



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems Sapporo
Author(s)	Tsuda, I.
Description	28-31 August 1994 18-21 January 1995
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 37, 1
Issue Date	1995-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/5163
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/5477
Type	departmental bulletin paper
File Information	37.pdf



The Second & Third Sapporo Symposium on
Complex Systems

Sapporo, 28-31 August 1994
18-21 January 1995

Edited by I. Tsuda

Series # 37. June, 1995

HOKKAIDO UNIVERSITY

TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 3: K. Kubota (Ed.), 第12回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 77 pages. 1987.
- # 4: J. Tilouine, Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module, 85 pages. 1987.
- # 5: Y. Giga (Ed.), Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987, 17 pages. 1987.
- # 6: T. Yoshida (Ed.), 1987年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 96 pages. 1988.
- # 7: S. Izumiya, G. Ishikawa (Eds.), "特異点と微分幾何" 研究集会報告集, 1988.
- # 8: K. Kubota (Ed.), 第13回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 76 pages. 1988.
- # 9: Y. Okabe (Ed.), ランジュヴァン方程式とその応用予稿集, 64 pages. 1988.
- # 10: I. Nakamura (Ed.), Superstring 理論と K3 曲面, 91 pages. 1988.
- # 11: Y. Kamishima (Ed.), 1988年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 73 pages. 1989.
- # 12: G. Ishikawa, S. Izumiya and T. Suwa (Eds.), "特異点論とその応用" 研究集会報告集 Proceedings of the Symposium "Singularity Theory and its Applications," 317 pages. 1989.
- # 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう" 1987年7月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.
- # 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989.
- # 15: R. Agemi (Ed.), 第14回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- # 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.
- # 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.
- # 18: A. Arai (Ed.), 1989年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- # 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- # 20: R. Agemi (Ed.), 第15回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- # 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- # 22: R. Agemi (Ed.), 第16回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- # 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- # 24: K. Kubota (Ed.), 第17回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
- # 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28~10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.
- # 26: T. Nakazi (Ed.), 第1回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- # 27: K. Kubota (Ed.), 第18回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- # 28: T. Hibi (Ed.), 1992年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- # 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第2回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.
- # 30: Y. Giga, Y.-G. Chen (Eds.), 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.
- # 31: K. Kubota (Ed.), 第19回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.
- # 32: T. Ozawa (Ed.), 1993年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.
- # 33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.
- # 34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.
- # 35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第3回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.
- # 36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.

Proceedings of the
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH GROUP
OF SAPPORO

No. 2&3

The Second & Third Sapporo Symposium on
Complex Systems

Sapporo, 28-31 August 1994
18-21 January 1995

Edited by I. Tusda

目次

夏期分

多成分時系列のコヒーレンスの諸相 -関係データベース理論の複雑系への応用の試み- (辻下 徹)	1
通信網性能論の模索 -輻輳論から可能世界論へ- (下川 信祐)	3
事態の聞きわけについて (塩沢 由典)	7
非線形時系列解析と新しい予測公式 (岡部 靖憲)	9
遺伝的アルゴリズムの制御への応用 (島 公脩・山下 裕)	19
Thermodynamics, Large Deviation and Langevin Equation (藤坂 博一)	23
可逆力学系における決定論的拡散 ミクロ力学とマクロ現象論のインターフェイスとしてのフラクタル構造 (田崎 秀一)	28
セル力学系の数理：入門 (高橋 陽一郎)	43
Computational Dynamics of Chaotic Neural Networks (合原 一幸)	59
カオスによる自発的分化と多様性の進化 (金子 邦彦)	62
テープとマシンの共進化 (池上 高志)	64
見かけの複雑さの中の真実：あるDNA鑑定をめぐって (柳川 堯)	69

情報の自律生成 (矢野 雅文)	74
多成分流体系の非平衡熱力学 (北原 和夫)	77
大脳皮質におけるカオスの遍歴とその意味 (津田 一郎)	89
<u>冬期分</u>	
いたるところ微分不可能なアトラクター (津田 一郎)	91
関数関係・演繹系・代謝系のパターン (辻下 徹)	97
ショウジョウバエの胚の体節形成シミュレーション (有田 正規・白取 知樹・萩谷 昌己)	99
サーカディアンリズム (本間 研一)	102
ベースメーカニューロンのバースト的シナプス入力に対する応答 (林 初男)	103
神経細胞のパルス密度変調におけるヒステリシスについて (赤沢 年一・清水 利伸・馬場 欣哉・下沢 楯夫)	105
位相型の変化を伴う場合の変分法の構成とその応用について (四方 義啓)	110
セルオートマトンのエントロピーと多重度 (行木 孝夫)	112
可逆セルオートマトンの統計力学と動力学 (武末 真二)	114
計算論的な網設計基礎の模索 (下川 信祐)	122
Dynamical Systems Approach in Learnable Autoumous Robots (谷 淳)	123

経済時系列の非線形因果解析 (岡部 靖憲・中野 裕治)	132
揺動散逸定理に基づく定常性の検定 (大浜 巖・積山 功・草場 康司・柳川 堯)	151
自己組織する複雑系としての経済 (塩沢 由典)	157
非線形最小位相系における制御則の設計 (島 公脩・横道 政裕)	159
Dynamics of Inhibitory Pulse-coupled Oscillators (西浦 廉政・志俵 淳子・高石 武史)	166
Measure Theoretical Approach for Chaotic Dynamical Systems (由利 美智子)	171
2次元写像の力学系的構造について -Henon mapの構造と分岐- (三波 篤郎)	172
The First Bifurcation & the First Tangency inside the Horseshoe (桐木 紳)	177

第2 & 3回複雑系札幌シンポジウム*講究録

序文

岡部靖憲氏の主催した第1回複雑系札幌シンポジウムの後を受けて、平成6年8月に第2回、平成7年1月に第3回の同シンポジウムを開催した、本報告書は、第2回、第3回を合冊の形でまとめたものである。「複雑系札幌シンポジウム」の主旨は、北海道大学数学講究録 (series#33) として出版されている第1回の報告書に岡部氏の記述があるので、そちらを参照していただきたい。

最近、「複雑系」研究がさかんになり始めており、さまざまな人達が、「複雑系」という言葉を使ってはいるが、その含意するところは個々ばらばらであり共通認識が得られているとはいえない。最も危惧されることは、名前だけ目新しいものにつけかえて、皆でバスに乗り遅れないように歩調を合わせる傾向が見受けられることである。日本での複雑系研究は、1980年代の前半から若手研究者を中心に進められてきた。特に、カオス、乱流、脳のダイナミクス、発展系としての生物系などの理解や新しい統計力学のわく組をめざす物理学の若手研究者が、研究を主導してきた。そこでは、従来の物理学のわく組におさまらない現象が数多く指摘され、新しい理解のためのわく組が模索されてきた。要素還元的な手法では十分な理解に到達できない系に対して、構成的方法が強調され、新たな理論展開へと向かって一步を踏み出したのである。しかし一方で、新しい学問を構築する時には数学的基礎づけが不可欠であるが上記の物理学者の活動においては数学者側からの寄与が念頭に置かれていたとはいえない。

第2回と第3回複雑系札幌シンポジウムでは、このような経緯を受けて、応用数学者が中心となって、複雑現象の共通普遍項の抽出をめざし、さらには、複雑系の構成論と計算論の構築に向けて会を組織した。複雑系においては、外的制御の困難さが存在することが指摘されている。このことにより、時に実験事実「事実」には違いないが、「真実」であるとはいえない場合が存在する。我々は今まで、現象を観察し、あるいは観測することにより、系に対する直観（「物理学的直観」、「化学的直観」、「生物学的直観」など）を養ってきた。しかし複雑系においては、しばしば「反直観的」な事態に直面する。我々が、実験を通して養ってきた直観がもはや通用しなくなることが起こり得るのである（例えばカントール集合上に制限された現象を想定せよ）。このとき、我々は、新しい直観をいかにして獲得したらよいか。一つの可能な方法は、計算機を、新しい宇宙とみなして、そこでの”現象”に慣れ親しむことであろう。これが、構成論と計算論が複雑系理解のために必要になる理由である。

*このシンポジウムは平成6年度文部省科学研究費総合研究A

「複雑現象の数理的構造の理解と研究方法の開拓のための複雑系の構成論および計算論」（研究代表者 津田一郎）により行われたものである。

多成分時系列のコヒーレンスの諸相

— 関係データベース理論の複雑系への応用の試み —

辻下 徹

北海道大学理学部数学教室

1994.8.28

講演要旨

一つの複雑系の観測・観察の結果得られるデータが一つのデータベースをなすと見なすとき、関係データベース理論のいくつかの概念（特にデータ従属性）がどのような意義を持つかを模索する。

関係データベース 関係データベース理論は Codd [2] によって創始され、汎用データベース言語 SQL ([7, 5]) の理論的骨組となっている。関係データベースの特徴は、記録しようとする事象についての予備知識は、属性（観測量・変数など）の集合¹の集まり²を設定することにしか必要としない点にあるといえよう、事象に内在する「関係」はデータベースの成長とともに、いわば、創発的に現れてくるのである。

時系列の定める関係データベースとそのビュー 複雑系の観測データの集まり（以下時系列と呼ぶ）は自然に（時刻と観測種の組の全体を属性のユニバースとする）関係データベースとしてとらえられる。しかし、複雑系の挙動の理解を目指すときは、時刻によらない性質が重要な役割を果たすため、通常の関係代数演算の他に「シフト射影」演算を添加することが必要となる。

時系列が与えられると、各関係スキーム（変数の集合）ごとに、一つの関係（ビュー）が得られ、時系列のある切口を呈示する。時系列のもつコヒーレンスは、いろいろなビューにおける様々な「従属性」を引き起こす。

データ従属性とコヒーレンス 関係データベース理論において「データ従属性」の定式化と分析とは主要なテーマであった ([3])。設計上これを仕様に含ませることにより、データベースに冗長性を持たせ、種々の処理を容易にすることができることが推察される。しかし、複雑系への応用においては、仕様としての従属性よりも「創発的に」現れる従属性のほうが重要である。

従属性の中では、関数従属性 (FD)・多値従属性 (MVD)・結合従属性 (JD) が重要な役割を果たす。

関数従属性とコヒーレンス ビューの関数従属性として表現されるコヒーレンスは（3変数以上では）種々のパターンがある。複雑な挙動を示す力学系モデルでは、因果性という関数従属性が仕様としてグローバルなビュー³の間に自明に存在しているが、ローカルなビュー⁴に関数従属性が現れるときは、系が自明でないコヒーレンスをもっていると考えることが出来る。

¹関係スキームという

²データベーススキームという

³ある時刻と次の時刻のすべての属性のスキーム

⁴少数の異時刻の属性のスキーム

結合従属性と部分系の準自由結合 結合従属性は、系を部分系の記述に分割するとき、部分系間のインタフェースでの両立性を除いて部分系が独立に活動している状況を表現する。一般にはこのような形の分割は可能でない。力学系的枠組では入出力を持つオートマトンの結合して得られる系の挙動は、部分系への射影の集まりのなすデータベースの準自由結合となっている。

講演内容 この報告では、

- 関係データベースの主要な概念の解説
- 関係データベースとしての時系列
- ビューに現れる関数従属性
- 部分システムの準自由結合

について述べた。

参考書 この講演の準備には主に [3, 4, 5] を参照した。実用化された SQL については [7, 5] が詳しい。データ従属性については [3] が明快だった。なお、時系列や空間的データへの関係データベースの枠組みの拡張も多くなされているようである [6]. [8] は関係データベースの簡明な解説と共に、最近のデータベース理論の展開についても書かれている。

参考文献

- [1] N.R.Adam et. al (eds), Advanced Database Systems, Lecture Notes in Computer Science vol.759 (1991)
- [2] E.F.Codd, A relational model of data for large shared data banks, ACM 13(6) (1970), 377-387.
- [3] R.Fagin and M.Y.Vardi, The theory of data dependencies – a survey, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 34, 19-71, 1986.
- [4] P.C.Kanellakis, Elements of Relational Database Theory, Handbook of theoretical computer science, ed. by J. van Leeuwen, Chapter 17, 1075-1156.
- [5] 増永良文, リレーショナルデータベース入門-データモデル・SQL・管理システム-, サイエンス社, 1991.
- [6] A.Segev and R. Chandra, A data model for time-series analysis, Chapter 9, 175-190 in [1].
- [7] 上林弥彦, W.Kim, 酒井博敬編, 最近のデータベース・システムとその応用, bit 別冊, 共立出版 1983.
- [8] 横田一正、宮崎収兄、新データベース論-関係から演繹・オブジェクト指向へ、共立出版, 1994.

通信網性能論の模索

—輻輳論から可能世界論へ—

下川信祐
ATR光電波通信研究所

1. はじめに

通信網は膨大な設備を要し、効果的な設備利用と混雑の回避が重要である。そこで、設備効率と輻輳を分析する数理的な方法（待ち行列モデル）が開発され、網やその運用法を評価する基礎として用いられてきた[F]。一方、継続的な情報処理要素技術の発達で、網やそのサブシステムを評価対象として著しく複雑化させ、困難をきたしてきた[St]。

報告者は、通信網の評価をめぐるかかる困難に対して、「複雑系」の視点・視座・方法により、克服への手掛かりを得たいと考えている。

前回の報告では、複雑性の視点から従来枠組みを分析し、脆弱性・困難さの原因となっている問題点を明らかにした[Sm1]：第1の問題点は、「従来枠組みにおいて、複雑化は外部要因であること」であった。この点が、評価過程の外部要因への従属を拡大し、従来枠組みの寄与を著しく限定している。第2は、「従来法がダイナミクス範疇を暗黙のうちに限定している」点であった。ダイナミクスの範疇を拡大することで、従来法や従来原理の破綻例を与えることができた。

複雑化を克服するには、複雑性・複雑化を内部に取り込む評価枠組みが必要である。これは、無論容易ではない。本報告では、まず、複雑性の視点を従来評価から網に転じ、複雑化が網にとって積極的に位置づけられるべき本質性を注意する。次に、複雑化のメリットを捉える視点として「可能世界」の考え方を適用し、輻輳—資源論に代わるべき性能論を模索する。

2. なぜ通信網は複雑化するのか？

網の役割は通信サービスに自由性（何時でも、何処でも、誰とでも、etc）と低廉性（低料金）を供給することにある。これを同時に満足させる代償として、輻輳（待ち合わせ・損失）を伴う。複雑化は、網の自由度の拡大やこれに伴う柔軟性の拡大に対応したものである。このため、「輻輳—資源」枠組みにとって複雑化は外部要因であった。では、自由度や柔軟性の拡大は何故生じるのだろうか？ 実は、これが網の本性に由来し、従って複雑性が網にとって本質的であることが了解できる。

まず、網のサービス拡大の直接の動機は、新しい通信の生成にある。新しい通信の生成とは、網に取って資源の利用、即ち、新しいトラヒックの生成に他ならない。従って、自由度や柔軟性の拡大は、トラヒックの維持・拡大である。一方、網の基本仕様「自由性・低廉性」の実現には、大規模な資源の有効利用を要するとすれば、トラヒックは網にとって生命線である。従って、複雑化は網にとって生命線の維持・拡大という本性とも見做せる。

[Sm1]で、「強度0のトラヒック流」として挙げたダイ

ナミクスの範疇の拡大例[Sm2]は、新しいトラヒックの生成に伴う、複雑性の拡大に他ならない。

3. 仮想的な自由性

複雑化をもたらす、自由性や柔軟性の拡大は、トラヒックの維持拡大という網の本性に由来すると見做せること、従って、網の理論として本来積極的に捉えるべき対象であることが了解できた。言い換えれば、複雑化の克服には、自由性や柔軟性といった要素を中心にじた枠組みが必要である。そこで、本節では、網間接続を例に、自由性と柔軟性の相異を明確にしておく。即ち、自由性が仮想的な性質を持つのに対し、柔軟性は実体的な概念と考えられる。

網は、自由性・低廉性を共存させるために、例えば、通信資源（通信回線）を刻みこみとスイッチによる交換機能によって柔軟化させ、自由度のある共用を可能にしている。従って、網の能力を柔軟性によって捉えるという着想は目を引く。しかし「柔軟性拡大」という言葉では表し尽くせない、基本的な能力拡大がある。

二つの通信網が接続される状況を考えて。網が簡単な資源の追加で、接続可能な仕様であったとしよう。接続可能性は、各網が接続される以前から持っていた柔軟性が提供していると考えられ、資源追加そのものは柔軟性の拡大とは言い難い。しかし、網の接続によって可能になる相互通信は極めて豊富なものとなる。各網には、多くの情報資源・計算資源・通信相手があり、豊富な通信過程が可能性として生ずるからである。

接続による自由度の拡大は、網がコストの増加によりその能力を飛躍的に拡大させるもので、網の形成・発達を考えるうえで基本的である。また、資源増を要する点では、従来の輻輳—資源評価にとっては逆説的で説明できない変化である。この効果は、各網が複雑で大規模であるほど大きく、通信網において基本的な創発性と考えられる。この創発的な自由度拡大は資源の変更が小さい点で、仮想的と考えられる。これに対し、柔軟性という視点は、対象の実体により注目したものであり、このような創発的な能力拡大を直接捉えるとは考え難い。

4. 可能世界の視点

数理論理学に「可能世界」という考え方があり、計算機科学においても重視される[Hg]。可能世界は様相論理のセマンティクスを与える基本概念で、様相論理の持つ、「命題が成立する可能性」という特徴的な表明が「様々な世界」によって意味づけられる。一方、網の相互接続のメリットは、可能性として自由度が拡大するものであった。可能世界の視点は、仮想性を伴う自由さを捉える基本的な視点として、期待できそうである。

4.1 可能な通信過程の成す空間

「可能世界」を考えるとといっても、様相論理による網の記述を考える訳ではない。可能性を積極的に捉えようという視点でしかない。それだけでも網の問題に対する見通しがかかり良くなる。

通信過程の可能空間(C)

おおまかに次のようなものを考えたい。通信網は通信過程の並行処理を行う系であるから、処理されていく「通信過程」の空間Cが考えられる。ここでCの要素である通信過程は、ある時刻で必ずしも実現されている必要はない。しかし、適当な外部条件や網の履歴によっては実現しうる「可能な」通信過程を全て考える。本報告では、可能世界の集合であるCを、試しに、「可能空間」と名付けて、議論を進める。網のサブシステムや適当な条件の下での可能空間も、同様に考えられる。通信過程・可能空間の形式を決めなければならないが、これには、網の能力に関する考察が必要である。次節で基本的な要請を提示する。

排他的な可能世界

通信過程の各可能世界は、資源の有効利用という網の特徴によって、排他性を伴う。実際、同時に実現できる、若しくは、処理が進む通信過程は限られる。従って、可能世界である各通信過程は、どれかが実現される時他は実現されていないという、排他的な論理に従う。排他的な通信過程が時間や状況に応じて実現可能になる点に、網の柔軟性・共用機能の意味があった。可能世界の視点は、資源Rの基本機能が提供する、少数だが排他性の無い可能空間C(R)から、莫大で排他的な網Nの可能空間C(N)への拡大・変質として、網Nの機能と能力を捉えようとするものである。

仮想性による能力装備

排他的可能性による系や部分系の能力装備は、必然的に仮想性を伴う。実際、豊富な各可能性は排他的であるがゆえに、何れかが選択された時点で、他の可能性が消失するからである。このような排他的可能性が生成する能力の典型として、「貨幣」が挙げられよう。特に、紙幣には著しい仮想性が見いだされる。実際、システムを離れては全く機能し得ない一方で、システム内では強力な能力を呈しうる。

4. 2 可能空間の構成・構造と性能要素

網の特性的要素が可能空間によって表現可能であることを確認する。また、可能空間の導入によって、輻輳が自由性の障害として捉えられ、自由性の要素に帰着しうることが了解できる。

資源消費

資源は時間的・空間的に大きさを持つ（資源の時空）。従って、可能空間の要素が資源の時空の部分集合（関数等）へ対応づけられることで資源消費が記述できる。

なお、資源消費過程により、資源の時空から誘導して可能空間に定量的または解析学的（可微分性、特異性、位相）構造を考えることが原理的には可能である。

自由度

通信過程やその系の自由度は、外部からの要求に応じて、通信過程が随時に生成・変化することと考えられる。言い

換えれば、通信過程は、時系列より寧ろ（非決定性・並行性の）オートマトンとして捉える必要がある。通信過程・分散システムの実装を目的として開発されてきた形式的方法是、このような通信過程の記述法・基礎を提供してきている[Hr, Ml, Ac]。また、様相論理では、可能世界の変化を可能世界間の遷移関係である到達可能性関係によって表記される[Hg]。

輻輳と自由度、並行性

輻輳は、可能な通信過程の実現における排他性によって、通信過程が外部要求でない変形（遅れ、損失）をうけ、悪影響を及ぼすことである。この悪影響は、通信過程が外部要求に応じて生成・変化する事妨げる障害に他ならない。従って、輻輳は自由度に帰着される。こうして、可能世界の視点は輻輳に対して解釈を与え、輻輳の複雑な特性量に意味を与えることが可能となる。

一方、自由性の劣化を輻輳と捉えるには、通信過程間で資源を取り合う可能性として、「並行性」の構造を明示する必要がある。

規模的自由度、強度的自由度、仮想性、輻輳

試みとして、対要求自由度を静的な成分と動的な成分に分ける事を考えよう。即ち、系外要求によって到達できる空間の規模と、その遷移の早さ・容易さに分けて考える。前者を規模的自由度、後者を強度的自由度と呼ぼう。可能空間Cに対して、

仮想性 ~ 規模的自由度 / 資源消費量

という定性的定義が考えられる。また多くの場合、輻輳は、到達規模より到達速度の障害と考えられ、強度的自由度の劣化要因として位置づけられる。

5. 可能世界のもたらす見直し

前節の議論は、従来の輻輳—資源解析に代わるものとして、可能空間の解析が有望であることを示唆している。実際、可能世界の視点から見たとき、輻輳は自由性の障害という可能空間の一側面に限られている。一方で、輻輳が従来の素朴な直感により扱われる限り、高次モーメント・分布値・緩和時間等の複雑な特性量の意味を議論することができない。

本節では、可能空間の導入によって容易にもたらされるメリットを示す。

本節以降は、新しい視点によって広がる、見直し・見込みを述べるものであり、本格的な議論には、数学的枠組みの設定が不可欠である事は言うまでもない。

5. 1 網拡大における仮想性の役割

可能空間を考えることで、仮想性が網の拡大を促すことが解かる。

3節の網間接続の例を考えよう。相互通信の可能性により可能空間が拡大する。各網を N_1, N_2 とし、各網内の通信主体（通話者、端末、ホスト、通信応用プログラム etc...）を $A(N_1), A(N_2)$ とする。網の接続によって可能となる通信過程は、形式的に直積 $A(N_1) \times A(N_2)$ となる。即

ち、可能空間の形式的拡大が直ちに起き、且つ、これは積の増大度を持つ。無論、可能な通信過程の定量的な自由度が輻輳によって資源量と関わっている。しかし、通信主体や生成される通信過程の仮想性が強く、資源消費が疎であれば、網間接続に伴う必要資源の増加は小さくなる。即ち、網間接続の「 Δ 自由度/ Δ 資源量」は増大する。こうして、仮想性は網の拡大を促すことになる。

5. 2 特異性の視点

網拡大の例と3節の貨幣の例は、強い仮想性が認められる時、即ち、可能空間の規模からみて資源消費が「小さい」時、網が特徴的な能力を装備する可能性を示唆している。強い仮想性は、資源消費過程の解析的な特異性を示唆する。即ち、可能空間の自由度の規模が莫大であれば、資源消費過程は資源の時空においても豊富な自由度を持ちうる。資源の時空は低次元であるから、資源消費過程は、スケールング変更等により、特異性を呈することが示唆される。また、資源消費が小さいことから、資源時空の位相次元に比べて、ハウスドルフ次元が小さくなること等が示唆される。

5. 3 多重アクセス系の能力表現

タイムシェアリング、ランダムアクセス、ポーリングといった多重アクセス系[TS]に対し、従来の輻輳論では、輻輳特性の評価は可能でも、アクセス系の基本的能力そのものを特徴づけることができなかった[Sm3]。

可能空間を介することで、プロセス代数[Hr,M]の適用が可能となり、多重アクセス系の基本的能力を把握できる。

インタリーブ

インタリーブはプロセス間の演算である、この演算により、可能空間の重要な自由度拡大を記述することができる。

二つのプロセスP,Qが $P=\{<p[1],p[2],\dots,p[n]>\}$,
 $Q=\{<q[1],q[2],\dots,q[m]>\}$ と表現されるとき、PとQのインタリーブは、

$$P \parallel Q = \{<x[1],x[2],\dots,x[n+m]>\};$$

$$x[i[1]] = p[1], \dots, x[i[n]] = p[n], x[i'[1]] = q[1], \dots, x[i'[m]] = q[m],$$

$$i \in \text{IHom}(\{1,\dots,n\}, \{1,\dots,m+n\})$$

で、与えられるプロセスの集合である。ここで、 $\text{IHom}(A,B)$ は順序集合A,Bに対し、AからBへの順序保存単射のなす空間とする。 $\text{Im}[i]$ は射像iの像。

$$\text{Card}[\text{IHom}(\{1,\dots,m\}, \{1,\dots,n+m\} - \text{Im}[i])] = 1$$

である。ここで、プロセス表記、

$$<p[1],p[2],\dots,p[n]>$$

は、 $p(i)$ が番目の状態遷移要求によって目的の遷移が達成されたことを表現する。 $p(i)$ をビット列の書き換えとすることで、通信過程と見做せる。

多重アクセス

インタリーブは、多重アクセスの基本的能力を、次のように表現できる。プロセスP,Qが共通資源を用いて処理されるとしよう。多重アクセスが導入されないときに(形式

的)可能空間は $C_1 = \{P;Q;Q;P\}$ である。ここでP;QはプロセスPとQの順次結合を表し、プロセスPのあと続いてQが処理されることを意味する。これに対して多重アクセスの(形式的な)可能空間は $C_2 = P \parallel Q$ である。 $C_2 \supset C_1$ であって、この拡大は著しく大きい。

この議論は、一見、自明に見えるかも知れない。しかし、可能空間の各要素の実現は排他的であり、何れかしか実現できない選択肢である。インタリーブを用いることで、多重アクセスの導入により著しく選択肢が拡大することが表現されている。

トークン保留時間

上述の議論は、直ちにトークン保留時間設計の問題[下川]に適用できる。

多数の端末と単一の通信チャネルからなる通信系を考えた場合、通信チャネルは利用権(トークン)の受渡によって共有されるとする、継続して通信チャネルを利用できる最大時間があらかじめ設定され、トークン保留時間と呼ばれる。トークン受渡に伴って通信チャネルが利用できない時間が生ずるため(切り替え時間)、通常の遅延時間解析を行うと、トークン保留時間が長いほど有利となる。

上記の議論から、トークン保留時間の短さが、不完全ではあるが、インタリーブを担い、多重アクセス系としての本来機能を担っている事が解かる。これは、可能世界の視点により初めて明確にできた点である。実際、従来はトークン保留時間の役割に関する明快な表現はなく、「平等性の確保」という不明瞭な表現が用いられた[Tkg]。また一方で、トークン保留時間の役割を輻輳の枠内で特徴づけるために、遅延時間の分布値や分散、緩和時間等複雑な特性量に言及せざるを得なかった。これらは多重アクセス系の確率モデルが多次元のマルコフ過程であるため、困難が大きく、目的を達成できてきない[Sm3]。可能空間の導入によって、トークン保留時間縮小が、輻輳という自由度の障害としてより、寧ろ、インタリーブという自由度の拡大として容易に捉えられることがわかる。

6. 性能論・拮抗論

可能空間C上に成立する関係式として、網の性能の構造をとらえることが考えられる。環境に依存しない「受け皿」としての網の性能を考える「性能論」と、受け皿を固定した時生ずる関係式を考える「拮抗論」が考えられる。前者ではC自身が変数であり、後者ではCは(論理的な)定数で、環境Eが変数である。可能世界の視点によって、以下のような試論が可能となる。

6. 1 性能論

まず、豊富な通信要求が処理できるという意味で

$$\text{絶対的能力} = \text{自由性}$$

と考えられる。これに対し、資源の有効利用がなければ、網として存在できないという立場からは、低廉性も網の基本的な能力と考えられる。この意味で、

$$\text{有効能力} \sim \text{自由性} / \text{資源消費}$$

と考えられる。

以下、Cを限定して成立する関係式を考える。まず、4節に従って、自由度を規模と強さに分離できるとする：

有効能力 \sim 規模自由度・強度自由度/資源消費
更に、網の強度的自由度の変化主要因として、輻輳に限られるとする：

$$\text{強度的自由度} \sim 1/\text{輻輳}$$

このとき、

有効能力 \sim 規模的自由度/(資源消費・輻輳)
となる。ここで

仮想性 \sim 規模的自由度/資源消費
を用いれば

$$\text{有効能力} \sim \text{仮想性}/\text{輻輳}$$

となる。これは、仮想的に豊富なサービスを遅延・劣化なく提供することが高性能な網であるという、もっともな結論を示している。

トークン保留時間の例では、切り替え時間が無視できる
とき、輻輳は増大せず、仮想性が拡大してアクセス系の有効能力を拡大していることになる。

6.2 拮抗論

基本的な拮抗関係

網の基本的な性質は、自由度、輻輳、資源効率の拮抗であった。この拮抗は、受け皿としての網を指定したとき環境を変数として生じる関係式である。この基本拮抗は、上記の性能論から導ける。実際、受け皿としてのCを固定することは、網の有効能力が定められた事になる。従って、

$$\text{定数} \sim \text{規模的自由度}/(\text{資源消費} \cdot \text{輻輳})$$

である。資源効率 $\sim 1/\text{資源消費}$ と考えられるから、これは

$$\text{規模的自由度} \sim \text{輻輳}/\text{資源効率} \quad (1)$$

となる。

待ち行列評価式

(1)は、待ち行列の基本公式に見いだすことができる。もっとも基本的な待ち行列であるM/G/1モデルでは

$$\text{平均待ち時間} \propto$$

単位時間当り入力トラヒック量分散/(1-資源効率)
である[FJ]。トラヒック量の分散は規模的自由度と考えることができる。また、定性的には、

$$1/(1-\text{資源効率}) \sim \text{資源効率}$$

であり、(1)に他ならない。

Pesinの関係式

(1)に類似の関係式は、かなり一般に見いだせると考えられる。例えば、区間力学系において、Pesinの関係式

$$\text{KSエントロピー} =$$

正のリアプノフ指数和・不変測度台の次元
が知られている[TK]。これは、以下の対応によって(1)に類似している。

$$\text{KSエントロピー} \sim \text{規模的自由度}$$

(粗視化によって得られるシフト系が‘処理’する言語の
単位時間当りの量と見做す)

$$\text{不変測度台の次元} \sim \text{資源消費量}$$

(‘処理’に要する‘記憶領域’の大きさで見做す)

$$\text{正のリアプノフ指数和} \sim \text{変形} (\sim \text{輻輳})$$

最後の解釈は、次の意味である。正のリアプノフ数値は軌道の変形度を表すが、軌道は資源(記憶領域)の時空にあって、資源消費過程と見做せる。従って、軌道の変形は資源消費過程の変形である。言語の処理という解釈だけでは、並行性やその排他性の構造が無いので、輻輳と見做すことはできない。しかし、網における輻輳の増大が、資源消費過程の資源時空における変形を拡大するという意味で、類似性が認められる。

7. まとめ

可能世界の視点によって、自由度を含めた網の議論の可能性が見えてきた。今回は、数学的な基礎固めを図る。これによって、網の構造と能力を支配する原理に迫って行きたい。

文献

[Ac]Aczel, P., Non-well-founded Sets, CSLI Lecture Notes 14. CSLI 1988.

[FJ]藤木, 雁部, 通信トラヒック理論. 丸善 1980.

[Hg]萩谷 昌巳, ソフトウェア科学のための論理学, 岩波講座ソフトウェア科学11. 岩波 1994.

[Hr]Hoare, C.A.R., Communicating Sequential Processes. Prentice-Hall 1985 (邦訳, 吉田信博, ホールCSPモデルの理論 丸善 1992)

[M]Milner, R., Communication and Concurrency. Prentice-Hall 1989.

[Sm1]下川信祐, 通信網の複雑化と性能評価技術の課題, in The First Sapporo Symposium on Complex Systems, ed., Y. Okabe, Proc. Complex Systems Research Group of Sapporo, No. 1, (北海道大学数学講究録 #33) pp.10-11(1994).

[Sm2]下川信祐, Modeling of infinitely intermittent traffic streams via the Palm theory, 1994年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp195-196(1994).

[Sm3]Shingawa, S., and Takahashi, Y., On a set of interdeparture time distributions of the M/G/1 queue with server vacations, J. Operat Res. Soc. Japan, Vol. 36, No. 4, pp.206-219(1993).

[St]斉藤 洋, これからのトラヒック設計を目指して: ノンパラメトリック法によるATMセル損失評価, 電子情報通信学会論文誌, B-I, Vol. J '76-B-I, No. 3, pp.197-208(1993).

[Tk]高橋 陽一郎, 力学系における決定性と非決定性, in 小嶋 江沢 編, 数理物理学の展開. 東京図書 1988.

[Tkg]Takagi, H., Analysis of Polling Systems. MIT Press. 1986.

[Ts]Tasaka, S., Performance Analysis of Multiple Access Protocols. MIT Press. 1986.

事態の聞きわけについて

塩 沢 由 典 (大阪市立大学経済学部)

1. なにを聞きわけるべきか

人間や動物、ロボットなどは、自己の身体を含む外界の状況を認識して行動する。このさい、対象は複雑で無限に多様な信号を発信しているが、すべての信号を受理し、認識・行動するのがよいとは、かぎらない。人間やロボットなどは、有限の信号処理能力しか持たず(合理性の限界)、無駄な信号を処理する計算時間を消費するからである。

診断学においても、同様の事情が存在する。古川俊之によれば、検査項目を増やしていても、誤診率を下げることには限界があり、計量診断の比較結果によれば、変数の数が7~8を越えると、飽和現象が見られる。

ひとつの信号のなかにも豊富な内容が含まれている。たとえば、太鼓の音には、その大きさや形にかんする情報が含まれている。M. Kac は、1966年、「太鼓の形を聞くことができるか」という問題を提起した。一般的には答えは否であるが、音の信号が豊富な情報を含むことは、スペクトル幾何学として確認されている。

2. 信号の聞き分けと決定問題

統計的決定問題のひとつに、世界の状態を雑音のある信号により聞き分ける問題がある。対象の発する信号 $I = (i_1, i_2, \dots, i_K)$ を受け、ある応答を行うさい、どの信号を聞き分けるべきであろうか。もっとも簡単に、事態が2、応答が2の場合、以下の信頼性条件が満たされなければ、そのような信号は無視するほうが得策である。

事態 s, n に対し、応答 S, N を行うとき、次の表2の利得が得られるとしよう。また、雑音のため、聞き分けの確率が表1で与えられるとしよう。

表1	確率	S	N	表2	利得	S	N
	s	r	1-r		s	g	h
	n	w	1-w		n	f	e

このとき、信号を聞き分けることから期待される平均利得 E は、事態 s の生起確率を π とするとき、(1) $r \cdot \pi \cdot G - w \cdot (1-\pi) \cdot L$ 。ただし、 $G = g - h$, $L = e - f$ 。聞き分けるかどうかには依存しない和の部分は無視してある。これにたいし、つねに S と応えるとき、(2) $\pi \cdot G - (1-\pi) \cdot L$ 、つねに N と応えるとき、(3) 0 という利得が期待できる。(1) が (2)、(3) より大きい条件は、 $T = (1-\pi) \cdot L / \pi \cdot G$ とおくと、

$$T < 1 \text{ とき、} \quad (1-r) / (1-w) < T.$$

$$T \geq 1 \text{ とき} \quad r / w > 1 / T.$$

雑音のある環境下に、特定の瞬間音の発生を判断させると、信号の発生確率 π の値により、表1の r および w の比率が変化するが、信号を聞き分けず、どちらかに固定した応答の方がより高い成果を期待できる場合が存在する。

一般に、信号 I を受けて、状態集合 Σ のひとつを推定し、応答 Θ のひとつを決定するとき、いかなる信号を受理し、いかなる信号を無視すべきか、という問題がある。この問題に応えるべき理論は存在するだろうか。

3. プラグマティックな世界

世界にかんする正しい知識とは、世界の正しい記述であるという考えがある。これは古典ギリシャ以来の論理学の考え方であり、現在も認識論の主流をなしている。この考えでは、世界に関する知識は、真なる命題のある集合と、それを補足するものとして偽なる命題のある集合（両者は互いに排除する）としてある。

世界に関する知識は、しかし、このようなものに限られない。それらとは異なる有用な知識というものがある。それは、ある結果を得るためには、いかなる場合に、どうせよ、という知識であり、行動の指示である。世界の記述と異なり、指示には真偽の区別はない。ただ、その指示にしたがう行動が有用であるか、いなか、のみが問われる。

これまで、有用な行動は世界の正しい記述から生まれると考えてきた。近代科学は、この考えに基づいており、大きな成果を取めた。しかし、すべての有用な知識がこのようなものとして得られると考えては誤りである。理由がよく分からないが、うまくいく行動は多数あり、人間以外の動物の行動を支えているものは、このような行動のパタンである。

4. ダニの産卵行動

野外にいるダニは、哺乳動物の血を吸わなければ産卵できない。しかし、ダニは、目が見えず、跳躍することも、クモのように素早く移動することもできない。制約された能力のもとに、ダニは、いかにして哺乳動物を捉えているのであろうか。動物行動学の始祖のひとりであるユクスケルは、ダニがつぎのような行動プログラムをもっていると指摘している（参照：塩沢『市場の秩序学』第11章）。

- (1) 木をよじ登り、枝の先まで進め。
- (2) 酪酸の臭いするまで、待機せよ。
- (3) 酪酸の臭いがしたら、脚を放せ。
- (4) 衝撃を受けたら、歩きまわれ。
- (5) 温かいところがあれば、止まれ。なければ(1)にもどれ。
- (6) 膜に口器を突き刺し、血を吸え。

ダニのこのような行動は、 $q S S' q'$ という4つ組命令の集合として表現することができる。世界から読み取っている変数 S は、つねに少数であり、実行すべき行動は単純かつ能力の範囲内にある。これは一種のチューリング機械とみなすことができ、その広範な可能性が推測される。内部状態 q において、観測されるべき外部の状態（ S か、非 S か）をいかに設定するか。それは聞き分けるべき信号の選別でもある。ここに、この行動プログラムの有用性を大きく左右する知識が内包されている。動物は、外界のシミュレーションを行うとはことなる仕方で、有用な知識を蓄積している。

5. 薄い世界仮説

H. A. Simonは、「ほとんど空な世界」仮説を唱えた。世界がゆるやか（loosely）に結合しているためには、それは必要な仮説である。上の考察を重ねて、わたしは「世界が薄い」という仮説を唱えたい。世界は状況に無限の信号に満ちているが、一定の事態において有用な信号の種類はごく限られている。ときに、それはある一定の変数がある閾値を越えるか否かの判断で十分である。情報は多ければ多いほどよいのではなく、必要な信号があらかじめ選別されてあることにより、世界にかんする実時間での適切な対応が可能になる。なぜ世界は、このような構造をしているのか。よい説明はないだろうか。

1994年8月28日(日)—8月31日(水)

非線形時系列解析と新しい予測公式

岡部靖憲 (東京大学工学部計数工学科)

§1 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—揺動散逸定理

実際の時系列の予測問題を扱っているときに、今まで発表してきた KM_2O -ランジュヴァン方程式論を精密化する必要を感じた。新たな弱定常性の定義を与え、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論を再構成する。

W を計量ベクトル空間とする。整数 ℓ, r ($\ell < r$) に対して、 W の中を動く曲線 $Y : \{\ell, \ell+1, \dots, r\} \rightarrow W$ を

$$\mathbb{Y} = (Y(n); \ell \leq n \leq r)$$

と書き、 W 内の一次元の流れ、パラメータ n を時間、定義域 $\{\ell, \ell+1, \dots, r\}$ を時間域と呼ぶ。自然数 d に対して、 W 内の d 次元の流れとは、 d 個の一次元の流れ $\mathbb{Y}_j = (Y_j(n); \ell \leq n \leq r)$ ($1 \leq j \leq d$) の組 $\mathbb{Y} = (Y(n); \ell \leq n \leq r)$:

$$Y(n) \equiv {}^t(Y_1(n), Y_2(n), \dots, Y_d(n))$$

のことを言う。

一般的な記法を導入する。 W の中の二つの L 次元の縦ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_L), \mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_L)$ に対して、 \mathbf{x} と \mathbf{y} の内積行列を

$$(\mathbf{x}, {}^t\mathbf{y}) \equiv ((x_j, y_k))_{1 \leq j, k \leq L}$$

として定義する。これは $L \times L$ 型の行列である。

$(W, (\star, \star))$ を \mathbb{R} 上の計量ベクトル空間とする。 W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X} = (X(n); -N \leq n \leq N)$ が $(1, N)$ -定常性をもつとは行列関数 $R : \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \rightarrow M(d; \mathbb{R})$

が存在して

$$\begin{aligned}
(X(m), {}^tX(n)) &= R(m-n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(-m), {}^tX(-n)) &= R(-m+n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(m), {}^tX(-1)) &= R(m+1) & (0 \leq \forall m \leq N-1) \\
(X(1), {}^tX(-n)) &= R(1+n) & (0 \leq \forall n \leq N-1)
\end{aligned}$$

が成り立つときを言い、流れ \mathbb{X} を d 次元の $(1, N)$ -定常流と言う。この行列関数 R を $(1, N)$ -定常流 \mathbb{X} の共分散行列関数と名づける。

p を $1 \leq p \leq N$ を満たす任意の自然数とする。 $(1, N)$ -定常流の定義の関係式が成り立つ範囲を拡げて、 $(p, N+p)$ -定常流の定義を与える。

W 内の d 次元の流れ $\mathbb{X} = (X(n); -N \leq n \leq N)$ が $(p, N+p)$ -定常性をもつとは、行列関数 $R: \{-N-p, -N-p+1, \dots, N+p-1, N+p\} \rightarrow \mathbb{M}(d; R)$ が存在して

$$\begin{aligned}
(X(m), {}^tX(n)) &= R(m-n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(-m), {}^tX(-n)) &= R(-m+n) & (0 \leq \forall m, n \leq N) \\
(X(m), {}^tX(-n)) &= R(m+n) & (0 \leq \forall m \leq N, 1 \leq \forall n \leq p) \\
(X(m), {}^tX(-n)) &= R(m+n) & (1 \leq \forall m \leq p, 0 \leq \forall n \leq N)
\end{aligned}$$

が成り立つときを言い、流れ \mathbb{X} を d 次元の $(p, N+p)$ -定常流と言う。この行列関数 R を $(p, N+p)$ -定常流 \mathbb{X} の共分散行列関数と名づける。特に p が N のとき、即ち、 $(N, 2N)$ -定常流のことを単に定常流と呼ぶことにする。

$\mathbb{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流とする。

$$T_n^\pm = \begin{pmatrix} R(0) & R(\pm 1) & \dots & R(\pm(n-1)) \\ R(\mp 1) & R(0) & \dots & R(\pm(n-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\mp(n-1)) & R(\mp(n-2)) & \dots & R(0) \end{pmatrix}$$

で定義し、テープリッツ行列と言う。

次のことを注意する:

$$T_1^+ = T_1^- = R(0).$$

今後、次のテープリッツ条件を満たすものとする。

$$T_n^\pm \in GL(nd; \mathbb{R}) \quad (1 \leq \forall n \leq N+1).$$

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流でテープリッツ条件を満たすものとする。

ベクトルの二つの集まり $\{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, 0 \leq \ell \leq N-1\}, \{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, -N+1 \leq \ell \leq 0\}$ がそれぞれ一次独立であることを示すので、 $X(n)$ の j 成分である $X_j(n)$ の部分空間 $\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})$ への射影 $P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n)$ を直接書き下すと

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^d \gamma_{+j\ell}(n, k) X_\ell(k) \quad (1 \leq j \leq d)$$

を満たす実数の組 $\{\gamma_{+j\ell}(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq \ell \leq d\}$ が一意的に存在する。 $d \times d$ 型の行列 $\gamma_+(n, k)$ を

$$\gamma_+(n, k) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{+11}(n, k) & \gamma_{+12}(n, k) & \dots & \gamma_{+1d}(n, k) \\ \gamma_{+21}(n, k) & \gamma_{+22}(n, k) & \dots & \gamma_{+2d}(n, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{+d1}(n, k) & \gamma_{+d2}(n, k) & \dots & \gamma_{+dd}(n, k) \end{pmatrix}$$

で定義すると、上は次のようにベクトル表現される:

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k).$$

したがって

$$X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \leq n \leq N)$$

と表現される。

同様に行列の組 $\{\gamma_-(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1\}$ を用いて次のような後ろ向きの方程式を得る:

$$X(-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) X(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

さらに、行列 $\gamma_\pm(n, 0)$ を特別に

$$\delta_\pm(n) \equiv \gamma_\pm(n, 0)$$

と置く.

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流でテープリッツ条件を満たすものとする.

ベクトルの二つの集まり $\{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, 0 \leq \ell \leq N-1\}, \{X_j(\ell); 1 \leq j \leq d, -N+1 \leq \ell \leq 0\}$ がそれぞれ一次独立であることを示すので, $X(n)$ の j 成分である $X_j(n)$ の部分空間 $\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})$ への射影 $P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n)$ を直接書き下すと

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X_j(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=1}^d \gamma_{+j\ell}(n, k) X_\ell(k) \quad (1 \leq j \leq d)$$

を満たす実数の組 $\{\gamma_{+j\ell}(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1, 1 \leq \ell \leq d\}$ が一意的に存在する. $d \times d$ 型の行列 $\gamma_+(n, k)$ を

$$\gamma_+(n, k) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{+11}(n, k) & \gamma_{+12}(n, k) & \dots & \gamma_{+1d}(n, k) \\ \gamma_{+21}(n, k) & \gamma_{+22}(n, k) & \dots & \gamma_{+2d}(n, k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{+d1}(n, k) & \gamma_{+d2}(n, k) & \dots & \gamma_{+dd}(n, k) \end{pmatrix}$$

で定義すると, 上は次のようにベクトル表現される:

$$P_{\mathbf{M}_0^{n-1}(\mathbf{X})} X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k).$$

したがって

$$X(n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \leq n \leq N)$$

と表現される.

同様に行列の組 $\{\gamma_-(n, k); 1 \leq n \leq N, 0 \leq k \leq n-1\}$ を用いて次のような後ろ向きの方程式を得る:

$$X(-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) X(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

さらに, 行列 $\gamma_\pm(n, 0)$ を特別に

$$\delta_\pm(n) \equiv \gamma_\pm(n, 0)$$

と置く.

§2 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—構成定理

今までの設定とは逆に、任意に固定した自然数 d と N に対して、 $d \times d$ の実行列からなる組 $\{V, \delta_+(n); 0 \leq n \leq N\}$ が始めに与えられているとする。但し、 V は正定値の対称行列とする。

(第一段) まず、組 $(V_+(0), V_-(0))$ を

$$V_+(0) = V_-(0) = V$$

で定める。揺動散逸定理を考慮して、三つ組 $(V_+(1), \delta_-(1), V_-(1))$ を

$$\begin{cases} V_+(1) = V_+(0) - \delta_+(1)V_-(0) {}^t\delta_+(1) \\ \delta_-(1) = V_-(0) {}^t\delta_+(1)V_+(0)^{-1} \\ V_-(1) = V_-(0) - \delta_-(1)V_+(0) {}^t\delta_-(1) \end{cases}$$

によって定める。同じく揺動散逸定理を考慮して、数学的帰納法によって、三つ組 $(V_+(n-1), \delta_-(n-1), V_-(n-1))$ から三つ組 $(V_+(n), \delta_-(n), V_-(n))$ を

$$\begin{cases} V_+(n) = V_+(n-1) - \delta_+(n)V_-(n-1) {}^t\delta_+(n) \\ \delta_-(n)V_+(n-1) = V_-(n-1) {}^t\delta_+(n) \\ V_-(n) = V_-(n-1) - \delta_-(n)V_+(n-1) {}^t\delta_-(n) \end{cases}$$

によって、 $n=2$ から $n=N$ まで構成する。その際、次のことを仮定する必要がある：

$$V_+(n) \text{ は正定値である } (1 \leq n \leq N).$$

(第二段) つぎに、 $d \times d$ の実行列からなる組 $\{\gamma_+(n, k), \gamma_-(n, k); 0 \leq k < n \leq N\}$ を、散逸散逸定理を考慮して、次のアルゴリズムで構成する：

$$\begin{cases} \gamma_+(n, k) = \gamma_+(n-1, k-1) + \delta_+(n)\gamma_-(n-1, n-k-1) \\ \gamma_-(n, k) = \gamma_-(n-1, k-1) + \delta_-(n)\gamma_+(n-1, n-k-1). \end{cases}$$

そこで行列 $\gamma_{\pm}(n, 0)$ を

$$\gamma_{\pm}(n, 0) \equiv \delta_{\pm}(n)$$

と置いた。

(第三段) 任意の計量ベクトル空間 $(W, (*, *))$ とその中の $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_+ を考え, W_+ 中の正規直交ベクトル系を $\{w_j^+; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とする:

$$\begin{cases} w_j^+ \in W_+ & (1 \leq j \leq d(N+1)) \\ (w_j^+, w_k^+) = \delta_{j,k}. \end{cases}$$

このとき, 計量ベクトル空間 W 内の d 次元のホワイトノイズ流 $\xi_+ = (\xi_+(n); 0 \leq n \leq N)$ を

$$\xi_+(n) \equiv {}^t(w_{nd+1}^+, w_{nd+2}^+, \dots, w_{nd+d}^+)$$

で定める. d 次元の流れ $\xi_+ = (\xi_+(n); 0 \leq n \leq N)$ の性質は

$$(\xi_+(m), {}^t\xi_+(n)) = \delta_{m,n}I \quad (0 \leq m, n \leq N)$$

のみである.

そのとき, W 内の d 次元の流れ $\nu_+ = (\nu_+(n); 0 \leq n \leq N)$ を

$$\nu_+(n) \equiv V_+(n)\xi_+(n)$$

で定める.

$$(\nu_+(m), {}^t\nu_+(n)) = \delta_{m,n}V_+(n)$$

が成り立つ.

(第四段) W 内の d 次元の流れ $\mathbf{X}_+ = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ を, 前向き $\mathbf{KM}_2\mathbf{O}$ -ランジュヴァン方程式を考慮して, 次のアルゴリズムに従って定義する:

$$\begin{aligned} X(0) &= \nu_+(0) \\ X(n) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k)X(k) + \nu_+(n) \quad (1 \leq n \leq N). \end{aligned}$$

構成定理. \mathbf{X}_+ は次の定常性を満たす:

$$(X(m), {}^tX(n)) = R(m-n)$$

(第五段) 計量ベクトル空間 $(W, (*, *))$ の $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_- を考え, W_- 中の正規直交ベクトル系を $\{w_{-j}^-; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とする:

$$\begin{cases} w_{-j}^- \in W_- & (1 \leq j \leq d(N+1)) \\ (w_{-j}^-, w_{-k}^-) = \delta_{j,k}. \end{cases}$$

ただし, (第三段) での $d(N+1)$ 次元線形部分空間 W_+ 中の正規直交ベクトル系 $\{w_j^+; 1 \leq j \leq d(N+1)\}$ とは

$$(*) \quad (w_1^+, w_2^+, \dots, w_d^+) = (w_{-1}^-, w_{-2}^-, \dots, w_{-d}^-)$$

なる関係をもつとする.

計量ベクトル空間 W 内の d 次元の規格化されたホワイトノイズ流 $\xi_- = (\xi_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を次で定める:

$$\xi_-(-n) \equiv {}^t(w_{-nd-1}, w_{-nd-2}, \dots, w_{-nd-d}).$$

関係式 (*) は

$$\xi_+(0) = \xi_-(0)$$

とベクトル表示される. d 次元の流れ ξ_- を特徴づける性質は次の正規直交性である:

$$(\xi_-(-m), {}^t\xi_-(-n)) = \delta_{m,n} I \quad (0 \leq m, n \leq N).$$

W 内の d 次元の流れ $\nu_- = (\nu_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を

$$\nu_-(-n) \equiv V_-(n)\xi_-(-n)$$

で定める.

$$\nu_+(0) = \nu_-(0)$$

$$(\nu_-(-m), {}^t\nu_-(-n)) = \delta_{m,n} V_-(n) \quad (0 \leq m, n \leq N)$$

が成り立つ.

(第六段) W 内の d 次元の流れ $X_- = (X_-(-n); -N \leq -n \leq 0)$ を, 後ろ向き KM_2O -ランジュヴァン方程式を考慮して, 次のアルゴリズムに従って構成する:

$$X_-(0) = \nu_-(0)$$

$$X_-(-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(n, k) X_-(-k) + \nu_-(-n) \quad (1 \leq n \leq N).$$

構成定理. \mathbf{X}_- は次の定常性を満たす: その共分散関数は流れ \mathbf{X}_+ のそれと

$$(X_-(-m), {}^t X_-(-n)) = (X(n), {}^t X(m))$$

なる関係を満たす.

新しい予測公式—理論. 計量ベクトル空間 $(W, (\star, \star))$ の中の d 次元ベクトル $\nu_-(-1)$ で

$$(\nu_+(n), {}^t \nu_-(-1)) = I(n, 1) (\equiv -\delta_+(n+1)V_-(n) \quad (1 \leq n \leq N-1))$$

を満たすものが存在する.

KM_2O -ランジュヴァン方程式論の新しい予測公式—データ解析. $R(M+1)$ を

$$(\star\star) \quad R(M+1) \equiv (X(M), {}^t X(-1)) \quad (\text{空間平均})$$

で定める. これによって信頼できる見本共分散関数 $R(\star)$ の数が一つ増えた. あとは前の予測公式において M を $M+1$ に置き換えて新しい予測公式が得られる.

§3 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—予測理論

$\mathbf{X} = (X(n); |n| \leq N)$: 計量ベクトル空間 W 内の d 次元の $(1, N)$ -定常流でテーパーリッツ条件を満たすものとする.

予測公式とは, 時刻 ℓ から時刻 r ($-N \leq \ell \leq r < N$) 迄の情報 $\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})$ を用いて, p 時刻先の未来 $X(r+p)$ ($0 < p \leq N-r$) の動きを捕まえる公式のことである.

数学としては, ベクトル $X(r+p)$ を線形部分空間 $\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})$ に射影したベクトル

$$P_{\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})} X(r+p)$$

を具体的に求めることになる.

予測する際に, $\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})$ と直交する情報は切り捨てる考えである.

$P_{\mathbf{M}_\ell^r(\mathbf{X})} X(r+p)$ を前向き (局所的) 線形予測子と名づける.

1 期先予測公式. \mathbf{X} を $(1, N)$ -定常流とする. 各 ℓ, r ($-1 \leq \ell \leq r < N$) に対して

$$P_{M_2^*(\mathbf{X})} X(r+1) = - \sum_{k=\ell}^r \gamma_+(r-\ell+1, k-\ell) X(k).$$

§4 KM_2O -ランジュヴァン方程式論—データ解析

自然数 d, N を固定し, $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq N)$ を d 次元時系列とする. 各 $\mathcal{Z}(n)$ は \mathbb{R}^d の元で表現された d 次元データである.

$\mu^{\mathcal{Z}}$ — — — 時系列 \mathcal{Z} の見本平均ベクトル

$$\mu^{\mathcal{Z}} \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \mathcal{Z}(n)$$

$R^{\mathcal{Z}} = (R_{jk}^{\mathcal{Z}}(*))_{1 \leq j, k \leq d}$ — — — 時系列 \mathcal{Z} の見本共分散行列関数

$$R_{jk}^{\mathcal{Z}}(n) \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N-n} (\mathcal{Z}_j(n+m) - \mu^{\mathcal{Z}})(\mathcal{Z}_k(m) - \mu^{\mathcal{Z}}).$$

$\tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \leq n \leq N)$ — \mathcal{Z} の規格化:

$$\tilde{\mathcal{Z}}_j(n) \equiv (R_{jj}^{\mathcal{Z}}(0))^{-1} (\mathcal{Z}_j(n) - \mu^{\mathcal{Z}}).$$

$R^{\tilde{\mathcal{Z}}} = (R_{jk}^{\tilde{\mathcal{Z}}}(*))_{1 \leq j, k \leq d}$ — その見本共分散行列関数

時系列解析での経験則より, 見本共分散行列関数 $R^{\tilde{\mathcal{Z}}}(n)$ の信頼できる n の最大数 M は次で与えられる:

$$M \equiv [3\sqrt{N+1}/d] - 1.$$

$\mathcal{LD}(\tilde{\mathcal{Z}})$ を時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}$ に付随する見本 KM_2O -ランジュヴァンデータとする:

$$\mathcal{LD}(\tilde{\mathcal{Z}}) = \{\gamma_{\pm}(\tilde{\mathcal{Z}})(n, k), \delta_{\pm}(\tilde{\mathcal{Z}})(n), V_{\pm}(\tilde{\mathcal{Z}})(\ell); 1 \leq n \leq M, 0 \leq k \leq n-1, 0 \leq \ell \leq M\}.$$

d 次元時系列 $\tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \leq n \leq N)$ は弱定常性の検定 $\text{Test}(\mathbf{S})$ を通過したとする.

時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}_{N-M} = (\tilde{\mathcal{Z}}(N-M+n); 0 \leq n \leq M)$ はある d 次元弱定常過程 $\mathbf{X}_{N-M} = (X_{N-M}(n); 0 \leq n \leq M)$ の実現値であり, 系 $\mathcal{LD}(\tilde{\mathcal{Z}})$ は \mathbf{X}_{N-M} に付随する KM_2O -ランジュヴァンデータの候補である.

1期先予測公式 時系列 \tilde{Z} の時刻 N の1期先線形予測値 $\hat{\tilde{Z}}_1(N+1)$ を求める予測公式を与える。その際の態度は、確率過程 \mathbf{X}_{N-M} が1期先まで弱定常性を保って時間発展すると仮定し、時系列 \tilde{Z} の時刻 $N+1$ の1期先線形予測値を

$$\hat{\tilde{Z}}_1(N+1) \equiv P_{\mathbf{M}_1^M(\mathbf{X}_{N-M})} X_{N-M}(M+1) \text{ の実現値}$$

として採用することである。1期先の予測公式において $r = M, \ell = 1$ とし、それは次で与えられる:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{Z}}_1(N+1) &= - \sum_{k=1}^M \gamma_+(\tilde{Z})(M, k-1) \tilde{Z}(N-M+k) \\ &= - \sum_{k=0}^{M-1} \gamma_+(\tilde{Z})(M, k) \tilde{Z}(N-M+k+1). \end{aligned}$$

文献

- [1]. Okabe, Y., *On a stochastic difference equation for the multi-dimensional weakly stationary process with discrete time*, Prospect of Algebraic Analysis(ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Academic press, Tokyo, 1988, pp. 601-645.
- [2]. Okabe, Y. and Y. Nakano, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (I): Stationary analysis*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 45-90.
- [3]. Okabe, Y., *Langevin 方程式と因果解析*, 数学 **43** (1991), 322-346.
- [4]. ———, *自然科学と定常過程*, 数理科学 **340** (1991), 21-28.
- [5]. ———, *Applications of the theory of KM_2O -Langevin equations to the linear prediction problem for the multi-dimensional weakly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 277-294.
- [6]. ———, *A new algorithm derived from the view-point of the fluctuation-dissipation principle in the theory of KM_2O -Langevin equations*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 199-209.
- [7]. Okabe, Y. and A. Inoue, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (II): Causal analysis*, Nagoya Math. J. **134** (1994), 1-28.
- [8]. Okabe, Y. and T. Ootsuka, *Applications of the theory of KM_2O -Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [9]. ———, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (III): Prediction analysis*, in preparation.
- [10]. Okabe, Y. and A. Kaneko, *The theory of KM_2O -Langevin equations and its applications to data analysis (IV): Prediction analysis*, in preparation.

