



Title	第3回関数空間セミナー報告集
Author(s)	宮島, 静雄; 中路, 貴彦
Description	1995年1月9日 (月) ~1月11日 (水)
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 35, 1
Issue Date	1995-01-01
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/5154">https://doi.org/10.14943/5154</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/5469">https://hdl.handle.net/2115/5469</a>
Type	departmental bulletin paper
File Information	35.pdf



## 第3回関数空間セミナー報告集

1995年1月9日(月)～1月11日(水)

代表者 宮島静雄・中路 貴彦

**Series # 35. February, 1995**

# HOKKAIDO UNIVERSITY

## TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- ‡ 1: T. Morimoto, Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations, 14 pages. 1987.
- ‡ 2: J.L. Heitsch, The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds, 59 pages. 1987.
- ‡ 3: K. Kubota (Ed.), 第12回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- ‡ 4: J.Tilouine, Kummer's criterion over  $\Lambda$  and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- ‡ 5: Y.Giga(Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- ‡ 6: T.Yoshida (Ed.), 1987年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- ‡ 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), “特異点と微分幾何” 研究集会報告集, 1988.
- ‡ 8: K. Kubota (Ed.), 第13回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- ‡ 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- ‡ 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
- ‡ 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- ‡ 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), “特異点論とその応用” 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium “Singularity Theory and its Applications,” 317 pages. 1989.
- ‡ 13: M. Suzuki, “駆け足で有限群を見てみよう” 1987年7月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- ‡ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989
- ‡ 15: R. Agemi (Ed.), 第14回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- ‡ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. I, 258 pages. 1990.
- ‡ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop “Algebraic Geometry and Hodge Theory” Vol. II, 235 pages. 1990.
- ‡ 18: A. Arai (Ed.), 1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- ‡ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- ‡ 20: R. Agemi (Ed.), 第15回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- ‡ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- ‡ 22: R. Agemi (Ed.), 第16回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- ‡ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- ‡ 24: K. Kubota (Ed.), 第17回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
- ‡ 25: K. Takasaki, “非線型可積分系の数理” 1992.9.28 ~ 10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.
- ‡ 26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- ‡ 27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- ‡ 28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- ‡ 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.
- ‡ 30: Y. Giga, Y.-G. Chen (Eds.), 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.
- ‡ 31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.
- ‡ 32: T. Ozawa (Ed.), 1993年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.
- ‡ 33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.
- ‡ 34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.

# 第3回 関数空間セミナー 報告集

1995年1月9日(月)～1月11日(水)

代表者 宮島 静雄  
中路 貴彦

## 目次

Riesz's functions in weighted Hardy and Bergman spaces 山田 雅博 (広大・理)	1
A Remark on linear isometries of $\mathcal{L}_p^{(m)}$ into $\mathcal{L}_2^{(n)}$ 岡田 紀夫 (東京理大・理)	6
可換 Banach 環のキャリア空間上の関数族について 井上 純治 (北大・理) 高橋 眞映 (山形大・工)	12
順序保存力学系における安定性理論と曲面の発展方程式 荻原 俊子 (東大・数理)	18
非可換 $L^p$ -空間の isometry について 渡辺 恵一 (新潟大・理)	24
1次元力学系の共変表現について 河村 新蔵 (山形大・理)	30
Gaussian estimate の拡張について 宮島 静雄 (東京理大・理)	35
複素力学系からみたニュートン法 西沢 清子 (城西大・理)	38
Double layer potentials of $L^p$ -functions for a bounded domain with fractal boundary 渡辺 ヒサ子 (お茶大・理)	44
Lipschitz 双対空間の順序と Lipschitz 双対写像のスペクトル性 澤島 侑子 (お茶大・理)	50
$L^p$ -convergence of an extended stochastic integral, II 新谷 俊忠 (苫小牧高専)	56
並べかえ理論再考 酒井 雄二 (信大・工)	62
不等式のヴィジュアルな証明 久保 文夫 (富山大・理)	66

行列の $c$ -numerical range の境界について 高口 真 (弘前大・理)	72
線形写像の空間の種々の order と norm 安藤 毅 (北大・電科研)	76
Weighted norm inequalities for some singular integral operators 山本 隆範 (北海学園大・教養)	81
Eigenvalues of matrices with given block upper triangular part 高橋 勝利 (北大・理)	87
コンパクト群上の F. and M. Riesz の定理について 山口 博 (城西大理)	90
Type constants and Clarkson's inequalities for $L_r(X)$ 高橋 泰嗣 (岡山県立大・情報工) 岡崎 悦明 (九州工大・情報工) 加藤 幹雄 (九州工大・工)	93
On some Banach algebras with involution 越 昭三 (北海道工大)	96

# Riesz' functions in weighted Hardy and Bergman spaces

北大・理 中 路 貴 彦  
広大・理 山 田 雅 博

## § 1. 序

$D$  を複素平面上の開単位円板,  $\mathcal{P}$  を多項式の全体, また  $0 < p < \infty$  とする.  $\mu$  が  $\bar{D}$  上の有限な Borel 正測度で  $a \in \bar{D}$  のとき

$$S(a) = S(\mu, p, a) = \inf \left\{ \int_{\bar{D}} |f|^p d\mu : f \in \mathcal{P}, f(a) = 1 \right\}$$

とし,  $S$  を Riesz 関数と呼ぶ. この関数は半平面上の  $L^p$  空間におけるモーメント問題に関連して, H. Riesz によつて定義されたものである. また,  $m$  は  $\bar{D}$  上の2次元 Lebesgue 測度を表すものとする.

$\text{supp } \mu \subset \partial D$  かつ  $d\mu / (d\theta/2\pi) = \omega(e^{i\theta})$  のときに Szegő らは  $S(a) = (1-|a|^2) \exp \left\{ (\log \omega)^\wedge(a) \right\}$ , ( $a \in D$ ) を示した. ここで,  $(\cdot)^\wedge$  は Poisson 積分を表す. この結果から  $\lim_{r \rightarrow 1} S(re^{i\theta}) = 0$  a.e. がわかる. 一般的な  $\bar{D}$  上の測度  $\mu$  に対して,  $S$  を上の形式で求めた形では難しい. ここで  $S$  の  $D$  における境界での挙動を考察し, これらを評価することを考える. 先の Szegő らの結果は Riesz 関数が境界において, ほとんどの点で  $0$  となる事を示しているが, 我々の得た結果は一般の測度に対して, より正確な情報を身えている. また, この Riesz 関数を用いて

荷重付き Hardy 空間や Bergman 空間の性質を調べることもでき、そのことについてあとで述べることにする。

## § 2. Riesz 関数の境界での挙動

序において述べた Szegő の定理の結果より,  $\text{supp} \mu \subset \partial D$  である特殊な測度に対しては,  $S$  が境界上ほとんどの点で  $0$  に収束することからわかる。では, 一般の測度  $\mu$  に対してはどうか。この問題に対する考察は次の定理による。

定理 1.  $\mu$  を  $\bar{D}$  上の測度とすると, 次の成立する。

$$(1) \quad S \in \partial D \text{ に対して, } \mu(\gamma_S) = 0 \Leftrightarrow S(S) = 0$$

(2) ある可算集合  $E \subset \partial D$  が存在して

$$S \in \partial D \setminus E, \quad a_n \rightarrow S, \quad a_n \in D$$

$\Rightarrow$

$$S(a_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(3) \quad \mu|_{\partial D} = 0$$

$\Rightarrow$

$$S(a) \rightarrow 0 \quad (|a| \rightarrow 1)$$

定理 1 の (2) は前出の Szegő の定理から得られる結果を厳密にしている。また, 測度  $\mu$  の集合を除外する必要はなく, 可算個の点を除外するだけで,  $S$  の境界への極限が  $0$  となることが得られている。また, (1) も  $S$  の境界での挙動は  $\mu$  の値と関連していることがわかる。

### §3. Riesz 関数の評価について

$S$  の定義から, 次のことがたちちわかる.  $a \in \bar{D}$  のとき

$$|f(a)|^p \leq S(\mu, p, a)^{-1} \int_{\bar{D}} |f|^p d\mu \quad (f \in \mathcal{P}).$$

このことから  $S(a) > 0$  であることと  $\mathcal{P}$  の  $L^p(\mu)$ -閉包における点値汎関数  $\tilde{S}_a(f) = f(a)$  が連続であることは同値である. よって,  $S$  を下から評価することを考えたい.

定理 2.  $\mu$  を  $\bar{D}$  上の測度とする.

(1)  $d\mu = W dm$  とすると

$$(1-|a|^2)^2 \exp \left\{ (\log W)^{\wedge}(a) \right\} \\ \leq S(a) \leq (1-|a|^2)^2 \widehat{W}(a) \quad a \in D$$

そこで  $u \in L^1(D, m)$  に対して

$$\tilde{u}(a) = \int_D u(z) \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}z|^4} dm(z), \quad a \in D$$

とすると.

(2) 任意のコンパクト集合  $K \subset D$  に対して

$$S(a) \geq 5(1-|a|^2)^3 (1-t) \\ \times \exp \left( \frac{10}{(1-|a|^2)^3 (1-t)} \int_{K^c} \log(W \wedge 1) dm \right)$$

ここで  $t = \max \{ |z| : z \in K \}$  とすると.

定理2は定理1と同様  $\rho$  には依存しない。また、この定理2より次の系が得られる。

系1.  $\mu$  を  $D$  上の測度,  $d\mu/dm = W$  とする。

(1)  $\int_D \log W dm > -\infty$  であるならば、任意のコンパクト集合  $G \subset D$  に対して、ある  $\varepsilon_G > 0$  が存在して、

$$S(a) \geq \varepsilon_G \quad a \in G \quad \text{である。}$$

(2) あるコンパクト集合  $K \subset D$  が存在して  $\int_K \log W dm > -\infty$  であるならば、任意のコンパクト集合  $G \subset D$  に対して、ある  $\varepsilon_G > 0$  が存在して

$$S(a) \geq \varepsilon_G \quad a \in G \quad \text{である。}$$

この系の(1), (2)は各々定理2の(1), (2)により得られる。(1)では  $\log W$  の  $D$  全体での可積分性を十分条件としているが、(2)ではそれより弱い  $K$  での可積分性を十分条件としている。

#### §4. $H^p(\mu)$ と $L^p_a(\mu)$ について

ここでは荷重付き Hardy 空間 および Bergman 空間に関連した事を述べる。 $\mu$  を  $D$  上の有限な Borel 正測度,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mathcal{H}$  を  $D$  上の解析関数の全体とする。荷重付き Hardy 空間  $H^p(\mu)$  を  $\mathcal{H}$  の  $L^p(\mu)$ -閉包, また荷重付き Bergman 空間  $L^p_a(\mu)$  を  $L^p_a(\mu) = \mathcal{H} \cap L^p(\mu)$  で定義する。ここで考える問題は次の2つである。ひとつは  $L^p_a(\mu)$  が  $L^p(\mu)$  で閉となるか。もうひとつは  $H^p(\mu) \subset L^p_a(\mu)$  となるかである。 $H^p(\mu) = L^p_a(\mu)$  となるための必要十分条件を探る問題は  $\mathcal{H}$  項式近似の問題であるから、我々はこの問題の片方の

包含関係について考察することになる。

$$\lambda(\alpha) = \lambda(\mu, p, \alpha) = \inf \left\{ \int_D |f|^p d\mu : f \in \mathcal{H}, f(\alpha) = 1 \right\}$$

とし、これを  $\lambda$  と同様 Riesz 関数と呼ぶことにする。

定理 3.  $\mu$  を  $D$  上の測度とする。

(1)  $L_a^p(\mu)$  が  $L^p(\mu)$  で閉であることと、任意の  $\mathbb{C} \setminus \alpha$  外集合  $K \subset D$  に対し

$$\int_K \log \lambda d\mu > -\infty$$

となることは同値である。

(2)  $H^p(\mu) \subset L_a^p(\mu)$  であることと、任意の  $\mathbb{C} \setminus \alpha$  外集合  $K \subset D$  に対し

$$\int_K \log \lambda d\mu > -\infty$$

となることは同値である。

ここで定理 3 (1), (2) の証明において  $(\Rightarrow)$  の証明は高橋勝利氏 (北大・理) によるものである。また、定理 3 より次が得られる

系 2  $\mu$  を  $D$  上の測度で  $d\mu/dm = W$  とする。もし、ある  $\mathbb{C} \setminus \alpha$  外集合  $K \subset D$  が存在し、 $\log W$  が  $D \setminus K$  において局所可積分であれば  $L_a^p(\mu)$  は閉である。

### 参考文献

1. T. Nakazi and H. Yamada, Riesz's functions in weighted Hardy and Bergman spaces, in preprint.

# A REMARK ON LINEAR ISOMETRIES OF $\ell_p^{(n)}$ INTO $\ell_q^{(m)}$

NOLIO OKADA

Department of Mathematics, Science University of Tokyo

## §1. Introduction.

We denote by  $\ell_p^{(n)}$  ( $1 \leq p \leq \infty, n \in \mathbf{N}$ ),  $\mathbf{R}^n$  equipped with  $\ell_p$ -norm and by  $\ell_p^{(n)}(\mathbf{C})$  ( $1 \leq p \leq \infty, n \in \mathbf{N}$ ),  $\mathbf{C}^n$  equipped with  $\ell_p$ -norm.

We consider the following:

*For given  $1 \leq p, q \leq \infty, p \neq q, n \in \mathbf{N}$ , is there an  $m \in \mathbf{N}$  such that  $\ell_p^{(n)}$  (respectively  $\ell_p^{(n)}(\mathbf{C})$ ) is isometrically isomorphic to a subspace of  $\ell_q^{(m)}$  (respectively  $\ell_q^{(m)}(\mathbf{C})$ ), or is there a linear isometry  $T : \ell_p^{(n)} \rightarrow \ell_q^{(m)}$  (respectively  $T : \ell_p^{(n)}(\mathbf{C}) \rightarrow \ell_q^{(m)}(\mathbf{C})$ ) for some  $m \in \mathbf{N}$  ?*

The motivation to the above problem is stated as follows. In a book (Summing and Nuclear Norms in Banach Space Theory by G.J.O. Jameson), it is stated that  $H := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ell_\infty^{(4)} : \sum_{j=1}^4 x_j = 0\}$  is isometrically isomorphic to  $\ell_1^{(3)}$ . I was not able to construct a linear isometry  $T : \ell_1^{(3)} \rightarrow H$ . So I asked Professor T. Ito of Musashi Institute of Technology about it. He gave me an answer that the map  $T : \ell_1^{(3)} \rightarrow H$ , defined by

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$$

is a linear isometry, since we have

$$\sum_{j=1}^3 |x_j| = \max_{\theta_2, \theta_3 = \pm 1} |x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3|.$$

Moreover he stated that the map  $T : \ell_1^{(n)} \rightarrow \ell_\infty^{(2^n-1)}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ), defined by

$$(x_j)_{j=1}^n \mapsto (x_1 + \theta_k^{(2)} x_2 + \theta_k^{(3)} x_3 + \cdots + \theta_k^{(n)} x_n)_{1 \leq k \leq 2^n-1, \theta_k^{(j)} = \pm 1},$$

is a linear isometry, since we have

$$\sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{\theta_k^{(j)} = \pm 1} |x_1 + \theta_k^{(2)} x_2 + \theta_k^{(3)} x_3 + \cdots + \theta_k^{(n)} x_n|.$$

Later he announced me that the number  $2^n-1$  is the best possible, i.e.,

*If there is a linear isometry  $T : \ell_1^{(n)} \rightarrow \ell_\infty^{(k)}$ , then we have  $k \geq 2^n-1$ , and such isometries do not exist for complex scalars, i.e.,*

*For any  $m \in \mathbf{N}$ , there does not exist a linear isometry  $T : \ell_1^{(2)}(\mathbf{C}) \rightarrow \ell_\infty^{(m)}(\mathbf{C})$ .*

Therefore, it seems to be natural to reach the above problem. The results except the above are summarized as follows.

**Theorem A.** Let  $1 \leq p, q \leq \infty, (p, q) \neq (1, \infty), (\infty, 1), p \neq q, 2$ . Then there does not exist a linear isometry  $T : \ell_p^{(2)} \longrightarrow \ell_q^{(m)}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

**Theorem B.** Let  $q \geq 1, q \notin 2\mathbf{N}$ , then there does not exist a linear isometry  $T : \ell_2^{(2)} \longrightarrow \ell_q^{(m)}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

**Theorem C.** There does not exist a linear isometry  $T : \ell_\infty^{(3)} \longrightarrow \ell_1^{(m)}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

**Theorem D.**  $T : \ell_2^{(n)} \longrightarrow \ell_4^{(2^{n-1}+n)}$  ( $n-1 \in \mathbf{N}$ ), defined by

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \left( \frac{1}{(3 \cdot 2^{n-1})^{\frac{1}{4}}} (x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n), \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} x_1, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} x_2, \dots, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{4}} x_n \right)_{\theta_j = \pm 1}$$

is a linear isometry.

**Theorem E.** Let  $1 \leq p, q \leq \infty, p \neq q, 2$ . Then there does not exist a linear isometry  $T : \ell_p^{(2)}(\mathbf{C}) \longrightarrow \ell_q^{(m)}(\mathbf{C})$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

## §2. Proofs of main results.

First we show the following:

**Proposition 1.** If there is a linear isometry  $T : \ell_1^{(n)} \longrightarrow \ell_\infty^{(k)}$ , then we have  $k \geq 2^{n-1}$ .

Put  $E := \{x = (\theta_j)_{j=1}^n \in \ell_1^{(n)} : \theta_1 = 1, \theta_j = \pm 1 (2 \leq j \leq n)\}$ . Then the cardinality of  $E$ , denoted by  $\text{card } E = 2^{n-1}$ ,  $\|x\|_1 = n$  ( $x \in E$ ). The proposition is easily derived from the following:

**Lemma 1.** Let  $x, y \in E, x \neq y$ . Take  $t$  ( $1 \leq t \leq k$ ) such that  $\|Tx\|_\infty = |(Tx)_t| = n$ . Then we have  $\|Ty\|_\infty > |(Ty)_t|$ .

*Proof.* Suppose the conclusion does not hold, then we have  $\|Ty\|_\infty = |(Ty)_t| = n$ . Since  $x \neq y$ ,  $x + y = (\alpha_j)_{j=1}^n$  with  $\alpha_j = 0, \pm 2$  ( $1 \leq j \leq n$ ),  $\alpha_{j_0} = 0$  for some  $j_0$  ( $1 \leq j_0 \leq n$ ), so we have

$$\|T(x+y)\|_\infty = \|x+y\|_1 \leq 2(n-1).$$

Since the first coordinate of  $x-y$  is zero,  $\|T(x-y)\|_\infty = \|x-y\|_1 \leq 2(n-1)$ . Hence we have

$$\begin{aligned} 2n &= |(Tx)_t| + |(Ty)_t| = \max_{\pm} |(Tx)_t \pm (Ty)_t| \\ &= \max_{\pm} |(T(x \pm y))_t| \leq \max_{\pm} \|T(x \pm y)\|_\infty \leq 2(n-1), \end{aligned}$$

which is a contradiction.

Secondly we consider the following:

**Proposition 2.** For any  $m \in \mathbf{N}$ , there does not exist a linear isometry  $T : \ell_1^{(2)}(\mathbf{C}) \longrightarrow \ell_\infty^{(m)}(\mathbf{C})$ .

*Proof.* Suppose there is a linear isometry  $T : \ell_1^{(2)}(\mathbf{C}) \longrightarrow \ell_\infty^{(m)}(\mathbf{C})$  for some  $m \in \mathbf{N}$ . Put  $T(1, 0) = (\alpha_j)_{j=1}^m$ ,  $T(0, 1) = (\beta_j)_{j=1}^m$ . Then we have  $|\alpha_j|, |\beta_j| \leq 1$  ( $1 \leq j \leq m$ ). Take  $|z_0| = 1$  such that  $\arg z_0 \neq \arg \alpha_j - \arg \beta_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ). Then  $\|(1, z_0)\|_1 = 2$ , but we have

$$|T(1, z_0)_j| = |\alpha_j + \beta_j z_0| < |\alpha_j| + |\beta_j z_0| \leq 2 \quad (1 \leq j \leq m),$$

$\|T(1, z_0)\|_\infty < 2$ , which is a contradiction.

Now we consider linear isometries  $T : \ell_p^{(n)} \longrightarrow \ell_q^{(m)}$  ( $1 < p, q < \infty, p \neq q$ ). In order to prove our results, we prepare the following lemma which is checked by using Taylor's theorem.

**Lemma 2.** For  $a > 0, b \neq 0, \alpha > 0$  and for each integer  $j \geq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha-j-1}} \left\{ (ax+b)^\alpha - \sum_{k=0}^j \binom{\alpha}{k} (ax)^{\alpha-k} b^k \right\} = \binom{\alpha}{j+1} a^{\alpha-j-1} b^{j+1}.$$

**Theorem 1.** Let  $1 < p, q < \infty, p \neq q, 2$ . Then there does not exist a linear isometry  $T : \ell_p^{(2)} \rightarrow \ell_q^{(m)}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

*Proof.* Suppose the conclusion does not hold, then there are  $(a_j)_{j=1}^m, (b_j)_{j=1}^m \subset \mathbf{R}$  such that for all  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,

$$(|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p} = \left( \sum_{j=1}^m |a_j x_1 + b_j x_2|^q \right)^{1/q}.$$

We may suppose  $a_j > 0$  ( $1 \leq j \leq m_0$ ),  $= 0$  ( $m_0 < j \leq m$ ). So  $\sum_{j=1}^{m_0} a_j^q = \sum_{j=1}^m |b_j|^q = 1$ . Then for large  $x > 0$ , we have

$$(x^p + 1)^{q/p} = \sum_{j=1}^{m_0} (a_j x + b_j)^q + \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q.$$

We may assume  $\sum_{j=1}^{m_0} |b_j| \neq 0$ . By Lemma 2, we have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-p}} \{(x^p + 1)^{q/p} - x^q\} = \frac{q}{p},$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_0} q a_j^{q-1} b_j &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-1}} \left[ \sum_{j=1}^{m_0} \{(a_j x + b_j)^q - (a_j x)^q\} + \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{1}{x^{q-p}} \{(x^p + 1)^{q/p} - x^q\} = 0. \end{aligned}$$

Moreover by Lemma 2, we have

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-2}} \left\{ \sum_{j=1}^{m_0} (a_j x + b_j)^q - x^q \right\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-2}} \sum_{j=1}^{m_0} \{(a_j x + b_j)^q - (a_j x)^q - q(a_j x)^{q-1} b_j\} \\ &= \sum_{j=1}^{m_0} \binom{q}{2} a_j^{q-2} b_j^2 > 0. \end{aligned}$$

Then we get

$$\begin{aligned} \frac{q}{p} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-p}} \{(x^p + 1)^{q/p} - x^q\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{x^{2-p}} \cdot \frac{1}{x^{q-2}} \left\{ \sum_{j=1}^{m_0} (a_j x + b_j)^q - x^q \right\} + \frac{1}{x^{q-p}} \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q \right] \\ &= \begin{cases} 0, & \{1 < p < 2, p < q\} \text{ or } \{1 < p < 2, p > q, m = m_0\}, \\ \infty, & \{1 < p < 2, p > q, m > m_0\} \text{ or } \{p > 2\}, \end{cases} \end{aligned}$$

which is a contradiction. Therefore the theorem is proved.

For the case  $p = 2$ , we need two lemmas which are shown by induction and Lemma 2.

**Lemma 3.** Let  $q > 1, q \notin \mathbf{N}, m_0, m \in \mathbf{N} (m_0 \leq m), a_j > 0 (1 \leq j \leq m_0), b_j \in \mathbf{R} (1 \leq j \leq m)$  such that  $\sum_{j=1}^{m_0} a_j^q = \sum_{j=1}^m |b_j|^q = 1$ . Assume that for large  $x > 0$ , we have

$$(x^2 + 1)^{q/2} = \sum_{j=1}^{m_0} (a_j x + b_j)^q + \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q.$$

Then the following equations hold:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m_0} a_j^{q-l} b_j^l = 0 & (l \geq 1, \text{odd}) \\ \sum_{j=1}^{m_0} \binom{q}{l} a_j^{q-l} b_j^l = \binom{\frac{q}{2}}{\frac{l}{2}} & (l \geq 0, \text{even}) \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q = 0.$$

**Lemma 4.** Let  $q = 2s + 1 (s \in \mathbf{N})$ . Assume that for some  $m_0, m \in \mathbf{N} (m_0 \leq m), a_j > 0 (1 \leq j \leq m_0), b_j \in \mathbf{R} (1 \leq j \leq m)$  such that  $\sum_{j=1}^{m_0} a_j^q = \sum_{j=1}^m |b_j|^q = 1$ , we have

$$(x^2 + 1)^{q/2} = \sum_{j=1}^{m_0} (a_j x + b_j)^q + \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q$$

for large  $x > 0$ . Then the following equations hold:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m_0} a_j^{q-l} b_j^l = 0 & (1 \leq l \leq 2s - 1, \text{odd}) \\ \sum_{j=1}^{m_0} \binom{q}{l} a_j^{q-l} b_j^l = \binom{\frac{q}{2}}{\frac{l}{2}} & (0 \leq l \leq 2s + 2, \text{even}) \end{cases}$$

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{m_0} b_j^q + \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q = 0.$$

**Theorem 2.** Let  $q > 1, q \notin 2\mathbf{N}$ , then there does not exist a linear isometry  $T : \ell_2^{(2)} \rightarrow \ell_q^{(m)}$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

*Proof.* Suppose the conclusion does not hold, then there are  $(a_j)_{j=1}^m, (b_j)_{j=1}^m \subset \mathbf{R}$  such that for all  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,

$$(|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^m |a_j x_1 + b_j x_2|^q \right)^{1/q}.$$

We may suppose  $a_j > 0$  ( $1 \leq j \leq m_0$ ),  $= 0$  ( $m_0 < j \leq m$ ). So  $\sum_{j=1}^{m_0} a_j^q = \sum_{j=1}^m |b_j|^q = 1$ . Then for large  $x > 0$ , we have

$$(x^2 + 1)^{q/2} = \sum_{j=1}^{m_0} (a_j x + b_j)^q + \sum_{j=m_0+1}^m |b_j|^q.$$

We may assume  $\sum_{j=1}^{m_0} |b_j| \neq 0$ . For  $s \in \mathbf{N}$ , we consider two cases  $2s - 1 < q < 2s$  and  $2s < q \leq 2s + 1$ . In Lemmas 3, 4, we put  $l := 2s + 2$ , then we get

$$\binom{q}{2s+2} \sum_{j=1}^{m_0} a_j^{q-2s-2} b_j^{2s+2} = \binom{\frac{q}{2}}{s+1}.$$

In the case of  $2s - 1 < q < 2s$ , we have

$$\binom{q}{2s+2} = \frac{1}{(2s+2)!} q(q-1) \cdots (q-2s+1)(q-2s)(q-2s-1) > 0,$$

$$\binom{\frac{q}{2}}{s+1} = \frac{1}{(s+1)!} \frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{q}{2} - s + 1\right) \left(\frac{q}{2} - s\right) < 0.$$

In the case of  $2s < q \leq 2s + 1$ , we have

$$\binom{q}{2s+2} = \frac{1}{(2s+2)!} q(q-1) \cdots (q-2s)(q-2s-1) \leq 0,$$

$$\binom{\frac{q}{2}}{s+1} = \frac{1}{(s+1)!} \frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{q}{2} - s\right) > 0.$$

Hence, in the each case we get a contradiction. Therefore the theorem is proved.

Now we consider the complex case. For  $a > 0, b (\neq 0) \in \mathbf{C}, \alpha \in \mathbf{R}$ , we consider the real variable function  $f(x) := |a + bx|^\alpha$ . Then direct calculations show that

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha |a + bx|^{\alpha-2} (|b|^2 x + a \operatorname{Re} b) \\ &= \alpha |a + bx|^{\alpha} \operatorname{Re} \left( \frac{b}{a + bx} \right) \\ &= \alpha f(x) \frac{|b|^2 x + a \operatorname{Re} b}{|b|^2 x^2 + 2ax \operatorname{Re} b + a^2}, \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (|a + bh|^\alpha - a^\alpha) = f'(0) = \alpha a^{\alpha-1} \operatorname{Re} b.$$

The following proposition which we state without a proof is shown by using Taylor's theorem and Leibniz rule.

**Proposition 3.** *Let  $a > 0, b (\neq 0) \in \mathbf{C}, \alpha > 0$ , then we have for each integers  $j \geq 0$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{j+1}} \left( |a + bh|^\alpha - \sum_{k=0}^j a^{\alpha-k} c_k h^k \right) = a^{\alpha-j-1} c_{j+1},$$

where

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \alpha \operatorname{Re} b, \quad c_2 = \frac{\alpha}{2} \{(\alpha - 1)(\operatorname{Re} b)^2 + (\operatorname{Im} b)^2\},$$

$$(k+1)c_{k+1} = (\alpha - 2k) \operatorname{Re} b c_k + (\alpha - k + 1) |b|^2 c_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

By Proposition 3, we easily get the following:

**Lemma 5.** For  $a > 0, b (\neq 0) \in \mathbf{C}, \alpha > 0$  and for each integer  $j \geq 0$ , we have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha-j-1}} \left\{ |ax + b|^\alpha - \sum_{k=0}^j (ax)^{\alpha-k} c_k \right\} = a^{\alpha-j-1} c_{j+1},$$

where

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \alpha \operatorname{Re} b, \quad c_2 = \frac{\alpha}{2} \{(\alpha-1)(\operatorname{Re} b)^2 + (\operatorname{Im} b)^2\},$$

$$(k+1)c_{k+1} = (\alpha-2k)\operatorname{Re} b c_k + (\alpha-k+1)|b|^2 c_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

By the almost same methods as in the real case with Lemma 5, we get the following:

**Theorem 3.** Let  $1 < p, q < \infty, p \neq q, 2$ . Then there does not exist a linear isometry  $T : \ell_p^{(2)}(\mathbf{C}) \longrightarrow \ell_q^{(m)}(\mathbf{C})$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

§3. Some concrete linear isometries.

(1)  $\ell_2^{(2)}$  is not isometric to  $\ell_4^{(2)}$ , but  $T : \ell_2^{(2)} \longrightarrow \ell_4^{(3)}$ , defined by

$$(x_1, x_2) \longmapsto \left( \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} x_1 + \frac{1}{(18)^{\frac{1}{4}}} x_2, \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} x_1 - \frac{1}{(18)^{\frac{1}{4}}} x_2, \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{4}} x_2 \right)$$

is a linear isometry.

(2)  $T : \ell_2^{(2)} \longrightarrow \ell_6^{(4)}$ , defined by

$$(x_1, x_2) \longmapsto \left( \frac{1}{(10)^{\frac{1}{6}}} (x_1 + x_2), \frac{1}{(10)^{\frac{1}{6}}} (x_1 - x_2), \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{6}} x_1, \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{6}} x_2 \right)$$

is a linear isometry.

(3)  $T : \ell_2^{(2)} \longrightarrow \ell_8^{(6)}$ , defined by

$$(x_1, x_2) \longmapsto (a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 x_1 - a_2 x_2, a_2 x_1 + a_1 x_2, a_2 x_1 - a_1 x_2, a_3 x_1, a_3 x_2),$$

where  $a_1 = 3^{\frac{1}{2}}/(420)^{\frac{1}{8}}, a_2 = 1/(420)^{\frac{1}{8}}, a_3 = 2/(420)^{\frac{1}{8}}$ , is a linear isometry.

(4)  $T : \ell_2^{(2)} \longrightarrow \ell_{10}^{(6)}$ , defined by

$$(x_1, x_2) \longmapsto (a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 x_1 - a_2 x_2, a_2 x_1 + a_1 x_2, a_2 x_1 - a_1 x_2, a_3 x_1, a_3 x_2),$$

where  $a_1 = 1/(1512)^{\frac{1}{10}}, a_2 = 3^{\frac{1}{2}}/(1512)^{\frac{1}{10}}, a_3 = 2/(1512)^{\frac{1}{10}}$ , is a linear isometry.

(5)  $T : \ell_2^{(3)} \longrightarrow \ell_8^{(19)}$ , defined by

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (a_1(x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3), a_2 x_j + a_3 x_k, a_2 x_j - a_3 x_k, a_4 x_1, \\ a_4 x_2, a_4 x_3)_{1 \leq j, k \leq 3, j \neq k, \theta_j = \pm 1},$$

where  $a_1 = 1/(140)^{\frac{1}{8}}, a_2 = \{(18)^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}/(560)^{\frac{1}{8}}, a_3 = \{(18)^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}/(560)^{\frac{1}{8}}, a_4 = (6/35)^{\frac{1}{8}}$ , is a linear isometry.

