である。

**Theorem**[H-M]

$$\mathrm{reg}X \leq \left\lceil \frac{\deg X - 1}{\mathrm{codim}X} \right\rceil + (d + 1 - \mathrm{depth}R)(2k - 1) + k + 1$$

最近、Nagel と Schenzel[N-Sch] が、我々と異なった方法で、同様の結果を得ている。

以降，次の概念で話を進める．$R$を無限体 $K$上の graded ring とする．$R$は $K$上 1 次の元で生成されているとする．また，$\dim R = d$ とし，$R$の同次極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．このとき，

$$a_i(R) = \max\{n | [H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_n \neq 0\}$$

と定義する．また，

$$\mathrm{reg}_n R = \max\{a_i(R) + i | i \geq n\}$$

と定義する．特に，

$$a(R) = a_d(R) \ \mathrm{reg} R = \mathrm{reg}_0 R = \mathrm{reg}_{\mathrm{depth} R} R$$

とする．さきほどの代数多様体 $X$との対応でいえば，

$$\mathrm{reg} X = \mathrm{reg} R + 1$$

となる．

次が，. 主定理の証明での重要な補題である．

**Main Lemma**[H-M] 上の条件の下で，$R$を $k$-Buchsbaum，即ち，$i \neq d$ に対して，$\mathfrak{m}^k H^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ とする．このとき，

$$\mathrm{reg}_n R \leq a(R) + d + (2k-1)(d-n) + k$$

が成立する．

上の Main Lemma と Uniform Position Principle(cf.[H]) より，我々の主定理は得られる．

# 参考文献


[G] S.Goto, *On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings*, J.Algebra 85(1983)

[E-G] D.Eisenbud, S.Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J.Algebra 88(1984)

[H] J.Harris, *Curves in projective space*, Sém. de Math. Sup., Université de Montreal, 1982

[H-MR-V] L.T.Hoa, R.M.Miró-Roig, W.Vogel, *On numerical invariants of locally Cohen-Macaulay schemes in* $\mathbf{P}^n$ , Hiroshima Math. J. to appear

[H-M] L.T.Hoa, C.Miyazaki, *Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings*, preprint

[H-V] L.T.Hoa, W.Vogel, *Castelnuovo-Mumford regularity and hyperplane sections*, J. Algebra, to appear

[Ho] C.Hochster, *Contracted ideals from integral extensions of regular rings* Nagoya Math. J. 51(1973)

[N-Sch] U.Nagel, P.Schenzel, *Cohomological annihilators and Castelnuovo-Mumford regularity*, preprint

[S-V1] J.Stückrad, W.Vogel, *Castelnuovo bounds for certain subvarieties in* $\mathbf{P}^n$, Math. Ann. 276(1987)

[S-V2] J.Stückrad, W.Vogel, *Castelnuovo bounds for locally Cohen-Macaulay schemes*, Math. Nachr. 136(1988)

[T] N.V.Trung, *Towards a theory of a generalized Cohen-Macaulay modules*, Nagoya Math. J. 102(1986)

# The Gradient Theory of the Phase Transitions in Cahn-Hilliard Fluids with the Dirichlet boundary conditions


石毛 和弘 (KAZUHIRO ISHIGE)

Department of Mathematics, Faculty of Science
Tokyo Institute of Technology
Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152, Japan


In this note we will investigate the asymptotic behavior of minimizer $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ (as $\epsilon \to 0$) of the following variational problem :

$$(\boldsymbol{P_\epsilon}) \qquad \inf\left\{ \int_\Omega [\,\epsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon}\, W(u)\,]dx \;\middle|\; u \in W^{1,2}(\Omega : \mathbb{R}^n),\, u = g \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

where $\Omega$ is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with $C^2$ smooth boundary $\partial\Omega$ and $g$ is a Lipschitz continuous function from $\partial\Omega$ into $\mathbb{R}^n$. This type of problem is related to the study of the phase transitions of the Cahn-Hilliard fluids.

Let $W(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuous nonnegative function, and $W(u) = 0$ if and only if $u = \alpha$ or $\beta$. We assume that there exist two constants $K_1$ and $K_2$ such that

$$\text{(1.1)} \qquad \sup_{u\in\partial[K_1,K_2]^n} W(u) \le W(v) \qquad \text{for all } v \notin [K_1, K_2]^n$$

and

$$\text{(1.2)} \qquad g(x) \in [K_1, K_2]^n \qquad \text{for all } x \in \partial\Omega.$$

In order to state the main theorem, we will introduce a Riemannian metric on $\mathbb{R}^n$, $d(a, b)$. For $a, b \in \mathbb{R}^n$, let $d(a, b)$ be the metric defined by

$$d(a,b) = \inf\left\{ \int_0^1 W^{1/2}(\gamma(t))|\,\dot\gamma(t)\,|\,dt \;\middle|\; \gamma \in C^1([0,1] : \mathbb{R}^n), \right.$$
$$\left. \gamma(0) = a,\, \gamma(1) = b \right\}.$$

We now state our main theorem of this note.


Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

**Theorem 1.** *Suppose that function $W$ satisfies (1.1) and that $g$ satisfies (1.2). For $\epsilon > 0$, let $u_\epsilon$ be a solution of the variational problem:*

$$\inf\{ \int_\Omega [\epsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u)]dx \quad | \quad u \in W^{1,2}(\Omega : \mathbb{R}^n),\ u|_{\partial\Omega}(x) = g(x)\}.$$

*If there exist a positive sequence $\{\epsilon_i\}_{i=1}^\infty$ and a function $u_0(x) \in L^1(\Omega : \mathbb{R}^n)$ such that*

$$\lim_{i\to\infty} \epsilon_i = 0 \quad and \quad \lim_{i\to\infty} u_{\epsilon_i} = u_0 \quad in\ L^1(\Omega : \mathbb{R}^n), \tag{1.3}$$

*then the function $u_0$ is characterized by*

$$W(u_0(x)) = 0 \text{ for almost all } x \in \Omega, \text{ that is, } u_0(x) = \alpha \text{ or } \beta \text{ for almost all } x \in \Omega.$$

*Moreover the set $E_0 = \{x \in \Omega \,|\, u_0(x) = \alpha\}$ is a solution of the variational problem $(P_0)$:*

$$(P_0) \qquad \inf\{ d(\alpha,\beta)P_\Omega(E) + \int_{\partial\Omega} d(v|_{\partial\Omega}(x), g(x))d\mathcal{H}_{N-1} \quad | \quad E \subset \Omega,\ P_\Omega(E) < \infty,\ v = \alpha\chi_E + \beta\chi_{\Omega\setminus E}\},$$

*where $P_\Omega(E)$ is a perimeter of $E$ in $\Omega$ and $v|_{\partial\Omega}$ is the trace of $v$ to $\partial\Omega$. Furthermore we have*

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega [\epsilon_i|\nabla u_{\epsilon_i}|^2 + \frac{1}{\epsilon_i} W(u_{\epsilon_i})]\, dx = 2d(\alpha,\beta)P_\Omega(E) + 2\int_{\partial\Omega\cap\partial^* E_0} d(\alpha, g(x))d\mathcal{H}_{N-1} + 2\int_{\partial\Omega\setminus\partial^* E_0} d(\beta, g(x))d\mathcal{H}_{N-1}.$$

*Here $\partial^* E_0$ is the reduced boundary of $E_0$.*

**Remark.** *It is not restrictive to assume that there exists a subsequence $\{u_{\epsilon_i}\}_{i=1}^\infty$ satisfying (1.3). In fact, the following is proved by I.Fonseca & L.Tartar: if there exist constants $C$ and $R$ such that*

$$W_\infty(u) \geq C|u| \qquad \text{for} \quad |u| \geq R,$$

*then there exists a subsequence $\{u_{\epsilon_i}\}_{i=1}^\infty$ satisfying (1.3).*

## Singular Solutions for Semilinear Elliptic Equations

SONG-SUN LIN

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS

NATIONAL CHIAO TUNG UNIVERSITY

HSINCHU, TAIWAN 300

REPUBLIC OF CHINA

**ABSTRACT.**

We study the existence and multiplicity of positive singular solutions of semilinear equation. When the growth of the nonlinear function is supercritical, we prove there exists a positive radially symmetric singular solution on finite ball or whole space. We also study the existence of positive singular solutions on various domains when the growth of nonlinear function is subcritical.

