１９９５年度談話会・特別講演
アブストラクト集

Colloquium Lectures

北海道大学理学部数学教室

Edited by G. Ishikawa

Series #45. July, 1996

HOKKAIDO UNIVERSITY

TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

♯ 13: M. Suzuki, "駆け足で有限群を見てみよう" 1987 年 7 月北大での集中講義の記録, 38 pages. 1989.

♯ 14: J. Zajac, Boundary values of quasiconformal mappings, 15 pages. 1989

♯ 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.

♯ 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.

♯ 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.

♯ 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.

♯ 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.

♯ 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.

♯ 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.

♯ 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.

♯ 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.

♯ 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.

♯ 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28〜10.2 北海道大学での集中講義　講義録, 52 pages. 1993.

♯ 26: T. Nakazi (Ed.), 第 1 回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.

♯ 27: K. Kubota (Ed.), 第 18 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.

♯ 28: T. Hibi (Ed.), 1992 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.

♯ 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第 2 回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.

♯ 30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.

♯ 31: K. Kubota (Ed.), 第 19 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.

♯ 32: T. Ozawa (Ed.), 1993 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.

♯ 33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.

♯ 34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.

♯ 35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第 3 回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.

♯ 36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.

♯ 37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.

♯ 38: M. Saito (Ed.), 1994 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 100 pages. 1995.

♯ 39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.

♯ 40: H. Komatsu, A. Kishimoto (Eds.), 作用素論・作用素環論研究集会予稿集, 61 pages. 1995.

♯ 41: K. Okubo, T. Nakazi (Eds.), 第 4 回関数空間セミナー報告集, 103 pages. 1996.

♯ 42: R. Agemi (Ed.), 第 2 0 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.

♯ 43: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves,Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.

♯ 44: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves,Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.

1995年度談話会・特別講演アブストラクト

談 話 会 ・ 特 別 講 演 一 覧 （１９９５年度）

1.	４月１９日（水）＊	西 浦 廉 政	氏（北大・電子研）	Turingパターン再訪
2.	４月２６日（水）＊	小 林 亮	氏（北大・電子研）	凝固現象におけるパターン形成
3.	５月１０日（水）＊	山 下 博	氏（北大・理）	Gradient型微分作用素と離散系列表現の模型
4.	５月１７日（水）＊	行 木 孝 夫	氏（北大・理）	Infinite to one factors of sofic systems, entropies and cellular automata
5.	５月２４日（水）＊	山 崎 昌 男	氏（一橋大・商）	The Navier-Stokes exterior problem in the lorentz space $L^{n,\infty}$
6.	５月２９日（月）＊	谷 本 匡 亮	氏（日立半導体事業部）	Existence and Non-existence Theorems for positive solutions to scalar field equations and their Asymptotics
7.	５月３１日（水）＊	新 井 朝 雄	氏（北大・理）	ゲージ理論における正準交換関係の表現とAharonov-Bohm効果
8.	６月 １日（木）＊	鈴 木 通 夫	氏（イリノイ大）	群とグラフ
9.	６月 ６日（火）＊	深 井 康 成	氏（東工大・理）	２次元ランダムウォークのポテンシャル核の評価
10.	６月 ７日（水）＊	小 澤 徹	氏（北大・理）	On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type
11.	６月２１日（水）＊	三 村 昌 泰	氏（東大・数理）	Pattern Formation in a Nonlinear Diffusion Equation in Biology
12.	６月２８日（水）＊	泉 屋 周 一	氏（北大・理）	非線形一階偏微分方程式の幾何学的解と弱解
13.	７月 ３日（月）＊	Patricio Avilés	氏（チリ・カソリック大）	On the regularity of quasi-regular mappings
14.	７月 ５日（水）	Tin-Guo Ho	氏（京大・数理研）	Deformed Bosons
15.	７月 ５日（水）＊	松 本 幸 夫	氏（東大・数理）	４次元多様体とリーマン面
16.	７月２０日（木）＊	A. A. Panchishkin	氏（ｸﾞﾙﾉｰﾌﾞﾙ大）	Families of modular forms and supersingular motives
17.	７月２０日（木）＊	肥 田 晴 三	氏（北大・理）	Selmer Groups
18.	７月２４日（月）＊	G. Barsegian	氏（ｱﾙﾒﾆｱ科学ｱｶﾃﾞﾐｰ）	The theory of R. Nevanlinna describing the numbers of a-points of meromorphic functions and the theory of locations of the a-points
19.	９月１３日（水）	藤 井 宏	氏（京都産大・理）	"What is the language of the brain ? - A new perspective"
20.	９月２０日（水）＊	一 瀬 孝	氏（金沢大・理）	On the Trotter Product Formula in Operator Norm for Schrödinger Operators
21.	９月２０日（水）＊	今 野 紀 雄	氏（室工大）	無限粒子系の相転移現象
22.	１０月 ４日（水）	森 吉 仁 志	氏（北大・理）	Maslov指数と二次不変量との関連について
23.	１０月１１日（水）＊	J. Seade	氏（UNAM）	The index of a vector field on a singular variety
24.	１０月１７日（火）＊	Ha Huy Vui	氏（ﾊﾉｲ数学研究所）	Affine Picard-Lefschetz formula (case of 2 variables)
25.	１０月１８日（水）＊	日 合 文 雄	氏（茨城大・理）	Quantum mechanics in AF C^*-systems
26.	１０月１８日（水）	Jean-Paul Brasselet	氏（CIRM）	Toric varieties:divisors and poincaré duality, through examples
27.	１０月１９日（木）	Lê Dũng Tráng	氏（プロバンス大）	Topology of critical loci
28.	１０月２５日（水）＊	荷 見 守 助	氏（茨城大・理）	Hardy族の除去可能特異点について
29.	１０月２５日（水）＊	海 津 聰	氏（電気通信大）	劣微分の収束概念と均質理論への応用
30.	１０月３０日（月）＊	Niu Fengwen	氏（Jilin大）	Derivations on Algebraic system
31.	１０月３１日（火）＊	Li Huishi	氏（Shaanxi師範大）	Global Dimension of Graded Local Rings
32.	１１月 １日（水）＊	応 隆 安	氏（京大）	Vortex Method for the initial-boundary value Problems of the Navier-Stokes equations
33.	１１月 １日（水）＊	太 田 琢 也	氏（東京電機大・工）	実代数群の標準表現のassociated varietyと巾零軌道の誘導
34.	１１月 ２日（木）＊	笠 原 泰	氏（東工大・理）	種数２の写像類群のJones表現について