(6)  $T : \ell_2^{(2)}(\mathbf{C}) \longrightarrow \ell_4^{(4)}(\mathbf{C})$ , defined by

$$(z_1, z_2) \longmapsto (a_1 z_1 + a_2 z_2, a_1 z_1 - a_2 z_2, a_2 z_1 + i a_1 z_2, a_2 z_1 - i a_1 z_2),$$

where  $a_1 = (3^{\frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{2}}/2, a_2 = (3^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}}/2$ , is a linear isometry.

# 可換 Banach 環キャリア空間上の関数族について

北大・理 井上純治  
山形大・工 高橋真映

## 1 序

以下は R.Doss による次の定理によって inspire されたものである。

Theorem D([1, Theorem 2]). Let  $G$  be a LCA group and  $\hat{G}$  its dual group. Then a continuous function  $\sigma$  on  $G$  is the Fourier-Stieltjes transform of an absolutely continuous measure if and only if, whenever  $\epsilon > 0$ , there is a compact set  $K$  and  $\delta > 0$  such that, for any trigonometric polynomial  $p = \sum c_i \gamma_i$ , the relation  $\|p\|_\infty \leq 1, \int_K |p(x)| dx < \delta$  imply  $|\sum c_i \sigma(\gamma_i)| < \epsilon$ .

$A$  をキャリア空間  $\Phi_A$  を持つ可換 Banach 環、 $\text{span}(\Phi_A)$  を  $A$  の共役空間  $A^*$  の中での  $\Phi_A$  の線形包とする。  $\text{span}(\Phi_A)$  の部分集合族  $Q = Q(A)$  が次の条件を満たすとき、擬位相 (quasi-topology) と名付けよう：

- (1)  $0 \in U (\forall U \in Q)$ .
- (2)  $\forall U, V \in Q, \exists W \in Q: W \subseteq U \cap V$ .

互いに細分になっている擬位相は同一視する。従って細分によって擬位相の族に自然に順序が入る。

今、 $\Phi_A$  上の複素数値連続関数  $\sigma$  が条件

$$\forall \epsilon > 0, \exists U \in Q: |\sum_{i=1}^n c_i \sigma(\varphi_i)| < \epsilon \quad (\forall p = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \in U)$$

をみたすとき、 $Q$ -連続と呼び、そのようなものの全体を  $C(\Phi_A; Q)$  で表すことにする。このとき、 $C(\Phi_A; Q)$  は自然な意味で線形空間を作る。勿論

$$Q \leq Q' \Rightarrow C(\Phi_A; Q) \subseteq C(\Phi_A; Q')$$

が成り立つ

今  $A$  の共役空間  $A^*$  の弱位相の  $\text{span}(\Phi_A)$  への制限による原点の近傍族を  $Q_0 = Q_0(A)$  とする。勿論  $Q_0$  は集合族

$$U(x_1, \dots, x_n; \epsilon) = \{p \in \text{span}(\Phi_A) : |p(x_i)| < \epsilon \quad (i = 1, \dots, n)\}, \\ (x_1, \dots, x_n \in A, n = 1, 2, \dots, \epsilon > 0)$$

と同値であり  $\text{span}(\Phi_A)$  上の擬位相である。

## 2 擬位相についてのいくつかの結果

さて、各  $x \in A$  に対して、 $\hat{x}$  でその Gelfand 変換を表すことにし、  
 $\hat{A} = \{\hat{x} : x \in A\}$  とおけば、次の結果を得る。

Theorem 1. (i) If  $Q$  is a quasi-topology on  $\text{span}(\Phi_A)$  such that  $\hat{A} \subseteq C(\Phi_A; Q)$ ,  
then  $Q_0 \leq Q$ .

(ii)  $\hat{A} = C(\Phi_A; Q_0)$ .

Proof. (i) Let  $Q$  be a quasi-topology on  $\text{span}(\Phi_A)$  such that  $\hat{A} \subseteq C(\Phi_A; Q)$ .  
Suppose that  $Q_0 \not\leq Q$ . Then there exists  $U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0) \in Q_0$  such that

$$V \not\subseteq U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0) \quad (1)$$

for every  $V \in Q$ . Since each  $\hat{x}_i$  is  $Q$ -continuous by hypothesis, we can find a quasi-  
neighbourhood  $V_i \in Q (i = 1, \dots, n)$  such that

$$|p(x_i)| < \epsilon_0 \quad (2)$$

for all  $p \in V_i$ . Then take a quasi-neighbourhood  $V_0 \in Q$  such that  $V_0 \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_n$ .  
By (1), we can find an element  $p_0 \in V_0 \setminus U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0)$ . Then  $|p_0(x_i)| \geq \epsilon_0$  for  
some  $x_i$  because  $p_0 \notin U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0)$ . But since  $p_0 \in V_0 \subseteq V_i$ , we have  $|p_0(x_i)| < \epsilon_0$ ,  
a contradiction.

(ii) For each  $x \in A$ , set  $\tilde{x}(p) = p(x) (\forall p \in \text{span}(\Phi_A))$ . Then  $\tilde{A} = \{\tilde{x} : x \in A\}$   
is a linear subspace of  $(\text{span}(\Phi_A))'$ , the linear space consisting of linear functionals  
on  $\text{span}(\Phi_A)$ . Also  $\tilde{A}$  separates the linear functionals in  $\text{span}(\Phi_A)$ . Therefore we  
see that  $\tilde{A}$  coincides with the set of those linear functionals on  $\text{span}(\Phi_A)$  which are  
continuous for the  $\tilde{A}$ -topology (cf. [2, p.62, 3.10]). Let  $\sigma$  be a complex-valued function  
on  $\Phi_A$ . For any element  $p = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$  of  $\text{span}(\Phi_A)$ , set  $\tilde{\sigma}(p) = \sum_{i=1}^n c_i \sigma(\varphi_i)$ . Then  
 $\tilde{\sigma}$  is a linear functional on  $\text{span}(\Phi_A)$ . If  $\sigma \in C(\Phi_A; Q_0)$ , then  $\tilde{\sigma}$  is continuous for the  
 $\tilde{A}$ -topology and hence we can find an element  $x$  of  $A$  such that  $\tilde{\sigma} = \tilde{x}$ , so  $\sigma = \hat{x}$ .  
Conversely, we can easily see that every  $\hat{x} (x \in A)$  is  $Q_0$ -continuous on  $\text{span}(\Phi_A)$ .  
Q.E.D.

上の定理は  $Q_0$  が  $\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$  を満たす擬位相の中で最小のものであること  
を主張している。従ってもし、 $\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$  を満たす  $Q_0$  より真に強い擬位相が  
見つければ、それは Theorem 1-(ii) をより精密にするといえる。このような観点から  
眺めると、Theorem D は無限次元群環は常に精密化できることを主張している。  
実際、 $\Phi_{L^1(G)} = \hat{G}$  と考え、 $G$  のコンパクト部分集合  $K$  及び正数  $\epsilon > 0$  に対して、

$$U_{K, \epsilon} = \{p \in \text{span}(\hat{G}) : \|p\|_\infty \leq 1, \int_K |p(x)| dx < \epsilon\}$$

と定義し、 $Q_c = Q_c(L^1(G))$  をそのような  $U_{K, \epsilon}$  のすべての族とすれば、明らかに  $Q_c$   
は  $\text{span}(\hat{G})$  上の擬位相となり、Theorem D は

$$(L^1(G)) = C(\Phi_A; Q_c)$$

が成り立つことを主張している。また一般に  $Q_0(L^1(G)) \leq Q_c(L^1(G))$  であるが、次の補題から、

$$\#(G) = \infty \Leftrightarrow Q_0(L^1(G)) < Q_c(L^1(G))$$

が成り立つことがわかる。

今  $Q_1 = Q_1(A)$  を  $A^*$  のノルム位相から導かれた擬位相とする。勿論

$$Q_0 \leq Q_1 \text{ and } Q_1 = \{U_\epsilon\}_{\epsilon>0} \quad (U_\epsilon = \{p \in \text{span}(\Phi_A) : \|p\|_{A^*} < \epsilon\})$$

である。

Lemma 2. The following three conditions are equivalent:

- (i)  $\#\Phi_A < \infty$ .
- (ii)  $\exists U \in Q_0 : \|p\|_{A^*} \leq 1 \ (\forall p \in U)$ .
- (iii)  $Q_0 = Q_1$ .

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suppose that  $\#\Phi_A = n < \infty$  and  $\Phi_A = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Since the hull-kernel topology on  $\Phi_A$  is a  $T_1$ -topology, for any  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), we have  $\bigcap_{j=1, j \neq i}^n \text{Ker} \varphi_j \not\subset \text{Ker} \varphi_i$  and so there is an element  $x_i \in A$  such that  $\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$ . Then

$$p = p(x_1)\varphi_1 + \dots + p(x_n)\varphi_n$$

for every  $p \in \text{span}(\Phi_A)$ . Put  $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_i\|_{A^*}$  and consider a quasi-neighbourhood  $U(x_1, \dots, x_n; 1/(nM))$  in  $Q_0$ . Then a simple computation implies  $\|p\|_{A^*} \leq 1$  for any  $p \in U(x_1, \dots, x_n; 1/(nM))$ .

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Straightforward.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Assume that there is a quasi-neighbourhood  $U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0)$  in  $Q_0$  such that  $\|p\|_{A^*} \leq 1$  for every  $p \in U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0)$ . Then we have to show that  $\#\Phi_A < \infty$ . Suppose not. Then we can take mutually distinct points  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$  in  $\Phi_A$ . Then there is a non-trivial vector  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in C^{n+1}$  that

$$a_1\varphi_1(x_i) + \dots + a_{n+1}\varphi_{n+1}(x_i) = 0$$

for all  $i = 1, \dots, n$ . We can without loss of generality that  $a_1 \neq 0$ . As observed in the proof of (i) $\Rightarrow$ (ii), we can choose an element  $e \in A$  such that

$$\|e\| = 1, \varphi_1(e) \neq 0, \quad \text{and} \quad \varphi_2(e) = \dots = \varphi_{n+1}(e) = 0.$$

Let  $c_i = \frac{2a_i}{a_1\varphi_1(e)}$  for each  $i = 1, \dots, n+1$  and set  $p_0 = c_1\varphi_1 + \dots + c_{n+1}\varphi_{n+1}$ . Then  $p_0(x_i) = 0$  for all  $i = 1, \dots, n$  and so  $p_0 \in U(x_1, \dots, x_n; \epsilon_0)$ , hence  $\|p_0\|_{A^*} \leq 1$  by hypothesis. However we have  $\|p_0\|_{A^*} \geq |p_0(e)| = |c_1\varphi_1(e)| = 2$ , a contradiction. Q.E.D.

可換  $C^*$  環についても R.Doss の定理と類似のことがいえる。 $\Omega$  を局所コンパクト Hausdorff 空間、 $C_0(\Omega)$  を無限遠点でゼロとなる  $\Omega$  上の連続関数環とする。また、

$$\Phi_{C_0(\Omega)} = \Omega, (C_0(\Omega))^* = M(\Omega), \text{ the measure space on } \Omega$$

と考える。今、 $\Omega$  のコンパクト部分集合  $K$  及び正数  $\epsilon$  に対して、

$$V_{K,\epsilon} = \{p \in \text{span}(\Omega) : \|p\| \leq 1, \int_K d|p| < \epsilon\}$$

と定義し、 $Q_c = Q_c(C_0(\Omega))$  をそのような  $V_{K,\epsilon}$  のすべての族とする。ただし  $|p|$  は測度  $p$  の全変動を表す。このとき明らかに  $Q_c$  は  $\text{span}(\Omega)$  上の擬位相となり次の定理が成り立つ。

Theorem 3.  $C_0(\Omega) = C(\Phi_A; Q_c)$  .

Proof. Let  $0 \neq f \in C_0(\Omega)$  and  $\epsilon > 0$ . Set  $K = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \leq \epsilon/2\}$ . Then  $K$  is compact. Also set  $\delta = \frac{\epsilon}{2\|f\|_\infty}$  and let  $p$  be any element of  $V_{K,\delta}$ . Then  $p = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{\omega_i}$ , for some  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}, \omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ . Note that  $|p| = \sum_{i=1}^n |c_i| \delta_{\omega_i}$ . Therefore

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n c_i f(\omega_i) \right| &\leq \left| \sum_{\omega_i \in K} c_i f(\omega_i) \right| + \left| \sum_{\omega_i \notin K} c_i f(\omega_i) \right| \\ &\leq \sum_{\omega_i \in K} |c_i| \|f(\omega_i)\| + \sum_{\omega_i \notin K} |c_i| \|f(\omega_i)\| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{\omega_i \in K} |c_i| + \frac{\epsilon}{2} \sum_{\omega_i \notin K} |c_i| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_K d|p| + \frac{\epsilon}{2} \|p\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Consequently,  $f \in C(\Omega; Q_c)$ .

Conversely, let  $f \in C(\Omega; Q_c)$  and  $\epsilon > 0$ . Then there exists a compact subset  $K$  and  $\delta > 0$  such that  $|\sum_{i=1}^n c_i f(\omega_i)| < \epsilon/2$  for all  $p = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{\omega_i} \in V_{K,\delta}$ . Set  $K_\epsilon = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ . Then  $K_\epsilon \subseteq K$ . Actually, if not, then there is an element  $\omega \in K_\epsilon \setminus K$ . Since  $\omega \in K_\epsilon$ , we have  $|f(\omega)| \geq \epsilon$ . But since  $\omega \notin K$  and  $\|\delta_\omega\| = 1$ , it follows that  $\int_K d|\delta_\omega| = 0 (< \delta)$  and hence  $\delta_\omega \in V_{K,\delta}$ , so  $|f(\omega)| < \epsilon/2$ , a contradiction. Therefore  $K_\epsilon$  must be compact and so  $f \in C_0(\Omega)$ . Q.E.D.

### 3 測度環の $L$ -subspace と擬位相

我々が、擬位相の概念を考えた由来は、冒頭に挙げた R.Doss の定理にあるが、この定理はただちに次のように一般化される。この証明には R.Doss[1], Theorem 2 の証明をほとんど変更なく利用できる。

Lemma 4. Let  $G$  be a LCA group and  $\hat{G}$  its dual group. We denote by  $M(G)$  the measure algebra of  $G$ , and suppose  $\mu$  is a non-zero positive measure in  $M(G)$ . Then a continuous function  $\sigma$  on  $\hat{G}$  is the Fourier-Stieltjes transform of a measure which is absolutely continuous w.r.t.  $\mu$  if and only if, whenever  $\epsilon > 0$ , there is a compact set  $K$  and  $\delta > 0$  such that, for any trigonometric polynomial  $p = \sum c_i \gamma_i$  the relation  $\|p\|_\infty \leq 1, \int_K |p(x)| d\mu(x) < \delta$  imply  $|\sum c_i \sigma(\gamma_i)| < \epsilon$ .

測度環の  $L$ -subspace と擬位相の関係を述べるため、必要な定義を述べておく。

定義 1.  $M(G)$  の closed subspace  $M$  で、 $\mu \in M, \nu \in M(G)$  かつ、 $\nu \ll |\mu|$  なら、 $\nu \in M$  であるものを  $M(G)$  の  $L$ -subspace とよぶ。

定義 2.  $Q$  を  $\text{span } \hat{G}$  の擬位相とする。

$Q$  が  $L$ -type  $\Leftrightarrow$  (i)  $U \subseteq \{p \in \text{span } \hat{G} : \|p\|_\infty \leq 1\}$ . ( $\forall U \in Q$ )  
(ii)  $\forall U \in Q, \exists \delta > 0 : \{p \in \text{span } \hat{G} : \|p\|_\infty \leq \delta\} \subseteq U$ . (i.e.  $Q \leq Q_1$ )

$Q$  が translation invariant  $\Leftrightarrow Q'_\gamma = \{\gamma V : V \in Q\}$  is a quasi-topology equivalent to  $Q$  for each  $\gamma \in \hat{G}$ , where  $\gamma V = \{\sum c_i(\gamma_i + \gamma) : \sum c_i \gamma_i \in V\}$ .

次の Theorem 5. は Lemma 4. より直ちに証明できる。

Theorem 5. Let  $M$  be a non-zero  $L$ -subspace of  $M(G)$ . Put  $Q_M$  be the set of all  $U(K, \mu, \epsilon) = \{p \in \text{span } \hat{G} : \|p\|_\infty \leq 1, \int_K |p| d\mu < \epsilon\}$  with  $K$  a compact set of  $G$ ,  $\mu \in M^+, \epsilon > 0$ . Then, we have

- (i)  $Q_M$  is a quasi-topology which is of  $L$ -type and translation invariant.
- (ii)  $\hat{M} = C(\hat{G}; Q_M)$

Theorem 6. Let  $G$  be a LCA group and  $\hat{G}$  be its dual group. Suppose that  $Q$  is a quasi-topology in  $\text{span } \hat{G}$  such that  $Q$  is of  $L$ -type and translation invariant. Then there exists an  $L$ -subspace  $M$  of  $M(G)$  such that  $\hat{M} = C(\hat{G}; Q)$ .

Proof. First, we show that each element of  $C(\hat{G}; Q)$  is a Fourier-Stieltjes transform of some  $\nu \in M(G)$ .

Let  $\sigma \in C(\hat{G}; Q)$ . Then there exists  $U \in Q$  such that  $p = \sum c_i \gamma_i \in U$  implies  $|\sum c_i \sigma(\gamma_i)| \leq 1$ . Since  $Q$  is of  $L$ -type, there exists  $\delta > 0$  such that  $U \supseteq \{p \in \text{span } \hat{G} : \|p\|_\infty \leq \delta\}$ . Then for each non-zero  $p = \sum c_i \gamma_i \in \text{span } \hat{G}$  we have  $\delta p \|p\|_\infty \in U$ , and hence  $\delta |\sum c_i \sigma(\gamma_i)| \|p\|_\infty \leq 1$ , that is  $|\sum c_i \sigma(\gamma_i)| \leq \|p\|_\infty / \delta$ , which implies  $\sigma \in M(\hat{G})$  by Bochner-Schoenberg-Eberlein theorem.

Next, we put  $M := \{\nu : \hat{\nu} \in C(\hat{G}; Q)\}$ , and show that  $M$  is a closed subspace of  $M(G)$ . To show that  $M$  is a subspace is easy. Let  $\nu$  be in the norm closure of  $M$  and let  $\epsilon > 0$ . Then there exists  $\mu \in M$  such that  $\|\mu - \nu\| \leq \epsilon/2$ . Choose  $U \in Q$  such that  $p = \sum c_i \gamma_i \in U$  implies  $|\sum c_i \hat{\mu}(\gamma_i)| \leq \epsilon/2$ . Then  $p = \sum c_i \gamma_i \in U$  implies

$$|\sum c_i \hat{\nu}(\gamma_i)| \leq |\sum (\hat{\nu} - \hat{\mu})(\gamma_i)| + |\sum c_i \hat{\mu}(\gamma_i)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Thus we get  $\nu \in M$ .

Finally, we show that if  $\mu \in M^+$  and if  $\nu \in M(G)$  is absolutely continuous w.r.t.  $\mu$ , we have  $\nu \in M$ . Since  $Q$  is translation invariant, we have  $\gamma \mu \in M$  for each  $\gamma \in \hat{G}$ , and hence  $p \mu \in M$  for each trigonometric polynomial  $p$ .

Let  $C_{00}(G)$  be the space of continuous functions with compact support on  $G$ , and let  $g \in C_{00}(G)$  and  $\epsilon > 0$  arbitrary. Then we can choose a trigonometric polynomial  $p_\epsilon$  such that  $\int |g - p_\epsilon| d\mu < \epsilon$  (some argument is necessary to reduce this fact, but here we omit them.) This implies by the above arguments that  $g \mu \in M$ . Since  $C_{00}(G)$  is dense in  $L^1(G, \mu)$ , we have  $f \mu \in M$  for each  $f \in L^1(G, \mu)$ . If we take the Radon-Nykodym derivative  $\frac{d\nu}{d\mu}$  as  $f$ , we obtain  $\nu \in M$  as desired. QED.

## 4 問題

可換 Banach 環  $A$  上の乗作用素  $T$  の Gelfand 変換  $\hat{T}$  の全体を  $\hat{M}(A)$  とするとき、 $\hat{M}(A) = C(\Phi_A; Q_1)$  となるような  $A$  を BSE-環と呼ぶ。群環、円板環、ハーディ環、可換  $C^*$ -環等は皆 BSE-環である (cf.[3])。特に単位的 BSE-環は  $\hat{A} = C(\Phi_A; Q_1)$  となる。従って  $\Omega$  がコンパクトのときは、 $C(\Omega) = C(\Phi_A; Q_1)$  となるが、他方  $Q_c = Q_1$  が成り立つので、Theorem 3 と一致する。然しながら局所コンパクト可換群  $G$  が離散的であれば、 $(L^1(G))^\wedge = C(\hat{G}; Q_1)$  であるにもかかわらず、 $Q_c < Q_1$  であることが容易に示される。それ故に次の様な問題が自然に提起される。

問題 1. Theorem D をもつと精密化できるか？

更に単位的 BSE-環他にも  $\hat{A} = C(\Phi_A; Q_1)$  を満たす可換 Banach 環は沢山ある。実際、可換  $H^*$  環、コンパクト可換群上の  $L^p$ -環 ( $1 < p < \infty$ )、任意の集合上の  $l^1$ -環、半群  $N_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$  上の半群環などがそうである (cf.[4])。従って、

問題 2. 上記の可換 Banach 環  $A$  に対して成り立つ等式  $\hat{A} = C(\Phi_A; Q_1)$  をもつと精密化できるか？

最後に、

問題 3. 任意の可換 Banach 環  $A$  に対して、 $\hat{A} = C(\Phi_A; Q)$  を満たす最大の擬位相が存在するか？もし、存在すればそれは何か？

## References

1. R.Doss, On the Fourier-Stieltjes transforms of singular or absolutely continuous measures, Math. Zeitschr., 97(1967) 77-84.
2. W.Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.
3. S-E.Takahasi and O.Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein type theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 110(1990) 149-158.
4. S.-E.Takahasi and O.Hatori, Commutative Banach algebras and BSE-inequalities, Math. Japonica 37(1992) 607-614.

1. はじめに

自然界には, 雪の結晶・プランクトンなど対称性のある美しい構造をもつものが多く存在している. どのような原理によって対称性をもつ現象はおこるのであろうか. この解明のために, 群の作用に関して同変なモデル方程式において安定解は方程式と同じ対称性をもつか調べることは興味深いことである. これまでに, コンパクト連結群の作用している強順序保存力学系においては安定解は対称性をもつことが証明されている. この研究は, 非線形偏微分方程式について示した Matano [6]の論文にはじまる. その後, Mierczyński と Poláčik [7]が連続力学系に対し, そして, Takáč [8]が離散力学系に対して一般論にまとめた. 本講演では, これらの理論をさらに一般化するとともに, これまで個別に議論されていた曲面の発展方程式の安定平衡解および二種競争系の安定な進行波解の対称性に対する応用を与える.

本研究は, 東京大学の俣野 博教授との共同研究である.

2. 主結果

$X$  は順序完備距離空間, すなわち, (閉) 半順序構造 ( $\leq$ ) をもつ完備距離空間とする.  $X$  の任意の元  $u, v$  に対し, これらの最大下界  $u \wedge v$  が存在して, 写像  $(u, v) \mapsto u \wedge v : X \times X \rightarrow X$  は連続であると仮定する.  $X$  の距離を  $d$  で表し,  $u \leq v$  かつ  $u \neq v$  を  $u < v$  と表す.

$T$  は仮定 (T1)–(T3) をみたく  $D(T) \subset X$  から  $X$  への写像とする.

(T1) 順序保存性 ( $u \leq v \Rightarrow Tu \leq Tv$ ).

(T2) 上半連続性 (収束列  $u_n \rightarrow u_\infty$  に対し,  $w \leq T(u_\infty), \forall w \in \overline{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{Tu_n \mid n \geq k\}}$  が成立).

(T3) 有界で単調減少な軌道 ( $T^{n+1}u \leq T^n u$  をみたく有界列  $\{T^n u\}$ ) は相対コンパクト.

$G$  は  $X$  の元に作用する距離付け可能な位相群とする. 写像  $\gamma : G \times X \rightarrow X$  が  $X$  上の群  $G$  の作用であるとは,  $\gamma$  が連続で  $g \mapsto \gamma(g, \cdot)$  が  $G$  から  $Hom(X)$  への準同型写像であることである. ここで,  $Hom(X)$  は  $X$  から  $X$  への同相写像全体の集合を意味する. 記号を簡略化するために,  $\gamma(g, u) = gu$ , また,  $\gamma(g, \cdot) = g$  と書く. 群  $G$  に次の仮定をおく.

(G1) 順序保存性 ( $u \leq v \Rightarrow gu \leq gv, \forall g \in G$ ).

(G2) 写像  $T$  との可換性 ( $gTu = T(gu), \forall g \in G, \forall u \in D(T)$ ).

(G3) 群  $G$  は連結である.

$T$  の不動点  $u$  が性質 (E) をもつとは,

(E)  $T$  の不動点  $v < u$  に対し, ある  $\delta > 0$  が存在して  $gv < u, \forall g \in B_\delta(e)$  が成り立つことである. ただし,  $B_\delta(e)$  は  $G$  の単位元  $e$  の  $\delta$ -近傍を表すものとする. また,  $X$  の元  $u$  が

$$gu = u, \quad \forall g \in G$$

をみたすときに,  $u$  は対称性をもつという.

定義. (i)  $T$  の不動点  $u$  が下方安定であるとは, 任意の  $\epsilon > 0$  に対しある  $\delta > 0$  が存在して,  $d(u, v) < \delta, v < u$  をみたす任意の  $v \in X$  に対し  $d(u, T^n v) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$  が成り立つことである.

(ii)  $T$  の不動点  $u$  が安定であるとは, 任意の  $\epsilon > 0$  に対しある  $\delta > 0$  が存在して,  $d(u, v) < \delta$  をみたす任意の  $v \in X$  に対し  $d(u, T^n v) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$  が成り立つことである.

注意. 一般の距離空間から距離空間への写像の不動点に対しても (ii) の安定性の定義はできる. これはリヤプノフ安定性とよばれる概念である.

次の結果を得た.

定理.

$$(2.1) \quad g\bar{u} \not< \bar{u}, \quad \forall g \in G$$

をみたす  $T$  の性質 (E) をもつ下方安定な不動点  $\bar{u}$  は, 対称性をもつ.

(証明). まず, ある  $\delta > 0$  が存在して,

$$(2.2) \quad g\bar{u} = \bar{u}, \quad \forall g \in B_\delta(e)$$

が成立する場合を考える. 群  $G$  の部分集合  $M$  を

$$M = \{g \in G \mid g\bar{u} = \bar{u}\}$$

と定める. 集合  $M$  は閉集合で, 単位元  $e$  を含むから非空集合である. 一方, (2.2) より,  $g' \in M$  に対し,

$$gg'\bar{u} = \bar{u}, \quad \forall g \in B_\delta(e),$$

すなわち,  $B_\delta(e)M \subset M$ . これは  $M$  が開集合でもあることを示している. 群  $G$  は連結であるから,  $M = G$ . したがって,  $\bar{u}$  は対称性をもつ.

次に, どんな  $\delta > 0$  に対しても, (2.2) が成り立たない場合を考える. このとき,  $G$  の単位元  $e$  に収束する列  $\{g_n\}$  で,  $g_n \bar{u} \neq \bar{u}, \forall n \in \mathbb{N}$  をみたまものがとれる. すると, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$g_n \bar{u} \wedge \bar{u} < g_n \bar{u}, \quad g_n \bar{u} \wedge \bar{u} < \bar{u}$$

が成立. さらに, 仮定 (T1) より,

$$T(g_n \bar{u} \wedge \bar{u}) \leq T(g_n \bar{u}) \wedge T\bar{u} = g_n \bar{u} \wedge \bar{u} < \bar{u},$$

⋮

$$T^{m+1}(g_n \bar{u} \wedge \bar{u}) \leq T^m(g_n \bar{u} \wedge \bar{u}) \leq \cdots < \bar{u}$$

となる. ここで,  $\bar{u}$  は下方安定であるから,  $\{T^m(g_n \bar{u} \wedge \bar{u})\}_{m \in \mathbb{N}}$  が有界で, かつ, その閉包が  $D(T)$  に含まれるように  $\{g_n\}$  をとり直しておく. (T3) から,  $\{T^m(g_n \bar{u} \wedge \bar{u})\}_{m \in \mathbb{N}}$  は収束列である. この極限を  $\bar{u}_n$  と表すと,  $\bar{u}_n \leq T^m(g_n \bar{u} \wedge \bar{u})$  と (T1) より,

$$T\bar{u}_n \leq T^{m+1}(g_n \bar{u} \wedge \bar{u}).$$

上式で  $m \rightarrow \infty$  として,  $T\bar{u}_n \leq \bar{u}_n$  を得る. 一方, (T2) より,

$$\bar{u}_n = \lim_{m \rightarrow \infty} T^{m+1}(g_n \bar{u} \wedge \bar{u}) \leq T(\lim_{m \rightarrow \infty} T^m(g_n \bar{u} \wedge \bar{u})) = T\bar{u}_n$$

が成り立つ. ゆえに,  $T\bar{u}_n = \bar{u}_n$ . つまり,  $\bar{u}_n$  は  $T$  の不動点である. 各  $n$  に対し,  $G$  の部分集合  $M_n$  を

$$M_n = \{g \in G \mid g\bar{u}_n \leq \bar{u}\}$$

と定める. 集合  $M_n$  は閉集合で非空である. また,  $M_n$  は開集合でもある. 実際, ある  $g \in M_n$  に対して  $g\bar{u}_n = \bar{u}$  とすると,  $\bar{u}_n < \bar{u}$  が成立しているから,

$$\bar{u} = g\bar{u}_n < g\bar{u}$$

となり (2.1) に矛盾する. すなわち,

$$M_n = \{g \in G \mid g\bar{u}_n < \bar{u}\}$$

となるが,  $\bar{u}$  が性質 (E) をみたすことと  $g\bar{u}_n$  も  $T$  の不動点であることから,  $M_n$  は開集合であることがわかる. したがって,  $G$  の連結性から  $M_n = G$ . つまり, 任意の  $g \in G$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$(2.3) \quad g\bar{u}_n < \bar{u}.$$

$\bar{u}$  は下方安定であるから,  $n \rightarrow \infty$  とすると  $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ . よって, (2.3) において  $n \rightarrow \infty$  として,

$$g\bar{u} \leq \bar{u}, \quad \forall g \in G.$$

$g$  を  $g^{-1}$  におきかえて,

$$g^{-1}\bar{u} \leq \bar{u}, \quad \forall g \in G.$$

つまり,

$$\bar{u} \leq g\bar{u}, \quad \forall g \in G.$$

このようにして,

$$\bar{u} = g\bar{u}, \quad \forall g \in G$$

が得られる. 以上より, 定理が証明できた.  $\square$

### 3. 応用

上の定理を適用することにより次の命題を得る.

#### 3.1. 応用例 1. $\mathbb{R}^n$ 上の曲面の発展方程式

$$(3.1) \quad V = f(n, \nabla n)$$

を考える. ここで,  $n$  は曲面の外向き単位法線ベクトル,  $V$  は曲面の外向き法線方向の速度を表す. 方程式 (3.1) は強放物型であることを仮定する.

距離空間  $X$  と写像  $T: D(T) \rightarrow X$  を

$$X = \{(\Gamma, D) \mid \Gamma \subset \mathbb{R}^n \text{ は有界開集合}, D \subset \mathbb{R}^n \setminus \Gamma \text{ は } \partial\Gamma \text{ を含むコンパクト集合}\},$$

$$T(\Gamma, D) = (\Gamma_1, D_1)$$

と定める. ここで,  $(\Gamma_t, D_t)$  は初期条件  $\Gamma_0 = \Gamma, D_0 = D$  をみたす (3.1) の弱解 (ref. [1], [3]) を表す. また, 距離  $d$  は, ハウスドルフ距離  $h$  に対し,

$$d((\Gamma, D), (\Gamma', D')) = h(\overline{D}, \overline{D'}) + h(D \cup \Gamma, D' \cup \Gamma')$$

により定義する.

命題 1. (cf. Ei and Yanagida [2], Giga and Yama-uchi [4]) 滑らかな有界平衡解は不安定である.

(証明の方針). 背理法により証明する. 滑らかな有界平衡解で安定なものが存在したとする. それを  $S$  と表す. つまり, 弱解  $(S, S$  の内部) は写像  $T$  の安定な不動点とする.