# The uniqueness of the minimizing harmonic maps from ball into sphere

Bian Baojun

Department of Mathematics, Zhejiang Univ. Hangzhou 310027, China

Department of Mathematics, Chuo Univ. Tokyo 112, Japan

## ABSTRACT

In this paper we investigate the uniqueness of the energy minimizing harmonic maps from a ball into it's sphere. We obtain a Character of gradient for the energy minimizing harmonic maps from $B^n$ to $S^{n-1}$ with identity boundary value by use of the "adding a null Lagrangian" technique. From this character of gradient we prove that the map $\phi(x) = \frac{x}{|x|} : B^n \to S^{n-1}$ is the unique energy minimizing harmonic map with identity boundary value for all $n \geq 3$.

# 射影極小曲面の変換について

神戸大理 佐々木 武

1. ユークリッド微分幾何，アファイン微分幾何，射影微分幾何はそれぞれ，ユークリッド運動群，アファイン変換群，射影変換群によって変らない図形の性質を調べようとするものである。

2. 射影微分幾何に興味をもつのは，図形すなわち $\mathbb{P}^N$ の部分多様体が有限型の線形偏微分方程式系で記述されるからである。例えば，$\mathbb{P}^3$ 内の曲面も写像 $z: M^2(x, y) \longrightarrow \mathbb{P}^3$ で表わすと，その同次座標は方程式系

$$z_{xx} = l z_{xy} + a z_x + b z_y + p z, \quad z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z$$

をみたしている。この表示は一意的ではないが，曲面の性質を全て反映している。実際，射影微分幾何の祖の1人である E.J. Wilczynski はこの方程式系から議論を始めた。

3. 講義では，ある座標系に関して

$$z_{xy} + a z_x + b z_y + c z = 0$$

という形の方程式がみたされ，それから $z$ の Laplace 変換

$$z^1 = z_y + a z \quad と \quad z^{-1} = z_x + b z$$

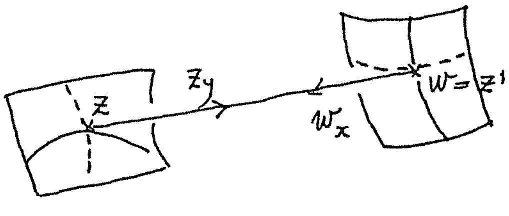
が well-defined であること，$z^1$ については

$$z^1_{xy} + a' z^1_x + b z^1_y + c' z^1 = 0$$

($a', c'$ は $a, b, c$ から定まる) が成立し，これから

$$(z^1)^{-1} = (ab + a_x - c) z$$

となること，従って $z$ と $z^1$ の関係は



となり，結局 直線 $\overline{zw}$ の全体（線叢という）の幾何が自然な対象となることを示している。

4. このような直線の二次元族についてよく知られた例は，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の負定曲率 $-1$ の曲面から別の同じ型の曲面をつくるという対応にみられる。Weingarten 線叢とよばれ，微分方程式の立場からは sine-Gordon 方程式の Bäcklund 変換とよばれている。

5.表題の極小曲面を述べるため，曲面 $M^2$ はまずアファイン空間 $A^3$ にはいり，$A^3 \subset \mathbb{P}^3$ とみなすことによって，$\mathbb{P}^3$ 内の曲面と思うことにする。$\xi$ は $M^2$ 上定義された接平面 $TM^2$ に横断的なベクトル場，$D$ は $A^3$ 上の標準の平坦接続とする。$M^2$ のベクトル場 $X, Y$ について $D_X Y$ は $A^3$ に値をもち，その接成分を $\nabla_X Y$，その $\xi$-成分を $h(X,Y)\xi$ とかく：

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\xi$$

同様に $D_X\xi$ も分解する：

$$D_X \xi = -SX + \tau(X)\xi$$

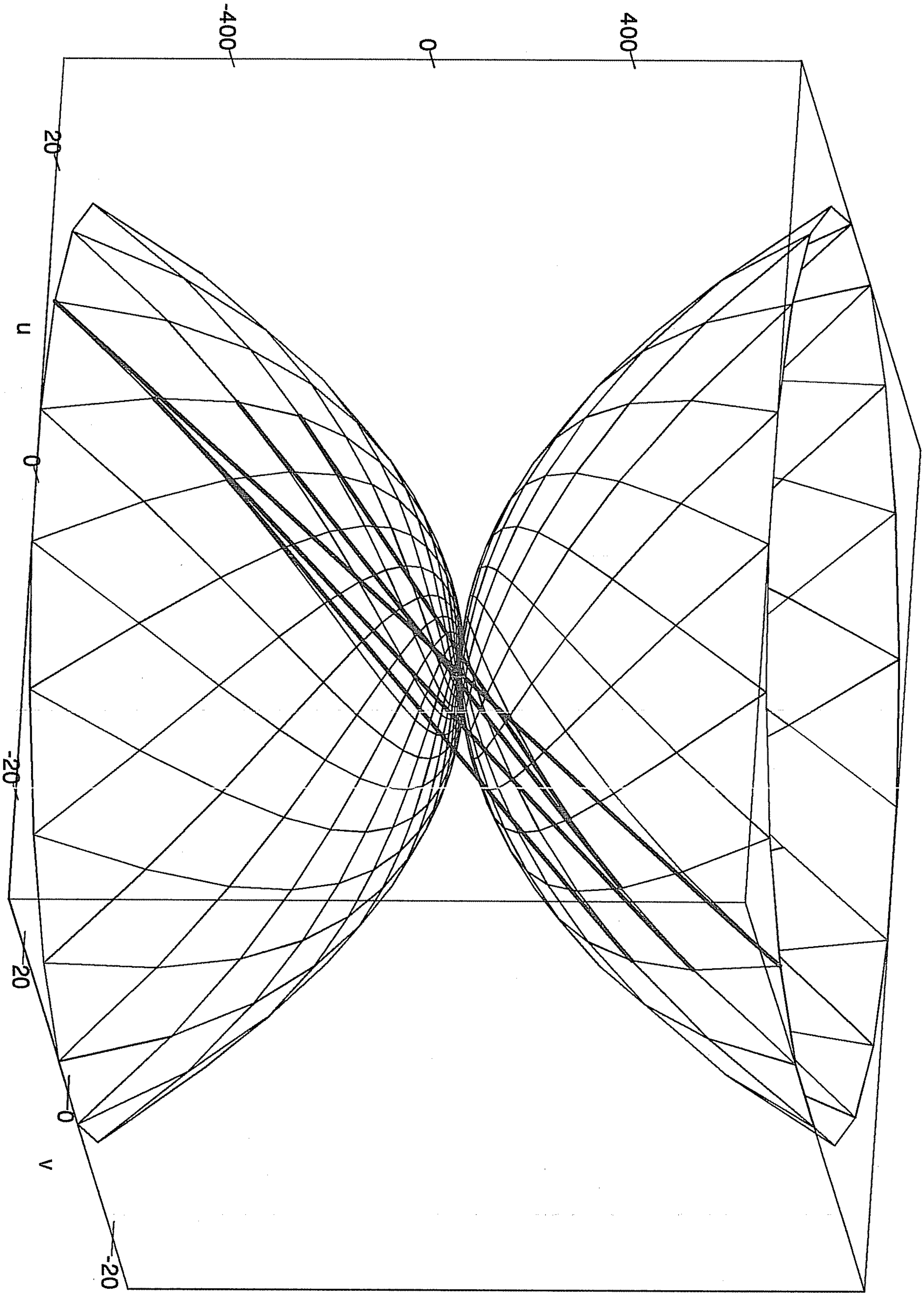
$h$ は曲面の凹凸を表わす二次形式であって，その共形類は $\xi$ をどうとっても変らない。以下，$\tau=0$ となる $\xi$ は $h$ が非退化であれば常に存在するので，これを仮定しよう。このとき