遺伝的アルゴリズムの制御への応用

Applications of the genetic algorithm for control problems

北海道大学 工学部 島 公脩・山下 裕

Faculty of Engineering, Hokkaido Univ. M.Shima, Y.Yamashita

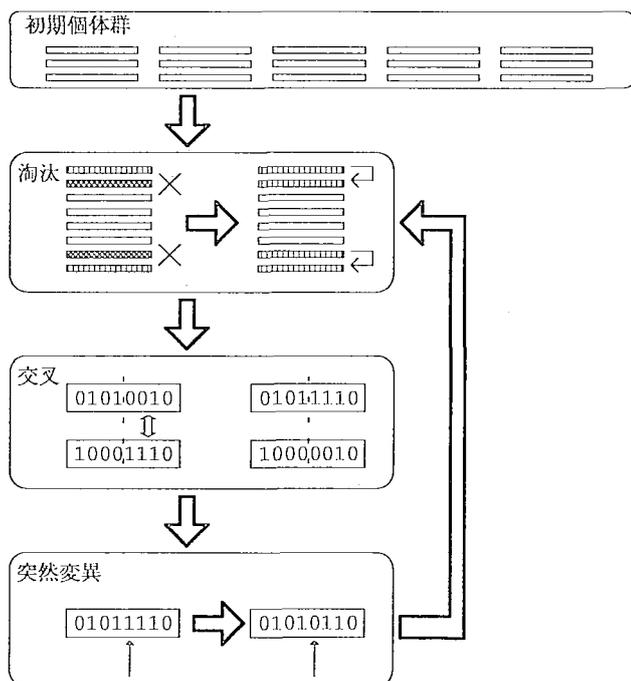
1. はじめに

本報告では、遺伝的アルゴリズムを各種の制御問題に応用した結果を示す。

2. GA の概要

GA(Genetic Algorithm, 遺伝的アルゴリズム)は工学の立場から見れば、単なる最適化の数値計算の1つであり、 $F(x) \rightarrow \min$ となる x を求める問題である。GAが有利な点は勾配 $\partial F(x)/\partial x$ などの関数 $F(x)$ そのものの性質を知っている必要はなく、 $F(x)$ は単なるブラックボックスでよいということである。また、 $F(x)$ が多峰性でも解が求まる場合が多い点もあげられる。一方、欠点としては真の解に収束する証明が何も得られていないことがある。

GAでは、 x を遺伝子にコーディングし、その遺伝子を進化させることで準最適解を得る。たとえば、探査すべき空間を \mathcal{R}^n とし、 $x = \text{col.}(x_1, \dots, x_n)$ とおく、 x を通常の2進数表現あるいはGrayコード表現で0, 1のビット列で表現したものが遺伝子となる。



このような遺伝子を複数個ランダムに用意し、次に

$F(x)$ の値によって淘汰・複製が行われる。その後、ランダムに選んだ2個体同士を交叉させ、さらに突然変異によって遺伝子パターンの一部を変化させる。これが1世代で、そのあとは、再び淘汰・複製の手順に戻る。決められた世代数が経過すると、その時点で一番評価値のよい個体が準最適解である。

3. 最適制御問題

制御対象は、

$$\dot{x} = f(x, u)$$

なる微分方程式で表されるものとする。ここで、 $x \in \mathcal{R}^n$ は系の状態で $x(t_0) = x_0$ (const.)、 $u(t) \in \Omega$ (Ω は \mathcal{R}^m のcompact and convex set)は系への入力である。この系にたいし、Mayer型の評価規範、

$$J = F(x(t_1)) \rightarrow \min$$

による最適制御問題を考える。この問題はある条件下では最大原理により最適解が示される。(実際に解けるかは別問題であるが...) すなわち、随伴変数を $p = \text{row.}(p_1, \dots, p_n)$ とおき、Hamiltonianを、

$$H(x, u, p) = \langle p, f(x, u) \rangle$$

とおくと、 x と p の挙動は正準方程式、

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H(x, p, u)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(x, p, u)}{\partial x_i}$$

および境界条件、

$$x(t_0) = x_0, \quad p(t_1) = -\frac{\partial F(x(t_1))}{\partial x}$$

によって決定される。

最大原理 もし、ある許容入力 $u(\cdot)$ が区間 $[t_0, t_1]$ 上で J を最小にするならば、 $u(\cdot)$ および境界条により定まる、正準方程式、の解に沿って、

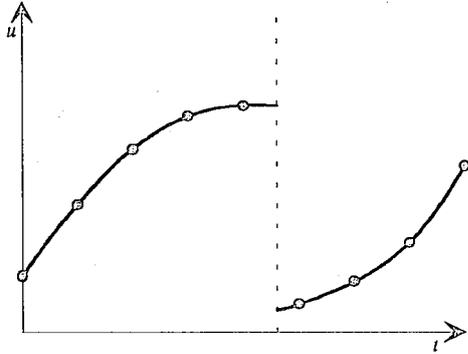
$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{u \in \Omega} H(x(t), p(t), u)$$

が $[t_0, t_1]$ のほとんどいたるところで成り立っていない

ければならない。□

しかし、最適軌道に沿って Hamiltonian に全く u の影響が現れずに、最大の u を決定できない場合も有り得る。そのような場合は実際多くみられ、最適特異制御問題と呼ばれており、30年間未解決な問題であった。最適特異制御問題に対しては有効な数値計算法すら知られていなかった。

ここでは、その最適特異制御問題に対し GA を適用し準最適解を求める。まず、入力を時間に沿って $N-1$ 分割し、 N 個のノードに対し、その時点での入力の値・次のノードまでの制御入力の不連続になるか否か・不連続になるならばどの時点であるのか、の3つの情報をコーディングした遺伝子を N 個並べて1つの個体とする。連続な区間は3次 spline 補間を用いて制御入力の時間関数を求める。



例題 槽型流通反応系(1原料 1製品)

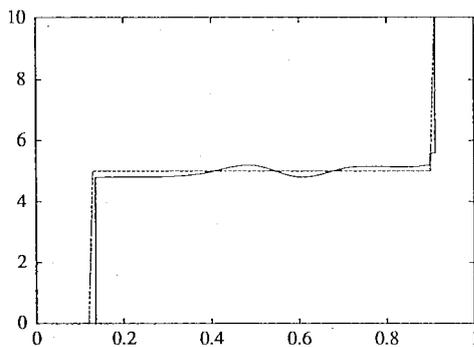
無次元化した制御対象は、

$$\dot{x} = -kx + \frac{1}{V}(\alpha - x)u$$

である。ただし、 $0 \leq u \leq F_m$ とする。評価規範は、

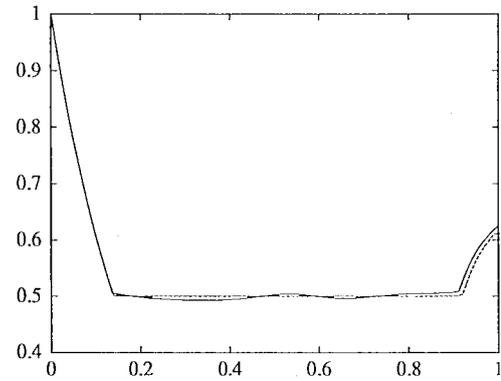
$$J = \int_0^T [-aux + \alpha(a - a')u] dt$$

とする。 $T=1$, $k=5$, $V=1$, $\alpha=1$, $F_m=10$, $a=4$, $a'=1$, $x(0)=10$ のときの結果を下に示す。



制御入力 u

この問題においては解析解がすでに得られているので、その場合と比較した。実線が GA による解・破線が解析解である。またこのときの状態量 x の応答を下に示す。



状態量 x の応答

4. Hamilton-Jacobi(-Issacs)偏微分方程式と遺伝的アルゴリズム

Hamilton-Jacobi(-Issacs)偏微分方程式は非線形最適レギュレータ及び非線形 \mathcal{H}_∞ 制御問題と深い関係がある。

非線形最適レギュレータ問題 制御対象を、

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u^i(t), \quad x(t) \in \mathcal{R}^n, u(t) \in \mathcal{R}^m$$

とする。また、評価規範を、

$$J = \int_0^\infty L(x,u) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty l(x) + u^T R u dt,$$

$$l(x) > 0, \quad R > 0$$

とし、 J を最小とする最適入力 $u(t) = \alpha(x(t))$ を決定する問題である。この問題は、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式、

$$\frac{1}{2} l(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R^{-1} g^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = 0$$

が解 $V(x) > 0$ を持てば可解であり、最適入力は、

$$u = -R^{-1} g^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

によって決められる。またこのとき $V(x)$ は Lyapunov 関数となり、閉ループ系は安定化される。

非線形 \mathcal{H}_∞ 制御問題 制御対象を、

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + k(x)w$$

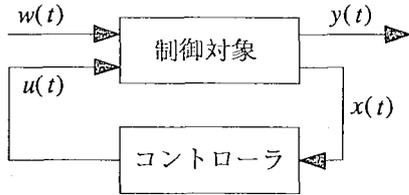
$$y = h(x)$$

とする。ただし、 $f(0)=0$, $h(0)=0$ とする。

$w \rightarrow y$ の \mathcal{L}_2 -ゲイン、

$$\sup_{\substack{w(t) \\ T>0}} \frac{\int_0^T |y(t)|^2 dt}{\int_0^T |w(t)|^2 dt}, \quad x(0) = 0$$

を予め決められた値 γ 以下とするフィードバック $u = \alpha(x)$ を求める問題である。これは、 u を制御入力、 y を制御すべき出力、 w を系に加わる外乱であると、 γ を小さく選ぶことができれば、系の出力に表れる外乱の影響を小さくすることに相当する。



また、線形系では、 L_2 -ゲインは良く知られた \mathcal{H}_∞ -ノルムと一致する。

この問題は定数 c に対して

$$J = \int_0^T \|y(t)\|^2 + c^2 \|u(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 dt \leq 0$$

とすることによって解かれる。可解性の十分条件は、この J に対する Hamilton-Jacobi-Issacs 偏微分方程式(不等式)、

$$\frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} k k^T - \frac{1}{c^2} g g^T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T + \frac{1}{2} h^T h \begin{cases} \leq 0 \\ = 0 \end{cases}$$

の解 $V(x) > 0 (x \neq 0)$, $V(0) = 0$ が存在することであり、

$$u = -\frac{1}{c^2} g^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x}$$

によって目的を達成するフィードバック則が得られる。また、制御対象が zero-state observable ならば、系の安定性も保証される。

しかし、この 2 つの問題において、Hamilton-Jacobi(-Issacs)偏微分方程式(不等式)を解くことは困難である。そこで、遺伝的アルゴリズムによってこの方程式(不等式)を解くことを考える。まず、複数のサンプル点 x_1, \dots, x_N を用意する。

$$p(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x)$$

とし、Hamilton-Jacobi(-Issacs)方程式の左辺を $I(x, p)$ とおくと、

$$J_{GA} = \max_i |I(x_i, p(x_i))|$$

を最小化するように $V(x)$ を選ぶこととする。Strage function $V(x)$ の遺伝子へのコーディング法である

が、まず、

$$V(x) = x^T P_2 x + P_3 x^{[3]} + P_4 x^{[4]} + \dots + P_M x^{[M]}$$

と M 次の多項式にして表現する。ここで P_2 は Riccati 代数方程式(Hamilton-Jacobi 方程式の 2 次の項を取り出すと得られる)の唯一の正定解であり、 $x^{[n]}$ は n 次の同次式のベクトルである。残った P_3, \dots, P_M の係数をコーディングして 1 つの個体とする。

例題 最適レギュレータの例題を示す。制御対象は、

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 - x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2^2 + 3x_1^3 + 3u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 3x_2^3 + x^1 x_2^2 + u \end{aligned}$$

で与えられる 2 次系である。評価規範は、

$$J = \int_0^\infty x^T(t)x(t) + u(t)^2 dt$$

とする。この問題を、上記の手順に沿って GA で解く。 $M=6$ 、サンプリングの領域を $-1 \leq x^1 \leq 1$, $-1 \leq x^2 \leq 1$ として解くと、

$$p_1(x) = 0.297x_1^3 + 0.0341x_1^5 + 0.250x_1 + 0.203x_2$$

$$\begin{aligned} &+ 0.00458x_1x_2 - 0.0683x_1^2x_2 + 0.00163x_1^3x_2 \\ &- 0.0142x_1^4x_2 - 0.0377x_1x_2^2 - 0.0302x_1^2x_2^2 \\ &+ 0.107x_1^3x_2^2 + 0.0281x_2^3 - 0.00446x_1x_2^3 \\ &+ 0.000492x_1^2x_2^3 - 0.0244x_2^4 + 0.149x_1^4x_2^4 \\ &+ 7.29 \times 10^{-7}x_2^5 \end{aligned}$$

$$p_2(x) = 0.203x_1 + 0.00229x_1^2 + 0.0227x_1^3$$

$$\begin{aligned} &+ 0.000409x_1^4 - 0.00285x_1^5 + 1.65x_2 \\ &- 0.0377x_1^2x_2 - 0.0201x_1^3x_2 + 0.0537x_1^4x_2 \\ &+ 0.0844x_1x_2^2 - 0.00670x_1^2x_2^2 + 0.000492x_1^3x_2^2 \\ &- 1.43x_2^3 - 0.0978x_1x_2^3 + 0.2980x_1^2x_2^3 \\ &- 6.69 \times 10^{-6}x_2^4 + 3.64 \times 10^{-6}x_1x_2^4 - 0.0321x_2^5 \end{aligned}$$

なる解が得られた。

5. ファジイルールの GA による学習

ファジイ推論においては、if-then 型のファジイルールを人間の経験に基づいて予め与えておくことが前提となっている。しかし、このようなルールを決めることが難しい問題も数多くある。そこで、ここではファジイ制御問題に対し、ある評価規範を小さくするようにファジイルールを GA によって学習させることを目的とする。

ファジイ推論の前件部を x_1, x_2, \dots 、後件部を y とする。ただし、

NB→0, NS→1, ZO→2, PS→3, PB→4

と数値化されているものとする。ここでは、

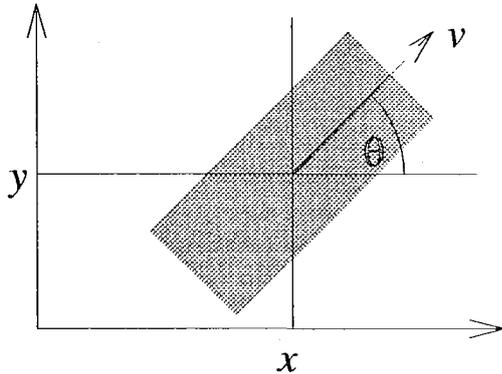
$$y = A[x_1, x_2, \dots]$$

の関数 A をコーディングする。すなわち、前件部の取りうる全ての組み合わせに対して、その後件部を並べて遺伝子、

$$A[0,0,\dots,0], A[0,0,\dots,1], \dots, A[0,\dots,4], A[0,\dots,1,0], \dots$$

を作る。

例題 車両の障害物回避制御に応用する。固定された障害物及び目標点が与えられ、障害物を避けつつ目標点に最短で到達することを目的とする。



制御対象は、

$$\dot{\theta} = u_1$$

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \sin \theta$$

$$\dot{v} = u_2$$

で表されている、non-holonomic 拘束を持つ系である。この系に対し非線形補償の予備フィードバック、

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{v} \sin \theta & \frac{1}{v} \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{T}(v \cos \theta - \dot{x}_D) \\ -\frac{1}{T}(v \sin \theta - \dot{y}_D) \end{pmatrix}$$

を適用する。ただし、 $T > 0$ 。新しい入力は (\dot{x}_D, \dot{y}_D) である。すると、

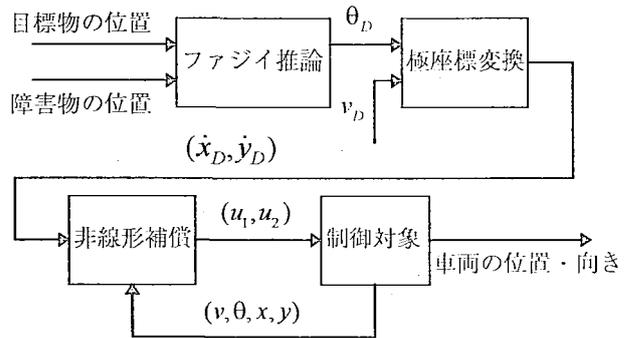
$$\ddot{x} = -\frac{1}{T}(\dot{x} - \dot{x}_D), \quad \ddot{y} = -\frac{1}{T}(\dot{y} - \dot{y}_D)$$

となるので、 (\dot{x}_D, \dot{y}_D) は (\dot{x}, \dot{y}) の目標値である。

(\dot{x}_D, \dot{y}_D) を極座標表現し、

$$\dot{x}_D = v_D \cos \theta_D, \quad \dot{y}_D = v_D \sin \theta_D$$

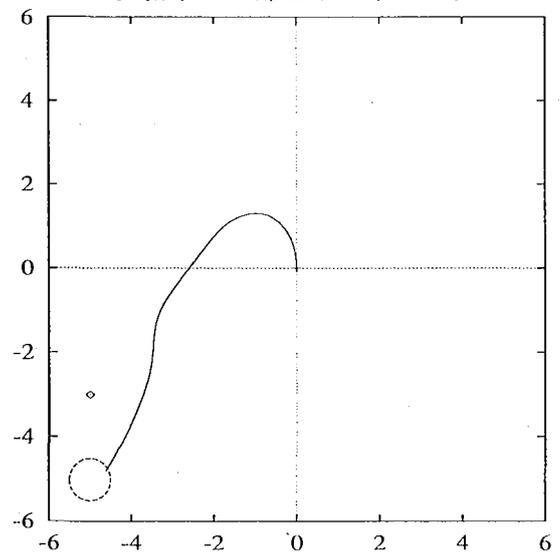
とする。簡単のため、 v_D は定数とし、 θ_D のみをファジィ推論で求めることとする。ファジィ推論における前件部は目標物・障害物までの距離・車両から見た角度、後件部は θ_D である。



GA に与える評価関数は、ランダムに与えた初期状態に対する 20 回の試行における、

$$J_{GA} = T + \frac{w}{R^2 + \alpha}$$

を合計したものである。ここで、 T は到達時間、 R は障害物までの最接近距離、 w は重み係数、 α は分母を 0 にしないための定数である。世代毎にテストパターンが変化するように設定した。スタート時の速度は 1.0、 $v_D = 1.0$ 、 $T = 2.0$ 、 $w = 5$ 、 $\alpha = 0.001$ 、目標物に 0.5 以内の距離まで近づいた時に「到達」と判定した。15 秒後に未到達ならば到達時間として 60 秒のペナルティを科した。GA のパラメータは、個体数 100、世代数 100、突然変異確率 5% とした。結果の一部を下に示した。



車両の回避運動

6. おわりに

GA の各種制御問題への応用の幾つかを示した。ここで述べた問題以外にも、GA を制御問題に応用している研究は多く発表されている。今後、ますます発展する分野であろう。

THERMODYNAMICS, LARGE DEVIATION AND LANGEVIN EQUATION

九大理 藤坂博一

ブラウン運動から地球大気の運動にわたる広範囲のスケールにおいて観測される確率統計現象の基本的なメカニズムは、力学系カオスが介在していると考えられるが、観測する時空スケールにおいて力学的取扱いより確率過程の取扱いをするのが便利で、本質をとらえていることも多い。すべてを第一原理から導こうとする方法は必ずしもベストとは言い難い。

ブラウン粒子に働く力のように、多くの乱雑力の総和として表される場合は、ガウス過程（線形揺らぎ）でよく近似できるが、少数自由度カオス力学系の揺らぎは線形過程とは程遠い。このような非線形揺らぎを解析するには、キュムラント展開のような摂動展開ではない、無限体の多体相関を非摂動的に取り入れた解析法が必要である。

シンポジウムでは、一つの方法として、大偏差理論を基礎とした、新しい方法と簡単な応用について述べた。

定常時系列を $u\{t\}$ とする。時間的粗視量（局所平均値ともよぶ）を

$$\bar{u}_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u\{s\} ds$$

とおくと、 \bar{u}_T は $T \rightarrow \infty$ で通常の長時間平均値 \bar{u}_∞ に近づくが、大きくはあるが、有限の T に対しては、平均する領域に依存して揺らいでいる。 \bar{u}_T の確率分布を $\rho_T(u)$ とおくと、大偏差理論で知られているように、

$$\rho_T(u) \sim e^{-S(u)T}$$

と書けるだろう。揺らぎスペクトル $S(u)$ （確率論ではエントロピー関数ともよぶ）は、下に凸な関数であり、極少値は長時間平均に対して $S=0$ である。極小値近傍では二次関数であるが、 \bar{u}_∞ から離れると二次関数からずれる。特に、種々の相転移点（カオス系、確率過程のモデル）近傍において $S(u)$ の臨界ふるまい（スケーリング則）に系の特徴が表れる。 $S(u)$ の決定は統計分布から直接求めるより、特性関数 $M_q(t) = \langle \exp(qT\bar{u}_T) \rangle \sim \exp(\Phi(q)T)$ を求め、ルジャンドル変換より求めるほうが都合がよい。また、転移点近傍においてエントロピー関数より敏感な関数として

$$u(q) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle \bar{u}_T \exp(qT\bar{u}_T) \rangle}{M_q(T)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \bar{u}_T; q \rangle_T$$

で定義される、重み付き平均値 $u(q)$ やその一回微分 $\chi(q)$ ($du(q)/dq$ 、熱力学の感受率に対応) を考えると揺らぎの特徴をよく記述することができる。

大偏差理論は有限時間の平均値に関するものであるもので、静的特徴づけといえる。時間変動では同じ平均値を与える微視的運動形態と異なる平均値を与える微視的運動形態は一般に異なる。揺らぎスペクトルはこの相違を記述することができない。これは陽な時間相関に関

係した問題である。運動形態を解析するには、二時間相関関数あるいはフーリエスペクトル強度を用いるが、このような微視的運動形態の相違は通常のスペクトル強度では記述することができず、

$$I_q(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_0^T (u\{s\} - u(q)) e^{-i\omega s} ds \right|^2; q > T \right\rangle$$

で定義される q 次スペクトル強度で明確に抜き出すことが可能である、[1]。これは、平均値が $\bar{u}_T = u(q)$ である領域だけを用いて計算したスペクトル強度であり、その時間領域に特徴的な運動形態を抜き出す。一般に、スペクトル強度のピーク的位置や幅に q 依存性があらわれ、これらは平均値 $u(q)$ を与える時間変動の特徴的振動数、減衰率である。一般に無限個の特徴的振動数と減衰率が存在する。

これらの統計量は、カオス力学系や、マスター方程式などの基礎方程式が知られているときは、一般化時間演算子の固有値問題を解くことにより得ることができる。

典型的には、秩序だった長いラミナー領域と乱雑な短いバーストが混在する間欠性変動では上のような解析を行うことにより、それぞれの運動形態を分離して取り出すことができる、[2]。図1はタイプI間欠性カオスにおける感受率であり、転移点近傍で有限の q の値 $q_c (= \log 2)$ で異常に大きくなり、臨界点で発散する。これは $q = q_c$ の揺らぎが異常に増大するためであり、同時に相関時間が異常に長くなる。平均値の回り、確率の大きな揺らぎ ($q = 0$) には異常性は表れない。図2は $q < q_c$ と $q > q_c$ に対するスペクトル強度であり、 $q < q_c$ ではラミナー域の秩序だった運動を、 $q > q_c$ ではバーストの不規則な運動を明確に分離して記述している。

揺らぎスペクトル、 q 次スペクトル強度を観測された時系列に対して用いる場合には、 T の有限性、アンサンブルメンバーの有限性の為に、ただちに正常な平均量が得られるとは限らない。精度のいい近似法の開発が望まれる。この為の一ステップとして連分数展開の方法を提案している、[3]。特性関数 $M_q(t)$ を

$$\frac{d}{dt} M_q(t) = a_q^{(1)} M_q(t) + \int_0^t M_q^{(1)}(t-s) M_q(s) ds$$

に書き直す。 $a_q^{(1)} (= \dot{M}_q(0))$ は定数である。 $M_q^{(1)}(t)$ は非平衡統計力学では記憶関数とよばれ、ランジュバン揺動力によって決定されるが、 $M_q^{(1)}(t)$ もまた同様な式に従う。この操作を続けていくと無限につながった、特性関数に対する微積分方程式が得られ、これらより $M_q(t)$ のラプラス変換に対する連分数展開が得られる。揺らぎスペクトルや q 次スペクトル強度はこの展開の極で与えられる。係数 $a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, \dots$ は $M_q^{(1)}, M_q^{(2)}, \dots$ 等の観測量で決定されているので、有限極近似により、極が求められる。どの段階で打ち切るかは時系列の特性により一般的な原理はなさそうに思えるが明かではない。連分数展開の方法は、十分多くのデータが得られない場合に有効と考えられる。また、 $S(u)$ 、 $I_q(\omega)$ が $T \rightarrow \infty$ の漸近ふるまいによって決まるのに比べ、 $a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, \dots$ は短時間相関によって決定される。このために、数値的な誤差も小さくおさえられるだろうと期待される。

カオス力学系に話を限ると、緩和時間等の統計性を特徴づける量が系の不安定周期軌道によって決めることができる。統計性を決定するのは、一般化時間発展演算子の固有値であるが、これらは不安定周期軌道によって決定される。図3 a は、厳密に解けるある一次元

写像モデルに対する固有値を絶対値の大きな方から 20 個プロットしたものである。固有値を求めるのに上に述べたと類似の連分数展開が可能で、 b , c , d はそれぞれ 4,6,8 極近似で計算したものであり、不安定軌道の周期に直すと 8,12,16 である。周期の長い軌道を取り込むとより正確な固有値に近づくことがわかる、[4]。

確率統計現象は、一般に多様な側面を持つ。このために解析の仕方によっては一面的な側面しかみず、根底にある正しい法則を理解できないことがある。系の全体的な基本法則を知るには、多様な統計法則を総合的に理解することが必要である。統計現象の多様性は、観測量の時系列の場合は非ガウス性から生ずる。カオス、流体乱流など異なった分野に現れる間欠性は典型的な例である。このような強い非線形性は二体相関関数やそれをベースにしたキュムラント展開などの摂動展開を用いた、伝統的な方法では取り込むことができない。シンポジウムでは観測量の時系列の非摂動的、非ガウス性（非線形性）に対する解析方法について述べた。

狭義の統計力学のテーマの一つは分配関数や輸送係数をマイクロからどのように計算するかということであるが、複雑系の研究では、系を明確に特徴づける量や関数はまだ見いだされていない。これは、複雑系の扱う対象が複雑であるというばかりでなく、複雑系の呈する現象が想像を越えて複雑なために、どのような側面を、どの様に解析するかという、問題設定が確立していないことによる。カオスのような少数自由度系でさえも、無限の多様性を持っていた。巨大自由度系としての複雑系の持つ計り知れない《リッチさ》をうまく記述する量、方法を見いだすことが複雑系の研究の基本的なテーマであろう。

参考文献

- [1] H.Fujisaka and H.Shibata, Prog.Theor.Phys. 85(1991)187,
New asymptotic law governing overall temporal correlations in chaotic systems - Ensemble homogenization and order- q power spectrum -.
- [2] W.Just and H.Fujisaka, Physica D 64(1993)98,
Gibbs measures and power spectra for type I intermittent maps.
- [3] H.Fujisaka and M.Inoue, Prog.Theor.Phys.78(1987)1203,
Continued fraction expansion of fluctuation spectrum and generalized time correlation.
W.Just, J.Stat.Phys. 67(1992)271,
Projection operator approach to thermodynamic formalism of dynamical systems.
- [4] H.Fujisaka, H.Shigematsu and B.Eckhardt, Z.Phys.B 92(1993)235,
Continued-fraction expansion of eigenvalues of generalized evolution operators in terms of periodic orbits.

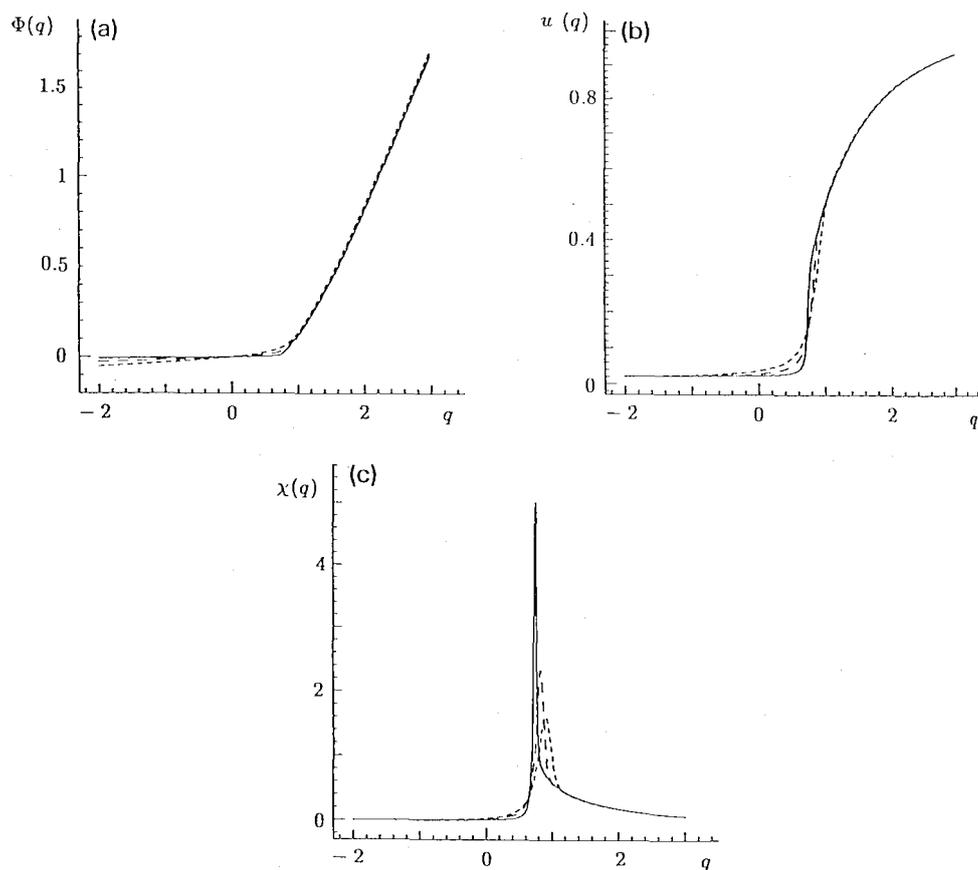


図1 間欠カオスの特性量の転移点近傍のふるまい、(実線、破線、点線の順に転移点に近い。 $q_c = \log 2$ を境にしてラミナーとバーストに対応する明かな相違が見られる

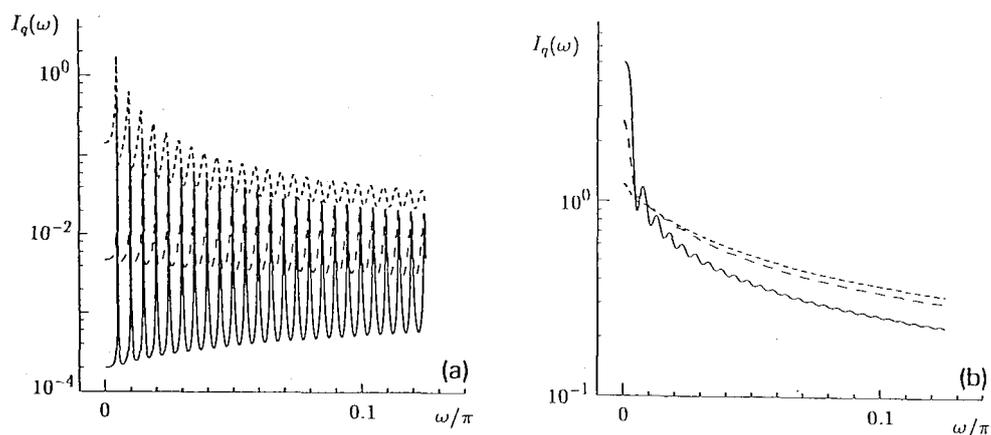


図2 間欠性カオスの転移点近傍における q 次スペクトル強度。(a) は $q < q_c$ のラミナー相を強調したもの。(実線、破線、点線はそれぞれ、 $q = -2, 0, 0.6$ を表す。(b) は $q > q_c$ のバースト相を強調したもの、(実線、破線、点線はそれぞれ、 $q = 0.75, 0.77, 0.79$ を表す

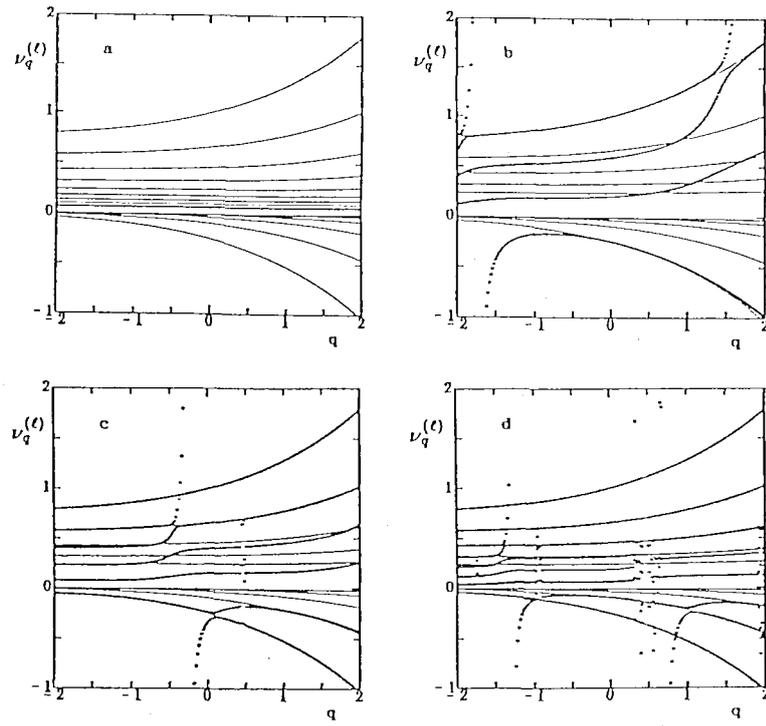


図3 一次元写像モデルの一般化発展演算子の固有値の厳密解と周期軌道の連分数展開の有限極近似との比較

可逆力学系における決定論的拡散

ミクロ力学とマクロ現象論のインターフェイス としてのフラクタル構造

基礎化学研究所 田崎 秀一

Brussels 自由大 Pierre Gaspard

§1. 序

輸送現象はマクロなレベルでは現象論的法則によって記述される。他方、ミクロなレベルでは系を構成する粒子は純力学的法則に従って運動している。この両者の関係を明らかにすることは輸送現象を理解する上で非常に重要な問題である。ミクロな力学法則に基づく現象論的法則の導出、輸送係数の計算に関しては、これまで活発に研究が行なわれ、久保らによる線形応答理論など数多くの理論が提出されている。また適当なスケールング極限をとることにより直接ミクロな力学法則から輸送現象のマクロな側面を捉えようというアプローチも行なわれている¹⁾。近年、著者の一人 (GP) らによって^{2,8)}、輸送現象に付随しミクロなレベルで Fractal Repeller が形成され得、そこからの逃散率と輸送係数の間に密接な関係が生じることが議論されている。この Fractal Repeller は輸送現象によって減衰する物理量 C が与えられた範囲 $c_0 \leq C \leq c_0 + \Delta$ の値をとり続ける軌道から成る。これはミクロな力学とマクロな現象論をつなぐインターフェイスとしてフラクタルが重要な役割を果たしていることを示唆している。ここでは少し違う角度から力学系に現れる拡散過程におけるフラクタルの役割を見ていく。

拡散を示す純力学的カオスモデルは、近年いろいろと提案され、その性質が研究されている³⁻¹¹⁾。とりわけ、ベルヌーイ写像を空間的に拡張したモデル⁵⁻⁷⁾やパイこね変換を空間的に拡張した保存的なモデル⁹⁻¹¹⁾では、平衡への接近を特徴付ける減衰モードおよび減衰率が密度分布関数の時間発展演算子 (Frobenius-Perron 演算子) の一般化された固有関数および対応する固有値として計算されることが示されている。この固有値 (の対数) は Pollicott-Ruelle の共鳴^{12,13)}に相当している。非可逆性と分布関数の時間発展演算子の間にあるこのような関係の存在とその一般性は、Prigogine ら¹⁴⁻¹⁸⁾によって主張されている。その理論では、(通常は現象論的方程式やマスター方程式を通して得られる) 熱平衡への接近を特徴付ける減衰率・減衰モードが、分布関数の時間発展演算子 (Liouville-von Neumann 演算子) の一般化された固有値・固有関数として計算される。

以下の節では多重パイこね変換という保存的な決定論的拡散モデルを取り上げ、厳密に、分布関数の時間発展演算子の固有値問題の解として現象論的減衰モードを導き、非平衡定常状態を構成する。そして、フラクタル的な特異測度が重要な役割を演じていることを示す。2節でモデルを説明し、3節で累積分布関数の発展方程式を導く。4節では均一分布からのずれの減衰を密度分布関数の発展演算子の固有値問題を通じて調べ、5節では累積分布関数の発展方程式の定常解として非平衡状態を構成し、その性質を論じる。詳細は文献 9、31-33 を参照されたい。

§2. 多重パイこね変換

多重パイこね変換は、格子状に配列された無限個の単位正方形上で定義される可逆な写像で、拡散を示す。Gaspard⁸⁾は四進版の多重パイこね変換を構成し、拡散および非平衡状態の性質をゼータ関数と”Thermodynamic Formalism”を利用して厳密に調べた。多重パイこね変換は Lebesgue 測度を一つの不変測度として持ち、一様分布からのずれは拡散過程を経て減衰する。この減衰過程を記述する Frobenius-Perron 演算子のスペクトルの性質は、Gaspard⁹⁾、長谷川、Driebe¹⁰⁾、田崎、Hakmi、Antoniou¹¹⁾により調べられた。系の周期性により、Frobenius-Perron 演算子の Fourier 変換は、準運動量に関してブロック対角化される。各 Fourier 成分は、ユニタリーであるにもかかわらず、Jordan ブロックの構造を持つことが形式的に示される。この結果は、Frobenius-Perron 演算子の定義域を二乗可積分関数のなす Hilbert 空間より広い関数空間に拡張することにより数学的に正当化できる。この点に関しては、4 節で触れる。

ここでは、次のように定義される最も単純な多重パイこね変換 B を扱う。

$$B(n, x, y) = \begin{cases} (n-1, 2x, \frac{y}{2}), & 0 \leq x < 1/2 \\ (n+1, 2x-1, \frac{y+1}{2}), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、整数 n は、単位正方形のラベルであり、実数の組 (x, y) ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) は、各単位正方形内での座標を表わす。図 1 に、写像 B を模式的に示す。容易にわかる様に、写像 B は、保測かつ可逆で、次の逆写像を持つ。

$$B^{-1}(n, x, y) = \begin{cases} (n+1, \frac{x}{2}, 2y), & 0 \leq y < 1/2 \\ (n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1), & 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

さらにこの系は、変換

$$I(n, x, y) \equiv (n, 1-y, 1-x) \quad (2.3)$$

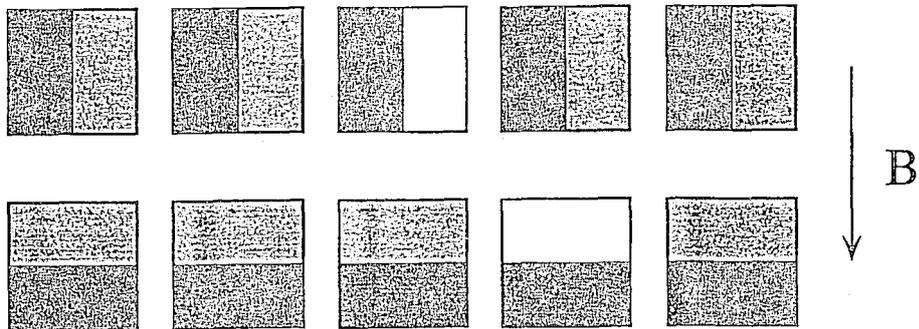


図 1: 多重パイこね変換 B

に対して

$$B^{-1} = IBI, \quad (2.4)$$

という性質を持つので、時間反転不変である。変換 I は、通常の力学系での速度反転の操作に対応している。多重パイこね変換 B は、一様に双曲的であり、その最大 Lyapunov 指数は $\ln 2$ である。

§3. 測度の時間発展

統計力学の通常のアプローチでは、考えている系の状態は分布関数によって指定される。分布関数は Liouville 測度に関して絶対連続な測度を定め、逆にそのような測度は分布関数を定める。つまり、系の状態は、相空間上で定義された測度により表わされている。今、測度の時間発展を直接考えると、必ずしも Liouville 測度に関して絶対連続でない測度も含めることができ、より一般の場合も扱える。

多重パイこね変換の場合にこれを実行しよう。一般性を損なうことなく測度 μ を Borel 測度に限定することができる。この時、任意の μ -可測集合は、次の様な半開矩形の可算個の和集合として表わされる。

$$\{[0, x] \times [0, y]\}_n, \quad (3.1)$$

ここで添字 n は、矩形 $[0, x] \times [0, y]$ が n 番目の単位正方形の部分集合であることを示す。従って、測度 μ は、累積分布関数 G :

$$G(n, x, y) \equiv \mu\left(\{[0, x] \times [0, y]\}_n\right), \quad (3.2)$$

により完全に指定される。測度 μ の時間発展方程式は、Liouville 方程式と同様に導出される。

$$\mu_{t+1}(A) = \mu_t(B^{-1}A), \quad (3.3)$$

ここで、 μ_t は時刻 t での測度を表し、 A は任意の可測集合である。矩形 $\{[0, x] \times [0, y]\}_n$ の逆像が

$$B^{-1}\{[0, x] \times [0, y]\}_n = \begin{cases} \left\{ \left[0, \frac{x}{2}\right] \times [0, 2y] \right\}_{n+1}, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \left\{ \left[0, \frac{x}{2}\right] \times [0, 1] \right\}_{n+1} \\ \cup \left\{ \left[\frac{1}{2}, \frac{x+1}{2}\right] \times [0, 2y-1] \right\}_{n-1}, & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

と与えられるので、累積分布関数 G の発展方程式は結局

$$G_{t+1}(n, x, y) = \begin{cases} G_t(n+1, \frac{x}{2}, 2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ G_t(n+1, \frac{x}{2}, 1) + G_t(n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1) \\ \quad - G_t(n-1, \frac{1}{2}, 2y-1), & 0 \leq y \leq 1/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

となる。ここで $G_t(n, x, y) \equiv \mu_t(\{[0, x] \times [0, y]\}_n)$ は時刻 t での測度の累積分布関数である。(3.5) 式で $x=1, y=1$ と置くと

$$G_{t+1}(n, 1, 1) = \alpha_{n+1,t} G_t(n+1, 1, 1) + (1 - \alpha_{n-1,t}) G_t(n-1, 1, 1), \quad (3.6)$$

が得られる。ただし $\alpha_{n,t} \equiv G_t(n, 1/2, 1)/G_t(n, 1, 1)$ である。明らかに不等式 $0 \leq \alpha_{n,t} \leq 1$ が成立するので、(3.6) 式は、時刻 t のサイト n から $(n-1)$ への遷移確率が $\alpha_{n,t}$ である様な酔歩を表わしている。 $\alpha_{n,t}$ は選んだ測度に依存して様々な値を取り得るが、これは多重パイこね変換という力学系が無数の確率過程 (酔歩) を含んでいることを意味している。

§4. 均一な定常状態への緩和

関数 $f_\alpha(x)$ を deRham 方程式^{19-21,7)}

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha f_\alpha(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1 - \alpha) f_\alpha(2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

の一意解とし、

$$G(n, x, y) = f_\alpha(x) f_\alpha(y), \quad (4.2)$$

とおくと、容易に分かる様にこれは方程式 (3.5) の定常解である。つまり (4.2) の累積分布を持つ測度 μ_α は、多重パイこね変換 B の不変測度である。文献 19,20 で調べられているように (22,23 も参照)、関数 $f_\alpha(x)$ は、 $\alpha \neq 1/2$ ($0 < \alpha < 1$) の時、ほとんどいたる所で導関数が零となる連続な狭義単調増加関数、つまり、Lebesgue の意味での特異関数である。 $\alpha = 1/2$ の時は、これは可微分な関数 $f_{1/2}(x) = x$ になり、対応して測度 $\mu_\alpha|_{\alpha=1/2}$ は Lebesgue 測度となる。あとで見るように、異なる測度は異なる酔歩に対応している。

この節では、 μ_α で表される状態からのずれの緩和について調べる。ずれた状態としては、 μ_α に関し密度 ρ_t を持つ (即ち μ_α について絶対連続な) 測度 μ_t で表されるもののみを考える。

$$G_t(n, x, y) = \int_0^x dx' \int_0^y dy' \rho_t(n, x', y'). \quad (4.3)$$

この時 G_t の運動方程式 (3.5) 式は密度 ρ_t の運動方程式

$$\rho_{t+1}(n, x, y) = U \rho_t(n, x, y) \equiv \rho_t(B^{-1}(n, x, y)) = \begin{cases} \rho_t(n+1, \frac{x}{2}, 2y), & 0 \leq y < 1/2 \\ \rho_t(n-1, \frac{x+1}{2}, 2y-1). & 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

と等価である。(4.4) 式中で定義される演算子 U は Frobenius-Perron 演算子と形式的に一致し、二乗可積分関数 ($\sum_n \int d\mu_\alpha |\rho|^2 < +\infty$ を満たす関数 ρ) の作る Hilbert 空間 \mathcal{H}_α 上でユニタリーである。

Hilbert 空間上では、 U のユニタリー性から散逸的な時間発展を期待することはできない。しかし、写像 B はエルゴード的なので⁸⁾、相関関数の時間発展に関しては平衡への接近を期待することができ、事実、次の命題が成立する³³⁾。これは、拡大写像、公理 A 系について成立する Pollicott-Ruelle の定理^{12, 13)} の特別な場合である。

命題

関数空間 $C_{\alpha x}$ を

$$C_{\alpha x} \equiv \left\{ f \mid \begin{array}{l} \text{i) } f(n, x, y) \text{ は全ての } n, \text{ ほとんど全ての } y \text{ に対し } x \text{ について連続微分可能、} \\ \text{ii) } n, x \text{ を固定するたびに } y \text{ について二乗可積分、} \\ \text{iii) } \sum_n \sqrt{\int_0^1 df_\alpha(y) \sup_x |f(n, x, y)|^2} < +\infty, \\ \sum_n \sqrt{\int_0^1 df_\alpha(y) \sup_x |\partial_x f(n, x, y)|^2} < +\infty \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

と定義し、(4.5) で x と y を入れ替えて定義される空間を $C_{\alpha y}$ とする。すると任意の初期分布 $\rho \in C_{\alpha x}$ と可観測量 $A \in C_{\alpha y}$ に対し、時刻 t での期待値 $\langle A|U^t \rho \rangle \equiv \sum_n \int d\mu_\alpha A^* U^t \rho$ は次のように減衰する：

$$\langle A|U^t \rho \rangle = \int_{|\beta_p| > \max(\alpha, 1-\alpha)} \frac{dp}{2\pi} \langle A|F_{\alpha p} \rangle \beta_p^t \langle \tilde{F}_{\alpha p} | \rho \rangle + \langle A|W_t \rho \rangle, \quad (4.6)$$

ただし $\beta_p \equiv \alpha e^{-ip} + (1-\alpha)e^{ip}$ で、第二項は第一項より速く、

$$|\langle A|W_t \rho \rangle| \leq (K_0 + K_1 t + K_2 t^2) \{\max(\alpha, 1-\alpha)\}^t, \quad (4.7)$$

のように減衰する。ここで K_j ($j = 0, 1, 2$) は A, ρ に依存する正定数である。反線形汎関数 $F_{\alpha p}$ 、線形汎関数 $\tilde{F}_{\alpha p}$ は

$$\langle A|F_{\alpha p} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inp} \int_{[0,1]^2} df_\alpha(x) df_{\alpha_p}^*(y) A^*(n, x, y), \quad (4.8a)$$

$$\langle \tilde{F}_{\alpha p} | \rho \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inp} \int_{[0,1]^2} df_{\alpha_p}^*(x) df_\alpha(y) \rho(n, x, y). \quad (4.8b)$$

で定義される。関数 f_{α_p} はパラメータを複素数 $\alpha_p \equiv \alpha e^{ip} / \beta_p^*$ に選んだ時の deRham 方程式 (4.1) の解で、連続だが微係数は至る所 0 または無限大で、 $p = 0$ を除き有界変分ではない²⁴⁾。図 2 に示した関数 f_{α_p} のグラフから、この関数がフラクタル的であることが分かる。さらに $F_{\alpha p}$ 、

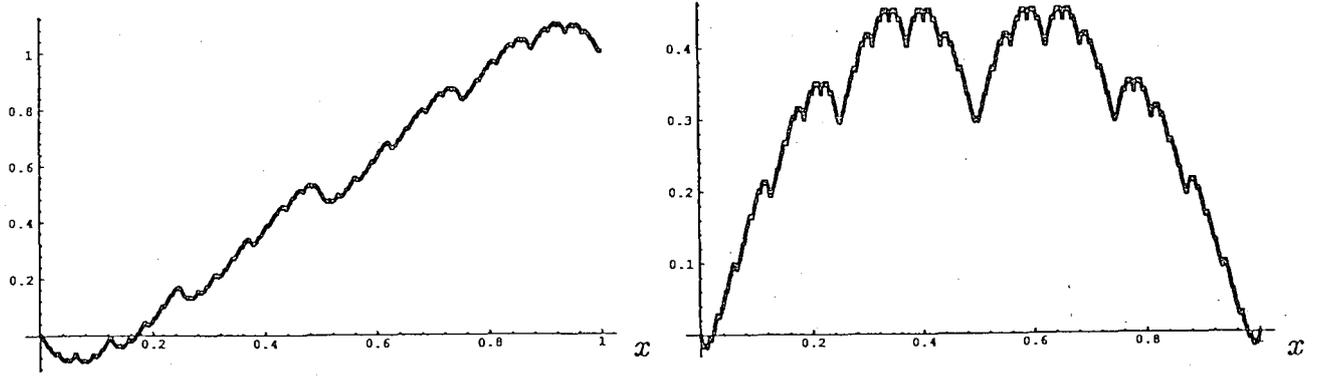


図 2: 関数 $f_{\alpha_p}(x)$ のグラフ ($\tan p = 3/5$ の場合)。左: 実部、右: 虚部

$\tilde{F}_{\alpha p}$ はそれぞれ発展演算子 U の固有値 β_p に対応する (一般化された) 右左の固有ベクトルである。

$$UF_{\alpha p} = \beta_p F_{\alpha p}, \quad U^\dagger \tilde{F}_{\alpha p} = \beta_p^* \tilde{F}_{\alpha p}. \quad (4.9)$$

相関関数の減衰を表す (4.6) 式の第一項は酔歩に対応している。事実、一次元格子上で定義された右から左への遷移確率が α である酔歩の確率分布 $\Pi_t(n)$ の発展方程式

$$\Pi_{t+1}(n) = \alpha \Pi_t(n+1) + (1-\alpha) \Pi_t(n-1), \quad (4.10)$$

は減衰率 $\beta_p \equiv \alpha e^{-ip} + (1-\alpha)e^{ip}$ に対応する減衰モード $\Pi(n) \propto e^{-inp}$ を持ち、これは正確に (4.6) 式の第一項に対応している。因に、 $\alpha = 1/2$ で p が小さいとき $\ln \beta_p \simeq -p^2/2$ であり、これより拡散係数は $D = -\lim_{p \rightarrow 0} \ln \beta_p / p^2 = 1/2$ となる。

(4.6) 式では $|\beta_p| > \max(\alpha, 1-\alpha)$ を満たす長波長の減衰モードだけが考慮されている。これは p がこの不等式を満たさないほど大きくなると $|\alpha_p| \geq 1$ となり、deRham 方程式 (4.1) の解 f_{α_p} が存在せず汎関数 (4.8) が意味をなさなくなるからである。しかし、この場合でもより滑らかな初期分布 ρ 及び可観測量 A を用いることにより、減衰モードを定義し (4.6) の形の分解を得ることができる。事実、方程式

$$g_{\alpha p}(y) = \begin{cases} \frac{\alpha_p}{2} g_{\alpha p}(2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \frac{1-\alpha_p}{2} g_{\alpha p}(2y-1) + \alpha_p \left(y - \frac{1-\alpha_p}{2}\right), & 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases}, \quad (4.11a)$$

を考えると、これは (4.1) が解を持たなくても $\max(\alpha, 1-\alpha) \geq |\beta_p| > \max(\alpha, 1-\alpha)/2$ であれば一意解を持つ。そして、 y について二回連続微分可能な可観測量 A に対して

$$\langle A | F_{\alpha p} \rangle \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inp} \int_0^1 df_{\alpha}(x) \left\{ A^*(n, x, 1) - \int_0^1 dg_{\alpha p}^*(y) \partial_y A^*(n, x, y) \right\}, \quad (4.11b)$$

によって定義される汎関数 $F_{\alpha p}$ は、密度の発展演算子 U の固有値 β_p に対応する固有ベクトルとなっている： $UF_{\alpha p} = \beta_p F_{\alpha p}$. 関数 $g_{\alpha p}$ は $f_{\alpha p}$ を積分したものに当たる： $g_{\alpha p}(y) = \int_0^y dy' f_{\alpha p}(y')$. 文献9で指摘されているように、これを繰り返して $f_{\alpha p}$ を何回か積分した関数を用いることによって、より短波長の減衰モードを構成することができる。

(4.8)、(4.11b)に見られるように $F_{\alpha p}$ 、 $\tilde{F}_{\alpha p}$ は汎関数としてしか定義されておらず、従ってこれらが U の固有関数であるという主張にはより詳しい説明が必要である。これは厳密には次のように示される。まず (4.5) で定義される関数空間 $C_{\alpha x}$ は適当なノルムの下で Banach 空間となる³³⁾。これは二乗可積分関数のつくる Hilbert 空間 \mathcal{H}_α の稠密な部分空間で、Banach 空間としての位相は \mathcal{H}_α の位相より強い。 $C_{\alpha x}$ 上で定義される反線形汎関数 $\tilde{F}_{\alpha p} : \rho \rightarrow \langle \tilde{F}_{\alpha p} | \rho \rangle^*$ は Banach 空間としての位相に関し連続である。 $C_{\alpha x}^\dagger$ を $C_{\alpha x}$ の反双対空間、つまり $C_{\alpha x}$ 上の連続反線形汎関数のつくるベクトル空間とすると、 $\tilde{F}_{\alpha p} \in C_{\alpha x}^\dagger$ である。次に演算子 U は x -方向の滑らかさを保持するので $UC_{\alpha x} \subset C_{\alpha x}$ が成り立ち $C_{\alpha x}$ 上有界 (故に連続) である。よって任意の $\rho \in C_{\alpha x}$ に対し $\rho \rightarrow \langle \tilde{F}_{\alpha p} | U\rho \rangle^*$ は一つの連続反線形汎関数を定め、Hilbert 空間の場合との類似から $\tilde{F}_{\alpha p}$ の U^\dagger による像、 $U^\dagger \tilde{F}_{\alpha p}$ と見なされる。この意味で (4.9) の第二式 $U^\dagger \tilde{F}_{\alpha p} = \beta_p^* \tilde{F}_{\alpha p}$ が成立するのである。ここで本質的なのは Hilbert 空間上で定義される演算子 U^\dagger が関数空間の三つ組： $C_{\alpha x} \subset \mathcal{H}_\alpha \subset C_{\alpha x}^\dagger$ を利用してより大きな関数空間 $C_{\alpha x}^\dagger$ に拡張される点にある。この関数の三つ組は rigged Hilbert 空間あるいは Gelfand の三つ組と呼ばれる。同様に (4.9) の第一式も三つ組 $C_{\alpha y} \subset \mathcal{H}_\alpha \subset C_{\alpha y}^\dagger$ を利用して示される。この方法では $U^{-1\dagger}$ 、 U^{-1} をそれぞれ $C_{\alpha x}^\dagger$ 、 $C_{\alpha y}^\dagger$ 上に拡張できないことを注意しておく。Prigogine ら¹⁶⁻¹⁸⁾の複素スペクトル理論でも分布関数の発展演算子の一般化されたスペクトル分解を構成する際に Gelfand の三つ組が重要な役割を果たしている。

§5. 非平衡一様定常状態とその性質

前節では、均一な分布状態への緩和を論じたが、この節では、(3.5) 式の一様定常解を構成しその状態における「流れ」を調べ、厳密に Fick の法則に従う状態が可能であることを示す。

5-1. 一様定常状態の構成

一様定常状態は a) (3.5) 式の定常解で、b) 3節で定義した $\alpha_n \equiv G(n, 1/2, 1)/G(n, 1, 1)$ がサイト座標 n によらないものとして特徴付けられる。さて、多重パイこね変換は、 x 方向を x 方向に、 y 方向を y 方向に写すので、両方向は独立であると考えられ、積測度 (累積分布関数が x の関数と y の関数の積に書ける測度) で表される定常状態が存在することが示唆される。因に、4節で考えた不変測度 μ_α (4.2) は積測度である。このとき累積分布関数は次の様に置ける。

$$G(n, x, y) = G(n, 1, y)F(n, x), \quad (5.1)$$

ただし、 $F(n, 1/2) = \alpha$ は n によらない。(5.1) を (3.5) に代入し F に関する条件を使うと次の方程式が得られる。

$$G(n, 1, y) = \begin{cases} \alpha G(n+1, 1, 2y), & 0 \leq y \leq 1/2 \\ (1-\alpha)G(n-1, 1, 2y-1) + \alpha G(n+1, 1, 1), & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (5.2a)$$

$$F(n, x) = \begin{cases} \alpha F(n-1, 2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-\alpha)F(n+1, 2x-1) + \alpha, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (5.2b)$$

関数方程式 (5.2) は deRham の関数方程式^{19-21,7)}と同様の形をしている。(5.2a) は $G(n, 1, 1)$ が定まると、(5.2b) はそのまま唯一の解を持つ^{31,32)}。 $G(n, 1, 1)$ は (5.2a) で $y = 1$ と置いて得られる漸化式

$$G(n, 1, 1) = (1-\alpha)G(n-1, 1, 1) + \alpha G(n+1, 1, 1), \quad (5.3)$$

から境界条件を与えることにより定められる。(5.3) は右から左への遷移確率が α である酔歩の定常分布を定める式であり、前節と同様、異なるパラメータ α が異なる酔歩に対応していることが分かる。

因みに、方程式 (5.1-3) によって定められる測度 μ と多重パイこね変換 B の組は、Ornstein の意味²⁵⁾で確率的 Markov 鎖と同型である³²⁾。遷移確率 P_{ij} とそれから計算される KS エントロピー h_{KS} は次式で与えられる。

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha & i = j+1 \\ 1-\alpha, & i = j-1 \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (5.4)$$

$$h_{KS} = -\alpha \ln \alpha - (1-\alpha) \ln(1-\alpha). \quad (5.5)$$

さて方程式 (5.2) に戻ろう。(5.2b) の唯一の解は deRham の関数方程式 (4.1) の解 f_α に等しい。

$$F(n, x) = f_\alpha(x). \quad (5.6)$$

$G(n, 1, y)$ については、 $G(n, 1, 1)$ の漸化式 (5.3) の解が

$$G(n, 1, 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{k-1} \{G(1, 1, 1) - G(0, 1, 1)\} + G(0, 1, 1), \quad (5.7)$$

と与えられるので、二つの場合を区別する必要がある。

ア) $\alpha \neq 1/2$, $0 < \alpha < 1$ の場合

このとき、定数 A , A' を

$$A = \frac{\alpha}{1-2\alpha} \{G(1,1,1) - G(1,1,0)\}, \quad A' = \frac{(1-\alpha)G(0,1,1) - \alpha G(1,1,1)}{1-2\alpha}, \quad (5.8a)$$

と置くと、

$$G(n,1,1) = A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n + A', \quad (5.8b)$$

である。\$G(n,1,y)\$ が \$G(n,1,1)\$ と同様の \$n\$ 依存性を持つと仮定して (5.2a) を解くと次式が得られる。

$$G(n,x,y) = f_\alpha(x)G(n,1,y) = f_\alpha(x) \left\{ A \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^n f_{1-\alpha}(y) + A' f_\alpha(y) \right\}. \quad (5.9)$$

図3 (a),(b),(c) のそれぞれに (5.9) の \$n, x, y\$ 依存性を示す。

イ) \$\alpha = 1/2\$ の場合

このとき、定数 \$B, B'\$ を

$$B = G(1,1,1) - G(0,1,1), \quad B' = G(0,1,1), \quad (5.10a)$$

と置くと、

$$G(n,1,1) = nB + B' \quad (5.10b)$$

である。ア) の場合と同様にして

$$G(n,x,y) = xG(n,1,y) = x[B\{ny + T(y)\} + B'y]. \quad (5.11)$$

ここで、関数 \$T(y)\$ は次の方程式の一意解として定義される。

$$T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}T(2y) + y, & 0 \leq y \leq 1/2 \\ \frac{1}{2}T(2y-1) + 1-y, & 1/2 < y \leq 1 \end{cases} \quad (5.12)$$

(5.11) の \$n, x, y\$ 依存性をそれぞれ図4 (a),(b),(c) に示す。関数 \$T(y)\$ は、高木²⁶⁾により、連続でいたるところ有限な導関数を持たない関数の例として考えられ、高木関数と呼ばれる (図5参照)。高木関数とそれに関連した関数の諸性質は畑、山口^{20,21)}により詳しく調べられている。

ウ) 時間反転状態

2節で示したように、多重パイこね変換 \$B\$ は時間反転 \$I\$ のもとで不変である。上述した状態にこの変換を適用したのもも定常状態である。\$\alpha \neq 1/2\$ の場合、この操作によって新しい状態は作られない。しかし、\$\alpha = 1/2\$ の場合には、次の状態が得られる。

$$\bar{G}(n,x,y) \equiv \mu \left(I \{ [0,x] \times [0,y] \}_n \right) = y [B\{nx - T(x)\} + B'x]. \quad (5.13)$$

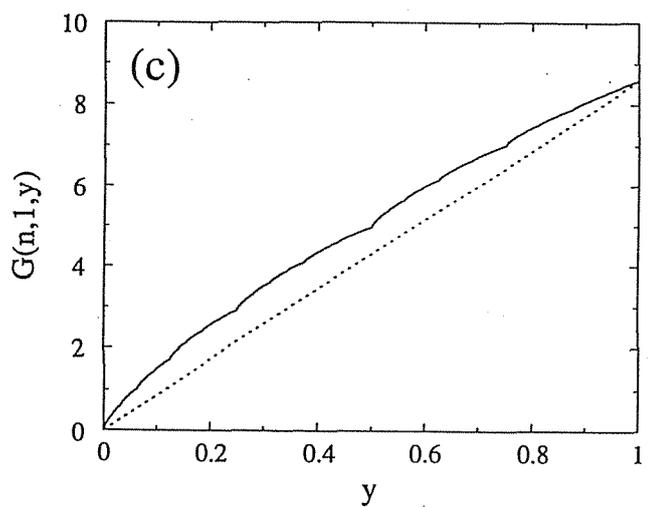
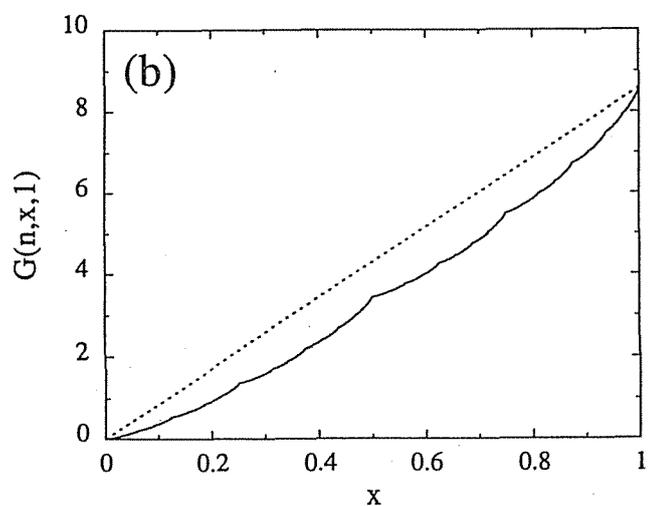
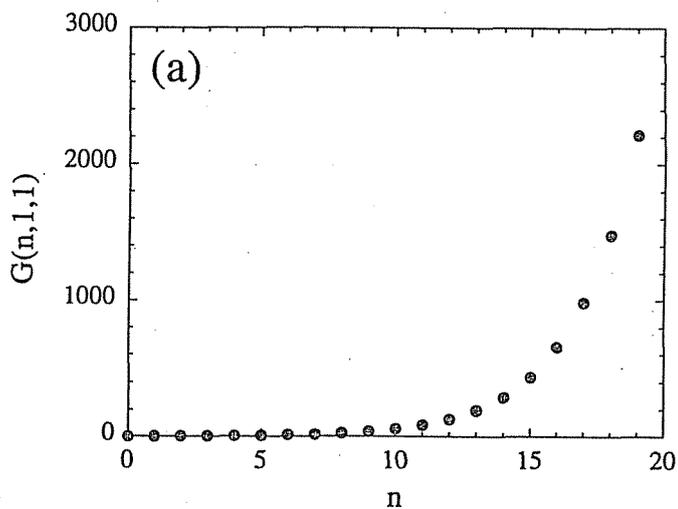


図3：累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 2/5)$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

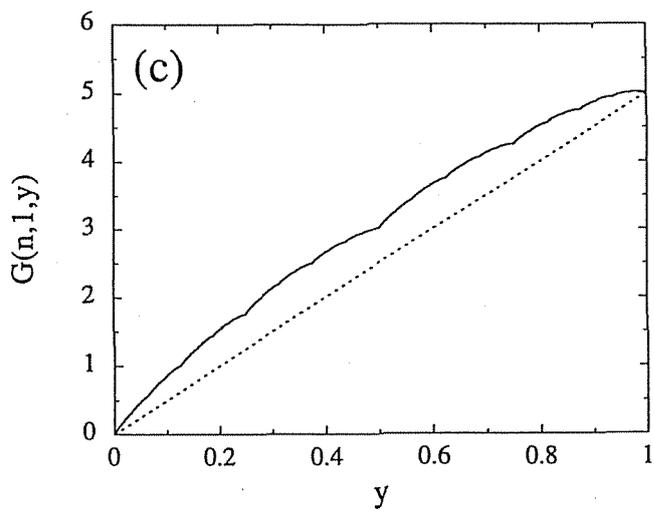
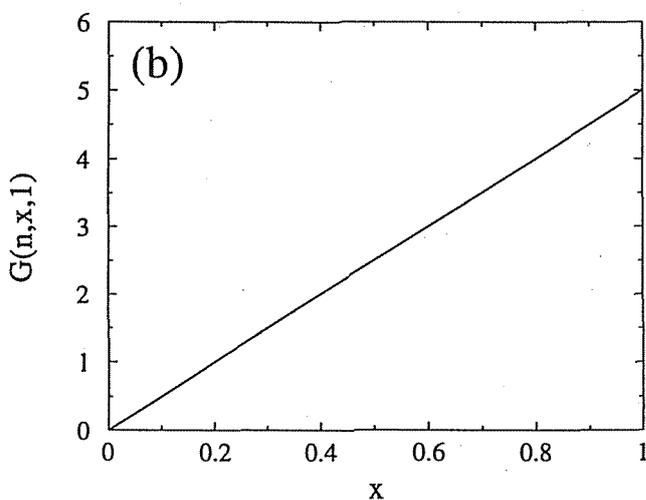
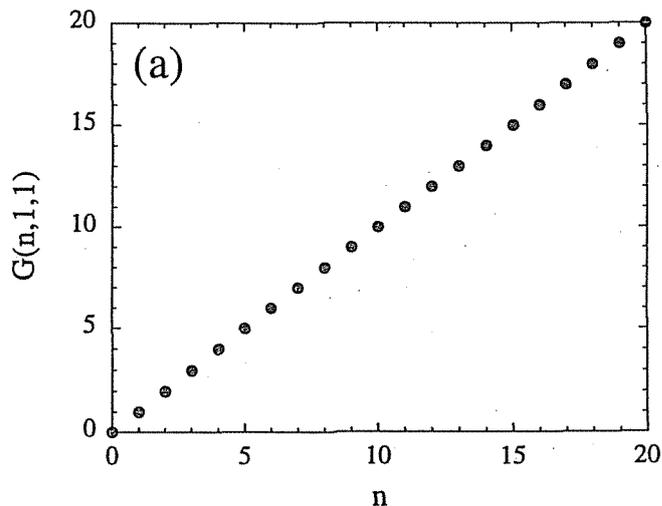


図4：累積分布 $G(n, x, y)$ のふるまい
 $(\alpha = 1/2, \text{Fick 状態})$ (a): $G(n, 1, 1)$ v.s. n ,
 (b): $G(5, x, 1)$ v.s. x , (c): $G(5, 1, y)$ v.s. y