空間  $X$  の元  $(\Gamma, D), (\Gamma', D')$  に対し,

$$(\Gamma, D) \leq (\Gamma', D') \iff D \subset D' \text{ かつ } D \cup \Gamma \subset D' \cup \Gamma'$$

なる順序関係を考え, さらに群  $G$  を

$$G = \{g_a \mid a \in \mathbb{R}^n\}$$

と定める. ただし,  $g_a$  は

$$g_a(\Gamma, D) = (\Gamma + a, D + a) = \{(x + a, y + a) \mid x \in \Gamma, y \in D\}$$

を意味する. すると, 条件 (T1)–(T3), (G1)–(G3) がみたされ, さらに,  $(S, S$  の内部) は性質 (E) をもつことがすでに知られている方程式 (3.2) の解の性質などから示せる. また,  $(S, S$  の内部) は (2.1) をみたすから, 定理を適用して, 対称性をもつことがわかる. すなわち, 平行移動に関して不変となり矛盾.  $\square$

### 3.2. 応用例 2. 二種競争系

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, v) & -\infty < x < \infty, \\ v_t = dv_{xx} + g(u, v) & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

の進行波解を考える ( $d$  は正の定数). 方程式 (3.2) が二種競争系であるとは,

$$f_v \leq 0, \quad g_u \leq 0$$

をみたすことである. また,

$$(u(t, x), v(t, x)) = (\phi(x - ct), \psi(x - ct)) \quad (c \text{ は定数})$$

の形で表せる解を速度  $c$  の進行波解とよぶ.

方程式 (3.2) の速度  $c$  の進行波解  $(\bar{u}, \bar{v})$  に対し, 距離空間  $X$  と写像  $T$  を

$$X = \{(\bar{u} + w_1, \bar{v} + w_2) \mid w_1, w_2 \in L^p(\mathbb{R})\},$$

$$T(u(x), v(x)) = \Phi_1(u(x + c), v(x + c))$$

と定める. ただし,  $L^p$ -ノルムにより  $X$  の距離は定義されるものとし,  $\{\Phi_t\}$  は方程式 (3.2) の定める半流を表すとする. 定義より,  $(\bar{u}, \bar{v})$  は  $T$  の不動点である.

進行波解  $(\bar{u}, \bar{v})$  が単調であるとは,  $\bar{u}$  が非増加 (resp. 非減少) 関数で  $\bar{v}$  が非減少 (resp. 非増加) 関数であることである.

命題 2.(cf. Kan-on [5]) 安定な進行波解は単調である.

(証明の方針). 安定な進行波解  $(\bar{u}, \bar{v})$  が単調ではないとする. このとき, 空間  $X$  に

$$(u_1, v_1) \leq (u_2, v_2) \iff u_1(x) \leq u_2(x), \quad v_1(x) \geq v_2(x) \quad \text{a.e. } x$$

なる順序構造をいれて, 群  $G$  を

$$G = \{g_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

と定める. ここで,  $g_a$  は

$$g_a(u(x), v(x)) = (u(x-a), v(x-a))$$

を表す. すると, 方程式 (3.2) の解の性質などを用いて, 条件 (T1)–(T3), (G1)–(G3) が成り立ち, また,  $(\bar{u}, \bar{v})$  は性質 (E) と (2.1) をみたすことが示せる. よって, 定理を適用して,  $(\bar{u}, \bar{v})$  は  $G$  の作用に関して不変となる. すなわち,  $\bar{u}$  と  $\bar{v}$  はそれぞれ定数関数となり矛盾. したがって, 単調である.  $\square$

#### 参考文献

- [1] L. C. Evans and J. Spruck, Motion by levelsets by mean curvature, I, J. Diff. Geometry, **33** (1991), 635–681.
- [2] S. Ei and E. Yanagida, Stability of stationary interfaces in a generalized mean curvature flow, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA **40** (1994), 651–661.
- [3] Y-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, J. Diff. Geometry, **33** (1991), 749–786.
- [4] Y. Giga and K. Yama-uchi, On instability of evolving hypersurfaces, Diff. Integral Equations, **7** (1994), 863–872.
- [5] Y. Kan-on, Parameter dependence of propagation speed of travelling waves for competition-diffusion equations, preprint.
- [6] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **15** (1979), 401–454.
- [7] J. Mierczyński and P. Poláčik, Group actions on strongly monotone dynamical systems, Math. Ann., **283** (1989), 1–11.
- [8] P. Takáč, Asymptotic behavior of strongly monotone time-periodic dynamical process with symmetry, J. Diff. Equations, **100** (1992), 355–378.

0. Introduction

$1 < p < \infty, p \neq 2$  とする. Banach は, 古典的著書 [B] の中で,  $\ell^p$  及び  $L^p(0,1)$  上の線型等距離全射の構造を述べている.

$T: \ell^p \rightarrow \ell^p$ , onto linear isometry

$\implies \exists^1(\alpha, \sigma);$

$$\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, |\alpha(n)| = 1$$

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ bijective map}$$

$$(Tx)(n) = \alpha(n)x(\sigma(n)), \quad x \in \ell^p.$$

Lamperti は可測関数の  $L^p$ -空間上の線型等距離作用素の構造を,  $\sigma$ -algebra の同型の言葉で述べた. これらは, 可換な von Neumann 環に付随した  $L^p$ -空間の場合であると思うことができる. 半有限な von Neumann 環に付随した非可換  $L^p$ -空間の間の線型等距離作用素については, Broise, Russo, Arazy, Katavolos, Tam 等が研究を進め, Yeadon [Y1] によってその構造が完全に決定された.

**Theorem (Yeadon, 1981).**

$(\mathcal{M}_i, \tau_i), i = 1, 2$ , semifinite von Neumann algebras and traces,

$T: L^p(\mathcal{M}_1, \tau_1) \rightarrow L^p(\mathcal{M}_2, \tau_2)$ , linear isometry

$\implies \exists^1(w, B, J);$

$w \in \mathcal{M}_2$ , partial isometry,

$B \in \mathcal{M}_2 \cap J(\mathcal{M}_1)'$ , positive selfadjoint,

$J: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ , Jordan  $*$ -isomorphism,

$$T(x) = wBJ(x), \quad x \in L^p(\mathcal{M}_1, \tau_1) \cap \mathcal{M}_1,$$

$$w^*w = J(1) = s(B),$$

$$\tau_1(x) = \tau_2(B^p J(x)), \quad x \geq 0.$$

一方, モジュラー理論の発展により, 半有限とは限らない von Neumann 環に付随した非可換  $L^p$ -空間の構成がなされた. Haagerup [H] ([Te] も見よ), 荒木-増田, Hilsuim, 幸崎, Terp 等

によるいくつかの方法があるが、これらによって得る空間は、(固定された von Neumann 環と  $p$  に対しては) 互いに自然に線型等距離同型となることが知られている。

半有限とは限らない von Neumann 環に付随した非可換  $L^p$ -空間を扱う際の困難の幾つかは、半有限の場合ならば central になるような非可換性の障害物、例えば Radon-Nikodym derivative が現れるため、土台の von Neumann 環と非可換  $L^p$ -空間のあいだに共通の領域が得られにくい、ということから来る様に思われる。

我々は、Haagerup の非可換  $L^p$ -空間を用いる。その元は有界でもなく、土台の von Neumann 環に付随してもいないのだが、とにかく作用素であって、極分解の部分等距離作用素が、土台の von Neumann 環の情報を持っている。

## 1.

Haagerup の、任意の von Neumann 環  $\mathcal{M}$  に付随した非可換  $L^p$ -空間に関する基本的定義から始める。  $\varphi_0$  を  $\mathcal{M}$  上の faithful normal semifinite weight,  $\{\sigma_t^{\varphi_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$  を  $\varphi_0$  に関するモジュラー自己同型群とする。接合積を  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R}$  と表すと、  $\tau \circ \theta_s = e^{-s} \tau, s \in \mathbb{R}$  を満たす一意的な faithful normal semifinite trace  $\tau$  が  $\mathcal{N}$  上に存在する。ここで、  $\theta_s, s \in \mathbb{R}$  は双対作用である。

Haagerup の  $L^p$ -空間はこの trace  $\tau$  に関する可測作用素からなる部分空間として実現される。  $\mathcal{N}$  に付随した、稠密な定義域をもつ閉作用素  $a$  が  $\tau$ -可測であるとは、任意の  $\delta > 0$  に対し、射影  $e \in \mathcal{N}$  が  $\|ae\| < \infty$  かつ  $\tau(1-e) \leq \delta$  を満たすように取れることをいう。  $\tau$ -可測作用素全体  $\tilde{\mathcal{N}}$  は完備 Hausdorff 位相  $*$ -環になる。

双対作用  $\theta_s, s \in \mathbb{R}$  は  $\tilde{\mathcal{N}}$  上の連続  $*$ -自己同型に自然に拡張される。  $0 < p < \infty$  に対し、Haagerup の  $L^p$ -空間は、

$$L^p(\mathcal{M}; \varphi_0) = \{a \in \tilde{\mathcal{N}}; \theta_s(a) = e^{-s/p} a, s \in \mathbb{R}\},$$

と定義される (weight  $\varphi_0$  を明示する必要がないときは  $L^p(\mathcal{M})$  と表す)。

$\mathcal{M}$  上の normal weight  $\varphi$  に対し、  $\mathcal{N}$  上の  $\varphi$  の dual weight を  $\tilde{\varphi}$  で表し、  $\tilde{\varphi}$  の  $\tau$  に関する非可換 Radon-Nikodym derivative を

$$h_\varphi = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}$$

と表す.  $\varphi \in \mathcal{M}_{*,+} \iff h_\varphi$  が  $\tau$ -可測 が成り立ち,  $\varphi \rightarrow h_\varphi$  は  $\mathcal{M}_*$  から  $L^1(\mathcal{M})$  の上への順序線型同型に拡張され,  $L^1(\mathcal{M})$  上の positive linear functional  $tr$  を

$$tr(h_\varphi) = \varphi(1), \quad \varphi \in \mathcal{M}_*$$

と定義する.  $tr$  は  $\tau$  とは異なるものである.  $0 < p < \infty$  に対して,  $L^p(\mathcal{M})$  の (準)ノルムは,  $\|a\|_p = tr(|a|^p)^{1/p}, a \in L^p(\mathcal{M})$  と定義される.  $1 \leq p < \infty$  のとき,  $L^p(\mathcal{M})$  は Banach 空間となり,

$$\langle a, b \rangle = tr(ab) = tr(ba), \quad a \in L^p(\mathcal{M}), \quad b \in L^q(\mathcal{M}), \quad 1/p + 1/q = 1$$

によって  $L^p(\mathcal{M})^* = L^q(\mathcal{M})$  である. 極分解  $a = u|a| \in L^p(\mathcal{M})$  に対して  $u \in \mathcal{M}$  かつ  $|a| \in L^p(\mathcal{M})_+$  となること, Jordan 分解  $a = a_+ - a_- \in L^p(\mathcal{M})_{s,a}$  に対して  $a_+, a_- \in L^p(\mathcal{M})_+$  となることに注意しよう.

以下,  $\mathcal{M}_i, i = 1, 2$  は  $\sigma$ -有限とする.

[W] では次が示されている.

**Theorem 1.**

$$T : L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0) \longrightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0), \text{ onto, } *-preserving, \text{ linear isometry}$$

$$\implies \exists J : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2, \text{ onto Jordan } *-isomorphism, J(s(a)) = s(T(a)), \quad a \in L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)_{s,a}.$$

ここで,  $s(a)$  は support projection を表す.

この定理は, Clarkson の不等式の等号成立条件と, Dye の projection orthoisomorphism の定理を使って証明される.

**Theorem (Kosaki, 1984).**

$a, b \in L^p(\mathcal{M})$  に対して,

$$\|a + b\|_p^p + \|a - b\|_p^p = 2(\|a\|_p^p + \|b\|_p^p)$$

$$\iff ab^* = a^*b = 0.$$

**Theorem (Dye, 1955).**

$$J : (\mathcal{M}_1)_{proj.} \longrightarrow (\mathcal{M}_2)_{proj.}, \text{ onto, 1 to 1, } ef = 0 \Leftrightarrow J(e)J(f) = 0,$$

$\mathcal{M}_1$  は  $I_2$ -直和成分を持たない

$\Rightarrow J$  は onto Jordan  $*$ -isomorphism (の制限).

Theorem 1 により,  $\mathcal{M}_2$  上には,  $\psi_0$  と  $\varphi_0 \circ J^{-1}$  の 2 つの faithful normal state がある.  $\psi_0$  (resp.  $\varphi_0 \circ J^{-1}$ ) に関する接合積を  $\mathcal{N}_{\psi_0} = \mathcal{M}_2 \rtimes_{\sigma^{\psi_0}} \mathbb{R}$  (resp.  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2 \rtimes_{\sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1}}} \mathbb{R}$ ) と表し,  $\tilde{\mathcal{N}}_{\psi_0}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{N}}_2$ ) を canonical trace に関する  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$  上の可測作用素全体とする.  $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$  上のユニタリ作用素  $u$  を

$$(u\xi)(t) = (D(\varphi_0 \circ J^{-1}); D\psi_0)_{-t} \xi(t), \quad \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}$$

と定め,  $\kappa(a) = uau^*, a \in \mathcal{N}_2$  とおく.  $\kappa$  は,  $\psi_0$  から  $\varphi_0 \circ J^{-1}$  への state の変更に関連した,  $\mathcal{N}_{\psi_0}$  から  $\mathcal{N}_2$  の上への自然な  $*$ -isomorphism であり,  $\tilde{\mathcal{N}}_{\psi_0}$  から  $\tilde{\mathcal{N}}_2$  の上への  $*$ -isomorphism  $\tilde{\kappa}$  に拡張され,  $\tilde{\kappa}$  の制限は  $L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$  から  $L^p(\mathcal{M}_2; \varphi_0 \circ J^{-1})$  の上への positive linear isometry である (cf. [W; Lemma 2.1, Lemma 2.2]).

一方, モジュラー自己同型群の一意性から,

$$\sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1}} = J \circ \sigma^{\varphi_0} \circ J^{-1}$$

だから,  $(\mathcal{M}_1, \mathbb{R}, \sigma^{\varphi_0})$  と  $(\mathcal{M}_2, \mathbb{R}, \sigma^{\varphi_0 \circ J^{-1}})$  とは, 共変的に Jordan  $*$ -isomorphic であり,  $J$  の拡張であるような  $\mathcal{N}_1$  から  $\mathcal{N}_2$  の上への Jordan  $*$ -isomorphism  $\tilde{J}$  が一意に存在する. ここで,  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \rtimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R}$ . さらに,  $\tilde{J}$  は  $\tilde{\mathcal{N}}_1$  から  $\tilde{\mathcal{N}}_2$  の上への Jordan  $*$ -isomorphism に拡張され,  $\tilde{J}$  の  $L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)$  への制限は  $L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)$  から  $L^p(\mathcal{M}_2; \varphi_0 \circ J^{-1})$  の上への positive linear isometry である (cf. [W; Section 4]).

このように,  $L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)$  から  $L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$  の上への標準的な positive linear isometry  $\tilde{\kappa}^{-1} \circ \tilde{J}$  が得られる.  $T$  が positive であるとき, 我々の問題は  $T = \tilde{\kappa}^{-1} \circ \tilde{J}$  を示すこととなる.

## 2.

$\mathcal{M}_{proj.}$  を  $\mathcal{M}$  の projection 全体とすると,  $\mu : \mathcal{M}_{proj.} \longrightarrow [0, 1]$  が有限加法的確率測度であるとは,

$$(1) \quad \mu(e+f) = \mu(e) + \mu(f), \quad e, f \in \mathcal{M}_{proj.} \text{ with } ef = 0$$

$$(2) \quad \mu(1) = 1$$

を満たすことであった.

**Theorem (Christensen [C], Yeadon [Y2], Maeda, ~ 1985).**

$\mu : \mathcal{M}_{proj.} \rightarrow [0, 1]$ , 有限加法的確率測度,

$\mathcal{M}$  は  $I_2$ -直和成分を持たない

$\Rightarrow \exists^1 \varphi \in \mathcal{M}_+^* ; \mu(p) = \varphi(p), p \in \mathcal{M}_{proj.}$ .

次の結果は上の定理から生ずる, ある種の双対版であると考えられる.

**Theorem 2.**

$\rho : \mathcal{M}_{*,+} \rightarrow [0, \infty)$ ,

(1)  $\rho(\alpha\varphi) = \alpha\rho(\varphi), \alpha \geq 0$

(2)  $\varphi_n \perp \varphi_m (n \neq m), \exists \sum \varphi_n \Rightarrow \rho(\sum \varphi_n) = \sum \rho(\varphi_n)$

(3)  $\rho(\varphi) \leq \|\varphi\|$

(4)  $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(\varphi_n) \rightarrow \rho(\varphi)$

$\Rightarrow \exists^1 x \in \mathcal{M}_+ ; \rho(\varphi) = \varphi(x), \varphi \in \mathcal{M}_{*,+}$ .

以下,  $T$  は positive とする.

$\beta : (\mathcal{M}_1)_{*,+} \rightarrow (\mathcal{M}_2)_{*,+}$  を  $h_{\beta(\varphi)}^{1/p} = T(h_\varphi^{1/p})$  によって定義する.

$T$  の構造定理の証明のポイントは,  $\beta$  の加法性を示すことである. 任意の  $y \in (\mathcal{M}_2)_+, \|y\| \leq 1$  に対し,  $\rho_y(\varphi) = \beta(\varphi)(y), \varphi \in (\mathcal{M}_1)_{*,+}$  とおくと, Theorem 2 より,  $x = x_{\rho_y} \in \mathcal{M}_1$  が一意に存在して  $\rho_y(\varphi) = \varphi(x), \varphi \in (\mathcal{M}_1)_{*,+}$ . 任意の  $\varphi, \psi \in (\mathcal{M}_1)_{*,+}$  に対して, 次を得る;  $\beta(\varphi+\psi)(y) = \rho_y(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \rho_y(\varphi) + \rho_y(\psi) = \beta(\varphi)(y) + \beta(\psi)(y) = (\beta(\varphi) + \beta(\psi))(y)$ . 従って  $\beta$  は加法的であり,  $(\mathcal{M}_1)_*$  から  $(\mathcal{M}_2)_*$  の上への positive linear isometry に拡張され, transposed map  ${}^t\beta$  は  $\mathcal{M}_2$  から  $\mathcal{M}_1$  の上への positive linear isometry である. [K; Theorem 7] と positivity より  ${}^t\beta$  そのものが Jordan \*-isomorphism とわかり, 次を得る;

$$J(s(\varphi)) = s(\beta(\varphi)) = s(\varphi \circ {}^t\beta) = ({}^t\beta)^{-1}(s(\varphi)), \quad \varphi \in (\mathcal{M}_1)_{*,+}.$$

このとき,  $s(\varphi), \varphi \in (\mathcal{M}_1)_{*,+}$  は  $\mathcal{M}_{1proj.}$  全体をわたるから,  $J = ({}^t\beta)^{-1}$  を得る. あとは, Radon-Nikodym derivative の (ごちゃごちゃしてはいるが) 標準的な計算により,  $T = \tilde{\kappa}^{-1} \circ \tilde{J}$  を得る.

まとめると次のようになる.

**Theorem 3.**

$T : L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0) \longrightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0)$ , onto, positive, linear isometry,

$J : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ , Thm. 1 の Jordan  $*$ -isomor.,

$\tilde{\kappa} : L^p(\mathcal{M}_2; \psi_0) \longrightarrow L^p(\mathcal{M}_2; \varphi_0 \circ J^{-1})$ , state 取りかえの  $*$ -isomor.(の制限)

$\implies T = \tilde{\kappa}^{-1} \circ \tilde{J}$  の  $L^p(\mathcal{M}_1; \varphi_0)$  への制限.

ただし,  $\tilde{J}$  は  $J$  の自然な拡張.

REFERENCES

- [B] BANACH, S., *Théorie des Operations Linéaires*, Warsaw, 1932.
- [C] Christensen, E., *Measures on projections and physical states*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 529–538.
- [Dy] Dye, H. A., *On the geometry of projections in certain operator algebras*, Ann. Math. **66** (1955), 73–88.
- [H] Haagerup, U.,  *$L^p$ -spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, Colloq. Internat. CNRS **274** (1979), 175–184.
- [K] Kadison, R. V., *Isometries of operator algebras*, Ann. Math. **54** (1951), 325–338.
- [Ko] Kosaki, H., *Applications of uniform convexity of non-commutative  $L^p$ -spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **283** (1984), 265–282.
- [L] Lamperti, J., *On the isometries of certain function spaces*, Pac. J. Math. **8** (1958), 459–466.
- [S] STRĂTILĂ, Ş., *Modular theory in Operator Algebras*, Abacus Press, Tunbridge Wells, England, 1981.
- [Te] Terp, M.,  *$L^p$ -spaces associated with arbitrary von Neumann algebras*, Notes, Copenhagen University, 1981.
- [W] Watanabe, K., *On isometries between non-commutative  $L^p$ -spaces associated with arbitrary von Neumann algebras*, J. Operator Theory **28** (1992), 267–279.
- [Y1] ———, *Isometries of non-commutative  $L^p$ -spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **90** (1981), 41–50.
- [Y2] ———, *Finitely additive measures on projections in finite  $W^*$ -algebras*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 145–150.

# 1次元力学系の共変表現について

山形大学理学部 河村新蔵

1. カオス力学系: カオス力学系において重要な概念である初期値鋭敏性について考える. ここでは, Logistic 写像  $L_R(x) = Rx(1 - X)$  や Tent 写像  $T_A(x) = A(1 - |2x - 1|)$  によって象徴される1次元力学系について考えてみよう.

定義: 単位区間  $[0,1]$  から  $[0,1]$  自身への写像  $\varphi$  が次の条件を満たしているとき  $\varphi$  を単峰型という.

(1)  $[0,1]$  の内点  $c$  が存在して,  $\varphi$  は  $[0,c]$  では単調増加,  $[c,1]$  では単調減少な連続関数である.

(2)  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ .

例. Logistic 写像や Tent 写像は単峰型であり,  $c = 1/2$  である.

(注)  $R = 4$  の時の Logistic 写像 [3] と  $A = 1$  の時の Tent 写像は位相共役であり,  $L_4$  と  $T_1$  を結ぶ同相写像  $h$  は  $h(x) = \sin^2(\pi x/2)$  である (i.e.  $L_4 = h \circ T_1 \circ h^{-1}$ ).

この時, 初期値鋭敏性 (sensitive dependence on initial conditions) について次の事が言える.

(\*) 2つの写像  $L_4, T_1$  において, 測度 0 の集合を除く  $[0,1]$  内の任意の初期値に対しその軌道は区間  $[0,1]$  で稠密であるがその分布の一意性は異なる.

(1)  $T_1$  においてはその分布  $D$  は Lebesgue 測度に対して一意である ( $D(x) = 1$ ).

(2)  $L_4$  においてはその分布  $D$  は Lebesgue 測度に対して一意ではない ( $D(x) = 1/\pi\sqrt{x(1-x)}$ ).

ここで初期値鋭敏性についてカオス力学系における1つの定義を述べる.

定義: 写像  $\varphi$  が初期値鋭敏性を持つとは次の条件を満たしている事である.

(\*\*) 正の数  $\delta$  が存在して任意の  $x$  と  $x$  の任意の近傍  $U$  に対し

$$|\varphi^n(x) - \varphi^n(y)| > \delta$$

となる  $y \in U$  と  $n > 0$  が存在する.

上の初期値鋭敏性に対しカオス力学系を異なった立場から見て見よう.

定理 A (強混合性)  $\varphi = L_4$  および  $\varphi = T_1$  の時, 次の事が成り立つ. 任意の  $f \in L^\infty[0,1]$  と正值関数  $\xi \in L^1[0,1]$ ,  $\int_0^1 \xi(x) dm = 1$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\varphi^n(x)) \xi(x) dm = \int_0^1 f(x) dm$$

となる。ここで、 $m$  は  $\varphi$  に関する不変測度である。

(注) (1)  $f(x) = x$  の時、左辺は初期値  $x$  の分布  $\xi$  に対して  $\varphi^n(x)$  の  $[0,1]$  での分布の平均値の極限を示す。

(2)  $f$  が  $[0, a]$  の特性関数  $\chi_{[0,a]}$  の時左辺は初期値分布  $\xi$  に対して  $\varphi^n(x)$  が  $[0, a]$  に属する確率の極限を示している。

(3)  $[0,1]$  の Lebesgue 測度  $dx$  は  $\varphi = T_1$  の不変測度である。 $[0,1]$  の同相写像  $h$  が  $h(0) = 0, h(1) = 1$  の時、 $\psi = h \circ T_1 \circ h^{-1}$  は  $T_1$  と位相共役となり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(\varphi^n(x)) \xi(x) dm = \int_0^1 f(h(x)) dm$$

である。 $\psi = L_4$  の時、

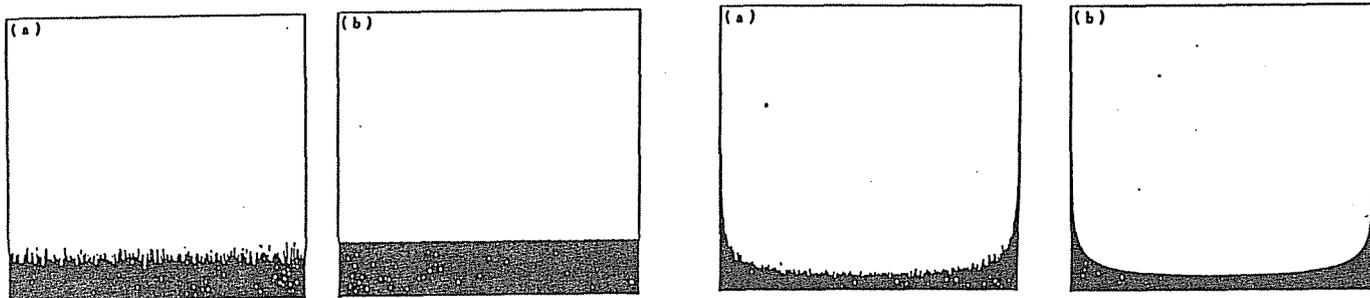
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(L_4^n(x)) \xi(x) dm = \int_0^1 f(\sin^2(\frac{\pi x}{2})) dx = \int_0^1 f(x) \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx$$

となる

(4) 強混合性はエルゴード性を導くが、エルゴード性は一般に強混合性を意味しない。

(例)  $\psi = x + \theta$ , ( $x \in [0,1), \theta$  は無理数) とする時  $\psi$  は  $[0,1)$  上でエルゴード的であるが、明らかに強混合的ではない。

下の図は「どのような初期値  $x$  に対しても  $x$  の軌道  $\{\varphi^n(x) : n = 1, 2, \dots, N\}$  の分布は十分大きな整数  $N$  に対して一定となる」事を示し、初期値によって未来を確定できない事を主張している。



テント写像による数列の値の区間  $[0, 1]$  内の分布。(a)  $10^5$  回の繰り返しの繰り返し。区間は 1000 に分割してあるので、ばらつきは  $1/\sqrt{\frac{10^5}{10^3}} = 0.1$  位となる。(b)  $10^7$  回の繰り返しの繰り返し。ばらつきは 0.01 位となる。

ロジスティック写像の数列の値の分布。(a)  $10^5$  回の繰り返しの繰り返し。区間は 1000 に分割してある。(b)  $10^7$  回の繰り返しの繰り返し。

図はカオス入門 (長島弘幸, 馬場良和 共著) 9 頁

定理Aの主張は「観測する初期値がどのような分布であっても、 $\varphi$ による $n$ 回反復後のある量の観測値はいつも一定の値に近づく」という事を述べている。この性質はある意味で初期値鋭敏性とは逆の事を示している。この強混合性について「力学系のヒルベルト空間への表現」という形で考えて見たい。

2. 共役表現: 力学系の共役表現を次のような順序で定義する。

(1) 区間  $[0,1]$  から  $[0,1]$  への連続関数  $\varphi$  にたいし

$$(T_\varphi\xi)(x) = \xi(\varphi(x)), \quad \xi \in L^2[0,1]$$

とする。

(2)  $\chi_{[a,b]}$  は区間  $[a,b]$  の特性関数とする。

(3) 区間  $[0,1]$  上の連続関数環  $C[0,1]$  に対し

$$\alpha_\varphi(f)(x) = f(\varphi(x))$$

とする。この時、 $\alpha_\varphi$  は  $C[0,1]$  の \*-自己準同型写像である。

(4)  $[0,1]$  上の有界可測関数  $f$  について  $M_f\xi = f\xi$ ,  $\xi \in L^2[0,1]$  とする。

(5)  $\varphi$  が単峰型写像の時、ヒルベルト空間  $L^2[0,1]$  上に部分等距離作用素が次のように定義できる。

$$V_1 = M_{\sqrt{|\varphi'|}} M_{\chi_{[0,c]}} T_\varphi, \quad V_2 = M_{\sqrt{|\varphi'|}} M_{\chi_{[c,1]}} T_\varphi$$

ここで、 $\varphi'$  は Lebesgue 測度に対する Radon-Nikodym derivative である。

(6)  $C[0,1]$  から  $B(L^2[0,1])$  への同型表現を

$$(\pi(f)\xi)(x) = f(x)\xi(x), \quad \xi \in L^2[0,1]$$

とする。

上の準備の基に次の事が成り立つ。

定理1. ([2]) (1)  $V_1V_1^* + V_2V_2^* = I$ ,  $V_1^*V_1 = V_1^*V_1 = M_{\chi_{[0,\varphi(c)]}}$ .

(2)  $\pi(\alpha_\varphi(f)) = V_1\pi(f)V_1^* + V_2\pi(f)V_2^*$ .

(3)  $W_1 = aV_1 + bV_2, W_2 = cV_1 + dV_2$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2: \mathbb{C})$  とすると

$$\pi(\alpha_\varphi(f)) = W_1\pi(f)W_1^* + W_2\pi(f)W_2^*.$$

定理1の(2)は次の事と同値である。任意の  $\xi \in L^2[0,1]$  に対し

$$\langle \pi(\alpha_\varphi(f))\xi | \xi \rangle = \langle \pi(f)V_1^*\xi | V_1^*\xi \rangle + \langle \pi(f)V_2^*\xi | V_2^*\xi \rangle.$$

すなわち

$$\int_0^1 f(\varphi(x)) |\xi(x)|^2 dx = \int_0^1 f(x) |(V_1^* \xi)(x)|^2 dx + \int_0^1 f(x) |(V_2^* \xi)(x)|^2 dx.$$

従って初期値分布  $\xi$  に対して  $n$  回反復後の状態は  $V_{i_n}^* \cdots V_{i_2}^* V_{i_1}^*$ , ( $i_k \in \{1, 2\}$ ) を調べることに帰着する.

定理 2. ([2])  $\varphi = T_1$  の場合

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} V_2, \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} V_2$$

とすると, 次の性質を満たす  $L^2[0, 1]$  の基底  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  が存在する.

$$W_1 e_n = e_{2n-1}, \quad W_2 e_n = e_{2n}, \quad (n \geq 1).$$

特に  $W_1 e_1 = e_1$  であり, 1 が  $W_1$  の点スペクトルである. これは Walsh Type の基底と呼ぶ事が出来る.

定理 2 より定理 A (強混合性) が成り立つ事が次のようにして証明される.

(i) 任意の  $f \in L^\infty[0, 1]$  と関数  $\xi \in L^2[0, 1]$ , について

$$\int_0^1 f(\varphi^n(x)) |\xi(x)|^2 dx = \int_0^1 f(x) |(W_{i_n}^* \cdots W_{i_2}^* W_{i_1}^* \xi)(x)|^2 dx.$$

(ii)  $\xi = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k$  とすれば十分大きな  $K$  に対して

$$\left\| \xi - \sum_{k=1}^K \xi_k e_k \right\| \leq \varepsilon.$$

(iii) 十分大きな  $n$  に対して,  $W_{i_n}^* \cdots W_{i_2}^* W_{i_1}^* e_k = e_1, (1 \leq k \leq K)$ .

(iv)  $\left| \int_0^1 f(\varphi^n(x)) |\xi(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq 2(\|f\|_\infty + \|f\|_1)(\varepsilon + \varepsilon^2)$ .

(注) (1) 「ある初期値分布に対し, その  $n$  回反復後の分布はどのようになるか」という問題に対しは, 共役表現に現れる部分等距離作用素  $V_1, V_2$  あるいは  $W_1, W_2$  のヒルベルト空間上の作用素としての構造に帰着される.

(2) 上記 (1) に現れる部分等距離作用素  $V_1, V_2$  は単峰型写像  $\varphi$  が  $\varphi(c) = 1$  の時, 等距離作用素となり,  $B(L^2[0, 1])$  の部分  $C^*$ -環 (Cuntz Algebra[1]) は全て同型である. 従って問題は Cuntz Algebra のヒルベルト空間への表現を調べる事とほぼ同じである.