35.	１１月　８日（水）	吉　田　知　行	氏（北大・理）	有限群論の位相的量子場の理論への応用をめざして
36.	１１月１５日（水）＊	小　野　　薫	氏（お茶の水女子大・理）	$b_2^+=1$の４次元symplectic多様体について
37.	１１月２２日（水）＊	伊　藤　一　男	氏（北大・理）	ある双曲－楕円型方程式系の大域的弱解について
38.	１１月２２日（水）	郡　司　幸　夫	氏（神戸大）	固有名としての自己相似型写像の縮退
39.	１１月２９日（水）	柳　田　達　雄	氏（北大・電子研）	流体現象の構成的モデル化とシミュレーション
40.	１１月２９日（水）＊	向　井　　茂	氏（名大・多元数理）	単純Lie環の幾何的構成
41.	１２月　６日（水）＊	尾　畑　伸　明	氏（名大・多元数理）	無限次元ラプラシアン
42.	１２月１２日（火）＊	Georg Weiss	氏（ボン大）	The singular limit of the Cahn-Hilliard equation with a non-local term
43.	１２月１３日（水）＊	神　田　雄　高	氏（北大・理）	Legendrian 結び目について
44.	１２月１３日（水）＊	小　林　亮　一	氏（名大・多元数理）	値分布論の代数幾何的構成
45.	１２月１８日（月）	原　田　耕一郎	氏（オハイオ州立大）	A search for vertex operator algebras
46.	１２月２０日（水）＊	原　岡　喜　重	氏（熊本大・教養）	Twisted Riemann's period relationと合流超幾何関数の２次関係式
47.	１月１１日（木）	Michael Kwieciński	氏（Jagiellonian大）	On characteristic classes of coherent sheaves
48.	１月１７日（水）＊	友　枝　謙　二	氏（大阪工業大）	ある非線形拡散方程式の数値解とそのサポートの挙動について
49.	１月１７日（水）	佐　藤　　肇	氏（名大・多元数理）	幾何構造とツイスター理論
50.	１月１８日（木）＊	加　藤　崇　雄	氏（山口大・理）	Non-trivial linear systems on smooth plane curves-Menelaosの定理の拡張とその応用
51.	１月２４日（水）	坂　口　　茂	氏（愛媛大・理）	非線形退化放物型方程式の非負値解の形状について
52.	１月２６日（金）＊	川中子　　正	氏（阪大・理）	いくつかのPorous media方程式（系）の解の存在と挙動
53.	１月３０日（火）＊	北　岡　良　之	氏（名大・多元数理）	GL_nの数論的有限部分群について
54.	１月３１日（水）＊	栗　原　将　人	氏（都立大・理）	保型形式に伴うＰ進Ｌ関数の微分の値について
55.	１月３１日（水）	深　谷　賢　治	氏（京大・理）	スタックとシンプレクティック幾何学
56.	２月　１日（木）＊	上　羽　牧　夫	氏（名大・理）	結晶成長におけるステップのパターン
57.	２月　１日（木）＊	瀬　川　重　雄	氏（大同工大）	調和次元と調和率
58.	２月　７日（水）＊	佐　伯　　修	氏（広島大・理）	Jordan-Brouwerの定理の逆とその関連話題
59.	２月　８日（木）＊	小　谷　元　子	氏（東邦大・理）	The space of harmonic maps from 2-spheres to the unit N-sphere
60.	２月　９日（金）	辻　井　正　人	氏（東工大・理）	低次元力学系におけるカオス
61.	２月１３日（火）＊	橋　本　義　武	氏（大阪市立大・理）	Riemann面のある初等的構成法と第２種基本Abel微分（大場清氏との共同研究）
62.	２月１５日（木）＊	菊　地　光　嗣	氏（静岡大・工）	変数次数の強楕円型擬微分作用素を生成作用素するMarkov過程とその性質について
63.	２月１５日（木）＊	松　井　　卓	氏（都立大・理）	Kink of XXZ models
64.	２月１６日（金）	A. Novick-Cohen	氏（ハイファ大）	From diffuse interface equations to geometric motion:Coupling surface diffusion with motion by mean curvature
65.	２月１６日（金）＊	細　野　　忍	氏（富山大・理）	Quantum cohomology ring of Calabi-Yau hypersurfaces and GKZ hypergeometric systems
66.	２月２３日（金）	八　牧　宏　美	氏（熊本大・理）	有限群の初等的問題
67.	３月　５日（火）＊	竹　田　雅　好	氏（阪大・基礎工）	Asymptotic Properties of Generalized Feynman-Kac Functionals
68.	３月　７日（木）	高　村　明　良	氏（筑波大付属盲学校）	盲人に対する高等専門教育の現状と問題点
69.	３月１３日（水）＊	Ilia A. Bogaevski	氏（会津大・Moscow State Forestry Univ.）	Bifurcations of shock waves