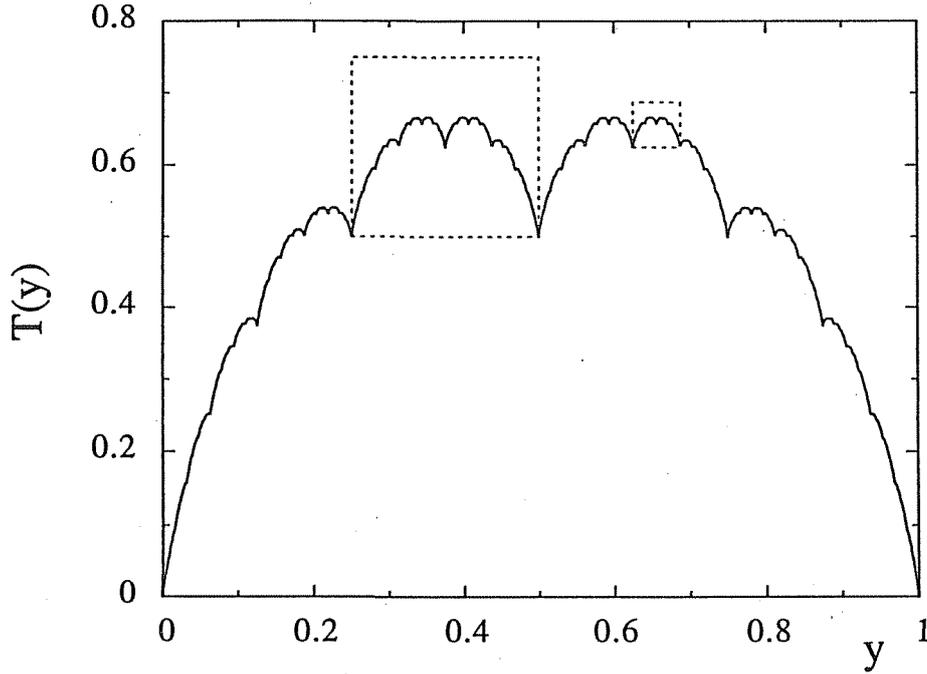


図 5 : 高木関数 $T(y)$

以上の結果より、 $\alpha = 1/2$ かつ $B = 0$ の場合を除き、累積分布関数は、特異関数を含む。従って、対応する測度は、Lebesgue 測度に関して絶対連続ではない。つまり、これらの累積分布を通常の密度分布関数 $\rho_n(x, y)$ を用いて表わすことはできない：

$$G(n, x, y) \neq \int_0^x dx' \int_0^y dy' \rho_n(x', y'). \quad (5.14)$$

パラメータ α の任意性から、与えられた $G(n, 1, 1)$ に関する境界条件に対し、非可算無限個の定常状態、従って不変測度が存在することが解かる。しかし、すべての不変測度が物理的に実現可能ではない²⁷⁻²⁹。この点に関しては後で議論する。

5-2. 定常状態における流れとその性質

ここでは、一様定常状態における流れを調べる。 n 番目と $n+1$ 番目の正方形の境界を考える。図 6 に示す様に、一回の多重パイこね変換 B により、 n 番目の正方形の右半分が右に、 $n+1$ 番目の正方形の左半分が左に移される。従って、この境界を左から右へ横切る流れは、 n 番目のセル中の $[1/2, 1] \times [0, 1]$ という領域の測度と $n+1$ 番目のセル中の $[0, 1/2] \times [0, 1]$ という領域の測度の差である：

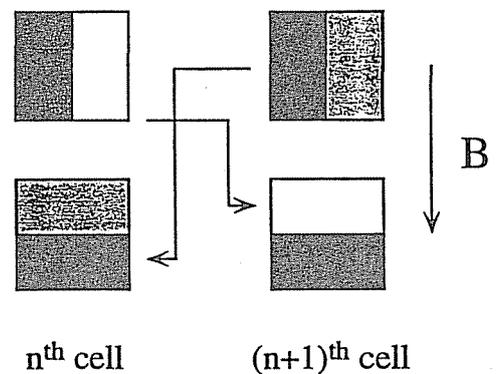


図 6 : n と $n+1$ 番目の境界を横切る流れ

$$\begin{aligned}
J_{n|n+1} &= \mu\left(\left\{\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 1]\right\}_n\right) - \mu\left(\left\{[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]\right\}_{n+1}\right) \\
&= G(n, 1, 1) - G(n, \frac{1}{2}, 1) - G(n+1, \frac{1}{2}, 1).
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

ア) $\alpha \neq 1/2$, $0 < \alpha < 1$ の場合

このとき、(5.9) 式より

$$J_{n|n+1} = (1 - 2\alpha)A', \tag{5.16}$$

となる。つまり、この時はセル座標 n に依存しない部分から流れが生じる。この流れは、次のように説明される：不変測度の n に依存しない部分は、各セルの右半分を $(1 - \alpha)A'$ の、左半分を $\alpha A'$ の重みで測る。よって、この測度でみると、一回の変換で右向きに $(1 - \alpha)A'$ 、左向きに $\alpha A'$ の流れが生じ、全体として (5.16) の流れが生じるのである。つまり、各セルの右半分、左半分の重みが異なることが流れの原因なのである。また、流れの表式 (5.15) は上述したメカニズムによる流れと拡散による流れの和に分解できるが、累積分布 (5.9) のセル座標 n に依存する部分から生じる両流れは互いに打ち消しあう。この結果、セル間での測度の違いが流れに反映されないのである。

イ) $\alpha = 1/2$ の場合

このとき、(5.11) 式より

$$J_{n|n+1} = -\frac{B}{2} = -\frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}, \tag{5.17}$$

前の場合と異なり、流れはセル間の測度の差により引き起こされる。さらに、4 節で示したように今考えているモデルの拡散係数 D が $1/2$ であるので ((4.10) 式以下の議論参照)、(5.17) 式は Fick の法則を表わしている：

$$J_{n|n+1} = -D\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}. \tag{5.17'}$$

Fick の法則は明らかに時間反転対称性を破っているが、時間反転対称な多重パイこね変換の定常状態としてこのような状態が得られることは興味深い。

ウ) 時間反転状態

(5.13) 式の状態は次の流れを持ち、予想される様に「反」Fick の法則に従う。

$$\begin{aligned}
J_{n|n+1} &= \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\} \\
&= D\{G(n+1, 1, 1) - G(n, 1, 1)\}.
\end{aligned}
\tag{5.18}$$

5-3. 状態の選択

パラメータ α に応じ異なる定常状態が得られ、それぞれ異なる輸送過程に対応していることを見てきた。どの状態が物理的に実現し得るかを吟味するには与えられた境界条件の下での系の時間発展を追跡すればよい。文献 32 では、両端が自由運動に相等する写像に接続した有限長の多重パイこね変換を考え、初期条件としてパイこね部の両端で濃度差がつくように自由運動部分に一樣 Lebesgue 分布を与えて、系の時間発展を調べた。その結果、多重パイこね部内の初期分布によらず Fick の法則に従い分布がセル座標に線形に依存する現象論的記述と合致する状態が自発的に現われることが分かった。これは次のように理解できる。まず Fick 状態が伸びる方向に一樣であるのに対し他の定常状態は伸びる方向に特異的である。他方、多重パイこね変換による引き伸ばしのため分布は伸びる方向に沿って一樣化される傾向がある。従って、伸びる方向に関して特異的な分布が終状態として実現するには伸びる方向に自己相似的な初期分布から出発しなければならない。このような初期分布は例外的であると考えられ、この意味で Fick 状態が安定なのである。

KS エントロピーは Fick 状態、「反」Fick 状態の双方で最大値 $h_{KS} = \ln 2$ をとる ((5.5) 式参照)。一般論からも KS エントロピーによって Fick 状態と「反」Fick 状態を区別することはできないという結論が得られる。事実、Fick 状態 G と多重パイこね変換 B の組、 (G, B) は、「反」Fick 状態 \bar{G} と逆変換 B^{-1} の組 (\bar{G}, B^{-1}) と、時間反転 I により同型であるから、両者は等しい KS エントロピーを持つ³⁰⁾。他方 (\bar{G}, B^t) の KS エントロピーは (\bar{G}, B) のそれの $|t|$ 倍であるから³⁰⁾、結局 (G, B) と (\bar{G}, B) の KS エントロピーは一致するのである。

§6. 結語

多重パイこね変換において、i) 拡散に対応する現象論的な減衰モードが密度分布関数の発展演算子の固有ベクトルとして得られ、それがフラクタルな特異関数に関する Stieltjes 積分により表示できること及び ii) 特異測度を用いることにより空間的に一樣な非平衡定常状態が厳密に構成でき、特に Fick の法則に従うものが安定であることを示した。つまり多重パイこね変換では、不可逆過程の現象論的法則が、可逆な力学法則と矛盾することなく定式化できるのである。この場合、フラクタルな特異関数が重要な役割を担っている。

まず分布関数の時間発展については、系がカオスのため軌道のダイナミクスが不規則的であるにもかかわらず、分布は拡散プロセスに従って滑らかに（指数的に）減衰するだけである。この軌道の不規則性が減衰モードのフラクタル性に反映されていると考えることができる。

また定常状態については、一つのセルに注目すると変換によって縮む方向に圧縮された隣隣のセルの一部が流入するので、すべてのセル内の分布が同一でないかぎり、分布は縮む方向に細かく変動するようになる。つまり、均一なセル上分布を持たない非平衡定常状態では必ずセル内分布は特異的になる。

以上の考察から、一般にもカオスの保存系における不可逆過程／非平衡状態の記述に特異関数が重要な役割を演じていると期待される。

謝辞

本研究への支援および有益なコメントを頂いた基礎化学研究所の福井謙一所長、龍谷大学の山口昌哉教授、Solvay 研究所 (Brussels) の Prof. I. Prigogine、Dr. I. Antoniou、Dr. Z. Suchanecki に感謝します。またこの研究は、文部省の科学研究補助金、国際学術研究、ベルギー国 National Fund for Scientific Research (F.N.R.S. Belgium)、Communauté Française (ARC contract No 93/98-166) から助成を受けています。

参考文献

- [1] e.g., M. Toda, R. Kubo and N. Saito, *Statistical Physics I*, Solid-State Sciences **30**, Springer, Berlin (1983);
R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II*, Solid-State Sciences **31**, Springer, Berlin (1985);
J. Lebowitz and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **19** (1978) 633;
H. Spohn, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1980) 569;
L.A. Bunimovich and Y.G. Sinai, *Commun. Math. Phys.* **78** (1980) 479.
- [2] P. Gaspard and G. Nicolis, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1693;
P. Gaspard and F. Baras, in *Microscopic Simulations of Complex Hydrodynamic Phenomena*, ed. M. Maréchal and B.L. Holian (Plenum, New York, 1992) p.301; P. Gaspard and F. Baras (unpublished)
J.R. Dorfman and P. Gaspard, *Phys. Rev.* **51** (1995) 28.
- [3] S. Grossman and H. Fujisaka, *Phys. Rev.A* **26** (1982) 1779.
- [4] S. Thomae, "Chaos-induced diffusion", in *Statics and Dynamics of Nonlinear Systems*, G. Benedek et al., Eds. (Springer, Berlin, 1983) 204.
- [5] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Lett.* **A168** (1992) 18.
- [6] P. Gaspard, *Phys. Lett.* **A168** (1992) 13.
- [7] S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, *Phys. Lett.* **A179** (1993) 97.
- [8] P. Gaspard, *J. Stat. Phys.* **68** (1992) 673.
- [9] P. Gaspard, *Chaos* **3** (1993) 427.
- [10] H.H. Hasegawa and D.J. Driebe, *Phys. Rev. E* **50** (1994) 1781.
- [11] S. Tasaki, A. Hakmi and I. Antoniou, to appear.
- [12] M. Pollicott, *Invent. Math.* **81** (1985) 413; *Invent. Math.* **85** (1986) 147.

- [13] D. Ruelle, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 405; *J. Stat. Phys.* **44** (1986) 281.
- [14] I. Prigogine, *Non-equilibrium statistical mechanics*, Wiley, New York, 1962.
- [15] I. Prigogine, C. George, F. Henin and L. Rosenfeld, *Chemica Scripta* **4** (1973) 5 .
- [16] T. Petrosky and I. Prigogine, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **90** (1993) 9393.
- [17] I. Prigogine, *Vistas in Astronomy* **37** (1993) 7 および引用文献。
- [18] I. Prigogine, 「パリテイ」 **10** (1995) No.1 p.6 ; No.2 p.32 および引用文献。
- [19] G. de Rham, *Rend. Sem. Mat. Torino* **16** (1957) 101.
- [20] M. Hata and M. Yamaguti, *Japan J. Appl. Math.* **1** (1984) 183.
- [21] M. Hata, in *Patterns and Waves* eds. T. Nishida, M. Mimura and H. Fujii, Studies in mathematics and its Application, Kinokuniya & Northholland, 1986, p.259.
- [22] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [23] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York, 1965.
- [24] S. Tasaki, I. Antoniou and Z. Suchanecki, *Chaos, Solitons and Fractals* **4** (1994) 227.
- [25] D. Ornstein, *Science* **243** (1989) 182.
- [26] T. Takagi, *Proc. of Physico-Mathematical Society of Japan, ser.II*, **1** (1903) 176.
- [27] J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617.
- [28] Y. Oono and Y. Takahashi, *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980) 1804;
Y. Takahashi and Y. Oono, *Prog. Theor. Phys.* **71** (1984) 851.
- [29] S. Tasaki, Z. Suchanecki and I. Antoniou, *Phys. Lett.A* **179** (1993) 103.
- [30] Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1972.
- [31] S. Tasaki and P. Gaspard, *Towards the Harnessing of Chaos*, Ed. M. Yamaguti, Elsevier, Amsterdam, 1994, p.273.
- [32] S. Tasaki and P. Gaspard, "Fick's Law and Fractality of Nonequilibrium Stationary States in a Reversible Multibaker Map", 1995, submitted to *J. Stat. Phys.*.
- [33] S. Tasaki, "Spectral Properties of the Frobenius-Perron Operator of the Multi-baker Transformation", Proc. of International Conference on Dynamical Systems and Chaos, ed. K. Shiraiwa et al., May, 1994, Tokyo.

セル力学系の数理：入門

東京大学数理科学研究科
高橋陽一郎

本報告では、セル力学系に関する数学的な基礎概念についての知見を（非専門家向けに）紹介する。詳細はそれぞれの論文を見て頂きたい。

0. 始めに

まだ定着したとは言い難いかもしれないが、近年、複雑系の数理あるいは物理が研究対象として認知されると共に、セル力学系 (cell(ular) dynamics) という言葉が使われるようになってきた。ものとしては、これはセル構造オートマトン (cellular automaton) と呼び慣らされてきたものと同じであ

セル構造オートマトンは、よく知られているように、von Neumann が自己再生系のモデルとして導入したものであり、オートマトンの立場からの長い研究の歴史がある。また、約10年前に、Wolfram 達がこれを複雑系のモデルとして研究するという視点から、コンピュータ実験により様々な現象を提示し、また、ある分類も提唱している。その中には、フラクタル構造をもつ例、ソリトンの構造をもつもの、あるいはそれらが共存するもの等、興味深いものが数多くある。

また、これと前後して、物理学の一部では、未解明の現象、あるいは、理論上は方程式が与えられているが著しく複雑な場合に、セル力学系をその記述手段として用い、現象論的なモデル方程式から、現象を再現することに成功している。Carman 渦 (Pomauux達) や、合金の分離現象 (イリノイ大学大野克嗣氏) などはその代表例である。このような流れの中から、セル構造オートマトンを力学系として見るという立場が生まれてきた。

一方、数学としては、セル力学系は、空間構造をもつ離散的な力学系の最も簡単な例であり、時空ともに一様な偏微分方程式の離散化はすべてセル力学系である。以下に述べるように、セル力学系は一次元、あるいは、多次元の記号力学系においてシフトと可換な連続写像であり、この観点から、1950年代より、セル構造オートマトンの研究とは独立に、その研究が始まって折、とくに、同型問題の視点からの研究論文は数多い。

上述のように、時空ともに一様な偏微分方程式の離散化はすべてセル力学系であり、拡散、波動、等々極めて多様な現象についてその時間発展の記述が可能であり、それ故に、個別の系の詳しい解析の共通基盤を与える数学的な基礎理論の構築が要請される一方、個別の系の解析は出来ても、その多様さを統一する一般論の構築はなかなか難しいのが現状である。

以下、その中でも重要と思われる基礎概念を紹介する。

1. セル力学系, 定義と例

数学的な意味は次節で述べることにして, 先ずは, 取扱い易い形で, その定義を与えよう.

定義1. 次の5つものが与えられたとしよう.

有限集合 A (例えば, $A = \{0, 1\}$, ただし, $0, 1$ は粒子の種類、
あるいは、その有無),

格子 L (例えば, 1次元格子 $L = \mathbb{Z} = \text{整数の全体}$),

$X = A^L$ または, その部分集合
(つまり、 L 上の粒子配置 $x = (x_i)$, 各格子点 i に A の元 x_i を
与えたもの、の全体を X と置く.)

L の有限部分集合 Λ
(例えば、 $L = \mathbb{Z}$ として, $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$)

Λ 上の粒子配置のみにより決まり, A に値をとる写像 f
(例えば、 $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$, $f = f(x_{-1}, x_0, x_1)$)

X からそれ自身への写像 τ は, τx の第 i 座標が次のように決まるとき, 格子 L 上のセル力学系であるという.

$$(\tau x)_i = f(x_{i+1}, j \in \Lambda) \quad (i \in L)$$

このとき, f を τ の局所写像 (local map) という.

次の例は、代数的構造もあり、オートマトンとしても、力学系としても、問題意識に上ったことはすべて判っているものである。

例1. $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ ($0+0=1+1=0$, $1+0=0+1=1$), $L = \mathbb{Z}$,
 $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$, $f(x_{-1}, x_0, x_1) = x_{-1} + x_1$, つまり,

$$(\tau x)_i = x_{i+1} + x_{i-1}$$

例えば, x が $x_i = 0$ ($x \neq 0$), $x_0 = 1$ のとき, τ を繰り返し作用させていくと、次のページの図1のように, 1つのパターンが形成される.

上のセル力学系 τ による時間発展は, これを基本パターンとして, 1が疎らにある場合には, 基本パターンが衝突すると、相互作用が生ずるものと解釈することができる (図2参照).

また, y が与えられると, $y = \tau x$ を満たす x は, x_0, x_1 の値を決めれば,

$$x_{i+1} = y_i - x_{i-1} \quad (i > 1), \quad x_{i-1} = y_i - x_{i+1} \quad (i < 0) \quad \text{よりすべて}$$

定まる. 即ち, τ は 4対1の上への写像である.

さらに,

$$x = \dots 10110110110110 \dots$$

の場合は,

$$\tau x = \dots 10110110110110 \dots = x$$

となり, x は τ に関して不動点であり, 一般に, 周期 p が与えられたとき, p 周期点 x を見出すこと, p 周期点の個数を数え上げることなどもさほど難しいことではない.

図1. 基本パターン

$x = \dots 000000000000000010000000000000 \dots$
 $\tau x = \dots 000000000000000010100000000000 \dots$
 $\tau^2 x = \dots 000000000000000010001000000000 \dots$
 $\tau^3 x = \dots 00000000000000001010101000000000 \dots$
 $\tau^4 x = \dots 00000000001000000000000010000000 \dots$
 $\tau^5 x = \dots 00000000101000000000001010000000 \dots$
 $\tau^6 x = \dots 00000010000100001000010000100000 \dots$
 $\tau^7 x = \dots 000001010101010101010101010000 \dots$
 $\tau^8 x = \dots 000010000000000000000000001000 \dots$
 $\tau^9 x = \dots 0001010000000000000000000010100 \dots$
 $\tau^{10} x = \dots 0100001000000000000000001000010 \dots$
 (これをスケールし直すと、あるフラクタル集合が得られる。)

次の例は、ほとんど自明な例である。

例2. $A = \{0, 1\}$, $L = \mathbb{Z}$, $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$,
 $f(x_{-1}, x_0, x_1) = 1$ ($x_{-1}x_0x_1 = 111$)
 0 (その他)

このときは、 $x = (x_i)$ の中に0があれば、 τ を施す毎に、左右1つずつ0が増えていき、結局、

$$\tau^n x \rightarrow \dots 000000000 \dots$$

となり、この極限は当然不動点である。もし、0が1つもなければ、つまり、

$$x = \dots 111111111 \dots$$

ならば、 $\tau x = x$ となる。

とくに、周期点は2個の不動点のみである。

例えば、

$x = \dots 111111110111111101111111 \dots$
 $\tau x = \dots 1111110001111100011111 \dots$
 $\tau^2 x = \dots 111110000001110000001111 \dots$
 $\tau^3 x = \dots 1111000000001000000001111 \dots$
 $\tau^4 x = \dots 1110000000000000000000111 \dots$
 $\tau^5 x = \dots 1100000000000000000000011 \dots$

この例は自明なものであるが、 τ による像が順次縮小していくもので、散逸系の玩具と考えることが出来る。また、連続時間力学系としては、次の微分方程式の解の挙動を連想させるものである。

$$dx/dt = 1 - x$$

図2. 例1で, 1が有限個の場合のパターン形成 (. = 0)

```

.....1.....1.....1.....1
.....1.1.....1.1.....1.1.....1.1
.....1..1.....1..1.....1..1.....1..
.....1.1.1.1.....1.1.1.1.....1.1.1.1.....1.1.1.1
.....1.....1.....1.....1.....1.....1.....1..1.1.1...
.....1.1....1.1....1.1....1.1.....1.1....1.11...1..
.....1...1...1...1...1...1...1.....1...1...1..111.1.1.
.....1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.....1.1.1.1.1.111.1.....
..1.....1.....1.....1.....1.....1.....1.1.1.1...
..1.1.....1.....1.1.1.1.....1.....1.....1..11.1...
1...1.....1.....1...11...1.....1.1.111...1..
..1.1.1.....1.....1.1.1111.1.1....1....1.111.1.
.....1.....1.....1...1..1...1...1.1.1..1..1.1..1
.....1.1.....1.1..1.11.1..1.11...11.11...11.
1...1...1.....1...11...11...11...111.111.111.111.
..1.1.1.1.1.....1.1.1111111111111111.1.1.1.1.1.1.1
1.....1.....1.....1.....1.....1.....1.....111
..1.....1.1.....1.1..1.1.....1.1.....11...
...1...1...1.....1...11...1.....1...1.....1111.
..1.1...1.1.1.1.....1.1.1111.1.1.....1.1.1.1.....11....
.....1.1.....1.....1.....1...1..1...1.....1...1111...
...1...1.....1.1.....1.1..1.11.1..1.1..1.1.....1.1..11..11..
...1.1.1.1...1...1...1...11..11..11...11...1...1...1111111111.
..1.....1.1.1.1.1.1.1.1.1.1111111111111111.1111.1.1.1.1.11.....1.
1.1.....1.....1.....1.....1.1..1.....111.....1.1
..1.1...1.1.....1.1.....1...11.1.....11.11...1.1.
.....1.1...1.....1...1.....1.1.111..1.....111.111.1.....
...1...1.1.1.....1.1.1.1.....1...1.111.1...11.1.1.1..1.1.
1.1.1.1.....1.....1.....1...1.1..1..1.1..1.111.....11....
.....1...1.1...1.1....1.11...11.11...11..1.11...1111...
.....1.1.1...1...1...1...1...111.111.111.11111..111..11..11.1
.....1.....1.1.11.1.1.1.1.111.1.1.1.1.1.1.1...1111.1111111111..
...1.1...1...11.....1.1.....1.11..1.1.....11.

```

2. シフトと可換な写像 (Hedlund の定理)

セル力学系を定義した土俵を思い起こそう。

有限集合 A (例えば, $A = \{0, 1\}$, 以下では, アルファベットと称する),

格子 L (例えば, $L = \mathbb{Z} = \text{整数の全体}$),

A^L (つまり, L 上の粒子配置 $x = (x_i)$, 各格子点 i に A の元 x_i を与えたもの)

L は格子であるから, その上には平行移動がある. 例えば, $L = \mathbb{Z}$ ならば, その平行移動は次の変換 σ から生成される. σ は通常, (左) シフト と呼ばれる.

$$(\sigma x)_i = x_{i+1}$$

(例えば,

$$x = \dots 0010101000011101110\dots$$

ならば,

$$\sigma x = \dots 0010101000011101110\dots)$$

シフト σ は A^L 上の力学系と考えることが出来る. また, A^L の閉部分集合 X がシフト不変, つまり,

$$\sigma X = X$$

を満たすならば, σ を X 上に制限した部分力学系 (X, σ) を考えることもできる. これらを総称して, 記号力学系、あるいは、単に、シフトという. これに対して, $X = A^L$ であることを明示したいときは, フルシフト (full shift) ということにする.

以下では, $L = \mathbb{Z}$ の場合のみを考える.

公理 A 系など, 典型的に複雑な振る舞いを見せる微分可能力学系 (M, h) は, すべて, 記号力学系によって実現できることが知られている. 実際に力学系 (M, h) を解析する際には, 適切な記号力学系 (X, σ) と写像 $r : X \rightarrow M$ で, $r\sigma = hr$ を満たすものを発見, 構成することにより, その解析をより簡単な記号力学系の解析に帰着させるのが常套手段である.

フルシフトでない記号力学系の代表的なものは次のクラスである.

定義 2. 記号力学系 (X, σ) が マルコフシフト, あるいは, 有限型シフトであるとは, ある非負整数 p と, 直積 A^{p+1} の部分集合 W によって,

$$X = X(W)$$

$$:= \{x = (x_i) : (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p}) \in W\}$$

と表されることをいい, W をその 構造集合 という.

とくに, $p = 1$ のマルコフシフトは 単純マルコフシフト という.

例 3. $X = \{x = (x_i) : x_i x_{i+1} = 00, 01, 10\}$

のとき, (X, σ) は 11 が現れないという禁制律に従うマルコフシフトである.

一般に, マルコフシフトにおいて, $p > 1$ のときには, 長さ p の単語をアルファベットと

見て、つまり、 A^p を改めて A と考えることにより、すべてのマルコフシフトは $p = 1$ の場合に帰着される。

同様の考えによって、セル力学系の局所写像 f を定める際に用いた集合 Λ は、必要があれば、1点集合、あるいは、2点集合に取り直すことが出来る。

このような簡単な場合に帰着させておくと、以下のように、”視覚的”な取扱いが可能になる。

まず、単純マルコフシフト (X, σ) は、アルファベット A を頂点集合、構造集合 W を辺集合とする有向グラフと対応する。また、このグラフの隣接行列 M と対応させることもできる。

例3. (続き) $A = \{0, 1\}$, $W = \{00, 01, 10\}$ より、グラフとその隣接行列 M は次ページのようになる。(Mの要素1は隣接していること、0は隣接しないことを表す。)



このように見るととき、 X の元 $x = (x_i)$ はこのグラフの上の、無限の長さの道に対応する。

なお、行列 M を単純マルコフシフト (X, σ) の構造行列ともいう。

さて、本節の本题に入ろう。

一般に、 X からそれ自身(または、別のシフト)への写像 τ は、

$$\tau \sigma = \sigma \tau, \text{ つまり, } \tau(\sigma x) = \sigma(\tau x)$$

を満たすとき、シフトと可換であるという。

次の定理の主張は意外性があるが、証明は直積空間の位相と τ の連続性の定義から直ちに判ることである。

定理1. (Hedlund) 記号力学系において、シフトと可換な連続写像 τ はセル力学系である。逆も正しい。

とくに、シフトの間の同型写像は全単射なセル力学系である。

証明. 逆は、局所写像 f によるセル力学系の定義

$$(\tau x)_i = f(x_{i+j}, j \in \Lambda) \quad (i \in L)$$

そのものがシフトと可換なことを保証している。

さて、 τ が連続写像のとき、アルファベット a に対して、集合

$$\{x = (x_i) : x_0 = a\}$$

の τ による逆像を考えると、この集合が開集合、かつ、閉集合であるから、逆像も開かつ閉

である．ところで，直積位相空間の位相の定義により，開かつ閉である集合は，ある有限個の格子点での情報だけで決まる集合である．よって，その有限個の格子点の集合を Λ とすれば，

$$(\tau x)_0 = f(x_j, j \in \Lambda)$$

となる．

ところで， τ はシフトと可換であったから，

$$\begin{aligned} (\tau x)_i &= (\sigma^{-1} \tau x)_0 \\ &= (\tau \sigma^{-1} x)_0 \\ &= f((\sigma^{-1} x)_j, j \in \Lambda) \\ &= f(x_{i+j}, j \in \Lambda) \end{aligned}$$

(証明終わり)．

1960年代のこの定理は，記号力学系の中の同型の特徴付けという方向性のもとに得られたものである．同型問題は(純粹)数学としては基本的な問題であるから，1つの分野を形成しており，この方向での文献は相当数に上る．しかし，それを紹介することは本報告の目的ではないので省略する．ただ，その中から生まれたソフィック系の概念は自然なものであり，以下でも用いることになるので，紹介しよう．

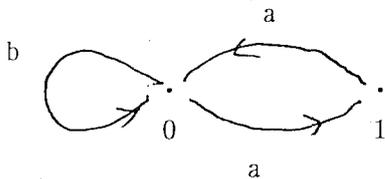
定義3. 記号力学系 (Y, σ) があるマルコフシフト (X, σ) の，あるセル力学系 τ による像になっているとき，つまり，

$$Y = \tau X$$

と表されるとき，記号力学系 (Y, σ) はソフィック (sophic) であるといい， (X, σ) を (Y, σ) のマルコフ被覆という．

ソフィック系 (Y, σ) においては，上で注意したことから，マルコフ被覆 (X, σ) を単純マルコフシフトの選り，セル力学系の局所写像を定義する範囲 Λ を2点集合に取ることができる．その上で (X, σ) を有向グラフで表現しておくと，セル力学系の局所写像 f はグラフの各辺に Y のアルファベットの元を対応させる写像となる．その元は各辺に与えたラベルと考えることが出来る．即ち，ソフィック系 (Y, σ) は，ラベル付き有向グラフに対応させることが出来る．

例4. 例3の単純マルコフシフト (X, σ) をとり，そのグラフで辺 01 ， 10 にラベル a を，辺 00 にラベル b を付ける．



これに対応するソフィック系を (Y, σ) とすると，このグラフでは，0から1に行くと次は必ず0に戻るから， Y の元 y は次の性質(*)によって特徴づけられる．

$$(*) \quad y_{i+1} = b, \quad y_{i+2} = \dots = y_{i+j} = a, \quad y_{i+j+1} = b$$

ならば， j は偶数である．

ところで、上の(*)のような制約条件は、 j がいくらでも大きくなり得るから、一定の長さ p だけの格子点を観測することでは判定できない。よって、例4で得られたソフィック系 (Y, σ) はマルコフシフトでは有り得ない。即ち、ソフィックはマルコフより真に広いクラスである。

数学的な美意識からは、ソフィック系の定義を次の定理により、半群を用いた定義に言い換える方が好まれている。

定理2. (E. M. Coven and M. E. Paul, Israel J. Math. 20-2(1975)) アルファベット A 上の記号力学系 (Y, σ) がソフィックであることと、次のことは同値である。

ある有限半群 S とその生成系 A (以下、アルファベットと同一視する) によって、次のように表現できる。

$$(\star) \quad Y = \{y = (y_i) : \text{各 } i \text{ と } j \geq 0 \text{ に対して,} \\ y_i y_{i+1} \cdots y_{i+j} \neq 0\}$$

ただし、 0 は S の元で、 $s0 = 0, 0s = 0$ を満たすものとする。

定義3'. 記号力学系 (Y, σ) がある有限半群 S を用いて、(*)によって表される時、記号力学系 (Y, σ) はソフィック (sophic) であるという。

注意. この定理2は抽象的な形で述べているが、実際は、対応するラベル付き有向グラフから、 0 と 1 を要素とする行列からなる半群により S を構成する (また、構成し直す) ことが出来、 0 は零行列となる。この際の行列の積は、 $\{0, 1\}$ をブール代数と考えて定める。

例4. (続き) 例4のソフィック系 (Y, σ) では、そのラベル付き有向グラフを睨んで、ブール代数 $\{0, 1\}$ 上の2次正方行列 M_a, M_b を

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

により定めると、これらから乗法に関して生成される半群が、上の定義2'の条件(*)を満たす半群 S である。

実際、容易に判るように、 $n = 0, 1, 2, \dots$ のとき、

$$M_b M_a^{2n+1} M_b = 0 \\ M_b M_a^{2n} M_b = M_b \neq 0$$

が成り立っている。これは上述の Y に対する制約条件(*)を半群 S の言葉で言い換えたものである。

前ページの定理2により、半群 S の掛算表が与えられれば、ソフィック系 (Y, σ) が1つ定まることになるが、残念ながら、一般の場合にこれを有効に利用した研究はまだ無いようである。

むしろ、注意に述べ、例示した構成法そのものに意味があり、個別に与えられたソフィック系を解析する際には、ラベル付き有向グラフを描いて、そこから各ラベルに対応する行列を定め、必要な計算を実行することによって、力学系の特性量、例えば、周期点の個数や、位相的エントロピー、エントロピー最大の不変確率測度などを求めることが可能である。

また、ここではマルコフ系、ソフィック系に対応するグラフの話のみにとどめたが、それぞれ、オートマトン理論、あるいは、形式的言語理論の言葉などに置き換えることも当然可能である。

3. ゼータ関数とエントロピー

力学系の研究の主対象は、時間発展のもとでの軌道の振る舞いである。とくに、時間 n が無限に大きくなる時の挙動を大域的に把握することが主要な関心事である。とくに、散逸系の場合は、アトラクタを調べるのが大切であるが、これに関連することは次節で述べることにして、基本的な概念から始めよう。

時間発展が最も簡単なものは、やはり、周期軌道である。1つの力学系のもつ周期点全体の構造に対する示性量として、次のものがある。

定義 4. 力学系 (M, h) に対して、 h の n 回の繰り返し h^n のもつ不動点の数を

$$F(n) = \# \{x : h^n x = x\} \quad (n \geq 1)$$

と書き、べき級数 $Z(t)$ を

$$Z(t) = \exp \{ \sum F(n) t^n / n \}$$

で定め、力学系 (M, h) の ゼータ関数 という。

2つの力学系 (M, h) , (M', h') が同型であれば、周期点の間には1対1対応があるから、ゼータ関数は一致する。つまり、ゼータ関数是不変量である。

単純マルコフシフトの場合は、下の例5から判るように、構造行列 M を用いるとゼータ関数を計算することができ、次のようになる。

定理 3. 構造行列 M をもつ単純マルコフシフトのゼータ関数は

$$Z(t) = 1 / \det (I - tM)$$

で与えられる。

例 5. 例3のマルコフシフト (X, σ) の場合、アルファベットは $A = \{0, 1\}$ 、構造集合は $W = \{00, 01, 10\}$ であったから、 $x = (x_i)$ が X に属することは、つねに

$$x_i x_{i+1} = 00, 01, 10$$

を満たすことと同値である。

また、 X に属する文字列 $x = (x_i)$ が σ^n の不動点である、つまり、

$$\sigma^n x = x$$

を満たすことは、

$$X_{i+n} = X_i$$

と同値である。

よって、 σ^n の不動点 x は

$$M(x_0, x_1) = M(x_1, x_2) = \cdots = M(x_{n-1}, x_0) = 1$$

を満たすアルファベットの n 個の元 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ と 1 対 1 に対応する。

ゆえに、

$$F(n) = \text{tr } M^n.$$

これより、

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp \left\{ \sum F(n) t^n / n \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum \text{tr } t^n M^n / n \right\} \\ &= \exp \left\{ \text{tr } \sum t^n M^n / n \right\} \\ &= \exp \left\{ -\text{tr } \log (I - tM) \right\} \\ &= 1 / \det (I - tM) \\ &= 1 / (1 - t - t^2) \end{aligned}$$

となる。

次に、位相的エントロピーを導入しよう。その定義を一般的に述べるのは面倒なので、記号力学系の場合のみに定義を与える。

定義 5. 記号力学系 (X, σ) に現れる長さ n の単語 (有限文字列) の総数を $N(n)$ として、その増大度

$$h(X, \sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log N(n)$$

を記号力学系 (X, σ) の 位相的エントロピー という。

位相的エントロピーは位相同型のもとでの不変量であり、力学系のもつ軌道の多様さを表す量と考えることができる。

例 6. 例 3 のマルコフシフト (X, σ) の場合、

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

が長さ n の単語であることは、

$$M(x_1, x_2) = \cdots = M(x_{n-1}, x_n) = 1$$

を満たすことと同値だから、 $\underline{1}$ で成分がすべて 1 のベクトルを表すと、

$$N(n) = \langle M^{n-1} \underline{1}, \underline{1} \rangle$$

よって、行列 M の最大固有値を λ とすれば、 $\lambda = (1 + \sqrt{5}) / 2$ (黄金数) であり、

$$\begin{aligned}
h(X, \sigma) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log N(n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \langle M^{n-1} \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \\
&= \log \lambda \\
&= \log (1 + \sqrt{5}) / 2
\end{aligned}$$

となる。

以上のことから、次の定理を推測することができる。

定理 4. 構造行列 M をもつ単純マルコフシフトの位相的エントロピーは、行列 M の最大固有値を λ とすれば、

$$h(X, \sigma) = \log \lambda$$

で与えられる。

注意. 上の 2 つの定理により、位相的エントロピーはゼータ関数から計算されることが判る。実際、

$$\begin{aligned}
Z(t) &= 1 / \det(I - tM) \\
&= 1 / \prod (1 - t\alpha)
\end{aligned}$$

(ただし、積 \prod は M のすべての固有値 α について取る。)

であったから、 $1/\lambda$ は $Z(t)$ の最小の正の極である。つまり、

$$h(X, \sigma) = -\log (Z(t) \text{ の最小の正の極})$$

なお、古典的な積分方程式論との類比から、行列式

$$D(t) = \det(I - tM)$$

はこの記号力学系のフレドホルム行列式と呼ばれているこの言葉を用いると、

$$h(X, \sigma) = \log (D(t) \text{ の最小の正の零点})$$

となる。

以上から、記号力学系の周期点やエントロピーの計算に当たっては、ゼータ関数、あるいは、フレドホルム行列式の計算が重要となることが判る。しかし、純粋数学としても、行列 M のサイズが大きいときに、これらの行列式を求めることは一般には容易ではない。この際には、軌道基 (orbit basis) という概念が有用である。(Y. Takahashi, Osaka J. Math. (1980)) これも一般的に述べると煩わしいので、例示にとどめる。

再び、例 3 の単純マルコフシフト (X, σ) を考えよう。このとき、構造集合は、

$$W = \{00, 01, 10\}$$

であり、文字列 11 は X に現れることは出来ない。したがって、 X に現れる文字列は、 0 が現れた場所から右に読み取っていくと、次の集合 B に属する 2 つの元を並べたものとなる。

$$B = \{0, 01\}$$

例えば,

$$\dots 01010010001010 \dots$$

ここで重要なことは、逆に、Bの元を勝手に並べてものはすべてXに現れ得ることである。このような場合、記号力学系 (X, σ) の軌道基Bをもつという。

軌道基Bは一般には有限とは限らない。また、1つのBにより、Xを尽くすことも一般にはできず、そのときには、Bを複数用意することになる。

定理5. 記号力学系 (X, σ) が唯1つの軌道基Bから生成されるとき、そのフレドホルム行列式は次のようになる。

$$D(t) = 1 - \sum t^{l(b)}$$

ここで、和 \sum は軌道基Bについて取り、 $l(b)$ はBの元bの単語としての長さである。一般に、Xが軌道基 B_1, B_2, \dots, B_m から生成される場合は、それぞれの軌道基に対応するフレドホルム行列式を $D_1(t), D_2(t), \dots, D_m(t)$ とすれば、

$$D(t) = D_1(t) D_2(t) \dots D_m(t)$$

となる。

例3の単純マルコフシフト (X, σ) のときは、

$$B = \{0, 01\}, \quad l(0) = 1, \quad l(01) = 2$$

より、

$$D(t) = 1 - \sum t^{l(b)} = 1 - t - t^2$$

と計算される。

また、例4のソフィック系 (Y, σ) の場合は、ラベル付きグラフを眺めれば、その軌道基は

$$B = \{aa, b\}$$

であることが判るから、やはり、

$$D(t) = 1 - \sum t^{l(b)} = 1 - t - t^2$$

であり、とくに、例3, 4の場合の位相的エントロピーは一致していることが判る。つまり、 $h(X, \sigma) = h(Y, \sigma)$

が成り立つ。

なお、これは偶然の一致ではなく、ソフィック系に対して、エントロピー最小のマルコフ被覆を常に選ぶことが出来、そのとき、エントロピーはもとのソフィック系のものと等しい。これはその例となっている。

定理5の公式はたいへん便利であるが、一見したところ不思議な公式である。実は、その証明は初等的なものであり、記号基の元を並べて得られる周期列と、 X に現れる周期点との対応を丹念に調べればよい。

残念ながら、記号力学系のゼータ関数は不変量として、マルコフシフトに限定しても、完全ではない。つまり、同じゼータ関数を持ち、互いに同型でない2つのマルコフシフトが存在する。(Sh. Ito and Y. Takahashi, Osaka J. Math(1974))

従って、同型問題の研究には、より詳しい性質を調べる必要がある。

しかし、我々の観点からは、同型の問題は、セル力学系が”保存系”と考えられる場合であって、複雑系のもつ散逸構造そのものの研究にはつながらないので、省略して、以下では”保存系”でない場合を扱う。

4. 散逸系の場合.

(Y, σ) をソフィック系として、セル力学系 $\tau: Y \rightarrow Y$ による像 $\tau(Y)$ が Y の真部分集合になる場合は、 τ を散逸系と考えることが出来る。このような場合は、

$$Y, \tau(Y), \tau^2(Y), \tau^3(Y), \dots$$

は小さくなって行き、その極限がどのような構造をもつかが問題となる。また、 Y 自身でなく、 Y の部分集合についても同様なことが問題となる。

一般の力学系について、それは通常、次に定義するアトラクタの研究となる。

定義6. コンパクト力学系 (X, f) において、 X の空でない閉部分集合 A がアトラクタであるとは、次の条件を満たす A を含む開集合 U が選べることをいう。

U の閉包 clU の像 $f(clU)$ が U に含まれ、

A は $f^n U$, $n \geq 1$, の共通部分である。

また、集合の包含関係に関して極小なアトラクタを極小アトラクタという。

セル力学系に関して少し詳しい情報を述べるためには、さらに次の概念が必要である。

定義6'. コンパクト力学系 (X, f) において、 X の空でない閉部分集合 Q が、加算無限個のアトラクタ A_n の共通部分として書けるときの、準アトラクタであるという。

また、集合の包含関係に関して極小な準アトラクタを極小準アトラクタという。

これらの概念を用いると、セル力学系の時間が無限大での状況は、次のように分類される。(M. Huxley, Ergodic Theory and Dynamical Systems 10(1990))

定理6. フルシフト上のセル力学系 τ に対して、次のうち3つのうちのいずれか1つが成立する。ただし、 μ はフルシフト上の一様ベルヌーイ測度とする。

(1) 極小アトラクタ A が唯1つ存在する。このとき、次のことも成り立つ。

$$\begin{aligned}\sigma A &= A, \\ \mu(\tau^{-n}A) &= 1\end{aligned}$$

(2) 極小準アトラクタ Q が唯一つ存在する. このとき, 次のことも成り立つ.

$$\begin{aligned}\sigma Q &= Q, \\ \mu(\tau^{-n}Q) &= 1 \quad \text{または} \quad \mu(\tau \text{ の chain component}) = 0\end{aligned}$$

(3) 非加算無限個の準アトラクタが存在する. このとき, τ の chain component の basin の測度はすべて 0 に等しい.

上の (1) は (ベルヌーイ測度に関して) ほとんどすべての点が唯一つのアトラクタに吸い込まれていくというもので, 通常よく扱う微分可能な力学系のイメージからもわかりやすい. しかしとくに, (3) はわかりにくいかも知れない. これは次のような状況を表している.

セル力学系では, シフトと可換であるが故に, "大きな" (準) アトラクタが壊れる場合は, 無数の "非常に小さな" 準アトラクタに分解し, フラクタルな構造が出現する.

さて, 上の定理はまだ十分とはいええず, マルコフ系, ソフィック系への拡張は未証明ではあるが, とりあえずこれによって, $n = \infty$ での状況が判ったことにして先に進むことにすれば, 次の問題は, 散逸的な場合において,

$$Y, \tau(Y), \tau^2(Y), \tau^3(Y), \dots$$

がどのように小さくなって行くかである.

この問題に関して, 行木孝夫氏は以下のような接近を試みている.
その出発点は次の事実である.

定理 7. (T. Namiki) $(X, \sigma), (Y, \sigma)$ をソフィック系として, セル力学系 $\tau: X \rightarrow Y$ を考える. τ の局所写像 f の選び方は 1 通りではないが, 次の極限は, (Y, σ) の任意の不変確率ボレル測度 μ に関してほとんどすべての点 y に対して, 存在し, かつ, τ を表す局所写像 f の選び方によらない.

$$h(y; \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \# f^{-1}([y]_n)$$

ただし, $\# f^{-1}([y]_n)$ は単語 $[y]_n = y_0 y_1 \dots y_{n-1}$ の局所写像による逆像の個数であり, degree function と呼ばれる.

さらに, (Y, σ) の不変測度 μ がエルゴード的ならば,

$$\mu \text{ に関してほとんどすべての点 } y \text{ に対して, } h(y) = \text{定数} .$$

注意. もちろん, 上の定数は, セル力学系 τ と (Y, σ) の不変確率ボレル測度 μ 毎に決まり, これは, 不変測度付き力学系 (Y, σ, μ) に対する不変量である. とくに, μ が 1 つの周期軌道上の一様分布の場合, この定数は, τ をラベル付きグラフで表示し, 例 4 のような行列 M_a, M_b を導入しておく, 直ちに計算できる量である.

上の量 $h(y; \tau)$ に対して、いくつかの重要な性質が成り立つことが判っている。その中でも、次の性質は不変量 $h(y; \tau)$ の導入の正当性を保証するものである。

定理 8. (T. Namiki) (X, σ) をソフィック系, τ をその上のソフィック系, $Y = \tau(X)$ とする. ν を (X, σ) の任意の不変確率ボレル測度, μ を τ によって (Y, σ) 上に誘導される不変確率ボレル測度とすると, 測度論的エントロピーに関して次のことが成り立つ.

(1) 一般に, 不等式

$$h(X, \sigma, \nu) \leq h(Y, \sigma, \mu) + \int h(y; \tau) \mu(dy)$$

が成り立つ.

(2) もし, ν, μ が (Bowen の意味で) ギブス測度ならば, 等式

$$h(X, \sigma, \nu) = h(Y, \sigma, \mu) + \int h(y; \tau) \mu(dy)$$

が成り立つ.

ここでは, (Bowen の意味での) ギブス測度の定義 (R. Bowen, Ergodic Theory for Axiom A Diffeomorphisms, Springer, 1973) とその説明は省略するが, 通常計算可能なベルヌーイ測度, マルコフ測度等はすべてギブス測度であるから, 上の定理は次のように読んでよい.

たちの良いセル力学系に対しては, (2) の等式が常に成立する.

なお, この種の定理によくあることであるが, (1) は成り立つが (2) が成り立たない例は今のところ知られていない. (おそらく, かなり病的なものと予想される.)

∞. 付記

以下, ここでは紹介できなかった, ソフィック系に対して一般的に成り立つ事実, および, 保存的なセル力学系に成り立つ事実の中から, 興味深いものを 3 つ拾って, 本報告を終わりたい.

ソフィック系のもつ最大エントロピー測度の研究は重要なものの 1 つである. この方向で顕著な結果は次のものである.

1) 位相推移的なソフィック系 (Y, σ) に対しては, 同じ位相的エントロピーをもつ位相推移的なマルコフ被覆 (X, σ) が存在する. また, 周期点が稠密であることと, 正則な最大エントロピー測度が存在することとは同値である. (E. M. Coven and M. E. Paul, loc. id.)

記号力学系の位相同型に関しては, Krieger たちの一連の研究があるが, コーディングの立場から具体化したものとして, 次のものがある.

2) 記号力学系の中の位相同型は有限個の2部コードの合成で表現できる。(M. Nasu, Ergodic Theory and Dynamical Systems 6(1986), 265-280)

どのようなセル力学系がハミルトン系に相当し、これに対して統計力学が成立するか、とくに、ボルツマン分布に従うか否についての研究が武末(京大)を中心に続けられている。

そこでは、加法的保存量が幾つあるかが重要なファクターである。

3) ソフィック系 (Y, σ) 上の関数 H は、周期点 $\sigma^k y = y$ について常に、

$$\begin{aligned} H(x) + H(\sigma x) + \cdots + H(\sigma^k x) & \quad (x = \tau y) \\ = H(y) + H(\sigma y) + \cdots + H(\sigma^k y) \end{aligned}$$

が成り立つとき、加法的保存量であるという。

(たとえば, T. Hattori and S. Takesue, Physica 49D(1971))

Computational Dynamics of Chaotic Neural Networks

Kazuyuki AIHARA

Department of Mathematical Engineering and Information Physics

Faculty of Engineering

The University of Tokyo

7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113, JAPAN

Email:aihara@sat.t.u-tokyo.ac.jp

Usually, simple linear threshold elements are adopted as neuron models for the artificial neurocomputing. Although such simple neuron models have been useful to derive some fundamental principles in the artificial neurocomputing, there exists criticism from the viewpoint of physiology that real neurons are far more complicated than such oversimplified models. In fact, the existence of deterministic chaos was confirmed experimentally with squid giant axons and other biological neurons. Moreover, it was also verified that nonlinear dynamics producing the nerve chaos can be understood in the framework of nerve ODE like the Hodgkin-Huxley equations and the FitzHugh-Nagumo equations. These results clearly showed that characteristics of real neurons are not so simple and static as linear threshold elements, but more complicated and actually chaotic.

Even if the deterministic chaos in the real neurons can be well described by the nerve ODE, these equations are too complicated to be adopted as constituent elements for large-scale artificial neural networks. It is a lesson we have learnt from deterministic chaos that complicated phenomena can be not rarely explained by simple deterministic dynamics. From this motivation, a simple neuron model with chaotic dynamics, which can reproduce the nerve chaos qualitatively, was proposed on the basis of physiological properties of relative refractoriness and a continuous stimulus-response curve at the axon hillock of

the neuron. Further, the chaotic neuron model is generalized as a fundamental element of “chaotic neural networks” to investigate spatio-temporally chaotic neurodynamics and its possible functional roles in artificial neurocomputing[1]. The model of chaotic neural networks is a natural extension of conventional discrete-time neural network models like the McCulloch-Pitts model , the discrete-time Hopfield networks and multi-layer Perceptrons because the model of chaotic neural networks includes the conventional neural networks as special cases by adjusting values of its parameters. In other words, we can easily introduce chaotic dynamics into the conventional neural networks toward studies of computational abilities of deterministic chaos in artificial neural networks.

The model of chaotic neural networks can produce abundant spatio-temporal dynamics through nonlinear interactions among component chaos. For example, the spatio-temporal dynamics allows a neural network to move chaotically over constrained but rich fractal structure in the phase space without getting stuck at local minima. This ability has been applied to dynamical linking of patterns stored with synaptic weights of superposed covariance matrixes in associative memory networks and also to dynamical searching for approximate solutions of global optima in combinatorial optimization networks. The model of chaotic neural networks can be further extended to (1)“transient chaotic neural networks” with transient chaotic dynamics which realises a kind of deterministic simulated annealing called “chaotic simulated annealing” by controlling the bifurcation structure from strange attractors to an equilibrium point[2] and to (2)“ asynchronous chaotic neural networks” with which analog time intervals between action potentials can be analysed in relation to possible coincidence detection of cortical neurons and utilized for temporal coding and processing[3,4].

Nonlinear spatio-temporal dynamics of networks composed of chaotic elements with high potential of computation is an attractive research subject not only as models of biological neural networks but also as models for chaotic parallel distributed processing which is classified as one of a new generation of artificial analog computing.

REFERENCES

1. Aihara,K.,Takabe,T. and Toyoda,M. Chaotic Neural Networks. *Physics Letters A* 144(1990)333-340.
2. Chen,L. and Aihara,K. Chaotic Simulated Annealing by a Neural Network Model with Transient Chaos. METR94-20, Faculty of Engineering, The University of Tokyo(1994)
3. Judd,K. and Aihara,K. Pulse Propagation Networks:A Neural Network Model That Uses Temporal Coding by Action Potentials, *Neural Networks*, 6,203(1993)
4. Ichinose,N. and Aihara, K. Asynchronous Chaotic Neural Networks. in *Towards the Harnessing of Chaos* (ed. by M.Yamaguti), Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam(1994).

生物の作り出す系はなぜこのように多様で複雑なものへと進化してきたのであろうか。いかにして増殖から多様性が生まれ、維持されているのであろうか。このような問題は細胞レベルでの分化から、生態系での多様な関係性の維持といったレベルまで広く見られ、理論的には共通の概念が必要とされる主要な問題である。このことを考える上で、我々は「生命系にはその増殖の性質ゆえに要素（細胞でも個体でもよい）の間の相互作用が増す。するとたとえ同一の要素集団であっても自発的分化が起こり、それにより役割の分業が生じて調和的な関係性が生じる。こうして生じた多様性はカオスの遍歴、ホメオカオスによりダイナミックに維持される」という見方を提唱したい。

このような見方に至った主要な動機は2つある。まず、これまでのカオスを示す要素が結合した系の研究で、同一要素は振動が引き込んだ、いくつかのクラスターに分化すること、そういったクラスター化した状態の間のカオスの遍歴現象、乱れた状態の中での要素間の隠れたコヒーレンスの存在が見出されたことである。次は最近の四方達の実験である。彼らの実験によれば同じ遺伝子をもった大腸菌をスープのなかで培養していくと、酵素活性の高い集団と低い集団に分化するということが自発的に起こる。この実験では突然変異は見出されておらず、また高い集団と低い集団が空間的に分離しているわけではない。このことは、細胞分化が、原核生物で、かつ遺伝子は同じで、かつ空間的に一様でも起こることを示唆している。

ここでは細胞分化の抽象的なモデルをつくり、そのシミュレーションを通して上の見方による細胞分化のシナリオを提唱する。まず系は各細胞 (i) の化学物質 k の量 $x^k(i)$ 、それぞれの化学成分の培地での量 $X^k(i)$ であらわされ、これらの変化は以下で与えられるとする。(1) 単純化した代謝反応系 (細胞内の k 成分の化学物質の微分方程式系) (2) 外の培地から細胞内への化学物質 (栄養) のアクティブなとりこみと拡散 (3) 代謝反応の進行による生成物の蓄積による細胞分裂 (4) ある条件での細胞死。個々の細胞は代謝反応を行っており、一般にはこれは非線型であり、また細胞同士は栄養源をとりあって相互作用をしているので、多くの非線型要素の結合系の例となっていることに注意しよう。更に、細胞は分裂や死によってその数が増えるので、力学系の立場からいうと自由度が増減する問題となっている。

具体的には各プロセスは以下のようなものとする。

(あ) 細胞内の代謝反応：

化学成分の間には適当な反応 $x^k \rightarrow x^l$ があり、これらは他の酵素で制御されているとする。さらにこれらの酵素の合成は各化学成分によっているので、反応は一般的には自己触媒的になっている。また他を作る源 (栄養) となる化学成分 S があるとする。

(い) 化学物質のとりこみと拡散：

各細胞は培地から化学物質をとりこんでおり、このとりこみはその細胞の活性 (ここではその細胞のもつ化学物質の和) によっているとしよう。さらに細胞と培地の間には通常の拡散過程がある。

(う) 分裂

各細胞では代謝を通して最終生成物が蓄積されていく。その量があるしきい値を越えると (ほぼ等分に) 2分割され、細胞分裂が起こるとしよう。これにより、細胞数は1個

増加し、われわれの系の自由度は増加する。

代謝反応のネットワークの選び方により色々な可能性がありうるが、主な場合に得られたシミュレーションの結果をまとめると次のようになる。

- 段階1：化学成分は代謝反応により振動しているがその振動は同期している。そこで、細胞は1,2,4,8,...と一斉に分裂する。
- 段階2：振動位相のクラスター化：細胞数が増すにつれて振動は同期を失い、ことなる位相で振動する集団に分かれる。その意味では細胞はもはや同じものではないが、ここで違うのは位相だけで時間平均すればどの細胞もほぼ等量の化学成分を持っている。全細胞の振動が引き込んでしまうと一斉に栄養源をとりあうことになり増殖が困難なのに対し、クラスター化により時間的な棲みわけ (time sharing system) を実現しているわけである。こういったクラスター化の由来は代謝反応と取り込みのダイナミクスにある不安定性にある。これによって2つの細胞の状態の微小な差がマクロな差にまで増幅されるのである。
- 段階3：分化の固定化：分裂によりさらに細胞数が増すと、平均した化学成分が細胞によって異なりはじめる。つまり成分1が多い細胞グループとか、どの成分も同様に持っている細胞のグループというように分かれ、それは固定する。振動のパターン、周期もグループごとで異なるようになり、分裂も一斉には起こらない。
- 段階4：分化の伝播：上で分かれたグループはその性質を子孫の細胞に伝える。つまり、A型の細胞から分裂した細胞はA型になるといったことである。ここでは遺伝情報を表に出さなくても形質の伝播が起こったこと、細胞の性質が固定 (determination) されたことに注意しよう。
- 段階5：階層的分化：分裂が続いて細胞数が更に増すと、上で分かれたグループが少しだけ化学成分の異なるサブグループに分かれていく。つまりA型からはA1、A2のタイプが生まれ、B型からはB1、B2のタイプが生まれるというようなことが起こっていく。その意味では段階4でのA型の細胞は以降のその系列の細胞の幹細胞となっている。

以上で注意すべきは、この分化過程はそのなるべく遺伝情報にプログラムされているというよりも、相互作用を通して生成されたとみるべきであるということである。では、分化形質の伝播は細胞間相互作用を通して記憶されているのであろうか、それとも細胞内の化学成分の値によって記憶が生まれたとみなせるのであろうか。このためにはある細胞をとりだして別な状況においた時にやはりその子孫が同じ形質を保っているのかを見ればよい。こういった移植シミュレーションの結果によると、ある範囲では細胞内に記憶ができていとみなしてよいことがわかった。

以上は空間的には一様した場合であるが、空間的に局所的な相互作用を考えた場合は細胞分化とともに空間的に非一様なパターンがつくられ形態形成へとつながっていくなど様々な拡張が可能である。このような結果をふまえて、生物系のネットワークの分化と多様性に対して冒頭で述べた“isologous diversification”を構成していくことを考えている。

テープとマシンの共進化

池上高志

1 はじめに

分子の形態の進化と、それが生命現象を担うかどうか、の間の差は分子が自分を記述するかどうかという点にあると思われる。しかし安定な記述が完成し、進化しないのであれば、それは結合の形態が複雑で自由度が大きな力学系として扱ってしまう。したがって問題は、

1. いかにして自己を記述するコードが進化しえたか。
2. 自己記述コードはどのように進化するか。
3. 記述の不安定性は、どのような形で噴出するか。
をいかに扱えるかである。

特に本研究では、外来性のランダムネスによってもたらされる突然変異と、決定論的な突然変異の内的な機構がどう関わっているか、を明らかにすることがねらいである。

自己複製の機能を持つRNA分子がどのようにして生まれたか、は多くの研究者によって扱われてきた問題である。中でも Eigen と Shuster らによって提唱された自己触媒の化学反応のネットワーク(ハイパーサイクル)が良く知られている [1]。ハイパーサイクルはお互いに化学反応を触媒しあう自己完結した反応のループである。いったんこのループが生成されると、それを核に複製反応が永続される。このような自己完結ループを実際のRNA分子の集団の中に見いだそうという実験が行なわれている。しかしハイパーサイクルのモデルは以下の点で不満が多い。

第1は生命現象の反応を扱っているにも関わらず情報コードの生成と伝達という観点を明示的に取り入れたモデルがあまり見当たらないこと。

第2にできあがったハイパーサイクルの動的安定性の議論はあるが、それが進化的にいかん獲得されてきたかの議論が少ないこと。(ハイパーサイクルは、前もって与えられた有限自由度の方程式で記述され、複製機能は方程式の中に暗に含められている)

第3としてRNAで反応を閉じさせ、リボソームなどのタンパク分子の進化とそれらとの相互作用さらに共進化はほとんど考慮されていないこと。

最近、P.W.Anderson のスピングラス [3] を基礎としたモデルや D.Farmer らによる自己触媒をするランダムネットワーク [2]、W.Fontana [4] によるリスプによるプログラム反応モデルが第1と2の問題に言及しはじめています。本研究ではこれらの点を考慮し、特に第3点を含んだ新しい「遺伝」情報の進化のモデルを提唱する。

2 モデル

RNA や DNA に相当するテープと、タンパクに相当するマシンを考える。テープはマシンと相互作用することで、新しいマシンとテープが作られる。ここでテープは円環状のビット列で表さ

れる。どのテープと相互作用できるかはマシンが持っている「ヘッド」と「テール」を表すビットパターンがテープ上に見出されるか、で決っている。それが満たされると、マシンは「ヘッド」パターンが見つかったビットから「テール」パターンが見つかったビットまで、ある「遷移表」にしたがって書き換えて行く。書き換えるルールはマシンの内部状態と今読んでるビットの値によって決められる。

この「ヘッド」・「テール」・「遷移表」を表すのにここでは16ビット用いる。この情報がテープのパターンとして書かれている。テープのパターンがどのように「ヘッド」・「テール」・「遷移表」に翻訳されるかは、与えられているとする。

問題は与えられたテープを複製し、翻訳しようとする際にマシンが寄与することによってなんらかの「跡」が複製されたテープ上に残ってしまい、したがって翻訳もマシンを介した翻訳ということになるのである。

このようなマシンとテープの集団を扱って、反応させていく。1単位世代で反応は十分に起こるとし、新しくできたもので置き換えられていく。

ここで最初に述べた問題意識によってふたつの変異率が導入される。ひとつは外部ノイズによって、マシンが遷移表にない書き換えをしてしまうこと。もうひとつはマシンが遷移表にある書き換えをした結果、もとのテープとは異なるテープをつくってしまうことである。前者は確率的に行ない、後者は決定論的に行なわれる。前者の変異がないとき、後者の遷移表にしたがった書き換え率がゼロであるとき、テープはエラーなしで自己複製されることになる。

3 結果

外部ノイズの高さによって、どのような反応のネットワークが進化するかが決ってくる。10個位のマシンと2-3のテープをランダムに生成し初期状態として用意し、そこからの発展をみる。

初期に登場するのは、マシン M がテープ T を読んで、同じテープを複製し自分と同じマシン M を複製する最少限の自己複製ループである。いったんこれができると、これをコアに反応のネットワークはだんだんに複雑化していく。しかし外部ノイズが低いと、最少限の自己複製ループに側鎖がついたようなネットワークしか残らない。

次に外部ノイズを大きくしてみる。この時反応は先に進んで、複雑なループが出現する。しかし必要なマシンをつくるのに必要なテープがなかなか自給自足されないため、外部ノイズを切ると、もとの最少限の自己複製ループにもどってしまう。注目すべきことは、高い外部ノイズの下でネットワークを育てると、ノイズを切っても最少限の自己複製ループに戻らない、複雑なネットワークが安定に維持できる状態に時間的に移行することである。このノイズを切ったあとの、ネットワークは自給自足できるループがいくつも絡み合った状態であることがわかる。

自己複製の度合いを考えると、外部ノイズが低い時には、多様なマシンはでてこないが、局所的な自己複製を　しかし外部ノイズが高い時には、局所的な複製を諦めて、ネットワーク全体で複製を達成するため、内的な突然変異率は高くなる。

4 考察

この実験から次のことが考察できる。

1. 複雑なネットワークの作られ方には順序があるということ。これは Bootstrap 型の進化とよべるものである。まず自給自足を行なう最少限のループができてから、それに寄生する

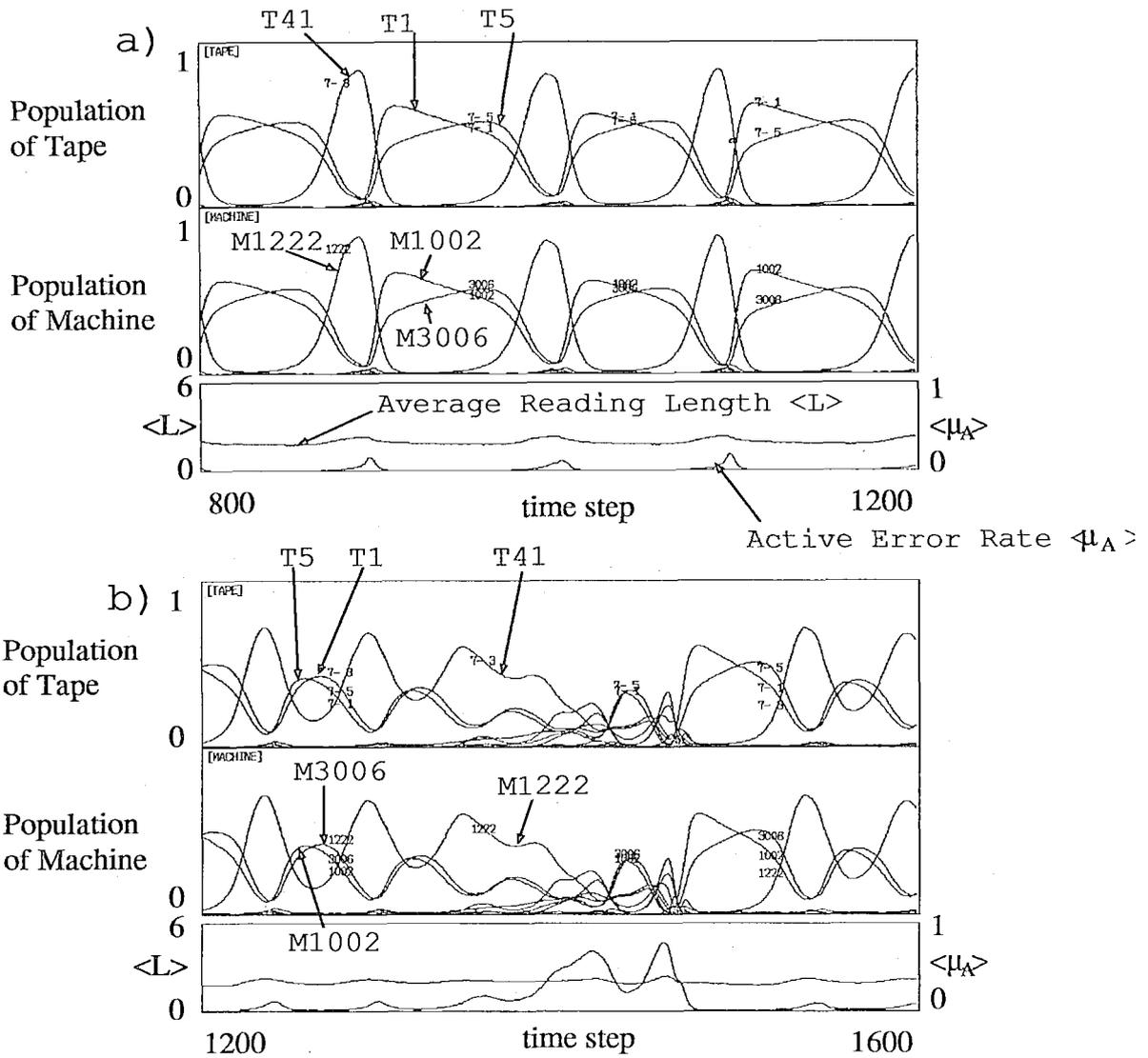


図 1: マシンとテープの各個体数の時間発展 (1 番上がマシンで次がテープ)。1 番下のグラフは決定論的突然変異の割合と平均で読まれるテープ上のビット長である。a) 外部ノイズが低い (ビットあたり 0.04) の時。b) 外部ノイズを上げた時 (0.055)。

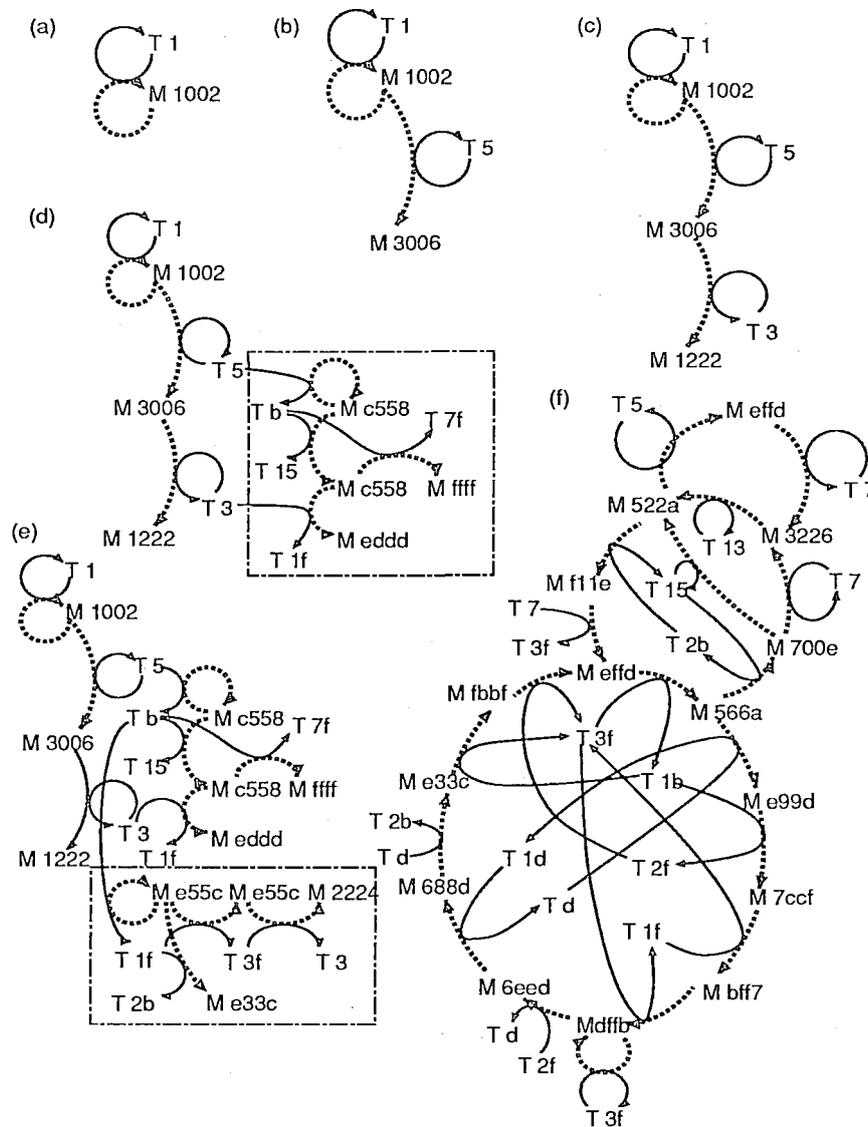


図2: 最小限度の自己複製ループから複雑なネットワークへの進化。a) 外部ノイズが低い時に現れる1対のマシン M_{1002} とテープ T_1 。このネットa) はつぎにマシン M_{3006} に搾取され、次に M_{1222} に搾取され(c)のネットとなる。次に出現するネットワーク(枠で囲った)はネットc)に寄生するネットで T_5 と T_3 をネットc)に頼って構造を維持している。さらにこの寄生ネットに寄生する超寄生ネットがe)に示してある。外部ノイズを切ったあとのネットワークに埋め込まれた自己触媒ループが図f)に示してある。ここにふたつのループはEigen-Shuster型で残りのふたつはテープが局所的に複製されない2重ループ型であることがわかる。

ネット、さらにそれに寄生する超寄生ループができてきて、そののちに自給自足を全体で行なうネットワークが出現する。

2. 外来性の原因で生じる複製の不正確さが、安定な自己複製ネットワークを進化させる。特に個々のテープがどのように複製されるかをみてやると、違ったテープにつねに書き換えられつつ、他からつくられるので存在しつづける「転写系のテープ (RNA もどき)」と、同じテープが生産される「複製系のテープ (DNA もどき)」に分化することがわかる。

外部ノイズが低い時には、複製系のテープがほとんどだが、外部ノイズが高い時には転写系のテープが出現する。つまり RNA のような転写系の反応はパラサイトとして後から宿主である DNA のような複製系にくっついたとみなすことができる。

Eigen と Shuster のハイパーサイクルが複製系のテープのうえでの反応を考えているのに対し、ここでは転写系の反応の進化も扱っていることになる。

3. 突然変異には多分、外来性のものと内因性のものがある、それは相互に関係しあっている。この研究でみるネットワークの進化は、外来性のノイズでつくられる反応の経路を決定論的なマシンによる経路におきかえることで「模倣」したから、外来性のノイズを切ったあとも安定に存在できたとみることもできる。「模倣」できたあとは高い非自己複製性を保ちつつ、マシンの数の振動もゆるやかにする。つまり力学的な安定性を獲得している。これは、以前の研究で、高い突然変異を安定に保つ状態は、低い突然変異のもとでいる状態に比べて安定性を獲得するホメオカオス状態と対照してかんがえることができる。

Acknowledgement この研究は橋本敬さんとの共同研究です。

参考文献

- [1] M.Eigen and P.Schuster, *Hypercycle*(Springer-Verlag, 1979).
- [2] See e.g., D.J.Farmer, S.S. Kauffman, and N.H.Packard, "Autocatalytic Replication of Polymers" *Physica D* 22(1986)50.
- [3] P.W.Anderson, "Suggested Model for Prebiotic Evolution: The Use of Chaos", *Proc.Natl.Acad.Sci.*80(1983) 3386.
- [4] W.Fontana, "Algorithmic Chemistry" pp.159 in *Artificial Life 2*(eds. C.Langton et al. Addison Wisley 1990).