参考文献

[1] J.Cuntz, Simple  $C^*$ -algebras by isometries, Comm. Math. Phys. 57(1977), 173-185.

[2] S.Kawamura, Covariant representations of one-dimensional unimodal maps, (in preparation).

- [3]S.M.Ulam and J.v.Neumann, On combinations of stochastic and deterministic processes, Bull. Amer. Math. Soc. 53(1947),1120.
- [4]P.Walters, *An introduction to ergodic theory*, Spriger-Verlag, GTM 79(1982).

## Gaussian Estimate の拡張について

東京理科大学理学部数学科  
宮島 静雄

標題に言う Gaussian estimate とは、 $\mathbf{R}^n$  の開集合上の  $L^2$  空間で定義された  $C_0$ -半群に対するものであって、それがいわゆる Gaussian Semigroup によって上から押さえられるという場合を指すものである。正確に定義を述べるために一応 Gaussian semigroup (又は Heat semigroup) の復習から始める。  $t > 0, x \in \mathbf{R}^n$  に対して Gauss 核を

$$K(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

と表し、 $\mathbf{R}^n$  上の関数  $f(x)$  に対して

$$G(t)f(x) := \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^n} G(x-y, t)f(y) dy & (t > 0), \\ f(x) & (t = 0) \end{cases}$$

と置くと、 $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  は任意の  $1 \leq p < \infty$  に対して  $L^p(\mathbf{R}^n)$  上の  $C_0$ -半群を定める。これが Gaussian semigroup であるが、以後、単に  $\{G(t)\}_{t \geq 0}$  と書いたときは  $L^2(\mathbf{R}^n)$  上の半群を意味することとし、 $L^p(\mathbf{R}^n)$  上で考えたものは  $\{G_p(t)\}_{t \geq 0}$  と書くことにする。 $\{G_p(t)\}_{t \geq 0}$  の生成作用素は  $L^p(\mathbf{R}^n)$  上の Laplacian  $\Delta_p$  である。

さて、 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  を開集合とするとき、 $L^2(\Omega)$  上の  $C_0$ -半群  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  が Gaussian estimate をみたすとは、ある定数  $b, c > 0$  で

$$|T(t)f| \leq cG(bt)|f| \quad (0 \leq t \leq 1, f \in L^2(\Omega))$$

をみたすものが存在することを言う。ここで、上式右辺では  $L^2(\Omega) \subset L^2(\mathbf{R}^n)$  とみて  $|f|$  に  $G(bt)$  が作用している事に注意。 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  が Gaussian estimate をみたしていればそれは任意の  $1 \leq p < \infty$  に対して  $L^p(\Omega)$  上の  $C_0$ -半群  $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$  を定め、各  $p$  に対する半群は互いに consistent, つまり定義域の共通部分に属する関数に対する作用は等しい。

この Gaussian estimate をみたす半群について最近 2 つの注目すべき結果が得られた。一つは Ouhabaz [5] によるもので、半群の解析性に関するものである：

**Theorem A.** (Ouhabaz [5])  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  が Gaussian estimate をみたしていれば  $1 \leq p < \infty$  に対して  $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$  は angle  $\pi/2$  の解析的半群をなす。

もう一つは Arendt [1] によるもので,  $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$  の生成作用素  $A_p$  のスペクトルの  $p$  に関する不変性についての結果である.  $\rho_\infty(A_p)$  は  $A_p$  のスペクトルの  $\infty\mathbf{R}$  を含む連結成分を表すものとする, その結果は次のように述べられる:

**Theorem B.** (Arendt [1])  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  が Gaussian estimate をみたしていれば  $1 \leq p < \infty$  に対して  $\rho_\infty(A_p)$  は  $p$  によらない集合になる.

Arendt の結果は Gaussian semigroup 自身について生成作用素のスペクトルの  $p$ -不変性を示した Hempel-Voigt [2] の一般化である.

一方, 大学院学生の石川 学は, Voigt [6] の, positive semigroup のポテンシャルによる摂動理論の枠組みで, 摂動された半群の解析性を調べた (石川 [3]). 宮島はこの理論の具体的な適用例として 1 次元の Poisson semigroup  $\{W_p(t)\}_{t \geq 0}$  を positive potential で摂動して得られる半群も解析的である事を確かめた. ここで,  $\{W_p(t)\}_{t \geq 0}$  は次式で与えられる  $L^p(\mathbf{R})$  上の  $C_0$ -半群である:

$$W_p(t)f(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} \frac{t}{(x-y)^2 + t^2} f(y) dy, \quad (t > 0, f \in L^p(\mathbf{R}))$$

しかも, Poisson semigroup は Gaussian estimate をみたさないことが分かるので, Ouhabaz の理論の範疇に入らない場合で解析的な半群を得られる場合がある事にも注意した. Poisson semigroup の positive potential による摂動で得られた半群  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  は  $|T(t)f| \leq W(t)|f|$  ( $L^2$  で考えていて,  $W_2(t)$  の代わりに単に  $W(t)$  と書いた) を満たすので, 必ずしも Gaussian estimate でなくても, よい性質をもつ半群  $\{W_p(t)\}_{t \geq 0}$  で上から抑えられる半群ならばやはり解析的になる, という形で Theorem A が少し一般化されたわけである.

これより, Theorem B に対しても, 必ずしも Gaussian estimate を満たしていなくても, 「よい性質をもつ半群」で上から抑えられる半群ならば同じ結論が成り立つことを期待してもよいのではないかと思われる.

$L^2(\mathbf{R})$  での Poisson semigroup の生成作用素が  $-(-\Delta)^{1/2}$  であるという事を考慮した結果, 空間次元が 1 のとき, 次の形で Theorem B の一般化が成り立つことが分かった.

**Theorem.** (Miyajima [4])  $\alpha$  を  $1/2 < \alpha \leq 1$  なる数として,  $L^2(\mathbf{R})$  上の  $C_0$ -半群  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  はある定数  $b, c > 0$  に対して次の条件を満たすとする:

$$|T(t)f| \leq c \exp(-b(-\Delta)^\alpha t) |f|, \quad (0 \leq t \leq 1, f \in L^2(\mathbf{R})).$$

このとき  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  は各  $1 \leq p < \infty$  に対して  $L^p(\mathbf{R})$  上の  $C_0$ -半群を誘導し, その生成作用素  $A_p$  について  $\rho_\infty(A_p)$  は  $p$  によらない集合となる.

証明は Arendt [1] の方法を modify すればよいのであるが, 詳細は [4] を見て頂きたい.

#### REFERENCES

- [1] Arendt, W., *Gaussian estimates and interpolation of the spectrum in  $L^p$* , Differential and Integral Equations, **7**(1994), 1153–1168.
- [2] Hempel, J. and J. Voigt, *On the  $L^p$ -spectrum of Schrödinger operators*, J. Math. Anal. Appl., **121**(1987), 138–159.
- [3] Ishikawa, M., “*Analyticity of absorption semigroups*,” to appear in “Semigroup Forum.”
- [4] Miyajima, S., “*A generalization of Gaussian estimate*,” in preparation.
- [5] Ouhabaz, El-M., “*Gaussian estimates and holomorphy of semigroups*,” to appear in Proc. AMS.
- [6] Voigt, J., “*Absorption semigroups, their generators, and Schrödinger semigroups*,” J. Func. Anal., **67**(1986), 167–205.

# 複素力学系からみたニュートン法

## Computational Complexity for Polynomial Zero-finding Algorithms

西沢清子, 城西大学・理学部・数学教室

kiyoko@euclides.josai.ac.jp

1995.01.10

### 1 Polynomial Zero-finding Algorithms

方程式の解の近似値を求める計算アルゴリズムのなかで、ニュートン法は今日最も効率のよいものとして知られている。すなわち関数  $f(z)$  に対して関数

$$N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

を、 $f$  のニュートン写像と呼び、 $N_f(z) = z$  となる点を求めるというアルゴリズムである。

3次以上の多項式に対してのニュートン法で、始点の選び方に失敗したとき、すなわち解以外の周期点に収束した場合など、すこしずらして始点を取り直すことによって、解に収束させることが可能であろうか？このことが成立しない例を常に作ることが出来る。

従って、このアルゴリズムが多項式に対してどの程度の "Efficiency" を持つか？という問題が考えられる。

1985年に S.SMALE は論文 ([7]) で

"多項式の解を求める" generally convergent purely iterative algorithms " は存在するか？という問題 ( Problem 10 ) を提出した。

ニュートン法は、3次以上の多項式の場合にはこのアルゴリズムではない。

2年後 C.McMullen([3]) が、3次多項式の場合には新しいアルゴリズムを、また4次以上の多項式にはそのようなアルゴリズムが存在しないことをしめした。さらに1989

年には C.McMullen & P.Doyle([4]) は 5 次多項式に対して ” tower of algorithm ” を作った。このアルゴリズムは 4 次または 6 次以上の多項式にたいして確実に解を求めるものではないことも示した。

一方ニュートン法が失敗するような多項式を特徴づけるという問題もある。

これに関してやはり S.SMALE は論文 ([7]) で

” Find more systematically the set of polynomial whose Newton’s map has periodic sinks, not fixed and thus fails to generally converge ”

という問題 ( Problem 6 ) を提出した。このような多項式を ” bad polynomial ” と呼ぶ。

この問題の解決のために, ” relaxed Newton’s Method ”

$$N_{h,f}(z) = z - h \frac{f(z)}{f'(z)}$$

と、微分方程式

$$\dot{z} = -\frac{f(z)}{f'(z)}$$

の解曲線 ”Newton Flow,  $\mathcal{N}_f$ , ” との関係を探るという ” Problems in discrete versus continuous Newton’s algorithms ” ([8]) の研究が行われている。

また S.SMALE は論文 ([7]) で

” What is the probability that Newton’s method will converge for a random choice of initial point? For a given polynomial?”

という問題 ( Problem 7 ) を提出した。

1992年に S.Sutherland によって次の2つの予想が提出された。

**Conjecture 1** Let  $f_1$  be a bad polynomial of degree  $d$ . Then there is a one-parameter family of polynomials  $\{f_h\}_{0 < h \leq 1}$  which are bad for the relaxed Newton’s method  $N_{h,f_h}$ . Further more as  $h \rightarrow 0$ , the corresponding flow  $\mathcal{N}_{f_h}$  tends to a flow  $\mathcal{N}_{f_0}$  which has a saddle connection.

**Conjecture 2** Let  $f$  be a polynomial of degree  $d$  with all its roots in the unit disk, let  $\alpha$  be a root of multiplicity  $m$  for  $f$ , and let  $A_{*h}(\alpha)$  be the immediate attractive basin of

$\alpha$  for the map  $N_{h,f}$ . Then the intersection of the set

$$A = \bigcap_{0 < h \leq m} A *_h(\alpha)$$

with any circle of radius  $3 \leq R$  contains arcs whose total length is at least  $2\pi R/cd$ , where  $c$  is a constant not depending on  $\alpha, f$  or  $d$ .

この予想（直接鉢の幅の問題）に対する部分的解決として

1.  $h = 1$ （ニュートン法）の場合に、S.Sutherland ([10]), Nishizawa & Fujimura([5], [6]),
2.  $0 < h \leq 1$  (relaxed Newton's method) の場合に、H.Kriete([1]) がある。

## 2 鉢の幅について

フラクタルな境界をもつ直接鉢の幅をどのように評価するかについての結果を示す (Nishizawa & Fujimura([5], [6]))。

ここでは、 $d$  次多項式として次のような多項式を考える。

$$p(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0 \quad (|a_i| \leq 1)$$

このような多項式の族を **centered** な  $\mathcal{P}_d(1)$  という。このとき多項式の根は全て、原点中心の半径 2 の円に含まれる。さらに Lucas の定理によって  $p'(z) = 0$  の根も、多項式の根の凸閉包に含まれる。

$p$  と  $q$  が多項式で、 $q(z) = p(az+b)$  のときニュートン写像  $N_p$  と  $N_q$  は  $z \mapsto az+b$  によって共役になるので、Newton 法を研究するときには上のような  $\mathcal{P}_d(1)$  に属する centered な多項式のみを考えれば十分である。

### 2.1 直接鉢の性質

Manning [2] と Sutherland [10] の結果を中心に、多項式の Newton 写像の直接鉢の幅の下からの評価を考える。ここでの直接鉢の幅とは、原点を中心、半径  $R$  の円上に中心を持ち根  $\alpha$  の直接鉢にすっぽりはいるような円の半径のことをさすことにする。

Newton 写像に対して、根  $\alpha$  の直接鉢  $B(\alpha)$  は単連結であることが知られている ([9])。よって、Riemann の写像定理より単位円板  $\mathbf{D}$  から  $B(\alpha) \setminus 0$  を  $\alpha$  に移すような解析的微分同相写像がある。これを用いて、 $N|_{B(\alpha)}$  とブラシュケ積  $M$  を共役にすることができる。

$$\begin{array}{ccc} B(\alpha) & \xrightarrow{N|_{B(\alpha)}} & B(\alpha) \\ \uparrow h & & \uparrow h \\ \mathbf{D} & \xrightarrow{M} & \mathbf{D} \end{array}$$

$$M(z) = z e^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z}$$

$M(z)$  は 0 を吸引的不動点として持ち、単位円上の  $\xi_1, \dots, \xi_s$  を反発的不動点として持つ。特に  $\alpha$  が単根で  $B(\alpha)$  が free critical point を含まないとき、 $M(z) = z^2$  になる。

次のような Manning による可換図を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\mathbf{C}}, \infty & \xleftarrow{R} & \overline{\mathbf{C}}, 0 & \xleftarrow{L_M} & \mathbf{D}, \xi & \xrightarrow{h} & B(\alpha), \infty & \xrightarrow{L_N} & \overline{\mathbf{C}}, \infty \\ \downarrow \frac{d-1}{d}z & & \downarrow M'(\xi)z & & \downarrow M(z) & & \downarrow N|_{B(\alpha)} & & \downarrow \frac{d-1}{d}z \\ \overline{\mathbf{C}}, \infty & \xleftarrow{R} & \overline{\mathbf{C}}, 0 & \xleftarrow{L_M} & \mathbf{D}, \xi & \xrightarrow{h} & B(\alpha), \infty & \xrightarrow{L_N} & \overline{\mathbf{C}}, \infty \end{array}$$

ただし、 $L_N$  は  $N|_{B(\alpha)}$  の  $\infty$  における Shröder 関数方程式の解、 $L_M$  は  $M(z)$  の  $\xi$  における Shröder 関数方程式の解、また  $R(z) = z^{\frac{\log(\frac{d-1}{d})}{\log M'(\xi)}}$  である。

ここで  $S$  を合成写像  $L_N \circ h \circ L_M^{-1} \circ R^{-1}$  とおき、 $W = S^{-1}(V)$  とすれば、 $W$  はセクターで  $\infty$  での角度は、

$$\pi \frac{\log(\frac{d}{d-1})}{\log(M'(\xi))}$$

になる。

## 2.2 直接鉢の幅をはかる

この節では根  $\alpha$  の直接鉢  $B(\alpha)$  の無限遠点での基本領域での最狭部分の幅を下から評価をすることによって、鉢の幅を求めることにする。

まず、写像  $L_N$  の形より  $B(\alpha)$  の  $\infty$  の近くでの点の動きは  $z \mapsto \frac{d-1}{d}z$  で、原点に近寄ってくるので、各軌道が 1 回だけ通過するような基本領域をとることができる。この領域  $A_V$  はトーラス内のアニュラスと同相になり、その modulus は  $W$  の角度から計算でき

て、 $\frac{\pi}{\log M'(\xi)}$  となる。([10] の Lemma 3.2) これを “セクター  $V$  の” opening modulus” と呼ぶ。

次の定理は上でのアニュラス  $A_V$  の最狭部分の幅をを求めるもので宍倉光広氏のアドバイスによるものである。

**定理 1**  $T$  を  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$  と同型なトーラス、 $A$  を上の意味で  $T$  に含まれる modulus が  $m$  のアニュラスとする。

このとき  $A$  の境界の間の距離は少なくとも

$$\frac{2k \exp(\pi/2m)}{1 + \exp(\pi/m)}$$

である。ただし、 $k = \min\{1, \Im(\tau)\}$ 。

上の定理により 次の定理を得る。

**定理 2**  $\xi$  を  $M(z)$  の不動点とすると、 $B(\alpha)$  は、すくなくとも、中心が  $t_\xi \in B(\alpha)$ , ( $|t_\xi| = R > 2(d+1)/(d-1)$ ), で半径

$$\frac{(R-2)}{3d(1 + \sqrt{(M'(\xi))})}$$

の円を含む。

## 参考文献

- [1] H.Kriete. *On the Efficiency of Relaxed Newton's Method*, preprint
- [2] A.Manning. *How to be Sure of Solving a Complex Polynomial using Newton's Method*, preprint, Math.Inst., Univ. Warwick, 1986
- [3] C.McMullen. *Families of Rational Maps and Iterative Root Finding Algorithms*, Ann. of Math., **125**(1987), pp. 467-493
- [4] P.Doyle & C.McMullen. *Solving the quintic by iteration*, Acta Math., **163**(1989), pp. 151-180

- [5] K.Nishizawa & M.Fujimura. *Families of Rational Maps and Convergence Basins of Newton's Method*, Proc. Japan Academy ,Ser. A **68**(1992), 143-147
- [6] K.Nishizawa & M.Fujimura. *FAMILIES OF RATIONAL MAPS AND GEOMETRIC METHOD IN NEWTON MAP* , Adv. Ser. Dyn. Syst. (World Sci. Publ.),**13**(1993), 139-164
- [7] S.Smale. *On the efficiency of algorithms of analysis*, Bull. A.M.S., **13**(1985), pp. 87-121
- [8] D.Saupe. *Discrete versus continuous Newton's method: A case study*, Acta Appl. Math. **13**(1988), 59-80
- [9] M.Shishikura. *The connectivity of the Julia set of rational maps and Fixed points*, IHES /M /90/37 , I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, France, 1990
- [10] S.Sutherland. *Finding Roots of Complex Polynomials with Newton's Method*, Preprint # 1990/7, SUNY Stony Brook,1990

# DOUBLE LAYER POTENTIALS OF $L^p$ -FUNCTIONS FOR A BOUNDED DOMAIN WITH FRACTAL BOUNDARY

HISAKO WATANABE

Ochanomizu University

## 1. Introduction

Let  $D$  be a bounded smooth domain in  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 3$ ). The double layer potential  $\Phi g$  of  $g \in L^p(\partial D)$  is defined by

$$(1.1) \quad \Phi g(x) = - \int_{\partial D} \langle \nabla_y N(x-y), n_y \rangle g(y) d\sigma(y),$$

where  $N(x-y)$  is the Newton kernel,  $n_y$  is the unit outer normal to  $\partial D$  and  $\sigma$  is the surface measure on  $\partial D$ . The function  $\Phi f$  is harmonic in  $\mathbb{R}^d \setminus \partial D$  and has a nontangential limit at  $\sigma$ -almost every boundary point.

If  $D$  is a domain with fractal boundary, then  $n_y$  and  $\sigma$  can not be considered and (1.1) is not defined. But in [W] we introduced the double layer potentials on such a domain. In the paper it was assumed that  $D \subset B(0, R/2)$  and  $\partial D$  satisfies the condition (u), i.e.,

(u) There are a positive Radon measure  $\mu$  on  $\partial D$  and positive real numbers  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $r_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  such that  $d-1 \leq \gamma \leq \beta < d$  and

$$(1.2) \quad b_1 r^\beta \leq \mu(B(z, r) \cap \partial D) \leq b_2 r^\gamma$$

for all  $z \in \partial D$  and all  $r \leq r_0$ , where  $B(z, r)$  stands for the open ball with center  $z$  and radius  $r$  in  $\mathbb{R}^d$ .

Using the fact that an  $\alpha$ -Hölder continuous function  $f$  is extended to a function  $\mathcal{E}(f)$  on  $\mathbb{R}^d$  such that  $\mathcal{E}(f)$  is a  $C^\infty$ -function in  $\mathbb{R}^d \setminus \partial D$ , we defined, for an  $\alpha$ -Hölder continuous function  $f$  on  $\partial D$ , the double layer potential by

$$(1.3) \quad \Phi f(x) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}} \langle \nabla_y \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(x-y) \rangle dy$$

for  $x \in D$  and

$$(1.4) \quad \Phi f(x) = - \int_D \langle \nabla_y \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(x-y) \rangle dy$$

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

for  $x \in \mathbf{R}^d \setminus \overline{D}$ , where

$$N(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_d(d-2)|x-y|^{d-2}} & \text{if } d \geq 3 \\ -\frac{3R}{2\pi} \log \frac{|x-y|}{3R} & \text{if } d = 2 \end{cases}$$

and  $\omega_d$  stands for the surface area of the unit ball in  $\mathbf{R}^d$ .

Then we saw that  $\Phi f$  is harmonic in  $\mathbf{R}^d \setminus \partial D$  and  $\Phi f$  is extended to two continuous functions on  $\overline{D}$  and  $\mathbf{R}^d \setminus D$ , respectively.

On the other hand A. Jonsson and H. Wallin assumed in [JW] that a closed set  $F$  is a  $\beta$ -set, i.e., the condition (u) is satisfied for  $\gamma = \beta$  and  $\partial D = F$ , and proved that there exists, for  $p \geq 1$ , a continuous extension operator  $f \mapsto \mathcal{E}(f)$  from a Besov space  $A_\alpha^p(F)$  to a Besov space  $A_\lambda^p(\mathbf{R}^d)$ , where  $\alpha = \lambda - (d - \beta)/p$ ,

$$A_\alpha^p(F) = \{f \in L^p(\mu) : \iint \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{\beta+p\alpha}} d\mu(x)d\mu(y) < \infty\}$$

with norm

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \iint \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{\beta+p\alpha}} d\mu(x)d\mu(y) \right)^{1/p}$$

and

$$A_\lambda^p(\mathbf{R}^d) = \{f \in L^p(\mathbf{R}^d) : \iint \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{d+p\lambda}} dx dy < \infty\}$$

with

$$\|f\| = \left( \int |f(y)|^p dy \right)^{1/p} + \left( \iint \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{d+p\lambda}} dx dy \right)^{1/p}.$$

In this paper we will define the double layer potential for a  $L^p$ -function on the boundary of a bounded domain  $D$  in  $\mathbf{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) in case the boundary of  $D$  is a  $\beta$ -set ( $d-1 \leq \beta < d$ ).

We note that, if  $D$  is a bounded Lipschitz domain, then  $\partial D$  is a  $(d-1)$ -set, and if  $\partial D$  consists of a finite number of self-similar sets, which satisfies the open set condition, and whose similarity dimensions are  $\beta$ , then  $\partial D$  is a  $\beta$ -set (cf. [H]).

Let  $\alpha > \beta - (d-1)$  and  $f \in A_\alpha^p(\partial D)$ . Using an extension operator  $\mathcal{E}$  similar to that in [JW], we define the double layer potential  $\Phi f$  of  $f$  by (1.3) and (1.4).

Furthermore let  $z \in \partial D$  and  $\tau$  be a positive real number. We define  $\tau$ -nontangential approach regions in  $D$  and in  $\mathbf{R}^d \setminus \overline{D}$  as follows:

$$(1.5) \quad \Gamma_\tau(z) = \{x \in D : |x-z| < (1+\tau)d(x, \partial D)\}$$

and

$$(1.6) \quad \Gamma_\tau^e(z) = \{x \in \mathbf{R}^d \setminus \overline{D} : |x-z| < (1+\tau)d(x, \partial D)\}.$$

Under these notations we give the following theorem.

**Theorem.** *Assume that  $D$  is a bounded domain in  $\mathbf{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) such that  $\partial D$  is a  $\beta$ -set. Furthermore assume that  $\Gamma_\tau(z) \cap B(z, r) \neq \emptyset$  and  $\Gamma_\tau^e(z) \cap B(z, r) \neq \emptyset$  for every  $z \in \partial D$  and for every  $r \leq \epsilon_0$ . If  $p > 1$ ,  $0 \leq \beta - (d-1) < \alpha < 1$ , then for every  $f \in \Lambda_\alpha^p(\partial D)$  the double layer potential  $\Phi f$  defined by (1.3) and (1.4) is harmonic in  $\mathbf{R}^d \setminus \partial D$  and*

$$\lim_{x \rightarrow z, x \in \Gamma_\tau(z)} \Phi f(x) = Kf(z) + \frac{1}{2}f(z)$$

and

$$\lim_{x \rightarrow z, x \in \Gamma_\tau^e(z)} \Phi f(x) = Kf(z) - \frac{1}{2}f(z)$$

at  $\mu$ -almost every boundary point  $z$ , where  $K$  is a bounded operator from  $\Lambda_\alpha^p(\partial D)$  to  $L^p(\mu)$  defined by

$$(1.7) \quad Kf(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d \setminus \overline{D}} \langle \nabla \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(z-y) \rangle dy \\ - \frac{1}{2} \int_D \langle \nabla \mathcal{E}(f)(y), \nabla_y N(z-y) \rangle dy.$$

## 2. Extensions of boundary functions

Hereafter we assume that  $D$  is a bounded domain in  $\mathbf{R}^d$  such that the boundary is a  $\beta$ -set satisfying  $d-1 \leq \beta < d$ .

Fix a positive Radon measure  $\mu$  on  $\partial D$  such that

$$(2.1) \quad b_1 r^\beta \leq \mu(B(z, r) \cap \partial D) \leq b_2 r^\beta$$

for all  $z \in \partial D$  and all  $r \leq r_0$ .

To extend  $f \in L^p(\mu)$  to be a function on  $\mathbf{R}^d$ , we use the Whitney decomposition.

More precisely, let  $G$  be an open set in  $\mathbf{R}^d$ . A cube  $Q$  is called a  $k$ -cube if it is of the form

$$[l_1 2^{-k}, (l_1 + 1) 2^{-k}] \times \cdots \times [l_d 2^{-k}, (l_d + 1) 2^{-k}],$$

where  $k, l_1, \dots, l_d$  are integers. We denote by  $\mathcal{W}_k(G)$  the family of all  $k$ -cubes in  $G$  and set  $\mathcal{W}(G) = \cup_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_k(G)$ . The following theorem is well-known (cf. [S, Theorem 1 in Chapter 6]).

**Theorem A.** *Let  $G$  be an open set in  $\mathbf{R}^d$ . Then there exists a family  $\mathcal{V}(G) = \{Q_k\}$  of cubes in  $\mathcal{W}(G)$  having the following properties:*

- (i)  $\cup_k Q_k = G$ ,
- (ii)  $\text{int } Q_j \cap \text{int } Q_k = \emptyset$  ( $j \neq k$ ),
- (iii)  $\text{diam } Q_k \leq d(Q_k, \mathbf{R}^d \setminus G) \leq 4 \text{diam } Q_k$ ,

where  $\text{int } A$ ,  $\text{diam } A$  and  $d(A, B)$  stand for the interior of  $A$ , the diameter of  $A$  and the distance between  $A$  and  $B$ , respectively.

Fix a positive real number  $\eta$  satisfying  $\eta < 1/4$  and choose a  $C^\infty$ -function  $\phi$  on  $\mathbf{R}^d$  such that

$$(2.2) \quad \phi = 1 \text{ on } Q_0, \quad \text{supp } \phi \subset (1 + \eta)Q_0, \quad 0 \leq \phi \leq 1,$$

where  $Q_0$  is the closed cube of unit length centered at the origin and  $(1 + \eta)Q_0$  stands for the set  $\{(1 + \eta)x : x \in Q_0\}$ .

We simply denote by  $\mathcal{V} = \{Q_k\}$  the family  $\mathcal{V}(\mathbf{R}^d \setminus \partial D)$ . Further let  $q^{(k)}$ ,  $l_k$  be the center of  $Q_k$  and the common length of its sides, respectively. For each  $k$  pick a point  $a^{(k)} \in \partial D$  satisfying  $d(Q_k, \partial D) = d(Q_k, a^{(k)})$  and fix it. Set

$$t(x) = \sum_k \phi\left(\frac{x - q^{(k)}}{l_k}\right)$$

and

$$\phi_k^*(x) = \frac{\phi((x - q^{(k)})/l_k)}{t(x)}.$$

Let  $p \geq 1$  and  $f \in L^p(\mu)$ . We define

$$\mathcal{E}_0(f)(x) = \sum_k \frac{1}{\mu(B(a^{(k)}, \eta l_k))} \left( \int_{B(a^{(k)}, \eta l_k)} f(z) d\mu(z) \right) \phi_k^*(x)$$

if  $x \in \mathbf{R}^d \setminus \partial D$  and  $\mathcal{E}_0(f)(x) = f(x)$  if  $x \in \partial D$ . Choose the greatest integer  $m$  satisfying  $\overline{D} \subset 2^{-(m+1)}Q_0$  and define

$$\mathcal{E}(f)(x) = \mathcal{E}_0(f)(x)\phi(2^{-m}x).$$

Then we see that  $\mathcal{E}(f)$  is a  $C^\infty$ -function in  $\mathbf{R}^d \setminus \partial D$  and  $\text{supp } \mathcal{E}(f) \subset 2^{-m+1}Q_0$ , where  $\text{supp } \mathcal{E}(f)$  stands for the support of  $\mathcal{E}(f)$ .

Hereafter we assume that  $\overline{D} \subset 2^{-(m+1)}Q_0 \subset B(0, R/2)$ . Then we see by the assumption (2.1) that

$$(2.3) \quad b_3 r^\beta \leq \mu(B(z, r) \cap \partial D) \leq b_4 r^\beta$$

for all  $z \in \partial D$  and all  $r \leq 4R$ .

**Lemma 2.1.** *Let  $\{B(a^{(i)}, \eta/2^k) \cap \partial D\}_i$  be the collection of all surface balls corresponding to the  $k$ -cubes  $Q_i \in \mathcal{V}$ . Then each boundary point  $z$  is contained in at most  $N$  of  $\{B(a^{(i)}, \eta/2^k) \cap \partial D\}_i$ , where  $N$  is a natural number independent of  $k$ .*

Using this lemma, we can show the following lemma.

**Lemma 2.2.** *Let  $\alpha > 0$ ,  $p > 1$ ,  $\delta \in \mathbf{R}$  and  $f \in \Lambda_\alpha^p(\partial D)$ . If  $p(\alpha - 1) + d - \beta + p\delta > 0$ , then*

$$\left( \int |\nabla \mathcal{E}(f)(y)|^p d(y, \partial D)^{\delta p} dy \right)^{1/p} \leq c \|f\|_{p, \alpha}.$$

### 3. Nontangential limits

In [W] we gave the following lemma.

**Lemma B.** *Let  $\delta, k$  be positive numbers satisfying  $d - \beta > \delta$  and  $d - \delta - k > 0$ . Then*

$$\int_{B(z,r)} d(y, \partial D)^{-\delta} |y - z|^{-k} dy \leq cr^{d-\delta-k}$$

for every  $z \in \partial D$  and  $r > 0$ .

On account of Lemmas B and 2.2, we can show the boundness of the operator  $K$ .

**Lemma 3.1.** *Let  $1 > \alpha > \beta - (d - 1)$  and  $p > 1$ . Then the operator  $K$  defined by (1.7) is bounded from  $\Lambda_\alpha^p(\partial D)$  to  $L^p(\mu)$ .*

We can estimate the nontangential maximal function as follows.

**Lemma 3.2.** *Suppose  $\alpha > \beta - (d - 1)$  and  $f \in \Lambda_\alpha^p(\partial D)$ , and define, for  $z \in \partial D$ ,*

$$(\Phi f)^*(z) := \sup\{|\Phi f(z)| : x \in \Gamma_\tau(z) \cap B(z, \epsilon_0)\}$$

and

$$(\Phi f)^{**}(z) := \sup\{|\Phi f(z)| : x \in \Gamma_\tau^e(z) \cap B(z, \epsilon_0)\}.$$

Then

$$\|(\Phi f)^*\|_p \leq c\|f\|_{p,\alpha} \quad \text{and} \quad \|(\Phi f)^{**}\|_p \leq c\|f\|_{p,\alpha}$$

**Lemma 3.3.** *Let  $f \in \Lambda_\alpha^p(\partial D)$ . Then there exists a sequence  $\{f_n\}$  of Lipschitz functions on  $\partial D$  such that*

$$\|f_n - f\|_{p,\delta} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

for each positive real number  $\delta < \alpha$ .

### 4. Proof of Theorem

Finally we prove our theorem.