70.	3月15日（金）	F. van Diejen	氏（東大）	Spectrum and eigenfunctions of the rational relativistic Calogero system in an external field
71.	3月26日（火）	Gerhard Michler	氏（Essen大）	A new existence proof for Ly, the sporadic simple group of R.Lyons

Ｔｕｒｉｎｇパターン再訪

北海道大学電子科学研究所
西浦廉政

Motion of patterns is usually recognized by tracking the behavior of interfaces segregating two phases as in solidification, combustion, polymer alloy, chemical reaction, population biology, and so on. In most cases the width of interface (denoted by ε) is assumed to be much smaller than the size of the domain. It is known in experiments (for instance, block copolymer melts, nematic-smectic transition in liquid crystal and magnetic thin film) that very complicated and fine structures are observed as final stationary states. This is due to the existence of nonlocal effects in those materials. The issue is to find the **characteristic domain size** of such complicated stable patterns and determine their **morphologies** in higher dimensional space, which depend on ε and the strength of nonlocal effect.

There are conserved and non-conserved model systems to describe the above phenomena; Cahn-Hilliard equation with non-local effect and an activator-inhibitor system with Bonfoeffer-van der Pol type nonlinearity. It should be noted that the patterns become finer and finer when ε tends to zero, and hence there are no well-defined limiting configurations for such systems. **Rescaling** technique is employed to overcome this difficulty. Here a natural question arises: "Is there an any difference between conserved and non-conserved models about the stability and the scaling law for stationary interfacial patterns?". It turns out that there is essentially no difference between them for the scaling law, in fact it is quite robust and does not depend on the precise mechanisms. Existence and stability criterions are the keys to determine the appropriate scale for the final patterns. The mathematical core part is to find asymptotic free boundary problems for final patterns and asymptotic formulas of eigenvalues of the linearized problems there when ε tends to zero and the effective length of nonlocal term tends to infinity, then derive existence and stability criterions, and finally, find an appropriate scaling satisfying those criterions.