定義　$M^2$ がアファイン極小曲面 $\longleftrightarrow$ $\mathrm{tr}\,S = 0$

　　　$M^2$ が射影極小曲面 $\longleftrightarrow$ $\Delta_h\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,S\right) = \|S - (\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,S)I\|_h^2$

とする。一方はアファイン的に不変な，一方は射影的に不変な面積汎関数の極値曲面になっている。

6. この話の主題は $z$ と $w$ がともにアファイン（ともに射影）極小であるような曲面の組がつくれること，別のいい方をすると $z$ から $w$ をつくる幾何的な手続きがあることを紹介することである。例えば，射影的な場合には $z_{xx} = bz_y + pz$，$z_{yy} = cz_x + qz$ から定まる曲面に対して $w = (c^1c^2 - \frac{1}{2}bc)z + c^1 z_x + c^2 z_y + z_{xy}$，ただし $c^1 = (-b_y \pm \sqrt{\Delta_1})/2b$，$c^2 = (-c_x \pm \sqrt{\Delta_2})/2c$，$\Delta_1 = (b_y)^2 + 4b(bq + p_y - \frac{1}{2}(bc)_x)$，$\Delta_2 = (c_x)^2 + 4c(cp + q_x - \frac{1}{2}(bc)_y)$，がそうである。


-400
0
400
20
u
0
-20
20
0
v
-20

# 可換環論の歴史

名古屋大学　　松村英之　(1994.2.10)

イデアルの概念の導入は代数的整数論の必要から、1870 年代に Dedekind によってなされたのであった。しかし可換環論の中心となるのは昔も今も多項式環であるから、多項式のイデアル論に(1)基底定理、(2) syzygy の有限性、(3) Hilbert 関数、などの基本的な定理を証明した D. Hilbert (1862-1943) の2大論文

Über die Theorie der algebraischen Formen (Math. Ann. 1890),

Über die vollen Invariantensysteme (ibid. 1893)

の出現をもって可換環論の誕生の時とすれば、可換環論は約100年の歴史をもつと言ってよかろう。

多項式のイデアル論では、ドイツの E. Lasker の大作

Zur Theorie der Moduln und Ideale (Math. Ann. 1905)

において多項式イデアルの準素イデアルへの分解が証明された。またイギリスの F. S. Macaulay (1862-1937) は1910年代にきわめて深い研究を行って、その仕事は今でも影響を残している。

代数学の抽象化は E. Steinitz(1871-1928) の体論(1910)によって促進され、まもなく可換環論にも及んだ。Fraenkel がアルチン環を論じ、京大の園正造(1886-?)がデデキント環の公理系を与えたのはいずれも1910年代であった。E. Noether(1882-1935) は

Idealtheorie in Ringbereichen (Math. Ann. 1921)、

Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern (ibid. 1927)

において抽象化の威力を示し、昇鎖律から準素分解定理を導き、また整閉の概念の重要性を示した。

30年代は可換環論にとって重要な時期である。E. Krull(1899-1970)は局所化、完備化などの手法を確立し、いわゆる主イデアル定理を証明してネーター環の次元論を築き、またネーター環の範囲を越えて一般付値論を創始したり、整拡大の理論の基礎を築いたりした。

Allgemeine Bewertungstheorie (Crelle, 1931)

Dimensionstheorie in Stellenringen(ibid. 1937)

Idealtheorie(Ergebnisse d. Math., Springer, 1935).

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche III(M. Z. 1937)

我が国では秋月康夫(1902-1984)が、1935年前後に、降鎖律から昇鎖律が従うことを示し、また、ネーター整域の整閉包についての深い結果を得た。

40年代では Chevalley(1909-1984) が局所環を極大イデアルの冪による位相環として考える立場を明確にして一般論を整理した。また局所環の重複度を初めて定義した。

On the theory of local rings (Ann. of Math. 1943)

Intersections of algebraic and algebroid varieties (Trans. AMS 1945)

I. S. Cohen は完備局所環の係数環の存在を示して、完備化の有用性を大きく増した。

On the structure and ideal theory of complete local rings(ibid. 1946)

Zariski(1899-1970) は Krull の仕事を代数幾何に応用して目覚ましい成果を上げたのみならず、可換環論にもいろいろな貢献をした。いわゆる Zariski Main Theorem や、整閉な局所環の完備化が整閉になるかという問題の研究などがそれであり、後者は永田や Grothendieck の Nagata ring, excellent ring の理論に発展した。

50年代はきわめて実り多い時代であった。40年代に Weil, Chevalley, Zariski によって厳密な代数的基礎を与えられた代数幾何学が多くの若者を引き付け、一方 H. Cartan や S. Eilenberg の築き上げたホモロジー代数が可換環論にも応用されて大成功を収めたからである。

まず P. Samuel(1921-?)が重複度の理論を、次数環の Hilbert 関数の立場から定義して、分かりやすく、かつ自然なものにした。

La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique(1951).

永田雅宜(1927-)は Hensel 環の理論を作り、ネーター環の素イデアル鎖の問題(1956)や Hilbert の第14問題(1958) に否定的解決を与え、また重複度の立場からCohen-Macaulay 環の概念に到達した。 また、森誉四郎と永田は、ネーター整域の整閉包について徹底的な研究を行った。

Serre (1926-)は代数的連接層論(FAC 1955)によって代数幾何学に大革命を引き起こしたが、同じころ交わりの重複度がTorのオイラー標数で表せることも見出した。また、アメリカのM. Auslander(1926-)とD. Buchsbaum(1929-)、イギリスのNorthcottとD. Rees(1918-)も、ホモロジー的手法を大いに発展させた。Serre による正則局所環の特徴づけ

局所環$(R, m)$が正則 $\leftrightarrow$ proj. dim $R/m$ が有限 $\leftrightarrow$ global dim $R$ が有限

はきわめて重要な定理であり、Hilbert のsyzygy定理に直接結び付くものであると共に、古典論とホモロジー的方法の繋ぎ目とも言えよう。

ホモロジー代数のもうひとつの産物は正則列および深さの概念である。局所環 $R$ について一般に dim $R$ は depth $R$ より大きいか等しく、等しいときに $R$ は Cohen-Macaulay (略してCM) であると言われる。$R$ 加群についても同様に定義する。この概念はそれ以後

の可換環論の中心的問題の一つとなる。

60年代のはじめに永田は Local Rings(1962) を書いて、彼自身の結果を中心として Krull 以後の発展を集大成した。とくにその第6章では、擬幾何学的局所環と題して、のちに永田環と呼ばれる重要な環のクラスを導入してその理論を独力で建設した。

Bourbaki のalgèbre commutative(1961-)は、Serreがはじめて系統的に論じた flat の概念から記述を始めるなどの特徴があり、また準素イデアル分解の理論を、より本質的な associated prime の理論に発展させた。 Grothendieck の E.G.A.(1960-1967)は代数幾何学の全面的な書き直しを意図し、また実現したたものだが、そこでは可換環論は代数幾何学と殆ど融合されている。とくに新しい創造として、第4章第2部(1965)で展開された excellent ring の理論は、永田環よりも更に狭いがより使いやすいクラスを定義して幾つかの極めて深い定理を証明した。また彼は局所コホモロジーの理論を(その一部はすでに Serre の FAC に implicit に現れているが)組織的に展開してHarvardで講義した。(1961)。これはやがて可換環論の最も重要な道具の一つとなる。