Let  $f \in \Lambda_\alpha^p(\partial D)$  and choose  $\delta$  satisfying  $\beta - (d - 1) < \delta < \alpha$ . On account of Lemma 3.3 we can choose a sequence  $\{f_n\}$  of Lipschitz functions on  $\partial D$  such that  $\|f_n - f\|_{p,\delta} \rightarrow 0$ . For  $f_n$  we have, by [W, Theorem],

$$(4.1) \quad \lim_{x \rightarrow z, x \in D} \Phi f_n(x) = K f_n(z) + \frac{1}{2} f_n(z).$$

Since  $\|f_n - f\|_{p,\delta} \rightarrow 0$  and  $\|Kf_n - Kf\|_p \rightarrow 0$  by Lemma 3.1, we can choose a subsequence  $\{g_k\}$  of  $\{f_n\}$  such that

$$(4.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(z) = f(z) \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Kg_k(z) = Kf(z)$$

$\mu - a.e. z \in \partial D$ . Set

$$F_1 = \{z \in \partial D : |f(z)| = +\infty \text{ or } |Kf(z)| = +\infty\}$$

and denote by  $F_2$  the set of all points  $z \in \partial D$  at which (4.2) do not hold. Put  $F = F_1 \cup F_2$  and

$$E_b = \{x \in \partial D : \limsup_{x \rightarrow z, x \in \Gamma_r(z)} |\Phi f(x) - (Kf(z) + \frac{f(z)}{2})| > b\}$$

for  $b > 0$ . Note that for  $z \in \partial D \setminus F$

$$\begin{aligned} |\Phi f(x) - (Kf(z) + \frac{f(z)}{2})| &\leq |\Phi(f - g_k)(x)| + |\Phi g_k(x) - Kg_k(z) - \frac{g_k(z)}{2}| \\ &\quad + |K(g_k - f)(z) + \frac{g_k(z) - f(z)}{2}|. \end{aligned}$$

If  $z \in E_b \setminus F$ , then, by (4.1),

$$b \leq \limsup_{x \rightarrow z, x \in \Gamma_r(z)} |\Phi(f - g_k)(x)| + |K(f - g_k)(z)| + \frac{1}{2}|f(z) - g_k(z)|,$$

whence, together with Lemmas 3.1 and 3.2,

$$\begin{aligned} &\mu(E_b \setminus F) \\ &\leq \frac{c_1}{b^p} \left( \int_{E_b} (\Phi(f - g_k))^*{}^p d\mu + \int_{E_b} |K(f - g_k)|^p d\mu + \frac{1}{2} \int_{E_b} |f - g_k|^p d\mu \right) \\ &\leq \frac{c_2}{b^p} \|f - g_k\|_{p,\delta}^p. \end{aligned}$$

As  $k \rightarrow \infty$ , we see that  $\mu(E_b \setminus F) = 0$ . Since  $\mu(F) = 0$ , we conclude that  $\mu(E_b) = 0$  for every  $b > 0$ . Thus we have the conclusion.  $\square$

## References

- [H] J. E. Hutchinson, Fractals and selfsimilarity, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 713-747.
- [JW] A. Jonsson and H. Wallin, A Whitney extension theorem in  $L_p$  and Besov spaces, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 28, 1 (1978), 139-192.
- [S] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton- New Jersey, 1970.
- [W] H. Watanabe, The double layer potentials for a bounded domain with fractal boundary, Proceedings of ICPT'94 (To appear).

# Lipschitz 双対空間の順序と Lipschitz 双対写像のスペクトル性

澤島 侑子 (お茶大 理)

$E$  を実 Banach 空間、 $E^\#$  を  $E$  の Lipschitz 双対空間とする。すなわち、 $E^\#$  は  $E$  上の Lipschitz 連続な 0 で値 0 をとる関数の全体で、 $\| \cdot \|_L$  を Lipschitz 係数によって定めた Banach 空間である。 $E$  上の写像  $T$  が Lipschitz 連続で  $T0 = 0$  とすれば  $T$  の Lipschitz 双対写像  $T^\#$  が  $E^\#$  で定義され、 $E^\#$  上の有界線形作用素となる。従って、有界線形作用素に対する様々な理論を  $T^\#$  に適用することが出来る。また、 $E$  の双対空間の性質に対応して、Lipschitz 双対空間  $E^\#$ 、及び、その双対空間  $E^{\#\cdot}$  の性質も、既に得られている [1][2][3]。

今回は、Lipschitz 双対空間に 関数としての順序を定め、この順序構造の特性、及び、それが  $T^\#$ ,  $T^{\#\cdot}$  の固有値などのスペクトルの性質におよぼす影響について報告する。

## 1. $E^\#$ 及び $E^{\#\cdot}$ の順序の特性

$E^\#$  に上で述べた順序  $\leq$  を定める。すなわち、 $E^\#$  の元  $x^\#, y^\#$  について  $x^\# \leq y^\#$  とは、すべての  $x \in E$  に対して  $x^\#(x) \leq y^\#(x)$  が成り立つこととする。この順序による正錐を

$$E^\#_+ = \{x^\#; 0 \leq x^\# \in E^\#\}$$

とする。 $E^\#_+$  が閉凸錐で、かつ、 $E^\#_+ \cap -E^\#_+ = \{0\}$  となることは明かである。従って、 $E^\#$  はこの順序によって順序 Banach 空間となる。 $E^\#$  の通常の変対空間を  $E^{\#\cdot}$  と表し、 $\mathcal{L}_2$  Lipschitz 第 2 変対空間と呼ぶ。 $E^{\#\cdot}$  が通常の変対順序  $\leq$  によって 順序 Banach 空間となることはよく知られている。(  $x^{\#\cdot}, y^{\#\cdot} \in E^{\#\cdot}$  について  $x^{\#\cdot} \leq y^{\#\cdot}$  とは、すべての  $x^\# \in E^\#_+$  に対して  $x^{\#\cdot}(x^\#) \leq y^{\#\cdot}(x^\#)$  が成り立つことである)。  $E^{\#\cdot}$  の正錐を  $E^{\#\cdot}_+$  で表す。

すべての  $x \in E$  に対して  $e^\#(x) = \|x\|$  とおく。明らかに  $e^\#$  は  $E^\#_+$  の元である。

命題 1. 次が成り立つ。

(a)  $\|e^{\#}\|_L = 1$

(b)  $e^{\#}$  は  $E^{\#+}$  の内点である。

(c)  $e^{\#}$  は  $E^{\#}$  の単位球の最大元である。

証明 (a)  $|e^{\#}(x) - e^{\#}(y)| \leq \|x - y\|$  であり、とくに  $y = 2x$  であれば、等号が成り立つ。よって  $\|e^{\#}\|_L = 1$  である。

(b)  $0 < \varepsilon < 1$  とする。  $\|x^{\#} - e^{\#}\|_L < \varepsilon$  ならば

$$|e^{\#}(x) - x^{\#}(x)| \leq \varepsilon e^{\#}(x)$$

従って

$$0 \leq (1 - \varepsilon)e^{\#}(x) \leq x^{\#}(x) \leq (1 + \varepsilon)e^{\#}(x)$$

となる。  $e^{\#}$  の  $\varepsilon$ -近傍が  $E^{\#+}$  に含まれることが示された。

(c)  $\|x^{\#}\|_L \leq 1$  とする。  $|x^{\#}(x)| \leq \|x\| = e^{\#}(x)$  ( $\forall x \in E$ )

により、  $x^{\#} \leq e^{\#}$  は明かである。

命題 2.  $E^{\#}$  は ベクトル 束であり、その束演算  $U, \cap, |$  について次が成り立つ；  $E^{\#} \ni x^{\#}, y^{\#}$  について

$$\|x^{\#} \cup y^{\#}\|_L \leq \|x^{\#}\|_L + \|y^{\#}\|_L$$

$$\|x^{\#} \cap y^{\#}\|_L \leq \|x^{\#}\|_L + \|y^{\#}\|_L$$

$$\| |x^{\#}| \|_L = \|x^{\#}\|_L$$

しかし、Banach 束にはならない。

証明  $x^{\#}, y^{\#} \in E^{\#}$  に対し

$$(x^{\#} \cup y^{\#})(x) = \max \{x^{\#}(x), y^{\#}(x)\} \quad (\forall x \in E)$$

$$(x^{\#} \cap y^{\#})(x) = \min \{x^{\#}(x), y^{\#}(x)\} \quad (\forall x \in E)$$

$$|x^{\#}|(x) = |x^{\#}(x)| \quad (\forall x \in E)$$

によって束演算を定義する。

$$\begin{aligned} & |(x^{\#} \cup y^{\#})(x) - (x^{\#} \cup y^{\#})(y)| \\ & \leq |x^{\#}(x) - x^{\#}(y)| + |y^{\#}(x) - y^{\#}(y)| \\ & \leq (\|x^{\#}\|_L + \|y^{\#}\|_L) \|x - y\| \end{aligned}$$

であるから、  $x^{\#} \cup y^{\#}$  は  $E^{\#}$  に属し、  $\|x^{\#} \cup y^{\#}\|_L \leq \|x^{\#}\|_L + \|y^{\#}\|_L$

となる。同様に  $\|x^{\#} \cap y^{\#}\|_L \leq \|x^{\#}\|_L + \|y^{\#}\|_L$ 、  $\| |x^{\#}| \|_L \leq \|x^{\#}\|_L$

も示されて、ベクトル束となることも、用意に確かめられる。

$\| |x^{\#}| \|_L \geq \|x^{\#}\|_L$  を示そう。  $E$  の任意の元を  $x, y$  とする。

$x^{\#}(x)$  と  $x^{\#}(y)$  が同符号であるとき、

$$|x^{\#}(x) - x^{\#}(y)| = ||x^{\#}(x)| - |x^{\#}(y)|| \leq \| |x^{\#}| \|_L \|x - y\|$$

となる。

$x^{\#}(x)$  と  $x^{\#}(y)$  とが異符号であるとき、 $x$  と  $y$  とを結ぶ線分上の  $z$  で  $x^{\#}(z) = 0$  となる  $z$  が存在する。 $z$  が線分上にあるから

$$\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$$

である。よって、

$$\begin{aligned} |x^{\#}(x) - x^{\#}(y)| / \|x - y\| &= (|x^{\#}(x)| + |x^{\#}(y)|) / (\|x - z\| + \|y - z\|) \\ &\leq \max\{|x^{\#}(x)| / \|x - z\|, |x^{\#}(y)| / \|y - z\|\} \\ &\leq \|x^{\#}\|_L \end{aligned}$$

となり、 $\|x^{\#}\|_L \leq \| |x^{\#}| \|_L$  が示された。従って、 $\|x^{\#}\|_L = \| |x^{\#}| \|_L$  が得られた。しかし、「 $0 \leq x^{\#} \leq y^{\#}$  ならば  $0 \leq \|x^{\#}\|_L \leq \|y^{\#}\|_L$ 」は  $E$  が 1 次元であるときでも簡単な反例を作ることが出来る。従って  $E^{\#}$  は Banach 束とはならない。

注意  $E^{\#+}$  は正規的でない。順序 Banach 空間  $F$  が正規的であるとは、ある正数  $M$  が存在して、 $0 \leq x \leq y$  ならば  $\|x\| \leq M\|y\|$  が成り立つことである。一般に  $F$  が「正規的である」ことと「 $F^*$  が生成的である」こと（すなわち、 $F^* = F^{*+} - F^{*+}$ ）とは同値であることが知られている。従って、 $E^{\#+}$  は生成的でない。

命題 3. 次が成り立つ。

(a)  $E^{\#+} \ni x^{\#*}$  に対して  $\|x^{\#*}\| = x^{\#*}(e^{\#})$

(b)  $\Phi = \{x^{\#*}; \|x^{\#*}\| = 1, x^{\#*} \in E^{\#+}\}$  は  $\sigma(E^{\#*}, E^{\#})$ -コンパクト凸集合である。

証明 (a)  $E^{\#+} \ni x^{\#*}$  とする。

$$\|x^{\#*}\| = \sup\{|x^{\#*}(x^{\#})|; \|x^{\#}\|_L \leq 1\}$$

であるから、命題 1 (a) より  $x^{\#*}(e^{\#}) \leq \|x^{\#*}\|$  は明か。一方、 $\pm x^{\#} \leq |x^{\#}|$  であるから  $x^{\#*} \geq 0$  により

$$|x^{\#*}(x^{\#})| \leq x^{\#*}(|x^{\#}|) \leq \|x^{\#*}\| \| |x^{\#}| \|_L$$

となる。さらに、 $\| |x^{\#}| \|_L = \|x^{\#}\|_L$  により

$$|x^{\#*}(x^{\#})| \leq \|x^{\#*}\| \|x^{\#}\|_L$$

が得られる。よって、(a) が示された。

(b)  $E^{\#*}$  の単位球は  $\sigma(E^{\#*}, E^{\#})$ -コンパクトであり、 $\Phi$  が  $\sigma(E^{\#*}, E^{\#})$ -閉凸集合となることも、(a)を用いれば明かである。よって (b) が示された。

$E$  の  $E^{\#*}$  への埋め込み写像は、 $E$  の元  $x$  に対して

$$Qx(x^{\#}) = x^{\#}(x) \quad (\forall x^{\#} \in E^{\#})$$

によって定義されている。明らかに、 $QE \subset E^{\#}_+$  である。Q が等距離写像であることも示されている。[3]

## 2. Lipschitz 双対写像の正值性とスペクトル

$L(E)$  を  $E$  から  $E$  への Lipschitz 連続で、0 を 0 に移す写像の全体とし、 $T \in L(E)$  に対して

$$\|T\|_L = \sup \{ \|Tx - Ty\| / \|x - y\| ; x \neq y \}$$

とし、 $T$  の Lipschitz 双対写像  $T^{\#}$  を、 $x^{\#} \in E^{\#}$  に対し

$$T^{\#}x^{\#}(x) = x^{\#}(Tx) \quad (\forall x \in E)$$

と定義する。 $T^{\#}$  は  $E^{\#}$  上の有界線形作用素であるから、

$$\|T^{\#}\| = \sup \{ \|T^{\#}x^{\#}\|_L ; \|x^{\#}\|_L \leq 1, x^{\#} \in E^{\#} \}$$

と定める。 $T^{\#}$  の通常の意味での双対写像を  $T^{\#*}$  で表す。 $T^{\#}$  のスペクトル半径を  $r(T^{\#})$  と記すと  $r(T^{\#}) = \lim_n \| (T^{\#})^n \|^{1/n}$  である。

$$\|T\|_L = \|T^{\#}\| = \|T^{\#*}\|$$

$$r(T) = \lim_n \|T^n\| = r(T^{\#}) = r(T^{\#*})$$

も成り立っている。[3]

命題 4.  $T^{\#}$  は  $E^{\#}$  上の順序を保存する有界線形作用素である。すなわち、 $T^{\#}E^{\#}_+ \subset E^{\#}_+$  である。また、

$$\begin{aligned} \|T^{\#}\| &= \sup \{ \|T^{\#}x^{\#}\|_L ; \|x^{\#}\|_L \leq 1, x^{\#} \in E^{\#}_+ \} \\ |T^{\#}x^{\#}| &= T^{\#}|x^{\#}| \quad (\forall x^{\#} \in E^{\#}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

証明  $T^{\#}E^{\#}_+ \subset E^{\#}_+$ 、及び  $|T^{\#}x^{\#}| = T^{\#}|x^{\#}|$  は  $E^{\#}$  の順序と東演算の定義から明かである。次に

$$\alpha = \sup \{ \|T^{\#}x^{\#}\|_L ; \|x^{\#}\|_L \leq 1, x^{\#} \in E^{\#}_+ \}$$

とおく。 $\|T^{\#}\| \geq \alpha$  は明かである。 $\|T^{\#}\| \leq \alpha$  は

$$\|T^{\#}x^{\#}\|_L = \| |T^{\#}x^{\#}| \|_L = \| T^{\#}|x^{\#}| \|_L$$

となることから示される。

$T^{\#}$  は  $E^{\#}$  正作用素となったが、 $E^{\#}$  の順序が正規性を持たないため、今までに知られた Perron-Frobenius タイプの正作用素に関する結果はこの  $T^{\#}$  に適用できない。予稿集に「 $r(T^{\#})$  が  $T^{\#}$  のスペクトルとなる」こと、及び、「 $r(T^{\#})$  が  $T^{\#*}$  の固有値となる」ことを述べたが、その証明に誤りがあり、いまだに訂正できていない。ここでは、 $T$  にある条件（次の補題の (a), (b), (c) のいずれか）を仮定して  $T^{\#*}$  の正の固有値の存在を示す。

$$\Phi = \{ x^{n*} ; \| x^{n*} \| = 1, x^{n*} \in E^{n*+} \} \text{ とおく。}$$

補題 1.  $L(E) \ni T$  に関する次の性質は同値である :

(a) ある正数  $\varepsilon$  が存在して、すべての  $x \in E$  について

$$\| Tx \| \geq \varepsilon \| x \|$$

(b)  $T^n e^n$  は  $E^{n*+}$  の内点である,

(c)  $0 \notin T^{n*} \Phi$

証明 (a) を仮定する。  $T^n e^n$  の  $\varepsilon$  近傍  $U$  が  $E^{n*+}$  に含まれることを示す。  $x^n \in U$  とする。すべての  $x \in E$  に対して

$$|T^n e^n(x) - x^n(x)| \leq \|T^n e^n - x^n\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

よって

$$T^n e^n(x) - \varepsilon \|x\| \leq x^n(x).$$

(a) より

$$0 \leq \|Tx\| - \varepsilon \|x\| = T^n e^n(x) - \varepsilon \|x\| \leq x^n(x)$$

となり、  $x^n \in E^{n*+}$ 。すなわち、  $U \subset E^{n*+}$  となり、(b) が示された。

(b) を仮定する。  $T^n e^n$  は  $E^{n*+}$  の非接点である。すなわち、  $0 \neq x^{n*} \in E^{n*+}$  に対して  $\|T^{n*} x^{n*}\| = x^{n*}(T^n e^n) > 0$ 。よって、  $T^{n*} \Phi$  は  $0$  を含まない。(c) が示された。

(c) を仮定する。  $T^{n*}$  は  $\sigma(E^{n*+}, E^n)$ -連続であるから  $T^{n*} \Phi$  も  $\sigma(E^{n*+}, E^n)$ -コンパクトであり、従って、  $\{T^{n*} x^{n*}(e^n); x^{n*} \in \Phi\}$  の最小値が存在する。(c)によって、この値は正である。これを  $\varepsilon$  とおく。  $E$  の任意の元  $x$  に対し、  $Qx \in E^{n*+}$ 、かつ、  $\|Qx\| = \|x\|$  であったから、

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon &\leq T^{n*}(Qx/\|x\|)(e^n) = T^{n*} Qx(e^n)/\|x\| \\ &= T^n e^n(x)/\|x\| = \|Tx\|/\|x\| \end{aligned}$$

となり、(a)が示された。

定理 1. Banach空間  $E$  上の非線形作用素  $T$  が Lipschitz 連続、  $T0 = 0$ 、かつ、次の条件をみたすとする ; ある正数  $\varepsilon$  が存在して、

$$\|Tx\| \geq \varepsilon \|x\| \quad (\forall x \in E)$$

となる。このとき、  $T^{n*}$  の正の固有値  $\lambda$ 、  $\lambda \leq r(T)$ 、とその固有ベクトル  $v$ 、  $\|v\| = 1$ 、  $v \in E^{n*+}$  が存在する。

証明 補題 1 により、  $\Phi$  から  $\Phi$  への次の写像  $A$  が定義できる ;

$$Ax^{n*} = (T^{n*} x^{n*}) / \|T^{n*} x^{n*}\| \quad (\forall x^{n*} \in \Phi)$$

命題 3 により、  $A$  は  $\sigma(E^{n*+}, E^n)$ -連続であり、  $\Phi$  は  $\sigma(E^{n*+}, E^n)$ -コンパクト凸集合である。  $A$  に Tikhonov の不動点定理を用いれば  $Av = v$  をみたす  $\Phi$  の元  $v$  が存在する。この  $v$  は  $T^{n*} v = \|T^{n*} v\| v$

を満たしている。すなわち、正数  $\|T^{\#*} \cdot v\|$  は  $T^{\#*}$  の固有値であり、 $v$  はその固有ベクトルとなる。 $\|(T^{\#*})^n v\| = \|T^{\#*} \cdot v\|^n$  であるから

$$0 < \|T^{\#*} \cdot v\| \leq \lim_n \|(T^{\#*})^n v\|^{1/n} = r(T)$$

が示され、定理 1 が証明された。

注意  $\alpha$  が  $T^{\#*}$  の固有値で、その固有ベクトル  $v$  が  $QE$  に属すれば、 $\alpha$  は  $T$  の固有値となる。

#### 参考文献

- [1] 澤島侑子, 順序を保存する作用素の固有値について, 第 1 回関数空間セミナー報告集, Hokkaido Univ. Technical Report Series in Math., 26, 1993, pp35-40.
- [2] \_\_\_\_\_, Ergodicity of Lipschitz dual operators. 第 2 回関数空間セミナー報告集, Hokkaido Univ. Technical Report Series in math. 29, 1994, pp72-78.
- [3] I. Sawashima, Methods of duals in nonlinear analysis. Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory, Lecture Note in Economics and Matheatical Systems, 419, Springer, 1995, pp247-259.

# $L^p$ -convergence of an extended stochastic integral. II.

新谷俊忠(苫小牧高専)

## [I] マルチンゲール不等式

次は同値がよく知られている。

定理 A.  $f = (f_n)_{n \geq 0}$  が  $L^1$ -有界マルチンゲール

$$\Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ a.e. 且 } \exists f_\infty \in L^1.$$

定理 B.  $1 < p < \infty$  とする。  $f = (f_n)_{n \geq 0}$  が  $L^p$ -有界マルチンゲール

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_\infty\|_p = 0 \text{ 且 } \exists f_\infty \in L^p.$$

まず、次の定理を証明しよう。

定理 1.  $f = (f_n)_{n \geq 0}$  が  $L^1$ -有界マルチンゲール

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |f_n - f_\infty| < \infty \text{ a.e.}$$

定理 2.  $1 < p < \infty$  とする。  $f$  が  $L^p$ -有界マルチンゲール

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n - f_\infty\|_p < \infty$$

$$\text{従って、} \sum_{n=0}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \leq c \cdot \sup_n \|f_n\|_p$$

となる  $f$  に依存しない定数  $c > 0$  が存在する。

定理 2 の不等式から predictable を仮定せずに Burkholder の  $L^p$  不等式が出る。定理 1 と定理 2 は同値であるが、定理 2 の証明は定理 1 の証明と全く同様なので、定理 1 を証明しよう。これらの定理は  $f$  が  $L^1$ -有界又は  $L^p$ -有界なマルチンゲールでないと成り立たない。

(証明) まず、 $f_n \rightarrow f_\infty$  を使って背理法で無限個の  $n$  に対して (即ち有限個の  $n$  を除いて)  $\sqrt[n]{|f_n - f_\infty|} < 1$  a.e. が出る。そこで  $x_n(\omega) = \sqrt[n]{|f_n(\omega) - f_\infty(\omega)|}$

とおくと一般性を失うことなく  $0 \leq x_n(\omega) < 1$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) としよ。

$x_n(\omega)$  を以下  $x_n$  と書く。集合  $\{x_1(\omega), x_2(\omega), x_3(\omega), \dots\}$  は可算無限で有界な実数の集合であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により集積点がある。最大の集積点を  $r$  とすれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = r \leq 1.$$

$r < 1$  を証明する。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = 1$  即ち  $r = 1$  を仮定する。このとき、

$$\text{左辺} = \inf_n \{ \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) \} \leq \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$$

即ち、 $\sup(x_n, x_{n+1}, \dots) \geq 1$ 。

今  $\sup(x_n) = x_n$ ,  $\sup(x_n, x_{n+1}) = x_n \vee x_{n+1}, \dots$

であるから、

$v(t)$  は  $[0, 1]$  上 一様連続だから、 $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta > 0$  が存在する。 $m \rightarrow \infty$  のとき  $|\Delta_m| \rightarrow 0$  だから、

$$\begin{aligned} \delta > |\Delta_{m'}| &= \max_k (t_{m',k+1} - t_{m',k}) \quad (\forall m' \geq m_0(\omega)) \\ &\geq \xi_{m',k} - t_{m',k} \geq 0 \quad (\forall k \geq 0) \end{aligned}$$

$$\therefore \varepsilon \geq |v(\xi_{m',k})(\omega) - v(t_{m',k})(\omega)| \quad (\forall k \geq 0).$$

故に、

$$\begin{aligned} &\|\theta_{m'} - \tilde{\theta}_{m'}\|_p \\ &\leq \sum_{k \geq 0} E^{1/p} [ (|v(\xi_{m',k}) - v(t_{m',k})| |f(t_{m',k+1}) - f(t_{m',k})|)^p ] \\ &\leq \sum_{k \geq 0} E^{1/p} [ (\varepsilon \cdot |f(t_{m',k+1}) - f(t_{m',k})|)^p ] \\ &\leq \sup_{\substack{m' \\ \omega \in \Omega}} \varepsilon \cdot \sum_{k \geq 0} \|f(t_{m',k+1}) - f(t_{m',k})\|_p \\ &\leq \sup_{\substack{m' \\ \omega \in \Omega}} \varepsilon \cdot \left\{ C \cdot \sup_n \|f(t_{m',n})\|_p \right\} \\ &\quad \left( \{f(t_{m',k})\}_{k \geq 0} \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上 } L^p \text{ 空間} \right) \\ &\leq \sup_{\substack{m' \\ \omega \in \Omega}} \varepsilon \cdot \left\{ C \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_p \right\} \\ &\leq \varepsilon \cdot C \cdot \|f(1)\|_p. \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m - \tilde{\theta}_m\|_p &= \lim_{m' \rightarrow \infty} \|\theta_{m'} - \tilde{\theta}_{m'}\|_p \\ &\leq \varepsilon \cdot C \cdot \|f(1)\|_p \quad \text{for all } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned} &\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\theta_m - \theta_n\|_p \\ &\leq 2 \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m - \tilde{\theta}_m\|_p + \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}_m - \tilde{\theta}_n\|_p \\ &< 2\varepsilon \cdot C \cdot \|f(1)\|_p + 0 \quad \text{for all } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

$\{\theta_m\}$  は Cauchy 列だから、 $L^p$  の完備性に依り、 $\theta_m$  は  $L^p$  上収束する。即ち  $\theta_\infty$  が  $L^p$  上存在し、

$$\theta_\infty = \tilde{\theta}_\infty = \int_0^1 v(t) df(t).$$

$$\theta_m = \sum_{k=0}^{s_m-1} v(\xi_{m,k}) \cdot [f(t_{m,k+1}) - f(t_{m,k})] \quad (\forall \xi_{m,k} \in [t_{m,k}, t_{m,k+1}], k \geq 0),$$

$$\tilde{\theta}_m = \sum_{k=0}^{s_m-1} v(t_{m,k}) \cdot [f(t_{m,k+1}) - f(t_{m,k})]$$

とおく。

定理3.  $\theta_m$  は  $L^p$  に収束する。

極限  $\theta_\infty = \tilde{\theta}_\infty = \int_0^1 v(t) df(t)$  は新しい確率積分を定義する。

系.  $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$  は Brown 運動とするとき、

$\int_0^1 v(t) dB(t)$  は  $L^2$  に収束する。

従って、Itô 積分と Stratonovich 積分は一致する。

(定理の証明)

$$\begin{aligned} \|\theta_m\|_p &\leq E^{1/p} \left[ \left( \sum_{k \geq 0} |v(\xi_{m,k})| \cdot |f(t_{m,k+1}) - f(t_{m,k})| \right)^p \right] \quad (|v| \leq 1) \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \|f(t_{m,k+1}) - f(t_{m,k})\|_p \\ &\leq C \cdot \sup_k \|f(t_{m,k})\|_p \\ &\leq C \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|f(t)\|_p \\ &\leq C \cdot \|f(1)\|_p, \end{aligned}$$

もし、 $\theta_\infty$  が存在すれば、

$$\|\theta_\infty\|_p = \|\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m\|_p \leq C \cdot \|f(1)\|_p < \infty.$$

次に、 $\theta_\infty$  の存在を示そう。

P.W. Millar の結果により  $\tilde{\theta}_m$  は  $L^p$  に収束する。即ち、

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\tilde{\theta}_m - \tilde{\theta}_n\|_p = 0.$$

$\varepsilon > 0$  を任意に取り、これを固定する。

$v(t)$  は  $[0, 1]$  上で一様連続だから十分大きな  $m_0 = m_0(\varepsilon, \omega) = m_0(\omega) \geq m$  に対して、

$$|v(\xi_{m,k})(\omega) - v(t_{m,k})(\omega)| \leq \varepsilon \quad (\forall k \geq 0, \forall m \geq m_0)$$

となることを示そう。

$n \rightarrow \infty$  とし  $a_n \rightarrow a_\infty$  より

$$1 = a_{n+\lim_{m \rightarrow \infty} j_m} \rightarrow a_\infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

$\therefore a_\infty = 1$ . 一方、 $f$  がマルチンゲールであることを使って  $a_\infty = 0$  である。  
これは矛盾である。

故に、①, ② から  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n \neq 1$  即ち  $\gamma < 1$ .