見かけの複雑さの中の真実： ある DNA 鑑定をめぐる

柳川 堯 *

1 序

DNA パラダイムでは、ヒトの DNA は個人によって完全に相異するとする。DNA 鑑定は、このパラダイムを前提として血液や精液等の体液や毛根の細胞片等から DNA を抽出して個人識別を行う。鑑定法の開発者 Jeffereys, A.(1985) は、その論文の中で DNA 鑑定の個人識別力を 3×10^{-10} と評価している。彼の方法は、日本でもいち早く注目され、新しい技術の開発や改良が重ねられて各地の県警レベルで実際の事件に供され始めている。新聞や TV 等のマスコミによればその個人識別力は「血液型鑑定と併用することで百万分の 1 程度」であるという。

個人識別力が「百万分の 1」であるとは、「犯行現場から採集された DNA が被告のものでない確率は百万分の 1」を意味すると理解されている。この理解が新聞や TV 等のマスメディアによって流布され、また裁判官、検事、弁護士等法曹界の人々もそのように理解しており、裁判に大きな影響を与えている。この理解は正しいのであろうか。本小論では、個人識別力「百万分の 1」が何を意味するのかについて考察する。さらに具体例として興掛訴訟での三澤鑑定書を考察することによって、DNA 鑑定は実際に信頼できないものもあることを指摘する。最後に、より合理的な個人識別の方法について言及する。

2 Match-Binning 法

DNA 鑑定は二つの仮説

H_0 : the crime sample is from the suspect

H_1 : the crime sample is from the other person

のどちらかをデータに基づいて決定する。ここではデータとして、電気泳動法を用いて測定される父方と母方から由来する二つの DNA の fragment length を考える、つまりデータは

(x_1, x_2) : fragment length of the suspect

(y_1, y_2) : fragment length of the crime

である。一般性を失うことなく $x_1 \leq x_2$ $y_1 \leq y_2$ としておく⁽¹⁾。

現行の鑑定では、仮説 H_0 と H_1 の決定は、Match-Binning 法とよばれるつぎのような考え方でおこなわれている。

*九大数理

(1) $x_1 \neq y_1$, または $x_2 \neq y_2 \implies H_1$ と決定

(2) $x_1 = y_1$, かつ $x_2 = y_2 \implies H_0$ と決定する。しかし、偶然 the other person の fragment length が (y_1, y_2) と一致する可能性がある。そこでこの可能性を確率的に評価する目的で、まづ

(i) 第3者、即ち日本人集団の fragment length のデータベースを作成し、fragment length の分布を調べる。つぎに

(ii) このデータベースからランダムに一人を抽出したとき、抽出された人の fragment length (Z_1, Z_2) が fragment length of the crime (y_1, y_2) と一致する確率を計算する、即ち関係式

第3者の fragment length が偶然 (y_1, y_2) と一致する確率

$$= 2P[Z_1 = y_1, Z_2 = y_2 | H_1]^{(2)}$$

$$= 2P[Z_1 = y_1 | H_1]P[Z_2 = y_2 | H_1]^{(3)}$$

から求める。DNA 鑑定法の「個人識別力」とはこの確率のことである。

注1) 短いのと長いののどちらが父方に由来するかは分からない。

注2) 条件 $y_1 \leq y_2$ より確率は2倍されなければならない。

注3) Hardy-Wienberg を仮定する。この仮定より Z_1 と Z_2 の独立性が導かれる。確率 $P[Z_1 = y_1 | H_1]$ 及び $P[Z_2 = y_2 | H_1]$ の値はデータベースから求める。例えば三澤鑑定書では $y_1=262, y_2=301$ で $P[Z_1 = 262 | H_1] = 0.0385$, $P[Z_2 = 301 | H_1] = 0.0231$ と推定されている。なお三澤鑑定書では注2で述べた2倍が脱落しており

$$\text{個人識別力} = 0.0385 \times 0.0231 = 8.8 \times 10^{-4}$$

とされている。

3 Match-Binning 法に対する批判

3.1 個人識別力は意味をなさない

前節で見たように DNA 鑑定の個人識別力とされているのは、データベースからランダムに抽出した一人の人の fragment length が crime sample の fragment length と一致する確率のことである。三澤鑑定ではこの確率を上記のように 8.8×10^{-4} と見積もっている。かくして三澤鑑定では「crime sample が第三者のものである確率は極めて微小である。よって、この crime sample は suspect のもの以外ではありえない」と推論しているが、この確率は、正しい推論の根拠になりえない。なぜなら、

(i) 抽出した一人の人の fragment length が crime sample 以外の fragment length と一致する確率も 10^{-4} のオーダーでありえるからである。つまり話しは 10^{-4} のオーダーの世界の中の話であって、この世界の中で 8.8×10^{-4} が果して微小であるかどうかというのは別問題である。このことを理解するためのポイントは「測定誤差」である。具体的に例に基づいて考えよう。

(ii) 「身長 172cm」という情報に対して「身長 172cm、体重 65kg、男性、左利き、眼鏡着用」という情報は一見して個人識別力が高いように思われる。上記のような評価式を適用して確率的に評価すればこの情報の個人識別力は 10^{-4} のオーダーくらいでありえる。しかしながら、その中の「左利き」が決定的に間違った情報ならば、個人識別は決定的に間違ってしまう。このとき「身長 172cm」という情報の方が「身長 172cm、体重 65kg、男性、左利き、眼鏡着用」という情報よりもむしろ高い個人識別力をもつことは自明である。これは極端な例であるが、「左利き」が約7割の信頼度しかおけな

いような場合はよくある。このとき、「身長 172cm、体重 65kg、男性、左利き、眼鏡着用」という情報に基づく個人識別は決定的に間違えることはないが、約 3 割程度の間違いをもたらす。にもかかわらず上記の評価式で個人識別力を求めるとこの情報の個人識別力は 10^{-4} のオーダーでありえる。(4)

(iii) つまりこの鑑定には「百万分の一」の個人識別力があるといってもそれだけのことで、この確率を「crime sample が suspect のそれと一致する蓋然性が高い」という推論の根拠とするには難がある。「左利きの信頼度約 7 割」というような測定誤差を考慮にいたした蓋然性推論をその根拠に置き換えるべきである。

注 4) 表がでる確率が $1/2$ (つまり単独では識別力をもたない) であるコイン投げを 18 回ほど組み合わせる (つまり 18 回続けて投げる) と、ここでいう個人識別力 $= 0.5 \times 0.5 \times \dots \times 0.5$ と計算され、この値はほぼ百万分の一のオーダーとなる。しかしながら、このような鑑定はまったく識別力をもたないことは自明である。

3.2 測定誤差の無視

電気泳動法による fragment length の測定は、fragment length(bp) が既知のマーカを試料に加えて電圧をかけ、100bp (或いは 200bp) からのマーカの移動距離 (mm) を測定し、移動距離と fragment length(bp) の関係を示す基準線を求め、この基準線を利用して試料の移動距離 (mm) からその fragment length(bp) を逆算する。移動距離の測定は、相当大きな誤差を伴う。米国では、このことがよく認識され fragment length の一致は適当な幅をつけて評価されている、即ちあらかじめ与えた定数 δ_1 と δ_2 に対して $|x_1 - y_1| > \delta_1$ または $|x_2 - y_2| > \delta_2 \implies H_1$ と決定される。日本では、誤差が実際にあるにもかかわらず、これを無視している。誤差は以上の測定誤差のほか、一回の電気誘導では、8 乃至 10 本の fragment しか同一ゲル上でとりあつかえないという制約があって、多数の fragment を測定してデータベースを作成するには、相異なるいくつものゲル上で実験や測定を行わなければならないが、このとき微妙な測定環境の差からも誤差が生じる。言い替えれば求められる基準線にかなり大きなバラツキがみられる。三澤鑑定に基づいてこれらの誤差を試算すると、fragment length (bp) は 2bp や 4bp 程度でまとめても意味をなさない、即ち三澤鑑定では、二つの fragment length が相違してもそれが 10bp 程度以下なら真の差異のためではなく誤差のための差異にすぎない可能性があることが推察された。

これらの測定誤差は、crime sample および suspect sample の測定に対しても当然生じていると考えなければならない。実際、三澤鑑定に使用された原資料では、次のようなデータが与えられている。

1. (被告の新鮮血)

短バンド	長バンド
119mm : 259.621bp	136mm : 297.523bp
120mm : 261.658bp	137mm : 300.000bp
121mm : 263.716bp	138mm : 302.509bp

2. (16 の 1,10,1 の毛髪資料)

短バンド	長バンド
119mm : 259.621bp	136.5mm : 298.757bp
119.5mm : 260.637bp	137mm : 300.000bp
120mm : 261.658bp	137.5mm : 301.251bp

測定にゆらぎがあるため幅をつけて吟味しているが、どうしたことか鑑定書では、これを乱暴にもエイヤッ!とまとめて $(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (262, 301)$ としている。誤差を考慮すると、 $(x_1, x_2) = (260, 303) : (y_1, y_2) = (262, 299)$ である場合も完全には否定できない。前項でも指摘したように、測定誤差を確率的につかまえて、このような可能性をも考慮に入れて蓋然性の推論を行わない限り、科学的な個人識別は達成できない。

3.3 データベースの信頼性

「日本人の fragment length のデータベース」を作成するとして三澤鑑定では血縁関係を持たない 65 人の人が抽出され fragment length が測定された。抽出の仕方の詳細は不明であるが、そのデータベースの fragment length の分布は、同一の方法 (ACTP 2) で大分医科大グループが作成した fragment length の分布と有意に相違する (カイ二乗検定の p 値 < 0.001)。このことから明らかなように分布の地域差、測定の系統誤差などに十分な配慮をおこなっておかなければ信頼度の高いデータベースはえられない。

4 妥当な一つの方法

前節で指摘したように、本来本質的な測定誤差があるにもかかわらず、これを無視するのは蓋然性の推論を行う上で致命的な誤りである。本節では、妥当な方法として、誤差を確率分布としてとらえ、尤度の概念を利用して蓋然性の推論を行う方法を提示する。前節までと同様に

H_0 : the crime sample is from the suspect

H_1 : the crime sample is from the other person

としておく。

データは、fragment length of the suspect (x), fragment length of the crime (y)、およびデータベースとして収集された測定値 ($z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$) である。このデータに基づいて H_0 か H_1 を判定するには、このデータが得られたという条件の下で H_0 である確率と、 H_1 である確率を比較すればよい、つまり比 $P(H_0|x, y, z)/P(H_1|x, y, z)$ の大きさを評価すればよい。この比が大きければおおきいほど "the crime sample is from the suspect" である蓋然性が大きい。ところで次の等式が成立する：

$$\frac{P(H_0|x, y, z)}{P(H_1|x, y, z)} = L \times \frac{P(H_0|z)}{P(H_1|z)}$$

ここに

$$L = \frac{P(x, y|H_0, z)}{P(x, y|H_1, z)}$$

は数理統計学で尤度比とよばれる量である。上の等式から明らかなように尤度比 L の値が大きければおおいほど 'the crime sample is from the suspect' である蓋然性が大きい。

以下では尤度比 L を求めるための数学モデルについて考察する。いま、測定誤差をモデル化するため観測値 x, y に対応する確率変数を

$$X = (X_1, X_2) \quad (\text{fragment length of the suspect})$$

$$Y = (Y_1, Y_2) \quad (\text{fragment length of the crime})$$

として

$$X_1 = \mu_1 + \epsilon_1 \quad X_2 = \mu_1 + \epsilon_2$$

$$Y_1 = \mu_2 + \epsilon'_1 \quad Y_2 = \mu_2 + \epsilon'_2$$

とおく。ここに $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon'_1, \epsilon'_2$ は観測誤差を表す互いに独立な確率変数で同一分布 $F(x/\sigma_0)$ に従うと仮定する。(5)

このモデルでは H_0, H_1 はそれぞれ

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

と表される。ところで上の解説で登場した確率 $P(H_0|x, y, z)$ が妥当性をもつためには H_0 (および H_1) は確率事象でなければいけない。そのため μ_1, μ_2 は、先験分布 $G((\mu - \theta)/\sigma)$ に従う互いに独立な確率変数であると仮定する。この先験分布に関する推定は経験的ベイズ法を適用して z に基づいて行うことにする。問題は分布関数 F の尺度母数 σ_0 の推定である。これは同一資料を繰り返し測定しなければ推定できない。(6)。ここでは、仮に既知としておく。

さて、上述の枠組みでは H_0 の下では $\mu = \mu_1 = \mu_2$ は分布 $G((\mu - \theta)/\sigma)$ に従うので、データ x と y が得られたときの尤度は

$$L_1 = \frac{1}{\sigma_0^4} \int f\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma_0}\right) f\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma_0}\right) f\left(\frac{y_1 - \mu}{\sigma_0}\right) f\left(\frac{y_2 - \mu}{\sigma_0}\right) dG\left(\frac{\mu - \theta}{\sigma}\right)$$

また、 H_1 の下では $\mu_1, \mu_2 (\mu_1 \neq \mu_2)$ は互いに独立に分布 $G((\mu - \theta)/\sigma)$ に従うので、データ x と y が得られたときの尤度は

$$L_2 = \frac{1}{\sigma_0^4} \int f\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_0}\right) f\left(\frac{x_2 - \mu_1}{\sigma_0}\right) dG\left(\frac{\mu_1 - \theta}{\sigma_0}\right) \int f\left(\frac{y_1 - \mu_2}{\sigma_0}\right) f\left(\frac{y_2 - \mu_2}{\sigma_0}\right) dG\left(\frac{\mu_2 - \theta}{\sigma}\right)$$

で与えられる。これらから尤度比 $L = L_1/L_2$ が求まる。この式から実際に尤度比 L の値を計算するには測定を繰り返して得られるデータに基づいて分布関数 F に関する知見を得ておく必要がある。尤も簡単な方法はデータを適当に変換して近似的に正規分布に従うとして正規分布の理論を適用すればよい。

注 5) 観測誤差 ϵ_1 と ϵ_2 は同一ゲル等を通じて混入する誤差であるから実際には相関があると推察されるが、相関を調べる計量的データが入手できないので作業仮説として独立性を仮定した。(6) (ϵ_1, ϵ_2) と $(\epsilon'_1, \epsilon'_2)$ の独立性はさほど問題にならないと思う。

注 6) 三澤鑑定では、前節で与えたデータが、測定値として求められた被告人の唯一のデータである。せめて被告人の毛髪を 10 本ほど繰り返し測定して測定値のゆらぎに関する情報を得ておくべきであった。

生物における情報処理の特長はその柔軟性とリアルタイム性にある。柔軟性とは生物が予測不可能に変化する環境との間に目的を果たすような適切な関係的秩序を即時的かつ自律的に作り出すことである。歩行の場合は目的である速度、方向等を制御しながら変化する環境下で歩行パターンをリアルタイムで自律的に生成する。本研究では環境が予測不可能に変化するだけでなく、システム自身に予測できない事故や、故障が生じたときに補償作用により、制御する情報を自ら作り出すシステムの構築を行った。

時々刻々変化する環境の変化に対してリアルタイムに対応できる運動パターンの生成や、認識システムはまだ可能になっていない。これは変化に対してアルゴリズムミックに対応する従来の方法ではリアルタイム制御が出来ないことを意味している。つまり、これまでの方法はさまざまな状況を想定して、軌道計算をし、学習をすることによって歩行パターンを作り出すという中央制御方式である。このやり方は学習のために用意する状況が増えれば増えるほど必要なメモリーが爆発的に増大する。このことは検索問題一つを取り上げてもしリアルタイムの制御が困難になるし、そもそも予測出来ない変化には原理的に対応出来ない。

我々は変化に応じて情報を生成出来るシステムでなければ、予測不可能な環境変化に対応できる運動制御システムは構築できないという立場から、新しい運動制御システムを構成した。そのために次の3つの段階が必要であることを指摘した。

- 1) システム構成の要素を何にとるか。
- 2) この要素からなるシステムの構造をどのようにして決めるのか。
- 3) システムが情報を生成するルール何か。

要素に関しては、環境と運動システムが調和的な関係を作るという立場から、神経細胞の機能を数学的に表現でき、しかもよりシンプルな方程式が必要となる。神経細胞の興奮の定量的記述に成功した例として Hodgkin - Huxley 方程式 (H-H 方程式) がよく知られている。この研究は神経細胞の軸索の興奮の動的性質を分子的レベルから説明出来たと言う意味で高い評価を得ている。この方程式は、しかしながら、4次の連立方程式であり、これをシステムの要素として用いるには複雑すぎる。そこで H-H 方程式の単純形として用いられている Fitzhugh - Nagumo、van der Pole、Mathieu、Duffing 等の振動子も振動数変化などの点で、H-H 方程式ほど柔軟でないので、神経細胞を記述する方程式としては適当ではない。そこで我々はこれらの条件を満足する新しい非線形方程式次の非線形振動子が適当であることを発見した。

$$d^2X/dt^2 + (a_1X^2 + b_1X + c_1) dX/dt + (a_2X^2 + b_2X + c_2) X + d = 0$$

これらの振動子からなる神経回路網の構造と、それに支配される筋肉の構造が重

要である。昆虫の中樞神経系は左右対照な梯状の神経節よりなっている。このうち、肢の動きを制御する神経節はそれぞれ、前肢を制御する前胸神経節、中肢を制御する中胸神経節、後肢を制御する後胸神経節の3つからなっており、各々一対あり、互いに連絡している。さらにこれらの上位の神経節である脳神経節と連絡している。肢を動かす筋肉の状態が感覚神経を介して得られる情報は筋肉が発生する力と伸張状態（位置）及び接触に関する情報である。

自律分散型システムで最も重要なことは「システムが情報を生成するルール何か？」ということである。つまり、重要なことは振舞いを決める関係生成ルールである。運動を支配する神経系の働きを理想化して考えると、各肢を動かす神経系は個体全体の要求、すなわちどの方向にどの位の速度で移動するかといったことを満足しながら、しかも変化する環境のもとで最もエネルギー変換効率の良い動きを生み出すことである。よく知られているように筋肉にはエネルギー効率が最も高い力と速度が存在し、それ以下でも以上でも効率が悪くなる。目的速度を実現するという条件の下で、各筋肉が最適効率で働くように、協調的あるいは競合的に相互作用することによって制御情報を生成するのが神経回路網の機能である。即ち、各肢が目的速度を達成するように、これを支配する神経回路の活動を個々の足にかかる負荷を回路内部の結合定数にフィードバックして、負荷を全体に分配させる様に変化させる様に調節することである。この関係生成ルールを我々は「最大多数の最少不満足」則と呼ぶ。なお、ここでは筋肉は簡単のために各肢を動かすために一対の拮抗筋（関節を伸ばすextensorと関節を縮めるflexor）だけを考えて。

歩行パターンの自律生成の特徴の一つに、歩行速度に依存してそのパターンが変化することが実験的に知られている。このモデルでも図1に示すように歩行パターンは速度を上げていったときにGait 2からGait 1に変化する。中肢と前あるいは中肢と後肢は逆位相で動く。Gait 1とGait 2の違いは前肢と後肢の位相関係で

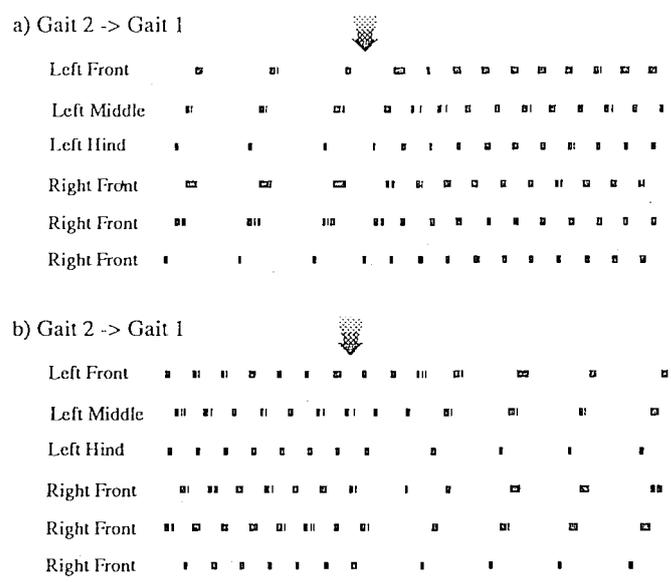


図1. Walking patterns and their phase transitions: walking velocity is gradually increased (a), and walking velocity is gradually decreased (b). In both cases, the walking pattern changes at the arrowed point

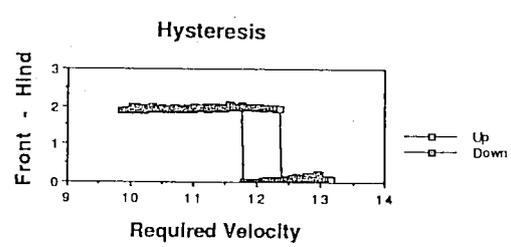


図2 Time difference between front and hind legs when walking velocity gradually increases or decreases. Filled squares and open circles represent time differences at increasing and decreasing velocities, respectively. This hysteretic phenomenon suggests that pattern organization of this model system occurs due to synergy of the subsystems

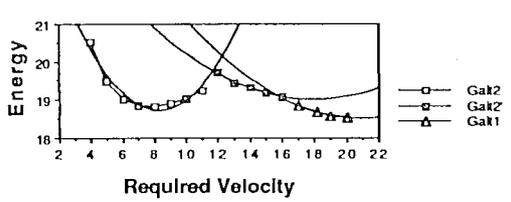


図3 Energy consumption of muscle contraction using muscle properties. The open squares, open circles, and filled triangles represent gait 2, gait 2', and gait 1, respectively. The parabolic curves are fitted with simulation data by the least squares method. The curves intersect at the phase transition point, and the lower energy pattern is realized at a certain walking velocity.

ある。このモデルでは実験とよく合う結果が得られるし、摂動にも非常に強い安定したパターンである。この変化は速度を上げていった時と下げていった時ではパターン変化の起きる速度が異なる、一種のヒステリシスを示す（図2）。これらの変化が競合と協調によって起きる相転移現象であることを示している。さらにエネルギー変換効率を計算してみると単位距離当りの消費エネルギーは殆ど変わらない（図3）。これは馬の歩行実験で得られている実験結果とよく合う。

次にこのシステムの普遍的な性質を研究する目的で、システムが歩行速度だけではなく、システムにかかる負荷が変化する場合や、突然足がもぎ取られるという重大な故障が起きたときに、学習無しにその状況でも適切な歩行パターンを生成出来るかどうかを研究した。つまり生物の持つ補償作用が含まれているかどうかである。

1) Load Effect: 進行方向に平行な加重を与えた場合、その加重の増加に伴って歩行パターンの間の相転移点が低速度側にシフトするのが観察される。加重が増加するにしたがって、肢相互の位相関係の揺らぎも又増大したが、生成するパターンには変化がみられなかった。この結果は実験事実に対応している。

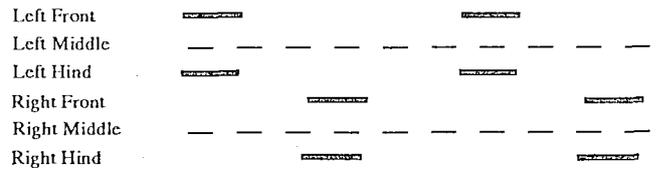
2) Amputation: 対応する肢の力の寄与及び力のFeedbackのみを無効にする tibial amputee (下腿部切除) と、位置の制御及び位置のFeedbackまで無効にする femoral amputee (上腿部切除) の二種類についてシミュレーションを試みた。tibial amputeeでは正常時の同様のパターンを生成したが、その相転移点は低速度側にシフトするのが観察された。また femoral amputeeでは、肢の位置に関するFeedbackによるローカルな拘束条件が変化するため、位相関係の組替えが起こり、主として2種類のパターンに収束し、4足動物と同じ様な歩き方を作り出すことが出来る。これらの現象は共に昆虫を用いた実験に非常によく対応している（図4）。ここで分かるように、これまで歩行パターンの研究がキネマティックな方法論にとどまっていたのとは対照的に、負荷や故障に即時に対応できるダイナミックなモデルになっているのが特長である。

このモデルが成功した理由は、個々の足の情報は各足が速度依存的に変化するローカルな評価関数を満たすように、時定数が小さいローカルなフィードバックと全部の足との関係を取る時定数の大きなグローバルなフィードバックが競合、協調することで、全体と個がつじつまの合うような制御情報が作れることによる。

文献

1. Kimura S., Yano M. & Shimizu H. A self-organizing model of walking patterns of insects. Biol. Cybern. 69 : 183-193(1993)
2. Kimura S., Yano M. & Shimizu H. A self-Organizing model of Walking Patterns of Insect II. The loading effect and leg amputation (1994) Biol. Cybernetics vol. 70, 505-512

Pattern A



Pattern B

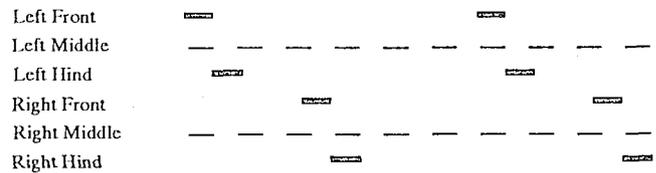


図4 The walking patterns when the middle legs on both sides are femorally amputated. Pattern A is observed at a higher velocity than pattern B

多成分流体系の非平衡熱力学

東京工業大学応用物理

北原和夫

系多成分流体系の非平衡熱力学の定式化を行い、拡散流の緩和現象も記述できるように拡張した。以下にその概要を述べる。

1 平衡熱力学から局所的記述へ

熱力学の特徴は、少数の変数によって巨視的な系の状態が記述されることである。巨視系のエネルギー U (内部エネルギー)、体積 V 、質量 M_k ($k = 1, \dots, n$, ここで、 n は成分の数) を与えると、エントロピーが決まる。

$$S = S(U, V, M_1, \dots, M_n) \quad (1)$$

エントロピーも示量変数であるとする、熱力学関係式 $\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T}$ 、 $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P}{T}$ 、 $\frac{\partial S}{\partial M_k} = -\frac{\mu_k}{T}$ より、

$$TS = U + PV - \sum_{k=1}^n \mu_k M_k \quad (2)$$

が得られる。さらに、この両辺を微分することにより、

$$SdT = VdP - \sum_{k=1}^n M_k d\mu_k \quad (3)$$

が得られる。全体の質量を $M = \sum_{k=1}^n M_k$ として、上の式の両辺を M で割ると、全ての量が単位質量当たりの量で表される。すなわち、 $s = S/M$ は単位質量当たりのエントロピー、 $c_k = M_k/M$ は質量濃度、 $v = V/M$ は単位質量当たりの体積、すなわち密度 $\rho = M/V$ の逆数である。そうすると、

$$sdT = vdP - \sum_{k=1}^n c_k d\mu_k \quad (4)$$

となる。このように単位質量当たりの量で熱力学を表現しておく、気体、液体のような連続体を扱うときに便利である。というのは、連続体においては、それぞれの物理量の絶対値ではなく、単位質量当たりの物理量が分布している系と見なすことができるからである。同様にして、

$$Ts = u + vP - \sum_{k=1}^n \mu_k c_k \quad (5)$$

と表される。ここで、 $u = U/M$ は単位質量当たりの内部エネルギーである。

2 非平衡熱力学の基本的考え方

熱力学第二法則において、孤立系の自発的変化はエントロピー増大を伴う、というとき、変化の前後のそれぞれの平衡状態のエントロピーを比較しているのである。

ある平衡状態から新しい平衡状態に到るまでの過渡的現象をどのように記述したらよいのであろうか。系全体は平衡状態には到っていないが、小さな部分を見ると、そこでは温度、圧力などの熱力学的な量が定義できる、と考えられる。実際、日常感覚として、同じ物体の内部に熱い部分と冷たい部分があり、熱いところから冷たいところに向かって熱伝導が起こる。

このように、系を部分系に分けて、各部分に熱力学的量を定義して、そこでの変化は準静的過程であると見なすことにより、熱力学的量の過渡現象を記述することができる。

具体的に言うと、前節で求めたギブス・デュエムの式

$$\left\{ \begin{array}{l} Ts = u + vP - \sum_{k=1}^n \mu_k c_k \\ sdT = vdP - \sum_{k=1}^n c_k d\mu_k \end{array} \right. \quad (6)$$

は、部分系の熱力学的量の間関係と、その変化分に対して成り立つものと考えてのである。これを「局所平衡の仮定」と呼ぶ。

非平衡系として多成分からなる流体を考えることにする。流体の内部では、物質の流れが存在する。このとき部分系は物質の流れに起因する運動エネルギーを持つ。この運動エネルギーは流体の粘性によって内部エネルギーに変換され、流体全体としては、次第に静止してゆく傾向をもつ。このような粘性現象も熱力学の枠組みで記述するように、上のギブス・デュエム関係式を拡張する必要がある。

まず、流体中の各成分は、それぞれ流速 \mathbf{v}_k で並進運動をしている。この並進運動の運動エネルギーがあり、さらに、外場の中にあれば、ポテンシャルエネルギーがある。それ以外の、分子の内部運動のエネルギーが内部エネルギーである。これらを全て足し合わせた全エネルギーが保存量となる。

気体分子運動論の観点からすると、各成分の速度 \mathbf{v}_k は成分 k の分子の平均速度であり、各分子の速度はこの平均速度の回りに分布している。この速度のばらつきが内部エネルギーである。

いま、簡単化のために、外場は無いものとする。単位質量当たりの並進運動の運動エネルギーは、各成分の運動エネルギーを足し合わせて $\sum_{k=1}^n c_k \frac{|\mathbf{v}_k|^2}{2}$ となる。したがって、単位質量当たりの全エネルギー e は

$$e = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{2} |\mathbf{v}_k|^2 + u \quad (7)$$

となる。流体としては、各成分の流速の平均で運動している。その速度を

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \quad (8)$$

と表す。これを「中心速度 (barycentric velocity)」と呼ぶことがある。

各成分の速度と中心速度との差

$$\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{v}_k - \mathbf{v} \quad (9)$$

を「拡散速度 (diffusion velocity)」と呼ぶ。そうすると、単位質量当たりの全エネルギーは

$$e = u + \sum_{k=1}^n c_k \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (10)$$

と表される。右辺の第二項は「拡散運動エネルギー (diffusional kinetic energy)」と呼ばれ、全体の流れ \mathbf{v} に対する各成分の相対速度 $\boldsymbol{\xi}_k$ による運動エネルギーである。

これでギブス・デュエム関係式を書き換えると、

$$Ts = e - \sum_{k=1}^n c_k \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + vP - \sum_{k=1}^n c_k \mu_k \quad (11)$$

となる。両辺に密度 $\rho = v^{-1}$ を掛けると、

$$T\rho s = \rho e - \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} - \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + P - \sum_{k=1}^n \rho_k \mu_k \quad (12)$$

となる。ここで、 $\rho_k = c_k \rho$ を用いた。 ρs は単位体積当たりのエントロピー、すなわち、エントロピー密度である。同様に、 ρe は全エネルギーの密度である。両辺を微分すると、

$$\begin{aligned} Td(\rho s) + \rho sdT &= d(\rho e) - \sum_{k=1}^n \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} d\rho_k - \sum_{k=1}^n \rho_k \boldsymbol{\xi}_k \cdot d\boldsymbol{\xi}_k \\ &\quad - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} d\rho - \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + dP - \sum_{k=1}^n \mu_k d\rho_k - \sum_{k=1}^n \rho_k d\mu_k \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、ギブス・デュエムの式 $sdT = v dP - \sum_{k=1}^n c_k d\mu_k$ に密度 ρ を掛けたもの

$$\rho sdT = dP - \sum_{k=1}^n \rho_k d\mu_k \quad (14)$$

を使って dP を消去すると、

$$d(\rho s) = \frac{1}{T} d(\rho e) - \left(\frac{\mathbf{v}}{T} \right) \cdot d(\rho \mathbf{v}) - \sum_{k=1}^n \frac{\boldsymbol{\xi}_k}{T} \cdot d\mathbf{J}_k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) d\rho_k \quad (15)$$

が得られる。注意すべきは、エントロピー密度の微分が、エネルギー密度 ρe 、運動量密度 $\rho \mathbf{v}$ 、質量密度 ρ_k の微分で表されていることである。これらは、保存量である物理量の密度である。保存量とは、生成消滅しない物理量である。さらに、保存量の密度だけでなく、拡散流という非保存量 \mathbf{J}_k の微分も含んでいる。

さらに、拡散流の定義から

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = 0 \quad (16)$$

であるから、 $n-1$ 個のみが独立である。上の式は独立変数だけを用いて

$$d(\rho s) = \frac{1}{T} d(\rho e) - \left(\frac{\mathbf{v}}{T} \right) \cdot d(\rho \mathbf{v}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi_k - \xi_n}{T} \cdot d\mathbf{J}_k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{|\xi_k|^2}{2} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) d\rho_k \quad (17)$$

と表される。一般にエントロピー密度 ρs が示量変数の密度 a_i の関数であるとき、エントロピー密度の微分を

$$ds = \sum_i F_i da_i \quad (18)$$

と表すと、その係数 F_i を「示強パラメータ (intensive parameter)」と呼ぶ。

[熱力学的力]

エネルギー、運動量、質量などの保存量が輸送される現象をどのように考えたらよいだろうか。

例えば、外界との間で熱や物質の出入りのない媒質の中に溶質分子が分布しているとする。はじめに、分布が一様でなければ、時間が経つにつれて拡散によって広がって一様な分布になってゆく。これは、媒質を小さな部分に分けてみると、それぞれのところで溶質の濃度が変化して行く過程である。

ここで、もし、はじめと終わりで系全体のエントロピーに差がなければ、自発的な濃度変化は起こらない。エントロピーが増大するならば、自発的な変化として濃度変化が起こる。

いま、局所的な部分系で上のようにエントロピー密度が定義されていて、ある保存量の密度 a の変化に対して、 $d(\rho s) = F da$ と表される、とする。 F は示強パラメータである。

隣合う部分系 A、B を考え、それぞれの体積を V とする。それぞれの部分系のエントロピー $S = V\rho s$ は保存量 $X = Va$ の関数である。A から B に保存量が $\Delta X = V\Delta a$ だけ移動したとする。この変化の前後の局所平衡状態を比較すると、エントロピーの増分は

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_A(X_A - \Delta X) + S_B(X_B + \Delta X) - S_A(X_A) + S_B(X_B) \\ &= \left(-\frac{\partial S_A}{\partial X_A} + \frac{\partial S_B}{\partial X_B} \right) \Delta X = (-F_A + F_B) \Delta X \end{aligned} \quad (19)$$

となる。よって、第二法則から、 ΔX の移動が起こるためには、対応する示強パラメータ F について、 $F_B > F_A$ でなければならない。すなわち、示強パラメータの大きい部分系の方に向かって ΔX の移動が起こる。

このことから、保存量の輸送を引き起こすのは、示強パラメータの空間勾配であることが分かる。その意味で、示強パラメータの空間勾配は、輸送に対する熱力学的力と呼ばれる。

非保存量の場合は、示強パラメータ F が正であれば、変化 $\Delta a > 0$ はエントロピー増大を起こすので、不可逆過程として進行する。よって、非保存量については、示強パラメータそのものが熱力学的力となる。

以上を表にまとめると、以下のようになる。

示量変数	密度量	示強パラメータ	熱力学的力
エネルギー	ρe	$\frac{1}{T}$	$\nabla \frac{1}{T}$
運動量	$\rho \mathbf{v}$	$-\frac{\mathbf{v}}{T}$	$-\nabla \frac{\mathbf{v}}{T}$
質量	ρ_k	$-\frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{ \xi_k ^2}{2} - \frac{ \mathbf{v} ^2}{2} \right)$	$-\nabla \frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{ \xi_k ^2}{2} - \frac{ \mathbf{v} ^2}{2} \right)$
拡散流	\mathbf{J}_k	$-\frac{\xi_k - \xi_n}{T}$	$-\frac{\xi_k - \xi_n}{T}$

3 流体方程式

上に示した微小変化に対する式を、実際の時間変化に対するものと解釈する。エントロピー密度 ρs 、エネルギー密度 ρe 、運動量密度 $\rho \mathbf{v}$ 、質量密度 ρ_k 、拡散流 \mathbf{J}_k の関数である。微小時間におけるこれらの物理量の変化を時間についての偏微分と解釈してよいかというそうではない。流体が流れていることにより、これらの物理量によって状態が記述される質量要素自体が動いている。だから、空間を固定して時間だけについて偏微分するだけでは不十分である。

いま場所と時間の関数として流体の流れの速度 \mathbf{v} が位置 \mathbf{r} と時間 t の関数として与えられているものとする。流速 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ が与えられているとき、流れに乗って運動する質量要素の位置を時間の関数として $\mathbf{R}(t)$ と表す。この質量要素の速度は現在いる場所における流速と同じであるから、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{R}(t), t) \quad (20)$$

とおける。位置と時間の関数としてある物理量 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ が与えられているとき、流れに沿って動く質量要素において観測される物理量 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{R}(t), t) &= \left(\frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \cdot \nabla \right) \varphi(\mathbf{R}(t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{R}(t), t) \\ &= (\mathbf{v}(\mathbf{R}(t), t) \cdot \nabla) \varphi(\mathbf{R}(t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{R}(t), t) \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (22)$$

をラグランジュ (Lagrange) 微分と呼ぶ。これに対して、通常の時間に関する偏微分 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ をオイラー (Euler) 微分と呼ぶ。密度で表された熱力学的量に対する微分式は非平衡条件下

で物理量の変化を表すものと見なされるが、熱力学関係式における微分 d はラグランジュ微分 $\frac{d\varphi}{dt}$ として解釈すべきものである。つまり、エントロピーの時間変化は

$$\frac{d(\rho s)}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d(\rho e)}{dt} - \frac{\mathbf{v}}{T} \cdot \frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} \right) \frac{d\rho_k}{dt} - \sum_{k=1}^n \frac{\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_n}{T} \frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \quad (23)$$

で与えられる。これを、「局所平衡の仮定」と呼ぶ。

右辺の各保存量密度の時間変化は、「保存則」の形に表される。まず、質量保存則は次のような連続の式で表される。

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \quad (24)$$

ここで $\rho_k \mathbf{v}_k$ は成分 k が単位時間に単位面積を通過する流れの強さを表す。この連続の式は、ある空間部分における密度 ρ_k の増大がその空間部分に流入する物質流 $\rho_k \mathbf{v}_k$ によるということを表す。電磁気学で習うガウスの定理を思い起こせばよい。

物質流 $\rho_k \mathbf{v}_k$ は、中心速度 \mathbf{v} に乗って輸送される部分と拡散流に分けられる。

$$\rho_k \mathbf{v}_k = \rho_k \mathbf{v} + \mathbf{J}_k \quad (25)$$

上の質量保存則において、成分について和をとると、全体としての質量の保存則となる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (26)$$

運動量保存則はナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式として知られている方程式で表される。

まず、運動する質量要素に対する加速度は $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ であるから、単位体積当たりの力は $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ である。力は、流体の内部で相互に及ぼし合う応力である。応力はテンソル量であり、 P_{ij} は $i (= x, y, z)$ に垂直な面を通して及ぼし合う単位面積当たりの力の j 成分である。流体力学の教科書によると、運動方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla : \mathbf{P} \quad (27)$$

と表される。ここで、右辺はテンソルとベクトルの内積を表す。応力テンソル \mathbf{P} は静水圧と粘性応力とからなる。

$$\mathbf{P} = P\mathbf{U} + \mathbf{II} \quad (28)$$

ここで、 P は静水圧、 \mathbf{U} は単位テンソル

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (29)$$

\mathbf{II} は粘性応力テンソルである。粘性応力は速度の空間勾配に比例するが、等方性流体では特に、

$$\Pi_{ij} = -\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v} \right) - \zeta \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v} \quad (30)$$

となる。ここで、 η 、 ζ は粘性係数と呼ばれる。

内部エネルギー密度の変化については、

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{v} + \mathbf{J}_q) = -P \operatorname{div} \mathbf{v} - \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Pi_{ji} \quad (31)$$

という式が成り立つと仮定する。左辺の第二項は内部エネルギーの流れが $\rho u \mathbf{v} + \mathbf{J}_q$ というふうに表示されることを示す。 $\rho u \mathbf{v}$ は流体の流れによって運ばれるエネルギーであり、 \mathbf{J}_q は熱流として流れるエネルギー流である。右辺第一項は体積膨張によって部分系が外に仕事をして内部エネルギーを減少させることを表し、圧力と体積膨張速度との積になっている。右辺第二項は粘性によって生じる加熱である。これをテンソル積の記号を用いて、

$$\sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Pi_{ji} = (\nabla \mathbf{v}) : \mathbf{\Pi} \quad (32)$$

と表すことにする。

上の内部エネルギーの変化に対する方程式と、連続の式、ナビエ・ストークス方程式を組み合わせると、全エネルギーに対する保存則が得られる。

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v} + P \mathbf{v} + \mathbf{J}_e^{irr}) = 0 \quad (33)$$

ここで、 \mathbf{J}_e^{irr} はエネルギー流の不可逆部分であり、

$$\mathbf{J}_e^{irr} = \mathbf{J}_q + \mathbf{v} : \mathbf{\Pi} \quad (34)$$

となる。

4 拡散流に対する方程式

拡散流については、

$$\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} + \mathbf{J}_k \operatorname{div} \mathbf{v} = \left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev} + \left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{irr} \quad (35)$$

とおける。ここで、右辺の $\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev}$ は可逆な拡散流の発生源であり、

$$\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev} = -\rho_k T \left[\nabla \left\{ \frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \frac{|\boldsymbol{\xi}_k|^2}{2} \right) \right\} - \sum_{i=1}^n c_i \nabla \left\{ \frac{1}{T} \left(\mu_i - \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \frac{|\boldsymbol{\xi}_i|^2}{2} \right) \right\} \right] \quad (36)$$

で定義される。また、 $\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{irr}$ は不可逆な拡散流の発生源である。こう書くと、やや唐突のようであるが、以下にこの形が一般的であることを示す。

まず、質量の保存則

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \mathbf{v}_k) = 0 \quad (37)$$

を次のように書き換えてみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \mathbf{v}) &= \left(\frac{d\rho_k}{dt} \right)_{rev} \\ \left(\frac{d\rho_k}{dt} \right)_{rev} &\equiv -\text{div} \mathbf{J}_k \end{aligned} \quad (38)$$

この最後の拡散流は

$$\mathbf{J}_k = \sum_{k'=1}^{n-1} M_{k'k} \frac{\xi_k - \xi_n}{T} = - \sum_{k'=1}^{n-1} M_{k'k} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_{k'}} \quad (39)$$

と表される。ここで、

$$M_{kk'} = \rho_k T (\delta_{kk'} - c'_k) \quad (40)$$

とおいた。ここで現れた行列 $M_{kk'}$ を用いて、

$$\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev} = \sum_{k'=1}^n M_{kk'} \nabla \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_{k'}} \quad (41)$$

と書いてみよう。そうすると、エントロピー密度の微係数と反対称な行列 $M_{kk'}$ によって結ばれているので、 $\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev}$ はエントロピー生成に寄与しないのである。実際、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(\rho s)}{dt} \right)_{rev} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_k} \left(\frac{d\rho_k}{dt} \right)_{rev} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_k} \left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_k} \nabla M_{k'k} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_k} \sum_{k'=1}^n M_{kk'} \nabla \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_{k'}} \\ &= \nabla \left[\sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_k} M_{k'k} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_k} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

となり、系全体として積分するとき、系の境界の積分となり消える。このようなことから、質量の保存則がでるように定義された $M_{kk'}$ を用いて $\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev}$ がエントロピーを生成しない、という条件から $\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev}$ の形が導かれるのである。

平衡近傍では不可逆過程の進行する速度は熱力学的力に比例する、と考えられる。そうすると、拡散流の増加速度に対する現象論的方程式として

$$\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{irr} = \sum_{k'=1}^{n-1} L_{kk'} \left(-\frac{\xi_{k'} - \xi_n}{T} \right) + L_{ke} \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \quad (43)$$

とおける。

[二種混合物]

上で導かれた拡散流に対する方程式が、従来の拡散方程式とどのように関連しているかについて少し触れておく。

簡単のために、中心速度 \mathbf{v} が小さく、また、拡散速度 $\boldsymbol{\xi}$ も小さい場合を考えよう。さらに、温度も一様とする。さらに、混合物は二種の化学成分からなるものとする。そうすると、

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\mathbf{J}_1) = \rho_1 \left(\nabla\mu_1 - \sum_{k'=1}^2 c_{k'} \nabla\mu_{k'} \right) - L_{11} \frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{T} \\ \frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\mathbf{J}_2) = \rho_2 \left(\nabla\mu_2 - \sum_{k'=1}^2 c_{k'} \nabla\mu_{k'} \right) - L_{21} \frac{\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2}{T} \end{cases} \quad (44)$$

拡散流の定義より、 $\sum_{k=1}^2 \mathbf{J}_k = 0$ であるから、 $\sum_{k=1}^2 L_{k1} = 0$ である。すなわち、 $L_{11} + L_{21} = 0$ である。よって、 $L_{11} = -L_{21} = L$ とおくことにしよう。また、

$$c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + c_2 \boldsymbol{\xi}_2 = 0$$

より、

$$\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 = \frac{\mathbf{J}_1}{\rho c_1 c_2}$$

となる。さらに、理想混合物とみなすと、成分 k の流子数濃度を X_k とすると、

$$\mu_k = \frac{k_B T}{m_k} \ln X_k + \mu_k^0$$

とおける。ここで、 m_k は成分 k の一分子の質量である。質量濃度との関係は、

$$X_1 = \frac{c_1 m_2}{c_1 m_2 + c_2 m_1}, \quad X_2 = \frac{c_2 m_1}{c_1 m_2 + c_2 m_1}$$

これより、 $c_1 \nabla\mu_1 + c_2 \nabla\mu_2 = 0$ が導かれる。以上より、

$$\gamma \equiv \frac{L_{11}}{T} \frac{1}{\rho c_1 c_2}$$

とおくと、

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\mathbf{J}_1) = -\rho_1 \nabla\mu_1 - \gamma \mathbf{J}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\mathbf{J}_2) = -\rho_2 \nabla\mu_2 - \gamma \mathbf{J}_2 \end{cases} \quad (45)$$

となる。通常の拡散方程式は、 \mathbf{J}_k がほぼ定常的かつ流速 $\mathbf{v} = 0$ の場合であり、このときには、

$$\mathbf{J}_k = -\frac{\rho_k}{\gamma} \nabla\mu_k \quad (46)$$

となり、拡散流は化学ポテンシャルの空間勾配に比例する。従って、上の方程式は、定常的拡散流に到るまでの過渡現象を記述する方程式である。

5 エントロピー密度の時間変化

上で示した示量変数に対する方程式を局所平衡仮定のエントロピーの変化

$$\frac{d(\rho s)}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\rho e}{dt} - \frac{\mathbf{v}}{T} \cdot \frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\boldsymbol{\xi}_k|^2/2}{T} \frac{d\rho_k}{dt} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_n}{T} \quad (47)$$

に代入する。そうすると、

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho s)}{dt} = & - \left\{ \frac{1}{T} (\rho e) - \frac{\mathbf{v}}{T} \cdot \rho \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_n}{T} \cdot \mathbf{J}_k - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\boldsymbol{\xi}_k|^2/2}{T} \rho_k \right\} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ & - \frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\mathbf{v}}{T} \nabla : \mathbf{P} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_n}{T} \left[\left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev} + \left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{irr} \right] \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\boldsymbol{\xi}_k|^2/2}{T} \nabla \cdot \mathbf{J}_k \end{aligned} \quad (48)$$

初めに、

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_n) \mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k |\mathbf{J}_k|^2 \quad (49)$$

となることに注意する。また、ギブス・デュエムの式から

$$\frac{1}{T} (\rho e) - \frac{\mathbf{v}}{T} \cdot \rho \mathbf{v} - \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k |\boldsymbol{\xi}_k|^2}{T} - \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\boldsymbol{\xi}_k|^2/2}{T} \rho_k = \rho s - \frac{P}{T} \quad (50)$$

である。また、前に調べたように、

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_n}{T} \left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{rev} + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\boldsymbol{\xi}_k|^2/2}{T} \nabla \cdot \mathbf{J}_k \\ & = \nabla \cdot \left[\sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_k} M_{k'k} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_k} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

となる。よって、エントロピー釣り合いの方程式は

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_S = \sigma[S] \quad (52)$$

という式になる。右辺の第一項は物質の流れによって物質と共に運ばれるエントロピー、第二項は拡散流と熱流によって移動するエントロピーである。 $\sigma[S]$ はエントロピー生成速度である。ここでエントロピー流 \mathbf{J}_S は

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_S = & \frac{1}{T} \mathbf{J}_e^{irr} - \frac{1}{T} \mathbf{v} : \mathbf{H} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \left(\mu_k - \frac{v^2}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) \mathbf{J}_k \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^{n-1} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \rho_k} M_{k'k} \frac{\partial(\rho s)}{\partial \mathbf{J}_k} \end{aligned} \quad (53)$$

であり、また、エントロピー生成速度は

$$\sigma[S] = \mathbf{J}_e^{irr} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) + \mathbf{II} : \nabla \left(-\frac{\mathbf{v}}{T} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\xi_k - \xi_n}{T} \left(\frac{d\mathbf{J}_k}{dt} \right)_{irr} \quad (54)$$

と表される。

上のエントロピー生成速度の式において注目すべきことは、各項が、保存量の場合、示強パラメータの勾配と不可逆の流れとの積になっていて、非保存量の場合は、示強パラメータと増加速度の積になっていることである。

6 線形熱力学

平衡状態に近いところでは、熱力学的力が小さければ、不可逆過程の進行速度も小さいから、比例関係にあると考えて良い。その比例係数を \mathbf{L} で表す。結びつける物量量によって、この係数はスカラーであったりベクトルであったり、テンソルであったりする。

粘性応力 \mathbf{II} をエネルギー輸送についての力と運動量輸送についての力の線形結合で表そう。

$$\mathbf{II} = \mathbf{L}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \nabla \left(-\frac{\mathbf{v}}{T} \right) + \mathbf{L}_{\mathbf{v}e} \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \quad (55)$$

実際に、

$$\Pi_{ij} = \sum_{k=x,y,z} \sum_{l=x,y,z} L_{ij,kl} \left(-\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_l}{T} \right) \right) + \sum_{k=x,y,z} L_{ij,ke} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (56)$$

ここで、係数を

$$\begin{cases} L_{ij,kl} = T\eta \left(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) + T\zeta\delta_{ij}\delta_{kl} \\ L_{ij,ke} = \sum_{l=x,y,z} L_{ij,kl}v_l \end{cases} \quad (57)$$

とおくと、確かに、通常の粘性応力テンソルの表式

$$-\Pi_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\text{div}\mathbf{v} \right) + \zeta\delta_{ij}\text{div}\mathbf{v} \quad (58)$$

が得られる。 $L_{ij,kl}$ は、運動量密度に関する示強パラメータ $-\frac{\mathbf{v}}{T}$ の空間勾配と粘性応力 \mathbf{II} とを結びつける係数であり、 $L_{ij,ke}$ はエネルギー密度に関する示強パラメータ $\frac{1}{T}$ の空間勾配と粘性応力を結びつける係数である。

エネルギー流についても

$$\begin{aligned} J_{ei}^{irr} &= \sum_{j=x,y,z} L_{ie,je} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{T} \right) + \sum_{j=x,y,z} \sum_{l=x,y,z} L_{ie,jl} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{v_l}{T} \right) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=x,y,z} L_{ie,jk} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\xi|^2/2}{T} \right) \right). \end{aligned} \quad (59)$$

とおくことができる。

$L_{ie,je}$ はエネルギー密度に関する示強パラメータ $\frac{1}{T}$ の勾配とエネルギー流を結びつける係数、 $L_{ie,jl}$ は運動量密度に関する示強パラメータ $-\frac{v_l}{T}$ の勾配とエネルギー流を結びつける係数、 $L_{ie,jk}$ は質量密度に関する示強パラメータ $-\frac{\mu_k - |\mathbf{v}|^2/2 - |\boldsymbol{\xi}|^2/2}{T}$ の勾配とエネルギー流を結びつける係数である。ここで、

$$\begin{cases} L_{ie,je} = \lambda \delta_{ij} + \sum_{k=x,y,z} L_{ie,jl} v_l \\ L_{ie,jl} = \sum_{l'=x,y,z} v_{l'} L_{il',jl} \end{cases} \quad (60)$$

という関係がある。ここで、 λ は熱伝導率である。このようにすると、エネルギーの不可逆流

$$\mathbf{J}_e^{vrr} = \mathbf{J}_q - \mathbf{v} : \mathbf{H} \quad (61)$$

における熱流 \mathbf{J}_q は温度勾配によって与えられる。

$$\mathbf{J}_q = \lambda \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \quad (62)$$

以上のように、輸送係数が速度場に依存するものとする、粘性現象も、示強パラメータの空間勾配に対する線形応答として表現できることが分かる。粘性応力に対する式から明らかのように、上の係数については、次のような対称性がある。

$$\begin{cases} L_{ij,i'j'} = L_{i'j',ij} \\ L_{ie,jl} = L_{jl,ie} \\ L_{je,ie} = L_{ie,je} \end{cases} \quad (63)$$

7 残された問題

上では、多成分系の各成分の中心速度は異なり、相互拡散が存在するが、温度は各成分とも共通であるとした。しかしながら、各成分が中心速度の周りで異なる分散をもつということは大いにあり得る。そのようなときには、エントロピーは各成分の内部エネルギーの関数と考え、 $S = S(U_1, \dots, U_n, V, M_1, \dots, M_n)$ とみなし、

$$\frac{\partial S}{\partial U_k} = \frac{1}{T_k} \quad (64)$$

によって各成分の温度を定義する。そうすると、各成分のエネルギーは保存量でなくなる。異なる成分同士が局所的にエネルギーを交換しうる。

嗅球神経回路網のモデルで、カオスの遍歴を観察して使用したモデル方程式は以下のものである。

$$\begin{aligned} \dot{m}_i(t) &= -am_i(t) - bG_{ii}(t)\varphi^g(g_i(t-\tau)) - b_2 \sum_{j \neq i} G_{ij}(t)\varphi^g(g_j(t-\tau)) \\ &\quad + c \sum_j L_{ij}(t)\varphi^m(m_j(t-\tau)) + I_i^m(t), \\ \dot{g}_i(t) &= -dg_i(t) + eM_{ii}(t)\varphi^m(m_i(t-\tau)) + I_i^g(t). \end{aligned}$$

ここで、 m_i は*i*番目の僧帽細胞群の活動度、 g_i は*i*番目の顆粒細胞群の活動度、 G は顆粒細胞群から僧帽細胞群への抑制性結合、 M はその逆の興奮性結合、 I^g は入力(三角波に近い周期外力)である。また、 φ^g, φ^m は、それぞれ顆粒細胞群、僧帽細胞群の入出力関係を表現する非対称シグモイド型関数で、次式で表わされる。

$$\varphi^y(x) = \begin{cases} Q_m^y(1 - \exp[-(e^x - 1)/Q_m^y]) & \text{for } x > u_0^y \\ -1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\text{ここで, } u_0^y = l_n[1 - Q_m^y \ln(1 + 1/Q_m^y)].$$

学習効果をみるために、 G に対する学習方程式を次式で与える。

$$\begin{aligned} \dot{G}_{ij}(t) &= -rG_{ij}(t) + s\varphi^m(m_i(t-\tau))\varphi^g(g_j(t-\tau)), \quad i \neq j \\ \dot{G}_{ii}(t) &= 0, \quad \dot{M}_{ij} = 0, \quad \dot{L}_{ij}(t) = 0. \end{aligned}$$

パラメタ r, s の値は、回路方程式のパラメタの値より十分小さいとする。つまり、学習は、回路の状態変化に比べ十分遅いとする。

$$0 \leq r, s \ll a, b, \dots$$

初期条件の設定は、次のようにする。

$m_i(0), g_i(0)$ は、ランダムに与えられる。 $G_{ii}(0), M_{ij}(0)$ は一様な値を与えられる。 $L_{ij}(0)$ は、ランダムに与えられる。

学習前の入力一周期の間に、互いにコヒーレントに振動するいくつかの細胞群が存在するが、コヒーレントになる群の組み合わせは、時間的に変化する。この動的変化は、リアプノフスペクトル等の計算からカオス的である。学習前はこのようなカオスの遍歴がひんぱんにみられる。学習後の入力一周期の間においても上記のカオスの遍歴はみられるが、入力の最大振幅付近で、ほぼ全体がコヒーレントに振動する。また、学習の有無に関わらず、基本周波数は、40Hz 付近に存在する。

以上の結果から、この場合のカオスの遍歴は、細胞群のすみやかな同期と脱同期を行う機構と考えることができる。おそらく動物は、このような機構を使って、においの識別を10msec 程度の時間内に行いその結果を認知に結び付けているのではなかろうか。

参考文献

- 1) I. Tsuda, *Behav. and Brain Sci.* **6**(1993)475.
- 2) I. Tsuda and G. Barna, in *Towards the Harnessing of Chaos*(ed. M. Yamaguti, Elsevir, 1994)47.
- 3) I. Tsuda, T. Hashimoto, A. Yamaguchi and K. Goto, in *the Proc. of the 3rd International Conference on Fuzzy Logic, Neural Nets and Soft Computing*(1994)55.