H.Bass の Gorenstein 環の理論(1963)も新しい領域を開いた。

正則 → 完全交差 → Gorenstein → Cohen-Macaulay → Buchsbaum → FLC

という局所環の hierarchy は60年代から70年代にかけて完成した。

Hironaka の 特異点解消(1964)は代数幾何学のみならず可換環論プロパーにも影響を持った。たとえば Rotthaus の1980年の仕事(後述)はこれを使っている。

M.Artin の近似定理(1969)は、ヘンゼル局所環Aに係数を持つ方程式が完備化で解をもてば、もとの環で解をもつというもので、70年代に Peskine-Szpiro や Hochster によって大いにに利用された。

Hartshorne: Residue and Duality(1966) は Grothendieck の dualizing complex の理論を完成したもので、スキームと層の一般的立場から書かれているが、可換環論にも有効な手段を提供した。

70年代でもっとも目立ったのは Cohen-Macaulay 環の理論の発展とその応用であろう。行列式イデアルなどのＣＭ性は Hochsterなどによって証明された。

Herzog-Kunz (1971)は Cohen-Macaulay 環に対して基準加群というものを定義しその性質を明らかにした。これも原型は Grothendieck にあるが、環論で広く使われるようになったのは彼等以後であり、特に Gorenstein 環の研究に役立った。

Hochster は homological conjectures と呼ばれる一連の問題を整理して提出し、big Cohen-Macaulay module の存在を体を含む局所環に対して証明して局所環論を大きく前進させた(1975)。

トポロジーや組み合わせ論とのつながりは Hochster, Reisner, Stanley などによって70年代に開拓された新しい分野である。Stanley は Cohen-Macaulay 環の Hilbert 関数の性質を使って球面の三角形分割に関する組み合わせ論的予想を解いた。

Cohen-Macaulay 環より広い Buchsbaum 環の理論は Stückrad-Vogel: Toward a theory of Buchsbaum singularities (Amer. J. M. 1978)で建設され、後藤四郎とその協力者下田、鈴木、山岸等によって豊かなものにされた。

80年代以降

Rotthaus: excellent ring(Qを含む)の上の形式的べき級数環のexcellence(1980)は70年代における Seydi, 松村、Greco, Valabrega, Rotthaus などによる excellent ring の研究に一応の終止符を打った。

小駒: non-catenary normal ring の例(1980)

Foxby: Homological theory of complexes of modules (1981)は、加群でなく複体を対象とすることによって強力な理論が得られることを示した。この理論はさらに Avramov との共同の、局所準同型の分類理論に発展しつつある。また Paul Roberts は dualizing module や 代数幾何学の Fulton の 交差理論を用いていくつかの homological 予想を解いた。

Auslander, Herzog, 吉野: maximal Cohen-Macaulay modules の分類

組み合わせ論への応用(Stanley, 日比)

tight closure の理論(Hochster, Huneke, 渡辺敬一、K. Smith)

computational commutative algebra の発展(Buchberger による Grobner basis の理論、計算ソフトMacaulay(アメリカ), Cocoa (イタリア))

行列式イデアルの研究(Bruns, Vetter)

行列式イデアルの自由分解(Buchsbaum, Weyman, 橋本、蔵野)

completely positive measure をもつ integrodifferential equation の resolvent の正則性について

藤田　安啓　（富山大・理）

$(0,\infty)$ 上の $C^\infty$ 函数 $\psi$ が *exponent* とは, $\psi(0+)=0$ かつ $\psi$ の derivative が完全単調であることとする。以下, $\psi(+\infty)=\infty$ なる exponent 全体を $\mathcal{E}$ で表す。

$\psi\in\mathcal{E}$ に対して, $1/\psi(z)$ は完全単調になるので, $[0,\infty)$ 上の測度 $W(dt)$ が一意に決まり,

$$(1)\qquad \int_{[0,\infty)} e^{-tz}\, W(dt)=\frac{1}{\psi(z)}\,,\qquad z>0$$

となる。このようにして, $\psi\in\mathcal{E}$ に対して決まる測度 $W(dt)$ を *completely positive measure* という。

さて, 複素 Banach space $X$ 上の integrodifferential equation

$$(2)\qquad u(t)=x-\int_{[0,t]} Au(t-s)\, W(ds)\,,\qquad t\geq 0$$

を考える。ここで, $W(ds)$ は completely positive measure，また$-A$ は $X$ 上の一様有界な $C_0$–semigroup $[e^{-tA}]_{t\geq 0}$ の生成作用素である。方程式 (2) は記憶を持つ熱方程式のモデルなどとして研究され, 解の存在・一意性は 解析的手法や確率論的手法により示されている。

この講演の目的は,

> 任意の複素 Banach space $X$ に対して, $-A$ が $X$ 上の一様有界な $C_0$–semigroup の生成作用素であるかぎりいつでも, (2) の resolvent $R(t)$ が正の $t$ – 軸を含むある sector に解析接続される

ための, $\psi$ についての必要十分条件を示すことである。$R(t)$ の正則性は, $R(t)$ の有界作用素としての種々の評価を導く。また, この sector での $R(t)$ の, $t=0$ での連続性や作用素 $A$ についての regularity についても考える。

最後に, この問題と Carasso–Kato の定理との関連について述べる。

# RESIDUE AND MASLOV CLASSES OF SOME LAGRANGIAN IMMERSIONS WITH SINGULARITY

HARUO SUZUKI

Department of Mathematics
Hokkaido University
e-mail suzuki@math.hokudai.ac.jp

Let $(E,\Omega)$ be a symplectic vector bundle over a differentiable ($= C^\infty$) manifold $M$ with a symplectic structure $\Omega$. Let $\Sigma$ be a closed set of $M$ and $L$ a Lagrangian subbundle of the restricted symplectic vector bundle $E|_{M\setminus\Sigma}$. We take usually as $\Sigma$ the set of singular points of a Lagrangian subbundle of $E$ and then we call $\Sigma$ the *singularity of the Lagrangian subbundle* $L$. By making use of D.Lehmann's technique, for odd Chern polynomials $c_{2h-1}$, one can define *h-residue class* $\mathrm{res}_h(L,\Sigma) \in H^{4h-2}(M, M\setminus\Sigma;\mathbf{R})$ on the singularity $\Sigma$ of the Lagrangian subbundle $L$, if $\Sigma$ has a neighborhood $W$ which is a submanifold with boundary and retracts to $\Sigma$ by deformation.

Let $U$ be an open set retracting to $W$ by deformation, $L_0$ a Lagrangian subbundle of $E|_U$ and $\mu_h$ $(E|_{U\setminus\Sigma}, L_0|_{U\setminus\Sigma}, L|_{U\setminus\Sigma})$ the Maslov classes on $E|_{U\setminus\Sigma}$. Then one obtains that

$$\mathrm{res}_h(L,\Sigma) = e\circ\delta^*\mu_h(E|_{U\setminus\Sigma}, L_0|_{U\setminus\Sigma}, L|_{U\setminus\Sigma})$$

where $\delta^* : H^{4h-3}(U\setminus\Sigma;\mathbf{R}) \to H^{4h-2}(U, U\setminus\Sigma)$ are connecting homomorphisms of cohomology exact sequence for the pair $(U, U\setminus\Sigma)$, and $e : H^{4h-2}(U, U\setminus\Sigma;\mathbf{R}) \to H^{4h-2}(M, M\setminus\Sigma;\mathbf{R})$ are excision isomorphisms.