Cauchy の判定法に依り殆ど全ての  $\omega$  に対して正項級数  $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(\omega) - f_\infty(\omega)|$  は収束する。(此所で " $f_n$ " はマルチンゲールである。)

即ち、 $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n - f_\infty| < \infty$  a.e. (証明終)

定理 1 の証明で  $x_n$  における  $|\cdot|$  を  $\|\cdot\|_p$  で置きかえると定理 2 が出る。

又、定理 1 で " $f_n \rightarrow f_\infty$  in  $L^1$  ならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n - f_\infty\|_1 < \infty$  が出る。

定理 2 から  $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p < \infty$  ( $\forall f \in M^p$ ) となる。

実数の集合  $\{K(f); 0 \leq K(f) < \infty, f \in M^p\}$  ( $M^p$  は  $L^p$  有界マルチンゲール全体)

は半数直線  $\mathbb{R}_+$  の部分集合として有界な全順序部分集合である。

これは帰納的有限順序集合だから  $\sum \omega_n$  の補題により極大元  $K < \infty$  を持つ。

$$\frac{K}{\sup_{f \in M^p} \|f_n\|_p} \leq \frac{K}{\sup_n \|f_n\|_p} \quad \text{に注意して} \quad \frac{K}{\sup_n \|f_n\|_p} < C$$

となるように定数  $C > 0$  を大きく取ると、 $C$  は  $f$  に無関係で、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p < C \cdot \sup_n \|f_n\|_p$$

となる。此の不等式は石確率積分から predictable の仮定を外すのに用いられる。

## [II] 石確率積分の $L^p$ 収束.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  は石確率空間,  $\{\mathcal{A}_t\}_{t \geq 0}$  は  $\mathcal{A}$  の部分  $\sigma$ -代数の増大族とする。  $1 < p < \infty$  とする。  $f = \{f(t), 0 \leq t \leq 1\}$  は  $(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}_t\}, P)$  上の  $L^p$  可積分なマルチンゲールとし、  $V = \{v(t), 0 \leq t \leq 1\}$  は石確率過程とする。  
 $|v| \leq 1$ ,  $v(t)$  は連続,  $v(t)$  は  $\mathcal{A}_t$  適合を仮定する。  $\Delta = \{\Delta_m\}$ ,  $\Delta_m = \{t_{m,k}; 0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \dots < t_{m,S_m} = 1\}$  は  $[0, 1]$  の分割(細分)の列で  $m \rightarrow \infty$  のとき  $|\Delta_m| = \max_k (t_{m,k+1} - t_{m,k}) \rightarrow 0$  を満足するものとする。(此所で " $m \uparrow \infty$  なら  $S_m \uparrow \infty$  である。)

$$\sup(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \exists x_{n+\delta_m} \quad (0 \leq \delta_m \leq m; m=0, 1, 2, \dots)$$

よしてよ。此所て自然数の列  $\delta_m$  は単言周増加に取れる。

この式で  $m=0, 1, 2, \dots$  とし、

$$\sup(x_n, x_{n+1}, \dots) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+\delta_m} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$x_{n+\delta_m} \uparrow (m \uparrow \infty)$ ,  $x_{n+\delta_m} \leq 1$  に注意すると、 $1 \leq \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+\delta_m} \leq 1$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )  
となるので、 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+\delta_m} = 1$  ( $n=1, 2, \dots$ )。

此所て、 $a_n = |f_n(\omega) - f_\infty(\omega)|$  とおくと、 $f$  がマシクマシクし、 $a_n \rightarrow a_\infty = 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
( $a_n$  はマシクマシクし) であることに注意する。即ち、 $f = (f_n)_{n \geq 0}$  がマシクマシクし  
るとき  $a_n$  が定義され  $a_n \rightarrow 0$  となる。

① もし、或る  $n$  があて、 $m \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_m \rightarrow \infty$  の場合。

$$1 = \lim_{m' \rightarrow \infty} 1^{m'} = \lim_{m' \rightarrow \infty} ( \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+\delta_m} )^{m'} = \lim_{m' \rightarrow \infty} \{ \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+\delta_m} \}^{m'} = \exists \lim_{m' \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{m'}$$

此所の処を詳しく述べよう。 $\lim_{m' \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{m'} = 1$  ( $m'=0, 1, 2, \dots$ ) より

$\forall \varepsilon > 0$  に対して  $\exists N(\varepsilon, m') < \infty$  と、 $\forall m > N(\varepsilon, m')$  に対し

$$| (x_{n+\delta_m})^{m'} - 1 | < \varepsilon \text{ となる。集合 } \{ N(\varepsilon, m') ; N(\varepsilon, m') < \infty, m'=0, 1, 2, \dots \}$$

は  $N$  の上に有界な全順序部分集合で、これはリ帰納的な順序集合たるから、  
空の補題により極大元  $N(\varepsilon) < \infty$  を持つ。  $\therefore \forall m > N(\varepsilon)$  に対し

$$| (x_{n+\delta_m})^{m'} - 1 | < \varepsilon \quad (m'=0, 1, 2, \dots) \text{ 且 } \lim_{m' \rightarrow \infty} \{ \lim_{m \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{m'} \} = 1.$$

$\therefore \forall m > N(\varepsilon), \forall m' > N(\varepsilon)$  に対し、 $| (x_{n+\delta_m})^{m'} - 1 | < \varepsilon$ 。

即ち、 $\exists \lim_{m' \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{m'} = 1$ 。

よして、

$$1 = \lim_{m' \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{m'} = \lim_{m' \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{m'} = \lim_{m' \rightarrow \infty} a_{m'} = a_\infty = 0$$

( $m \rightarrow \infty \Rightarrow m' \rightarrow \infty$ )

となり矛盾が出る。(この矛盾を出すには  $f$  がマシクマシクし"ある"ことを使っている)

② もし、各  $n$  に対して  $m \rightarrow \infty$  のとき、 $\delta_m < \infty$  の場合。  
この場合  $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m$  が存在する。

$$1 = \lim_{m'' \rightarrow \infty} 1^{n+\delta_m} = \lim_{m'' \rightarrow \infty} ( \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n+\delta_m} )^{n+\delta_m}$$

$$= \lim_{m'' \rightarrow \infty} \{ \lim_{m \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{n+\delta_m} \}$$

|| uniformly in  $m''$  ( $0 \leq \delta_m \leq m''$ )

$$= \exists \lim_{m'' \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{n+\delta_m} \quad (\textcircled{1} \text{ の場合と同様にして。})$$

$$= \lim_{m'' \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{n+\delta_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (x_{n+\delta_m})^{n+\delta_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n+\delta_m}$$

$$= a \lim_{m \rightarrow \infty} (n+\delta_m) = a_{n+\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m}.$$

## References

- [1] D. L. Burkholder : Martingale transforms, Ann. Math. Statist., 37, 1494-1504 (1966).
- [2] N. Ikeda and S. Watanabe : Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland (1981)
- [3] P. W. Millar : Martingale integrals. Trans. Amer. Math. Soc., 133, 145-166 (1968).
- [4] G. Pisier : Martingale with values in uniformly convex spaces. Israel J. Math., 20, 326-350 (1975).
- [5] T. Shintani (with T. Ando) : Best approximants in  $L^1$  space.  $\Sigma$ . Wahr., 33, 33-39 (1975).
- [6] ————— (with D. L. Burkholder) : Approximation of  $L^1$ -bounded martingales by martingales of bounded variation. Proc. Amer. Math. Soc., 72, 166-169 (1978).
- [7] ————— : A proof of the Burkholder theorem for martingale transforms. Proc. Amer. Math. Soc., 82, 278-279 (1981).
- [8] ————— :  $L^p$ -convergence of an extended stochastic integral. ICM 94, Zürich (1994).

# 並べかえ理論再考

信大・工 酒井雄二

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$  の減少並べかえを  $\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \in \mathbf{R}^n$  と定める.  
ここに  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$  は  $a_1, a_2, \dots, a_n$  を大きさの順に配列したものである.  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$  のとき  $\mathbf{a} \ll \mathbf{b}$  を

$$\sum_{i=1}^k a_i^* \leq \sum_{i=1}^k b_i^*, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

と定めれば "  $\ll$  " は *Hardy - Littlewood - Pólya* の前順序である.

$$\mathbf{a} \ll \mathbf{b} \iff \text{全ての増加凸関数 } \Phi \text{ に対して } \Phi(\mathbf{a}) \ll \Phi(\mathbf{b})$$

が成立することから, この前順序にまつわる多くの研究がなされてきた([1],[3]).  
著者は *Generator* という概念を並べかえ理論に導入し, さらに *Generator* に関する並べかえを定義し "並べかえ" に自由性を持たせることに成功した([4],[5]).

ここでは  $\mathbf{R}^n$  の要素の並べかえに焦点を絞り, 並べかえを再考する.

先ず  $n = 4$  の場合に *Generator* を説明しよう.  $G_1 = \{1\}$ ,  $G_2 = \{1, 3\}$ ,  $G_3 = \{1, 3, 4\}$ ,  $G_4 = \{1, 3, 4, 2\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , そして  $G = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$  とおけば, この  $G$  が  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  に対する *Generator* の例である. ここで我々は,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を  $X$  上の関数であると考えている.

一般的には任意の集合族  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  が条件

$$\text{Card}(G_i) = i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を満たすとき  $G$  は *Generator* であると定義する.

つぎに *Generator* に関する並べかえの定義に移ろう.

*Generator*  $G$  に関する  $\mathbf{a}$  の並べかえ  $\hat{\mathbf{a}}$  を

$$a_1^* = \hat{a}_1, \quad a_2^* = \hat{a}_3, \quad a_3^* = \hat{a}_4, \quad a_4^* = \hat{a}_2$$

同じことであるが,

$$\hat{a}_1 = a_1^*, \hat{a}_2 = a_4^*, \hat{a}_3 = a_2^*, \hat{a}_4 = a_3^*$$

と定義する. このとき

$\hat{a}$  は集合  $\{a_1, a_2, \dots, a_4\}$  の要素を  $a \mapsto a^*$  とは別の基準によって再配列したものである

$\hat{a}$  を一般式で書き改めれば次のようになる.

$$\hat{a} = (a_1^* - a_2^*)1_{G_1} + (a_2^* - a_3^*)1_{G_2} + \dots + (a_{n-2}^* - a_{n-1}^*)1_{G_{n-1}} + a_n^*1_{G_n}$$

このとき

$$\hat{a}^* = a^*$$

なので

$$\begin{aligned} a \ll b &\iff \hat{a} \ll \hat{b} \iff \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i - u)^+ \leq \sum_{i=1}^n (\hat{b}_i - u)^+ \quad (u \text{ は任意の実数}) \\ &\iff \sum_{i=1}^n (a_i - u)^+ \leq \sum_{i=1}^n (b_i - u)^+ \quad (u \text{ は任意の実数}) \end{aligned}$$

がいえる.

この *Generator* という概念の導入と, それに関する並べかえとは, "どんな立場に立って関数値の並べかえについてもの申すか" という一つの視座を定めることに等しい.

著者は並べかえ問題を MIZAR システムで記述しようと考えた. この MIZAR はポーランドの数学者 Andrzej Trybulec 博士により創始されたプルーフ・チェッカーである. これは実数に関する僅かばかりの性質と

Alfred Tarski :

Über unerreichbare Kardinalzahlen, *Fundmnta Mathematicae*, vol.30 (1938), pp.68-69

On Well-Ordered Subsets of any Set, *Fundmnta Mathematicae*, vol.32 (1939), pp.176-183

を拠り所として選択公理を巧みに含ませた証明記述言語である.

著者は共著者のコトヴィツチ氏と, 上述の結果をめぐって, 約 6, 0 0 0 行のファイルを書き下ろした ([5],[6]).

その際番最初につまずいたのが以下の問題であった。

我々は数学用語  $\mathbf{R}^n$  をどんな意味で用いてきたのか。

並べかえの理論を論ずるとき、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  は本来の関数解析的な意味での”関数” = ”finite-sequence” と考えれば十分である。これが一つの答えである。そして単に  $\mathbf{a}^*$  を考えるだけなら  $\mathbf{a}$  は  $\mathbf{R}^n$  というユークリッド空間の点である必要はどこにもなかったことに気がつく。さらに、関数の定義域  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  に *Generator* を考えるということは  $X$  に一つの順序を定めることに等しい。

この特別な例が  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  の記述では

$$X = \text{順序対 } \{1, 2, 3, 4, \dots, n\} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, \dots, n\}\}$$

であった。そして  $X$  の別の *Generator* として、

$$G = \{n, \{n, n-1\}, \{n, n-1, n-2\}, \dots, \{3, 2, 1\}, \{2, 1\}, 1\}$$

と定めれば、この場合には  $\hat{\mathbf{a}}$  はいわゆる増加並べかえ  $\mathbf{a}_*$  に等しい。

MIZAR を用いて ”数学的論文” を記述してみると、我々がいかに曖昧な論理を証明に用いているかがよく解る。そして次々と不確かな概念の再認識に迫られる。MIZAR は一般位相空間論のような意識的な約束事からなる抽象数学には最適である。一方幾何学的な直感的概念を含む論文がいかに曖昧に証明されているかを発見するのも非常に得意である。Jordan の曲線定理の証明に関する中村氏による数十本の MIZAR ファイルが書かれているが、それでもまだこの定理の証明は完成しない。

”直感的に明らか” これほど楽しく恐ろしい言葉はない。ときには”直感的には明らかではない”ことを追求するのもまた面白いものである。

## References

1. T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* 118(1989), 163-248.
2. J. Kotowicz and Y Sakai, Properties of Partial Functions from a Domain to the set of Real Numbers, *Formalized Math.* 3(2)(1992), 279-288.

3. A. W. Marshall and I. Olkin, INequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press 1979.
4. Y. Sakai, Some Rearrangement Inequalities for Generators, 1988年実解析セミナー報告集, 173-178.
5. Y. Sakai, Convex Functions and G-Rearrangements on Intervals, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University 41(1989), 1-21.
6. Y. Sakai and J. Kotowicz, Introduction to Theory of Rearrangement, to appear in Formalized Marh.

# 不等式のヴィジュアルな証明

富山大学 理学部 久保 文夫

## 1 Introduction

一つの不等式を理解する道は沢山あります。この講演では、良く知られている不等式を例にとって、それを自明にするような電気回路を設計します。不等式の電気工学的証明とでも言えば良いでしょうか。

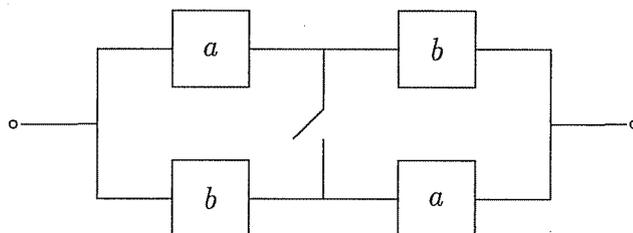
不等式の中で比べられるものは何か、を明らかにしておきます。比較の対象になるのは、数、行列、線型作用素です。比較の基準は、数の通常の順序、行列の非負定値性による順序、及びその次元 free な一般化としての作用素の順序です。講演で述べられる例は、これらに共通して成り立ちます。

これらを比べる不等式を自明にするような電気回路の部品 (素子, element) はそれぞれ、電気抵抗、多端子対回路、及びそれらの  $\mathcal{J}$ deen たる理想的な回路です。提示される図は電気抵抗を部品とする設計図ですが、端子の対の数を増やしても同様に出来ることは明らかです。

### 1.1 例：算術平均 $\geq$ 調和平均

$$a, b \geq 0 \implies \frac{a+b}{2} \geq 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1} \dagger.$$

図 1: 算術平均と調和平均



この不等式は次の回路を眺めると自明です。何故ならば、switch を閉じた (on) 回路では switch を開いた (off) 回路よりも電流の流れ方に自由度が増しています。自然界

<sup>†</sup>上で  $a = 0$  或いは  $b = 0$  の場合には逆数がないので定義されていないように見えますが、連続性を用いて定義したものをこの式で表していると解釈します。以下同様です。

は、発生するエネルギーが成る可く小さくなるような状態を選択する事 (Maxwell の原理) に拠って、switch を閉じた (on) 時の合成抵抗より switch を開いた (off) 時の合成抵抗が小さくなります。また、この合成抵抗を計算して、上の二つの平均が得られる事が分かります。即ち、この設計図の回路は不等式を自明にしています。

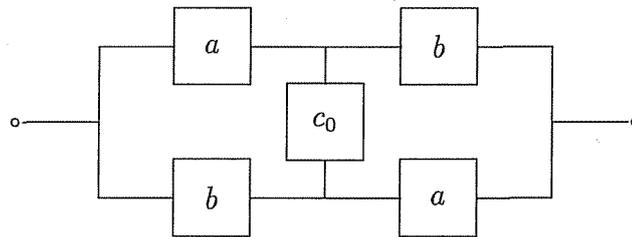
## 1.2 幾何平均

$$a, b \geq 0 \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1}.$$

平均の不等式に関して、算術平均を調和平均と比べるより幾何平均と比べるほうがポピュラーです。然し、上のような直列と並列の二通りの接続を単純に組み合わせるだけでは幾何平均を表すことが出来ない事が知られています。そこで、この不等式を自明にするような電気回路の設計を例としてこの講演を進めます。

まず、switch というものは、開閉することで夫々、 $\infty$  と  $0$  との二つの値を取る事が出来るような可変抵抗器と見なします。switch をもっと色々な値を取る事の出来る可変抵抗器に置き換えることで電気回路 (bridge) を設計する事にします。bridge 中の可変抵抗器を操作して合成抵抗の値が  $\sqrt{ab}$  となるように出来るだろうか、というのが問題となります。

図 2: 幾何平均



## 2 Analysis

### 2.1 三端子回路

switch を抵抗  $c_0$  で置き換えた電気回路の合成抵抗を計算するにも色々な方法があります。講演では次のような三端子回路の変換によって合成抵抗を計算します。

图 3: 变换 1

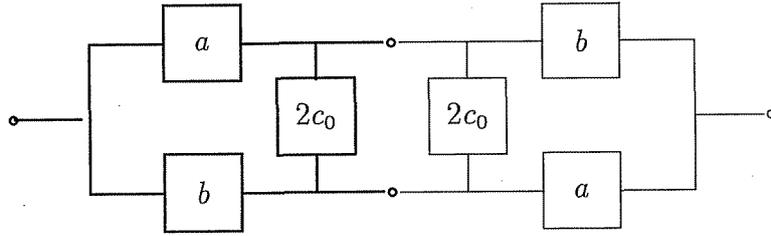


图 4: 变换 2

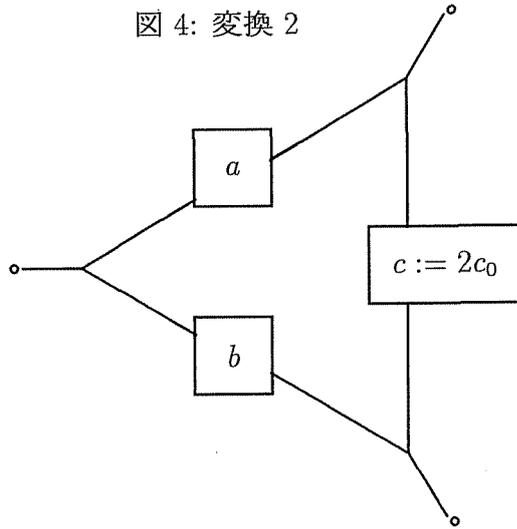


图 5: 变换 3

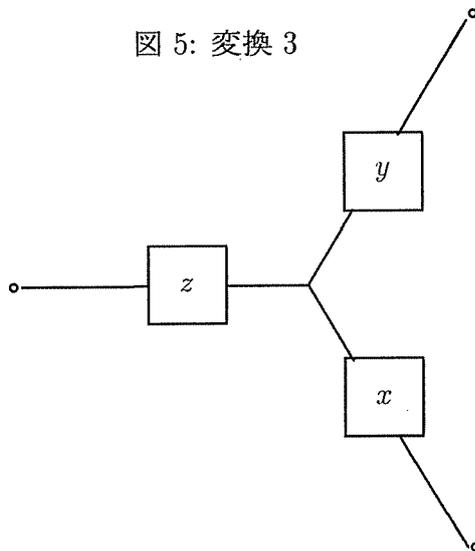
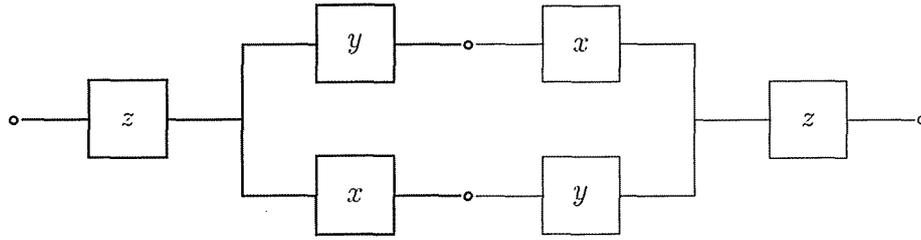


図 6: 変換 4



## 2.2 等価性の問題

$a, b, c \geq 0$  を与えて図 4, 図 5 が三端子回路として等価になるように出来るでしょうか.

定理.  $a, b, c \geq 0$  を与えて図 4, 図 5 が三端子回路として等価になるように出来、解を書き下せる.

電気抵抗に関してはこの事実は良く知られており,

$$z = \frac{ab}{a+b+c}$$

及びそれを cyclic に shift させた計 3 本の解を得ます.

## 3 Synthesis

### 3.1 合成抵抗の計算

前節で述べた回路変換によって, bridge の合成抵抗が計算出来ます. 電気抵抗の場合に付いて表してみると, 合成抵抗  $f(a, b, c_0)$  は

$$f(a, b, c_0) = 2z + \frac{x+y}{2} = \frac{2ab + (a+b)c_0}{a+b+2c_0}.$$

### 3.2 幾何平均を与えるには

従って合成抵抗  $f(a, b, c_0)$  が幾何平均を表すには,

$$f(a, b, c_0) = \sqrt{ab}, \text{ 即ち, } c_0 = \sqrt{ab}.$$

即ち探し求めていたものは自分自身だったのです.

### 3.3 算術平均 $\geq$ 幾何平均 $\geq$ 調和平均 の回路

bridge の合成抵抗が幾何平均を与える様な要の element  $c_0$  が存在したので, 次の三つの回路は順に大きなエネルギーを消費し, 求める不等式を自明にする回路が設計出来た事になります.

図 7: 調和平均

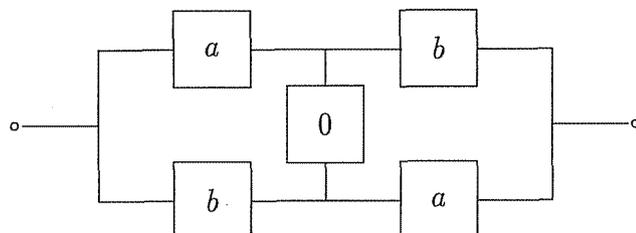


図 8: 幾何平均

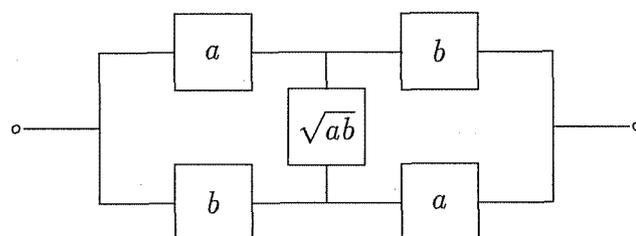
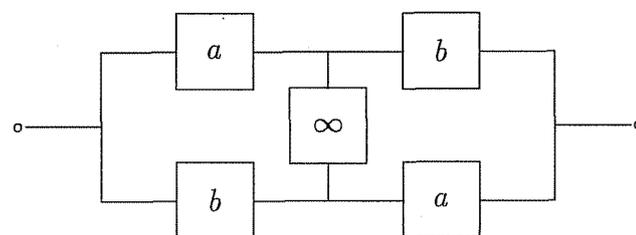


図 9: 算術平均



### 3.4 幾何平均を近似する回路

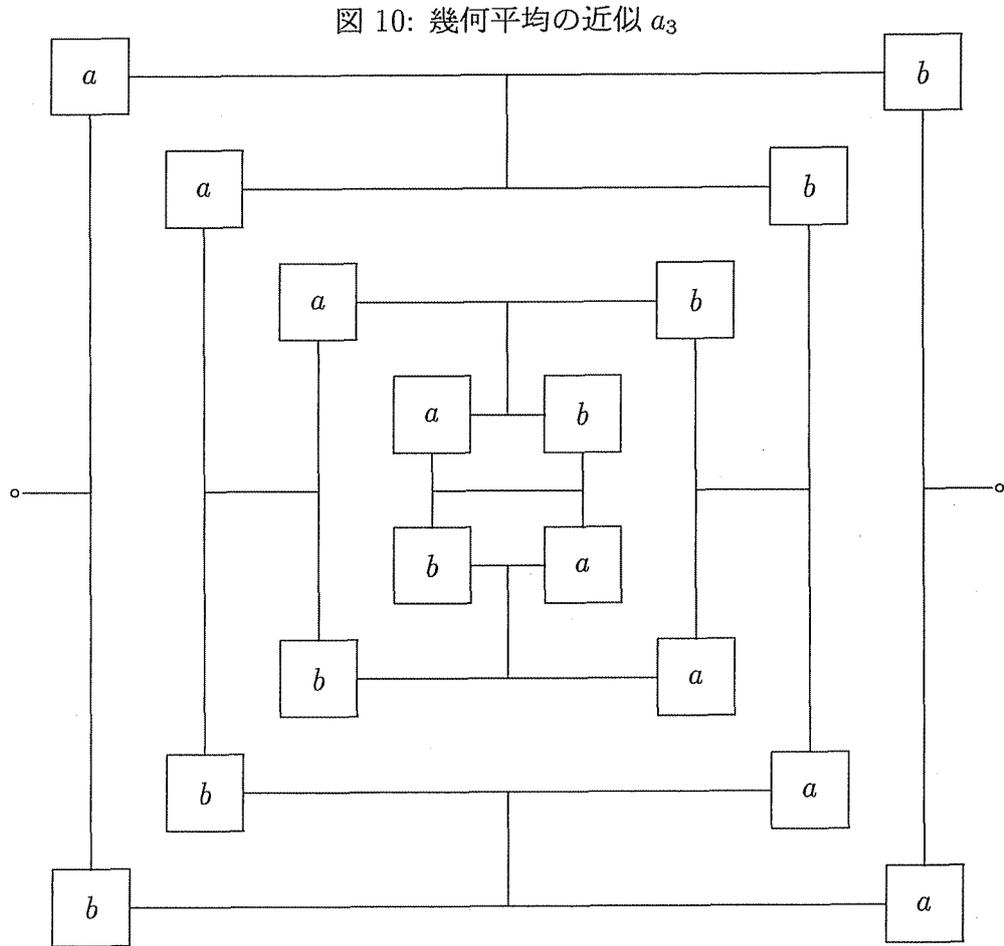
上記の bridge の要に必要な element が自分自身であったことは, 幾何平均を近似する次の様な回路が設計されたことになります. 明らかに, 幾何平均自身を設計するには

無限の操作が必要です.

$$a_0 := 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1},$$

$$a_{n+1} := f(a, b, a_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

次の図は,  $a_0$ から始まって  $a_1, a_2, a_3$ 迄の image を描いたものです.



Fumio Kubo  
 Department of Mathematics, Faculty of Science  
 Toyama University, Gofuku, Toyama, 930, JAPAN  
 fumichan@scil.sci.toyama-u.ac.jp

行列の  $c$ -numerical range の境界について

高 口 真 (弘前大 理)

ヒルベルト空間  $H$  上の有界線形作用素  $T$  の numerical range  $W(T)$  は

$$W(T) \equiv \{(Tx, x) : x \in H, \|x\| = 1\}$$

で定義され、複素平面上の凸集合となることはよく知られている。Halmos は 1967 年の著書の中で、複素平面上の集合：

$$W_k(T) = \left\{ \sum_{j=1}^k (Tx_j, x_j) : \{x_j\} \text{ は } H \text{ 中の orthonormal } k\text{-tuple} \right\}$$

が凸集合となるか？という問題を提起している。この  $k$ -numerical range  $W_k(T)$  の研究は、特に  $T$  が行列の場合に、Goldberg and Strass 等により活発に行われた。

行列解析では、この  $k$ -numerical range の研究がきっかけとなって、各種の一般化された numerical range が定義され、研究の対象になっている。

ここでは、 $c$ -numerical range の boundary の一つの結果について述べる。

定義：  $A \in M_n(\mathbb{C})$  :  $n \times n$  行列の全体,  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$  に対し、

$$\begin{aligned} W_c(A) &\equiv \left\{ \sum_{j=1}^n c_j (Ax_j, x_j) : (x_i, x_j) = \delta_{ij} \right\} \\ &= \{ \text{tr}([c]U^*AU) : U \text{ unitary} \} \quad : \text{c-numerical range} \end{aligned}$$

ただし、 $[c]$  は対角要素が  $c = (c_1, \dots, c_n)$  である対角行列を表す。

また、 $C, A \in M_n(\mathbb{C})$  に対し、

$$W_C(A) \equiv \{ \text{tr}(CU^*AU) : U \text{ unitary} \} \quad : \text{C-numerical range}$$

$W_c(A)$  の survey は C. K. Li [1] を見て下さい。なおこの論文には多くの open problem が載っている。

次の結果はよく知られている。

Theorem A (Westwick, 1975)  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  のとき  $W_c(A)$  は convex.

Theorem B  $A \in M_2(\mathbb{C})$  のとき、

$$W_{(c_1, c_2)}(A) = (c_1 - c_2)W(A) + c_2 \cdot \text{tr}A \quad (\text{楕円形})$$

ただし、 $W(A)$  は classical numerical range.

Theorem C (Li, Sung and Tsing, 1989)

$$c=(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \text{ であつ } c_1 \geq \dots \geq c_n$$

A の hermitian part  $A + A^* / 2$  の固有値を  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$

$$\alpha = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_{n-j+1}, \quad \beta = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j$$

$\implies$

$$\Re W_c(A) = W_c(A + A^*/2) = [\alpha, \beta].$$

Theorem A と Theorem C より  $c=(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  の場合に,  $W_c(A)$  をパソコンで作図できる。大学院生の西川氏はパソコンの作図により,  $c=(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $B \in M_2(\mathbb{C})$ ,  $a \in \mathbb{C}$  のとき,

$$W_{(c_1, c_2, c_3)}(a \oplus B) = \text{conv} \{ (W_{(c_1, c_2)}(B) + a c_3) \cup (W_{(c_2, c_3)}(B) + a c_1) \cup (W_{(c_3, c_1)}(B) + a c_2) \}$$

なることを発見し、さらに次の予想を立てた。  $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$  のとき,

$$W_{(c_1, \dots, c_n)}(a \oplus B) = \text{conv} \cup \{ W_{(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n-1)})}(B) + a c_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n \}$$

ただし  $S_n$  は  $(c_1, \dots, c_n)$  の対称群である。この予想は、すぐに中里氏により証明され、さらに次の定理の成り立つことが証明された。

Theorem 1  $c=(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A = A_1 \oplus A_2, \quad A_1 \in M_k(\mathbb{C}), \quad A_2 \in M_m(\mathbb{C}), \quad k+m=n$$

$\implies$

$$W_c(A) = \text{conv} \cup \{ W_{(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(k)})}(A_1) + W_{(c_{\sigma(k+1)}, \dots, c_{\sigma(k+m)})}(A_2) : \sigma \in S_n \}$$

証明は Theorem C より

$$\max \{ \Re z : z \in W_c(A_1 \oplus A_2) \}$$

$$= \max \{ \Re W_{(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(k)})}(A_1) + \Re W_{(c_{\sigma(k+1)}, \dots, c_{\sigma(k+m)})}(A_2) : \sigma \in S_n \}$$

が示され、これと theorem A とから Theorem 1 が証明される。

Theorem 1 の応用としてすぐ目につくのは、同じ 1986 年にそれぞれ独立に発表された次の Bebiano と C. K. Li の定理である。

Theorem D (Bebiano, 1986 and Li, 1986)

$$c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$c_1 = \dots = c_{m_1}$$

$$c_{m_1+1} = \dots = c_{m_1+m_2}$$

.

.

.

$$c_{m_{i-1}+1} = \dots = c_{m_1+m_2+\dots+m_p}, \quad m_1+m_2+\dots+m_p=n$$

$z = \sum_{j=1}^n c_j (Ae_j, e_j) = \text{tr}([c]A)$  は  $\partial W_0(A)$  の non-differentiable point ( $z$  は  $W_0(A)$  の corner) である



$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_p, \quad A_k \in M_{m_k}(\mathbb{C}) \quad \text{でかつ}$$

$$z = \sum_{k=1}^p c_{m_1+\dots+m_k} \cdot \text{tr } A_k$$

Corollary  $c = (c_1, \dots, c_n)$  は、すべては等しくない実数の  $n$ -tuple

$A \in M_n(\mathbb{C})$  は non-reducible matrix



$\partial W_0(A)$  は一点より成るかまたは至るところ滑らかな凸閉曲線

Remark a) もし  $A$  の size  $s$  が  $\geq 2$  で、かつ  $c_i \neq c_j$  である  $i, j$  が存在するとき  $W_0(A)$  は内点をもつ。

b) もし  $A$  の size  $s$  が  $= 1$  であるかまたは  $c_1 = \dots = c_n$  のとき  $W_0(A)$  は一点のみから成る。

Theorem 2 (Nakazato, Nishikawa and Takaguchi)

$$c=(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_n(\mathbb{C})$$

$z \in \partial W_0(A)$  は  $\partial W_0(A)$  の non-differentiable point



$W_0(A)$  は、 $z$  の近傍で、 $z$  が扇の要になる形状である

証明:  $A = U(A_1 \oplus \dots \oplus A_p)U^*$

(  $A_1, \dots, A_p$  はすべて non-reducible )

となるような unitary  $U$  が存在する。Theorem 1 より

$$W_0(A) = \text{conv } U \left\{ \sum_{k=1}^p W(c \sigma_{(m_{k-1}+1)}, \dots, c \sigma_{(m_k)})(A_k) : \sigma \in S_n \right\}$$

Corollary より

各々の  $\partial W(c\sigma_{(m_{k-1}+1)}, \dots, c\sigma_{(m_k)})(A_k)$  は一点より成るかまたは至るところ滑らかな凸閉曲線であるから、結局次の Lemma を証明すればよいことになる。

Lemma

$B_1, B_2, \dots, B_m$  は次の二条件を満足する  $\mathbb{C}$  中のコンパクト凸集合である。

- i) 各  $B_j$  は内点をもつ
- ii) 各  $\partial B_j$  は至るところ滑らかな曲線

いま、 $K = \text{conv} \{B_1 \cup \dots \cup B_m \cup \{p_1, \dots, p_n\}\}$  とする。

このとき、もし  $z \in \partial K$  が  $\partial K$  の non-differentiable point であるならば、次が成り立つ。

- i)  $z \in \{p_1, \dots, p_n\}$  であつ  $z \notin \text{conv} \{B_1 \cup \dots \cup B_m\}$
- ii) したがって、 $z$  の近傍で、 $W_c(A)$  は、 $z$  が扇の要になる形状である。

証明: もし  $z_0 \in \partial K$  ならば、次の三つのうちのいずれかである。

$$\text{I) } z_0 = t z_1 + (1-t) z_2 \quad (0 < t < 1) \\ z_1, z_2 \in [(\partial B_1) \cup \dots \cup (\partial B_m) \cup \{p_1, \dots, p_n\}] \cap \partial K$$

$$\text{II) } z_0 \in [(\partial B_1) \cup \dots \cup (\partial B_m)] \cap \partial K$$

$$\text{III) } z_0 \in \{p_1, \dots, p_n\} \cap \partial K$$

このうち I) ではありえないから、結局、II) が成り立たないことが示されればよい。これは少し厄介であるが示すことは難しくはない。

Theorem 2 の結果から次の問題を解決する一つのきっかけを作るかもしれない。

問題: 複素平面  $\mathbb{C}$  中の compact convex set はどんなとき、行列  $A$  の  $c$ -numerical range  $W_c(A)$  になるか?