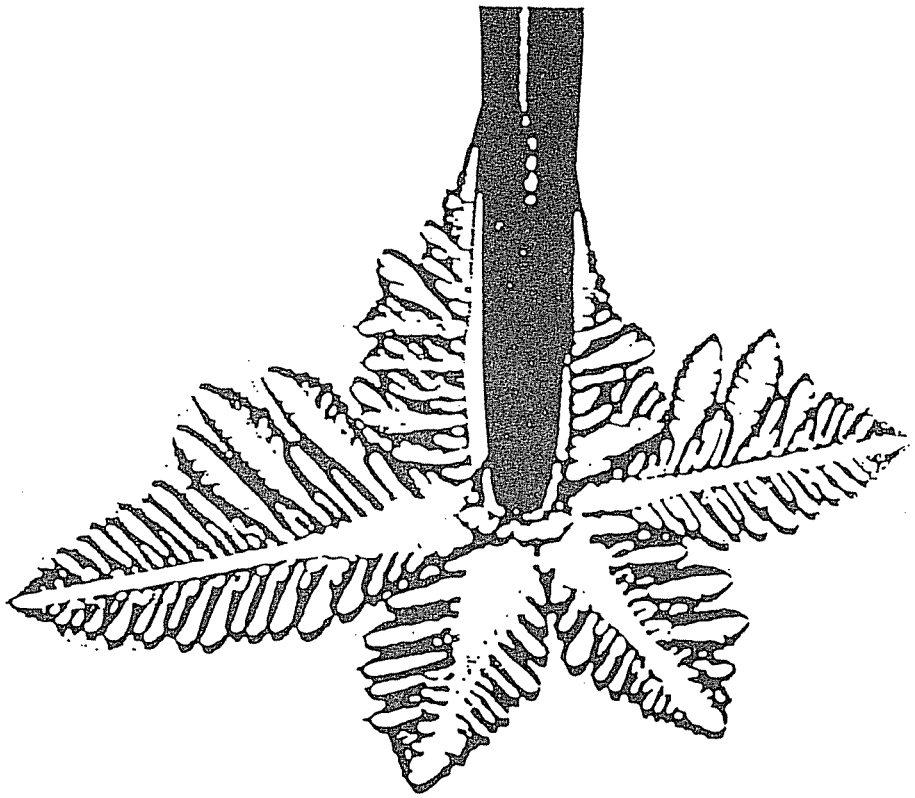
凝固現象におけるパターン形成

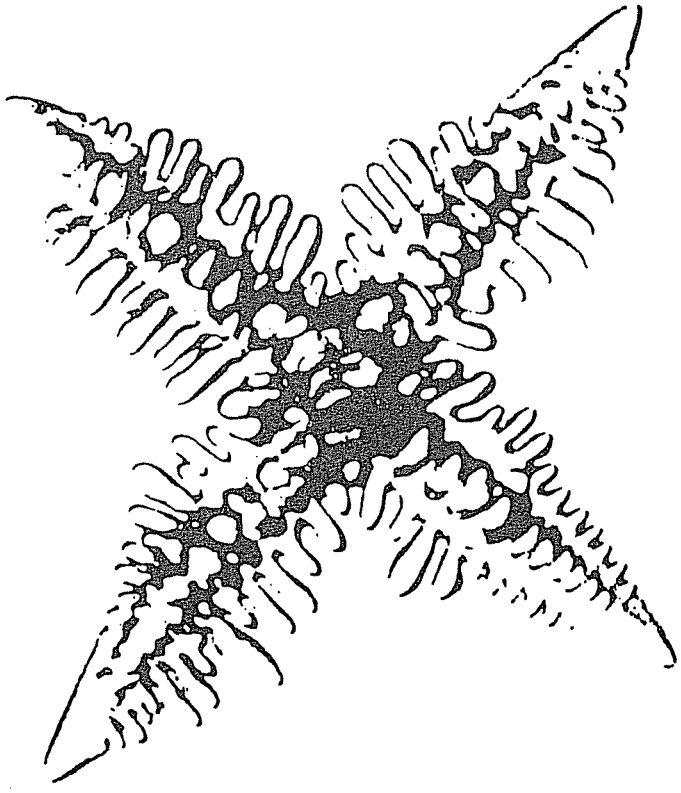
電子科学研究所 小林 亮

結晶成長はマクロなスケールでの自発的なパターン形成の典型的な例である。結晶成長には、雪のように蒸気中で結晶が成長する気相成長や、過飽和溶液中で結晶が析出する溶液成長、また融液が凝固することによって起こる融液成長等さまざまな様式があるが、今回は融液成長において見られるパターン形成について紹介する。

融液成長の例としては、水が凍って氷になるとか、熔融していた金属が凝固して固体になるといったものが代表的であろう。このとき明らかに、環境相には結晶に取り込まれるべき分子が結晶相とほぼ等密度で存在し、結晶相と融液を本質的に区別するのは分子配置の秩序度である。気相成長や溶液成長では環境相に存在する結晶構成分子は希薄であり、融液成長とは違った成長様式をとる。融液成長では多くの場合、界面はミクロなレベルで荒れており、環境相から結晶面に到達した分子はその場でただちに結晶相に組み入れられるというかたちで成長が起こる。

このような融液成長の中でしばしば観察されるのが、デンドライトと呼ばれる樹枝状の構造である (下図)。環境相が何も複雑な構造を持たないにもかかわらず、このような複雑なパターンが形成されるということは、その成長過程そのものの中に複雑さを生み出すメカニズムが内包されているということにほかならない。ここでは、できるかぎりシンプルなモデルを用いて、典型的なデンドライトを再現することにより、このような複雑なパターンを生み出すメカニズムを理解しようとするアプローチについてお話したい。