Let $M$ be an $n$-dimensional manifold, $(V,\Omega_V)$ a symplectic $2n$-manifold and $f : M \to V$ a map which is differentiable outside a closed set $\Sigma_0 \subset M$. Moreover, we suppose that $f|_{M\setminus\Sigma_0}$ is isotropic, that is, $(f|_{M\setminus\Sigma_0})^*\Omega_V = 0$. We set

$$\Sigma = \{x \in X\setminus\Sigma_0 |\, \ker f_*|_x \neq 0\} \cup \Sigma_0$$

The pullback $E_f = f^*(TV)$ of the tangent bundle $TV$ by $f$ has a natural symplectic structure $\Omega_f$ induced from $\Omega_V$ by $f$. The tangent bundle $L = T(M \setminus \Sigma)$ is a canonically embedded Lagrangian subbundle of the symplectic $2n$-vector bundle $E_f|_{M\setminus\Sigma}$. If there exists an open set containing a submanifold with boundary which is a neighborhood of $\Sigma$ and retracts to $\Sigma$ by deformation, $h$-residue classes $\mathrm{res}_h(f,\Sigma) \in H^{4h-2}(M, M\setminus\Sigma; \mathbf{R})$ are defined.

Let $D$ be the $\mathbf{R}^2$-bundle associated with the $S^1$-bundle $U(n)/O(n) \to U(n)/U(1)\cdot O(n)$. We construct a Lagrangian immersion $Cf : D \to \mathbf{C}^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$ with a singular set $\Sigma_\varepsilon$ (which contains interior points) from the Lagrangian immersion $f : U(n)/O(n) \to \mathbf{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ of J.-M. Morvan and L. Niglio and prove

**Theorem A.** *We have $h$-residue classes*

$$\mathrm{res}_h(Cf, \Sigma_\varepsilon) = \begin{cases} \neq 0 & h = 1 \\ = 0 & h > 1, \end{cases}$$

*and all Maslov classes of $F|_{D\setminus\Sigma_\varepsilon}$ for degree $< \frac{n(n+1)}{2}$ with respect to the standard horizontal Lagrangian subbundle are nontrivial.*

The cotangent bundle $T^*M$ of a manifold $M$ has a canonical symplectic form $\Omega$. We consider a differentiable map into $T^*M$ which is a Lagrangian imbedding outside singularity. The tangent bundle $TT^*M$ of the cotangent bundle $T^*M$ of a Riemannian manifold $(M,\gamma)$ splits into a direct sum of horizontal and vertical subbundles. By this splitting, the Riemannian metric $\gamma$ on $M$ induces a Riemannian metric $g$ on $T^*M$ which is compatible with the symplectic structure $\Omega$ of $T^*M$. From the result of J.-M. Morvan, one gets

**Theorem B.** *Let $(M,\gamma)$ be a flat Riemannian manifold of dimension $n$, $N$ an $n$-dimensional differentiable manifold and $\iota : N \to T^*M$ a differentiable map which is a Lagrangian imbedding outside a closed set $\Sigma \subset N$. Suppose that $\Sigma$ has a neighborhood which is a submanifold with boundary and retracts to $\Sigma$ by determination. If $N \setminus \Sigma$ is a minimal submanifold in $(T^*M, g)$ by $\iota|_{N\setminus\Sigma}$, then we have*

$$\mathrm{res}_1(\iota, \Sigma) = 0.$$

Let $K$ be an orientable differentiable 2-manifold and $\alpha : K \longrightarrow M$ an imbedding of $K$ with a singular point $p \in K$ into a Riemannian 3-manifold. Let $D$ be a small closed disk around $p$ in local coordinate systems on $K$. Changing the conormal bundle map over $D \setminus \{p\}$, one can make a map of conormal bundle $\bar{\alpha} : K \times \mathbf{R} \longrightarrow T^*M$ with singularity $\Sigma = D \times \mathbf{R}$. By making use of a result by I. Vaisman, one obtains

**Theorem C.** *Let $(M, \gamma)$ be a 3-space form and $K$ a 2-manifold. Let $\alpha : K \longrightarrow M$ be a differentiable imbedding with a singular point $p$, $D$ a small disk around $p$ in local coordinate systems on $K$ and $\bar{\alpha} : K \times \mathbf{R} \rightarrow T^*M$ the map of conormal bundle of $\alpha$ with singularity $\Sigma = D \times \mathbf{R}$. If the conormal bundle over $K \setminus \{p\}$ is a minimal submanifold in $(T^*M, g)$, then we have*

$$\mathrm{res}_1(\bar{\alpha}, \Sigma) = 0.$$

"平均曲率一定な有向閉部分多様体について"

大域の微分幾何学で有名な定理

定理　有向閉曲面において

(1) 全曲率は $4\pi(1-g)$ に等しい.
(2) 測地線は閉曲線である.

(A) Gauss曲率 $K=const.$ なる ovaloid は球である.
(B) 平均曲率 $H=const.$ なる ovaloid は球である.
(C) Isometric な ovaloid は合同である.　　　　　　　がある.

上記の定理で (1)(2) と (A)(B)(C) の大きな相違は. (1)(2) は有向閉曲面について成立し. (A)(B)(C) は ovaloid i.e. $K>0$ なる条件の下で成立している. そこで ovaloid でない一般の有向閉曲面について (A)(B)(C) と同様な定理が成立しないか? という問題が考えられる

i.e.
(α) $K=const.$ なる閉曲面は球?
(β) $H=const.$ なる閉曲面は球?
(γ) Isometric な閉曲面は合同?

これについて. (α) は閉曲面上には少くとも1つ $K>0$ なる点が存在 $\Longrightarrow$ $K=const.>0$. 従って このような閉曲面は ovaloid. $\Longrightarrow$ 成立.

(γ) は A.D. Alexandrov により与えられた合同でない isometric non-convex な閉曲面族を例にとり, また E. Rembs の genus$=0$ なる数似な解析曲面族の例により, (γ) が任意の閉曲面に対して成立しない. $\Longrightarrow$ 不成立.

従って (β) の問題のみが残る.　(β) の肯定的結果としては.

定理
- $H=const$ なる genus$=0$ の3回連続微分可能な有向閉曲面は球
- 閉曲面 $S$ は convex direction を有し. かつ. その方向の直線と $S$ とで出来る2交点の平均曲率が等しいとき. $S$ は其の方向に垂直な対称平面をもつ.
- (上の定理の系) convex direction の cone をもつ $H=const$ なる閉曲面は球. 等がある.

これらの結果は其の後 $(m+1)$ 次元 Euclid 空間の有向閉超曲面に拡張された.

そこで. Euclid 空間における数々の定理を Riemann 空間に拡張することが目的である. そのため先ず Riemann 空間に拡張出来る一般化された思想, 抽象的思想で, Euclid 空間での定理を見直す必要がある. 即ち. Euclid 空間での数々の定理を変換の立場から眺めると. translation, homothetic or similar transformation であることに気付き, 更に Euclid 空間における合同とは運動によって重ね合すことであるが. 合同の概念を一般化し, ある

変換群を考え、それに属する変換によって重ね合わすことを合同"と考え. Riemann 空間への拡張に際しては、変換群として one-parameter continuous transformation group i.e. vector field $\xi^i(x)$ を考える. 例えば $E^3$ において rectangular Cartesian coordinate をとると一点 P の座標 $(x^1, x^2, x^3)$ は position vector i.e. $\xi^i(x) = x^i$ をとったものに他ならないから. Euclid 空間における諸問題を この Vector field の立場から解決る.

先ず

H. Liebmann (1900): 『(B) H=const. なる ovaloid は球』 なる定理の証明に用いた Minkowski の積分公式 i.e.

$$\int\cdots\int_F (Kp + H)\, dA = 0 \qquad \text{wo. } F: \text{ovaloid}$$

$$\int\cdots\int_F (Hp + 1)\, dA = 0 \qquad p: \text{support function}.$$

があり. この公式の Riemann 空間の closed orientable hypersurface への拡張が考えられ.