#### References

- [1] C. K. Li,  $C$ -numerical ranges and  $C$ -numerical radii, to appear in Linear and Multilinear Algebra.
- [2] H. Nakazato, Y. Nishikawa and M. Takaguchi, On the boundary of the  $c$ -numerical range of a matrix, to appear in Linear and Multilinear Algebra.

この講演は私が北大を停年退職するにあたっての「最終講義」となったもので、まだ完全な回答までには到達していないある問題へ向けての研究の現在までの状況の概観である。

1. 行列およびの写像の空間  $\mathbb{M}_n \stackrel{def}{=} \{n \times n \text{ (複素) 行列の全体}\}$  とする. Matrix unit  $E_{ij}$  を使って各行列  $X \in \mathbb{M}_n$  を以下のように表示する:

$$X = [\xi_{ij}] = \sum_{i,j=1}^n \xi_{ij} E_{ij}.$$

考察の対象を  $\mathbb{M}_n \mapsto \mathbb{M}_m$  の線形写像  $\Psi$  及び線形写像の全体のなす空間  $\mathcal{L}(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_m)$  に限る."線形性"より  $\Psi$  に関する情報は  $\Psi(E_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) ですべてわかるので:

$$[\Psi] \stackrel{def}{=} [\Psi(E_{ij})] \in \mathbb{M}_{nm}$$

を考える. 対応  $\Psi \longleftrightarrow [\Psi]$  で  $\mathcal{L}(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_m)$  と  $\mathbb{M}_{nm}$  は同一視されるが, 自然な対応で  $\mathbb{M}_{nm}$  はテンソル積  $\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_m$  と同一視される. また  $\mathbb{M}_{nm}$  は  $\mathbb{C}^{nm}$  の線形写像の空間であるが,  $\mathbb{C}^{nm}$  は自然な対応により  $\mathbb{M}_{n,m} \stackrel{def}{=} \{n \times m \text{ 行列の全体}\}$  と同一視される.

写像  $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_m)$  が Hermitian であることを  $\Psi(X^*) = \Psi(X)^*$  for all  $X \in \mathbb{M}_n$  で定義するのは当然であるが,  $\Psi$  の positivity として 3 種類のもの考える.

$\Psi$  が positive  $\stackrel{def}{\iff} \Psi(X) \geq 0$  whenever  $X \geq 0$ .

$\Psi$  が completely positive  $\stackrel{def}{\iff} Y_k \in \mathbb{M}_{m,n}$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) があり

$$\Psi(X) = \sum_{k=1}^N Y_k X Y_k^* \quad \text{for all } X \in \mathbb{M}_n.$$

$\Psi$  が strongly positive  $\stackrel{def}{\iff} 0 \leq D_k \in \mathbb{M}_n, 0 \leq F_k \in \mathbb{M}_m$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) があり

$$\Psi(X) = \sum_k^N \text{tr}(X D_k) F_k \quad \text{for all } X \in \mathbb{M}_n.$$

**Theorem 1.**

(1)  $\Psi$  positive  $\iff [\langle \Psi(E_{ij})u, u \rangle] \geq 0$  in  $\mathbb{M}_n$  for all  $u \in \mathbb{C}^m$

$$\iff \text{tr}([\Psi] \cdot (X \otimes X^*)) \geq 0 \text{ for all rank-one } X \in \mathbb{M}_{n,m}.$$

(2)  $\Psi$  completely positive  $\iff [\Psi] \geq 0$  in  $\mathbb{M}_{nm}$

$$\iff \text{tr}([\Psi] \cdot (X \otimes X^*)) \geq 0 \text{ for all } X \in \mathbb{M}_{n,m}.$$

$$(3) \Psi \text{ strongly positive} \iff [\Psi] = \sum_{k=1}^N D_k \otimes F_k$$

$$\text{for some } 0 \leq D_k \in \mathbb{M}_n, 0 \leq F_k \in \mathbb{M}_m.$$

これらの各場合に応じて行列  $[\Psi]$  を, (1) **weakly positive definite**, (2) **positive definite** 及び (3) **strongly positive definite** と呼ぶ.

$\mathcal{L}(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_m)$  の上で3つの凸錐

$$\mathcal{P}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{positive 写像の全体}\}, \quad \mathcal{P}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{completely positive 写像の全体}\},$$

$$\mathcal{P}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{completely positive 写像の全体}\}$$

を考える.

**Theorem 2.**

$$(1) \mathcal{P}_- \text{ の双対錐 (dual cone) } = \mathcal{P}_+,$$

$$(2) \mathcal{P}_0 \text{ の双対錐 } = \text{自分自身 } \mathcal{P}_0,$$

$$(3) \mathcal{P}_+ \text{ の双対錐 } = \mathcal{P}_-.$$

**2. Majorant**  $\Phi \in \mathcal{P}_0$  が与えられた (Hermitian)  $\Psi$  の **completely positive majorant** とは  $\Phi + \Psi$  及び  $\Phi - \Psi$  が共に completely positive であることである. このとき

$$\Phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi + \Psi}{2}, \quad \Phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi - \Psi}{2}$$

とおくと,  $\Phi_1, \Phi_2$  は共に completely positive で

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad \Psi = \Phi_1 - \Phi_2 \quad (\text{Jordan 型分解})$$

となる. 同様に **strongly positive majorant** 及び **positive majorant** も定義される.

$\alpha, \beta$  が  $1, \infty$  のどちらかるとき, 線形写像  $\Psi$  の norm  $\|\Psi\|_{(\alpha, \beta)}$  を

$$\|\Psi\|_{(\alpha, \beta)} \stackrel{\text{def}}{=} \max_X \frac{\|\Psi(X)\|_\beta}{\|X\|_\alpha}$$

で定義する.

**Problem 3.**  $\alpha, \beta$  が  $1, \infty$  のどちらかとする.

$$\sup_{\Psi} \inf_{\Phi} \left\{ \frac{\|\Phi\|_{(\alpha, \beta)}}{\|\Psi\|_{(\alpha, \beta)}}; \Phi \pm \Psi \in \mathcal{P}_0 \right\}$$

を求めよ. 同様なことを  $\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-$  にも考えよ.

**3. 写像の modulus**  $\Psi$  は写像であるが  $[\Psi]$  は  $nm \times nm$  の行列であるので, 行列  $([\Psi]^* \cdot [\Psi])^{1/2}$  が定義でき, それが引き起こす写像を  $\Psi$  の **modulus** と呼び  $|\Psi|$  と書く, すなわち

$$[|\Psi|] \stackrel{def}{=} [[\Psi]].$$

$\Psi$  が Hermitian のとき,  $|\Psi|$  は  $\Psi$  の *completely positive majorant* である.

**Theorem 4.** どの  $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_m)$  に対しても

$$\| |\Psi| \|_{(\infty, \infty)} \leq n \|\Psi\|_{(\infty, \infty)}.$$

この常数  $n$  は *best possible*.

**Theorem 5.** どの  $\Psi \in \mathcal{L}(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_m)$  に対しても

$$\| |\Psi| \|_{(\infty, 1)} \leq 2n \|\Psi\|_{(\infty, 1)}.$$

これは群馬大の伊藤氏により改良された形である. この常数  $2n$  は更に  $n$  まで改善できると予想されるがまだ判らない.

modulus  $|\Psi|$  は次の意味で *optimal* なものである.

**Theorem 6.**  $\Psi$  が *Hermitian* で  $\Phi$  がその *completely positive majorant* なら

$$\| |\Psi| \|_{(\infty, \infty)} \leq \|\Phi\|_{(\infty, \infty)}, \quad \| |\Psi| \|_{(\infty, 1)} \leq \|\Phi\|_{(\infty, 1)}.$$

*positive* なものは取扱いやすい.

**Theorem 7.** *positive* な  $\Psi$  に対しては *completely positive majorant*  $\Phi$  で

$$\|\Phi\|_{(\infty, 1)} \leq n \|\Psi\|_{(\infty, 1)}$$

のものがある.

**4. Strongly positive majorant** Strongly positive majorant については modulus のような自然な候補者がないので, strongly positive なものを作り出す何等かの新しい方法が必要であるが, 本質的には以下のような簡単なものしか見当たらない.

**Lemma 8.** ( $n = 2$  のとき)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & A \end{bmatrix} \text{ positive definite} \implies \text{strongly positive definite.}$$

これを使うと容易に次がでる:

**Theorem 9.** *positive* な  $\Psi$  に対しては *strongly positive majorant*  $\Phi$  で

$$\|\Phi\|_{(\infty,\infty)} \leq (2n-1)\|\Psi\|_{(\infty,\infty)}, \|\Phi\|_{(\infty,1)} \leq (2n-1)\|\Psi\|_{(\infty,1)}$$

のものがある。この常数  $2n-1$  は ( $m \geq n$  のとき) *best possible* である。

この定理は一般の Hermitian  $\Psi$  に対しても成り立つものと予想されるが、まだそこまで判っていない。現在の処は以下の状況である：

**Theorem 10.** *Hermitian*  $\Psi$  に対しては *strongly positive majorant*  $\Phi$  で

$$\|\Phi\|_{(\infty,\infty)} \leq \sqrt{n}(2n-1)\|\Psi\|_{\infty,\infty}, \quad \|\Phi\|_{(\infty,1)} \leq \sqrt{n}(2n-1)\|\Psi\|_{\infty,1}$$

のものがある。

5.  $\|\cdot\|_{(1,1)}$  の場合  $\|\cdot\|_{(1,1)}$  は取扱い易い。

**Theorem 11.** どの *Hermitian*  $\Psi$  に対しても *completely positive majorant*  $\Phi^{(1)}$  で

$$\|\Phi^{(1)}\|_{(1,1)} \leq n\|\Psi\|_{(1,1)}$$

のもの、また *strongly positive majorant*  $\Phi^{(2)}$  で

$$\|\Phi^{(2)}\|_{(1,1)} \leq (2n-1)\|\Psi\|_{(1,1)}$$

のものがある。

これから双対性を使って  $\|\cdot\|_{(\infty,\infty)}$  に関する情報が得られる。

6.  $\|\cdot\|_{(1,\infty)}$  の場合 特別な *strongly positive* 写像  $\Theta_0$  を考える：

$$\Theta_0(X) \stackrel{def}{=} tr(X)I_m \quad (X \in M_m).$$

すなわち  $[\Theta_0]$  が単位行列 (identity matrix)  $\mathbf{I}$  となるものである。

**Theorem 12.** どの  $\Psi$  に対しても  $\Phi \stackrel{def}{=} n\|\Psi\|_{(1,\infty)}\Theta_0$  は *modulus*  $|\Psi|$  の *completely positive majorant* で

$$\|\Phi\|_{(1,\infty)} = n\|\Psi\|_{(1,\infty)}.$$

これから直ちに次がでる：

**Theorem 13.** どの *Hermitian*  $\Psi$  に対しても *modulus*  $|\Psi|$  はその *completely majorant* で

$$\|\Psi\|_{(1,\infty)} \leq n\|\Psi\|_{(1,\infty)}.$$

*Strongly positive majorant* に関しては次がいえる：

**Theorem 14.** どの Hermitian  $\Psi$  に対しても  $\Phi \stackrel{def}{=} (2n-1)\|\Psi\|_{(1,\infty)}\Theta_0$  はその strongly positive majorant で

$$\|\Phi\|_{(1,\infty)} = (2n-1)\|\Psi\|_{(1,\infty)}.$$

7. 行列の order の問題への翻訳  $M_{nm}$  での weakly positive definiteness に基づく order を  $\overset{p_-}{\geq}$  と書こう. Theorem 9 の後半の双対形は次の形となる:

**Theorem 15.** Hermitian な  $A \in M_{nm}$  が

$$\mathbf{I} \overset{p_-}{\geq} A \overset{p_-}{\geq} 0 \implies n\mathbf{I} \geq A \geq -(n-1)\mathbf{I}$$

これと同値なものとして:

**Theorem 16.**

$$\mathbf{I} \overset{p_-}{\geq} A \overset{p_-}{\geq} \frac{n-1}{n}\mathbf{I} \implies A \text{ positive definite.}$$

Strongly positive definiteness については次が成り立つ.

**Theorem 17.**

$$\mathbf{I} \geq A \geq \frac{n-1}{n}\mathbf{I} \implies A \text{ strongly positive definite.}$$

8. 行列の norm の問題への翻訳  $M_{nm}$  には行列の空間として spectral norm 及び trace norm がある. Theorem 13 の意味は

$$|\text{tr}(A \cdot (X \otimes Y))| \leq \|X\|_2 \cdot \|Y\|_2$$

がすべての rank-one  $X, Y \in M_{n,m}$  に成り立っていれば,

$$\|A\|_\infty \leq n$$

ということであるので, これの双対形として次がでる:

**Theorem 18.** どの行列  $A \in M_{nm}$  に対して  $X_k \in M_n, Y_k \in M_m$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) で

$$A = \sum_{k=1}^N X_k \otimes Y_k \quad \text{及び} \quad \sum_{k=1}^N \|X_k\|_1 \cdot \|Y_k\|_1 \leq n\|A\|_1$$

を満たすものがある.

$\|\cdot\|_1$  に関して対応する結果は Theorem 5 から出る次のものである.

**Theorem 19.** どの行列  $A \in M_{nm}$  に対して  $X_k \in M_n, Y_k \in M_m$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) で

$$A = \sum_{k=1}^N X_k \otimes Y_k \quad \text{及び} \quad \sum_{k=1}^N \|X_k\|_\infty \cdot \|Y_k\|_\infty \leq 2n\|A\|_\infty$$

を満たすものがある.

# Weighted norm inequalities for some singular integral operators

北海道大学 理学部 中路貴彦  
北海学園大学 教養部 山本隆範

## 1章 序文

単位円周  $T = \{z; |z| = 1\}$  上の正規化された Lebesgue 測度  $dm(e^{it}) = dt/2\pi$  について可積分な関数  $f$  の特異積分  $Sf$  を

$$Sf(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_T \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (a.e. \zeta \in T)$$

と定め, analytic projection  $P_+$  と co-analytic projection  $P_-$  を

$$P_+ = (I + S)/2, \quad P_- = (I - S)/2$$

( $I$  は恒等作用素) と定める.  $L^p = L^p(m)$  は Lebesgue 空間,  $H^p = H^p(m)$  は Hardy 空間を表す.  $T$  上の非負値関数  $W \in L^1$  について,

$$\|f\|_W = \left\{ \int_T |f|^2 W dm \right\}^{1/2}$$

が有限であるような Lebesgue 可測関数  $f$  の全体からなる Hilbert 空間を  $L^2(W)$  で表し, この積分値を  $f$  の weighted norm といい,  $W$  を weight 関数という. 三角多項式の全体を  $\wp$  で表すと,  $\wp \subset L^2(W)$  が成り立ち,  $\wp$  は  $L^2(W)$  の中でこのノルムについて dense である. 以下, *a.e.* は省略し,  $T$  上の Lebesgue 可測関数のみを考える.

歴史的には, Hardy, Riesz, Gaposkin 達の研究の後, 1960 年の論文 [4] で Helson-Szegö は恒等的には零でない weight 関数  $W$  について weighted norm 不等式:

$$\|Sf\|_W \leq C \|f\|_W \quad (f \in \wp)$$

を満たす  $f$  に依存しない有限な定数  $C$  が存在するための必要十分条件は  $W \in HS$  であるという有名な定理を示した. ただし,  $HS$  とは  $u \in L^\infty$  かつ

$$W = e^{u+\tilde{v}}, \quad |v| \leq \pi/2 - \varepsilon$$

を満たす実数値可測関数  $u, v$  と定数  $\varepsilon > 0$  が存在するような  $W$  の全体からなる集合を表す.  $HS$  は Helson-Szegö によって導入された. この定理は Helson-Szegö の定理と呼ばれ予測理論への応用がある. ただし,  $\tilde{v}$  は

$$Sv(\zeta) - \int_T v dm = i\tilde{v}(\zeta) \quad (\zeta \in T)$$

によって定義され,  $v$  の共役調和関数になっている. 1973 年の論文 [5] で Hunt-Muckenhoupt-Wheeden は weight 関数  $W$  で  $W^{-1} \in L^1$  かつ

$$W^{\wedge}(a)(W^{-1})^{\wedge}(a) \leq \gamma \quad (|a| < 1)$$

を満たす  $a$  に依存しない有限な  $\gamma$  が存在する  $W$  の全体からなる集合を  $A_2$  で表すとき、

$$A_2 = HS$$

が成り立つことを示した。ただし、 $W^{\wedge}$  は単位開円板  $D = \{z; |z| < 1\}$  への  $W$  の Poisson 変換による harmonic extension を表す。1980 年の論文 [6] で Koosis は weight 関数  $W$  に対して weighted norm 不等式：

$$\|P_+ f\|_U \leq \|f\|_W \quad (f \in \wp)$$

を満たす  $f$  に依存しない weight 関数  $U, U \neq 0$  が存在するための必要十分条件は

$$W^{-1} \in L^1$$

であることを Adamyan-Arov-Krein のアイデアを用いて示した。この定理は Koosis の定理と呼ばれ予測理論の Kolmogorov の定理と関連している。 $\alpha, \beta \in L^\infty$  とするとき、

$$S_{\alpha, \beta} = \alpha P_+ + \beta P_- = (\alpha - \beta) P_+ + \beta I = \frac{\alpha + \beta}{2} I + \frac{\alpha - \beta}{2} S$$

は特異積分作用素と呼ばれ、Gohberg-Krupnik [3] をはじめ広く研究されている。

この講演で我々はこの作用素について、次の 4 つの weighted norm 不等式を Hilbert 空間の議論と Cotlar-Sadosky の lifting 定理 [1] を用いて研究する。

$$(I) \quad \|S_{\alpha, \beta} f\|_W \leq C \|f\|_W$$

$$(II) \quad \|S_{\alpha, \beta} f\|_W \geq \delta \|f\|_W$$

$$(III) \quad \|S_{\alpha, \beta} f\|_U \leq \|f\|_W$$

$$(IV) \quad \|S_{\alpha, \beta} f\|_W \geq \|f\|_U$$

ここで、 $f \in \wp$ 、 $C$  と  $\delta$  は  $f$  に無関係な正の定数、 $U$  と  $W$  は weight 関数である。

(I) は  $\alpha = 1, \beta = 0$  または  $\alpha = 1, \beta = -1$  のときに、有限な  $C$  が存在する weight  $W$  は Helson-Szegö [4] によって決定された。一般の  $\alpha, \beta$  については Nakazi-Yamamoto [8] と Yamamoto [13] は  $C = 1$  となるときの weight  $W$  を描いたが、複雑である。そうすることで、Gohberg-Krupnik や Feldman-Krupnik-Marcus が得た  $S_{\alpha, \beta}$  の  $L^2(W)$  における作用素ノルムの評価の結果の一部を含んでいた。それに対して今回は一般の  $\alpha, \beta$  について、

有限な  $C$  が存在するための weight  $W$  を決定するという問題を研究する。この講演では、この問題を完全に解くが、その解は  $C = 1$  の場合より非常に simple である。

(II) は  $W = 1$  のとき、 $\delta > 0$  が存在する  $\alpha, \beta$  は Widom [11] と Devinatz [2] によって、 $W \in HS \dots$  Helson-Szegö 測度の全体... のときは Rochberg [10] によって決定された。一般の  $W$  の場合は、 $S_{\alpha, \beta}$  と  $S_{\alpha, -\beta}$  の両方が (II) の不等式を満足するときに、Yamamoto [12] と Nakazi [7] によってそれぞれ描かれた。Yamamoto の結果は  $p = 2$  のときの Rochberg の結果を含むが Nakazi のそれは一般の  $p, 1 < p < \infty$  で Rochberg のそれを含む。この講演では  $p = 2$  のときに、 $S_{\alpha, \beta}$  の不等式を考える。

(III) は  $\alpha = 1, \beta = 0$  または  $\alpha = 1, \beta = -1$  のときに、零でない  $U$  が存在する  $W$  は Koosis [6] によって決定された。この講演では一般的な  $\alpha, \beta$  について  $W$  を決定する。

(IV) はこれまで研究されたことはない。 $\alpha W = \beta W$  のとき、 $U = |\alpha|^2 W$  として成り立つが、この講演ではそうでないときの  $\alpha, \beta$  についても  $W$  を決定する。

(I) と (II) の場合、 $HS$  の代わりに  $HS_r \dots$  weighted Helson-Szegö class ... を使う。ここで  $r = |\alpha - \beta| / \|\alpha - \beta\|_\infty$  である。 $\alpha = 1, \beta = 0$  または  $\alpha = 1, \beta = -1$  のとき  $r = 1$  で  $HS = HS_r$  となる。我々は  $A_{2,r} \dots$  weighted  $A_2$  class ... を導入し、 $HS_r$  と  $A_{2,r}$  の関係を研究する。 $r = 1$  のとき  $HS_r = A_{2,r}$  は Hunt-Muckenhoupt-Wheeden [5] によって証明されたが、残念ながら我々は  $HS_r = A_{2,r}$  を一般的には証明できなかった。 $HS = A_2$  を Muckenhoupt 達は weighted norm 不等式を経由して証明したが、直接証明できないかというのは多くの人々によって試みられている。もしこれが可能ならば、我々は  $HS_r$  と  $A_{2,r}$  の関係をもっと詳しく調べることができると信じている。

## 2章 Weighted Helson-Szegö と Weighted $A_2$

$r \in L^\infty$  かつ  $0 \leq r \leq 1$  とする。weighted Helson-Szegö class  $HS_r$  とは  $u \in L^1$  かつ

$$W = e^{u+v}, \quad |v| \leq \pi/2,$$

$$r^2 e^u \leq \gamma \cos v, \quad e^{-u} \leq \gamma \cos v$$

を満たす実数値可測関数  $u, v$  と有限な定数  $\gamma$  が存在するような  $W$  の全体からなる集合を表す。従って、もし  $W \in HS_r$  ならば

$$r^2 W \leq \gamma e^{\bar{v}} \cos v \quad \text{かつ} \quad W^{-1} \leq \gamma e^{-\bar{v}} \cos v$$

が成り立つ。更に、 $|v| \leq \pi/2$  より、右辺の関数は可積分である。weighted  $A_2$  class  $A_{2,r}$  とは  $r^2 W, W^{-1} \in L^1$  かつ

$$(r^2 W)^\wedge(a) (W^{-1})^\wedge(a) \leq \gamma \quad (|a| < 1).$$

を満たす  $a$  に依存しない有限な  $\gamma$  が存在するような  $W$  の全体からなる集合を表す。

**定理1**  $r, r' \in L^\infty$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq r' \leq 1$  とする.

- (1)  $A_{2,r} \supset HS_r \supset HS$
- (2)  $W \in HS_r$  ならば  $r^2 W, W^{-1} \in L^1$
- (3)  $r/r' \in L^\infty$  ならば  $HS_{r'} \subset HS_r$
- (4)  $r/r', r'/r \in L^\infty$  ならば  $HS_{r'} = HS_r$
- (5)  $r^{-1} \in L^\infty$  ならば  $A_{2,r} = A_2 = HS = HS_r$
- (6)  $A_{2,0} = HS_0$

$HS_r$  を研究するために、もっと理解しやすい  $B_r$  を定義する.  $W \in B_r$  とは  $\log W \in L^1$  かつ  $W = W_0 W_1$  と書けることである. ここで

$$r^2 W_0, W_0^{-1} \in L^\infty \quad \text{かつ} \quad W_1 = e^{\tilde{v}}, \quad \|\tilde{v}\|_\infty < \pi/2.$$

このとき,  $HS_r \supset B_r \supset HS$ . だから,  $r^{-1} \in L^\infty$  のとき  $HS_r = B_r = HS$  である.

**問題1** (a)  $HS = HS_r$  ならば  $r^{-1} \in L^\infty$  か?

- (b) どんな  $r$  について  $A_{2,r} = HS_r$  か? これは重要な問題である.
- (c) どんな  $r$  について  $HS_r = B_r$  か?

定理1 (1) と次の章の系2. 1で  $r = (U/W)^{1/2}$  の場合を考えると, 与えられた2つの weight 関数  $W$  と  $U, U \neq 0$  について次の条件 (1) より (2) が導かれる.

$$(1) \quad \|P_+ f\|_v \leq C \|f\|_w \quad (f \in \mathcal{D})$$

となる  $f$  に依存しない有限な  $C$  が存在する.

$$(2) \quad U^{\wedge}(a)(W^{-1})^{\wedge}(a) \leq \gamma \quad (|a| < 1)$$

(ただし,  $W^{-1} \in L^1$ ) となる  $a$  に依存しない有限な  $\gamma$  が存在する.

**問題2** 上の条件 (2) にどんな条件を付け加えると (1) が導かれるか?

この問題は Muckenhoupt 達によってはじめて考えられ, 問題1 (b) と同値である.

### 3章 Bounded singular integral operators

不等式 (I) と (III) を研究する. 定理2は  $\alpha = 1, \beta = 0$  または  $\alpha = 1, \beta = -1$  として Helson-Szegö の定理 [4] を示す. 定理3は  $\alpha = 1, \beta = 0$  または  $\alpha = 1, \beta = -1$  として Koosis の定理 [6] を示す.

**定理2**  $\alpha, \beta \in L^\infty$ ,  $W$  は weight 関数とする. このとき,

$$(I) \quad \|S_{\alpha,\beta} f\|_W \leq C \|f\|_W \quad (f \in \mathcal{D})$$

となる  $f$  に依存しない有限な  $C$  が存在するための必要十分条件は  $W \in HS_r$  または  $(\alpha - \beta)W \equiv 0$  となることである. ここで  $r = |\alpha - \beta| / \|\alpha - \beta\|_\infty$ .

この定理の証明には、Cotlar-Sadosky の定理の他に、 $S_{\alpha,\beta}$  の有界性と  $S_{\alpha-\beta,0}$  の有界性が同値であることや、「 $T$  上で非負値の  $H^{1/2}$  関数は定数である」という Neuwirth-Newman の定理を使う。

**系 2.1**  $r \in L^\infty, 0 \leq r \leq 1, W$  は weight 関数,  $rW \neq 0$  とする。このとき、

$$\|rP_+f\|_W \leq C\|f\|_W \quad (f \in \varphi)$$

となる  $f$  に依存しない有限な  $C$  が存在するための必要十分条件は  $W \in HS_r$  である。

**定理 3**  $\alpha, \beta \in L^\infty, \alpha - \beta \neq 0, W$  は weight 関数とする。このとき、

$$(III) \quad \|S_{\alpha,\beta}f\|_U \leq \|f\|_W \quad (f \in \varphi)$$

となる  $f$  に依存しない weight 関数  $U$  で  $(\alpha - \beta)U \neq 0$  となるものが存在するための必要十分条件は  $W^{-1} \in L^1$  である。

この定理の証明は、Koosis の定理を使ってもできるが、定理 2 を使ってもできる。

#### 4章 Bounded below singular integral operators

不等式 (II) と (IV) を研究する。定理 4 は必要十分条件を与えていないが、必要条件と十分条件の差は  $HS_r$  と  $B_r$  の差である。  $HS_r \supset B_r$  であるが、 $HS_r = B_r$  となるかどうかはわからない (問題 1 (c))。  $\text{ess inf}|\alpha - \beta| > 0$  ならば  $HS_r = B_r$  だから定理 4 は必要十分条件を与える。  $W \in HS$  のとき  $S_{\alpha,\beta}$  が bounded below ならば  $S_{\alpha,-\beta}$  も bounded below となるので、Yamamoto [12] によって、もっと良い必要十分条件が得られるが、定理 4 はそれを示していない。Yamamoto [12] の結果は Widom-Devinatz-Rochberg の結果を示している。定理 5 はこれまでに研究されたことはなかったが、simple な必要十分条件を与えている。その条件は定理 4 の条件と比較されるべきである。

**定理 4**  $\alpha, \beta \in L^\infty, W$  は weight 関数,  $(\alpha - \beta)W \neq 0$  とする。もし

$$(II) \quad \|S_{\alpha,\beta}f\|_W \geq \delta\|f\|_W \quad (f \in \varphi)$$

となる  $f$  に依存しない  $\delta > 0$  が存在するならば、任意の  $0 < \varepsilon < \delta$  に対して次の関係式を満足する inner 関数  $Q$  と実数値関数  $t \in L^1$  が存在する。

$$\frac{\varepsilon^2 - \alpha\bar{\beta}}{|\varepsilon^2 - \alpha\bar{\beta}|} = Qe^{it} \quad \text{かつ} \quad We^{-t} \in HS_r$$

ここで  $r = |\alpha - \beta| / \|\alpha - \beta\|_\infty$  であり、 $\varepsilon^2 - \alpha\bar{\beta}$ ,  $\alpha$  と  $\beta$  は  $L^\infty$  で invertible である。上の関係式で、 $HS_r$  の代わりに  $B_r$  とすると逆が正しい。

この定理の証明には Cotlar-Sadosky の定理の他に、 $H^1$  関数の inner-outer 分解定理を使う。

**定理5**  $\alpha, \beta \in L^\infty$ ,  $W$  は weight 関数,  $(\alpha - \beta)W \neq 0$  とする。このとき,

$$(IV) \quad \|S_{\alpha, \beta} f\|_W \geq \|f\|_U \quad (f \in \phi)$$

となる  $f$  に依存しない weight 関数  $U$  で  $(\alpha - \beta)WU \neq 0$  となるものが存在するための必要十分条件は次の関係式を満足する実数  $c$  と実数値関数  $t \in L^1$  が存在することである。

$$\frac{\alpha \bar{\beta}}{|\alpha \beta|} = e^{i(c+i)} \quad \text{かつ} \quad \frac{e^t}{|\alpha \beta| W} \in L^1.$$

この定理の証明には Cotlar-Sadosky の定理の他に, Koosis のアイデアを使う。

定理4で  $\text{ess inf}|\alpha - \beta| > 0$  のときは  $(\varepsilon^2 - \alpha \bar{\beta})/|\varepsilon^2 - \alpha \bar{\beta}|$  の代わりに, 定理5のように  $\alpha \bar{\beta}/|\alpha \beta|$  を使って同じ結果が成立する。

この講演の結果は文献 [9] をまとめたものである。

## 5章 文献

1. M.Cotlar and C.Sadosky, On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels, Proc. Sym. Pure Math. A.M.S. 35 (1979), 383-407.
2. A.Devinatz, Toeplitz operators on  $H^2$  spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964), 304-317.
3. I.Gohberg and N.Krupnik, One-dimensional linear singular integral equations, Vol.I,II, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
4. H.Helson and G.Szegö, A problem in prediction theory, Annali. mat. pura et appl., Bologna 51 (1960), 107-138.
5. R.Hunt, B.Muckenhoupt and R.Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 227-251.
6. P.Koosis, Moyennes quadratiques pondérées de fonctions périodiques et de leurs conjuguées harmoniques, C.R. Acad. Sci. Paris 291 (1980), 255-257.
7. T.Nakazi, Toeplitz operators and weighted norm inequalities, Acta Sci. Math. (Szeged) 58 (1993), 443-452.
8. T.Nakazi and T.Yamamoto, Some singular integral operators and Helson-Szegö measures, J. Funct. Anal. 88 (1990), 366-384.
9. T.Nakazi and T.Yamamoto, Weighted norm inequalities for some singular integral operators, in preprint.
10. R.Rochberg, Toeplitz operators on weighted  $H^p$  spaces, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 291-298.
11. H.Widom, Inversion of Toeplitz matrices II, Illinois J. Math. 4 (1960), 88-99.
12. T.Yamamoto, Invertibility of some singular integral operators and a lifting theorem, Hokkaido Math. J. 22 (1993), 181-198.
13. T.Yamamoto, Boundedness of some singular integral operators in weighted  $L^2$  spaces, to appear in J. Operator Theory.

## Eigenvalues of matrices with given block upper triangular part

Katsutoshi Takahashi (Hokkaido University)

We consider the possible eigenvalues (characteristic polynomials) of  $2 \times 2$  block matrices

$$M_X = \begin{bmatrix} A & C \\ X & B \end{bmatrix},$$

where  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{C}^{m \times m}$  and  $C \in \mathbf{C}^{n \times m}$  are given and  $X \in \mathbf{C}^{m \times n}$  can be any matrix. ( $\mathbf{C}^{p \times q}$  denotes the space of all  $p \times q$  complex matrices.) In the case when  $n = 1$  or  $m = 1$ , the possible invariant polynomials of  $M_X$  was determined by Gohberg and Gu [2]. Clearly, if  $n + m$  (not necessarily different) complex numbers  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$  are the eigenvalues of  $M_X$  for some  $X$ , then  $\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i = \text{tr } A + \text{tr } B$ . Theorem 1 below gives the case when this necessary condition is also sufficient.

