



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Statistique χ^2 dans le cas de la methode du maximum de vraisemblance
Author(s)	Hashimoto, Toshio
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido University. Ser. 1 Mathematics, 22(3-4), 158-160
Issue Date	1972
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/54699
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_22_N3-4_158-160.pdf



Statistique A_n^2 dans le cas de la methode du maximum de vraisemblance

Par Toshio HASHIMOTO

Ce mémoire a pour objet d'étudier la loi limite de probabilité d'une statistique A_n^2 qui est introduit par Hashimoto [3] dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance. Il résulte que la loi de probabilité d'une statistique A_n^2 par estimateur de maximum de vraisemblance est égal asymptotiquement à celle de A_n^2 sous quelques conditions.

1. Définitions et remarques préliminaires

A partir des résultats connus, nous nous proposons ici de poser le problème suivant ;

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x; \theta)$ supposée continue avec un paramètre inconnu θ , $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un n -échantillon de X , et $F_n(x)$ la fonction de répartition empirique associé. D'après la suggestion de Darling [2] pour comparer $F(x)$ et $F_n(x)$, nous considerons ici la fonction de test

$$(1.1) \quad A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F_n(x) - F(x; \hat{\theta}_n) - \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(y) - F(y; \hat{\theta}_n)] dF(y; \hat{\theta}_n) \right\}^2 dF(x; \hat{\theta}_n)$$

ou $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convenable pour un paramètre inconnu θ en $F(x; \theta)$. Cette statistique (1.1) correspond à la forme modifiée de celle de Watson [4], [5]. De même que la variable aléatoire U_n^2 conduit au test non-paramétrique, la variable aléatoire A_n^2 peut servir à tester l'accord entre la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ et la fonction de répartition théorique. En ce qui concerne la loi limite de cette statistique, on a un résultat dans le cas d'un estimateur efficace. On le note de la façon suivante ;

THÉORÈME *Dans le cas d'un estimateur efficace $\hat{\theta}_n$ de θ , la loi de A_n^2 tend vers celle de $A^2 = \int_0^1 Y^2(u) du$, ou $Y(u)$ est un processus laplacien de moyenne 0 et de la fonction de covariance $\rho(s, t)$ donné par (4.5) dans [3].*

2. Position du problème et théorème

Quand un estimateur efficace pour θ n'existe pas, il se trouve qu'un estimateur par le maximum de vraisemblance pour θ existe et il est asymp-

totiquement efficace au sens de Cramér.

Nous supposons que les conditions de Cramér ([1] pp. 500–501) soient satisfaites. Si ces conditions de Cramér, qui contiennent toutes les conditions 1)–6) des lemmes 3.1 et 3.2 de [3], sont satisfaites, ces dernières sont aussi satisfaites sauf 4) et alors nous supposons que cette condition 4) est, elle aussi, satisfaites en l'appellant condition 'biais-faible' sur $\hat{\theta}_n$.

Dans certain cas, $\hat{\theta}_n$ est actuellement un estimateur sans biais ainsi qu'un estimateur efficace, donc la condition 4) sera satisfaite naturellement. L'analyse suivante est parallèlement analogue à celle développée dans un article précédent [3].

Définissons σ^2 , soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x; \theta)\right]^2\right\}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x; \theta)\right\}^2 f(x; \theta) dx\right]^{-1}$$

et la fonction de la vraisemblance, soit $L = \prod_{j=1}^n f(x_j; \theta)$. On peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x_j; \theta) = \frac{n}{\sigma^2} (\hat{\theta}_n - \theta) (1 + \varepsilon_n)$$

où ε_n tend vers 0 au sens de convergence en moyenne. Donc on a

$$\frac{n}{\sigma^2} (\hat{\theta}_n - \theta) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x_j; \theta) (1 + \varepsilon'_n), \quad \varepsilon'_n \rightarrow 0 \text{ en moyenne.}$$

En conséquence, quant à $h_n(u)$ qui est défini dans le lemme 3 de [3],

$$h'_n(u) \rightarrow h'(u) = \sigma^2 \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(x; \theta) \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \text{Var} \left\{ \sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta) \right\} \rightarrow \sigma^2$$

si $n \rightarrow \infty$, et il résulte que $\rho_n(u, v) = E\{X_n(u) X_n(v)\}$ tend vers $\rho(u, v)$. On peut généraliser le théorème de la manière suivante;

THÉORÈME Si $\hat{\theta}_n$ est un estimateur 'biais-faible' par le maximum de vraisemblance satisfaisant aux conditions de Cramér et si $\rho(u) = \sigma \frac{\partial}{\partial\theta} F(x; \theta)$ satisfait la relation

$$\int_0^1 |\varphi''(u)| u(1-u) \log \log \frac{1}{u(1-u)} du < \infty,$$

alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_r \{A_n^2 < x\} = P_r \left\{ \int_0^1 X^2(u) du < x \right\}$$

où $X(u)$ est un processus laplacien de moyenne 0 et de covariance

$$\rho(s, t) = \min(s, t) - st + \frac{1}{2}(s^2 + t^2 - s - t) + \frac{1}{12} \\ - \varphi(s)\varphi(t) + \left[\varphi(s) + \varphi(t) \right] \int_0^1 \varphi(x) dx - \left[\int_0^1 \varphi(x) dx \right]^2$$

Ce théorème signifie bien sûre que la statistique A_n^2 converge en loi vers la variable aléatoire $A^2 = \int_0^1 X^2(u) du$.

Département de Mathématique
Université de Hokkaido

Références

- [1] CRAMÉR, H.: Mathematical methods of statistics, Princeton University Press, (1946).
- [2] DARLING, D. A.: The Cramér-Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Stat., Vol. 26 (1956), pp. 1-20.
- [3] HASHIMOTO, T.: Watson's U_n^2 test in the parametric case, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1, Vol. 20 (1969) pp. 204-219.
- [4] WATSON, G. S.: Goodness-of-fit tests on a circle, Biometrika, Vol. 48 (1961) pp. 109-114.
- [5] WATSON, G. S.: Goodness-of-fit tests on a circle II, Biometrika, Vol. 49 (1962) pp. 57-63.

(Received August 31, 1971)