定理 (Katsurada)

$V^m$: closed orientable hypersurface imbedded in $R^{m+1}$ admitting a vector field $\xi^i$

$$\Longrightarrow \int\cdots\int_{V^m} H_1 n^i \xi_i\, dV + \frac{1}{2m}\int\cdots\int_{V^m} g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\cdot \underset{\xi}{\mathcal{L}} g_{ij}\, dV = 0$$

if $R^{m+1}$ is of constant curvature,

$$\int\cdots\int_{V^m} H_{\nu+1} n^i \xi_i\, dV + \frac{1}{2m}\int\cdots\int_{V^m} H_\nu^{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \underset{\xi}{\mathcal{L}} g_{ij}\, dV = 0 \qquad (1 \leq \nu \leq m-1)$$

wo.

$$H_\nu^{\alpha\beta} = \frac{1}{(m-1)!}\varepsilon^{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}}\varepsilon^{\beta\beta_1\cdots\beta_{m-1}}\cdot b_{\alpha_1\beta_1}\cdots b_{\alpha_\nu\beta_\nu}\, g_{\alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+1}}\cdots g_{\alpha_{m-1}\beta_{m-1}}.$$

なる拡張された意味での Minkowski-type integral formulas が得られた.

この公式を用いることにより 例えば.

定理. $V^m$: closed orientable hypersurface in a constant curvature space $R^{m+1}$ admitting a conformal Killing vector field $\xi^i$,

(i) $H_1 = \text{const}.$

(ii) $x^i \xi_i > 0$ or $< 0$ on $V^m$

$\Longrightarrow V^m$ : umbilic $\Longrightarrow V^m$ : sphere. なる結果が得られた．

その後．数多くの研究者により種々の角度から一般化がなされた．

また一方．Riemann空間のclosed orientable submanifoldに対しても．拡張された意味のMinkowski-typeの積分公式が得られ．その公式を用いた種々の結果．

さらにconformal Killing vector fieldを一般化したconformal Killing tensor fieldを用いての種々の結果が得られている．

これらの結果は

"Publications of the Study Group of Geometry. Vol. 9" その他

を参照．

なお．これらの問題を解決するには

(i) 積分論のStokesの定理によるもの

(ii) 2次の楕円型微分方程式の理論によるもの があることを付記する．

香城 日出麿

# 均質型空間（Coifman-Weiss 流）上の函数空間

薮田　公三　　　奈良女子大・理

$X = (X, d, \mu)$ を Coifman-Weiss の均質型空間とする。すなわち、$X$ は位相空間で、$d$ は擬距離

$$
\begin{aligned}
&d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\
&d(x,y) \leq K_1 \left(d(x,z) + d(z,y)\right) \qquad x, y, z \in X,
\end{aligned}
$$

$\mu$ は Borel 測度で

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leq K_2\, \mu(B(x,r)) \qquad x \in X,\ r > 0$$

を満たす。ただし $B(x,r)$ は, 中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の球であって、$\{B(x,r)\}_{r>0}$ が $x$ の近傍系になっているものとする。また次の条件を満たすものとする。$0 < \exists\alpha \leq 1$, $\exists K_3 > 0$ s.t.

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq K_3 \left(d(x,z) + d(y,z)\right)^{1-\alpha} d(x,y)^{\alpha} \qquad \text{for } x, y, z \in X.$$

均質型空間では、$d$ と同値な擬距離で上を満たすものがあるので、これは実質的な制限ではない。さらに、もし $\mu(X) = \infty$ ならば

$$(*) \qquad \exists x_0 \in X\ \exists r_0 > 0 \text{ s.t. } B(x_0, 2r) \setminus B(x_0, r) \neq \emptyset \text{ for } r \geq r_0$$

を仮定する。

$1 \leq p < \infty$, $\phi(x,r) : X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ とする。$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ と球 $B = B(a,r)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
f_B &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B f(x)\, d\mu, \\
MO(f,B) &= \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - f_B|\, d\mu, \\
MO_{\phi,p}(f,B) &= \frac{1}{\phi(a,r)} \left( \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - f_B|^p\, d\mu \right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

とおき,

$$\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X) = \left\{ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X) : \sup_B MO_{\phi,p}(f,B) < \infty \right\},$$
$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}} = \sup_B MO_{\phi,p}(f,B),$$
$$\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}} = \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}} + |f_{B(x_0,1)}| \quad \text{for fixed } x_0 \in X$$

と定義する。もし $\mu(X) < \infty$ ならば任意の $x_0 \in X$ に対して $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}} + \|f\|_{L^p}$ と $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\phi,p}} + |f_{B(x_0,1)}|$ は同値なノルムである。$\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ は $\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\phi,p}}$ をノルムとしてバナッハ空間になる。

$X$ 上の函数 $g$ が $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ 上の pointwise multiplier であるとは, 任意の $f \in \mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ に対して各点ごとの積 $fg$ が $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ の元になることを言う。$g$ が $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ 上の pointwise multiplier であれば, 閉グラフ定理により $g$ は有界作用素であることがわかる。

$\phi$ が次の条件を満たすとする。

$$(1) \qquad \frac{1}{A_1} \le \frac{\phi(a,s)}{\phi(a,r)} \le A_1, \qquad \frac{1}{2} \le \frac{s}{r} \le 2,$$

$$(2) \qquad \frac{\phi(a,r)}{r^\alpha} \le A_2 \frac{\phi(a,s)}{s^\alpha} \qquad 0 < s < r,$$

$$(3) \qquad \int_0^r \mu(B(a,t))^{1/p} \frac{\phi(a,t)}{t}\, dt \le A_3\, \mu(B(a,r))^{1/p} \phi(a,r), \qquad r > 0,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{A_4} \le \frac{\phi(a,r)}{\phi(b,r)} \le A_4, \qquad d(a,b) \le r,$$

ただし $A_{\flat 1 \sharp \psi \flat 2 \sharp \psi \flat 3 \sharp \psi \flat 4 \sharp \gamma \Omega i=1,2,3,4)}$ は $r, s > 0,\ a, b \in X$ に依らない定数とする。
このとき次の定理が成り立つ。2

THEOREM 1. $g$ は $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ 上の pointwise multiplier である。
$\iff g \in \mathrm{bmo}_{\psi,p}(X) \cap L^\infty(X)$. ただし $\psi = \phi/(\Phi^* + \Phi^{**})$,

$$\Phi^*(a,r) = \int_1^{\max(2,d(x_0,a),r)} \frac{\phi(x_0,t)}{t}\, dt,\ \Phi^{**}(a,r) = \int_r^{\max(2,d(x_0,a),r)} \frac{\phi(a,t)}{t}\, dt.$$

またこのとき $g$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\psi,p}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値になる。

特に $\mu(X) < \infty$ のときは $\exists r_0 > 0$ s.t. $X = B(x, r_0)$ for all $x \in X$. となり, 次の定理が成り立つ。

THEOREM 2. $g$ は $\mathrm{bmo}_{\phi,p}(X)$ 上の pointwise multiplier である。
$\Longleftrightarrow g \in \mathrm{bmo}_{\psi,p}(X) \cap L^\infty(X)$. ただし

$$\psi(a,r) = \phi(a,r) \bigg/ \int_r^{2r_0} \frac{\phi(a,t)}{t}\, dt\,.$$

またこのとき $g$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\mathrm{BMO}_{\psi,p}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値になる。

詳しい内容は、[17] で準備中です。均質型空間に関するいくつかの文献と pointwise multipliers に関するものを挙げておきます。

## References


[1] H. Aimar, Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type, Trans. Amer. Math. Soc., **292** (1985), 135–153.

[2] H. Aimar, Rearrangement and continuity properties of $BMO(\phi)$ functions on spaces of homogeneous type, Ann. Sci. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. IV. Ser., **18** (1991), 353–362.

[3] B. Bordin, $H^p$ estimates for weakly strongly singular integral operators on spaces of homogeneous type, Studia Math., **85** (1983), 218–234.