A pair  $(S, R)$  of matrices  $S \in \mathbf{C}^{n \times n}$  and  $R \in \mathbf{C}^{n \times m}$  is called full range (or controllable) if  $\sum_{i=0}^{n-1} \text{Im}(S^i R) = \mathbf{C}^n$ . Let  $Z_n$  denote the set of all  $n$ -tuples  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  of complex numbers (with repetitions allowed).

**Theorem 1.** *Let  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{C}^{m \times m}$  and  $C \in \mathbf{C}^{n \times m}$  be such that the pairs  $(A, C)$  and  $(B^T, C^T)$  are full range and assume that  $AC + CB$  is not a scalar multiple of  $C$ . (For a matrix  $N$ ,  $N^T$  denotes the transposed matrix of  $N$ .) Then, for  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}\} \in Z_{n+m}$ , there exists  $X \in \mathbf{C}^{m \times n}$  such that  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$  are the eigenvalues of  $M_X$  if and only if  $\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i = \text{tr } A + \text{tr } B$ .*

Note that if the pairs  $(A, C)$  and  $(B^T, C^T)$  are full range and  $AC + CB$  is a scalar multiple of  $C$ , i.e.,  $AC + CB = dC$  for some complex number  $d$ , then  $C$  is invertible. So Theorem 1 can be applied to a triplet  $(A, B, C)$  such that  $(A, C)$  and  $(B^T, C^T)$  are full range and  $C$  is not invertible, in particular  $n \neq m$ .

For the case when the matrix  $AC + CB$  is a multiple of  $C$ , we have the following.

**Proposition 2.** *Let  $A, B$  and  $C$  be  $n \times n$  matrices satisfying  $AC + CB = dC$  for some complex number  $d$  and suppose that  $C$  is invertible. Then, for  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}\} \in Z_{2n}$ , there exists  $X \in \mathbf{C}^{n \times n}$  such that  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  are the eigenvalues of  $M_X$  if and only if there exists a permutation  $\tau$  on  $\{1, \dots, 2n\}$  such that  $\lambda_{\tau(i)} + \lambda_{\tau(n+i)} = d$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

For the proof of Theorem 1 we need the following results:

(i) (Fillmore [1]) Suppose that  $S \in \mathbf{C}^{n \times n}$  is not scalar. Then, for  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in Z_n$ , there exists an invertible matrix  $P$  such that  $P^{-1}SP = (s_{ij})$  has diagonal entries  $s_{ii} = \lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) if and only if  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr } S$ .

(ii) (Wonham [3]) A pair  $(S, R)$  of matrices  $S \in \mathbf{C}^{n \times n}$  and  $R \in \mathbf{C}^{n \times m}$  is full range if and only if for each  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in Z_n$ , there exists  $F$  such that the eigenvalues of  $S + RF$  consists of  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

*Proof of Theorem 1.* Let us prove that the condition  $\sum_{i=1}^{n+m} \lambda_i = \text{tr } A + \text{tr } B$  is sufficient. For  $F \in \mathbf{C}^{m \times n}$ , let  $X = FCF + FA - BF$ . Then we have

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & C \\ X & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + CF & C \\ 0 & B - FC \end{bmatrix}.$$

Thus it suffices to show that there exists  $F \in \mathbf{C}^{m \times n}$  such that

$$\sigma(A + CF) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad \text{and} \quad \sigma(B - FC) = \{\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+m}\}.$$

First suppose that  $C$  is invertible and so  $n = m$ . By assumption  $C^{-1}AC + B$  is not scalar and  $\text{tr}(C^{-1}AC + B) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i$ . Hence it follows from the above result (i) of Fillmore that there exists a matrix  $G$  such that

$$\sigma(C^{-1}AC + B - G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad \text{and} \quad \sigma(G) = \{\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}\}.$$

Then the matrix  $F = (B - G)C^{-1}$  is the required one.

Next suppose that  $C$  is not invertible. Let  $r = \text{rank } C$  ( $\geq 1$ ) and take invertible matrices  $P$  and  $Q$  such that

$$P^{-1}CQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix},$$

where  $I_r$  is the  $r \times r$  identity matrix. We write

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

where the matrices  $A_{11}$  and  $B_{11}$  are of sizes  $(n - r) \times (n - r)$  and  $(m - r) \times (m - r)$ , respectively. Since the pair  $(P^{-1}AP, P^{-1}C)$  together with  $(A, C)$  is full range, it follows that  $(A_{11}, A_{12})$  is full range too. Similarly,  $(B_{11}^T, B_{21}^T)$  is full range. Hence, by the above result (ii) of Wonham there exist  $G \in \mathbf{C}^{r \times (n-r)}$  and  $H \in \mathbf{C}^{(m-r) \times r}$  such that

$$\sigma(A_{11} + A_{12}G) = \{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n\} \quad \text{and} \quad \sigma(B_{11} - HB_{21}) = \{\lambda_{n+r+1}, \dots, \lambda_{n+m}\}.$$

Moreover, in case  $r \geq 2$ , we can choose  $G$  and  $H$  in such a way that  $S = (A_{22} - GA_{12}) + (B_{22} + B_{21}H)$  is not scalar. Thus we can apply the result of Fillmore to obtain a matrix  $D \in \mathbf{C}^{r \times r}$  such that

$$\sigma(A_{22} - GA_{12} - D) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \quad \text{and} \quad \sigma(B_{22} + B_{21}H + D) = \{\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+r}\}.$$

(In case  $r = 1$ , we take  $D = A_{22} - GA_{12} - \lambda_1$ .) Take matrices  $K \in \mathbf{C}^{r \times (n-r)}$  and  $L \in \mathbf{C}^{(m-r) \times r}$  for which the matrix

$$F = Q \begin{bmatrix} 0 & L \\ K & -D \end{bmatrix} P^{-1}$$

satisfies

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}(A + CF)P \begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + A_{12}G & A_{12} \\ 0 & A_{22} - GA_{12} - D \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} I & H \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} Q^{-1}(B - FC)Q \begin{bmatrix} I & H \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} - HB_{21} & 0 \\ B_{21} & B_{22} + B_{21}H + D \end{bmatrix}.$$

Then  $F$  is the required matrix and the proof completes.

For a general  $(A, B, C)$ , there are invertible matrices  $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$  and  $Q \in \mathbf{C}^{m \times m}$  such that

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ A_{12} & A_1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_{21} & B_2 \end{bmatrix}$$

and

$$P^{-1}CQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix},$$

where  $(A_1, C_1)$  and  $(B_1^T, C_1^T)$  are full range pairs. Thus, for each  $X \in \mathbf{C}^{m \times n}$ , the matrix  $M_X$  is similar to

$$\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_1 & C_1 & 0 \\ Y_{12} & Y_1 & B_1 & 0 \\ Y_2 & Y_{21} & B_{21} & B_2 \end{bmatrix},$$

where  $Q^{-1}XP = \begin{bmatrix} Y_{12} & Y_1 \\ Y_2 & Y_{21} \end{bmatrix}$ , so that the characteristic polynomial of  $M_X$  can be written as

$$\det(\lambda I - M_X) = \det(\lambda I - A_2) \det(\lambda I - B_2) \det \left( \lambda I - \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ Y_1 & B_1 \end{bmatrix} \right).$$

Moreover, using the Smith form of the matrix polynomial  $[\lambda I - A, C]$ , we see that the characteristic polynomial of  $A_2$  is the product of the invariant polynomials of  $[\lambda I - A, C]$ , in other words, it is a greatest common divisor of all minors of order  $n$  of  $[\lambda I - A, C]$ . Similarly, the characteristic polynomial of  $B_2$  is a greatest common divisor of all minors of order  $m$  of  $[\lambda I - B^T, C^T]$ . Thus we have the following.

**Theorem 3.** *Let  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{C}^{m \times m}$ ,  $C \in \mathbf{C}^{n \times m}$  and  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}\} \in Z_{n+m}$ . Let  $\alpha(\lambda)$  (resp.  $\beta(\lambda)$ ) be the (monic) greatest common divisor of all minors of order  $n$  of  $[\lambda I - A, C]$  ( resp. of order  $m$  of  $[\lambda I - B^T, C^T]$ ) and let*

$$\alpha(\lambda)\beta(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \mu_i).$$

(a) *When  $AC + CB$  is not a scalar multiple of  $C$ , there exists  $X \in \mathbf{C}^{m \times n}$  such that  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$  are the eigenvalues of  $M_X$  if and only if there exists a permutation  $\tau$  on  $\{1, 2, \dots, n+m\}$  such that*

$$\lambda_{\tau(i)} = \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \text{and} \quad \sum_{i=s+1}^{n+m} \lambda_{\tau(i)} = \text{tr } A + \text{tr } B - \sum_{i=1}^s \mu_i.$$

(b) *When  $AC + CB = dC$  for some complex number  $d$  (in this case we have  $n+m-s = 2 \text{rank } C$ ), there exists  $X \in \mathbf{C}^{m \times n}$  such that  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}$  are the eigenvalues of  $M_X$  if and only if there exists a permutation  $\tau$  on  $\{1, 2, \dots, n+m\}$  such that*

$$\lambda_{\tau(i)} = \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \text{and} \quad \lambda_{\tau(s+i)} + \lambda_{\tau(s+r+i)} = d \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

where  $r = \text{rank } C$ .

## References

1. P.A. Fillmore, On similarity and the diagonal of a matrix, *Amer. Math. Monthly* 76(1969), 167-169.
2. I. Gohberg and C. Gu, On a completion problem for matrices, *New aspects in interpolation and completion theories*, OT 64 (1993), pp. 203-217.
3. W.M. Wonham, On pole assignment in multi-input controllable linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 12(1967), 660-665.

Brummelhuis ([1]) は metrizable compact group 上のF. and M. Riesz型の定理を与えたが、著者は [8] でBrummelhuisのある結果をcompact groupに拡張した。ここでは、その結果をもう少し良くした結果を報告したい。Kをcompact groupとし、 $\Sigma_K$ をKのdual objectとする。M(K)をK上のbounded regular measuresの空間とし、 $m_K$ をK上のHaar measureとする。Z(K)をKのcenterとし、 $G \subset Z(K)$ をKのclosed subgroupとする。 $\sigma \in \Sigma_K$ に対して、 $U^{(\sigma)}$ を $\sigma$ に属し、 $H_\sigma$ を表現空間として持つ、Kのcontinuous irreducible unitary representationとする。すると、Shur's lemmaにより、写像  $\gamma : \Sigma_K \rightarrow \hat{G}$  で次の(1)を満たすものが存在する。

$$(1) \quad U^{(\sigma)}(x) = (x, \gamma(\sigma)) I. \quad (x \in G, \sigma \in \Sigma_K)$$

但し、Iは $H_\sigma$ 上のidentity operator。 $\mu \in M(K)$ に対して、 $\hat{\mu}$ を $\mu$ のFourier変換とする。i.e.,  $\sigma \in \Sigma_K, \xi, \eta \in H_\sigma$ にたいして、

$$\langle \hat{\mu}(\sigma) \xi, \eta \rangle = \int_K \langle \bar{U}^{(\sigma)}(x) \xi, \eta \rangle d\mu(x).$$

但し、 $\bar{U}^{(\sigma)} = D_\sigma U^{(\sigma)} D_{\sigma\sigma}$  又、 $D_\sigma$ はconjugation on  $H_\sigma$ 。そして、 $\text{spec}(\mu) = \{\sigma \in \Sigma_K : \hat{\mu}(\sigma) \neq 0\}$  とおく。

定義 (i)  $E \subset \Sigma_K$  : Riesz集合  $\Leftrightarrow M_E(K) \subset L^1(K)$ 。

但し、 $M_E(K) = \{\mu \in M(K) : \text{spec}(\mu) \subset E\}$ 。

(ii)  $0 < p < \infty$ 。

$E \subset \Sigma_K$  :  $\Lambda(p)$ -集合  $\Leftrightarrow 0 < \exists q < p, \exists c > 0$  s.t.

$$\|f\|_p \leq c \|f\|_q \text{ for } f \in \mathcal{J}_E(K).$$

但し、 $\mathcal{J}_E(K) = \{f \in \mathcal{J}(K) : \text{spec}(f) \subset E\}$  で、 $\mathcal{J}(K)$ はK上のtrigonometric polynomialsの空間。

注意1.  $E \subset \Sigma_K$  : 有限集合  $\Rightarrow E$  : Riesz 集合。

Kがcompact abelian groupの場合も、Riesz集合、 $\Lambda(p)$ -集合は同様に定義される。次の結果は([6]の方法を使って) Brummelhuisによって得られた。

定理A ([1, Theorem 3.2])。

Kをmetrizable compact groupとし、Z(K)はcircle group Tをclosed subgroupとして含むとする。そして、 $\Delta \subset \Sigma_K$ は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)  $\forall m \in Z(\cong \hat{T})$ ,  $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = m\}$ は有限集合。

(ii)  $\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ はZにおいて下に有界。

このとき、 $\mu \in M(K)$ ,  $\text{spec}(\mu) \subset \Delta \Rightarrow \mu \ll m_K$ .

注意2. [1, 3.4 Remark] で、定理Aの条件 (i) は、もっと弱い次の条件 (i)' でおきかえられることが指摘されている。

(i)'  $\forall m \in Z$ ,  $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = m\}$  は  $\Lambda(1)$ -集合。

[8] で、著者は定理Aを次のように拡張した。

定理B ([8, Theorem 3.1]) .

$K$  を compact group とし、 $Z(K)$  は compact abelian group  $G$  を closed subgroup として含むとする。 $\Delta \subset \Sigma_K$  は次の (i), (ii) を満たすとする。

(i)  $\forall \omega \in \hat{G}$ ,  $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = \omega\}$  は有限集合。

(ii)  $\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$  は  $\hat{G}$  における Riesz 集合。

このとき、 $\mu \in M(K)$ ,  $\text{spec}(\mu) \subset \Delta \Rightarrow \mu \ll m_K$ .

定理Bは変換群上のある結果を使って示された。 $(G, X)$  を位相変換群とする。ただし、 $G$  は compact abelian group。又、 $X$  は locally compact Hausdorff space。 $\sigma_x$  を  $X$  上の quasi-invariant Radon measure とする。 $M(X)$  を  $X$  上の有界正則測度の空間とし、 $N(\sigma_x) = \{\mu \in M(X) : \lambda * \mu \ll \sigma_x \text{ for } \lambda \in L^1(G)\}$  とおく。そして、 $\mu \in M(X)$  にたいして、 $\mu$  の spectrum を  $\text{sp}(\mu) = \bigcap \{h^{-1}(0) : h \in J(\mu)\}$  により定義する。ただし、 $J(\mu) = \{h \in L^1(G) : h * \mu = 0\}$ 。定理Bは次の定理(I)を使って示された。

定理(I) ([8, Cor. 1. 1]) .

$\mu \in M(X)$ 。  $E \subset \hat{G}$  : Riesz 集合。  $\text{sp}(\mu) \subset E$ ,  $\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma_x)$ 。

$\Rightarrow \mu \ll \sigma_x$ ,

ただし、 $\pi : X \rightarrow X/G$  は canonical map。

ところで、Finet and Tardivel-Nachef は最近次の結果を得た。

定理(II) ([3, Theorem 4.10]) .

$\mu \in N(\sigma_x)$ 。  $E \subset \hat{G}$  : Riesz 集合。  $\text{sp}(\mu) \subset E$ 。

$\Rightarrow \mu \ll \sigma_x$ 。

この定理(II)を使うと、定理Bは次のように拡張できる。

定理C.  $K, G$  は定理Bのとおりとする。そして、 $\Delta \subset \Sigma_K$  は次の (i), (ii)

を満たすとする。

(i)  $\forall \omega \in G^\wedge, \{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = \omega\}$  は  $\Sigma_K$  における Riesz 集合。

(ii)  $\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$  は  $G^\wedge$  における Riesz 集合。

このとき、 $\mu \in M(K), \text{spec}(\mu) \subset \Delta \Rightarrow \mu \ll m_K$ .

注意3.  $K$  を compact group とする。すると、 $\Sigma_K$  の  $\Lambda(1)$ -集合は Riesz 集合 (cf. [1, 3.4 Remark]) であるから、定理 C の条件 (i) は次の条件でおきかえられる。

(i)'  $\forall \omega \in G^\wedge, \{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = \omega\}$  は  $\Lambda(1)$ -集合。

注意4. 定理 (I) と定理 (II) は同値である。

系.  $G$  を compact abelian group、 $H$  を compact group とし、 $K = G \oplus H$  とする。 $E$  を  $G^\wedge$  の Riesz 集合、 $F$  を  $\Sigma_H$  の Riesz 集合とすると、 $E \times F$  は  $\Sigma_K (\cong G^\wedge \times \Sigma_H)$  の Riesz 集合である。

#### 参考文献

- [1] R.G.M. Brummelhuis, An F. and M. Riesz theorem for bounded symmetric domains, Ann. Inst. Fourier 37 (2) (1987), 137-150.
- [2] R.G.M. Brummelhuis, A note on Riesz sets and lacunary sets, J. Austral. Math. Soc. 48 (1990), 57-65.
- [3] C. Finet and V. Tardivel-Nachef, Lacunary sets on transformation groups, Hokkaido Math. J. 23 (1994), 1-19.
- [4] E. Hewitt and K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. II, (Springer), 1970.
- [5] L. Pigno, A variant of F. and M. Riesz theorem, J. London Math. Soc. 9 (1974), 368-370.
- [6] J.H. Shapiro, Subspaces of  $L^p(G)$  spanned by characters,  $0 < p < 1$ , Israel J. Math. 29 (1978), 248-264.
- [7] H. Yamaguchi, The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups, II, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 345-359.
- [8] H. Yamaguchi, Absolute continuity of measures on compact transformation groups, Hokkaido Math. J. 22 (1993), 25-33.

## Type constants and Clarkson's inequalities for $L_r(X)$

高橋泰嗣	岡山県立大学情報工学部
岡崎悦明	九州工業大学情報工学部
加藤幹雄	九州工業大学工学部

### Definitions and notations

Let  $X$  be a complex Banach space with  $\dim X \geq 1$ ,  $1 \leq p \leq 2$  and  $1 \leq s \leq p'$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ).

Clarkson's inequalities :  $X$  is said to be of  $(p,s)$ -Clarkson-type if for all  $x$  and  $y$  in  $X$

$$(CI_{(p,s)}) \quad (\|x+y\|^s + \|x-y\|^s)^{1/s} \leq 2^{1/s} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}.$$

- Remarks. (1) Every Banach space  $X$  is of  $(1,s)$ -Clarkson-type for all  $s$ .  
 (2) If  $X$  is of  $(p,s)$ -Clarkson-type, then  $p \leq 2$  and  $s \leq p'$ .  
 (3) If  $X$  is of  $(p,s)$ -Clarkson-type, then it is of  $(p,r)$ -Clarkson-type for  $r < s$ .  
 (4) Clarkson proved that  $L_p$  and  $L_{p'}$  are of  $(p,p')$ -Clarkson-type.  
 (5)  $X$  is of  $(p,p')$ -Clarkson-type iff  $X'$  is so.

Type inequalities :  $X$  is said to be of (Rademacher) type  $p$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , if there exists a constant  $M > 0$  such that for all  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in  $X$

$$E \|\sum_j r_j x_j\| \leq M (\sum_j \|x_j\|^p)^{1/p},$$

where  $E$  denotes the expectation, and  $r_j = r_j(t)$  are the Rademacher functions ( $r_j(t) = \text{sgn}(\sin 2^j \pi t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ).

By the inequality of Khinchin-Kahane, it follows that  $X$  is of type  $p$  iff for every  $s$  (some  $s$ ) there exists a constant  $M$  such that for all  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in  $X$

$$(TI_{(p,s)}) \quad (E \|\sum_j r_j x_j\|^s)^{1/s} \leq M (\sum_j \|x_j\|^p)^{1/p}.$$

The smallest constant  $M$  satisfying the above inequality is said to be type  $p$  constant, and denoted by  $T_{p(s)}(X)$ . It is easy to see that  $T_{p(s)}(X) \geq 1$  for all

$X$ , and if  $T_{p(s)}(X) = 1$ , then  $X$  is of  $(p,s)$ -Clarkson-type and  $s \leq p'$ .

Main results.

Theorem 1 (cf. [4]). Let  $1 < p \leq 2$  and  $p \leq s \leq p'$ . Then  $X$  is of  $(p,s)$ -Clarkson-type iff it is of type  $p$  and  $T_{p(s)}(X) = 1$ . In particular,  $X$  is of  $(p,p')$ -Clarkson type iff it is of type  $p$  and  $T_{p(p')}(X) = 1$ .

Remark. It can be shown that if  $X$  is of  $(p,s)$ -Clarkson-type for some  $s \geq 1$ , then  $X$  is of type  $p$  (and even  $p$ -uniformly smooth).

Let  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  be an arbitrary measure space and let  $L_r(X)$  be the usual Banach space of  $X$ -valued  $r$ -th Bochner integrable functions; we shall write  $L_r$  instead of  $L_r(X)$  if  $X = \mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$ .

Lemma 1. If  $X$  is of  $(p,p')$ -Clarkson-type, then it is of  $(t,t')$ -Clarkson-type for  $t < p$ .

Lemma 2. If  $X$  is of  $(p,p')$ -Clarkson-type, then  $L_r(X)$  is also of  $(p,p')$ -Clarkson type for  $p \leq r \leq p'$ .

By Lemmas 1 and 2, we have

Theorem 2. Let  $1 \leq p \leq 2$  and  $1 \leq r \leq \infty$ . If  $X$  is of  $(p,p')$ -Clarkson-type, then  $L_r(X)$  is of  $(t,t')$ -Clarkson type, where  $t = \min\{p, r, r'\}$ .

Since  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{C}$  are of  $(2,2')$ -Clarkson-type, we have

Corollary 1 (Clarkson[1]).  $L_r$  is of  $(p,p')$ -Clarkson-type, where  $p = \min\{r, r'\}$ .

Corollary 2.  $L_p(L_q)$  is of  $(t,t')$ -Clarkson-type, where  $t = \min\{p, p', q, q'\}$ .

Remark. Since Sobolev, Besov and Triebel-Sobolev spaces are isometric to subspaces of  $L_p(L_q)$ , Corollary 2 generalizes the results of Cobos [2], Cobos and Edmonds [3]. More generally, we can prove that  $L_p(L_q(\dots(L_r)))$  is of  $(t,t')$ -Clarkson-type, where  $t = \{p, p', q, q', \dots, r, r'\}$ .

Theorem 3. Let  $1 < p \leq 2$  and  $\dim L_p \geq 2$ .

(1) Let  $1 \leq r < \infty$ . If  $L_r(X)$  is of  $(p,1)$ -Clarkson-type, then  $p \leq r \leq p'$  and  $X$  is of  $(p,r)$ -Clarkson-type; and so  $L_r(X)$  is also of  $(p,r)$ -Clarkson-type.

(2) If  $L_p(X)$  is of  $(p,1)$ -Clarkson-type, then it is of  $(p,p)$ -Clarkson-type, and so  $L_p(X)$  is of type  $p$  and  $T_{p(p)}(L_p(X)) = 1$ .

(3) If  $L_{p'}(X)$  is of  $(p,1)$ -Clarkson-type, then it is of  $(p,p')$ -Clarkson-type, and so  $L_{p'}(X)$  is of type  $p$  and  $T_{p(p')}(L_{p'}(X)) = 1$ .

### References

- [1] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 396-414.
- [2] F. Cobos, Clarkson's inequalities for Sobolev spaces, Math. Japonica 31 (1986), 17-22.
- [3] F. Cobos and Edmonds, Clarkson's inequalities, Besov spaces and Triebel-Sobolev spaces, Z. Anal. Anwend. 7 (1988), 229-232.
- [4] M. Kato and Y. Takahashi, Type, cotype constants and Clarkson's inequalities for Banach spaces, to appear in Math. Nachr.

# On some Banach algebras with involution

S.Koshi ; Hokkaido Institute of Technology

## 1 Introduction

Let  $K$  be a locally compact space and  $M^b(K)$  be a Banach space of all bounded complex measures on  $K$ . If  $K$  is a locally compact group, then  $M^b(K)$  becomes a Banach algebra considering convolution as product of algebra. Harmonic Analysis on this algebra was investigated for many years and it is successful to extend many results about real numbers to arbitrary locally compact Abelian cases. But, if  $K$  is not group, convolution is not defined in many cases. Hence it is a problem how we construct Harmonic analysis in this case.

Almost 20 years there are many contributions about various kinds of convolutions on measure algebras and unified theory on measure algebra is going to glow up to sufficient style. It looks like now this theory will be applicable for many branches of analysis. Above all measure algebra induced by orthogonal polynomials is considered by many mathematicians and there are many remarkable results around these topics. In this note we shall explain the fundamental part of the theory.

## 2 Hypergroup

Let  $K$  be a not necessary group and locally compact space. We shall consider

$$M^b(K)$$

i.e. a set of bounded complex measure on  $K$ . If there is a convolution on

$$M^b(K)$$

and furthermore there is an involution

$$x \rightarrow x^-$$

in  $K$  and it becomes a Banach algebra by total variation norm, then we call  $K$  to be a hypergroup if the following conditions are satisfied :

(1)  $(\mu, \nu) \rightarrow \mu \star \nu$  is a bilinear, non-negative, weakly continuous map as

$$M^b(K) \times M^b(K) \rightarrow M^b(K)$$

(2)

$$e_x \star e_y$$

is a probability measure with compact support for every  $x$  and  $y \in K$ , where  $e_x$  is a point mass at  $x$ .

(3) there exists an element  $\varepsilon$  of  $K$  such that  $e_\varepsilon \star e_x = e_x \star e_\varepsilon = e_x$  for every  $x \in K$  and  $\varepsilon \in \text{Support}(e_x \star e_y)$  if and only if

$$x = y^-$$

(4) The map  $K \times K \rightarrow \Phi(K)$  defined by  $(x, y) \rightarrow e_x \star e_y$  is continuous by Hausdorff-Michael topology, where  $\Phi(K)$  is a set of all compact subsets in  $K$ .

It is clear that  $K$  is a hypergroup if  $K$  is a locally compact group and convolution is defined by the usual way.

If  $K$  is a hyper group, then we can define the fundamental operator called translation operator in the following way:

$$T^x f(y) = \int_K f(z)(e_x \star e_y) d(z)$$

where  $f$  is a continuous function on  $K$  with compact support.

If  $e_x \star e_y = e_y \star e_x$  for all  $x$  and  $y \in K$ , then  $K$  is called commutative. In the following we assume that  $K$  is commutative.

It is known that there is a Haar measure  $\omega_K$  in  $K$  in the sense :

$$\omega_K(T^x f) = \omega_K(f)$$

for all  $x \in K$ .

$$\omega_K$$

is unique except positive constant.

We shall define convolution of  $\mu$  and  $\nu$  in  $M^b(K)$  as follows :

$$\mu * \nu = \int \int T^x h(y) \mu(dx) \nu(dy)$$

for  $h \in C^c(K)$ .

In order to consider the dual of  $K$ , we shall consider a continuous function  $\chi$  of  $K$ .  $\chi$  is called a semicharacter of  $K$  if

$$T^x \chi(y) = \chi(x) \chi(y)$$

for  $x, y \in K$ .

A semicharacter  $\chi$  is called character if it is not identically zero and bounded with hermitian property in the sense that

$$\chi(x^-) = \overline{\chi(x)}$$

We denote  $K^*$  to be a set of all character of  $K$ . Then  $K^*$  becomes a hypergroup as it is known in the case of group. It is known also that  $K^*$  is compact if  $K$  is discrete and  $K^*$  is discrete if  $K$  is compact. In this case it is known also that  $K$  and  $K^*$  are in dual position to each others i.e. Pontrjagin duality principle is valid.

The topology of  $K^*$  is defined as same as group cases.

### 3 Polynomial hypergroup

Let us consider polynomials of d-dimensional complex plane  $C(z_1, z_2, \dots, z_d)$ .

Let  $K$  be a countable set corresponding to a family of polynomials  $P_k$  in one-to-one way with discrete topology. Let  $\{ P_k, k \in K \}$  satisfy the following condition (P,0) :

Let  $K_n$  be a vector space generated by polynomials  $P_k$  of the family  $\{ P_k \}$  with degrees below than or equal to  $n$

(P,0) all  $P_k$  with degree below than or equal to  $n$  constitute a basis in  $K_n$ .

Under this condition, we can write uniquely as follows :

$$P_i P_j = \sum_k c_{i,j,k} P_k.$$

Hence we can define convolution of point mass as follows:

(P,1)  $e_i * e_j = \sum_k c_{i,j,k} e_k$

By the rule of (P,0), and if there is an involution mapping in  $K$  and  $K$  can be considered as a hypergroup, then we call  $K$  to be a polynomial hypergroup. Hence, it is not sure that  $K$  is a polynomial hypergroup even if  $K$  satisfy (P,0). In many cases, the condition that

$K$  is a polynomial hypergroup is quite restricted. It is clear that  $M_b(K)$  is an algebra by the rule of  $(P, 1)$ . In any way it is difficult to define involution in  $K$ .

We shall consider the following in the case that  $K$  is a polynomial hypergroup.

1. What is a semicharacter of  $K$ .
2. What kind of spaces is homeomorphic to the dual of  $K$ .
3. What is involution of  $K$ .

**Theorem 1** A semicharacter  $\chi$  of a polynomial hypergroup  $K$  is determined by an element  $z$  such that

$$\chi_z(k) = P_k(z).$$

**Theorem 2** Let  $K$  be a polynomial hypergroup by the family  $\{P_k\}$  satisfying  $(P, 0)$ . Then the dual hypergroup of  $K$  is homeomorphic a subset of  $d$ -dimensional complex plane such that

$$K^* = \{\chi_z : z \in C^d, |P_k(z)| \leq 1, \bar{P}_k(x) = P_k(x) \text{ for } k \in K\}$$

Hence

$$K^*$$

is homeomorphic to a compact set in  $C^d$ .

**Theorem 3** Let  $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$  be one dimensional polynomials which are corresponding to elements of  $K$ . For the involution of hypergroup  $K$ , there is a correspondence  $\phi : \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \{1, 2, \dots, d\}$  such that  $x_j^- = x_{\phi(j)}$ .

By this rule, we can determine the whole rule of the involution of the hypergroup.

Next, let a family of polynomials satisfying  $(P, 0)$  and these polynomials are assumed to be an orthogonal system with respect to a measure  $\pi$  of  $C^d$ . The family of polynomials is denoted by  $\{P_k; k \in K\}$ . Then we have the following theorem:

**Theorem 4**  $K$  is a hypergroup if and only if the following conditions are satisfied:

- (P,2) there exists some  $z_0 \in C^d$  such that  $P_k(z_0) = 1$  for all  $k \in K$ .
- (P,3) For every  $k \in K$ , there exists an element  $k_- \in K$  with  $\bar{P}_k = P_{k_-}$ .
- (P,4)

$$\int P_k P_j P_l d\pi \geq 0 \quad \text{for all } k, j, l \in K$$

In the following, I will show an example of a polynomial hypergroup.

A family of the following polynomials depending on  $\alpha$  and  $\beta$ .

$$P_k^{\alpha, \beta}(z) = ((-1/2)^k / (\alpha + 1)) (1 - z)^{-\alpha} (1 + z)^{-\beta} d^k / dz^k ((1 - z)^{k+\alpha} (1 + z)^{k+\beta})$$

The system of such polynomials is called Jacobi polynomials and the hypergroup induced by Jacobi polynomials is called Jacobi polynomial hypergroup.

The condition that it becomes a hypergroup is the following:

$$(\alpha, \beta) \in R^2$$

and

$$\alpha \geq \beta > -1, (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 4)^2(\alpha + \beta + 6) \geq (\alpha - \beta)^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 5\alpha - 5\beta - 30)$$

### References

- [1] H. Heyer and S. Koshi, Harmonic Analysis on Disk hyper group ; Tokyo Metropolitan University Seminar Note (1993)
- [2] G. Gasper, Linearization of the product of Jacobi polynomials II Jour Canad J. Math. 22, p 582-593 (1970)

Correction In Hokkaido University Technical Report Series 35 In Mathematics

We should read " $L^p$ -convergence of an extended stochastic integral, *II*" by Toshitada Shintani in  $p56 \sim p61$  as the following :

$p56 \rightarrow p60 \rightarrow p59 \rightarrow p58 \rightarrow p57 \rightarrow p61.$

北海道大学数学講究録 Series 35 の正誤表

$p56 \sim p61$  の新谷俊忠氏の「 $L^p$ -convergence of an extended stochastic integral, *II*」は次の順序で読んで下さい。

$p56 \rightarrow p60 \rightarrow p59 \rightarrow p58 \rightarrow p57 \rightarrow p61.$