Gradient型微分作用素と離散系列表現の模型

山下　博　　北大・理

Hを半単純リー群Gの既約表現が定めるHarish-Chanda加群とする。Gの極大コンパクト群Kの既約表現(τ, V_τ)がHに現れるとき、Frobenius相互律よりHをC^∞-誘導加群$\mathrm{Ind}_K^G(\tau)$の部分加群$m(H)$として実現することができる。さらにV_τがHに重複度1で現れるならば、この実現(=模型)は一意的である。

1970年前後から、"既約加群HのG/Kにおける模型$m(H)$がG/K上の然るべきG-不変微分作用素系$\mathcal{D}$のK-有限核として特徴づけられる"ということが、極めて広いクラスのHに対して明らかにされてきた。離散系列表現*(堀田-Parthasarathy; 1974), 球主系列*(KKNMOOT [1]; 1978), 既約最高ウェイト表現(Davidson-Stanke; 1993), などが典型的な例である。ただし、* 印の表現についてはパラメータに関する制限があり。

さて、$m(H)$が不変微分作用素系$\mathcal{D}$のK-有限核として得られるとき、Hの反傾既約表現H^*から任意に与えられたC^∞-誘導加群$\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$の中への埋め込みを$\mathcal{D}$を用いて特徴づけることができる。ここに、ηはGの閉部分群Nの既約表現。模型$H^* \hookrightarrow \mathrm{Ind}_N^G(\eta)$を求めることは、微分方程式系$\mathcal{D}F = 0$の解を表現空間$\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$の中に求めることに帰着するのである。これは、既約Harish-Chandra加群の誘導表現における模型を定めるための一般的手法を与える ([1, I, Theorem 2.4] の一般化)。

講演では、Hが離散系列の場合に焦点を絞り、HをG/K上に実現するGradient型微分作用素を用いた、Hの誘導加群への埋め込み決定について解説する(cf. [1], [3])。さらに、Gradient型微分作用素による実現を用いて、Hの随伴多様体・Gelfand-Kirillov次元などの重要な"べき零不変量"を導出する原理 [2] を述べる(cf. [4])。

参考文献

[1] H.Yamashita, Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups, I, Japan.J.Math.(N.S.) 16 (1990), 31-95; II, J.Math.Kyoto Univ. 31 (1991), 543-571.

[2] H.Yamashita, Associated varieties and Gelfand-Kirillov dimensions for the discrete series of a semisimple Lie group, preprint.

[3] T.Yoshinaga and H.Yamashita, The embeddings of discrete series into principal series for an exceptional real simple Lie group of type G_2 , to appear in J.Math.kyoto.Univ.

[4] A.Gyoja and H.Yamashita, Associated variety, Kostant-Sekiguchi correspondence and locally free $U(\mathfrak{n})$-action on Harish-Chandra modules, in preparation.

[1] 柏原・木幡・峰村・岡本・大島・田中の略

1995/5/17 談話会要旨
行木孝夫
Infinite to one factors of sofic systems, entropies and cellular automata

1. 準備

有限集合 A の無限直積空間 $X = A^{\mathbb{Z}^D}$ をとる。連続写像$\tau : X \mapsto X$が次を満たす時、セルオートマトンとよぶ。

定義 **1.1.** $\Lambda \subset \mathbb{Z}^D$を与えられた有限格子、$f$を$\Lambda$から A への写像とする。任意の$x \in X$ について一様に $(\tau x)_i = f(x_j; j \in \Lambda + i)$ となる。ここで$\Lambda + i$ は、Λを i だけ平行移動したものである。

ここで$\Lambda + i$ はΛを iだけ平行移動したものだから、セルオートマトンは空間的に一様な規則で時間発展を決める力学系とみなすことができる。例えば、一次元系 $D = 1$ で $A = \{0, 1\}$ としてτを $(\tau x)_i = x_{i-1} + x_{i+1} \bmod 2$ とすれば、簡単な例が作れる。この時間発展の一例は次のようになる。

```
t=0 ...oo..o......o..ooooo..o:.....ooo..ooooo.ooo.ooo.o.oo...o......o....o
t=1 ..ooooo.o....o.ooo...ooo.o....oo.oooo...o.o.o.o.o...ooo.o.o....o.o..o.
t=2 .oo...o..o..o..o.oo.oo.o..o..ooo.o..oo.o.........o.oo.o....o..o...oo.o
t=3 .ooo.o.oo.oo.oo..oo.oo..oo.ooo.o..oooo..o.......o..oo..o..o.oo.o.ooo..
t=4 oo.o...oo.oo.oooooo.oooooo.o.o..ooo..ooo.o.....o.oooooo.oo..oo...o.oo.
t=5 .o..o.ooo.oo.o....o.o....o....ooo.oooo.o..o...o..o....o.ooooooo.o..ooo
t=6 o.oo..o.o.oo..o..o...o..o.o..oo.o.o..o..oo.o.o.oo.o..o..o.....o..ooo..
t=7 ..oooo....oooo.oo.o.o.oo...oooo....oo.oooo.....oo..oo.oo.o...o.ooo.ooo
```