§1. 導入

脳の理解のための解釈学的方法¹⁾に、強力な記述力をもちうる典型的なメタファーモデルを要求する。モデルは、なんらかの不可能問題を内包する形で構成されることが望ましい。結局、いかにしてデーモンをモデルに抽入するかという問題になる。このような文脈において一つの可能なモデルが得られたので報告する²⁾。結合ニューロンモデルにいたるところ微分不可能なアトラクタが現われる。ここではニューロンのモデルはニューロンの過去の状態を一つの変数にくりこんだ形のアナログモデルであり、状態更新は離散時間毎に行われるとする。まず、一個のカオスニューロンが一個の安定ニューロンを駆動する場合、二次元相空間内で、不安定多様体が交差するという現象を得る。これは、この二次元差分系が可逆でないことからの帰結である。しかし、この場合、交差は、いたるところで起こるように見受けられる。

次に、安定な興奮性ニューロンと安定な抑制性ニューロンの二体が相互作用している系に対して、一個のカオスニューロンがそれぞれを駆動しているというモデルを考える。この状況は、実際の脳の中でも十分起こりうることであろう。

このモデルの示す現象は基本的には、"Strange Nonchaos" あるいは"いたるところ微分不可能なアトラクタ" のクラスに属するが、そのために力学に新しい性質が内包されていることがわかる。特にカントール集合上に制約された新しい力学が内包されていることが強く示唆される結果を得た。このことを理解するために、まず準備としていくつかの基本概念を説明し、その後この主題の説明を行うことにする。

§2. Weierstrass 関数

Weierstrass 関数は、連続でいたるところ微分不可能な関数であり、次式で与えられる。

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x). \quad (1)$$

Weierstrass は、 $0 < a < 1$ で、 b は $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ をみたす奇数である時 $W(x)$ はこの性質をもつことを示した。その後 Hardy は、 $0 < a < 1$ で $ab \geq 1$ なら $W(x)$ は有界な微係数をもたないことを示し、畑は、 $0 < a < 1$ で、 b は、 $ab \geq 5.603\dots$ をみたす実数であれば無限大をこめて微分係数をもたないことを示した。また、類似の関数に、次式の高木関数がある。

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n d(x, Z), \quad (2)$$

ここで $d(x, Z)$ は x に最も近い整数までの距離である。詳しくは、文献 (3),(4) とその中の文献を参照のこと。

最も簡単な Weierstrass 型の関数は、Katsuura によって与えられた。⁵⁾

ユークリッド距離をもつ領域 $X = [0, 1] \times [0, 1]$ 上で、縮小写像 $w_i (i = 1, 2, 3)$ を次で定義する。

$$w_i : X \longrightarrow X (i = 1, 2, 3).$$

$$\begin{aligned}
w_1(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}\right), \\
w_2(x, y) &= \left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}\right), \\
w_3(x, y) &= \left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

この写像は三つの不動点 $(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, 1)$ をもつ. $F(X)$ を, X のすべての非空の閉集合の集合とする.

全ての $A \in F(X)$ に対して,

$$w(A) := w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A). \tag{4}$$

全ての $A, B \in F(X)$ に対して, Hausdorff 距離が定義される.

$$d_H(A, B) := \inf\{\epsilon > 0 \mid N_\epsilon(A) \supset B \text{ かつ } N_\epsilon(B) \supset A\}, \tag{5}$$

ただし, $N_\epsilon(\circ)$ は \circ の ϵ -近傍である. W は, この計量のもとで, $F(X)$ 上の縮小写像である.

$D_0 = \{(x, x) \in X\}$ として $D_n = w(D_{n-1})$ で, D_n は $[0, 1]$ 上の連続関数 $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ のグラフである.

特に, 連続関数 $f_\infty : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が存在する.

w は, $F(X)$ 上の縮小写像であるから w は $F(X)$ の中に唯一の不動点 D^* をもつ. 任意の $A \in F(X)$ に対して, $\{w^n(A)\}$ は, 計量 d_H に関して D^* に収束する.

ここで, D^* は, f_∞ のグラフになる. すなわち, D_n は D^* に収束する.

Katuura は, 関数 f_∞ は, $\forall x \in [0, 1]$ で微分不可能であることを証明した.⁵⁾

§3. 特異連続でいたるところ微分不可能な関数

Rössler らは, Katsuura 関数から特異連続でいたるところ微分不可能な関数を構成した.⁶⁾ ここで特異連続とはカントール集合上で連続なことである. すなわち, カントール集合をつくる各段階での部分区間 $I_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) 上で連続関数 $\varphi_n^{(i)}(x)$ を定義するが, これは, 抜き取る部分区間上で定値関数をつけ加えて, 全域で連続関数 $F_n(x)$ が得られるように定義しておく. この時, カントール集合をつくる極限操作に伴う $\{\varphi_n^{(i)}(x)\}$ の極限をカントール集合上での連続関数と定義する.

さらに, カントール集合上での微分可能性を定義しなければならない. いくつかの定義が可能であろうが, ここでは Dini 微分で定義する.²⁾ やはりカントール集合をつくる n 段目において, 2^n 個の部分区間の各々 $I_n^{(i)}$ において, 連続関数 $f_n^{(i)}$ を定義する. これに対して,

$$\Delta_n^{(i)} := \frac{f_n^{(i)}(b_n^{(i)}) - f_n^{(i)}(a_n^{(i)})}{b_n^{(i)} - a_n^{(i)}}, \quad I_n^{(i)} = [a_n^{(i)}, b_n^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \dots, 2^n) \tag{6}$$

とする. $n+1$ 段目の操作で, 部分区間 $I_n^{(i)}$ から $I_{n+1}^{(2i-1)}, I_{n+1}^{(2i)}$ が得られる. この時,

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1}^{(2i-1)} &:= \frac{f_n^{(i)}(b_{n+1}^{(2i-1)}) - f_n^{(i)}(a_n^{(i)})}{b_{n+1}^{(2i-1)} - a_n^{(i)}}, \quad I_{n+1}^{(j)} = [a_{n+1}^{(j)}, b_{n+1}^{(j)}] \quad (j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}) \\
\Delta_{n+1}^{(2i)} &:= \frac{f_n^{(i)}(b_n^{(i)}) - f_n^{(i)}(a_{n+1}^{(2i)})}{b_n^{(i)} - a_{n+1}^{(2i)}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、 $\forall n > 0$ に対して、 $\{\Delta_k^{(2Z-1)}\}_{k=n}^\infty$ が収束する時、すなわちカントール集合の奇数番目の各左端点で、カントール集合上で定義される関数 $f(x)$ の Dini 微分 (右微分) が存在する時、さらに、 $\{\Delta_k^{(2Z)}\}_{k=n}^\infty$ が収束する時、すなわち、カントール集合の偶数番目の各右端点で $f(x)$ の Dini 微分 (左微分) が存在する時、これらの時に限って、 $f(x)$ はカントール集合上で微分可能であるとする。

以上は、3進カントール集合を念頭においたが、一般のカントール集合上の関数に微分可能性を拡張するのは簡単である。 n 段目に対する部分区間 $J_n^{(i)}$ のそれぞれからはじまる区間列上で、上のような変化率をとりその収束性で定義できる。カントール集合上の関数 $f(x)$ の Dini の右微分の存在で微分可能性をいうこともできるし、もっと強くして、Dini 右微分 = Dini 左微分によって定義してもよい。

次に示す Rössler の関数は、弱めた定義においてすら、微分可能性は、成り立たない。さて、Rössler の関数は次のようにして構成できる。

$$\begin{aligned} c_1(x, x) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{2x}{3}\right) \\ c_2(x, x) &= \left(\frac{3-x}{5}, \frac{1+x}{3}\right) \\ c_3(x, x) &= \left(\frac{4+x}{5}, \frac{1+2x}{3}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

任意の $A \in F(X)$ に対して、

$$c(A) := c_1(A) \cup c_2(A) \cup c_3(A). \quad (9)$$

これは (5) のもとで、縮小写像を与え、 $D_{n+1} = C(D_n)$, $D_0 = (x, x)$ である。 D_n は、 $[0, 1]$ 上の特異連続な関数 g_n のグラフである。 g_∞ のグラフ D_∞ は孤立点からなる。しかし、一方で g_∞ は、カントール集合上で連続でいたるところ微分不可能である。

§4. 次元論

Rössler のモデル (8) から導かれる D_∞ の次元を評価しよう。これは大変示唆に富む例になっている。まず、位相次元 $\dim_t = 0$ は明らかである。一方、ハウスドルフ次元 \dim_h は自己相似性を用いて簡単に、 $\dim_h = \frac{\log \frac{25}{3}}{\log 5} = 1.317\dots$ である。すなわち、

$$\dim_h - \dim_t > 1.0. \quad (10)$$

一方、Katsuura 関数 f_∞ のグラフの次元は、それぞれ $\dim_t = 1$, $\dim_h = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.4649\dots$ で

$$\dim_h - \dim_t < 1.0. \quad (11)$$

Katsuura(3) から Rössler(8) にいたる時、カントールギャップがゼロでなければ、(10) が成立する。

モデル (3) も (8) も力学系ではなく縮小写像である。我々の興味は、微分可能力学系のアトラクタもっと一般には不変多様体が、特異連続でいたるところ微分不可能であるようなものにある。類似の例として、Yorke らによる "Strange nonchaos"⁷⁾⁻⁹⁾, Rössler と Hudson による "Superfat attractor"¹⁰⁾, Moser¹¹⁾ や金子¹²⁾ による "フラクタルな不変トーラス" など

が挙げられる。特異連続で微分不可能なアトラクターでは、一般に関係式 (10) が成立していると思われる。Rössler モデル (8) により次の Kaplan-Yorke の予想⁷⁾の成立の一つの根拠が与えられたと考えてよからう。

Kaplan – Yorke の予想 :

カオスアトラクターの次元は位相次元より 1.0 以上大きくなりうる。 (10')

このことはリアプノフ次元の表式から、正のリアプノフ指数に比べて、初めの方の負のリアプノフ指数の絶対値が小さければおこりうる。

§5. 公理 A 系でのいたるところ微分不可能なアトラクターの存在

次の構成的モデル¹³⁾は、カントール集合上の力学をつくるヒントになる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 9x_n \pmod{2\pi} \\ y_{n+1} &= 0.3y_n - 0.7 \cos(9x_n) \\ z_{n+1} &= 0.3z_n + 0.7 \sin(9x_n) \\ w_{n+1} &= 0.3w_n - 0.7 \sin(2 \times 9x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

これは、5次元ベクトル場の流れのポアンカレ写像と考えられる。この系においてはさまざまな量を厳密に手で計算できる。不動点、周期解、安定性、リアプノフ指数などである。リアプノフ指数は、 $\lambda_1 = 2.197, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1.204$ であるので、リアプノフ次元は、 $\dim_\lambda = 2.825 (= \dim_h)$ となり、一方、位相次元は $\dim_t = 1.0$ となる。従って、式 (10) が成立している。また、非遊走集合上で、周期解が、稠密であること、及び非遊走集合が双曲的であることも容易に示されるので、この系は公理 A である。

アトラクタを、唯一のカオス方向に横断する超平面で切ると、3次元のカントール集合が得られる。これを $y-z$ 面へ写影すると円周上に9個の小円が並びそれぞれの小円の円周上にまた9個の小円が並び、という構造が繰り返された構造が現われる。計算によると2回目の小円以降が、オーバーラップするために、この図形はいたるところ微分不可能である。

§6. ニューラルネットにおけるいたるところ微分不可能性²⁾

§1で予告したように二つの相互作用する安定ニューロンにカオスニューロンによる駆動がある3体のニューラルネットを考える。ここでの基本になるニューロンのモデルは合原によるものである。¹⁴⁾

次式 (13),(14) で、 x はカオスニューロンの状態、 y, z はそれぞれ安定興奮性、及び安定抑制性ニューロンの状態を表わし、 X, Y, Z は、それぞれのニューロンの内部膜電位である。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f\left(-\sum_{r=0}^n b_1^r x_{n-r} + I\right) \\ y_{n+1} &= f\left(-\sum_{r=0}^n b_2^r y_{n-r} + c_{zy}z_n + c_{xy}x_n\right) \\ z_{n+1} &= f\left(-\sum_{r=0}^n b_3^r z_{n-r} + c_{yz}y_n + c_{xz}x_n\right), \end{aligned} \tag{13}$$

ただし, $0 < b < 1$, c_{uv} は u から v への結合強度で, $c_{zy} < 0, c_{yz} > 0, c_{xy} > 0, c_{xz} > 0$ である. $X_{n+1} = -\sum b^r x_{n-r} + I, Y_{n+1} = -\sum b^r y_{n-r} + c_{zy}z_n + c_{xy}x_n, Z_{n+1} = -\sum b^r z_{n-r} + c_{yz}y_n + c_{xz}x_n$ とおくと, 内部状態に対するモデル方程式は,

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= b_1 X_n - f_1(X_n) + \alpha \\ Y_{n+1} &= b_2 Y_n - f(Y_n) + c_{zy}(f(Z_n) - b_3 f(Z'_n)) + c_{xy}(f_1(X_n) - b_1 f_1(X'_n)) \\ Z_{n+1} &= b_3 Z_n - f(Z_n) + c_{yz}(f(Y_n) - b_2 f(Y'_n)) + c_{xz}(f_1(X_n) - b_1 f_1(X'_n)) \\ X'_{n+1} &= X_n \\ Y'_{n+1} &= Y_n \\ Z'_{n+1} &= Z_n, \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, $f_1(X) = \frac{1}{1+e^{-\gamma_1 X}}, f(X) = \frac{1}{1+e^{-\gamma X}}$.

適当にパラメタを調節することにより, X 方向に横断的な超平面上で, いたるところ微分不可能なアトラクタが得られる.

§7. カントール集合上に制限されたダイナミクス²⁾

モデル (14) の $Y-Z$ 面のある傾いた方向にカントール集合が形成される. この集合上のダイナミクスの性質を調べるため (14) に外部ノイズ (一様ノイズ) を印加し, 変化をみた. ノイズは, Y もしくは Z に印加された. ノイズの大きさを変えて KS エントロピーの変化を見た. 非常に振幅の小さいノイズに対しては, エントロピーは増加したが, ノイズ振幅を大きくしていくと, 減少をはじめ, ノイズレスの場合の値よりもさらに減少した. これは, "Noise-induced Order"^{15),16)} のように思われるが, リアプノフスペクトルはノイズレベルを変化させてもほとんど変化しないことから, 新型の現象であると思われる. ただし, ここではマルコフ分割をとれないので KS エントロピーは, 十分細かい分割で近似的に計算した.

カントール集合をある程度粗視化して, セル上の不変測度を求めた. 測度がゼロでないセル上の部分分布からの一回及び二回の遷移による測度分布を求めると, たった一回の遷移で, 不変測度と定性的に一致し, 二回の遷移による分布は, 定量的にも不変測度とほぼ一致した. このことは, アトラクタの各局所局所に全体のダイナミクスが作られていることを意味している. セルの細分によっても以上のことは成立するので, カントール集合の各点全てに, それぞれ制限された完全なダイナミクスが生成されたと考えてよいであろう. ノイズによる KS エントロピーの減少は, ノイズによりカントール集合からはずれた軌道はもはや軌道の多様性を生成できないような異なるダイナミクスに支配されることを意味している. 一方, リアプノフスペクトルの鈍感さは, 相空間内での局所的拡大及び縮小率がほぼ一樣であることを示している. KS エントロピーの変化とリアプノフスペクトルの変化が一見矛盾しているように見えるのは何故であろうか. 軌道の多様性の度合が変化するならリアプノフスペクトルにそれが反映されてもよさそうであるが, そうでないのは何故なのだろうか. それは軌道の多様性が, カオスの場合のように不安定多様体の方向で生成されるのではなく, むしろ安定多様体の方向で生成されることからの帰結である. この場合, 軌道の多様性はカントール集合上に制限されたダイナミクスがうけもっている.

さらに, この系は式 (10) の関係を満たしている. 実際, 位相次元は, $\dim_t = 2.0$ であるが, リアプノフ次元は, $\dim_\lambda = 5.068$ である.

これらの結果から我々は重要な結論に到達する. 従来の"自己組織系"と呼ばれてきた系では, 力学が与えられ, 初期条件や境界条件に依存して解の発展形態が, 時には振動現象

やカオス現象の発現として、また時にはパターン形成としてとらえられてきた。しかしいずれの場合においてもこれらの散逸構造は、与えられた力学が全体として示す性質として考えられるべきものであった。これに反し、ここで述べた力学は、アトラクターにのみ制限された内部的な力学を発現する機構が存在することを端的に示している。分岐理論は、力学が、分岐点近傍で局所的に従うべき内部ダイナミクスを明示的に示すことに成功している。一方、我々の系はパラメタの広範囲でしかもアトラクターの全域にわたって定義された局所的な内部ダイナミクスの存在を示しているのである。このことこそが”自己組織”ということなのではないだろうか。議論が必要なところであろう。

参考文献

- 1) I.Tsuda, Progr.Theor.Phys. (Suppl.)**79**(1984)241.
- 2) I.Tsuda, (to be submitted to *Neuvo Cimento*);
I.Tsuda, (to be published in *The Proc. of the Workshop on "The Role and Control of Random Events in Biological Systems"*(Sigtuna, 1995));
I.Tsuda, (in preparation).
- 3) 山口昌哉, 畑政義, 木上淳, 「フラクタルの数理」(岩波講座 応用数学).
- 4) E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*(Oxford University Press, 1985).
- 5) H.Katsuura, Amer.Math.Monthly, **98**(1991)411.
- 6) O.E.Rössler, R.Wais and R.Rössler, in *The Proc. of the 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic & Neural Networks*(Iizuka, 1992)909.
- 7) J.L.Kaplan and J.A.Yorke, Lect. Notes. Math. **730**(1979)204.
- 8) J.L.Kaplan, J.Mallet-Paret and J.A.Yorke, Ergod.Th.and Dyn.Sys. **4**(1984)261.
- 9) C.Grebogi, E.Ott, S.Pelikan and J.A.Yorke, Physica **13D**(1984) 261.
- 10) O.E.Rössler and J.L.Hudson, Z.Naturforsch. **48a**(1993)673.
- 11) J.Moser, J.Diff.Eq. **5**(1969)411.
- 12) K.Kaneko, *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore, 1986) の 118 ページを見よ.
- 13) O.E.Rössler, J.L.Hudson, C.Kundsen and I.Tsuda, Int.J.of Intell.Sys. **10**(1995)15.
- 14) K.Aihara, T.Takabe and M.Toyoda, Phys.Lett.A, **144**(1990)333.
- 15) K.Matsumoto and I.Tsuda, J.Stat.Phys. **31**(1983)87.
- 16) I.Tsuda and K.Matsumoto, in *Chaos and Statistical Methods* (ed. Y.Kuramoto, Springer-Verlag, 1984)102.

関数関係・演繹系・代謝系のパターン

辻下 徹

北海道大学理学部数学教室

1995.1.18

個々の複雑な系の特徴は、観測から得られる複数の観測値間にある種々の相関として現れる。その中でも、関数関係として現れる相関は、系についてのわかりやすい特徴を表現する。例えば、ある時刻の観測値とその直前の観測値との間の関数関係は因果関係と呼ばれ、自然科学では特別の位置を占めている。

一つの観測結果が多数の観測値によって記述される場合、それらの観測値の間に多数の関数関係が存在することが可能である。この関数関係全体のパターンは、観察対象のもつ「ロヒーレンス」の一つの現れとも言えよう。従って、そのパターンの記述は対象の全体的性質についての、粗くはあるが、重要な認識を与えると考えることもできる¹。

関数関係は互いに独立ではなく、ある関数関係は他のものの論理的帰結になることもある。このことは、関数関係のすべてを列挙するよりも幾分簡潔な記述が存在すること期待させる。この講演では、ラベル付き束 (lattice) により、関数関係のパターンが一義的にパラメトライズされ、それを通して、関数関係パターンの相互関係、例えばパターンの成長と退化の変動、を明確に見ることができることを説明した。

関数系の定めるハイパーグラフ 数学的には、観測値の系は次のように記述できる。 \mathcal{D} を観測の集まりを表す集合とし、各観測 $d \in \mathcal{D}$ から観測値 $\{x_a(d) \mid a \in A\}$ を得るとする。すなわち、 $\{x_a \mid a \in A\}$ は \mathcal{D} を定義域とする写像族とし、値域は写像ごとでことなるものとする。

このような写像族は、写像のパラメータ集合 A を頂点集合とする有向ハイパーグラフ²を次のように定める：

$$x_a(d) = x_a(d') \quad (\forall a \in \Gamma) \implies x_b(d) = x_b(d')$$

がすべての $d, d' \in \mathcal{D}$ について成り立つとき $\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} b$ と定める。これは次の性質を持つ：

1. $a \xrightarrow{\mathcal{D}} a$,
2. $\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} a$ ならば $b\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} a$,
3. $\Gamma \xrightarrow{\mathcal{D}} a$ かつ $a\Delta \xrightarrow{\mathcal{D}} b$ ならば、 $\Gamma\Delta \xrightarrow{\mathcal{D}} b$.

¹しかし複雑系の観測データには厳密な関数関係は見られないのが普通である。

² E が $\text{pow } V \times V$ の部分集合であるとき (V, E) を有向ハイパーグラフという。 V の元を頂点、 E の元を辺という。 (Γ, v) が辺であるとき $\Gamma \rightarrow v$ と書く。

ただし、 a は $\{a\}$ を表し、 $\Gamma\Delta$ は合併集合 $\Gamma \cup \Delta$ を表す。この性質を持つ有向ハイパーグラフを演繹的ハイパーグラフ³と呼ぶ。

演繹的ハイパーグラフはいろいろな状況で現れる。例えば

- A が命題の集合で、命題の集合 Γ から命題 a が導かれるとき $\Gamma \rightarrow a$ 、
- A は分子の種類集合で、分子の集合 Γ から分子 a が生成される時 $\Gamma \rightarrow a$ 、
- A は制御変数の集合で、変数の集合 Γ により変数 a が制御できる時 $\Gamma \rightarrow a$

と定めるとき、演繹的ハイパーグラフを得る。

演繹的ハイパーグラフが与えられたとき、それをパターンとして持つ関数族が存在することが知られているので、関数族の持つ関数関係のパターンを記述するには演繹ハイパーグラフを記述すればよい。

ラベル付き束 (L, \leq) ⁴ と、写像 $\rho: A \rightarrow L$ との組が次の条件を満たすときこれをラベル付き束という: $v \in L$ が \vee -既約であるとき、すなわち、 $v \neq \bigvee \{u \mid u < v\}$ であるとき、 $\rho^{-1}v \neq \emptyset$ 。

ラベル付き束 $(L, \leq, \rho: A \rightarrow L)$ から次のようにして演繹的ハイパーグラフが定められる:

$$W \rightarrow b \iff \rho(b) \leq \bigvee \rho(W).$$

逆に、任意の演繹的ハイパーグラフに対して、ラベル付き束が同型を除いてただ一つ定まり、その決める演繹的ハイパーグラフはもとのハイパーグラフと一致することが示される。従って、演繹的ハイパーグラフはラベル付き束によってパラメトライズされる。ラベル付き束を数え上げることは、束の数え上げに帰着できるので、演繹的ハイパーグラフを容易に数え上げることができる。

この研究の進展は、北海道大学理学部数学科の松尾和雅君・樋口 証君に多くを負っている。両君に深く感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] Higuchi A. Lattice of closure operators. preprint.
- [2] Birkhoff G. Lattice Theory, 3rd edition. AMS 1967.

³演繹的ハイパーグラフ全体の集合上には自然な束構造が入るが、[1] はその基本的構造を明らかにしている。

⁴順序集合 (L, \leq) のどの有限部分集合 X も上限 $\bigvee X$ と下限 $\bigwedge X$ とを持つときこれを束という。空集合の上限として最小元 \perp 、下限として最大元 \top を持つ。束についての標準的文献としては [2] がある。

シヨウジヨウバエの胚の体節形成シミュレーション

有田 正規、白取 知樹、萩谷 昌己

東京大学理学部情報科学科萩谷研究室

{arita, blacky, hagiya}.is.s.u-tokyo.ac.jp

1 関連分野とその歴史

生物の形態形成のシミュレーションには、チューリングのモルフォゲン、リンデンマイヤーのLシステム、ノイマンのセルラーオートマトンにはじまり、最近のニューロ、カオスを含んだ複雑なものまで、さまざまある。これらのモデルは、数学的なモデルで生体の働きにあうものを発見するという性格が強いが、ここでは分子生物学の知識を考慮した離散モデルを紹介する。

我々が行なったのはモデルの対象に選んだのはシヨウジヨウバエの体節形成である。シヨウジヨウバエの体節は胚の時期に段階的に発現するタンパク質群によって指定される。その発現機構はタンパク質どうしの発現促進、抑制によるというのが生物学者の意見であるが、その正確な制御関係、機構はわかっていない。このタンパク質どうしの制御機構を見つけ出すのがSIMFLYと名付けたシミュレーターである。

2 シミュレーション

まず実際の体節形成を説明しよう。体節は四種類のタンパク質グループによって指定される。一番はじめに胚の中に発現しているグループは、卵の段階ですでにRNAができている「母性タンパク質」グループである。このタンパク質は胚の中で前後軸方向に勾配をなしており、この勾配情報を読んで次の「ギャップタンパク質グループ」が発現する。ギャップタンパク質によって前後軸はいくつかのセクションに分けられる。このセクションをもとにして「パルルタンパク質」グループが7本のストライプをなして発現する。この7本のストライプによって胚は14のセクションに分けられ、成虫における14の体節の細胞が指定されるのである。

SIMFLYがシミュレートするのはギャップタンパク質の部分である。この形成にはすでにマインハルトの微分方程式モデルが存在する。マインハルト

はタンパク質どうしの発現促進、抑制という二種類の制御を仮定し、体節指定タンパク質の位置特異的な発現を微分方程式で記述してみせた。このモデルは連続的、また生体の構造を無視している点が我々のものと大きく異なる。タンパク質の発現を微分方程式で記述してよいのかどうかは示されていない。

我々のモデルは、一言でいうと、離散的である。タンパク質どうしの関係は、しきい値を用いてあらわせると仮定している。この根拠は遺伝子スイッチという DNA とタンパク質の相互作用にある。たとえば、「DNA からの転写速度はタンパク質の量に比例する。」といった正確な制御は実際には起こっていないと考えられる。むしろ、「タンパク質の量はかなり多いと DNA から転写が始まる。」という程度のおおざっぱな制御が発現を支配しているはずだ。このような関係は複雑かつ正確な数学関数ではなく、大雑把なしきい値を用いてもあらわすことができるであろう。

実際の生体内にある DNA バインディングタンパク質と呼ばれるタンパク質は、特異的な DNA サイトにくっつくことによって、その下流域の転写を促進、抑制させることができる。多くのタンパク質はなんらかのフィードバック機構を備えており、ある一定量（しきい値）の転写促進タンパクがあると急速に生成量が増える現象をしめす。この機構はあたかも二値のスイッチのように働くため、遺伝子スイッチと呼ばれる。実際のタンパク質はこの他にもいろいろな制御を受けている。DNA から転写された RNA は複雑なプロセッシングを経てタンパク質に翻訳されるし、RNA もタンパク質もそれぞれ固有の分解速度をもつ。しかしすべての働きをシミュレートするわけにはいかないのでタンパク質のモデリングを以下のようにする。

Protein hb			
Life: 5	Production Amount: 1	Diffuse Rate: 0.25	Diffuse Count: 5
Repressed by nos with the threshold 0			
Promoted by bic with the threshold 4			

体節形成が遺伝子スイッチによって支配されていると仮定するならば、体節指定タンパクのしきい値(タイプライター文字の部分)を適切に設定することによってその働きがシミュレートできるはずである。SIMPLY ではタンパク質の寿命は 5、1 単位時間に発現するタンパク質量は 1 となっているので、タンパク質の最大量は 5 である。今回は三種類のタンパク質の関係を固定し、それらのしきい値 8 個について 1,3,5 の三通りの探索を行なってみた。しかし本当はしきい値の他に関連するタンパク質や、促進抑制の関係も探索することが望ましい。結論から先に述べると以下のようになる。

- 促進というタンパク質の作用がなくてもギャップタンパク質グループの発現はシミュレートできる。しきい値の探索空間の中では、正しい発現

パターンは1%程度確認できた。

- パラメーターの設定によっては、タンパク質の発現が周期的に入れ替わるといった、複雑な動きもみせる。

生物学者は全てのタンパクには促進タンパクが存在すると考えられるので、ギャップタンパク質の発現は促進によるものと制御によるものと二重のコントロールを受けていることになる。よって一つめの結論は生体系がかなり頑丈にできていることが示唆される。体節形成タンパク質の一部を阻害しても胚の全体に影響が及ばず、部分的に変異を起こしたミュータントができるという事実はこれを支持するであろう。二つ目の結論はまだ具体的には見えていない。ただ、シヨウジョウバエとは違ったバツタなどの類でのタンパク質発現に関連している可能性はある。バツタではタンパク質のストライプがシヨウジョウバエのように胚全体で一斉には出ず、端から順にストライプが形成されてゆくことがわかっている。このような発現がタンパク質の周期的発現から導かれるだろうか。

3 さいごに

当初の目標はペアルールタンパク質のシミュレートであった。しかし、ほとんどのタンパク質において、抑制の関係がわかっても促進の関係がわかっていない。これはタンパク質群の発現時間を左右するので大きな障害となる。かといって未知の部分都合のよいように捏造することはあまり奨められない。また、周期的なタンパク質の発現を利用してより複雑なタンパク質発現を達成するのも今後の課題である。こちらは人工生命に偏った立場になるが、タンパク質の相互関係が既知のものであるなら現実の系に当てはまる可能性もゼロではないだろう。

今回、われわれは意図的に複雑なタンパク質の関係を定性的に扱い、シミュレーションを試みてみた。ただし実際の系はこれよりはるかに複雑で入り組んでいることは明らかである。しかし、これをニューラルネットのような複雑なモデルでシミュレートしてしまえば、実際にどのような仕組みで相互作用が起こり、どのように定式化されているかが不明確になってしまうのではないだろうか。たとえ正確にシミュレートできたとしても、現実の系に戻して考えられないものは意味がないであろう。シミュレーションの結果からは、現実の生体系に対する新しい解釈の可能性が示唆されることが望ましい。定性的なモデリングをするのであれば、複雑な系を単純な系に直した後に、単純な系からシミュレーションで導かれたことを元の複雑な系に戻して考えることが重要なのである。

睡眠や覚醒など生体機能にみられる周期性のなかで、約24時間の周期を示すサーカディアンリズム（概日リズム）は、生物が地球環境に適応する過程で獲得した機能であり、4つの特徴をもつ。それらは、生まれつきのリズム（生得性）、外部から周期的エネルギー供給を必要としない（自律性）、リズム周期が24時間から多少ずれる（概日性）、外界の周期性に同調する（同調性）、である。

1) 生得性

サーカディアンリズムが環境の周期性によって形成され、あるいは学習によって保持されたものでないことは、恒常環境から出生した個体にもサーカディアンリズムが出現することや同一の親から出生した仔でも周期が多少異なることなどから推測される。しかし、生得性の真の証明は案外難しい。哺乳類では、母体のリズムの影響を完全に除くことは不可能である。我々は授精直後に母ラットの視交差上核を破壊し、無周期性となった母から生まれた仔ラットにもサーカディアンリズムが発現することを確認した。しかし、授精後数日間に母ラットのリズムが仔のサーカディアンリズム形成に決定的な役割をしている可能性は否定できない。

2) 自律性

サーカディアンリズムは環境から周期的変動を除いても長期間持続し、しかもその場合のリズム周期は24時間からわずかであるがずれる。これをフリーラン周期という。フリーラン周期は種や個体、性によって異なる。フリーラン周期が存在することから、サーカディアンリズムの起源は自律性の振動機構であると結論される。サーカディアンリズムは単一細胞でも確認されており、脊椎動物では網膜、松果体、間脳視交差上核などに振動体細胞が存在する。ラットでは視交差上核の培養神経細胞から分泌される神経ペプチドにサーカディアンリズムが認められ、振動機構の解析に有力なモデルを提供している。

3) 概日性

サーカディアン（概日）リズムの名は、そのフリーラン周期が24時間からわずかに異なることに由来する。サーカディアンリズムは生物が24時間周期の地球環境に適応する過程で進化させた機能と考えられるが、その周期が正確な24時間でない意味は、次に述べるリズム同調機能と関係して重要である。高等動物では、サーカディアンリズムの周期は単一振動体細胞のリズム周期によるものでなく、多数の振動体細胞から発生するサーカディアンリズムの振動共役によって決められていると考えられる。振動共役はリズム周期の安定化やリズム機能の高度化に寄与していると思われる。

4) 同調性

サーカディアンリズムの主たる機能は24時間周期の昼夜変化に同調し、1日の時刻や季節を認識することにある。そのためには、リズムの周期が24時間に一致するだけでなく、リズム位相が環境の特定事象（例えば日の出時刻）と一定の時間的關係を作り出す必要がある。前者を周期調節、後者を位相調節という。事実、サーカディアンリズムはこの2つの調節をノンパラメトリック同調と呼ばれる様式で達成している。そのモデルとして、リミットサイクルの引き込み現象が最もよく使われている。サーカディアンリズムは時間学習や時間記憶にも関係している。

ペースメーカーニューロンのバースト的シナプス入力に対する応答

林 初男 (九州工業大学・情報工学部)

神経系の周期的電流刺激に対する応答の研究は少なくとも 1930 年代に始まっているが、引込み現象などの非線形現象が明らかにされ始めたのは 1960 年代の半ばからである。Perkel ら (1964) はアメフラシとザリガニの自発放電ニューロンについて、周期的シナプス入力に対する応答を調べ、引込みや分数調波振動が生じることを明らかにした。引込みは非線形現象の大きな特徴であるため、その後、ニューロンやそれらのモデルを用いて多くの研究がなされ、1980 年代になるとカオスの応答の研究が数多くなされるようになった。しかし、これらの研究のほとんどは交流電流刺激に対する非線形応答の研究である。それに対し、Perkel らの研究は、ニューロンに見られる引込み現象を最初に示したという点以外に、より現実的なシナプス入力に対する応答を調べたという点でも評価されるべきである。彼等の研究はカオスの概念がはっきりしてきた 1970 年代半ばより 10 年近くも前になされたものであり、カオス応答については何も示していない。

イソアワモチペースメーカーニューロンへは右側側神経束が単シナプス投射している。したがって、この神経束を吸引電極に吸い込んで電気刺激することにより、シナプス入力に対するペースメーカーニューロンの応答を観測することができる。シナプス入力の周波数が自発放電の周波数より低い場合は、シナプス入力によって平均的に脱分極したり過分極したりすることはない。これは比較的低い周波数のシナプス入力は興奮性のみであり、加重もほとんど生じないからである。それに対し、比較的高頻度のシナプス入力が増えると、過分極しかつ応答はバースト化する。これは、比較的高い周波数のシナプス入力は興奮と抑制の二相性であり、抑制性シナプス電流の時定数が大きく、その加重が生じるからである。実際、このような周期的シナプス入力に対するイソアワモチペースメーカーニューロンの応答を調べると、引込み以外に不規則な応答が観測される。これらのあるものは明らかにカオス的である。

ところで、脳ではバースト的な活動がよく観測される。たとえば、海馬の錐体細胞はバースト放電しリズム的な電場電位振動の原因となっているし、頭皮上で観測される α 波や θ 波などの振動的脳波の原因となるニューロン活動は同期化したバースト放電である。したがって、より現実的なバースト的シナプス入力に対するニューロンの応答を調べることは興味深く、また、そのダイナミクスを調べる方法を見出すことは、たとえば、ニューラルコーディングといった立場からは大切であろう。

右側側神経束刺激に用いたバースト的パルス電流のバースト間隔を一定とし、パルス電流を大きくすると、ニューロンはバースト的応答を示すようになる。このとき、バースト放電当りの発火数は刺激電流に依存して大きくなり、バースト放電の間隔は長くなる。その結果、バースト入力 1 回当たりバースト放電が 1 回生じたり、バースト入力 2 回あるいは 3 回当たりバースト放電が 1 回生じる応答が観測される。バースト放電当りの放電数は必

ずしも一定ではないが、我々の直感に従って、これらを 1:1,1:2,1:3 引込みと呼ぶことにした。また、これらの引込みの他に不規則な応答も観測された。

本研究では、これらの応答のダイナミカルな性質を調べるために、活動電位の変動に注目し、その最大値の時系列から一次元写像を求め、また、位相空間のアトラクタをある平面で切って、いわゆる 1次元リターン写像を求めた。しかし、これらの写像は応答波形を見たときの我々の直感とは合わなかった。つまり、個々の活動電位の変動に注目したのでは、応答のグローバルな性質を巧く捕まえることができなかった。我々の直感に素直に従うとすれば、バースト放電を 1塊として集合的に見る必要がある。そのためには工夫が必要であるが、このようなペースメーカーニューロンでは活動電位とペースメーカー振動が相互作用しているということに注意すれば、バースト放電を 1塊として集合的に見る代りに、スローなペースメーカー振動に注目すればよいということが分かる。実際、このタイプのニューロンがバースト放電するのはペースメーカー振動が存在するからである。そこで、刺激のバースト間隔でペースメーカー振動をストロボ的にサンプルし、一次元写像を求めた。1:1 と 1:2 引込みの場合、写像点は 1つあるいは 2つのクラスタを作り、不規則な応答の場合、不安定な固定点を持つ non-invertible な写像関数となった。さらに、これらの応答を右側側神経束刺激のバースト間隔と刺激電流をパラメタとした応答の相図にまとめた。

連続的な周期刺激に対する応答のダイナミクスについては、我々がこれまでに示してきたように、活動電位の変動に注目し、アトラクタ、ポアンカレ断面、一次元写像などを調べれば、その決定論的な性質を巧く理解することができる。しかし、バースト的シナプス入力に対するバースト的応答は、同じように活動電位に注目したのでは、応答のダイナミクスを巧く理解することができない。そのためには、バースト放電を 1塊に見るというある種の粗視化が必要で、それによって応答の性質を巧く理解することができる。この結果は個々のニューロンのバースト放電が背景にある脳の活動の性質を明らかにするときの大事な考え方を与えており、活動電位 1つ 1つに注目するよりは、バースト放電を集合的に見ることで電場電位などの方が脳の活動を調べるのに適していることを示唆している。

神経細胞のパルス密度変調における ヒステリシスについて

神経情報研究分野 赤沢年一, 清水利伸, 馬場欣哉, 下澤楯夫

コオロギの気流感覚系にガウス白色雑音を刺激として与え, 感覚神経細胞のパルス列を記録し, 両者の相関計算をすると, この系は「線形なフィルタ」と「非線形なパルス密度変調器」が連なったモデルで表現できる。モデルの出力と実際の出力とを比較してみると, パルス密度変調特性は変調器入力のみでなく, その時間微分にも依存すること, つまりヒステリシスを持つことが明らかとなった。また, ヒステリシスに見える原因は神経パルス発生の不応期であることも明らかとなった。

1. はじめに

我々は信号処理装置としての神経系を理解するために, 神経系をいくつかの要素にわけて, その動作を再構成しようとしている。

まず, ある系(例えばある機械)を理解するとはどういうことかを考えてみよう。ある人はその機械をバラバラにして歯車やカムを見つけ, それでもってわかったと言うであろう。確かに, 「わかる」ためには, まず全体を部品に「分ける」ことが必要である。しかし, バラバラにただけでは不十分で, 部品どうしの相互作用, つまり関係や「機能」に関する情報がなければ理解したとは言えない。

我々は, 非線形性の強い神経系の動作について, それを構成する部品が何でできているかはひとまずおいて, 機能だけに着目して系を解剖・再構成しようとしている。系を再構成できることが, 対象を理解する第一歩であるから。

2. 材料と方法

動物の行動は複雑であるが, 鍵となる刺激に対して特定の運動パターンを示すものがある。その一例は節足動物の逃避行動であり, 突然の強い刺激が加わったとき, 動物はそれを避ける向きに急な運動を示す^{[1][2]}。逃避行動は再現性がよく, 行動を司る神経基盤の理解のための材料として適切である。その一例として, ク

ロコオロギ (*Gryllus bimaculatus*) の気流感覚系がある^[3]。コオロギの腹部後端には1対の突起(尾葉)があり, 尾葉上には数百本の気流感覚毛がはえている^{[4][5]}。気流感覚毛の根元には感覚細胞があって, 気流の情報を活動電位パルスの列に変換して中枢に伝えている^{[4][5]}。

非線形性を解析する道具としてWienerのガウス白色雑音法^[6]を用い, ガウス白色雑音を気流刺激とし, 感覚細胞のパルス列を記録した。刺激波形とパルス列との相関計算を行うことで気流感覚系をモデル化できる^[7]。

ここで, モデルの出力はパルスの発射確率を与えるのに対し, 実際の系の応答はパルス列であって, パルスの発射確率ではない。「推定したモデルが実際の系の別の刺激に対する応答を予言できるかどうか」を検証するためには, モデルの出力と比較できる実測値が必要である。そこで系にエルゴード性を仮定して, 系に同一の刺激波形を与えたときの応答を多数回(具体的には250回)測定し, アンサンブル平均を取ることで発射確率の実測値とした。多数回の測定は, ガウス白色雑音の断片(長さ150ms)で繰り返し刺激することで実現した^[8]。

3. 結果

ガウス白色雑音法を用いた結果, コオロギの気流感覚系は「線形フィルタ」と「非線形な入出力特性を持つ

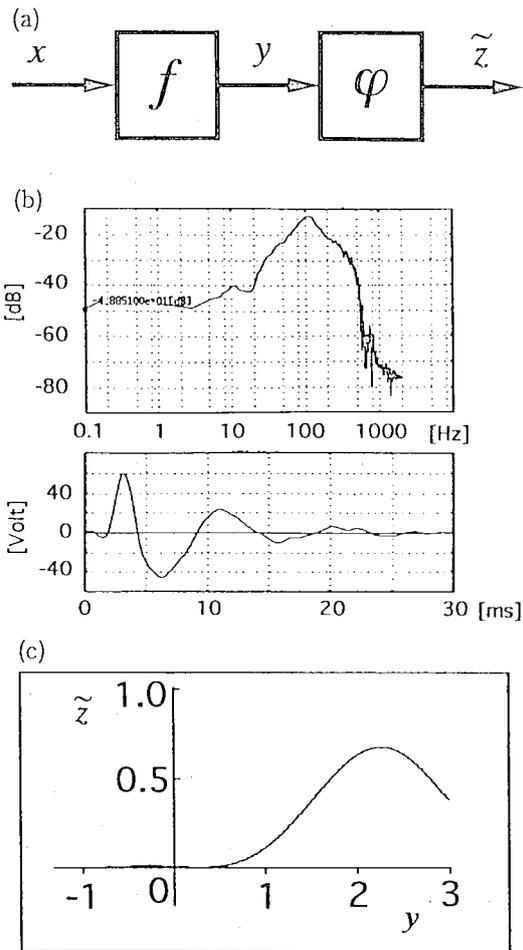


図1 (a)モデル, (b)線形フィルタ f , (c)パルス密度変調器 φ

たパルス密度変調器」が連なったモデル (図1) で書けることがわかった^{[7][8]}。パルス密度変調器の入出力特性は山形の曲線を描き、パルス発射確率の最大値は0.67であった (図1(c))。

モデルの出力と発射確率の実測値をそれぞれ図2の(c)と(d)に示す。(c)の(d)に対する平均自乗誤差は27.8%であった。(c)と(d)の波形を比べると、パルスが発射されるタイミングは一致するが、高さは一致しない部分も多い。特に、実測でのパルス発射確率が1になることがあるのに、モデルのパルス発射確率は最大0.67であった。これは、推定されたパルス密度変調器の特性が最大値0.67であったことに対応する。

パルス密度変調特性の最大値が1にならない原因を考えてみよう。図1(c)のパルス密度変調特性は、系の統計的性質を見たものである。実際にはパルスの発射確率が1になるにもかかわらず、統計的には0.67と推

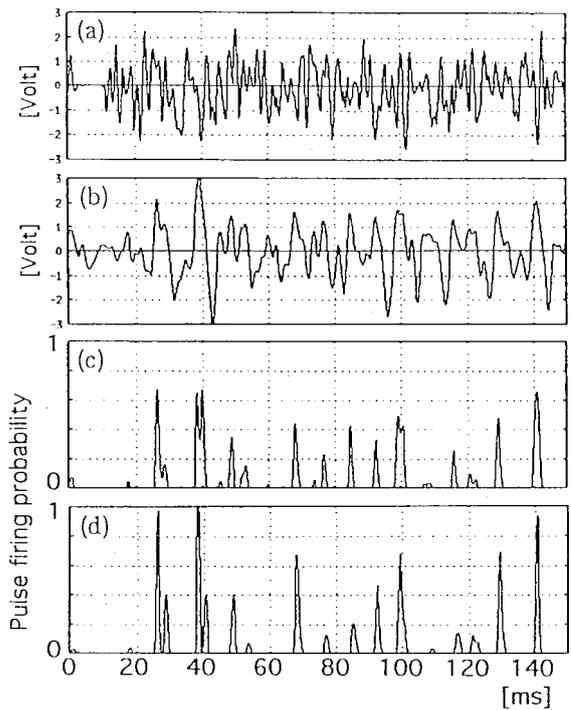


図2 (a)刺激波形, (b)パルス密度変調器への入力, (c)モデルの出力, (d)発射確率の実測値

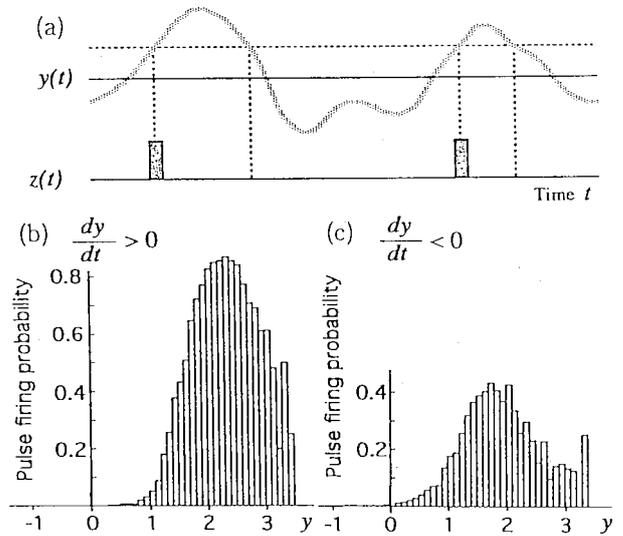


図3 (a)パルス密度変調器への入力 $y(t)$ とパルス列 $z(t)$, (b)(c)パルス発射確率ヒストグラム

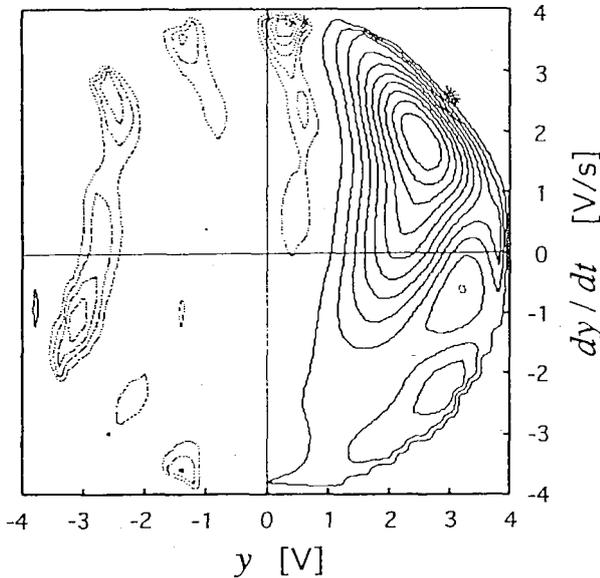
定されるということは、変調器へのある入力瞬時値に対しパルスが発射される場合が67%であり、発射されない場合が33%であることを示している。変調器への入力の瞬時値が同じでも、増大しているときと減少しているときとではパルス発射確率が異なるのかもしれ

ない (図 3(a))。

$y(t)$ の増大期 ($dy/dt > 0$) と減少期 ($dy/dt < 0$) について, y の瞬時値に対するパルス発射確率のヒストグラムを作ると, $dy/dt > 0$ のときは最大0.8以上になり, $dy/dt < 0$ のときは0.4程度であった (図 3(b) (c))。つまり, パルス密度変調器にはヒステリシスがあるということである。より一般化するために, dy/dt の符号だけでなく, 変調器への入力 y とその時間微分 dy/dt とを変数として, 入力の位相平面上で2変数エルミート多項式でパルス密度変調特性を近似してみると, パルス発射確率は dy/dt の値に依存することがわかった (図 4)^[9]。

この入力位相平面に表したパルス密度変調特性からモデルの出力 (図 5(a)) を求めると, 平均自乗誤差は15.6%と改善された。したがって, パルス発射確率は変調器への入力振幅 y とその時間微分 dy/dt の両方で決まると言わなければならない。

次に, 神経細胞の不応期がヒステリシスの原因であることを示す。同一の神経細胞をそれぞれ帯域幅の異なる4種類のガウス白色雑音で気流刺激した (パルス密度変調特性: 図 6の A1~A4)。また, 変調器への入力 y が, $y > 1$ (概ねこの領域でパルスが発射され



$$\varphi\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = \sum_{n=0}^{15} \sum_{m=0}^{15} a_{nm} H_n(y) H_m\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

図 4 パルス密度変調特性 $\varphi(y, dy/dt)$

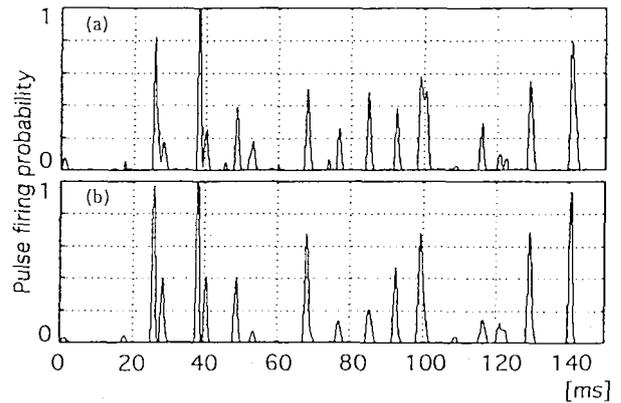


図 5 (a)モデルの出力, (b)発射確率の実測値

る) にいる時間は, ガウス白色雑音の帯域が低いほど長くなる (入力 y はゆっくり動く) (B3, B4)。入力 y が $y > 1$ の領域に入り, 最初のパルスが発射され (A3, A4のピーク a), 続いて不応期があり, その後2番目のパルスが発射される (A3, A4のピーク b) 様子がわかる。ガウス白色雑音の帯域が高ければ, 入力 y は不応期よりも短い時間で $y < 1$ の領域へと移動してしまうため (B1, B2の*印), 2番目のパルスはほとんど発射されない (A1, A2)。

ISIH (Inter Spike Interval Histogram) を調べてみると, 狭帯域のときは約2 msの spike interval time が現れる (C3, C4の*印)。2 msは神経細胞のパルス発生の不応期に相当する。パルス発射確率の2つの山の間にある谷 (A3, A4) は, 不応期を表していると言える。

以上から, A1とA2で見られるパルス密度変調特性のヒステリシスは, 神経パルス発生の不応期がその原因となっていると言える。

4. 最後に

コオロギの気流感覚系をWienerのガウス白色雑音法で解析すると, 「線形フィルタ」と「非線形なパルス密度変調器」が連なったモデルで書ける。さらに, パルス密度変調特性はヒステリシスをもっていることがわかる。ヒステリシスを解析する一般的な方法はないが, Wienerの方法でもこれが可能なことを示している。また, 神経細胞の持つ不応期という性質も, ヒステリシス特性としてモデルに組み込めることもわかった。

Cut off
frequency
of the GWN

Pulse density
encoder φ

Time
duration
above y
threshold

ISIH
(Inter Spike Interval Histogram)

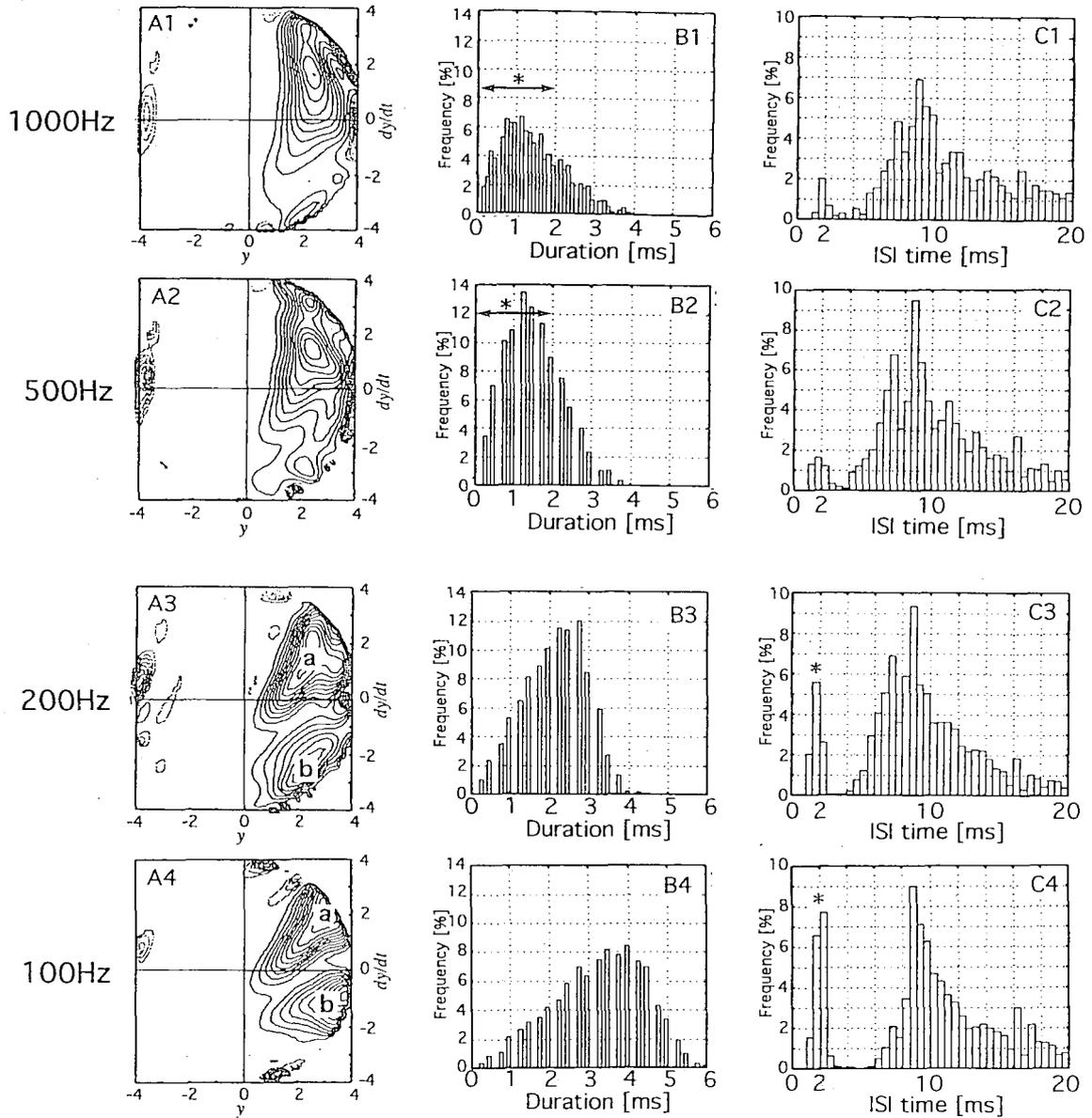


図 6

【参考文献】

- [1] 下澤橋夫, “逃避行動の神経学——感覚受容から運動出力まで——”, 現代動物学の課題 8 行動, 107, 学会出版センター.
[2] Camhi, J. M. et al., *J. Comp. Physiol.*, 128, 203 (1978).

- [3] Baba et al., *Zool. Sci.*, 10, 705-709 (1993).
[4] 下澤橋夫, “動物の習性とその神経基盤, 計測と制御”, 30, 426-435 (1991).

- [5] Shimozawa, T. and Kanou, M., *J. Comp. Physiol. A*, **155**, 485 (1984).
- [6] Schetzen, M., "The Volterra and Wiener Theory of Nonlinear Systems", John Wiley & Sons, Inc. 1980.
- [7] 下澤楯夫 *et al.*, 信学技報 MBE 93-140 (1994-03).
- [8] 赤沢年一 *et al.*, 信学技報 MBE 94-26 (1994-06).
- [9] 赤沢年一, 1994 年度生体工学専攻修士論文に詳細を掲載予定.