[4] R. R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc., **83** (1977), 569–645.

[5] R. R. Coifman and G. Weiss, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, LNIM 242(1971), Springer Verlag, Berlin.

[6] G. David, J. L. Journé, Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accretives et interpolation, Rev. Mat. Ibero-Amer., **1** (1985), 1–56.

[7] P. G. Lemarié, Algèbres d'opérateurs et semi-groupes de Poisson sur un espace de nature homogène, Publ. Math. Orsay **84-3** (1984).

[8] R. A. Macías and C. Segovia, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, Adv. Math. **33** (1979), 257–270.

[9] R. A. Macías and C. Segovia, A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, Adv. Math. **33** (1979), 271–309.

[10] R. A. Macías and C. Segovia, Singular integrals on generalized Lipschitz and Hardy spaces, Studia Math., **65** (1978), 55–75.

[11] J-.O. Strömberg and A. Torchinsky, Weighted Hardy spaces, LNIM 1381(1989), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[12] Uchiyama, The factorization of $H^p$ on the space of homogeneous type, Pacific J. Math., **92** (1981), 453–468.

[13] Y. Gotoh, On $BMO_\phi$ multipliers on general domains, preprint..

[14] S. Janson, On functions with conditions on the mean oscillation, Ark. för Mat. **14** (1976), 189–196.

[15] E. Nakai, Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation, Studia Math. **105** (1993), 105–119.

[16] E. Nakai and K. Yabuta, Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 207–218.

[17] E. Nakai and K. Yabuta, Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation on spaces of homogeneous type, in preparation.

[18] S. Spanne, Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **19** (1965), 593–608.

[19] D. A. Stegenga, Bounded Toeplitz operators on $H^1$ and applications of the duality between $H^1$ and BMO, Amer. J. Math. **98** (1976), 573–589.

Page 1

4pm - 5pm

Abstract of Seminar March 7, 1994

Instabilities in steady two-component flows

Yuriko Yamamuro Renardy

Two-fluid dynamics is a challenging subject rich in interdisciplinary science and applications. In this talk, I will discuss the onset of traveling waves on fluid interfaces in plane parallel shear flows. Two immiscible liquids of different viscosities and densities with surface tension at the interface lie between parallel walls. The flow is driven by a combination of the motion of the top wall and a pressure gradient in the direction of the flow. The arrangement with a flat interface is a steady solution of the governing equations.
We focus on the situation where the interfacial mode is neutrally stable at a critical wavenumber $\alpha$, together with the one at $-\alpha$, and is stable at other wavenumbers. The weakly nonlinear interaction of the waves at $\alpha$ and $-\alpha$ determines whether the bifurcation is supercritical or subcritical. If the bifurcation is supercritical, then primary traveling waves are generated at the interface as the Reynolds number is raised past the critical value

Abstract

We address the stability of the traveling wave solution to variations at large length scales. This sideband stability analysis does not lead to the usual Ginzburg-Landau equation but to a coupled set of equations for three amplitude factors. The criteria which determine the stability to sideband perturbations are presented. This raises the possibility that as a result of sideband instability of the primary traveling wave, the flow may eventually be dominated by a long-wave mode. Reference is made to experimental data.

# MODIFIED NASH TRIVIALITY OF FAMILY OF ZERO-SETS OF REAL POLYNOMIAL MAPPINGS

名工大 福井敏純 (兵庫教育大 小池敏司氏, 名古屋大 塩田昌弘氏 との共同研究)

多項式写像の零点集合芽の分類を考える際、零点集合の族がいつ自明化されるかという問題を考えるのは自然である。

例 (H.Whitney). $W_t(x,y) = xy(x-y)(x-ty)$, $t > 1$. $(\mathbb{R}^2, W_t^{-1}(0), 0)$ は 4 本の直線であり、位相的には自明な族である。しかし $(\mathbb{R}^2, W_t^{-1}(0), 0)$ と $(\mathbb{R}^2, W_{t'}^{-1}(0), 0)$ が $C^1$同値になる事と $t = t'$ が同値であり、$C^1$同値では（もちろん $C^\infty$同値でも）自明化されない。

一般にいわゆる単純特異点でなければこのように "moduli" があらわれてしまう。位相同値についてはこのような "moduli" はあらわれないが、$x^2 + y^{2n-1} = 0$, $(n \geq 1)$ が原点で定める集合芽がすべて同じになるなど病的な現象があらわれ、位相同値で分類をするのはあまり「健全である」とは言えない。従って次のような問題にいきあたる。

問題. できるだけ *generic* な条件の下で、多項式写像の零点を分類するのに自然でかつ良い同値関係は何か？

ここで次の事実に注目する。

事実 (T.C.Kuo). $\pi : M \to \mathbb{R}^2$ を原点 *blow up* とすれば $(M, (W_t \circ \pi)^{-1}(0), \pi^{-1}(0))$ は実解析的に自明な族である。

我々は多項式の零点集合を考えているのだから実解析同値をもちだすのは真に自然とは言いがたい。ここで次の定理を思いだそう。

定理（塩田）. コンパクト *Nash* 多様体の対 $(M_i, N_i)$ $(i = 1, 2)$ に対して、$(M_1, N_1)$ と $(M_2, N_2)$ が $C^1$同値ならば *Nash* 同値である。

ここで Nash というのは semi-algebraic かつ real analytic のことであり代数的な対象を含み陰関数定理等が成り立つ最小のカテゴリーである。

定理. $M \subset \mathbb{R}^n$ を境界を持つ *Nash*多様体、$N_1, \ldots, N_q$ を $M$ の *Nash*部分多様体で $\partial N_i \subset \partial M$ なるものとする。$N_0 = \partial M$ と書くとき、$N_0, \ldots, N_q$ が *normal crossing* と仮定する。$p : M \to \mathbb{R}^k$ を *proper onto submersion* で $p : M|N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_s} : N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_s} \to \mathbb{R}^k$, $(0 \leq i_1, \ldots, i_s \leq q)$ が *proper onto submersion* と仮定すれば、$\varphi | p^{-1}(0) = id$ を満たす *Nash* 同型 $\varphi = (\varphi', p) : (M; N_1, \ldots, N_q) \to (M; N_1, \ldots, N_q) \cap p^{-1}(0) \times \mathbb{R}^k$ が存在する。

この定理の系として $(M, (W_t \circ \pi)^{-1}(0), \pi^{-1}(0))$ $(t > 1)$ は Nash の意味で自明である事がわかる。ここで modified Nash trivialization の定義をしよう。

定義. $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ $(t \in I)$ を多項式写像の多項式族、$F : (\mathbb{R}^n \times I, 0 \times I) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を $F(x;t) = f_t(x)$ で定まる写像とする。$\Pi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n \times I$ を *proper Nash modification*, $* \in I$ に対し $M = \Pi^{-1}(\mathbb{R}^n \times *)$, $\pi = \Pi|M$ とする。$(\mathbb{R}^n, f_t^{-1}(0), 0)$ が

*modified Nash trivialization via* $\Pi$ *along* $I$ を許容するとは次の *(i),(ii)* を満たす *Nash* 同型芽

$$\Phi : (\mathcal{M}, (\Pi \circ F)^{-1}(0), \Pi^{-1}(0)) \to (M, (\pi \circ f_*)^{-1}(0), 0) \times I$$

と位相同型芽

$$\phi : (\mathbf{R}^n \times I, F^{-1}(0), 0) \to (\mathbf{R}^n, f_*^{-1}(0), 0) \times I$$

が存在する時を言う。

(i) $(\pi \times id) \circ \Phi = \phi \circ \Pi$

(ii) $\phi$ は *t-level preserving*

もし $\Pi = \pi \times id_I$ ととれるとき $(\mathbf{R}^n, f_t^{-1}(0), 0)$ は *modified Nash trivialization via* $\pi$ を許容すると言う事にする。