歴史的に見ればセルオートマトンとは自己組織化する系を実現するモデルとして提唱されたものであるが、1980 年代にはカオス的な力学系としての興味から集中的に数値解析が行なわれている。物理的に興味のある結果としては、連続極限をとることでナビエストークス方程式を再現するモデルを構成したという報告があり、分子動力学まで遡ることによってセルオートマトンが物理モデルの正当な表現になりうる例を示している。しかし、ほとんどのモデルはその目標とする物理現象との対応付けに困難がある。そこで、セルオートマトンを抽象的に捉えた際に力学系としてわかることを積み上げる必要が生じた。1990 年に入り、アトラクタに関する結果が知られている。

エントロピーの時間発展を、$\nu = \mu \circ \tau^{-1}$として $h_\mu \to h_\nu$で定義する。つまり、エントロピーは格子上の確率測度の時間発展を反映するものと考える。まず、エントロピーの定義をあたえよう。

定義 **1.2** (1 次元格子模型のエントロピー). μを平行移動不変な X上の確率測度とする。エントロピー h_μは

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{a_{-n},\cdots,a_n \in A} \mu[a_{-n}, \cdots, a_n] \log \mu[a_{-n}, \cdots, a_n]$$

と定義する。ここで、$[a_{-n},\cdots,a_n]=\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in A^{\mathbb{Z}};x_{-n}=a_{-n}\cdots x_n=a_n\}$ であり、$\mu[a_{-n},\cdots,a_n]$ は単語 $a_{-n},\cdots,a_n$ の出現確率を表す。

このとき、エントロピーの時間発展について、

$$h_\mu(X,\sigma)\leq h_\nu(X,\sigma)+\int_Y h_d d\nu.$$

ここで、$d(w)=\#f_{|w|}^{-1}(w)$ は単語 w の多重度といい、$f_{|w|}(w)$ は w を像にもつ単語の全体を表す。$d(w)$ の指数関数的な発散のレートは次の極限であり、

$$h_d(y)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log d(w_n(y)) \tag{1}$$

これは $\nu-a.e.$ で存在する。

また、確率測度として配位空間の平衡状態を与える Gibbs 測度をとれば、この不等式の等号が成立する。$A^{\mathbb{Z}}$ 上の Gibbs 測度とは、$A^{\mathbb{Z}}$ 上の連続関数 $U(x)$ を決めた時に $P,C_1,C_2>0$ として

$$C_1\leq\frac{\mu([x_0\cdots x_{m-1}])}{\exp(-mP-\sum_{i=0}^{m-1}U(\sigma^i x))}\leq C_2$$

となるものである。ここで $(\sigma x)_j=x_{j+1}$ は平行移動を表す写像であり、Gibbs 測度はポテンシャル関数 U による歪みのもとで一様な単語の出現確率を表している。

本稿の設定のもとでエントロピーが非増加になることは自明だが、この不等式はエントロピーの減少率を力学系の局所的（ミクロ）な構造から説明していると解釈できる。アトラクタの構造との関係は簡単な場合にしかわかっていない。

THE NAVIER-STOKES EXTERIOR PROBLEM IN THE LORENTZ SPACE $L^{n,\infty}$

MASAO YAMAZAKI

Hitotsubashi University

This is a joint work with Hideo Kozono (Nagoya University).

Let Ω be an exterior domain in $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary $\partial\Omega$, where $n \geq 2$. We consider the following initial-boundary value problem for the n-dimensional nonstationary Navier-Stokes equation in Ω:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u + (u \cdot \nabla_x)u + \nabla_x p = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla_x \cdot u = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{on } (0,\infty) \times \partial\Omega \tag{3}$$

with the initial condition

$$u(0,x) = a(x) \text{ in } \Omega. \tag{4}$$

Here we assume that the Cauchy data $a(x)$ satisfy the conditions $\nabla_x \cdot a(x) = 0$ in Ω and $\nu \cdot a(x) = 0$ on $\partial\Omega$, where ν denotes the unit normal vector of $\partial\Omega$.