1 従来の変分法には、境界条件設定に無理が生じて「ちぎれる」、「くっつく」など位相変化を含むような実際問題を必ずしも数学的に「スマート」に処理できなかった部分がある。

例えば、「ひび割れ」など実際的な問題から派生する「三点 ABC を通る最短線を求めよ」という変分問題では、標準線分 $[0, 1]$ からの連続写像で点 ABC を通るものなす変分空間 X の上で、曲線の長さを評価函数として常識的な変分問題を構成すると最小曲線が実現できないことがある。この問題の答えは幾何学などでも知られる通り、三点 ABC を等角に見込む点 P に対して $AP+BP+CP$ と書けるからである。よって、最小曲線を実現するためには変分空間を拡張する必要がある。

そのためには、三本の標準線分 I_1, I_2, I_3 をとり、これらを一端で貼りあわせて標準空間を作り、それからの連続写像のなす空間を変分空間にとればよい。一般にさらに複雑な境界条件や位相変化を取り扱う場合には、このような空間の極限をとったものを標準空間とし、それからの連続写像を変分空間として採用する。

上の標準空間を「肉付け」して、「中抜き」をすれば、ハンドルボディ構成がこのような場合の標準空間構成の「かなめ」であることが分かる。したがって、このような構成を高次元、特に三次元において行えば、「ちぎれる」、「くっつく」などの現象が取り扱える変分問題を構成できると期待できる。

具体的には、特異点を通過するハンドルボディ構成によって「ちぎれた」部分を「くっついた」部分につなぐ。言い換えれば、「ちぎれた」部分、「くっついた」部分をそれぞれ標準空間とする変分空間 X_1, X_2 を考え、それを「特異点を通る」部分 X_3 に適当な位相のよって貼りあわせて、変分空間 X を作る。この空間上で普通に面積の最小問題を考えると、境界の条件によって最小曲面が「ちぎれ」たり「くっつい」たりする様子が分かる。

2 このような変分空間が構成されると、単に長さや面積の最小問題に対する解釈ができるようになるばかりではなく、それによって逆変分問題を考えることができる。すなわち、実際の「ちぎれ」たり「くっつい」たりする現象に対して、それが「どのような」評価函数から得られるべきであるかという、極めて実用的な問題に対するアタックが可能になる。例えば、上に述べた「ひび割れ」現象について、それがどのような評価函数から

導かれるべきであるか、ないし、評価函数を導くには「何を仮定し」、「何に注目すべきか」を論じることができる。

例えば、「ひび割れ」の各部が「同じ重さをもって」その形を定めると仮定すると、評価函数は、「ひび割れ」の上の不変微分形式の積分によって与えられることが示される。一方、座標不変性は、これが「角度」と「長さ」の函数であることを意味する。さらに、実際の「ひび割れ」が、「(ある種の)かど」を有することから、この微分形式は「長さ」を指数 0 から 1 までで含むことが導かれる。

同様にして、ミルククラウンとして知られるコップにミルクを落としたときの王冠のような跳ね返りの形についても、逆変分問題が考えられる。このとき、王冠の上部にできるビーズが「ちぎれ」たり「くっつい」たりする現象であって、上に述べた複雑な変分空間を必要とする部分である。ミルククラウンを、その直径、高さ、さらに、ビーズの数という三つのパラメーターで表す。これらがある評価函数の最小化から得られるものとして、実験から評価函数の(位相型の)決定を行おうとする、ないし、そのための実験を設計するものがこの場合の逆変分問題である。実験はミルクを落とす高さ(すなわちミルクの滴がもつ位置エネルギー)を変化させて行い、この変数が、求める評価函数に含まれる様子からミルククラウンや「ひび割れ」の物理学の構成を試みた。実験設定やその精度についてはまだ検討の余地はあるが、評価函数がある領域で二値的であること、すなわち、「ひび割れ」などの物理学にはトムの理論から予想されるようなヒステリシス型をもつ評価函数が本質的であること、言い換えれば、それが必要条件として含まれねばならないことが目に見える形で示されたと考えている。

セルオートマトンのエントロピーと多重度

行木孝夫

東京大学数理科学研究科

有限集合 A の無限直積空間 $X = A^{\mathbb{Z}^D}$ をとる。連続写像 $\tau: X \rightarrow X$ が次を満たす時、セルオートマトンとよぶ。

定義 1. $\Lambda \subset \mathbb{Z}^D$ を与えられた有限格子、 f を Λ から A への写像として、任意の $x \in X$ について一様に $(\tau x)_i = f(x_{i+j}; j \in \Lambda)$ となる。この f を局所写像と呼ぶ。

従って、セルオートマトンは空間的に一様な規則で時間発展を決める力学系とみなすことができる。

歴史的に見ればセルオートマトンとは自己組織化する系を実現するモデルとして提唱されたものであるが [7]、1980 年代にはカオス的な力学系としての興味から集中的に数値解析が行なわれている [8]。しかし、力学系として見た場合、その一般的な性質はほとんどわかっていない。次の事実は基本的である。

定理 2. [2] $\tau: A^{\mathbb{Z}^D} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^D}$ は平行移動と可換な連続写像とする。このとき、 τ は定義 1. の性質を持つ。

このように、平行移動可換な連続写像としてセルオートマトンを一般的に捉える時、セル力学系と呼ぶことにする。ベルヌイシフトを不変集合とする場合の挙動とアトラクタに関する分類とがいくつか知られている。

定理 3. [6] $A = \{0, 1\}$ とする。 $\tau: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ をセル力学系として、その局所写像がブール表現で $x_r + F(x_{r+1} \cdots x_{s-1}) + x_s$ ($r < 0 < s$) と書けるならば、 τ は 2^{s-r} 個の記号を持つ片側ベルヌイシフトに同型となる。

この定理の設定の下で、シフト不変かつ τ 不変で開集合について正値をとる確率測度は一様ベルヌイ測度のみである [4]。

定理 4. [3] 任意のセル力学系 $\tau: A^{\mathbb{Z}^D} \rightarrow A^{\mathbb{Z}^D}$ は次のいずれか一つを満たす。

1. 最小のアトラクタ X が一意に定まり、 X は τ の全てのアトラクタに含まれる。 X はシフト不変、その吸引域は *open* かつ *dense* であり、全測度を持つ。
2. 最小の擬アトラクタ Q が一意に定まり、 Q は τ の全てのアトラクタに含まれる。 Q はシフト不変。さらに二つの場合がある。
 - (a) Q の吸引域は全測度を持つ。
 - (b) τ の全ての鎖回帰集合の吸引域は零測度である。
3. τ は共通部分を持たない二つのアトラクタを持つ。この場合、 τ には最小の擬アトラクタが非加算無限個存在する。 τ の全ての鎖回帰集合の吸引域は零測度である。

この定理は、局所写像を与えた時にセル力学系のアトラクタがどれに分類されるかを定めるアルゴリズムを与えてはいない。それは今後の課題である。

次に問題となるのは極限集合としてのアトラクタへ落ちて行く道筋である。それを、セル力学系のベルヌイからの繰り返して生じるシフト不変集合のエントロピーで評価してみよう [5]。

エントロピーの時間発展を、 $\nu = \mu \circ \tau^{-1}$ として $h_\mu \rightarrow h_\nu$ で定義する。つまり、エントロピーは格子上の確率測度の時間発展を反映するものと考え。まず、エントロピーの定義を与えよう。

定義 5. μ を平行移動不変な X 上の確率測度とする。エントロピー h_μ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{a_{-n}, \dots, a_n \in A} \mu[a_{-n}, \dots, a_n] \log \mu[a_{-n}, \dots, a_n]$$

と定義する。ここで、 $[a_{-n}, \dots, a_n] = \{x = (x_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in A^{\mathbf{Z}}; x_{-n} = a_{-n} \cdots x_n = a_n\}$ であり、 $\mu[a_{-n}, \dots, a_n]$ は単語 a_{-n}, \dots, a_n の出現確率を表す。

エントロピーの時間発展について、

$$h_\mu(X, \sigma) \leq h_\nu(X, \sigma) + \int_Y h_d d\nu.$$

ここで、 $d(w) = \#f_{|w|}^{-1}(w)$ は単語 w の多重度といい、 $f_{|w|}(w)$ は w を像にもつ単語の全体を表す。 $d(w)$ の指数関数的な発散のレートは次の極限であり、

$$h_d(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d(w_n(y)) \quad (1)$$

これは ν -a.e. で定数である。また、確率測度として配位空間の平衡状態を与える Gibbs 測度をとれば、この不等式の等号が成立する。 $A^{\mathbf{Z}}$ 上の Gibbs 測度とは、 $A^{\mathbf{Z}}$ 上の連続関数 $U(x)$ を決めた時に $P, C_1, C_2 > 0$ として

$$C_1 \leq \frac{\mu([x_0 \cdots x_{m-1}])}{\exp(-mP - \sum_{i=0}^{m-1} U(\sigma^i x))} \leq C_2$$

となるものである [1]。ここで $(\sigma x)_j = x_{j+1}$ はシフト写像であり、Gibbs 測度はポテンシャル関数 U による歪みのもとで一様な単語の出現確率を表している。

本稿の設定のもとでエントロピーが非増加になることは自明だが、この不等式はエントロピーの減少率を力学系の局所的な構造から説明していると解釈できる。アトラクタの構造との関係は簡単な場合にしかわかっていない。また、空間的な位相エントロピーの減少率がアトラクタではないシフト不変集合の位相エントロピーで決まってくるのが予想されている。

参考文献

- [1] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer lecture note on mathematics vol.470
- [2] G.A. Hedlund, *Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System*, Math. Systems Theory 3 (1969) 320-375
- [3] M. Hurley, *Attractors in Cellular Automata*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 10 (1990) 131-140
- [4] M. Miyamoto, *An equilibrium state for a one-dimensional life game*, J. Math. Kyoto Univ. 19-3 (1979) 525-540
- [5] T. Namiki, *The Degree function and Cellular Dynamics*, Proc. Japan Acad., 71 Ser. A (1995)
- [6] M. Nasu, *Textile Systems for Endomorphisms and Automorphisms of the Shift*, to appear in Memoirs of American Mathematical Society.
- [7] J. von Neumann, *Theory of Self Reproducing Automata*, Univ. Illinois Press (1966)
- [8] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1984)

可逆セルオートマトンの統計力学と動力学

京都大学総合人間学部 武末真二

1 序

ここでは、簡単なセルオートマトンのモデルを用いて、微視的力学法則と輸送現象の性質との関係について考察を行なう。具体的な現象としては熱輸送を取り扱い、そこでフーリエ則のような拡散的挙動が現われ熱伝導率に対する久保公式が成立するためには、どのような条件が必要であるかということを中心に考える。拡散を示す力学モデルとしては、他に田崎 [1, 2] らによる結合写像系や、蕪木、町田 [3] によるハミルトン力学系の例がある。それらと比較した場合、セルオートマトンは、(i) 時間・空間・状態のすべてが離散的なモデルである、(ii) シミュレーションを行なう場合、ハミルトン系のような大規模な計算を要しない。したがってより詳しい情報を得ることができる、という特徴を持つ。

2 モデル

我々が用いるモデルは、ERCA (Elementary Reversible Cellular Automata) と呼ぶ次のような可逆セルオートマトンの族である。すなわち、ERCA とは、各格子点 i に値 $0, 1$ を取る変数が 2 個 ($\sigma_i, \hat{\sigma}_i$ と表す) 存在して、それらの時間発展規則が次式で表されるような力学系をいう。

$$\sigma_i^{t+1} = f(\sigma_{i-1}^t, \sigma_i^t, \sigma_{i+1}^t) \oplus \hat{\sigma}_i^t \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}_i^{t+1} = \sigma_i^t \quad (2)$$

ここで時刻 t は整数値を取り、 f は $0, 1$ の値を取る 3 変数関数である。また \oplus は、 $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ 、 $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ で定義される排他的論理和と呼ばれる 2 項演算を表す。この系が時間反転対称性を持つことは、式の形から明らかである。また、場合によっては簡便のために $x_i^t = (\sigma_i^t, \hat{\sigma}_i^t)$ とし、式 (1)、(2) をまとめて

$$x_i^{t+1} = g(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t) \quad (3)$$

のように表すことにしよう。関数 f を与えれば時間発展則 (ルール) が決まるので、 f の数 $2^{2^3} = 256$ 個の異なるルールが ERCA に属することになる。それぞれのルールを区別するために、関数 f で表されるルールに対して数字

$$\sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 \sum_{c=0}^1 f(a, b, c) 2^{4a+2b+c}$$

に「可逆」を表す R をつけて「ルール 26R」などと呼ぶことにする。ルール 0R からルール 255R までの 256 個のルールを、左右反転対称性と 0 と 1 の入れ替えの対称性で分類すると、本質的に異なるルールは 88 個になる。

3 加法的保存量

ERCA の各ルールに対し、次の形の保存量が存在するかどうかを考えよう。

$$F(x_i^{t+1}, x_{i+1}^{t+1}, \dots, x_{i+\alpha}^{t+1}) = F(x_i^t, x_{i+1}^t, \dots, x_{i+\alpha}^t) + J(x_{i-1}^t, \dots, x_{i+\alpha}^t) - J(x_i^t, \dots, x_{i+\alpha+1}^t) \quad (4)$$

ここで α は与えられた自然数とする。上式は連続の式を離散化したものであるから、適当な関数 F 、 J を持ってきたとき、任意の $x_{i-1}^t, x_i^t, \dots, x_{i+\alpha+1}^t$ に対して上式が成立するならば、 F を加法的保存量の密度、 J をその流れを表すものとみなすことができる。さらにこのような保存量が存在する場合、周期境界条件のもとでの和

$$\mathcal{H}_N(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} F(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+\alpha})$$

を（統計力学の意味における）ハミルトニアンと考えて、通常の平衡統計力学の議論を行なうことができる。例えば、温度が格子点あたりの平均エネルギー $\phi = \langle F(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+\alpha}) \rangle_{eq}$ の関数として求められる。

このような関数 F と J が存在するかどうかはルールによって、また α の値によっても異なる。さらに、このような保存量が存在したとしても、 \mathcal{H}_N のみならず $F(x_i, \dots, x_{i+\alpha})$ 自身が不変量になる（つまり J が恒等的に 0 になる）場合には、統計力学の議論が成り立たないことはいうまでもない。そこで、 $\alpha = 1$ の加法的保存量が存在するが、 F 自身が保存するような量は（ $\alpha = 2, 3$ においても）持たないルールを書き出してみると表 1 の 7 個が得られる [4]。また各ルールに対し、 $\alpha = 2, 3$ でそれぞれ何個の保存量が新たに出現するかを求めてみると、表 1 の右の欄のようになる。以下では主として $\alpha = 1$ の保存量に対する統計力学を考え、 $\alpha > 1$ の量はそれに対する影響という形で考慮することにする。

ルール	$\alpha = 1$ 加法的保存量	$\alpha = 2, 3$ 加法的保存量
26R	A	なし
77R	C	2, 0
90R	A, D	2, 4
91R	B, D	1, 0
94R	D	なし
95R	D	1, 2
123R	B, D	なし

表 1：加法的保存量。「 $\alpha = 2, 3$ 保存量」の欄は $\alpha = 2$ および 3 で新たに出現する保存量の個数。

「 $\alpha = 1$ 保存量」の欄の A, B, C, D は保存量の種類を表し、それぞれに対する $F(\sigma, \hat{\sigma}, \nu, \hat{\nu})$ は、

$$A: (\hat{\sigma} - \nu)^2 + (\sigma - \hat{\nu})^2$$

$$B: 1 + \sigma\hat{\sigma} + \nu\hat{\nu} - [1 - 2(1 - \sigma)(1 - \hat{\nu})][1 - 2(1 - \hat{\sigma})(1 - \nu)]$$

$$C: \sigma\hat{\nu}(1 - 2\hat{\sigma} - \nu) - \hat{\sigma}\nu(1 - 2\sigma - 2\hat{\nu})$$

$$D: (\hat{\sigma} - \nu)^2 - (\sigma - \hat{\nu})^2$$

4 熱伝導

我々はセルオートマトンに温度を導入できたので、系の両端に異なる温度の熱浴を取付けることによって、エネルギー輸送すなわち熱伝導を引き起こすことが可能になる。

熱浴は両端の変数を確率的に更新することによって表すことができる。具体的には、 N 個の格子点からなる系に対し、熱浴を表す格子点 0 と $N+1$ を加え、格子点 1 から N までの変数を式 (1), (2) に従って状態更新した後、格子点 0 と $N+1$ の変数は、条件付き確率

$$\mu_L(x_0|x_1) = \mathcal{N}_L \exp[-\beta_L F(x_0, x_1)] \quad (5)$$

$$\mu_R(x_{N+1}|x_N) = \mathcal{N}_R \exp[-\beta_R F(x_N, x_{N+1})] \quad (6)$$

に従って状態を選ぶものとする。ただしここで F は、表 1 のルールに対し $\alpha = 1$ の加法的保存量密度を 1 個選んだもので、それ以外の保存量は無視している。また、 β_L, β_R はそれぞれ左端、右端の熱浴の逆温度を表し、 $\mathcal{N}_L, \mathcal{N}_R$ は規格化定数である。

このとき、系全体の状態が $\{x_i\} = (x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1})$ から $\{x'_i\} = (x'_0, x'_1, \dots, x'_N, x'_{N+1})$ に遷移する確率は、

$$P(\{x'_i\}|\{x_i\}) = \mu_L(x'_0|x'_1) \mu_R(x'_{N+1}|x'_N) \prod_{i=1}^N \delta(x'_i, g(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})) \quad (7)$$

($\delta(x, y)$ はクロネッカーのデルタ: $\delta(x, y) = 1$ for $x = y$, $\delta(x, y) = 0$ for $x \neq y$) であり、分布関数 $\rho(\{x_i\})$ の時間発展演算子 T_* は P を用いて

$$T_* \rho(\{x_i\}) = \sum_{\{x'_i\}} P(\{x_i\}|\{x'_i\}) \rho(\{x'_i\}) \quad (8)$$

と表される。

この境界条件の下ではどういうことが起こるだろうか。 $\beta_L = \beta_R = \beta$ の場合には、ギブス分布 $\rho_{eq}(\{x_i\}) = \mathcal{N}_{eq} \exp[-\beta \sum_{i=0}^N F(x_i, x_{i+1})]$ (\mathcal{N}_{eq} は規格化定数) が定常分布となる、すなわち $T_* \rho_{eq} = \rho_{eq}$ であることを厳密に示すことができる。したがって、この境界条件は確かに熱浴を表しているといえる。 $\beta_L \neq \beta_R$ の場合、任意の初期分布 ρ に対して $t \rightarrow \infty$ で $T_*^t \rho \rightarrow \rho_{ss}$ となることを仮定すれば、定常分布 ρ_{ss} は、

$$\rho_{ss} = \rho + \sum_{t=0}^{\infty} T_*^t (T_* - 1) \rho \quad (9)$$

と表される。ここで ρ の代わりに局所平衡分布

$$\rho_{le}(\{x_i\}) = \mathcal{N}_{le} \prod_{i=0}^N \exp[-\beta_i F(x_i, x_{i+1})] \quad (10)$$

(\mathcal{N}_{le} は規格化定数) を代入し、 $j = N^{-1} \sum_{i=1}^N J(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ の ρ_{ss} に関する平均を求め、温度勾配に関して展開して 1 次まで取ると、熱流が温度勾配に比例するフーリエの法則

$$\langle j \rangle_{ss} = -\kappa \nabla T \quad (11)$$

と、熱伝導率 κ に関する久保公式

$$\kappa = \frac{1}{NT^2} \sum_{t=0}^{\infty} \langle \mathcal{J}(0) \mathcal{J}(t) \rangle_{eq} \left(1 - \frac{\delta_{t0}}{2} \right) \quad (12)$$

(ここで、 $\mathcal{J}(t) = \sum_i J(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$ 、 $\langle \rangle_{eq}$ は平衡状態での平均を表す) が得られる。また、右辺の和の中で、時刻 $t=0$ の項が局所平衡分布からの寄与を表し、時刻 $t>0$ の項が局所平衡からのずれが寄与する部分を表す。

しかし、このような温度勾配に関する展開が許されるかどうかはまさに問題となる点であり、このことは時間発展のルールに大いに依存する。この点に関する一般的な理論は存在しない。したがって、実際にどのような振る舞いを示すかは、シミュレーションに頼ることになる。

5 シミュレーション

シミュレーションは、表1の7個のルールとそれぞれの $\alpha=1$ 加法的保存量に対し、式(1)、(2)、(5)、(6)で与えられる時間発展を実行することによって行なった。まず問題となるのは、局所的な温度をどのように定義するかであるが、ここでは以下の方法にしたがう。 $\alpha=1$ 保存量は最近接相互作用のエネルギーを表すので、ボンドがエネルギーを担う。そこでボンド $(i, i+1)$ における温度 $T_i = \beta_i^{-1}$ を、ボンド $(i, i+1)$ でのエネルギーの時間平均 $\phi_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F(x_i^t, x_{i+1}^t)$ から、エネルギーと温度に関する平衡の関係式を用いて決めるものとする。

フーリエの法則(11)の成立・不成立を見るにはいろいろな測定が考えられるが、ここで行なったのは、(i) 大域的な温度勾配が形成されるかどうか、またそのサイズ依存性はどのようになるか。(ii) 温度勾配が形成される場合、ある大きさの系で両端の温度をいろいろ変えて測定したとき、式(11)は確かに成立しているか。(iii) 式(11)が成り立つならば $N\langle j \rangle_{ss}$ は両端の温度だけで決まり、系の大きさ N に依存しない量になるはずだが、 N が大きいときにそのようになっているか。(iv) 熱伝導率に対する久保公式(12)は成立するか。(v) 局所平衡はどれくらい良く成り立っているか、の以上5項目である。(i)から(iv)までは順に厳しいテストになっている[5]。

測定(v)について少し解説しよう。一般に、ある分布の別の分布からのずれは Kullback-Leibler 情報量、あるいは相対エントロピーと呼ばれる量によって定量化することができる。例えば、定常分布 $\rho_{ss}(\{x_i\})$ と局所平衡分布 $\rho_{le}(\{x_i\})$ の相対エントロピーは

$$S(\rho_{ss}|\rho_{le}) = \sum_{\{x_i\}} \rho_{ss}(\{x_i\}) \log \left(\frac{\rho_{ss}(\{x_i\})}{\rho_{le}(\{x_i\})} \right) \quad (13)$$

で与えられる。しかし、この量自身をシミュレーションによって求めることは困難なので、まず次式で定義される局所的な相対エントロピーを考える。

$$S_i = \sum_{x_i, x_{i+1}} p_i^{ex}(x_i, x_{i+1}) \log \left(\frac{p_i^{ex}(x_i, x_{i+1})}{p_i^{le}(x_i, x_{i+1})} \right) \quad (14)$$

ここで、 p_i^{ex} は数値的に求めたボンド $(i, i+1)$ での定常確率分布、 p_i^{le} は数値的に得た局所温度 $T_i = \beta^{-1}$ に対応するボンド $(i, i+1)$ の局所平衡分布 $p_i^{le}(x_i, x_{i+1}) = \mathcal{N}_i \exp[-\beta_i F(x_i, x_{i+1})]$ (\mathcal{N}_i は規格化定数) である。この局所的な相対エントロピーの和

$$S_{tot} = \sum_{i=0}^N S_i \quad (15)$$

を式 (13) の代わりに用いる。式 (15) は ρ_{ss} 、 ρ_{le} が共に積分布であるならば式 (13) に一致する。また、上で説明した局所温度の決め方は、 S_{tot} を最小化するような $\{\beta_i\}$ を選んでいくことと同じになり、この意味でも相対エントロピーによって局所平衡からのずれを定量化するのは自然である。

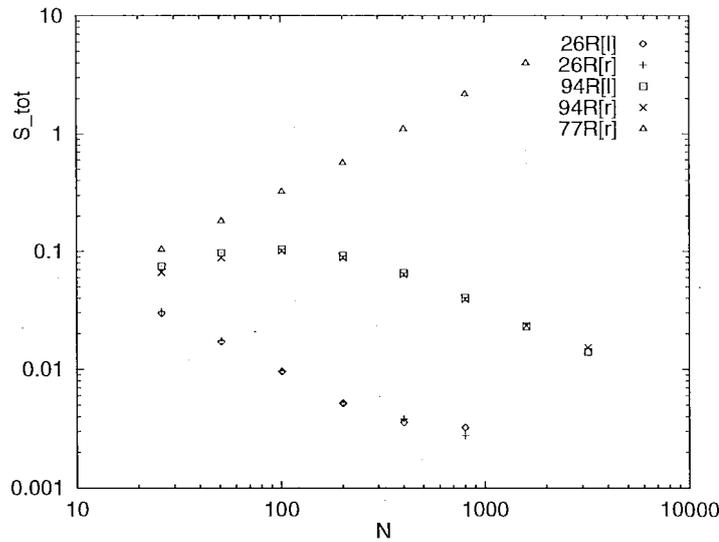


図1：相対エントロピーのサイズ依存性。[]内の記号は境界での温度の違いを表す。

l は $\beta_L = 0.8$ 、 $\beta_R = 1.25$ 、r は $\beta_L = 1.25$ 、 $\beta_R = 0.8$ の場合。

代表的な3個のルールに対する測定結果は図1のようになった。これからわかるように、ルール26Rと94Rでは系を大きくしていったときに S_{tot} は減少して0に向かうのに対し、ルール77Rでは最終的に N に比例して増大する。すなわち、ルール77Rでは局所的にも定常分布と局所平衡分布との間にずれがあり、系を大きくしてもそれが残るのに対して、26Rと94Rではそのずれはどんどん小さくなっていく。実は後者の2個のルールはフーリエ則が成立するルールであるのに対し、77Rは(ii)までの測定ではフーリエ則の結果と一致するが、(iii)以下の測定ではフーリエ則と合わない結果を示す。このように、フーリエ則の成立・不成立と局所平衡の成立・不成立とは密接な関係を持っている。

測定(i)-(v)の結果から得られたルールごとの振る舞いをまとめると次のようになる。

26R, 94R: 大域的な温度勾配を形成し、熱流は系が大きいつきフーリエ則に従い、熱伝導率は久保公式による値と一致する。定常分布は系を大きくすると局所平衡分布に近づく。

77R: 系が小さいときは大域的な温度勾配が形成されるが、熱流はフーリエ則には従わず、温度勾配ではなく両端の熱浴の温度差に比例して変化する。局所平衡からのずれが局所的にも残る。

91R, 123R: 境界付近で温度勾配が見られるが、内部に向かって指数関数に近い形で急速に勾配は消滅する。熱流は熱浴の温度差に比例。

95R, 90R: ほぼ完全に平らな温度分布を示し、温度勾配は誤差の範囲内で 0。(90R では 0 であることを証明できる。) 熱流は熱浴の温度差に比例。

以上 4 種類に分類したが、ルール 26R、94R とその他のルールの間には明確なギャップがあるが、それ以外は単に定量的な差である可能性もあることを注意しておく。前者を拡散的挙動、後者を弾道的挙動と呼ぶことにしよう。

6 ボルツマン型方程式による保存量の制御

前節の結果と表 1 を対照してみると、ルール 26R と 94R という、加法的保存量を 1 個しか持たないルールだけがフーリエ則を満たしているということに気づく。そこで、他の保存量が存在することによる効果を取り除くことを考えてみよう。これは、ボルツマン型の方程式を考えることにより行なうことができる。

まずボルツマン型の方程式を導く。格子点 i から $i+\gamma$ までの $\gamma+1$ 個の格子点上の変数の確率分布を $P_i(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+\gamma})$ とし、力学変数ではなくこの分布関数の時間発展を考えると、リウヴィル方程式 (8) からのデカップリングにより、 $i=1, 2, \dots, N-\gamma$ に対しては

$$P_i^{t+1}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+\gamma}) = \sum_{x'_{i-1}, \dots, x'_{i+\gamma+1}} \frac{P_{i-1}^t(x'_{i-1}, \dots, x'_{i+\gamma-1}) P_i^t(x'_i, \dots, x'_{i+\gamma}) P_{i+1}^t(x'_{i+1}, \dots, x'_{i+\gamma+1})}{\sum_a P_{i-1}^t(a, x'_i, \dots, x'_{i+\gamma-1}) \sum_b P_{i+1}^t(x'_{i+1}, \dots, x'_{i+\gamma}, b)} \times \prod_{j=i}^{i+\gamma} \delta(x_j, g(x'_{j-1}, x'_j, x'_{j+1})) \quad (16)$$

境界すなわち $i=0, N+1-\gamma$ に対しては

$$P_0^{t+1}(x_0, x_1, \dots, x_\gamma) = \mu_L(x_0|x_1) \sum_b P_1^{t+1}(x_1, \dots, x_\gamma, b) \quad (17)$$

$$P_{N+1-\gamma}^{t+1}(x_{N+1-\gamma}, \dots, x_{N+1}) = \mu_R(x_{N+1}|x_N) \sum_a P_{N-\gamma}^{t+1}(a, x_{N+1-\gamma}, \dots, x_N) \quad (18)$$

という近似式を導くことができる。これがボルツマン型方程式である。

この近似は確率としての一貫性を保ち、 $\alpha \leq \gamma$ の加法的保存量に対する連続の式 (4) を期待値の形で満足する。そこで $\gamma=1$ および 2 の場合について、初期条件を (一貫性を壊さないように)

$$P_i^0(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+\gamma}) = 4^{-\gamma-1} \quad (19)$$

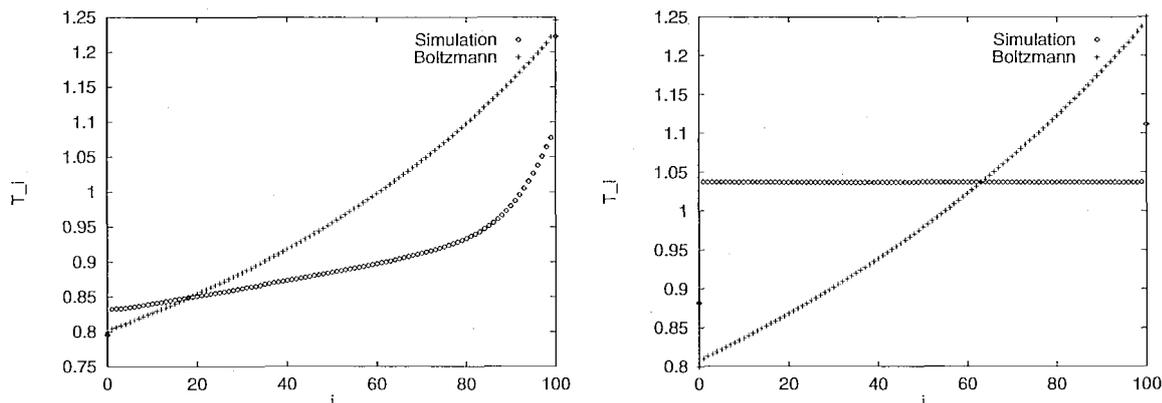


図2: $\gamma = 1$ ボルツマン型近似とシミュレーションにおける温度勾配の比較。左が 77R、右が 95R。

と選び、収束するまで式 (16–18) を繰り返すことにより、この近似に対する定常分布を数値的に求めた。

その結果 $\gamma = 1$ では、ルール 77R と 95R に図 2 のような滑らかな大域的な温度勾配ができるという変化が見られたが、それ以外のルールについてはあまり大きな変化は見られなかった。また $\gamma = 2$ では、ルール 95R は平らな温度分布に戻り、77R も分布の形が多少違うものの、系の大きさとともに温度勾配が消えていき弾道的挙動になるという、シミュレーションと同じような結果を示すようになった。これは $\gamma = 1$ のボルツマン型近似では $\alpha \geq 2$ の加法的保存量が有効でなくなるので、ルール 77R と 95R に関しては保存量が 1 個だけになり、ルール 26R や 94R と同じ条件になるからだと解釈できる。

同様の結論が次のルール混合の実験によっても支持される。あるルール X による時間発展の中で、20 回に 1 回別のルール Y によって状態を更新させるものとしよう。この時間発展においては、ルール X とルール Y とが共通に持っている保存量だけが保存され、それ以外の量は保存量でなくなってしまう。例えば、ルール 90R にルール 91R を混ぜてやると、表 1 の量 D は保存されるが、量 A や B は保存されなくなる。このような計算機実験を行なうと、例えば表 2 の量 D を保存するルールどうしの混合では、ルール 91R と 123R を混合したときのみ温度勾配は形成されず、それ以外の場合は大域的に温度勾配が形成されるという結果が得られた。また、温度勾配が形成される場合に熱流のサイズ依存性を見てみると、フーリエ則が成立していることも確認された。ルール 91R と 123R の場合には、2 個の保存量 B, D を共有しているが、他の組み合わせでは量 D だけが保存量となるので、この実験でも保存量が 1 個のときにフーリエ則が成立するという結果が得られたことになる。

7 まとめ

これまでの結果は次のようにまとめることができる。すなわち、ERCA においてフーリエの法則が成立するのは保存量が 1 個だけの場合に限る。加法的保存量が 2 個以上存在する場合には、一方が他方の量の拡散的振る舞いに対し障害として働く。別の言い方をすれ

ば、保存量が1個の場合には、フーリエの法則のような拡散的挙動がかなり普遍的に成り立つということになる。

しかし、この段階ではまだ、数値実験の結果のまとめとしてそういうことがいえるというだけであり、では他の保存量はどのようにしてフーリエ則に対する障害として働くのか、保存量が1個の場合のフーリエ則の不変性の起源は何か、という新たな疑問が生ずる。実際、定常状態ではなく、緩和の様子を調べてみると、定常状態では弾道的でありながら拡散に近い緩和の振る舞いを示す場合も存在する。ここで得られた知見に対する一般性の確認や理論的裏付けは今後の問題である。

参考文献

- [1] 田崎秀一、「多重パイこね変換における非平衡状態とフラクタル測度」(本報告集)
- [2] S. Tasaki and P. Gaspard, "Fick's Law and Fractality of Nonequilibrium Stationary States in a Reversible Multibaker Map," submitted to J. Stat. Phys.
- [3] H. Kaburaki and M. Machida, "Thermal conductivity in one-dimensional lattices of Fermi-Pasta-Ulam type," Phys. Lett. **A181** (1993) 85-90.
- [4] T. Hattori and S. Takesue, "Additive Conserved Quantities in Discrete-Time Lattice Dynamical Systems," Physica D **49** (1991) 295.
- [5] S. Takesue, "Fourier's Law and the Green-Kubo Formula in a Cellular-Automaton Model," Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 252.

計算論的な網設計基礎の模索

下川信祐 (simogawa@atr-rd.atr.co.jp)

ATR光電波通信研究所

複雑なシステムの設計には論理的・客観的な枠組みが不可欠である。しかしながら、通信網やそのサブシステムの設計においては、論理的な分析に耐え得る基礎付けがなされてきたとは言い難い。実際、開発や運用の諸局面で問題が生ずると、これに対処すべく、部分的な枠組みが考案されてはきたが、一貫した設計基礎は存在しない。このため、複雑化が著しい近年の研究開発では、設計・評価の遂行が様々な困難に遭遇し [St], [Sm1], [Sm2], [Sm3], 網の健全な発達を阻害しつつある。

網・システム設計の基礎を構成する上で、最初の大きな課題は、設計対象である網・サブシステム自身や、その仕様を数学的にどのように捉えていくかである。通信網は豊富な通信を合理的に提供する為のシステムであり、かかる網の能力(capability)を記述することが肝要である。

従来は、共用による資源節約が網の意味とされ、スイッチと回線や待ち行列における輻輳（混雑）を用いた資源節約のモデルが与えられている（たとえば[Fj]）。しかしながら、資源節約モデルや輻輳は、網能力の表現方法としてあまりにも脆弱である。実際、網発達の諸相や基本的な資源割当制御パラメータの能力的意味を与えることができず、出口の見えない実験的設計に大きく依存しつつある。

一方、計算科学の発達により、並行計算の数学的な記述が進展し（たとえば[Ac][M] [Hr]）、通信網やそのサブシステムといった並列分散システムに対しても、柔軟で精密な数学的表現に可能性が見えてきた。本講演では、これらの発展と整合性が期待できる計算論的なシステムの能力記述視点を導入し、網発達や輻輳に能力的意味が与えられることを述べた。それは、以下のようなものである。

まず、‘計算系’ A, Bが与えられたとき、系Aが系Bより能力が大きいとはAがBの全ての計算過程をシミュレートするときである。この規定は、一般のシステムを計算系と見すことで、広く適用できる。即ち、システムが処理する対象（プロセス等）を適宜規定することによって、通信路容量・スイッチング&バッファリングの能力的意味・輻輳による性能劣化の意味・網発達による能力増大・貨幣価値等の一貫した記述が可能である。

今後は、このアプローチを設計の問題へ適用し、有効性や実質的な枠組みの構成を検討していく。

文献

[Ac]Aczel, P., Non-well-founded Sets, CSLI Lecture Notes 14. CSLI 1988. [Fj]藤木, 雁部, 通信トラヒック理論. 丸善 1980. [Hr]Hoare, C.A.R., Communicating Sequential Processes. Prentice-Hall 1985 (邦訳, 吉田信博, ホーアCSPモデルの理論 丸善 1992). [M]Milner, R., Communication and Concurrency. Prentice-Hall 1989. [Sm1]下川信祐, 通信網の複雑化と性能評価技術の課題, in The First Sapporo Symposium on Complex Systems, ed., Y. Okabe, Proc. Complex Systems Research Group of Sapporo, No. 1, (北海道大学数学講究録 #33) pp.10-11(1994). [Sm2]下川信祐, Modeling of infinitely intermittent traffic streams via the Palm theory, 1994年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, pp195-196(1994). [Sm3]Shingawa, S., and Takahashi, Y., On a set of interdeparture time distributions of the M/G/1 queue with server vacations, J. Operat Res. Soc. Japan, Vol. 36, No. 4, pp.206-219(1993). [St]斎藤 洋, これからのトラヒック設計を目指して: ノンパラメトリック法によるATMセル損失評価, 電子情報通信学会論文誌, B-I, Vol. J 76-B-I, No. 3, pp.197-208(1993).[Ac]Aczel, P., Non-well-founded Sets, CSLI Lecture Notes 14. CSLI 1988.

Dynamical Systems Approach in Learnable Autonomous Robots

Jun Tani

Sony Computer Science Laboratory Inc.
Takanawa Muse Building, 3-14-13 Higashi-gotanda,
Shinagawa-ku, Tokyo, 141 JAPAN
email: tani@csl.sony.co.jp
Fax +81-3-5448-4273
Tel +81-3-5448-4380

March 23, 1995

Abstract

This paper studies the essential dynamical structure that arises in two different classes of learning of the sensory-based navigation, namely *skill-based learning* and *model-based learning*. In *skill-based learning* a robot learns navigational skills for a fixed navigational task such as *homing*, while in *model-based learning* a robot learns a model of the environment, then conducts planning on the model to reach an arbitrary goal. We formulated that the former is achieved by learning the state-action map, and the latter does by learning the forward model of the environment, using recurrent neural learning scheme. The analysis of the dynamical structure from the coupling of the internal neural dynamics and the environment showed that generation of the global attractor is crucial for both learning cases. Experiments were conducted using a mobile robot with a laser range sensor, which verified our assertions in a simple obstacle environment.

1 Introduction

Recently, many have discussed how the knowledge should be represented internally for a mobile robot that navigates based on its local sensory inputs. Conventionally, the navigation problem has been approached in rather straightforward manner. A global representation formula is employed: a robot builds an environmental map, represented in global coordinates, by gathering geometrical information as it travels [2]. Although a variety of methodologies has been proposed in this context, potential problems still remain, especially in robot localization. The localization is not always robust enough in the noisy environments of the real-world since there exist gaps between the knowledge of the global map and the information provided by the local sensory inputs. The problem to consider is how the task knowledge can be represented as intrinsic [3] to the robot, and how such representations can be obtained through its behavioral experiences.

Others [7, 13] have developed an alternative approach based on landmark detection. In this approach, the robot acquires a graph-type representation of landmark types. This representation is equivalent to a finite state machine (FSM), as a topological modeling of the environment. In navigation, the robot can identify its topological position by anticipating the landmark types in the FSM representation. This scheme enables the robot to acquire the internal model of the obstacle environment by a local representation scheme. It is, however, considered that the representations by the FSM are still “parasitic” since symbols manipulated in the FSM are in the arbitrary shape regardless of their meaning in the physical world. A crucial gap exists between the actual physical systems defined in the metric space and their representation in the non-metric space, which makes the discussion of the structural stability of the whole system difficult.

This paper addresses the above problems by using the dynamical system’s approach [1, 4, 10], expecting that this approach would provide other effective representational. The approach focuses on the fundamental dynamical structure that arises from coupling the internal and the environmental dynamics [1]. Here, the objective of learning is to adapt the internal dynamical function such that the resultant

dynamical structure might generate the desired system behavior. The system’s performance becomes structurally stable if the dynamical structure maintains a sufficiently large basin of attraction against possible perturbations. The most advantage of this approach is that we are able to conduct structural analyses of the system by fact that the internal representations, embedded into attractor dynamics, share the same metric space with the physical environment.

We investigate two classes of task learning, namely *skill-based learning* and *model-based learning*. The *skill-based learning* aims to ensure that a robot will acquire skills (represented as a state-action map) for a fixed navigational task, such as homing or cyclic routing, under the supervision of a trainer. In the *model-based learning* the robot learns the internal model of the environment rather than the direct state-action map so that the robot may adapt flexibly to different goal tasks. An important difference between two is that, in the former approach, the action is determined in a reactive way just by looking up the map while it is determined in a deliberative way through *mental simulation* of the model in the latter approach. We study how the state-action map or the environmental model can be represented by means of neural dynamical functions. Then we will explicate the conditions that each learning scheme should satisfy from the view point of dynamical systems.

2 Navigation Architecture

We review the navigation architecture [11] which is applied to the *YAMABICO* mobile robot [14]. *YAMABICO* can obtain the range image, covering a 160 degree arc in front of the robot, by a laser range finder in real-time.

In our formulation, maneuvering commands are generated as the output of a composite system consisting of two levels. The control level generates a collision-free, smooth trajectory using a variant of the potential field method [5]—i.e. the robot simply proceeds towards a particular potential hill in the range profile (direction toward an open space). The navigation level focuses on the topological changes in the range profile as the robot moves. As the robot moves through a given workspace, the profile gradually changes until another local peak appears when the robot reaches a branching point. At this moment of branching the navigation level decides whether to transfer the focus to the new local peak or to remain with the current one. The navigation level functions only at the branching point that appears in unconstructed environment. Hereafter, our discussions focus on how to determine the branching sequences.

3 Skill-Based Learning

The objective of *skill-based learning* is that the robot learns a fixed navigational task on the topological trajectory comprising branch points. We consider two specific tasks, namely homing and cyclic routing as examples. In the homing task, the robot has to travel back to a fixed branch point starting from an arbitrary position in the workspace. In the cyclic routing task, the robot have to travel into a fixed cyclic loop comprising branch points with starting from an arbitrary position.

3.1 Learning state-action map

The neural adaptation schemes are applied to the navigation level so that it can generate an adequate state-action map for a given task. Although some might consider that such map can be represented by using a layered feed-forward network with the inputs of the sensory image and the outputs of the motor command, this is not always true. The local sensory input does not always correspond uniquely to the true state of the robot (the sensory inputs could be the same for different robot positions). Therefore, there exists an ambiguity in determining the motor command solely from sensory inputs. This is a typical example of so-called non-Markovian problems which have been discussed by Lin and Mitchell [6]. In order to solve this ambiguity, a representation of contexts which are memories of past sensory sequences is required. For this purpose, a recurrent neural network (RNN) [4, 8] was employed since its recurrent context states could represent the memory of past sequences. The employed neural architecture is shown in Figure. 1. The sensory input p_n and the context units c_n determine the appropriate motor command x_{n+1} . The motor command x_n takes a binary value of 0 (staying at the current branch) or 1 (a transit to a new branch). The RNN learning of sensory-motor (p_n, x_{n+1}) sequences, sampled through the supervised

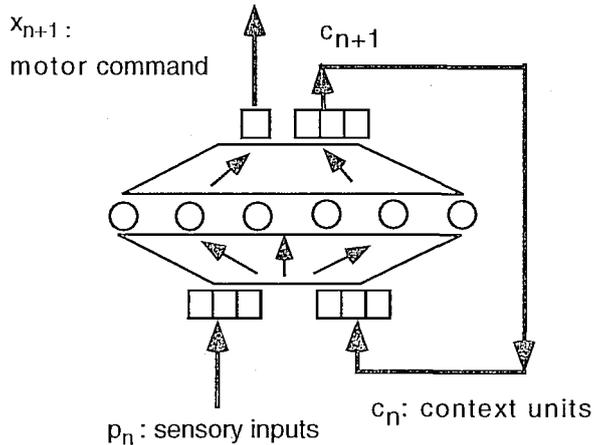


Figure 1: Neural architecture for skill-based learning.

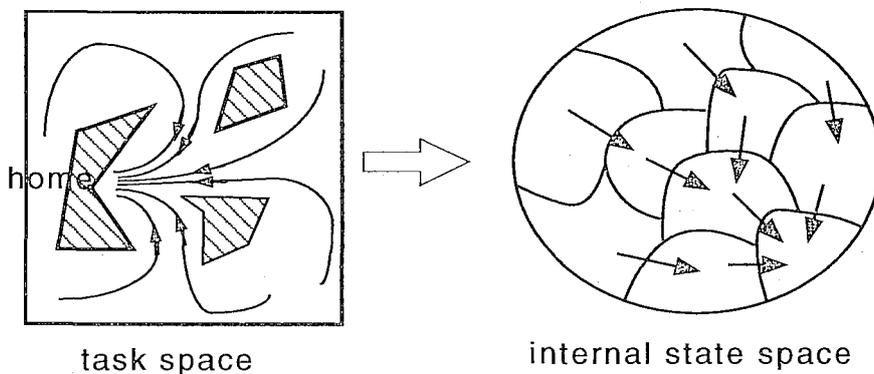


Figure 2: The desired trajectories in the task space and its mapping to the internal state space.

training, can build the desired state-action map by self-organizing adequate internal representation in time.

3.2 Embedding problem

The objective of the neural learning is to embed a task into certain global attractor dynamics which are generated from the coupling of the internal neural function and the environment. Figure 2 illustrates this idea. We define the internal state of the robot by the state of the RNN. The internal dynamics, which are coupled with the environmental dynamics through the sensory-motor loop, evolve as the robot travels in the task space. We assume that the desired vector field in the task space forms a global attractor, such as a fixed point for a homing task or limit cycling for a cyclic routing task. All that the robot has to do is to follow this vector flow by means of its internal state-action map. This requires a condition: the vector field in the internal state space should be self-organized as being topologically equivalent to that in the task space in order that the internal state determine the action (motor command) uniquely. This is the embedding problem from the task space to the internal state space, and RNN learning can attain this, using various training trajectories. This analysis conjectured that the trajectories in the task space can always converge into the desired one as long as the task is embedded into the global attractor in the internal state space.

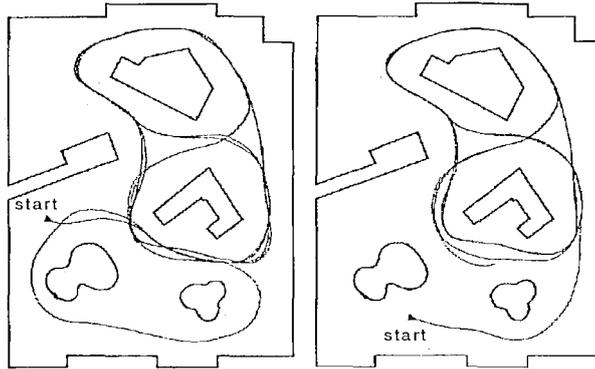


Figure 3: Trace of test travels for cyclic routing.

3.3 Experiment

An experiment of learning a cyclic routing task is presented. The assigned task is to repeat looping of a figure of '8' and '0' in sequence. In the training the robot moved by collision-free control, and branching of the navigation level was taught by the trainer. The employed RNN consists of three input units, eight hidden layer units, two context units and one output unit. The trainer guided the robot back to the target loop from arbitrary selected starting position. The travel of the training was repeated until the robot is assured of being capable of achieving the given task when started from an arbitrary position.

It was found that robot could achieve the task in a stable way after 10 times repetitions of the training. In the test travel, the robot was started from arbitrary initial positions, with setting the initial values of context units as random. Figure 3 shows examples of the test travels. The result appeared that the robot can converge to the desired loop from any position in the workspace. Its convergence, however, takes a certain period depending on the case. The RNN initially cannot output normally until the context units catch up the context. As the robot moves around the workspace, encountering a sequence of known sensory input, the orbit in the internal state space starts to converge from the initial transient one. Noises affects the navigation performance remarkably. When miscellaneous noise such as mechanical, sensory and radio noise is present, the branching sometime become unstable. Thus, even after convergence, the robot could by chance go out the loop, perturbed by such noise. However, it always comes back to the loop after while. Although the actual navigation contains stochastic property in its local decisions, it can be said that the structure of convergence is quite stable in terms of the global attractor dynamics generated.

4 Model-Based Learning

In this learning, the main concern is how a robot can acquire the internal model as an intrinsic function which enables the *mental simulation* of its own actions in the obstacle environment. Here, we attempt to apply the scheme of forward modeling [4] to the problem.

4.1 Forward modeling

The objective is to build a forward model through which a robot can conduct lookahead prediction of the sensory input sequence (as the distal output) as a result of the given motor program (of the proximal input) in branching sequence. (Hereafter, the term "motor program" denotes a sequence of motor commands.) The objective forward model is embodied using a standard discrete time RNN architecture, as shown in Figure 4. The mapping function of the RNN can be written as;

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= f_c(p_n, x_n, c_n, W_c) \\ \hat{p}_{n+1} &= f_p(p_n, x_n, c_n, W_p) \end{aligned} \quad (1)$$

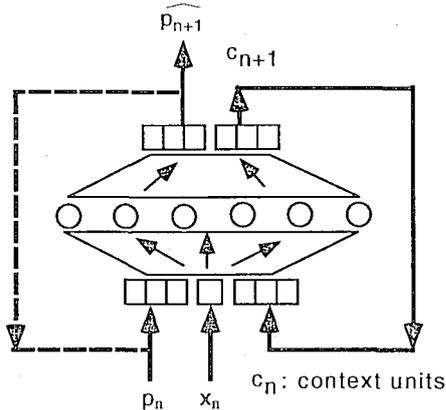


Figure 4: Forward model by RNN architecture.

where f_c and f_p are the nonlinear maps from the current branching step to the next branching step, and W_c and W_p denote parameter sets of connective weights. The forward model is acquired in the learning phase; the robot travels around the workspace with sampling the sensory-motor sequence in the branching, then the network is trained as off-line by using back-propagation through time algorithm [9].

After the learning phase is completed, the robot is operated in the so-called open-loop mode: the robot travels in the workspace by an arbitrary motor program while conducting the one-step lookahead prediction (predicts next sensory input as the result of the current motor command). The RNN predicts the next sensory input p_{n+1} by inputting the current sensory input p_n and the current motor command x_n to the network. The RNN, in the beginning of the travel, cannot predict the next sensory input correctly since the initial context value is set randomly. However, the context value can get *situated* as the RNN continues to receive the sensory-motor sequence during the travel, then the RNN begins to predict correctly.

After the robot is *situated* to the environment, the RNN can be switched into the closed-loop mode with stopping the robot at a branch point. Now, a lookahead prediction of an arbitrary length for a given motor program can be made by copying the previous prediction of the sensory input to the current sensory input. (As indicated by a dotted line in Figure 4, the closed-loop for the sensory input is made.) Let us denote the motor program as x^* . Then the lookahead prediction of the sensory input sequence p^* can be obtained by recursively applying x^* to the RNN mapping function, with using the initial values of context units c_0 and the sensory input p_0 which have been obtained in the open-loop mode.

4.2 Dynamical mechanism of *situatedness*

This sub-section investigates the mechanism of *situatedness* by focusing on the coupling between the internal neural dynamics and the environmental dynamics.

First, we will define the term “attractor” for both of the environmental and the internal dynamics. Let us consider the environmental dynamics F . We consider an infinite length of randomly generated binary sequences (the motor program x^*) to be fed into the robot. Let s^* be the resultant state transitions of the environmental state in the branching sequence. The environmental state s can be represented by the robot’s position (including the orientation) upon branching. In the ideal case with no noise in the environment, the infinite travel of the robot forms an invariant set s^* , since the trajectory of the robot is limited to be in a subspace of the entire workspace after an initial *transient* period. We define this invariant set as the attractor of F with respect to the excitatory input x^* . Also, we define an invariant set p^* for the sequence of the sensory input which s^* corresponds to. It is important to note that this attractor is the global attractor, since the robot’s travel starting from any position in the workspace results

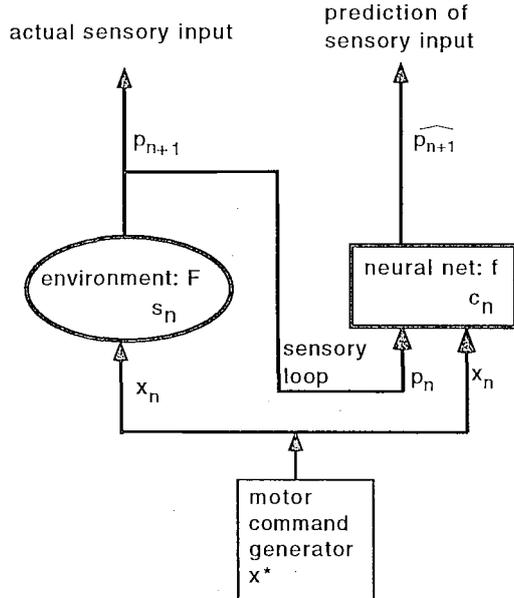


Figure 5: Entrainment of internal dynamics by environment.

in the same invariant set. For the neural dynamics f , let us consider a lookahead prediction of the RNN with respect to a motor program x^* of an infinite length which is randomly generated. This generates an infinite sequence of the transitions of the context c^* . When this infinite sequence forms an invariant set, this invariant set \underline{c}^* is defined as the attractor of f . The sensory sequence which corresponds to \underline{c}^* is indicated as \underline{p}^* . Depending on the learning process, the generation of the global attractor is not assured for f . Since the objective of learning is to make the neural dynamics f to emulate the environmental dynamics F by means of the sequence of the sensory input, f in the limit of a learning process satisfies, for an arbitrary motor program x^* , that:

$$\exists \underline{c}_0, \exists \underline{s}_0 \Rightarrow \underline{\hat{p}}^* = \underline{p}^* \quad (2)$$

The conclusion here is that there is, at least, one attractor for f by which the lookahead prediction of the sensory input can be made correctly, as satisfying (2). Now let us consider the coupling of these two dynamics. In the open-loop mode, the RNN predicts the next sensory inputs p_{n+1} using the current sensory inputs p_n while the robot travels following the motor program x^* . This coupling is schematically shown in Figure 5. In this coupling, it is conjectured that two sequences p^* and \hat{p}^* converge into the same sequence for all the initial states of s_0 and c_0 if f has been formed as global attractor dynamics. This implies that the internal dynamics, with arbitrary setting of the initial state, always become harmonized with the environmental dynamics and predict the sensory inputs correctly, as long as the internal model is embedded in the global attractor dynamics.

This feature of the entrainment of the internal dynamics by the environmental one assures an inherent robustness of the robot's behavior against temporal perturbations. The robot, during its travel, could lose its context if perturbed by noise. The robot, however, can get *situated* again by means of the entrainment as long as it continues to interact with the environment.

4.3 Experiment

4.4 Learning and lookahead prediction

We conducted experiments on the scheme using *YAMABICO*. The robot samples the data of the sensory-motor sequence while it wanders around the adopted workspace for a certain period, then it learns the forward model of the navigation level using the data obtained off-line. The adopted RNN architecture

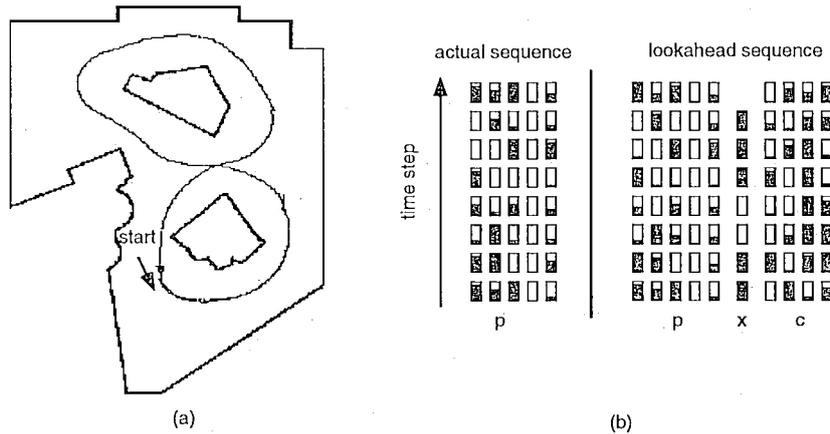


Figure 6: Lookahead prediction for a given motor program.

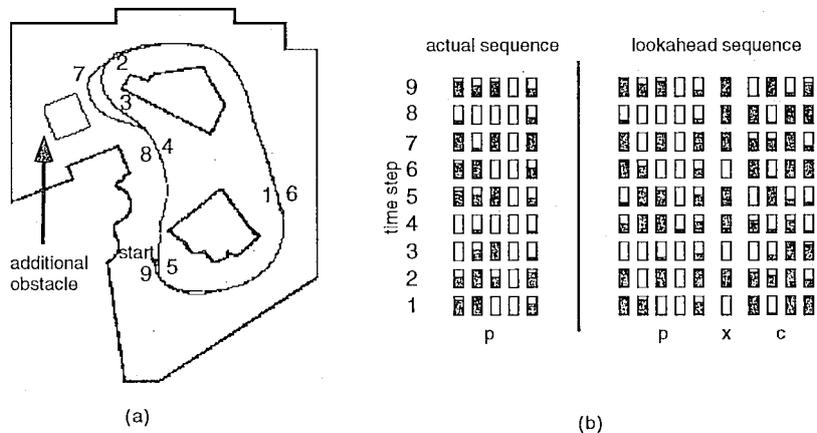


Figure 7: Auto-recovery from an addition of an obstacle.

is three-layered having 10, 12 and 9 units for the input, hidden, and output layers respectively. It has four context units. After learning 193 sampled data, it was observed that lookahead predictions became accurate except in cases with certain noise effects.

An example of a lookahead prediction test is shown in Figure 6. In (a) an arrow denotes the branching point where the robot conducted a lookahead prediction of a motor program given by 1100111 with switched to the closed-loop mode (after *get situated*). The robot, after conducting the predictions, traveled following the motor program, generating the trajectory of a “figure of eight”, as shown. In (b) the left side shows the sensory input sequence, while the right side shows those of the lookahead, the motor program and its context values. The values are indicated by the bar heights. It can be seen that the lookahead for the sensory inputs agrees very well with the actual values.

We have stated that the global attractor provides an inherent robustness for context dependent navigation as a natural consequence of coupling between the internal and the environmental dynamical systems. The following experiment shown in Figure 7 demonstrates an example of auto-recovery from temporal perturbation. The robot traveled in the workspace while predicting the next sensory inputs with the RNN switched to the open-loop mode. During this travel, an additional obstacle was introduced. The upper part of Figure 7 shows the trajectory of the robot’s travel; the lower part shows the comparison of the actual sensory inputs and corresponding one-step lookahead prediction. The branching sequence number is indexed beside the trajectory; this number corresponds to the prediction sequence in the lower

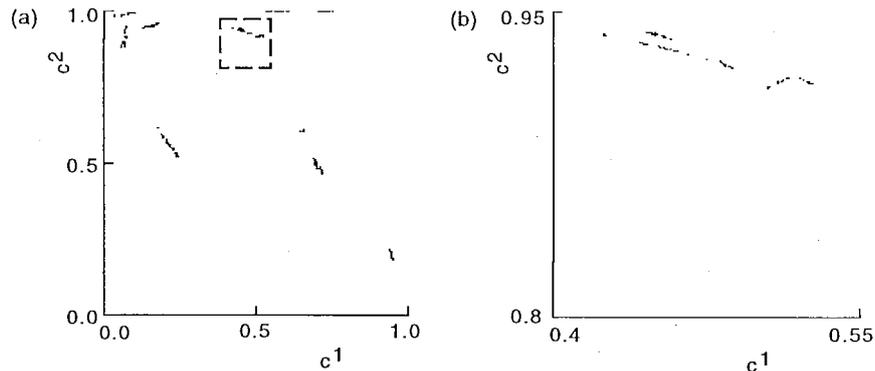


Figure 8: Attractor observed in the internal dynamics.

part of figure. The prediction starts to be incorrect once the robot passes the second branching point, as it encounters the unexpected obstacle. The robot, however, continues to travel and meanwhile the obstacle is removed. After the sixth branching point, as the lost context is recovered by means of the regular sensory feed, the prediction returns to the correct evaluation.

The repeated experiments showed that the mechanism of the auto-recovery is general. This implies that the learning of the RNN might have created the global attractor. In order to confirm this, we analyzed the dynamical structure self-organized in the RNN. The RNN, switched to the closed loop mode, was activated for two thousand forward steps using input sequences of random motor commands. The phase diagram was plotted as a two-dimensional projection using the activation state of two context units, excluding 100 points from the initial transient steps. Fig. 8(a) shows the resulting phase diagram, while (b) shows an enlargement of part of (a) in which a one-dimensional structure is seen. We repeated this several times with different initial values of the internal states, and found that they all resulted in the same attractor structure. It confirmed that the internal dynamics are self-organized in the form of the global attractor dynamics. Although any theory has not been established to explain the creation of low-dimensional global attractor in the recurrent neural learning, its tendency is suggested in other numerical experiments of learning simple grammatical descriptions [8, 12].

5 Discussion and Conclusion

We have investigated the dynamical structure that arises in the coupling of the internal neural function and the environment, and have shown that the generation of the global attractor is essential for the embedding as well as the entrainment discussed in the *skill-based learning* and *model-based learning* respectively.

Our formulations have also clarified essential differences in their dynamical compositions. In the *skill-based* scheme, the dynamical structure arises only from the coupling of the internal and the environmental dynamics when the robot actually travels. In the *model-based* scheme, attractor dynamics exists in the internal dynamics even when it is decoupled from the environmental one. This decoupling allows the robot to have a “symbolic process” which accounts for its cognitive activities of *mental simulation* or planning. This symbolic process can be grounded to the physical world by means of *situatedness* when coupled with the environmental dynamics.

References

- [1] R.D. Beer. A Dynamical System’s Perspective on Agent-Environment Interaction. *Artificial Intelligence*, in press.
- [2] A. Elfes. Sonar-based Real-world Mapping and Navigation. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 249–265, 1987.
- [3] S. Harnad. The Symbol Grounding Problem. *Physica D*, Vol. 42, pp. 335–346, 1990.
- [4] M.I. Jordan and D. E. Rumelhart. Forward models: Supervised Learning with a Distal Teacher. *Cognitive Science*, Vol. 16, pp. 307–354, 1992.

- [5] O. Khatib. Real-time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1, pp. 90–98, 1986.
- [6] Long-Ji Lin and T.M. Mitchell. Reinforcement Learning with Hidden States. In *proc. of the Second International Conference on Simulation of Adaptive Behavior*, 1992.
- [7] M. Mataric. Integration of Representation into Goal-driven Behavior-based Robot. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 8, pp. 304–312, 1992.
- [8] J.B. Pollack. The Induction of Dynamical Recognizers. *Machine Learning*, Vol. 7, pp. 227–252, 1991.
- [9] D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams. Learning Internal Representations by Error Propagation. In D.E. Rumelhart and J.L. McClelland, editors, *Parallel Distributed Processing*. MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [10] L. Steels. Mathematical Analysis of Behavior Systems. In *proc. of From Perception TO Action*, 1994.
- [11] J. Tani and N. Fukumura. Learning Goal-directed Sensory-based Navigation of a Mobile Robot. *Neural Networks*, Vol. 7, No. 3, pp. 553–563, 1994.
- [12] J. Tani and N. Fukumura. Embedding a grammatical description in deterministic chaos: an experiment in recurrent neural learning. *Biological Cybernetics*, in press.
- [13] B. M. Yamauchi and R. D. Beer. Spatial Learning for Navigation in Dynamic Environment. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, in press.
- [14] S. Yuta and J. Iijima. State Information Panel for Inter-Processor Communication in an Autonomous Mobile Robot Controller. In *proc. of the IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'90)*, 1990.

第三回複雑系札幌シンポジウム

1995年1月18日(水)—1月21日(土)

経済時系列の非線形因果解析

岡部靖憲 (東京大学工学部計数工学科)

中野裕治 (滋賀大学経済学部統計学科)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

数学としての因果性

$\mathbf{X} = (X(n); \ell \leq n \leq r)$: \mathbb{R}^{d_1} に値をとる確率過程 on (Ω, \mathcal{B}, P)

$\mathbf{Y} = (Y(n); \ell \leq n \leq r)$: \mathbb{R}^{d_2} に値をとる確率過程 on (Ω, \mathcal{B}, P) .

\mathbf{X} が原因で, \mathbf{Y} が結果であるという因果関係が存在するとは

任意の $n \in \mathbb{Z}$ ($\ell \leq n \leq r$) に対して, $(\mathbb{R}^{d_1})^{n-\ell+1}$ から \mathbb{R}^{d_2} へのボレル可測関数 F_n が存在して, 次が成り立つこととする:

$$Y(n) = F_n(X(n), X(n-1), \dots, X(\ell)) \quad \text{a.s.}$$

このとき, 次のように表示する:

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}.$$

確率過程のある時刻までの情報は σ -加法族で表現できる. 即ち, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ ($\ell \leq n \leq r$) に対して, σ -加法族 $B_\ell^n(\mathbf{X}), B_\ell^n(\mathbf{Y})$ を次で定める:

$$B_\ell^n(\mathbf{X}) \equiv \sigma(\{X(k)^{-1}(F); F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}), \ell \leq k \leq n\})$$

$$B_\ell^n(\mathbf{Y}) \equiv \sigma(\{Y(k)^{-1}(F); F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_2}), \ell \leq k \leq n\}).$$

このとき, 上で述べた因果関係の定義は次と同値になる:

$$B_\ell^n(\mathbf{Y}) \subset B_\ell^n(\mathbf{X}) \quad (\ell \leq \forall n \leq r).$$

さらに, $X(n), Y(n)$ ($\ell \leq n \leq r$) の各成分が 2 乗可積分であるときは, 次と同値である:

$$N_\ell^n(\mathbf{Y}) \subset N_\ell^n(\mathbf{X}) \quad (\ell \leq \forall n \leq r).$$

ここで, $N_\ell^n(\mathbf{Y}), N_\ell^n(\mathbf{X})$ は完備な計量ベクトル空間 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の閉部分空間である:

$$N_\ell^n(\mathbf{X}) \equiv \{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P); Z \text{ は } B_\ell^n(\mathbf{X})\text{-可測な確率変数である}\}$$

$$N_\ell^n(\mathbf{Y}) \equiv \{Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P); Z \text{ は } B_\ell^n(\mathbf{Y})\text{-可測な確率変数である}\}.$$

線形因果関係と因果関数

完備な計量ベクトル空間 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の閉部分空間 $M_\ell^r(\mathbf{X}), M_\ell^r(\mathbf{Y})$ を定義する :

$$M_\ell^r(\mathbf{X}) \equiv [X_j(k); \ell < k \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d_1]$$

$$M_\ell^r(\mathbf{Y}) \equiv [Y_j(k); \ell < k \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d_2].$$

\mathbf{X} が原因で, \mathbf{Y} が結果であるという線形因果関係が存在するとは

$$M_\ell^r(\mathbf{Y}) \subset M_\ell^r(\mathbf{X}) \quad (\forall n \in [\ell, r])$$

が成り立つときを言い, 次のように表示する :

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathbf{Y}.$$

二つの確率過程の間の線形因果関係を定量的に判別することを考えよう. そのために, 以下 $d_1 = d, d_2 = 1$ とし, \mathbb{R}^d 値の確率過程 $\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbb{Z})$ と \mathbb{R} 値の確率過程 $\mathbf{Y} = (Y(n)); n \in \mathbb{Z})$ を組にした \mathbb{R}^{d+1} 値の確率過程 $\mathbf{U} = (U(n); n \in \mathbb{Z}) \equiv ({}^t(Y(n), {}^tX(n)); n \in \mathbb{Z})$ は, 平均ベクトル $\mathbf{0}$ の弱定常過程と仮定する:

$$U(n) = \begin{pmatrix} Y(n) \\ X_1(n) \\ X_2(n) \\ \vdots \\ X_d(n) \end{pmatrix}.$$

三つの共分散行列関数 R_1, R_2, R_3 を次で定義する:

$$\begin{cases} R_1(n) \equiv E(X(n) {}^tX(0)) & \in M(d, d; \mathbb{R}) \\ R_2(n) \equiv E(Y(n) {}^tX(0)) & \in M(1, d; \mathbb{R}) \\ R_3(n) \equiv E(Y(n)Y(0)) & \in M(1, 1; \mathbb{R}). \end{cases}$$

関数 $C_*(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, \infty)$ を

$$C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \equiv [E\{(P_{M_0^r(\mathbf{X})} Y(n))^2\}]^{1/2}$$

で定義する.

補題 1.

- (i) $0 \leq C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \leq \sqrt{R_3(0)} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
 (ii) $C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \leq C_{n+1}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$

因果関係を定量的に特徴づける次の定理が成り立つ:

定理 1. 次の (i), (ii) は同値である:

- (i) $\mathbf{X} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathbf{Y}$
 (ii) $C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) \nearrow \sqrt{R_3(0)} \quad (n \rightarrow \infty).$

かかる理由で関数 $C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ を確率過程 \mathbf{X} から確率過程 \mathbf{Y} への因果関数と名づけ, その極限值 $C_\infty(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ を確率過程 \mathbf{X} から確率過程 \mathbf{Y} への因果値と名づける. この因果関数を \mathbf{X} に付随する KM_2O -ランジュヴァンデータ $\{\gamma_+(n, k), V_+(k); 0 \leq k < n < \infty\}$ を用いて表現しよう.

定理 2. 任意の n, k ($0 \leq k \leq n$) に対して

$$C_n(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = \left\{ \sum_{k=0}^n C(n, k) V_+(k) {}^t C(n, k) \right\}^{1/2}.$$

ここで, $C(n, k)$ は $1 \times d$ -行列で次で与えられる:

$$C(n, k) = \{R_2(n-k) + \sum_{l=0}^{k-1} R_2(n-l) {}^t \gamma_+(k, l)\} V_+(k)^{-1} \quad (0 \leq k \leq n).$$

非線形因果関係

二つの確率過程の間の定量的に特徴づけられた線形の因果関係の判定を応用して、一般の因果関係の有無を判別する方法を与えよう。

必要なことは、確率過程 \mathbf{X} の非線形の情報を表す σ -加法族 $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}(n)$ を捕まえることである。そのために、非線形予測問題の結果とそこに到る考えを用いる。

$\mathbf{X} = (X(n); n \in \mathbb{Z}), \mathbf{Y} = (Y(n); n \in \mathbb{Z})$ を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された実数の値をとる確率過程とする。 \mathbf{X} から \mathbf{Y} への因果関係があるかどうかを問題にする：

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}.$$

\mathbf{X} は条件 (H.1), (H.2), (H.3) を満足する強定常過程とする。任意に固定した自然数 q に対して、 $d_q + 1$ -次元の弱定常過程 $\mathbf{X}^{(q)} = (X^{(q)}(n); n \in \mathbb{Z})$ を考える：

$$X^{(q)}(n) = \begin{pmatrix} \varphi_0(n) - E(\varphi_0(n)) \\ \varphi_1(n) - E(\varphi_1(n)) \\ \vdots \\ \varphi_{d_q}(n) - E(\varphi_{d_q}(n)) \end{pmatrix}.$$

(H.1) \mathbf{X} は有界である、即ち、正数 $c > 0$ が存在して

$$|X(n)(\omega)| \leq c \quad (\forall n \in \mathbb{Z}, a.s. \omega \in \Omega)$$

(H.2) 任意個数の $n_j \in \mathbb{Z} (1 \leq j \leq k), n_1 < n_2 < \dots < n_k$, に対して

確率分布 $P_t(X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_k))$ の支えは正のルベーグ測度を持つ

(H.3) $X(n)$ の平均は 0 $(n \in \mathbb{Z})$.