さて $\Delta$ を $\mathbf{R}^n$ 内の閉凸多面体で、各頂点 P に対し錐 $\sigma_P = \bigcup_{r \geq 0} r \cdot (\Delta - P)$ が常に第一象限 $\mathbf{R}^n_+$ を含むようなものとする。すると半群 $\sigma_P \cap \mathbf{Z}^n$ が $\mathbf{R}$ 上生成する代数 $\mathbf{R}[\sigma_P \cap \mathbf{Z}^n]$ は多項式環 $\mathbf{R}[\mathbf{R}^n_+ \cap \mathbf{Z}^n] = \mathbf{R}[x_1, ..., x_n]$ を部分代数として含む。代数 $\mathbf{R}[\sigma_P \cap \mathbf{Z}^n]$ の $\mathbf{R}$ 値点全体の集合を $U_P$ と書くとき、$U_P$ に自然に real algebraic variety の構造が入り、それらは自然に貼り合って real toric variety と呼ばれる real algebraic variety $P_\Delta$ が構成される。また先ほどの inclusion $\mathbf{R}[x_1, ..., x_n] \subset \mathbf{R}[\sigma_P \cap \mathbf{Z}^n]$ が定義する写像 $P_\Delta \to \mathbf{R}^n$ は proper algebraic modification である。これは 原点 blow up を特別な場合として含み、特異点解消の具体的構成に威力を発揮するものである。各頂点 $P$ に対して半群 $\sigma_P \cap \mathbf{Z}^n$ が群 $\mathbf{Z}^n$ のある基底で生成されるとき, $P_\Delta$ は非特異実代数多様体となる。

命題. $f(x_1, ..., x_n)$ を擬斉次多項式で原点で孤立特異点を定義するものとする。$n \leq 3$ ならば非特異な $P_\Delta$ が存在して、$P_\Delta \to \mathbf{R}^n$ が $(\mathbf{R}^n, f^{-1}(0))$ の特異点解消を与える。

このことは一般の $n$ では成り立たない事に注意。

定理. $f_t(x_1, ..., x_n)$ $(t \in I)$ を型 $(a_1, ..., a_n; d)$ の擬斉次多項式の族で原点で孤立特異点を定義するものとする。

(i) $n \leq 3$ ならば $(\mathbf{R}^n, f^{-1}(0), 0)$ は *modified Nash trivialization via the map* $P_\Delta \to \mathbf{R}^n$ *above.* を許容する。

(ii) 一般の $n$ について $(\mathbf{R}^n, f^{-1}(0), 0)$ は *modified Nash trivialization via the map* $\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \ni (x_1, ..., x_n; u) \mapsto (u^{a_1}x_1, ..., u^{a_n}x_n) \in \mathbf{R}^n$ を許容する。ここで写像 $\pi$ は *generically 2:1* であるが *modified Nash trivialization via* $\pi$ の意味は上と同様に定義したものとする。

擬斉次多項式でなくても孤立特異点を定義するような多項式写像の零点の族が同時特異点解消を許せば（例えば $f_t$ が Newton 図形一定で non-degenerate かつ convenient の時）上の (i) 型の定理が、半擬斉次多項式族の定義する写像の零点族については上の (ii) 型の定理が成立する。最後に modified Nash 同値類の有限性に関する結果を述べる。

定理. $P_{[r]}(n,p)$ を次数が $r$ を超えない多項式写像 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ 全体の集合とする。$t \in P_{[r]}(n,p)$ の表す多項式写像を $f_t$ と書く事にする。$\Sigma$ を原点の近傍で原点以外にも零点の特異点があるような多項式写像全体のなす集合とする。すると有限個の分割 $P_{[r]}(n,p) - \Sigma = Q_1 \cup \cdots \cup Q_d$ が存在して次を満たすようにできる。

(i) 各 $Q_i$ は *Nash* 多様体。

(ii) $(\mathbf{R}^n, f_t^{-1}(0), 0)$ $(t \in Q_i)$ は *modified Nash trivialization along* $Q_i$ を許容する。

1994年 3月 16日 16:00-17:00 北海道大学理学部数学教室談話会にて講演

# 無限次退化エゴロフ型作用素の局所可解性と準楕円性

京都大学独立大学院
人間·環境学研究科　森本　芳則 (Yoshinori Morimoto)

要旨．主要型擬微分作用素の局所可解性と準楕円性の研究は、1957 年の Hans Lewy による、局所的にも解が存在しない偏微分方程式の発見以来、多くの研究者によって意欲的になされてきた。これらの研究の中から、擬微分作用素の正準変換に関する Egorov 原理や、古典的な擬微分作用素を拡張した、Beals-Fefferman クラスの作用素、或いは Hörmader-Weyl calculus など、いわゆる超局所解析の方法の多くが創出された。しかしながら、主要型擬微分作用素の局所可解性に関して、Nirenberg-Treves が与えた $(\Psi)$ 条件の十分性の問題は、20 数年来、未解決である（偏微分作用素の場合は Beals-Fefferman('73)、空間次元 2 の場合は Lerner('88) によって解決。また、$(\Psi)$ 条件の必要性の証明は Hörmander の本 ('85) に与えられている）。最近、Lerner('92) は、この Nirenberg-Treves 予想について、部分的ではあるが否定的結果を与えた。彼は、ある特別な"無限次退化"をする主要型擬微分作用素の例について、Nirenberg-Treves 条件 $(\Psi)$ を満たしても $L^2$ の意味では局所可解にならないことを示した。一方、$(\Psi)$ 条件を満たす $\boldsymbol{R}^n$ における 1 階の主要型擬微分作用素 $P$ は、$r$ 次の有限次退化を保障する Hörmander Lie brackets 条件 $(C.H)_r$ を満たせば、$P$ の共役作用素 $P^*$ に対して次の劣楕円型評価式が成立する：$\forall K \subset \boldsymbol{R}^n$ compact, $\exists C_K > 0$;

(1) $$||u||_\delta \le C_K(||P^*u|| + ||u||),\ \ u \in C_0^\infty(K), \delta = 1/(r+1).$$

逆に、$P^*$ に対する劣楕円型評価式 (1) から、$P$ は条件 $(\Psi)$ と $(C.H)_r$ をみたすことが従う。これが、Egorov-Hörmander('75-'79) によって証明された劣楕円型作用素定理で、評価式 (1) から、$P$ の $L^2$ 局所可解性と $P^*$ の準楕円性を容易に示すことができる。条件 $(\Psi)$ と $(C.H)_r$ から評価式 (1) を導く証明は、粗く言って、数度にわたる超局所化（microlocalization）の議論によって作用素 $P^*$ を Mizohata 作用素 $D_t + it^\ell|D_x|$ 或いは Egorov 作用素

(2) $$D_t + it^s(D_{x_1} + t^k x_1^b|D_x|) \ \text{ in } \boldsymbol{R}_t \times \boldsymbol{R}_x^{n-1},\ s, b \ge 0 \text{ 偶数},\ k > 0 \text{ 奇数}$$

に帰着させることにより遂行される。Egorov 作用素 (2) に対しても、評価式 (1) を示す事は、直接的にはできず再度、条件 $(C.H)_r$ と $(\Psi)$ を用いて、超局所的に Mizohata 作用素或いは Egorov 作用素に帰着させる議論が必要である。これ故、(2) において関数 $t^s$ または $t^k$ を無限次の零点をもつ関数に置き換えると、条件 $(C.H)_r$ が成立せず、このような Egorov 型作用素に対する準楕円性とその共役作用素の局所可解性は全く未知であった。講演では、作用素 (2) において、$t^k$ を $f(t) = \int_0^t \exp(-|\sigma|^{-\kappa})d\sigma,\ \kappa > 0$ に置き換えた場合を考察し、更に、$t^s$ と $x_1^b$ をある種の無限次の零点をもつ関数に置き換えた場合についても得られた結果を述べた。