In the case $n \geq 3$, we also consider the following stationary Navier-Stokes equation on Ω:

$$-\Delta_x w + (w \cdot \nabla_x)w + \nabla_x \pi = f(x) \text{ in } \Omega, \tag{5}$$

$$\nabla_x \cdot w = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{6}$$

$$w = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{7}$$

where the external force $f(x) = \big(f_1(x), \cdots, f_n(x)\big)$ can be written as $f_j(x) = \sum_{k=1}^n \dfrac{\partial F_{jk}}{\partial x_k}(x)$ with some tensor field $F(x) = \big\{F_{jk}(x)\big\}_{j,k=1}^n$.

We also consider the stability of solutions of the above problem by treating the above nonstationary equation in Ω by treating the following system:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_x v + (w \cdot \nabla_x)v + (v \cdot \nabla_x)(w+v) + \nabla_x q = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \tag{8}$$

$$\nabla_x \cdot v = 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \Omega, \tag{9}$$

$$v = 0 \quad \text{on } (0,\infty) \times \partial\Omega \tag{10}$$

with the initial condition

$$v(0,x) = b(x) \text{ in } \Omega. \tag{11}$$

In order to state the results, we first recall that the space $L^{r,\infty}(\Omega)$ is defined to be the set of measurable functions $u(x)$ on Ω such that $\sup_{R>0} R\mu(\{x \in \Omega \mid |u(x)| > R\})^{1/r} < \infty$ for $r \in (1,\infty)$, where $\mu(X)$ denotes the Lebesgue measure of the set X. Then there exists a norm on $L^{r,\infty}(\Omega)$ with which the space $L^{r,\infty}(\Omega)$ becomes a Banach space. Furthermore, the space $L^{r,\infty}(\Omega)$ coincides with the real interpolation space $(L^{r_0}(\Omega), L^{r_1}(\Omega))_{\theta,\infty}$, where $r_0, r_1 \in [1,\infty]$, $r_0 \neq r_1$, $\theta \in (0,1)$ and $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$. In the sequel we abbreviate $L^r(\Omega)$, $L^{r,\infty}(\Omega)$ and $C_0^\infty(\Omega)$ to L^r, $L^{r,\infty}$ and C_0^∞ respectively.

We next recall that there exists a projection P in $\left(\sum_{1<r<\infty} L^r\right)^n$ such that $Pu = 0$ holds if u can be written as $u = \nabla f$ with some scalar function $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ with $\nabla f \in \left(\sum_{1<r<\infty} L^r\right)^n$, and that $Pu = u$ holds if u satisfies $\nabla \cdot u = 0$ in Ω and $\nu \cdot u = 0$ on $\partial\Omega$. Putting $L^r_\sigma = P(L^r)^n$ and $L^{r,\infty}_\sigma = P(L^{r,\infty})^n$ respectively, we have $(L^{r_0}_\sigma, L^{r_1}_\sigma)_{\theta,\infty} = L^{r,\infty}_\sigma$, where r_0, r_1, θ and r be the same as above. In the sequel let $\|\cdot\|_r$ and $\|\cdot\|_{r,\infty}$ the norms of $(L^r)^n$ and $(L^{r,\infty})^n$ respectively.

Then the results on time-local solutions of (1)–(4) are as follows.

Theorem 1. *Suppose that $n < q < \infty$. Then there exist positive constants $M = M(n,q)$ and $\varepsilon = \varepsilon(n,q)$ such that, for every $a(x) \in L^{n,\infty}_\sigma + L^q_\sigma$ satisfying*

$$\limsup_{R\to\infty} R\mu(\{x \in \Omega \mid |a(x)| > R\})^{1/n} \le \varepsilon, \tag{12}$$

there exists a unique strong solution $u(t,x)$ of (1)–(3) on $(0,T)\times\Omega$ for some $T > 0$ satisfying the conditions

$$\sup_{0<t\le T'} t^{(q-n)/2q}\|u(t,\cdot)\|_q < \infty \text{ for every } T' \in (0,T), \tag{13}$$

$$\sup_{0<t\le T'} \|u(t,\cdot)\|_{L^{n,\infty}+L^q} < \infty \text{ for every } T' \in (0,T), \tag{14}$$

$$\limsup_{t\to+0} t^{(q-n)/2q}\|u(t,\cdot)\|_q < M \tag{15}$$

and the initial condition (4) in the following sense:

$$u(t,\cdot) \to a \text{ in the weak-}* \text{ topology of } L^{n,\infty}_\sigma + L^q_\sigma \text{ as } t \to +0. \tag{16}$$

Next, the results on time-global solutions are as follows.