この二つの確率過程 $\mathbf{X}^{(q)}$ と \mathbf{Y} の間の線形因果関係：

$$\mathbf{X}^{(q)} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathbf{Y}$$

があるとき、確率過程 \mathbf{X} から確率過程 \mathbf{Y} への階数 q の非線形の因果関係があると言い、次のように表示する：

$$(\star_q) \quad \mathbf{X} \xrightarrow{\text{階数 } q \text{ の因果}} \mathbf{Y}.$$

その解析は

$$U(n) = \begin{pmatrix} Y(n) \\ X^{(q)}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y(n) \\ \varphi_0(n) - E(\varphi_0(n)) \\ \varphi_1(n) - E(\varphi_1(n)) \\ \vdots \\ \varphi_{d_q}(n) - E(\varphi_{d_q}(n)) \end{pmatrix}$$

で定義された $d_q + 2$ -次元の確率過程 $\mathbf{U} = (U(n); n \in \mathbb{Z})$ が弱定常過程である場合を扱った。

次のことは明かである。

定理 3.

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\text{階数 } q \text{ の因果}} \mathbf{Y} \quad (\exists q \in \mathbb{N}) \implies \mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}.$$

しかし、定理 22.3.1 の逆の命題は成り立たない。定理 22.2.1 を精密化して次のことが証明される：

定理 4. 次の (i), (ii) は同値である：

$$(i) \quad \mathbf{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathbf{Y}$$

$$(ii) \quad C_\infty(\mathbf{Y}|\mathbf{X}^{(q)}) \nearrow \sqrt{R_3(0)} \quad (q \rightarrow \infty).$$

因果テスト: $\text{Test}(\text{CS})$

二つの一次元時系列 $\mathcal{X} = (\mathcal{X}(n); 0 \leq n \leq N), \mathcal{Y} = (\mathcal{Y}(n); 0 \leq n \leq N)$ を対象とし, 時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への因果関係の有無を判別する因果テスト: $\text{Test}(\text{CS})$ を提案する.

線形因果テスト 時系列 $U = (U(n) = {}^t(\mathcal{Y}(n), \mathcal{X}(n)); 0 \leq n \leq N)$ は $\text{Test}(\text{S})$ を通過したとする. 時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への見本因果値を求める:

$$\text{時系列 } \mathcal{X} \text{ から時系列 } \mathcal{Y} \text{ への見本因果値} = C_M(\mathcal{Y}|\mathcal{X}).$$

ここで M は次で与えられる:

$$M = \lceil 3\sqrt{N+1}/2 \rceil - 1.$$

時系列 \mathcal{X} の代わりに, 1000 個の物理乱数 ξ をとり, 見本因果値 $C_M(\mathcal{Y}|\xi)$ の分布を調べ, 次の見本因果分布表を作成する.

見本因果値	回数	割合
$0.00 \leq < 0.05$		
$0.05 \leq < 0.10$		
$0.10 \leq < 0.15$		
$0.15 \leq < 0.20$		
$0.20 \leq < 0.25$		
$0.25 \leq < 0.30$		
$0.30 \leq < 0.35$		
$0.35 \leq < 0.40$		
$0.40 \leq < 0.45$		
$0.45 \leq < 0.50$		
$0.50 \leq < 0.55$		
$0.55 \leq < 0.60$		
$0.60 \leq < 0.65$		
$0.65 \leq < 0.70$		
$0.70 \leq < 0.75$		
$0.75 \leq < 0.80$		
$0.80 \leq < 0.85$		
$0.85 \leq < 0.90$		
$0.90 \leq < 0.95$		
$0.95 \leq \leq 1.00$		

物理乱数から 時系列 \mathcal{Y} への見本因果値の分布

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

Test(CS) このとき、時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への見本因果値が上の表の 0.95 から 1.00 までに位置するとき、時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への線形の因果関係があると判断し、次のように表記する:

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{線形因果}} \mathcal{Y}.$$

非線形因果テスト 時系列 \mathcal{X}, \mathcal{Y} を規格化し、逆正接変換を施した時系列をそれぞれ $\text{Arct}\tilde{\mathcal{X}}=(\text{Arct}\tilde{\mathcal{X}}(n); 0 \leq n \leq N)$, $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}=(\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}(n); 0 \leq n \leq N)$ とする:

$$\text{Arct}\tilde{\mathcal{X}}(n) \equiv \arctan(\tilde{\mathcal{X}})$$

$$\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}(n) \equiv \arctan(\tilde{\mathcal{Y}}).$$

特に $\text{Arct}\tilde{\mathcal{X}}(n)$ を $\mathcal{W}(n)$ と置く:

$$\mathcal{W}(n) \equiv \text{Arct}\tilde{\mathcal{X}}(n).$$

階数 6 の非線形変換: 時系列 $\mathcal{X}^{(6)} \equiv (\mathcal{X}^{(6)}(n); 4 \leq n \leq N)$ を作る. 時系列 $\mathcal{X}^{(6)}$ の 18 個の成分から, 2,3,4,5,...次元の時系列を選び出す. それぞれ, $\binom{18}{2}, \binom{18}{3}, \binom{18}{4}, \binom{18}{5}, \dots$ 個の時系列が構成される. 何次元までの時系列を考えるかは, 次元数 d とデータ数 N から決まる数 $M = \lceil 3\sqrt{N+1}/d + 1 \rceil$ が少なくとも 5 以上になるまでとする.

(6-1): 上の任意の 2 次元時系列を固定し, それと時系列 $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ をそれぞれ時系列 \mathcal{X}, \mathcal{Y} とみて, 階数 2 の非線形変換のところで述べた手続きを行う. 因果関係があると判明する組み合わせを控える.

(6-2): 上の任意の 3 次元時系列を固定し, それと時系列 $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ をそれぞれ時系列 \mathcal{X}, \mathcal{Y} と見て, 階数 3 の非線形変換のところで述べた手続きを行う. 因果関係があると判明する組み合わせを控える.

(6-3): 以下, 許される次元の時系列まで同じ手続きを行う.

(6-4): 以上の手続きにおいて, 因果関係があると判明する組み合わせの中で, $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ に対する見本因果値が最小となるものを選ぶ.

Test(CS): 階数 6. : 時系列 \mathcal{X} の代わりに 1000 個の物理乱数 ξ を用いることによって, 上の (6-4) で選ばれたのと同じ非線形変換を施した時系列 $\xi^{(6)}$ を作り, $\xi^{(6)}$ から $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値 $C_M(\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}|\xi^{(6)})$ の分布を調べ, 同じ見本因果分布表を作成する. 上の (6-4) で選ばれた時系列から $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値が上の見本因果分布表の 0.95 から 1.00 まで

に位置するとき，時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への (非線形) 因果関係があると判断し，次のように表記する：

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{階数 } 6 \text{ の因果}} \mathcal{Y}.$$

以上の手順は定理 1 に基づくもので，時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への因果関係は有限階数の因果関係であった．一般の非線形の有無に関しては，定理 4 を用いることによって，次のように判定することができる：

Test(CS):非線形因果関係. 階数 q の非線形変換を許されるところまで大きくしていく．これは階数 6 のときに述べたことだが，次元数とデータ数から決まる数 M が少なくとも 5 以上になるまでである．上の (6-1)-(6-4) と同じ手順を踏む．そこで選ばれたのと同じ非線形変換を時系列 \mathcal{X} の代わりに，1000 個の物理乱数 ξ を用いることによって時系列を $\xi^{(q)}$ を作り， $\xi^{(q)}$ から $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値 $C_M(\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}|\xi^{(q)})$ の分布を調べ，見本因果分布表を作成する．上で選ばれた時系列から $\text{Arct}\tilde{\mathcal{Y}}$ への見本因果値が上の見本因果分布表の 0.95 から 1.00 までに位置するとき，時系列 \mathcal{X} から時系列 \mathcal{Y} への (非線形) 因果関係があると判断し，次のように表記する：

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\text{因果}} \mathcal{Y}.$$

経済時系列

(i) 公定歩合 (1969.1–1979.12)

(ii) 円の対ドル為替レート (1969.1–1979.12)

(iii) マネーサプライ (M1: 1969.1–1979.12) 先行系列 (景気動向指数) : Money Supply (通貨供給量) — 日本銀行や市中金融機関 (都市銀行, 地方銀行, 相互銀行など) が企業, 個人などに供給している現金や預金 (当座預金, 定期預金を含む) などの総称

$$M_1(\text{エムワン}) = \text{現金と預金通貨}$$

$$M_2(\text{エムツー}) = M_1 + \text{定期性預金}$$

$$M_3(\text{エムスリー}) = M_2 + \text{信託と郵便貯金}$$

(iv) 鉱工業生産指数 (1969.1–1979.12) 一致系列 (景気動向指数)

(v) 鉱工業製品在庫指数 (1969.1–1979.12) 遅行系列 (景気動向指数)

景気動向指数 (DI: diffusion index)

先行系列

- 1 製品在庫率指数 (鋁工業) (逆サイクル)
- 2 原材料在庫率指数 (鋁工業) (逆サイクル)
- 3 機械受注 (船舶・電力を除く民需)
- 4 建設財出荷指数
- 5 新設住宅着工戸数
- 6 所定外労働時間 (製造業)
- 7 新車新規登録台数 (乗用車)
- 8 銀行取引停止処分件数 (逆サイクル)
- 9 東証株価指数 (総合)
- 10 マネーサプライ (M_2+CD)
- 11 日経商品指数 (総合)
- 12 交易条件指数 (総合)

一致系列

- 1 生産指数 (鋁工業) (逆サイクル)
- 2 生産者出荷指数 (鋁工業) (逆サイクル)
- 3 稼働率指数 (製造業)
- 4 原材料消費指数 (製造業)
- 5 大口電力使用量
- 6 輸入数量指数
- 7 建築着工床面積 (鋁工業)
- 8 有効求人倍率
- 9 百貨店販売額
- 10 経常利益 (全産業)
- 11 中小企業売上高 (製造業)

遅効系列

- 1 製品在庫指数（鉱工業）
- 2 原材料在庫指数（製造業）
- 3 資本財出荷指数（輸送機械を除く）
- 4 常用雇用指数（製造業）
- 5 完全失業率（逆サイクル）
- 6 家計消費支出（全国勤労者世帯）
- 7 全国銀行貸出約定平均金利

1970年代

(i) 71年8月15日にドルの金交換停止 → 変動相場性に移行: 為替レートが外国為替市場における通貨の需要と供給によって変動する

(ii) 71年にガット体制 (IMF) が崩れる

(iii) 72年に日本列島改造論発表 → 土地・株等が高騰

(iv) 73年に第一次オイルショック・狂乱物価

(v) 60年代末までの高度成長から低成長へ

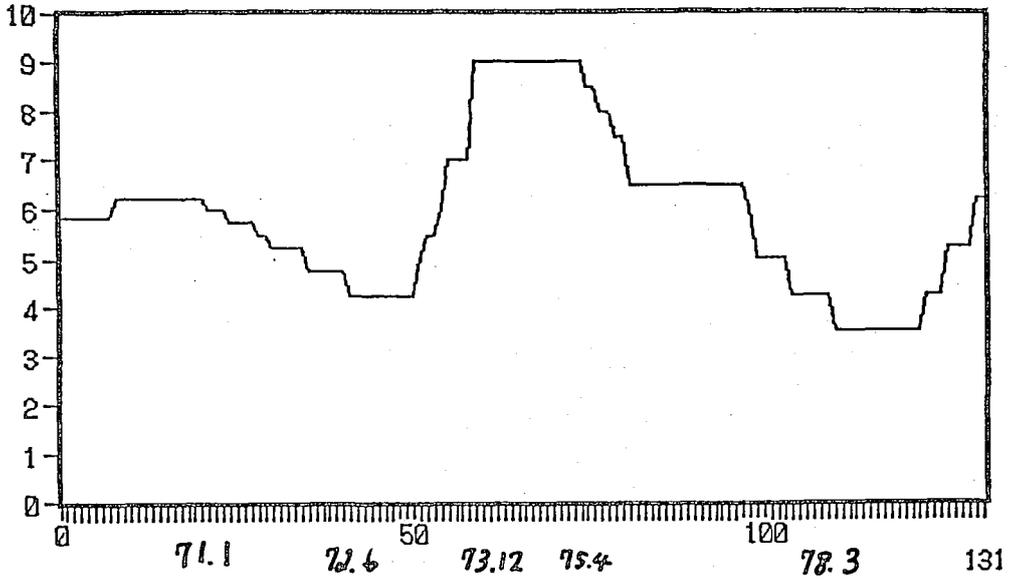
(vi) 79年に自由金利導入 → 過剰流動性 (マネーサプライが必要以上に増えている)

(vii) 79年10月アメリカの新金融調整方式 (これまでの金利重視からマネーサプライ重視に金融送政策の運営目標を転換)

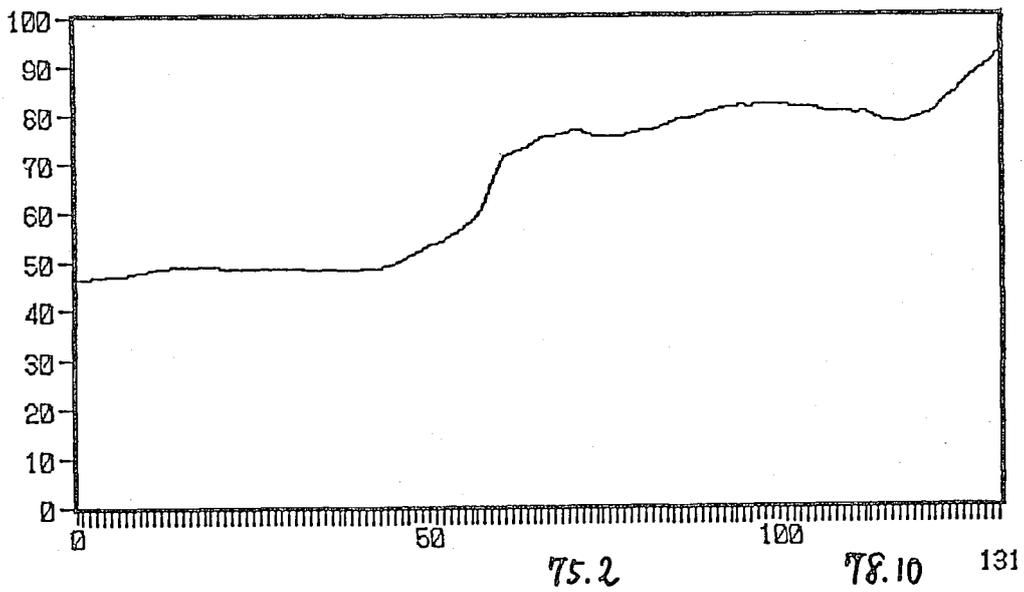
(viii) 公害の問題が生じる

公定

公定歩合(1969.1-1979.12)

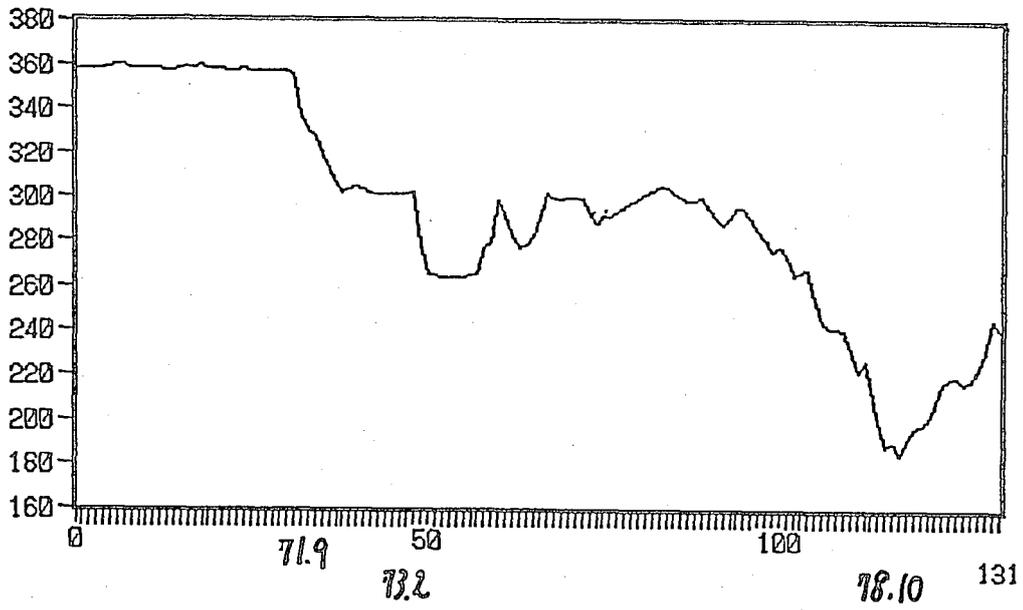


総合卸売指数(1985年基準)
(1969.1-1979.12)



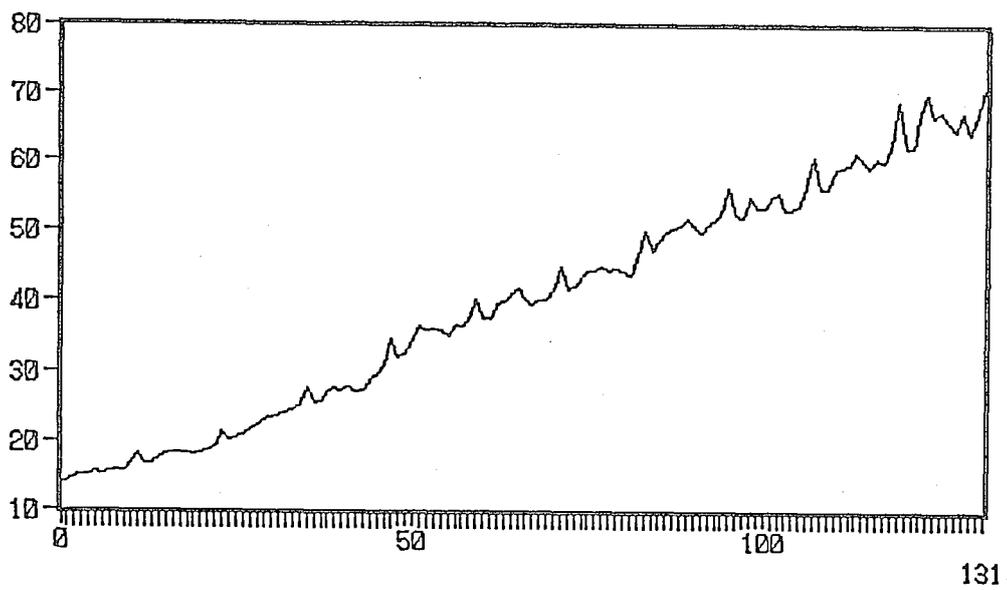
為替日

円の為替レート(1969.1-1979.12)



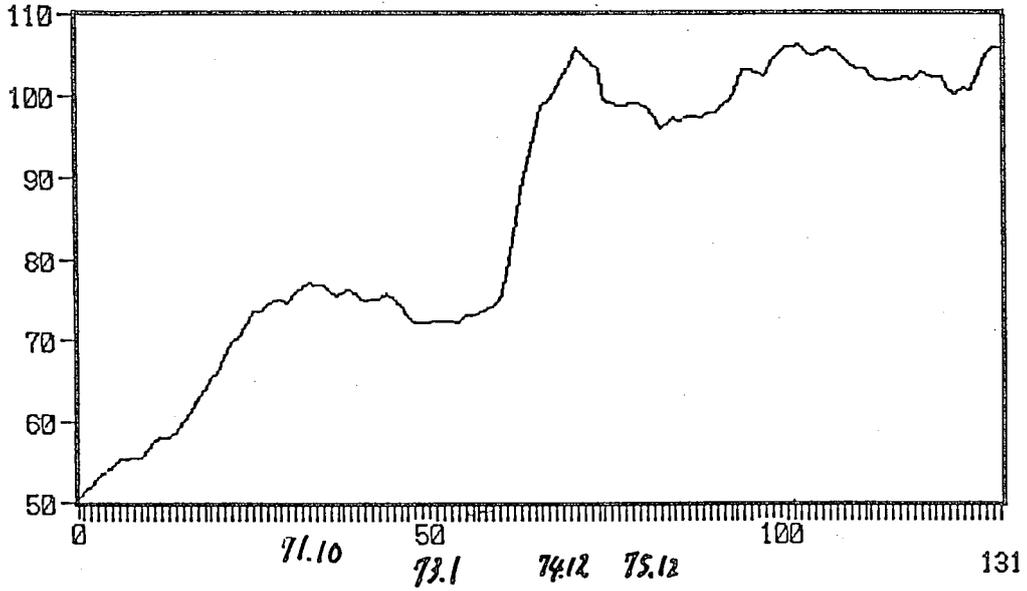
MS

マネーサプライ(M1:1969.1-1979.12)



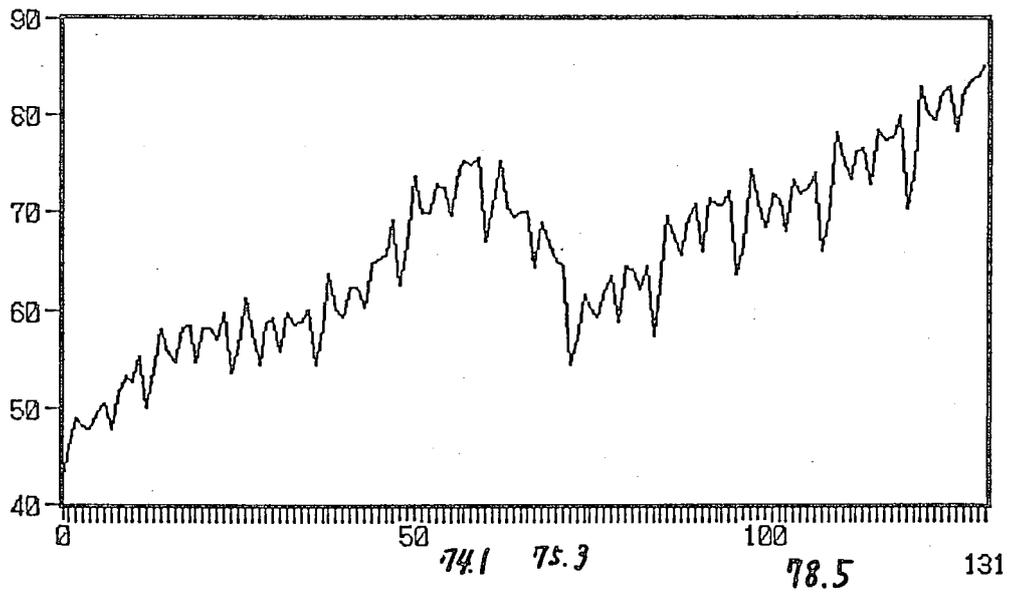
在庫

生産者製品在庫指数(鉱工業)
(1969.1-1979.12:1975年基準,調整)

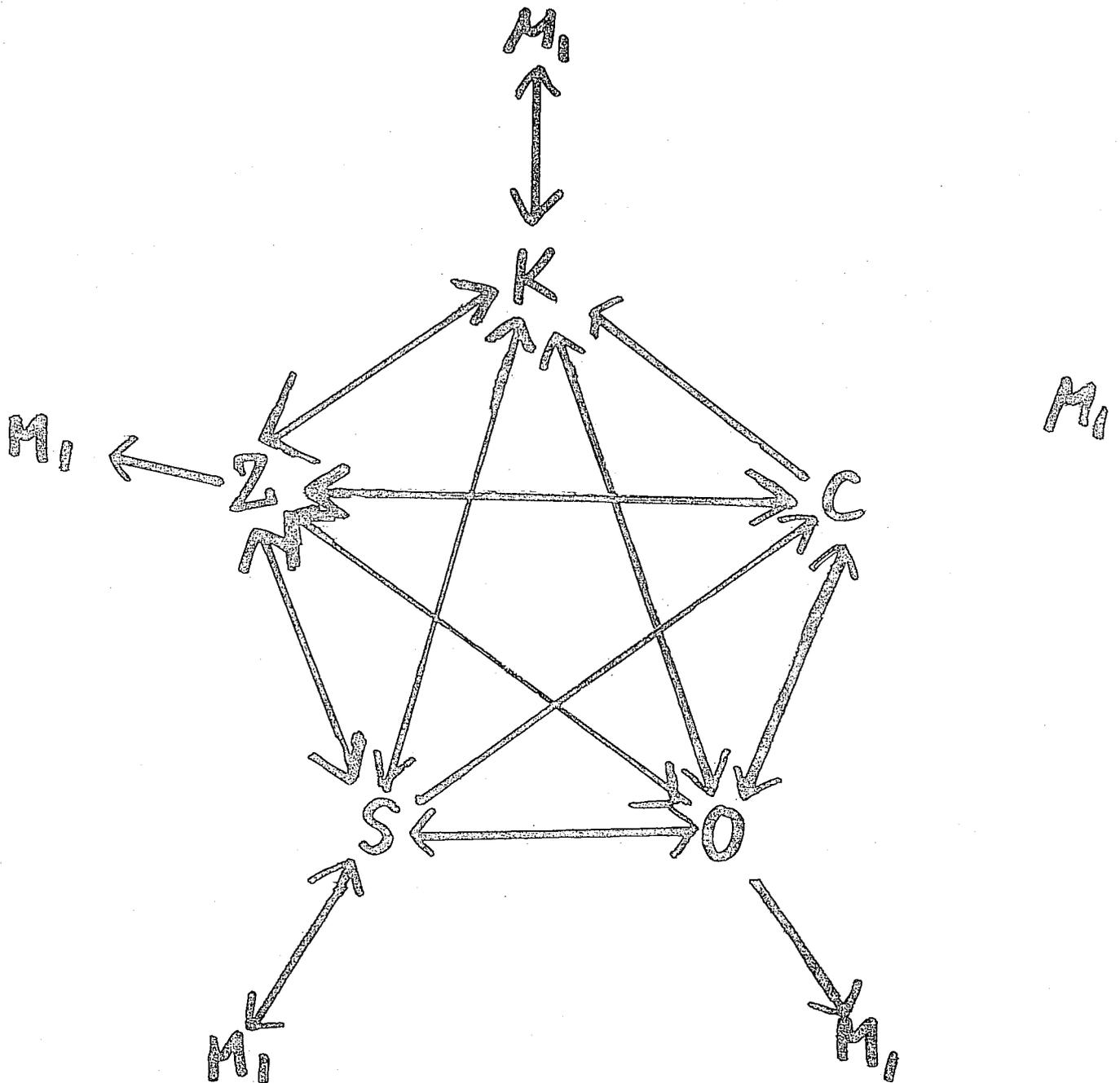


生産

生産指数(鉱工業:1985年基準,未調整)
(1969.1-1979.12)

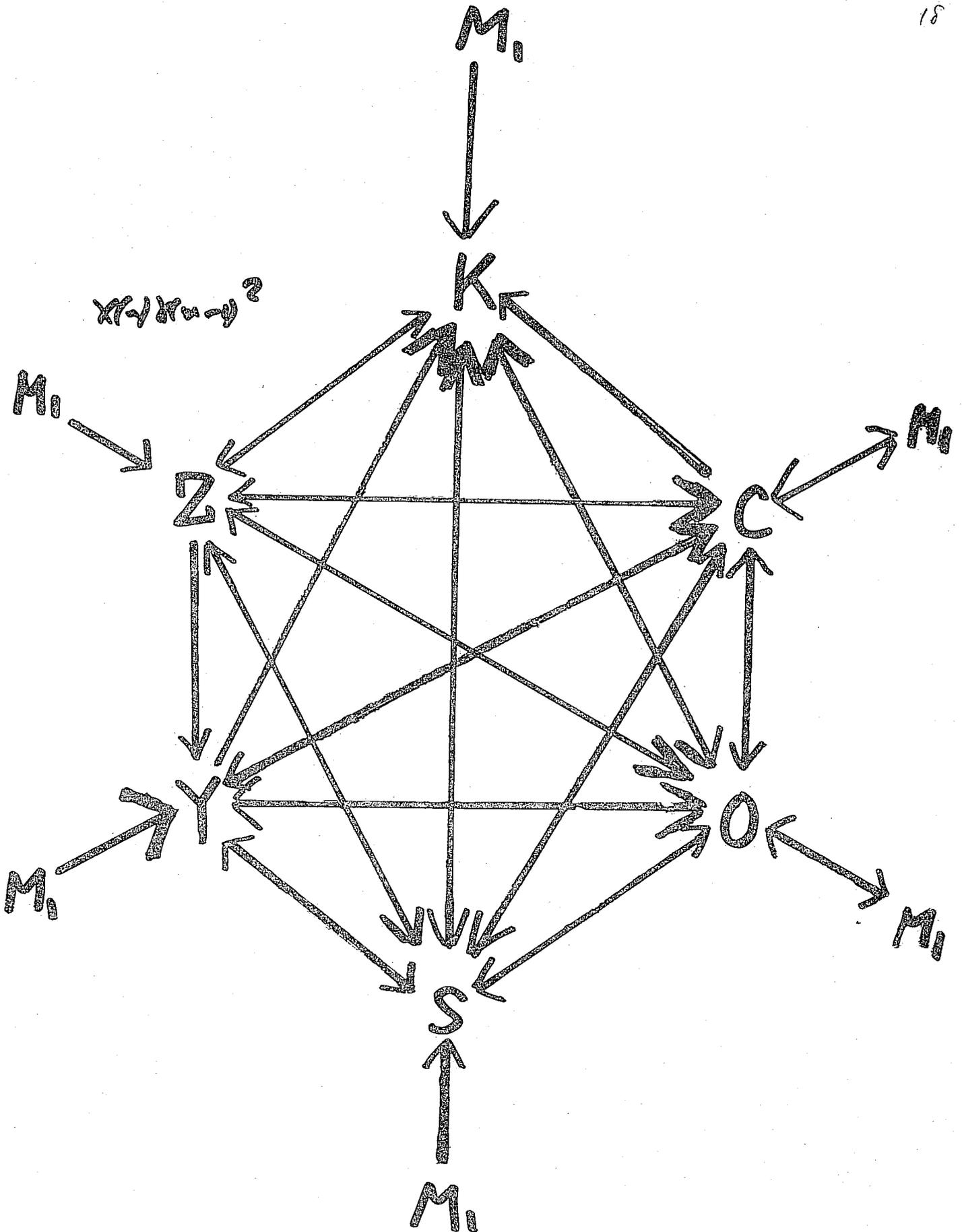


1960年A

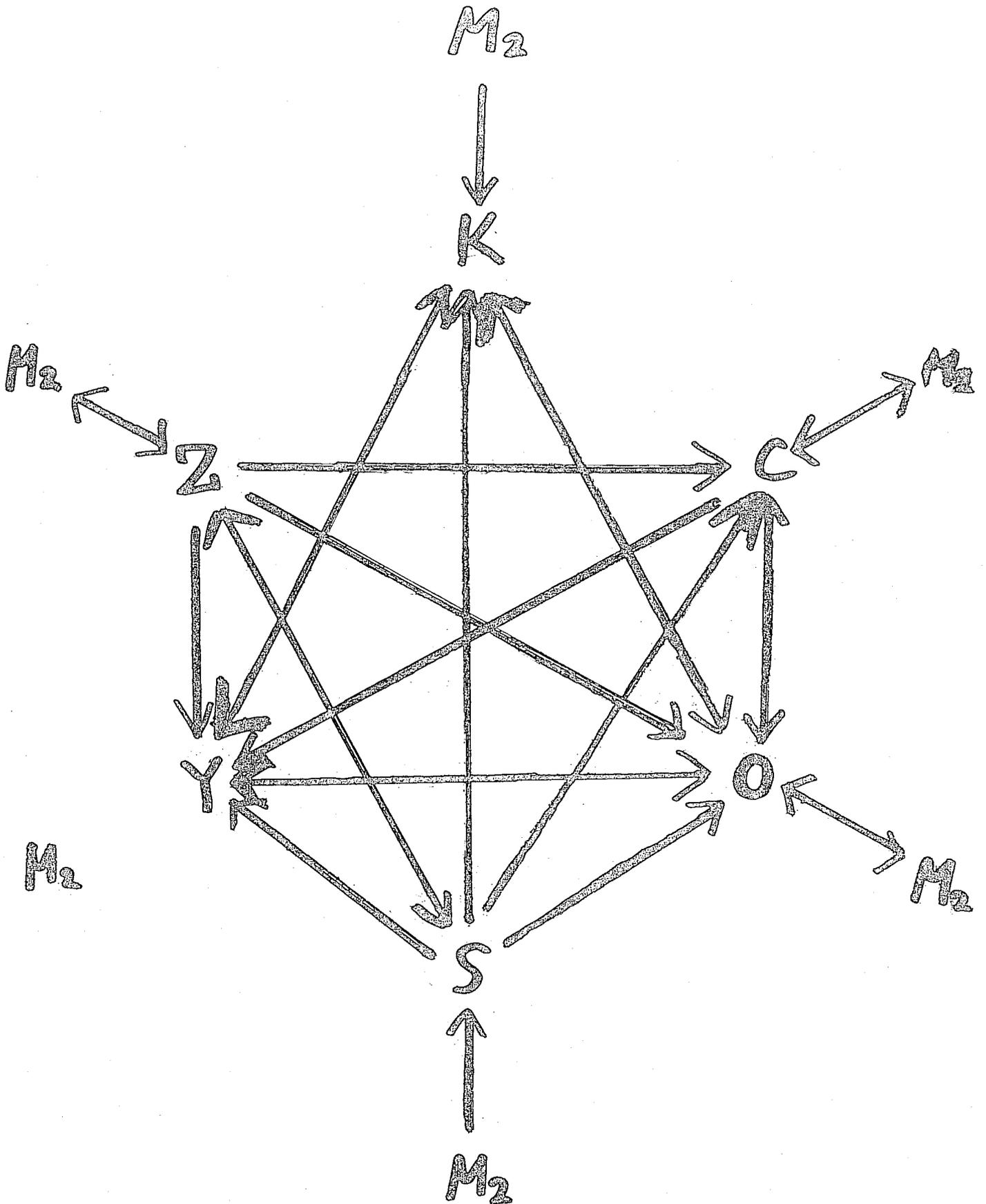


1970年代

18



1980年代



揺動散逸定理に基づく定常性の検定

大濱巖 積山功 草場康司 柳川堯
九州大学大学院数理学研究科

1 序

時系列解析では多くの場合、モデルに定常性を仮定する。したがって実際にデータを解析するさい、そのデータが定常モデルに当てはまっているかどうかが重要になってくる。以下では与えられたデータが定常確率過程の実現値であることを検定する方法を述べる。

2 基本理論

次の帰無仮説に対する検定を構成する。

$H_0(S)$: d 次元時系列 $\{\mathbf{X}_j\}_{j=1}^N$ は定常である。

Def. $\{\mathbf{X}_j\}$ が定常 $\iff E[\mathbf{X}_j], Cov(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{j+h})$ ($1-j \leq h \leq N-h$) が j に依存しない。

以下、 $E[\mathbf{X}_j] = \mathbf{0}$ と仮定する。 $H_0(S)$ の下で 1 Step Predictor :

$$\widehat{\mathbf{X}}_j = (\widehat{X}_j^{(1)}, \dots, \widehat{X}_j^{(d)})' \quad s.t.$$

$$\widehat{X}_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & (j=1) \\ P_{M_1^{j-1}(X)} X_j^{(k)} & (j \geq 2) \end{cases}$$

ここに $M_1^{j-1}(X) = \{ \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=1}^d a_{ik} X_i^{(k)} \mid \forall a_{ik} \in \mathbf{R} \}$
 P : 射影作用素

は次の性質を持つ。

(i) $E[\mathbf{X}_j - \widehat{\mathbf{X}}_j] = \mathbf{0}$

(ii) $Cov[(\mathbf{X}_j - \widehat{\mathbf{X}}_j), (\mathbf{X}_i - \widehat{\mathbf{X}}_i)] = \mathbf{0}$ if $i \neq j$

今、 $V_{j-1} = \text{Var}[\mathbf{X}_j - \widehat{\mathbf{X}}_j]$ とおくと

$$\exists W_j : \text{正則行列} \quad s.t. \quad W_j W_j' = V_j$$

よって $\xi_j = W_{j-1}^{-1}(\mathbf{X}_j - \widehat{\mathbf{X}}_j)$ とすると

$$\{\xi_j\}_{j=1}^N \sim WN(0, I_d) \quad I_d : d \times d \text{ 単位行列}$$

$$\text{Def. } \{\mathbf{Z}_j\}_{j=1}^n \sim WN(\mathbf{0}, V) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad E[\mathbf{Z}_j] = \mathbf{0}, \text{Cov}[\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j] = \delta_{i,j}V$$

したがって、 $\xi_j = (\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(d)})'$ とすると

$$\{\xi_l\}_{l=1}^{dN} = \{\xi_j^{(k)}\}_{k=1, \dots, d : j=1, \dots, N} = \{\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(d)}, \dots, \xi_N^{(1)}, \dots, \xi_N^{(d)}\} \sim WN(0, 1)$$

岡部[1]より

$$\{\mathbf{X}_j\}_{j=1}^N \text{が定常} \iff \{\xi_l\}_{l=1}^{dN} \sim WN(0, 1)$$

したがってこの検定は、帰無仮説

$$H_0(WN) : \{\xi_l\}_{l=1}^{dN} \sim WN(0, 1)$$

に対する検定と同値になる。

3 データの分割

$R(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{j+h})$ の推定量として、

$$\hat{R}(h) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N-h} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_{j+h} - \bar{\mathbf{X}})'$$

を用いる。ここに $\bar{\mathbf{X}} = N^{-1} \sum_{j=1}^N \mathbf{X}_j$ である。今、信頼できる $\hat{R}(h)$ は岡部[1]より

$$0 \leq h \leq M = [3\sqrt{N}/d] - 1, \quad [\cdot]: \text{ガウス記号}$$

この $\hat{R}(h)$ ($0 \leq h \leq M$) を真の値とみなし、Blockwell-Davis [2] の Innovation Algorithm を用いて 1 Step Predictor を求める。しかし $\hat{R}(h)$ ($0 \leq h \leq M$) からは $\widehat{\mathbf{X}}_j$ ($1 \leq j \leq M+1$) しか求められないので、データ $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N\}$ を

$$\begin{aligned} X[1] &= \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{M+1}\}, X[2] = \{\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{M+2}\}, \dots \\ \dots, X[i] &= \{\mathbf{X}_i, \dots, \mathbf{X}_{M+i}\}, \dots, X[N-M] = \{\mathbf{X}_{N-M}, \dots, \mathbf{X}_N\} \end{aligned}$$

と分割する。

この分割した各データ $X[i]$ に対し、Innovation Algorithm を用いて $\hat{R}(h)$ ($0 \leq h \leq M$) の値から $\xi[i] = \{\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,M+1}\}$ を計算する。ここで $\xi_{i,j} = (\xi_{i,j}^{(1)}, \dots, \xi_{i,j}^{(d)})'$ とすれば、2. で述べたように、

$$X[i] \text{が定常である。} \iff \xi[i] \sim WN(0, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } \xi[i] &= \{\xi_{[i]j}\}_{j=1}^a = \{\xi_{i,j}^{(k)}\}_{k=1, \dots, d : j=1, \dots, M+1} \\ a &= d(M+1) \end{aligned}$$

ところで、 $\{X_j\}_{j=1}^N$ が定常ならば $\{X_j\}_{j=l}^m$ ($1 \leq l < m \leq N$) も定常であるから、 $(1 \leq i \leq N - M)$ に対し帰無仮説 $H_0(S)$ は帰無仮説

$$H_0^{(i)}(S) : X[i] = \{X_j\}_{j=i}^{M+i} \text{ は定常である。}$$

を imply する。さらに岡部[1]より $H_0^{(i)}(S)$ は帰無仮説

$$H_0^{(i)}(WN) : \xi[i] = \{\xi_{[i]j}\}_{j=1}^a \sim WN(0, 1)$$

と同値である。

4 検定の構成

有意水準 α で $H_0(S)$ を検定する。3. で述べたように $H_0(S)$ は $H_0^{(i)}(S)$ を imply し、 $H_0^{(i)}(S)$ は $H_0^{(i)}(WN)$ と同値であったから、各 i に対し $H_0^{(i)}(WN)$ を検定することで、 $H_0(S)$ に対する検定とする。さらにここでは $H_0^{(i)}(WN)$ そのものに対する検定ではなく、 $H_0^{(i)}(WN)$ を強くした 帰無仮説

$$H_0^{(i)} : \xi[i] = \{\xi_{[i]j}\}_{j=1}^a \sim IID(0, 1)$$

に対する検定を構成する。

Def. $\{X_j\}_{j=1}^n \sim IID(0, 1) \stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の j に対し X_j は独立に平均0、分散1の同一分布に従う。

THEOREM $\mu_4 = E[\xi_{[i]j}^4] < \infty$ のとき $H_0^{(i)}$ の下で

$$\mathbf{Z}^{(i)}_a = \sqrt{a} \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 - 1 \\ \hat{\gamma}_\xi(1) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_\xi(L) \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

ここに

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_k &= \hat{\mu}_{[i]k} = a^{-1} \sum_{j=1}^a \xi_{[i]j}^k \quad (k = 1, 2) \\ \hat{\gamma}_\xi(h) &= \hat{\gamma}_{\xi[i]}(h) = a^{-1} \sum_{j=1}^{a-h} \xi_{[i]j} \xi_{[i]j+h} \\ L &= [2\sqrt{a}] - 1 \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} 1 & \mu_3 & \mathbf{0}' \\ \mu_3 & \mu_4 - 1 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_L \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = E[\xi_{[i]j}^3] \end{aligned}$$

[証明の概略]

- $\hat{\gamma}_\epsilon(h)$ を $\tilde{\gamma}_\epsilon(h) = a^{-1} \sum_{j=1}^a \xi_{[i]j} \xi_{[i]j+h}$ で置き換えた $\mathbf{Y}^{(i)}_a$ が、 $\mathbf{Y}^{(i)}_a \xrightarrow{L} N(\mathbf{0}, \Sigma)$ を満たす。
 - Cramér-Wold 分解
 - m 従属強定常過程に関する中心極限定理
- $\mathbf{Z}^{(i)}_a - \mathbf{Y}^{(i)}_a \xrightarrow{P} \mathbf{0}$ as $N \rightarrow \infty$

COROLLARY $\mu_4 < \infty, \mu_4 - 1 - \mu_3^2 \neq 0$ のとき、 $H_0^{(i)}$ の下で

$$T_{(i)} = \mathbf{Z}^{(i)'}_a \hat{\Sigma}_a^{(i)-1} \mathbf{Z}^{(i)}_a \xrightarrow{L} \chi_{L+2}^2 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

$$\text{ここに } \hat{\Sigma}_a^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\mu}_3 & \mathbf{0}' \\ \hat{\mu}_3 & \hat{\mu}_4 - 2\hat{\mu}_2 + 1 & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_L \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu}_k = \hat{\mu}_{[i]k} = a^{-1} \sum_{j=1}^a \xi_{[i]j}^k \quad (k = 3, 4)$$

したがって、帰無仮説 $H_0^{(i)'}$ を

$$H_0^{(i)' : \mu_4 < \infty, \mu_4 - 1 - \mu_3^2 \neq 0 \text{ かつ } H_0^{(i)}$$

として、この Corollary から

$$\Pr(T_{(i)} \geq C \mid H_0^{(i)'}) = \alpha / (N - M)$$

なる C を自由度 $L + 2$ のカイ二乗分布表より求め、

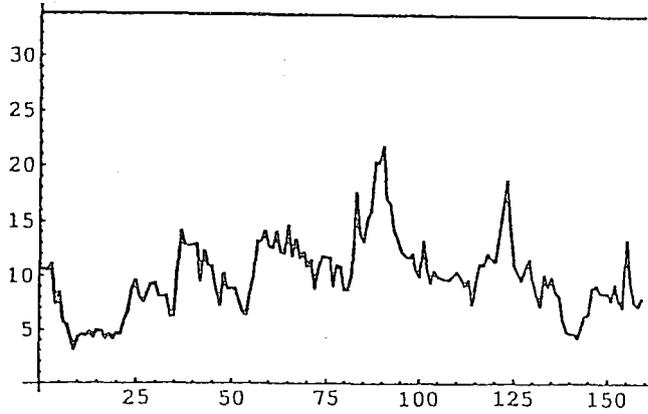
$$T_{(i)} \geq C \implies H_0^{(i)'} \text{ を棄却}$$

全ての i について $H_0^{(i)'}$ が棄却されなければ、 $H_0(S)$ を採択する。この方法は Type I FWE をほぼ α でおさえる。即ち

$$\Pr(T_{(1)} < C, \dots, T_{(N-M)} < C \mid \bigcap_{j=1}^{N-M} H_0^{(j)'}) \geq 1 - \alpha$$

5 シミュレーション

400 個の物理乱数を用いて有意水準 $\alpha = 0.20$ でシミュレーションを試みた。



横軸 : i
縦軸 : $T(i)$
 $C = 33.8737$

Fig. 5.1 simulation

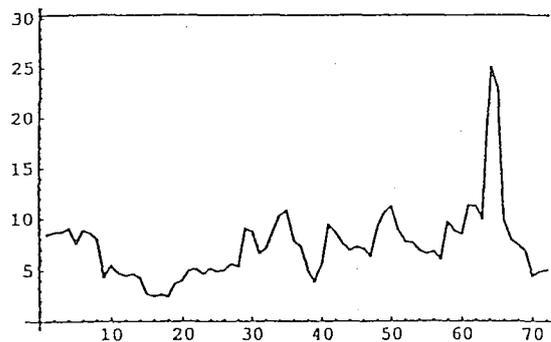
6 データ解析

6.1 札幌の年間降水量

1889年から1989年までの札幌の年間降水量を、有意水準 0.10 で定常性検定した。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1880										1100
1890	1101	977	1053	895	987	844	1151	725	1079	1069
1900	855	1155	929	896	1033	884	841	1121	903	1107
1910	841	1004	1168	907	1321	1115	889	1194	1041	1041
1920	1251	882	1339	1157	1003	1082	1359	1050	923	1109
1930	1152	1173	1369	1046	1002	1291	1231	1094	1108	1174
1940	938	1250	1095	977	1012	1176	1196	1177	891	1023
1950	1305	1112	963	1342	1058	1349	1141	1242	1215	1065
1960	1067	1095	1227	1138	1274	1344	1328	1104	981	958
1970	1119	953	1559	1173	1063	1432	1000	1103	1090	1079
1980	1179	1672	1045	885	725	1054	1128	998	1121	998
1990										

Table 6.1.1 札幌の年間降水量 (mm)



横軸 : i
縦軸 : $T(i)$
 $C = 30.3253$

Fig. 6.1.1 統計量 $T(i)$

6.2 太陽黒点

太陽黒点の発生個数に対して、生データおよびログ変換したものを有意水準 0.10 で定常性検定した。

1770	101	1790	90	1810	0	1830	71	1850	66
1771	82	1791	67	1811	1	1831	48	1851	64
1772	66	1792	60	1812	5	1832	28	1852	54
1773	35	1793	47	1813	12	1833	8	1853	39
1774	31	1794	41	1814	14	1834	13	1854	21
1775	7	1795	21	1815	35	1835	57	1855	7
1776	20	1796	16	1816	46	1836	122	1856	4
1777	92	1797	6	1817	41	1837	138	1857	23
1778	154	1798	4	1818	30	1838	103	1858	55
1779	125	1799	7	1819	24	1839	86	1859	94
1780	85	1800	14	1820	16	1840	63	1860	96
1781	68	1801	34	1821	7	1841	37	1861	77
1782	38	1802	45	1822	4	1842	24	1862	59
1783	23	1803	43	1823	2	1843	11	1863	44
1784	10	1804	48	1824	8	1844	15	1864	47
1785	24	1805	42	1825	17	1845	40	1865	30
1786	83	1806	28	1826	36	1846	62	1866	16
1787	132	1807	10	1827	50	1847	98	1867	7
1788	131	1808	8	1828	62	1848	124	1868	37
1789	118	1809	2	1829	67	1849	96	1869	74

Table 6.2.1 Wölfer Sunspot Numbers (1770 – 1869)

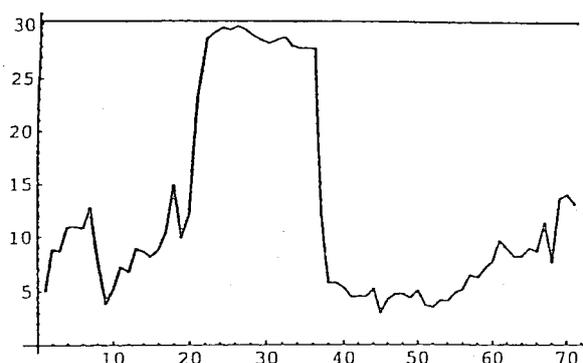


Fig. 6.2.1 統計量 $T(i)$ (生データ)

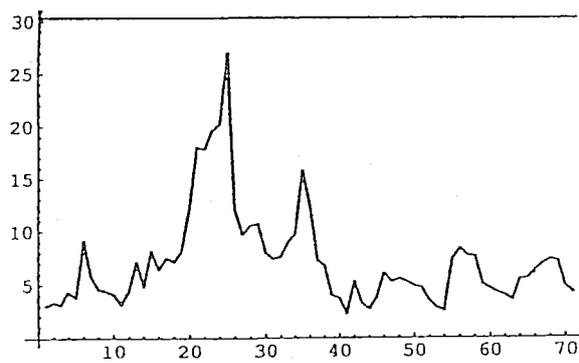


Fig. 6.2.2 統計量 $T(i)$ (ログ変換)

参考文献

- [1] 岡部靖憲. KM_2O - ランジューヴァン方程式と揺動散逸定理
— 実証科学としての数学をめざして —. Pre-Print.
- [2] Blockwell, P.J. and R.A.Davis. *Time Series : Theory and Methods*.
Springer, New York. (1987)

〒 812 福岡市東区箱崎 6 - 10 - 1 九州大学大学院数理学研究科
大濱 滋 ohama@math.kyushu-u.ac.jp
柳川 亮 yanagawa@math.kyushu-u.ac.jp

自己組織する複雑系としての経済

塩 沢 由 典 (大阪市立大学経済学部)

1. 経済の制御可能性

人間の経済活動の拡大とともに、地球環境にたいするその影響が大きくなっている。一方、地球の自然資源は有限であり、石油などの枯渇といった問題もかかえている。したがって、経済活動を制御して、環境の保護や資源の保存を図る必要があり、そのためにさまざまな対策が提案されている。しかし、それらのなかには、経済が複雑な自己組織系であり、自律分散型の巨大ネットワークとして機能していることを考慮に入れていないものが見受けられる。

以下の2では、市場価値以外の、たとえば石油価値を設定して資源・環境をまもろうという考えかたをとりあげ、そのような価値を設定する利益と社会的費用とを考える。3では、20世紀の貴重な経験である計画経済の教訓を考える。4は結論的部分であり、自律分散型のシステムを改善しようとするとき、考慮すべき諸点について私見を述べる。

2. 石油価値は機能するか

市場の決める価格体系(市場価値)には、見かけ上、きわめて非効率であったり無駄であると思われるものがある。たとえば、都心に電車の車庫を置けないために、多くの回送が行われ、無駄に電力を消費している。このようなことがおこるのは、土地が高すぎるためであり、土地の私有制が土地の効率的利用を阻んでいるからである、という議論がある。しかし、この議論は、直接的効果のみをみているだけで、間接的な効果を計算に入れていない。都心に車庫を置くことにより、そこからオフィスや住宅がしめだされると、マイカー通勤などが増加する。電車の回送とマイカー通勤と、社会全体として、どちらが石油をより多く消費するか。こうした比較なしに、ある活動の石油消費のみを節約しても、全体としての効果はかえって逆にでる可能性がある。

このような事情に関連して、市場価値の代わりに石油価値を用いたらどうか、という提案がある。これは現在の原価計算制度をすこし改変すれば実際に計算可能なものである。石油価値を用いて新規投資時の技術選択において、石油消費量のすくないもの(石油価値原価の小さいもの)を企業が選択するようになれば、一定の産出にたいし石油の投入消費量を知られている技術の範囲内では最小化することができる。

しかし、市場価値の代わりに、石油価値を用いるとき、すぐさま次の問題が生ずる。石油価値体系では、従業者の働きが新価値を生み出すものと認められないため、支払うべき給与の原資が企業には得られないことになる。したがって、給与等は、社会的再分配によらざるをえなくなり、生産性の低下、社会関係の硬直化などが引き起こされる。石油価値を強制するための費用も大きい。高度に管理的な社会でなければ有効な強制は不可能である。強制の費用には、たんに経済的なものだけでなく、政治的費用も含まれる。

石油価値で市場価値を代替させるのではなく、石油価値を市場価値と並行する価格として、その採用を義務付けるという提案もある。これは2重価値制というべきものである⁽¹⁾。ひとつの商品に、市場価値と石油価値の2つの値段がつき、通貨も市場通貨と石油通貨との

2種類を作り、売買にあたって、対価としてそれぞれ双方の通貨を交換させるといった具体策が考えられる。戦時経済において配給切符の一般化と考えればよい。しかし、このような制度は、かならず石油通貨と市場通貨との間に交換レートを生み、一つの新しい交換価値の体系が作用しているとおなじ結果となる。

結論として、つぎのことがいえる。①高度な管理社会を将来することなく、石油価値ないし2重価値制により効果的に目的を達成することは困難である。②石油のようなものの場合、採掘ないし輸入の時点において従量税をかけることで、2重価値制の目指すと同等の効果が期待できる。

3. 計画経済の教訓

環境問題・資源問題の解決をもとめて、国家ないし社会の介入により経済の方向を望ましい方向に制御しようという考えが根強くみられる。代替的石油価値の提案などもその変種と考えられる。しかし、きわめて強権的な国家体制においても、経済を制御することには困難があり、どのような方向づけが望ましいのか、十分検討しなければならない。すでに過去のものとなったが、社会主義計画経済の経験は、重要な示唆に富んでいる。

企業に多数の指標を与えて、社会の全体の計画をより精密なものにする考えが、ソ連の計画経済に見られた。スターリン末期においては、指標の数は9500にも上った。一企業に500もの指標が与えられたことがある。このような与件のもとで最適な計画を選び出すのは容易ではない。これは計算複雑さを無視した組織運営であり、結局、利潤の導入などにより制約を単純化せざるをえなかった。

複数の部分計画を統合してより大きな計画を作る場合には、つぎのカントロヴィチの定理が成り立つ。ある比率による財の産出量を（機械をもふくむ）所与の資源をもちいて最大化しようとするとき、評価価値という陰の価格が対応する。計画Aと計画Bとにおいて、評価価値が比例的でないならば、二つの計画を合併したものとは異なるより良い計画が存在し、それは第3の評価価値による両計画間の資源・製品の交換により実現可能である。

この定理は、部分計画間の自由な交換と価格形成が統合された計画に劣らぬ資源効率をもち得ることを意味し、市場価値による調節以上の成果を全体的計画により達成することの困難を教えている。

4. 分散制御系の進化

経済は、指令のみでうまく運営できるものではない。規制にも、それを実効あるものにするに費用がかかる。市場経済においては、企業は市場においてよりよい成果を上げるよう行動する。経済は、このような分散した制御系として存在し、それは投資や技術進歩などを通して、自律的に進化する。環境や資源問題を考える場合にも、経済が複雑な自己組織系であることを無視しては、よい結果はえられない。経済に対する政治的介入は、むしろ経済効率を低下させ、資源の浪費につながる。

環境・資源問題への解決策は、経済が自律分散制御系であることを基礎とし、実施上・計算上の費用を考慮しなければならない。少数の要所を押さえることにより管理可能であり、かつ意図した結果が得られるような制度が望ましい。たとえば、広く薄く石油消費税を掛けるより、輸入点などの源泉において一括課税することがより望ましい。

に変換される。ここで $a_i(z, \xi) = \bar{a}_i(\Phi(z, \xi))$ であり、 $b_{ij}(z, \xi)$ は無干渉化行列の (i, j) 要素である。また、 $\rho_1 + \dots + \rho_m =: \rho$ とすると、 $\xi \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ であり、入出力無干渉化フィードバックによって入出力関係から無関係になるという意味で ξ は内部状態と呼ばれる。さらに初期状態が

$$z_1^1(0) = \dots = z_m^m(0) = 0$$

である場合に、静的状態フィードバック

$$u^i = -A_{ij}^{-1}(x)\bar{a}(x)$$

によって出力を恒等的に零にすることが可能である。そしてこのときの閉ループ系の挙動、

$$\dot{\xi} = \eta(0, \xi) - P_j(0, \xi)A^{-1}(\Phi(0, \xi))a(0, \xi) \quad (6)$$

を系 (1) 式のゼロダイナミクスといい、ゼロダイナミクスが原点において漸近安定である系のことを最小位相系という。入出力無干渉化制御則 (4) 式に基づいて出力のある信号 $Y(t)$ への追従制御を行う際には制御則は

$$v = k(z, Y)$$

という構造を持つ。そのとき内部状態の挙動は

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(z, \xi) \\ &+ P(z, \xi)A^{-1}(-a(z, \xi) + k(z, Y)) \end{aligned} \quad (7)$$

という、 z, Y を入力とする系として表現される。

系 (1) 式が最小位相系であると、入出力線形化制御則を用いて出力を有界な値に制御した場合には内部状態の有界性も保証される。しかし、ゼロダイナミクスが漸近安定ではない場合にはその制御則では内部状態の有界性は保証されない。

3 漸近モデルマッチング制御

漸近モデルマッチング制御 (以降 AMM と略記) とは、制御対象の望ましい出力の応答を示す制御系を規範モデルとし、制御対象と規範モデルとの間の出力誤差を漸近的に安定化し、さらに閉ループ系を安定に保つ制御である。また、誤差の挙動が規範モデルの入力の影響を受けることを許すという点が安定なモデル追従制御問題との違いである。本稿では、出力レギュレーション問題において用いられている不変多様体の概念を用いて AMM 問題を解くことを考える。

3.1 問題設定

本節で対象とするのは次式のようにすでに数式表現されている n 次元 m 入力 m 出力アフィン非線形制御系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u^i \\ &=: F(x, u) \\ y_i &= h_i(x), i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

および規範モデル

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= f_M(x_M) + \sum_{i=1}^m g_{Mi}(x)u_M^i \\ &=: F_M(x_M, u_M) \\ y_{Mi} &= h_{Mi}(x_M), i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (9)$$

と出力誤差

$$e_i = h_i(x) - h_{Mi}(x_M) \quad (10)$$

である。ただしこれらの系において原点が平衡点であり、各写像は滑らかであると仮定する。

定義 3.1 系 (8)–(10) 式を考える。これらの系に対して、適当な次元 p の動的補償器

$$\begin{aligned} \dot{u}^i &= \alpha^i(x, x_M, \zeta) + \beta^i(x, x_M, \zeta)u_M \\ \dot{\zeta} &= \phi(x, x_M, \zeta, u_M), \zeta \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (11)$$

と、動作点の近傍 $U \subset \mathbb{R}^n, U_M \subset \mathbb{R}^{n_M}, U_\zeta \subset \mathbb{R}^p$, および正の実数 k で、 $|u_M(t)| \leq k$ となるすべての $u_M(t)$ に対して条件

(AM1): $U \times U_M \times U_\zeta$ 上の任意の初期状態に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ である。

(AM2): $x_M = 0, u_M = 0$ のとき、閉ループ系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)\alpha^i(x, 0, \xi) \\ \dot{\zeta} &= \phi(x, 0, \zeta, 0) \end{aligned}$$

は局所指数漸近安定である。

を満足するものが存在するならば局所漸近モデルマッチング制御問題は可解である。□

ただし本稿では静的フィードバックのみを考える。

3.2 幾何学的手法による結果

ここでは制御対象 (8) 式がベクトル相対次数 (ρ_1, \dots, ρ_m) を持ち、無干渉化行列が正則であると仮定する。このとき、制御対象 (8) 式、規範モデル (9) 式を一つの系と考え、誤差 (10) 式を出力と考える。ここで規範モデルの弱ベクトル相対次数を (ν_1, \dots, ν_m) とし、関係式

$$\nu_i \geq \rho_i, i = 1, \dots, m \quad (12)$$

が成立するならば、

$$\begin{aligned} z_j^i &:= L_f^{j-1} h_i(x) - L_{f_M}^{j-1} h_{M_i}(x_M) \\ &=: z_{P_j}^i(x) - z_{M_j}^i(x_M) \end{aligned}$$

とすると、合成状態空間 \mathbb{R}^{n+n_M} 上の適当な座標変換によって合成系は

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &:= h_i(x) - h_{M_i}(x_M) = e_i, i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho_i-1}^i &= z_{\rho_i}^i \\ \dot{z}_{\rho_i}^i &= a_i(z_P, \xi) + u^j b_{ij}(z_P, \xi) \\ &\quad + a_{M_i}(x_M) + c_i(x_M) u_M \\ \dot{\xi} &= \eta(z_P, \xi) + P(z_P, \xi) u \\ \dot{x}_M &= F_M(x_M, u_M) \end{aligned} \quad (13)$$

と記述される。ただし $\xi \in \mathbb{R}^{n-\rho}$ である。ここで e から制御対象の入力までを線形化するフィードバック

$$u = B^{-1}(x)(-a(x) + a_M(x_M) + c(x_M)u_M + v)$$

を用いることによって、線形誤差ダイナミクス

$$e_i^{(\rho_i)} = v^i$$

が得られる。このとき誤差を安定化する $v = k(z)$ は容易に設計可能である。制御対象のゼロダイナミクスは

$$\dot{\xi} = \eta(0, \xi) - P(0, \xi)B^{-1}(0, \xi)a(0, \xi)$$

であり、 $a_M(0) = 0, z_M(0) = 0$ であることを考慮に入れて、 $x_M = 0, u_M = 0$ の場合の閉ループ系を求めると

$$\begin{aligned} \dot{z}_P &= K(z_P) \\ \dot{\xi} &= \eta(z_P, \xi) - P(z_P, \xi)B^{-1}(z_P, \xi)a(z_P, \xi) \end{aligned} \quad (14)$$

となり ($\dot{z} = K(z)$ は漸近安定としてある)、制御対象が最小位相系であれば、条件 (AM1), (AM2) が満足される。よって、制御対象が最小位相系であり (12) 式が成立することは AMM が可能であるための十分条件である。しかし、制御対象が最小位相系ではない場合にはその限りではない。

3.3 FBI 方程式と誤差ゼロ多様体

定義 3.2 系 (8)-(10) 式に対して、 C^k ($k > 2$) 写像 π, c に関する方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial x_M}(F_M(x_M, u_M)) &= F(\pi(x_M), c(x_M, u_M)), \\ \pi(0) &= 0, c_i(0, 0) = 0, i = 1, \dots, m \\ h_i(\pi(x_M)) - h_{M_i}(x_M) &= 0, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

を FBI 方程式と呼び、その解 $x = \pi(x_M)$ の原点を通るグラフのことを誤差ゼロ多様体と呼ぶ。□

その定義からも明らかなように、誤差ゼロ多様体は、フィードバック $u = c(x_M, u_M)$ によって閉ループ系の不変多様体となり、その上では誤差がゼロとなるような多様体である。

ここで力学系における安定多様体の理論を用いることによって以下の定理が得られる。

定理 3.1 系 (8)-(10) 式において制御対象の線形近似系が可安定であり、規範モデルが局所 BIBS (bounded input-bounded state) であるとし、さらに FBI 方程式を解くことが出来たとする。このとき、制御則

$$u^i = c^i(x_M, u_M) + K_i(x - \pi(x_M)), i = 1, \dots, m \quad (16)$$

によって、十分小さな x, x_M , そして u_M に対して漸近モデルマッチング制御問題は可解である。ただし $u^i = K^i x$ は制御対象の線形近似系の漸近安定化フィードバックである。□

さらに付加的な仮定の下で誤差の指数漸近安定性を示すことが可能である。

定理 3.2 系 (8) - (10) 式に関して以下の条件が成立するものとする。

- FBI 方程式が原点のある開近傍 $V \subset \mathbb{R}^{n_M}$ 上で可解であり、

○ 規範モデル (9) 式は局所 BIBS 安定である。つまりある正の実数 ϵ_0 および \mathbb{R}_+ 上の正の単調増加連続関数 $a_1(\cdot)$ および $a_2(\cdot)$ で、 $\epsilon < \epsilon_0$ なる全ての $\epsilon > 0$ および $|u_M| \leq a_2$ である任意の $u_M(t)$ に対して $|x_M(0)| \leq a_1$ である規範モデルの解軌道のノルムは ϵ 以下となるものが存在する。

○ さらに

$$\bar{\epsilon} := \min_{x_M \in V} |x_M| < \epsilon_0$$

および

$$M := \{(\pi(x_M), x_M) | x_M \in V\}$$

としたときに $|u_M(t)| \leq a_2(\bar{\epsilon}) =: k$ なるすべての連続可微分な $u_M(t)$ および $B_{a_1(\bar{\epsilon})}$ 上の初期状態に対して規範モデル (9) 式はすべての時刻において解を持ち、さらに $(\pi(x_M(t)), x_M(t))$ もまた M 上に留まる。

○ V 上のすべての x_M および $|u_M| \leq k$ に対して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F(\pi(x_M), c(x_M, u_M)), g_i(\pi(x_M)) \right)$$

は $u = Kx$ によって可安定である。

このとき、正数 k_1, k_2, k_3, γ , および λ で、

$$\begin{aligned} |x(0) - \pi(x_M(0))| &\leq k_1, \\ |x_M(t)| &\leq k_2, \\ |\dot{u}_M(t)| &\leq k_3 \end{aligned}$$

である場合に

$$|x(t) - \pi(x_M(t))| \leq \gamma e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

となるものが存在する。 □

3.4 例題

次式のような制御対象、規範モデル、そして誤差を考える。この例題は、本節での制御則の有効性を示す目的で示したものであり、特に現実的な系を念頭に置いているわけではないことをあらかじめお断りしておく。

制御対象:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + (1 + x_2^2)u \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1^3 + x_1 x_2 \end{aligned} \quad (17)$$

規範モデル:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{M1} &= x_{M2} \\ \dot{x}_{M2} &= x_{M3} \\ \dot{x}_{M3} &= -6.25x_{M1} - 8.75x_{M2} \\ &\quad - 5x_{M3} - 1.5x_{M4} + u_M \\ \dot{x}_{M4} &= x_{M1} + x_{M1}^3 \end{aligned} \quad (18)$$

誤差:

$$e = x_1 - x_{M1}. \quad (19)$$

制御対象 (17), (18) 式はともに原点近傍において相対次数 2 及び 3 を持つので厳密なモデルマッチング制御および安定性を考慮しないモデル追従制御は可能である。また、制御対象のゼロダイナミクスは

$$\dot{x}_3 = 0$$

であるため、最小位相系ではない。また、誤差 (19) 式を出力と見なし、 $u_M = 0$ とした場合の合成系のゼロダイナミクスは

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_{M1} + x_{M1}^3 + x_{M1}x_{M2} \\ \dot{x}_{M1} &= x_{M2} \\ \dot{x}_{M2} &= x_{M3} \\ \dot{x}_{M3} &= -6.25x_{M1} - 8.75x_{M2} - 5x_{M3} - 1.5x_{M4} \\ \dot{x}_{M4} &= x_{M1} + x_{M1}^3 \end{aligned}$$

であり、これもまた漸近安定ではない。よって、幾何学的アプローチによるモデル追従制御則を用いた場合には閉ループ系の安定性は保証されない。しかし、規範モデル (18) 式は局所 BIBS であり、制御対象 (17) 式は線形可制御である。ここで制御対象の線形近似系の漸近安定化フィードバックは

$$u = Kx := -(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)$$

という線形状態フィードバックとして記述される。ただしパラメータ a_1, a_2 , 及び a_3 は、多項式

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_3$$

がフルヴィッツ多項式となるものとする。系 (17) - (19) に対して FBI 方程式を陽に解くことが可能でありその解は

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{M1} =: \pi_1(x_M) \\ x_2 &= x_{M2} =: \pi_2(x_M) \\ x_3 &= x_{M4} + \frac{1}{2}x_{M1}^2 =: \pi_3(x_M) \\ c(x_M, u_M) &= \frac{-x_{M1}^2 + x_{M3}}{1 + x_{M2}^2}. \end{aligned}$$

として与えられる。よって、制御則は

$$u = \frac{-x_{M1}^2 + x_{M3}}{1 + x_{M2}^2} + K(x - \pi(x_M)) \quad (20)$$

として与えられる。

Fig.2.1 はシミュレーション結果である。ただし初期値および安定化フィードバック係数は

$$(x_1, x_2, x_3, x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, x_{M4})(0) = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (3, 2, 3)$$

としてある。図において $u_M(t)$ は、

- 細実線: $u_M(t) = \sin t$
- 太実線: $u_M(t) = 5 \sin(3t)$

である。Fig.2.1 は誤差の挙動を示している。

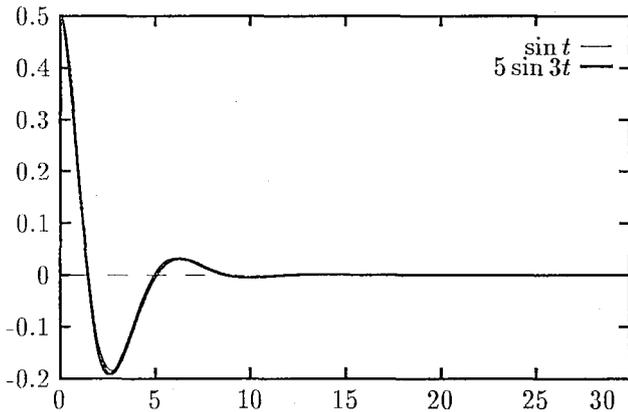


Fig.2.1: Trajectories of the errors.

Fig.2.1 より、どちらの場合にも誤差が収束していることがわかる。しかし、その軌道は異なっており、漸近モデルマッチング制御は達成しているが、モデル追従制御は達成されていないことがわかる。

3.5 FBI 方程式の近似解法

FBI 方程式 (15) 式は偏微分方程式であり、一般にその厳密解を求めることは困難である。よって実際には何らかの近似解法を用い、そしてその場合の制御性能の評価をする必要がある。本節では FBI 方程式の解を低次の項から求める方法を考える。その場合の近似解を以下のように定義する。

定義 3.3 系 (8)–(10) 式を考える。このとき原点 $o \in \mathfrak{R}^{nM}$ の近傍 V 及び半径 ϵ の開球 $B_\epsilon \subset \mathfrak{R}^m$ と、原点 $(x_M, u_M) = (0, 0)$ において零となる滑らかな関数 $\pi^{(k)}: V \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $c^{(k)}: V \times B_\epsilon \rightarrow \mathfrak{R}^m$ で、 $V \times B_\epsilon$ 上の x_M, u_M に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_M} (F_M(x_M, u_M)) &= F(\pi^{(k)}(x_M), c^{(k)}(x_M, u_M)) \\ &\quad + O(x_M^{(k+1)}) + O(x_M^{(k)})u_M, \\ h(\pi^{(k)}(x_M)) &= h_M(x_M) + O(x_M^{(k+1)}) \end{aligned} \quad (21)$$

となるものが存在するとき $\pi^{(k)}(x_M), c^{(k)}(x_M, u_M)$ のことを FBI 方程式 (15) 式の k -次の近似解と呼ぶ。ここで $O(x_M^{(k+1)})$ とは、

$$\lim_{x_M \rightarrow 0} \frac{|O(x_M^{(k+1)})|}{|x_M|^{k+1}} \quad (22)$$

が有限の定数になるような関数のクラスである。□

注意 3.1 系 (8)–(10) 式に対する FBI 方程式の 1 次の近似解は、明らかにそれらの線形近似系に対する FBI 方程式の解となる。

ここで、近似解を用いた場合の誤差に関して、以下の結果が得られる。

定理 3.3 系 (8)–(10) 式を考える。ここで FBI 方程式の k 次までの近似解 $\pi^{(k)}(x_M), c^{(k)}(x_M, u_M)$ が得られ、さらに定理 3.2 における 2 つ目から 4 つ目の条件が満足されているとする。また、制御対象の出力 $h(x)$ は Lipschitz 連続であると仮定する。このとき、与えられた $\rho > 0$ に対して正の定数 $\epsilon_1, \epsilon_2, k_1$, そして k_2 で、以下の性質を持つものが存在する。規範モデル (9) 式の解軌道 $x_M(t)$ に対して $q(t) := \pi^{(k)}(x_M(t))$ と $x(0)$ が

$$\begin{aligned} |x(0) - q(0)| &< \epsilon_1, \\ \max\{|x_M(t)|, |u_M(t)|\} &< \epsilon_2, t \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

を満たすならば閉ループ系は全ての $t \geq 0$ において一意解を持ち、関係式

$$\begin{aligned} |x(t) - q(t)| &< \rho, t \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - q(t)| &< k_1 \epsilon_2^{k+1} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| &< k_2 \epsilon_2^{k+1} \end{aligned} \quad (24)$$

を満足する。□

この近似法を用いる利点としては、

- 解くべき方程式が代数方程式のみとなるため、容易に計算機に組み込むことが可能である
- 厳密な解が得られない場合においても、ある次数までの解が得られればある程度の制御が可能である

等が挙げられる。さらに高次の項を、最小二乗法、あるいは遺伝的アルゴリズム等を用いて導出することによってより良い制御性能を得ることが可能となるであろう。

3.6 標準形と FBI 方程式

FBI 方程式は制御対象の状態空間の座標系のとりかたには依存しない。しかし、制御対象が(ベクトル)相対次数を持つ場合には FBI 方程式の解を簡略化することが可能である。以降は制御対象の状態空間上の局所座標系として標準形(5)式の座標系 (z, ξ) を用いる。状態変数 z に関する FBI 方程式の解は、 $\pi_z(x_M)$ については

$$\pi_{z_j}^i(x_M) = L_{f_M+g_M u_M}^{i-1} h_{Mj}(x_M), \quad i = 1, \dots, \rho_j \quad (25)$$

となる。そこで、(25)式の左辺には u_M が含まれないことより、

$$\begin{aligned} L_{g_{Mk}} L_{f_M}^i h_{Mj}(x_M) &= 0, \\ j, k &= 1, \dots, m; \\ i &= 0, \dots, \rho_j - 2 \end{aligned} \quad (26)$$

が成立しなければならない。また写像 $c^i(x_M, u_M)$ は、 $\pi_\xi(x_M)$ が求められれば

$$\begin{aligned} c^i(x_M, u_M) &= \bar{A}_{ij}^{-1}(\pi_z, \pi_\xi) \left(-L_{f_M}^{\rho_j} h_{Mj}(\pi_z, \pi_\xi) \right. \\ &\quad \left. + L_{f_M+g_{Mk} u_M}^{\rho_j} h_{Mj}(x_M, u_M) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

として与えられる。ただし

$$\bar{A}(z, \xi) := A(x)$$

である。また、この場合 ξ に関する FBI 方程式(シルベスター方程式)は、 $x_M, u_M, \pi(x_M)$ の既知関数である $c(x_M, u_M; \pi(x_M))$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_\xi}{\partial x_M} F_M(x_M, u_M) &= \eta(\pi_z, \pi_\xi) \\ &\quad + P_j(\pi_z, \pi_\xi) c^j(x_M, u_M; \pi(x_M)) \end{aligned} \quad (28)$$

となる。よって以下の命題が得られる。

命題 3.1 m 入力 m 出力系(8)–(10)式を考える。ここで制御対象(8)式において無干渉化行列が正則である場合、FBI 方程式(15)式が可解であるための必要十分条件は(26)式が成立し、シルベスター方程式(28)式が可解であることである。□

3.7 制御則の改良

前節での議論によって、制御対象が相対次数を持つ、あるいは無干渉化行列が正則である場合には FBI 方程式の可解性はシルベスター方程式の可解性に帰着されることが示された。本節では、偏微分方程式の簡略化および制御性能の向上を図るために制御則の改良を試みる。本節では入出力線形化フィードバックの前もっての導入を考える。以降は、制御対象は既に標準形(5)式によって記述されているものとし、 \mathbb{R}^n 上の座標系として (z, ξ) を用いる。制御対象(5)式に入出力線形化フィードバック(4)式を施すと、

$$\begin{aligned} \dot{z}_i^1 &:= h_i(x), \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_i^1 &= z_i^2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_i^{\rho_i-1} &= z_i^{\rho_i} \\ \dot{z}_i^{\rho_i} &= v^j \\ \dot{\xi} &= \eta(z, \xi) \\ &\quad + P(z, \xi) \bar{A}^{-1}(z, \xi) (-a(z, \xi) + v), \end{aligned} \quad (29)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(z, \xi) &:= \eta(z, \xi) - P(z, \xi) \bar{A}^{-1}(z, \xi) a(z, \xi), \\ \bar{P}(z, \xi) &:= P(z, \xi) \bar{A}^{-1}(z, \xi) \end{aligned}$$

と定義する。このとき

$$\dot{\xi} = \bar{\eta}(0, \xi) \quad (30)$$

が制御対象のゼロダイナミクスである。条件(26)式が満足されているものとする、FBI 方程式の解は、 z に関してはフィードバック変換前と同じものになる。また v についての写像 $\bar{c}^j(x_M, u_M)$ は、陽に

$$\bar{c}^i(x_M, u_M) = L_{F_M}^{\rho_i} h_{Mi}(x_M, u_M), \quad i = 1, \dots, m \quad (31)$$

として与えられる。また、この場合のシルベスター方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}_\xi}{\partial x_M} F_M(x_M, u_M) &= \bar{\eta}(\pi_z, \bar{\pi}_\xi) \\ &\quad + \bar{P}_j(\pi_z, \bar{\pi}_\xi) \bar{c}^j(x_M, u_M) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。このとき問題となるのは二つのシルベスター方程式 (28),(32) 式の可解性の関係であるが、簡単な計算によりこの二つの方程式の解は一致を示すことができる。よって、以下の命題が得られる。

命題 3.2 漸近モデルマッチング問題におけるシルベスター方程式の可解性は正則なフィードバック変換のもとで不変である。 □

また、制御対象の指数漸近安定化可能性はフィードバック不変である。よって、フィードバック変換前の系 (5) 式に対してシルベスター方程式が可解であれば、入出力線形化された系 (29) 式に対する指数漸近安定化制御則

$$v = F_z z + F_\xi \xi =: Fx$$

を用いた制御則、

$$\begin{aligned} \dot{u}^j &= \bar{A}_{ij}^{-1}(z, \xi) \left(-a_j(z, \xi) + \bar{c}^j(x_M, u_M) \right. \\ &\quad \left. + F^j(x - \pi(x_M)) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

によっても漸近モデルマッチングは可能である。

この新しい制御則 (33) 式を用いた場合の閉ループ系の特徴は以下の通りである。

- 1入力1出力系の場合には閉ループ系の非線形性を一部消去することが可能であるので、吸引領域を拡大することが可能であると予想される。
- 多入力多出力系の場合には、制御則には安定化項以外に π の知識は不要であるため、可安定接分布の次元だけシルベスター方程式の次元を減らすことが可能である。

4 おわりに

本稿では非線形非最小位相系の漸近モデルマッチング制御における制御則の設計法として、FBI 方程式に基づくものを提案した。

参考文献

- [1] A.Isidori, *Nonlinear control systems*, Second Edition, Springer Verlag, 1989.
- [2] 石動、島、“Invariance の理論とその応用 – VIII. モデル追従制御系,” システムと制御, vol.29, No.5, pp.322–330, 1985.

- [3] M.D.Di Benedetto and J.W.Grizzle, “Qualitative aspects of asymptotic model matching,” *Nonlinear control systems design 1992*, (M. Fliess Ed.), Proceedings of the 2nd IFAC Symposium, pp.327–329, 1993.
- [4] M.Yokomichi and M.Shima, “Approximate model following control for nonlinear systems,” Proceedings of the 1st ASian Control Conference, pp.II-57–II-60, 1994.
- [5] 横道、上田、石動、島, “非線形系の近似モデル追従制御,” 北海道大学工学部研究報告, 第 167 号, pp.147–155, 1994.

DYNAMICS OF INHIBITORY PULSE-COUPLED OSCILLATORS *

YASUMASA NISHIURA

*Research Institute for Electronic Science,
Hokkaido University, Sapporo 060, JAPAN*

JUNKO SHIDAWARA

*Department of Mathematics, Hiroshima University,
Higashi-Hiroshima 739, JAPAN*

and

TAKESHI TAKAISHI

*Faculty of Engineering, Hiroshima-DENKI Institute of Technology,
Hiroshima 739-03, JAPAN*

ABSTRACT

A complete classification of dynamics of a population of a inhibitory pulse-coupled oscillators is presented. The model is based on the work of Mirollo and Strogatz, but our model has an inhibitory coupling between oscillators which makes a sharp contrast with the dynamics of the above authors' model. The main result is that for a large class of initial conditions, the population approaches a periodic state in which all the oscillators keep finite size of phase difference (we call it "*phase locking solution*" here). For the remaining class of initial data except for nongeneric ones, it evolves to a periodic state with a cluster or a synchronous state depending on a size of cluster. The criterion for the classification is explicitly given and can be judged easily only by the initial condition.

This work was motivated by the study of Mirollo and Strogatz¹ on synchronization of biological oscillators typically displayed by the flashing of fireflies in perfect unison. Their model consists of a population of identical integrate-and-fire oscillators. The coupling between oscillators is all to all and pulsatile: when a given oscillator fires, it pulls the others up by a fixed amount, or brings them to the firing threshold, whichever is less. They showed that for almost all initial conditions, the population evolves to a synchronous state. The main issue of this paper

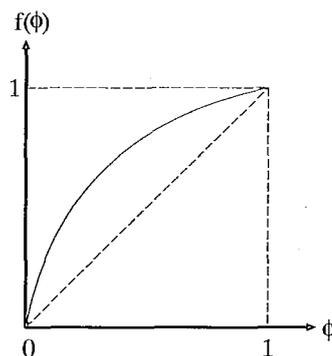


Figure 1: Functional form of $f(\phi)$

*The complete version of this paper will be appeared in "World Scientific Series In Applicable Analysis" volume 4, *DYNAMICAL SYSTEMS AND APPLICATIONS*.

is to study the dynamics of a population of oscillators when they interact in an *inhibitory* way, namely, when a given oscillator fires, it pulls the others *down* by a fixed amount. This type of coupling becomes important especially in models of neural oscillators²

In contrast to activation case, phase locking states become dominant for inhibitory case instead of synchronization. In fact generically there are three basins of attractions; phase locking, phase locking with cluster, and synchronization. The precise meaning of each state will become clear at the end of this section. A complete classification of initial data according to their asymptotic states is done by simple criterions depending only on initial condition. We consider a population of $N + 1$ oscillators and each oscillator is characterized by a state variables x which is assumed to increase monotonically toward a threshold $x = 1$. When x reaches the threshold, the oscillator fires and x jumps back instantly to zero, after which the cycle repeats. Hereafter we assume that x depends only on a phase variable $\phi \in [0, 1]$ and evolves according to $x = f(\phi)$, where $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ is a smooth function satisfying $f' > 0$, $f'' < 0$, $f(0) = 0$, and $f(1) = 1$ (see Fig. 1).

The phase variable ϕ is such that $d\phi/dt = 1/T$, where T is the cycle period. The coupling between oscillators is defined as follows. If x_i fires, then $x_j(\phi) (j \neq i)$ is pulled down instantaneously by the amount $|\epsilon|$, or to zero, whichever is more, i.e., $x_j(\phi + 0) = \max(0, x_j(\phi) + \epsilon) \quad \forall j \neq i$. Note that ϵ is always a negative number. Absorption occurs when an oscillator is pulled down below zero level. Namely, when x_i fires, an oscillator $x_j (j \neq i)$ is **absorbed** by x_i if $\max(0, x_j(\phi) + \epsilon) = 0$ holds. We assume that the absorbed oscillators behave in the same way as x_i thereafter. We call such a group of oscillators a **cluster**. If a cluster of k oscillators fires, it pulls all the other oscillators down by $|k\epsilon|$. When all the oscillators act as one, we call it **synchronization**. Since the interaction among oscillators is pulsatile, and when an oscillator (a cluster) fires, it instantaneously returns to zero phase, it suffices

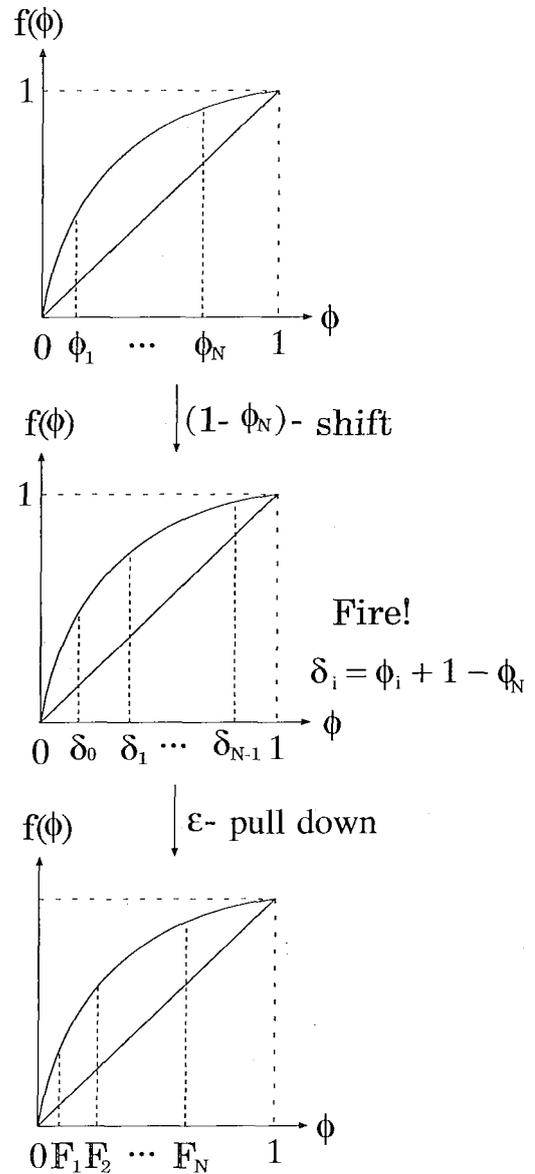


Figure 2: Firing map

to study the following **firing map** F to know the asymptotic behavior (see Fig. 2):

$$F : \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \in D(0,1)$$

$$F(\Phi) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(f(1 - \phi_N) + \epsilon) \\ g(f(\phi_1 + 1 - \phi_N) + \epsilon) \\ \vdots \\ g(f(\phi_{N-1} + 1 - \phi_N) + \epsilon) \end{pmatrix}, \quad g \equiv f^{-1} \quad (0.1)$$

where $D(0,1)$ is the **ordered space** in $(0,1)$, i.e., $D(0,1) = \{\Phi \mid 0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_N < 1\}$, and g is the inverse function of f . It is clear that F preserves order. Also note that one oscillator always sits at $\phi = 0$, so the firing map F becomes N -dimensional. $F^k(\Phi)$ stands for the k -iterations of firing map F , if it can be defined and $F_i^k = F_i^k(\Phi)$ ($i = 1, \dots, N$) denotes the i -th component. $\Phi^* = {}^i(\phi_1^*, \dots, \phi_{k-1}^*)$ is called a **k-phase locking solution** if it is a fixed point of F^k , i.e., $F^k(\Phi^*) = \Phi^*$. This notion can be easily generalized to the case where there are clusters. Our goal is to show the following theorem.

References

1. R. E. Mirollo and S. H. Strogatz, Synchronization of pulse-coupled biological oscillators, *SIAM J. Appl. Math.* **50** (1990), 1645-1662.
2. G. B. Ermentrout and N. Kopell, Inhibition-produced patterning in chains of coupled nonlinear oscillators, *SIAM J. Appl. Math.* **54** (1994), 478-507.

Main Theorem

Suppose an initial condition $\Phi = {}^t(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \in D(0, 1)$ is given, then the asymptotic state is determined by the following diagram.

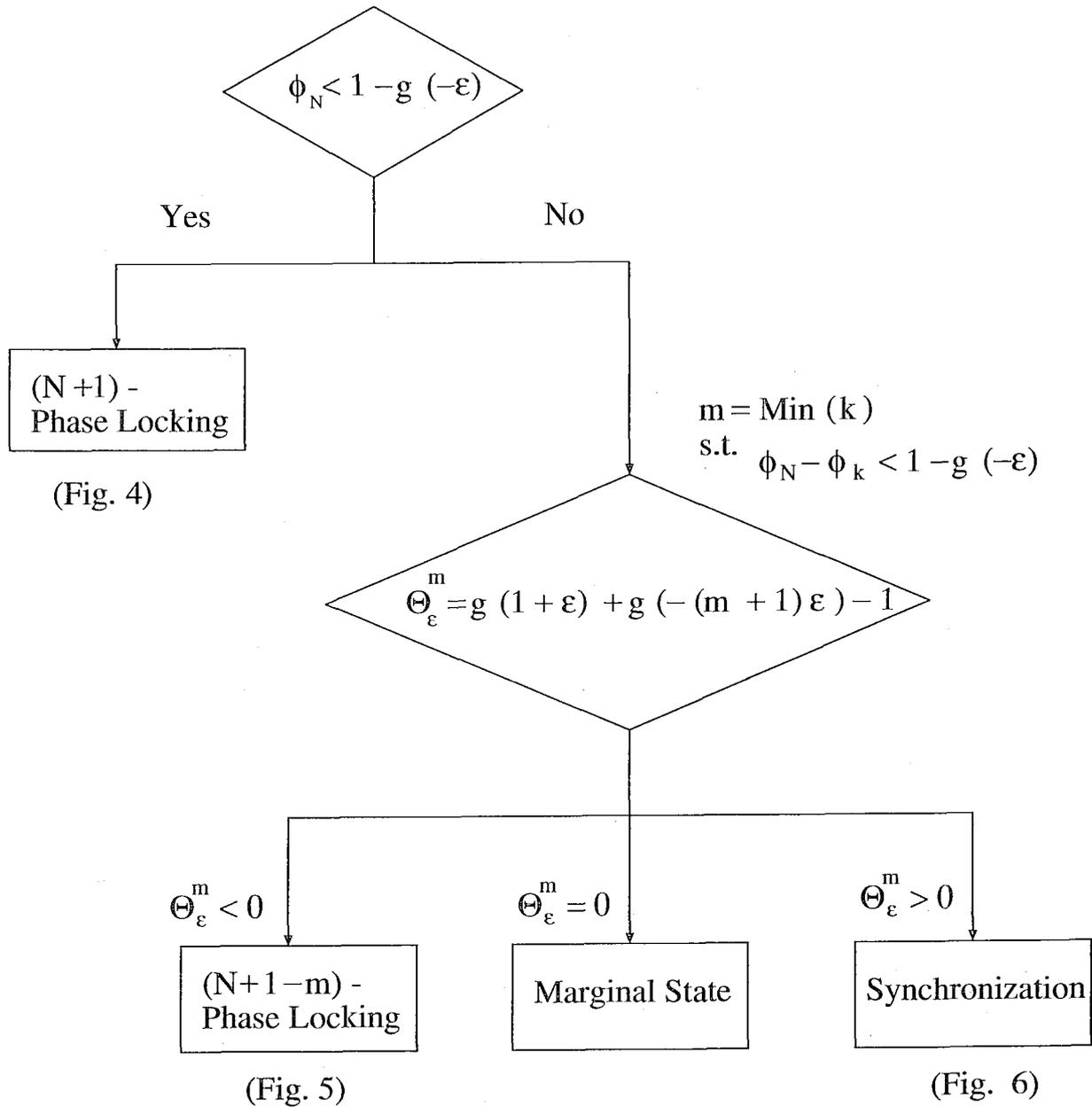
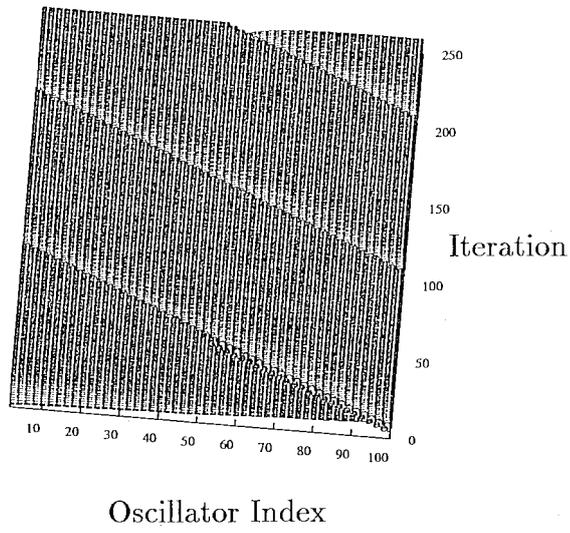


Figure 3: classification of asymptotic dynamics



The vertical direction denotes the phase axis.

Figure 4: Phase locking solution

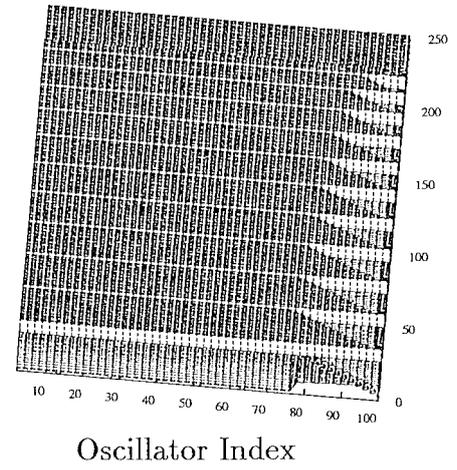
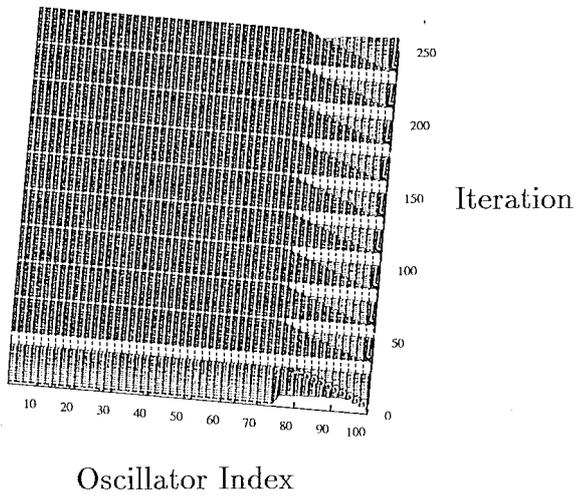


Figure 5: Phase locking solution with cluster

Figure 6: Synchronization

Measure theoretical approach for chaotic dynamical systems

Michiko Yuri
Sapporo University

March 14, 1995

1 ABSTRACT

We study chaotic dynamical systems from measure theoretical view point. Let f be a observable defined on a phase space X . We are interested in time evolutions of it $f, fT, fT^2, \dots, fT^n \dots$, i.e., their asymptotic distribution behaviors and limiting distributions of their partial sums. In ergodic theory, there are several characterizations of dynamical systems with high degrees of randomness. Typical examples are hyperbolic systems which can be reduced to Markov process through a nice coarse-graining. On the other hand, in probability, weak independent process are studied by many people. However most of those are established only for Markov processes and strongly independent processes.

In this talk, we introduce a technique for connecting random process come from dynamical systems and random process in probability theory. It allows us to characterize sensitive dependence of dynamical systems on initial distributions. Further we show several chaotic dynamical systems in the above sense which are not necessarily hyperbolic. One of such Mathematical models, a class of mappings providing nice measure theoretical structure is the following : Let X be a bounded domain of \mathbb{R}^d and T a transformation of X . Assume that there exists a generating countable partition $Q = \{X_a\}_{a \in I}$ of X s.t. $T|_{X_a} : X_a \rightarrow TX_a$ is a C^1 -diffeomorphism. We define a cylinder set of rank n by

$$X_{a_1} \cap T^{-1}X_{a_2} \cap \dots \cap T^{-(n-1)}X_{a_n}$$

if its interior is not empty and we denote by $X_{a_1 \dots a_n}$. Let $\mathcal{U} = \{T^n X_{a_1 \dots a_n} : \forall X_{a_1 \dots a_n}, \forall n > 0\}$.

If \mathcal{U} is a finite set, we call the quadruple $(T, X, Q = \{X_a\}, \mathcal{U})$ a piecewise invertible system with finite range structure (FRS).

Piecewise expanding Markov maps are particular cases of the above system. Typical examples are number theoretical transformations.

2次元写像の力学系的構造について — Hénon map の構造と分岐 —

三波 篤郎 (北見工大)

極めて単純なシステムが極めて複雑な挙動を示す... というものが、“複雑系”のひとつの興味の対象であるのなら、2次多項式は、まさにその典型的な例となる。

任意の \mathbf{R} または \mathbf{C} 上の2次関数は、アフィン写像による座標変換によって、次のような形にできることが簡単にわかる。

$$f_a(x) = a - x^2 \qquad f_c(z) = z^2 + c$$

普通 real の場合は左側を標準形とし、complex の場合は右側を使うのが慣例となっている。また real の場合は、

$$f_a(x) = ax(1-x) \qquad f_a(x) = 1 - ax^2$$

という標準形を使うことも多い。このような最も単純な関数を力学系として見たとき、そこに非常に複雑な構造が隠されているということが、この15年ほどの多くの研究により明らかになり、それは1次元力学系理論、複素力学系理論として、ほぼ完成したと言っていいだろう。

さて、 \mathbf{R}^2 及び \mathbf{C}^2 上の2次多項式で表わされる写像も、1次元の場合とは全く異なる更に複雑な構造を持っており、非線形系で現われる strange attractor や homoclinic bifurcation、また Hamiltonian system の KAM theoretic な分岐などの最も基本的なモデルでもある。

2次多項式で表わされる \mathbf{R}^2 または \mathbf{C}^2 からそれ自身への写像で、Jacobian が constant なものは、affine map による座標変換によって、次のどちらかの写像に変換できることがわかる。

$$H(x, y) = (by + a - x^2, x).$$

$$F(x, y) = (\alpha x + y^2 + \beta, \gamma y + \delta).$$

その形からわかるように、 F は力学系としては単純なものである。 H を Hénon map という。従って Hénon map は、力学系として nontrivial な2次多項式 diffeomorphism の標準形であると言える。

Hénon map に関してまず重要なことは、horse shoe map の生成過程を含んでいるということである。Devaney-Nitecki は、パラメーター a がある程度大きければ ($a \geq 2(1 + |b|)^2$) Hénon map は horse shoe map になり、 $a < -(1 + |b|)^2/4$ ならば $\Omega(H_{a,b}) = \emptyset$ であることを証明している。よく知られているように、homoclinic point があれば、そこには horse shoe map と同型の subsystem が含まれており、更にほとんど全ての nontrivial な non-linear system は homoclinic point を持っている。その意味で、horse shoe map の生成過程は非線形系の分岐に於いて、最も基本的な要素である。しかし、horse shoe map になる以前の Hénon map の分岐は極めて複雑である。

その原因は、あらゆるところで homoclinic tangency が起きているために、あらゆるところで無限の分岐が発生しているからである。

よく知られているように、Hénon map はあるパラメータ領域に於いて Hénon attractor と呼ばれる attractor を持っており [H], これは dissipative な非線形系で現われる strange attractor の中で最も単純なものである。しかしながら、そのアトラクター上での dynamics は未だによくわかっていないし、さらに、non-trivial attractor の存在が厳密に証明されているのは、 $|b|$ が十分に小さい時のみである ([BC], [MV])。このような non-hyperbolic attractor が存在するようなパラメータの測度は正であることが数学的に証明されているが、それは開集合を含むようなものではなく、むしろカントール集的なものであり、従って、僅かなパラメータの変化に対しても、実は無限の分岐が起きているのである。

Hénon map は $b = -1$ の時は area preserving map の 1-parameter family となる。特に H は $-1 < a < 3$ では elliptic な fixed point を持つ。この間この fixed point のまわりでは、Hamiltonian system から得られる写像で見られるような, invariant circle や islands の発生, 消滅が起きる。この意味で Hénon map は, area preserving map (あるいは symplectic map) の分岐の最も単純な paradigm であるとも言える。

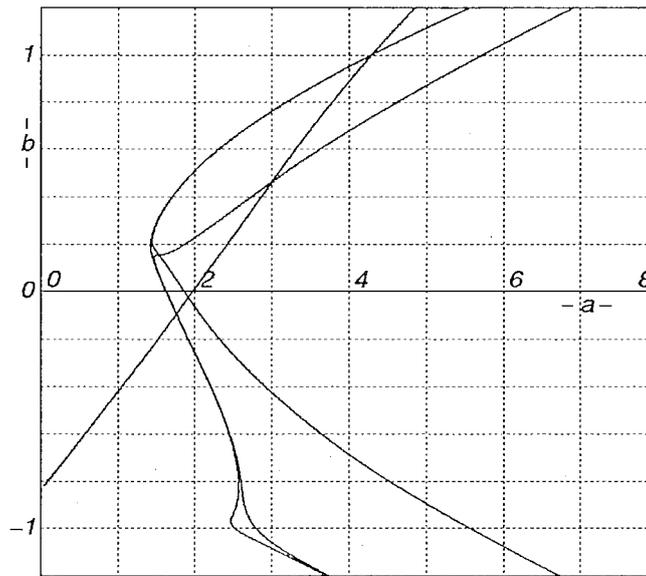


Figure 1: Bifurcation Diagram of Period 5

1 Topological structure of the bifurcation diagram of the Hénon family

Hénon map のパラメーター空間を数値計算によって調べると、その中に cusp connection と呼ばれる特徴的な構造が存在し、それによって standard な quadratic map のタイプの異なる周期点が、Hénon map のパラメーター空間の中でつながっているという事実が見受けられる。また、その cusp connection と呼ばれる関係には、ある種の規則性が予想される。

[San3], [SS] では、1次元の quadratic map のタイプの異なる周期軌道が、Hénon map のパラメーター空間の中でつなぐことができるためのある十分条件を与えている。その条件は、記号列のある単純な操作で与えられるのもであり、任意に与えられた2つの itinerary がその条件のもとで同値になるかどうかは、簡単に判定できる。この条件は、Hénon map のパラメーター空間において、itinerary を特定できる部分、すなわち、1-dimensional part と hyperbolic part のつながり方を調べることによって得られる。さらに、この条件は極めて自然であるため、必要条件にもなると期待できる。

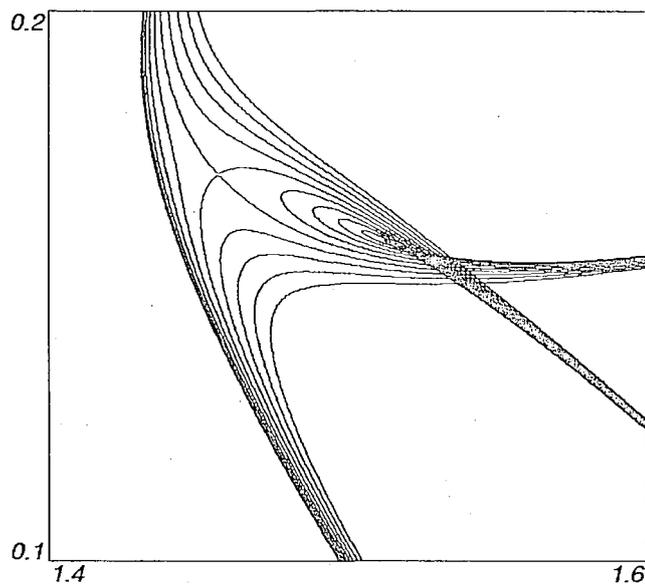


Figure 2: Cusp Region

2 Hyperbolicity in the Hénon family

ある与えられた写像の周期点の個数を厳密に求めることは、たとえ1次元の2次関数や Hénon map のような、きわめて単純な写像であっても非常に難しい。その方法としてもふつう Newton 法くらいしか思いつかないわけだが、それでやると周期はせいぜい10くらいであり、大型計算機などでかなりがんばっても15くらいが限界と思われる。またそこまでやったとしても Newton 法では、得られた数の確実性に不安が残る。

しかし1989年頃、Biam と Wenzel という人たちが Hénon map に対してだけではあるが、画期的な方法を発見したのである。それは基本的には Aubry–Mather の Lagrangian というものに基づいており、まず周期 p の周期点とその critical point に1対1に対応しているような \mathbf{R}^p 上のある gradient vector field を定義する。そしてその critical points を全て捜し出す、ということを行なうのである。残念ながら、この方法の正当性は数学的には証明されていない。しかしこの方法がうまくゆかない例もまだ見つかってはいないようである。

さて、 $b = -1$ (area and orientatin preserving case) の場合に、上記の Biam–Wenzel の方法を使って a を変化させながら周期20までの周期点の個数を計算して行くと、あるけっこう広い a の区間で、周期点の個数が一定となるものがいくつか存在することがわかる。これはこれらのパラメータ領域で Hénon map が構造安定となることを示しているように見える。構造安定性定理より、それは non-wandering set が hyperbolic set となることを意味する。

[DMS] では数学的に厳密な証明はないものの、その hyperbolicity のメカニズムを説明し、そこから得られるマルコフ分割で計算した周期点の個数と、Biam–Wenzel の方法で計算した個数とが、周期20まで完全に一致するという結果を得ている(周期20の周期点の個数は、100万くらいにもなる)。またここで調べられた3つの hyperbolic case は全て、missing block expression という方法でかなり簡単にその構造を表現できる。この missing block expression は Cvitanović の pruning front のひとつの例とも言えるが、対応する Hénon map の構造を具体的に与えたものとしては、初めてのものである。

References

- [B] E.Bedford, *Iteration of polynomial automorphisms of C^2* , Proceedings of the ICM Kyoto 1990, 847–858.
- [BC] M.Benedics, L.Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math. 133 (1991), 73–169.
- [BS1] E.Bedford, J.Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of C^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Inv.Math. 103 (1991), 69–99.

- [BS2] E.Bedford, J.Smillie, *Fatou–Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, Indiana Univ.Math.J. 40 (1991), 789–792.
- [BS3] E.Bedford, J.Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbf{C}^2 : Stable manifolds and recurrence*, J.A.M.S. 4 (1991), 657–679.
- [BS4] E.Bedford, J.Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbf{C}^2 : Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure* Math. Ann. 294 (1992), 395–420.
- [BW] O.Biham, W.Wenzel, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers*, Phys Rev Lett. 63 (1989), 819–822.
- [DMS] M.J.Davis, R.S.MacKay, A.Sannami, *Markov shifts in the Hénon family*, Physica D 52 (1991), 171–178.
- [FS] J.E.Fornaess, N.Sibony, *Complex dynamics in higher dimensions*, Complex Potential Theory, Kluwer Academic Publishers (1994), 131–186.
- [H] M.Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm.Math.Phys. 50 (1976), 69–77.
- [MV] L.Mora, M.Viana, *Abundance of strange attractors*, Acta Math. 171 (1993), 1–71.
- [San1] A.Sannami, *On the structure of the parameter space of the Hénon family*, Dynamical Systems and Applications. (ed. N.Aoki), World Scientific (1987), 143–157.
- [San2] A.Sannami, *A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family*, Japan J.Appl.Math. 6, No.2 (1989), 291–330.
- [San3] A.Sannami, *On the structure of the parameter space of the Hénon map*, Towards the Harnessing of Chaos (ed. M.Yamaguti), Elsevier Science B.V. (1994), 289–303.
- [SS] A.Sannami, K.Shibayama, *On the configuration of the periodic point surfaces of the Hénon family*, in preparation.

THE FIRST BIFURCATION & THE FIRST TANGENCY INSIDE THE HORSESHOE

SHIN KIRIKI

ABSTRACT. We introduce a general definition of *first homoclinic tangency*, and construct a 1-parameter family of planar diffeomorphisms from Smale's n -fold horseshoe diffeomorphism, which has the *first homoclinic tangency* that is a *first bifurcation* introduced by Palis and Takens. Moreover, the *limit capacity* of its maximal invariant set associated with this *first bifurcation* can be as small as is required.

1. INTRODUCTION: THE CONCEPT OF THE FIRST TANGENCY

Homoclinic tangencies play an important role in the study of bifurcations of a 1-parameter families of diffeomorphisms [2] [4] [7] [14]. Palis and Takens studied them extensively and presented many results and problems [8] [9]. Among them is the problem of clarifying the relation between the *first bifurcation* and the *first homoclinic tangency inside the horseshoe*. The purpose of this note is to give a brief description of this problem along with our motives, and give the results with the outlines of its proofs. Precise proofs are presented in [5] [6].

Here we define our general concept of the *first tangency* for a 1-parameter family of planar diffeomorphisms. Let \mathbb{R}^2 be a Euclidean 2-dimensional space, and $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a C^1 diffeomorphism. For each integer $n \geq 2$, we say that φ has an *affine type- n horseshoe*, e.g. $n = 3$ for the left panel in Figure 1, if there exists a square $Q \subset \mathbb{R}^2$ mapped by φ such that $\varphi(Q)$ passes through Q n times, 1, 2, 3 and 4 are mapped to 1', 2', 3' and 4', respectively, and that φ is affine and preserves both horizontal and vertical directions on $\varphi^{-1}(Q) \cap Q$ [1] [12]. We denote the *maximal invariant subset* of Q under φ by Λ , i.e. $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i(Q)$, which is called *type- n horseshoe*. Specially, in the case of $n = 2$ it is called just a *horseshoe*. It is well known that $\varphi|_{\Lambda}$ is topologically conjugate to the shift map of Σ_n which is the set of all doubly-infinite sequences of n symbols, and that Λ is a *hyperbolic set* for φ [11] [12].

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 58F.

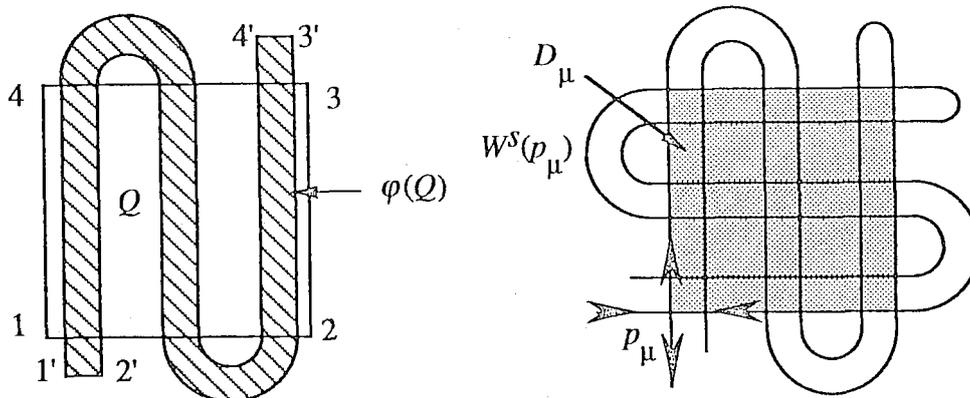


FIGURE 1

We now consider a 1-parameter family of C^1 diffeomorphisms on \mathbb{R}^2 , denoted by $\{\varphi_\mu ; \mu \in I\}$ where $I = [0, 1]$, such that φ_0 has an affine type- n horseshoe. So φ_0 has n saddles in the horseshoe [11]. For $n = 3$, if we restrict our attention to one of three saddles, which is denoted by p_0 , then we obtain such a configuration of *stable* and *unstable separatrices* of p_0 as shown in the left panel in Figure 1, which are denoted by $W^s(p_0)$ and $W^u(p_0)$, respectively, see [3] [9]. In this situation, each intersection between $W^s(p_0)$ and $W^u(p_0)$ is transverse, which is called *transverse homoclinic point*. When stable and unstable separatrices are tangent to each other, it is called a *homoclinic tangency* [10] [13]. We also denote the *maximal invariant subset* of Q under φ_μ by Λ_μ , and assume that, for every $\mu \in (0, 1]$, there exists a saddle p_μ that is the continuation of the saddle p_0 [7]. It is clear that, for μ near 0, there exists a disk $D_\mu \subset Q$ as shown in the right panel in Figure 1 such that $D_\mu \supset \Lambda_\mu$; $\partial D_\mu \subset W^u(p_\mu) \cup W^s(p_\mu)$, where ∂D_μ is the boundary of D_μ , and $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \varphi_\mu^i(D_\mu)$ is equal to Λ_μ . Let $\Omega(\varphi_\mu)$ be the nonwandering set of φ_μ . We also assume that $\Lambda_\mu = \Omega(\varphi_\mu) \cap D_\mu$, and $\Omega(\varphi_\mu) \setminus \Lambda_\mu$ consists of a finite number of hyperbolic periodic points. In this situation, we say that $\{\varphi_\mu : \mu \in I\}$ has a *first (homoclinic) tangency* at $\mu = 1$, if the family satisfies the following conditions:

- (1) for any $\mu < 1$, all intersections of $W^s(p_\mu)$ and $W^u(p_\mu)$ are transversal;
- (2) For $\mu = 1$, it has an orbit of contact-breaking homoclinic tangency on the boundary of D_μ and there is no other orbit of homoclinic tangency.

When $n = 2$, i.e. $\{\varphi_\mu : \mu \in I\}$ has an affine type-2 horseshoe for $\mu = 0$ and a first tangency at $\mu = 1$, the configurations of its separatrices at

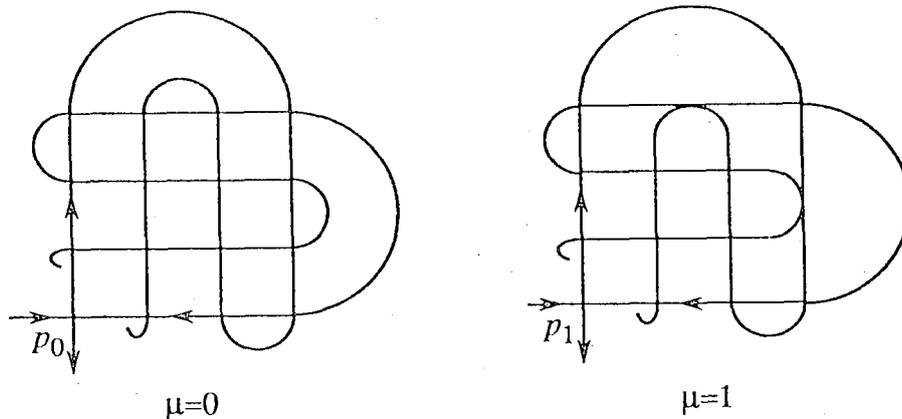


FIGURE 2

$\mu = 0, 1$ are as shown in Figure 2, respectively, [7] [9].

2. MOTIVES AND MAIN RESULTS

For a first tangency as defined in the previous subsection, Palis and Takens [9] posed the question:

“Whether this first tangency is a first bifurcation or not”,

where the *first bifurcation* means that, for any $\mu < 1$, φ_μ satisfies Axiom A and the transversality condition, that is, it is *globally stable*. We have an answer to this problem for a special case:

Theorem 2.1 ([5]). *There exists a special 1-parameter family of C^1 diffeomorphisms near type-2 horseshoe diffeomorphism such that its first tangency is a first bifurcation.*

The above special 1-parameter family was obtained by locally modifying a planar C^1 diffeomorphism which has an affine type-2 horseshoe with the contracting eigenvalue of $(d\varphi)_p$ which is not too small, as

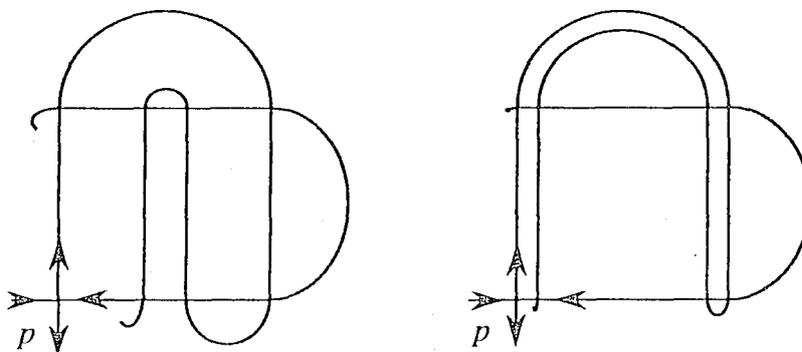


FIGURE 3

in the left panel in Figure 3. If the contracting eigenvalue is very small, as shown in the right panel in Figure 3, we do not know how to construct a 1-parameter family such that its first tangency is a first bifurcation.

We have some *fractal dimensions* available for the *Cantor set* which is defined as the intersection between the separatrix and the maximal invariant subset for the 1-parameter family, that is $W^s(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$ or $W^u(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$. Among them some numerical invariants distinguish between the left situation and the right situation in Figure 3, so that their values for the Cantor set in the left situation are greater than those for the right situation in Figure 3. Results by Palis and Takens [8] [9] suggest the importance of the *limit capacity*, which is one of such numerical invariants, of the Cantor set, for the study of the first bifurcation. For the Cantor set $K = W^s(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$ or $W^u(p_\mu) \cap \Lambda_\mu$, the *limit capacity* is defined as $d(K) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\epsilon(K)}{-\log \epsilon}$, where $N_\epsilon(K)$ is the minimum number of balls of radius ϵ needed to cover K . Their results also suggest that the study of homoclinic bifurcation with small limit capacities is easier than that with large limit capacities. However, we were not able to obtain a first tangency with small limit capacities in [5]. In order to study about the bifurcations associated with the first tangency, we need such a first tangency. Therefore, we now have the motive:

“Is it possible to construct a 1-parameter family having the first tangency, which is also a first bifurcation, inside the maximal invariant subset with a very small limit capacity?”

To answer this question, we construct a special 1-parameter family, for $n \geq 3$, from a *type- n horseshoe diffeomorphism* with very small limit capacities. Our second result now follows:

Theorem 2.2 ([6]). *For any $\epsilon > 0$, there is a real number $\delta(\epsilon) > 0$ such that, for each $0 < \delta \leq \delta(\epsilon)$, there exists a special 1-parameter family of planar C^1 diffeomorphism $\{\varphi_\mu ; \mu \in I\}$ depending on δ , which satisfies the following two conditions:*

- (1) *it has the first tangency at $\mu = 1$, which is a first bifurcation;*
- (2) *$d(W^s(p_1) \cap \Lambda_1) + d(W^u(p_1) \cap \Lambda_1) < \epsilon$.*

3. OUTLINES OF THE PROOFS

Sketch of the proof of Theorem 2.1. First, for $0 < \delta < 1/2$ and a unit square D , we take a precise form of type-2 horseshoe C^1 diffeomorphism φ which has the saddle p such that $\lambda = \frac{1}{2} - \delta$ where λ is the

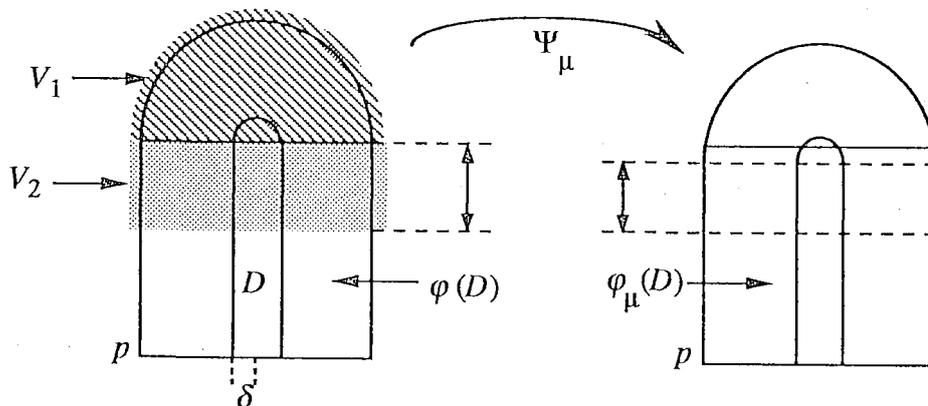


FIGURE 4

contracting eigenvalue of $(d\varphi)_p$, as shown in the left panel in Figure 4. We also define a C^1 perturbation Ψ_μ on $V = V_1 \cup V_2$ as in Figure 4 such that it *compresses* the vertical lines in V_1 , and *slides* the points in V_2 *downward* as μ increases from 0 to 1. We denote $\Psi_\mu \circ \varphi$ by φ_μ which is called a *special 1-parameter family*, and denote the maximal invariant subset of D under φ_μ by Λ_μ . From the construction of this family, it also depends on δ . We write, for any $0 < \mu \leq 1$, $V_\mu = \{x = (s, u) \in D \mid 0 \leq s \leq 1, 1 - \mu\delta \leq u \leq 1\}$ which is shown in Figure 5. In the next proposition, for $0 < \mu < 1$, $x \in \Lambda_\mu \cap V_\mu$ and $n > 0$ such that $\varphi_\mu^n(x) \in V_\mu$, we construct an *unstable cone* $C_\mu(x) \subset T_x\mathbb{R}^2$ for $0 < \delta \leq \delta_h$ such that $(d\varphi_\mu^n)_x C_\mu(x) \subset C_\mu(\varphi_\mu^n(x))$ and that the length of any nonzero vector in $C_\mu(x)$ is expanded exponentially. The *stable cone field* can be constructed by taking the complement of the unstable cone field.

Proposition 3.1 ([5]). *There exists a δ_h such that, for $0 < \delta \leq \delta_h$,*

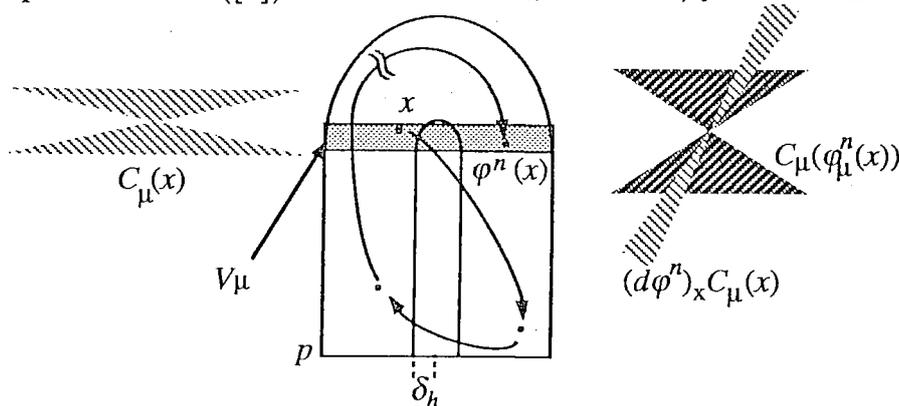


FIGURE 5

there is a continuous unstable cone field satisfying the above properties.

Next, we construct a partition for the above Λ_μ . The continuous cone fields over Λ_μ are obtained for this partition by using some locally linear interpolation of the angle of the cone, . These cone fields assure the hyperbolicity of this family and the transversality of the stable and unstable separatrices for $0 \leq \mu < 1$. \square

Sketch of the proof of Theorem 2.2. The special 1-parameter family φ_μ ($= \Psi_\mu \circ \varphi$) in this theorem is composed of the type-3 horseshoe C^1 diffeomorphism φ and the C^1 perturbation Ψ_μ on the open set V as shown in Figure 6. The components of $\varphi(D) \cap D$, where D is a unit square, are denoted by R_0, R_1 and R_2 as in Figure 6. We assume that $\rho(R_0, R_1) > \rho(R_1, R_2)$, and write $\delta = \rho(R_1, R_2)/2$, where ρ is the Euclidean metric. For some $\delta_h > 0$, similarly as in Theorem 2.1, we construct the 1-parameter family satisfying the hyperbolicity and the transversality condition. Moreover, we estimate the limit capacity of $W^s(p) \cap \Lambda_\mu$ as

$$\begin{aligned} d_\mu^s = d(W^s(p) \cap \Lambda_\mu) &\leq \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log 3^n}{-\log(\lambda + \delta)\lambda^{n-1}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log 3^n}{-\log(\lambda + \delta)^n} = \frac{\log 3}{-\log(\lambda + \delta)}, \end{aligned}$$

where λ is the contracting eigenvalue of $(d\varphi_\mu)_p$. Similarly, $d_\mu^u = d(W^u(p) \cap \Lambda_\mu)$ is estimated. Then we get the 1-parameter family such that, for any $\varepsilon > 0$, there is $\delta_l > 0$ depending on ε such that $d_\mu^u + d_\mu^s < \varepsilon$ for each $0 < \delta \leq \delta_l$. We now write $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_h, \delta_l\}$, and get the result. \square

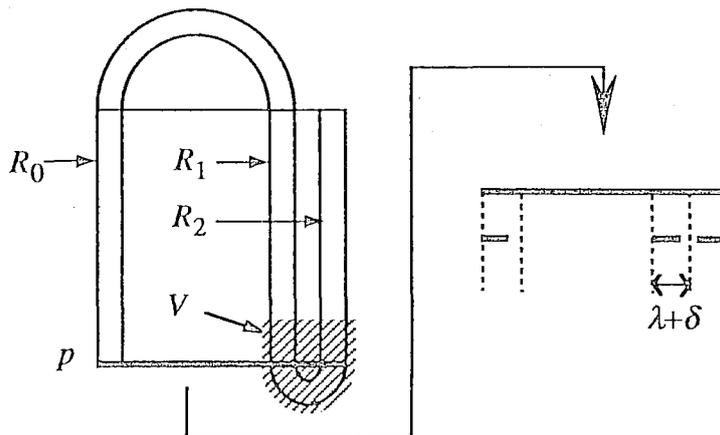


FIGURE 6

We believe that the above two results will be extended to higher dimensions, e.g. a special 1-parameter family can probably be constructed by modifying a 3-dimensional horseshoe diffeomorphism as in Figure 7.

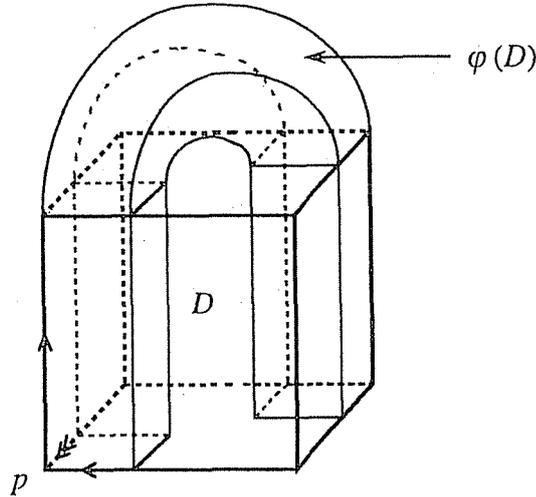


FIGURE 7

Professor F. Takens posed us a new problem of the relation between the homoclinic tangency and the first bifurcation as follows. Let $\{\varphi_\mu ; \mu \in \mathbb{R}\}$ be a 1-parameter family of diffeomorphisms on \mathbb{R}^2 satisfying φ_0 has an affine horseshoe. Let Λ_0 be the horseshoe for φ_0 , and let Λ_μ be the maximal invariant subset for φ_μ which is the continuation of Λ_0 as long as Λ_μ is a hyperbolic set. We write

$$\mu_0 = \sup \{ \mu \in \mathbb{R} \mid \Lambda_\mu \text{ is a hyperbolic set} \} \text{ and}$$

$$\mu_1 = \inf \{ \mu \in \mathbb{R} \mid \varphi_\mu \text{ has a homoclinic tangency} \}.$$

Problem. *In the above situation, is there a 1-parameter family of planar diffeomorphisms such that $\mu_0 < \mu_1$? Moreover, is there an open set of C^2 arcs of planar diffeomorphisms such that $\mu_0 < \mu_1$?*

We have no answer to this question.

ACKNOWLEDGMENTS

We are in debt to professor Floris Takens in University of Groningen in the Netherlands for proposing this theme, and for valuable discussions. We also would like to thank professor Ichiro Tsuda, Yasunori Okabe, Atsuro Sannami and Hiroshi Kokubu for their encouragements.

REFERENCE

- [1] M. Barge, *Horseshoe maps and inverse limits*, Pacific J. Math. **121** (1986), 29-39
- [2] M. S. Davis, R.S. MacKay, A. Sannami *Markov shifts in the Hénon family* preprint of University of Warwick (1990)
- [3] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lect. Notes in Math **583**, Springer-Verlag, 1977
- [4] Y. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, I. Kan, *How often are chaotic saddle nonhyperbolic?*, Nonlinearity **6** (1993), 779-797.
- [5] S. Kiriki, *Hyperbolicity of the special 1-parameter family with a first homoclinic tangency*, preprint, to appear Ergod. Th. & Dynam. Sys.
- [6] S. Kiriki, *The First homoclinic tangency inside the horseshoe with small fractal dimensions*, in preparation.
- [7] S. Newhouse, J. Palis, *Cycles and bifurcation theory*, Astérisque **31** (1976), 44-140.
- [8] J. Palis & F. Takens. Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits. *Annals of Math.* **125** (1987), 337-374.
- [9] J. Palis & F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [10] R. A. Posthumus, F. Takens. *Homoclinic tangencies: moduli and topology of separatrices*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **13** (1993), 369-385.
- [11] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, In *Differential and Combinatorial Topology* Princeton Univ. Press (1965), 63-80.
- [12] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747-817.
- [13] F. Takens, *Abundance of generic homoclinic tangencies in real-analytic families of diffeomorphisms*, Bol. Bras. Mat. Vol. **22**, No. **2** (1992), 191-214.
- [14] J.C. Tatjer, C. Simó, *Basins of attraction near homoclinic tangencies*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **14** (1994), 351-390.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, TOKYO DENKI UNIVERSITY,
 HATOYAMA, HIKI, SAITAMA, 350-03, JAPAN
E-mail address: ged@r.dendai.ac.jp