Theorem 2. *There exists a positive constant $\delta = \delta(n)$ such that, if $a(x) \in L^{n,\infty}_\sigma$ satisfies $\|a\|_{n,\infty} < \delta$, there exists a smooth solution $u(t,x)$ of (1)–(3) on $(0,\infty)\times\Omega$ satisfying (13)–(16) with $T = \infty$ and $q = 2n$. Moreover, we have $\sup_{t>0}\|u(t,\cdot)\|_{n,\infty} < \infty$ and $\sup_{t>0} t^{(q-n)/2q}\|u(t,\cdot)\|_q < \infty$ for every $q \in (n,\infty)$.*

In the case $n = 2$, the smallness of the Cauchy data can be replaced by the smallness of the distance between the Cauchy data and the closure of the space $L^{2,\infty}_\sigma \cap (L^\infty)^n$ in $L^{2,\infty}_\sigma$. In fact, we have the following theorem.

Theorem 3. *Suppose that $n = 2$ and that $a(x) \in L^{2,\infty}_{\sigma}$ satisfies (12) with $n = 2$ and $q = 4$. Then there exists a smooth solution $u(t,x)$ of (1)–(3) on $(0,\infty) \times \Omega$ satisfying (13)–(16) with $T = \infty$ and $q = 4$.*

From now on we assume that $n \geq 3$. In order to state the results precisely, we introduce some function spaces. For $1 < r < \infty$, let $\dot{H}^1_r$ denote the completion of the space C^{∞}_0 with respect to the norm $\|\nabla \cdot \|_r$. Next, for $1 < r < \infty$ and $1 \leq q \leq \infty$, let $\dot{H}^1_{r,q}$ denote the real interpolation space $\left(\dot{H}^1_{r_0}, \dot{H}^1_{r_1}\right)_{\theta,q}$, where r_0, $r_1 \in (1,\infty)$, $r_0 \neq r_1$, $0 < \theta < 1$ and $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$. Then the space $\dot{H}^1_{r,q}$ is independently defined of the choice of r_0 and r_1. Moreover, it coincides with the completion of C^{∞}_0 with respect to the norm $\|\nabla \cdot \|_{r,q}$ provided $1 \leq q < \infty$.

Then our result on (5)–(7) is the following theorem.

Theorem 4. *For every $n \geq 3$, there exist positive constants $k = k(n)$ and $\gamma = \gamma(n)$ such that, for every $F(x) \in L^{n/2,\infty}$ satisfying the inequality $\|F\|_{n/2,\infty} \leq \gamma$, there uniquely exists a solution $\big(w(x), \pi(x)\big) \in \dot{H}^1_{n/2,\infty} \times L^{n/2,\infty}$ of (5)–(7) satisfying the inequality $\|w\|_{n,\infty} \leq k$ in the sense that the equality*

$$(\nabla w, \nabla \varphi) - (w \cdot \nabla \varphi, w) - (\pi, \nabla \cdot \varphi) = -(F, \nabla \varphi)$$

holds for every $\varphi \in (C^{\infty}_0)^n$ and that the equality $\nabla_x \cdot w(x) = 0$ holds on Ω.

Finally, in order to state our result on (8)–(11) precisely, let us recall the definition of the Stokes operator. For $1 < r < \infty$, the Stokes operator A_r is defined on the set $H^2_r(\Omega) \cap H^1_{r,0,\sigma}(\Omega)$ as $A_r = -P_r\Delta$, where the space $H^1_{r,0,\sigma}(\Omega)$ is the completion of $C^{\infty}_{0,\sigma}$ with respect to the norm $\|\cdot\|_r + \|\nabla \cdot \|_r$. Then we can rewrite the system (8)–(10) into the evolution equation

$$\frac{dv}{dt} + A_r v + P_r(w \cdot \nabla_x v + v \cdot \nabla_x w + v \cdot \nabla_x v) = 0 \tag{17}$$

for $v(t,x)$ such that $v(t,\cdot) \in L^r_{\sigma}$.

Then our main result on the system (8)–(11) is the following:

Theorem 5. *For every $n \geq 3$ and every real number $r > n$, there exist positive constants $\kappa = \kappa(n,r)$ and $\lambda = \lambda(n,r)$ such that the following holds. Suppose that $w(x)$ is a solution of (5)–(7) satisfying $w(x) \in L^{n,\infty}_{\sigma}$, $\nabla w(x) \in L^r$ and $\|w\|_{n,\infty} \leq \kappa$. Then, for every $b(x) \in L^{n,\infty}_{\sigma}$ satisfying $\|b\|_{n,\infty} \leq \kappa$, there uniquely exists a solution $v(t,\cdot)$ of (17) on $(0,\infty)$ satisfying the following properties:*

(1) $v(t,\cdot) \in BC\big((0,\infty); L^{n,\infty}_{\sigma}\big) \cap C\big((0,\infty); D(A_r)\big) \cap C^1\big((0,\infty); L^r_{\sigma}\big)$,
(2) $v(t,\cdot) \to b$ *in the weak-* topology of* $L^{n,\infty}_{\sigma}$ *as* $t \to +0$,
(3) $\sup_{t>0} t^{(r-n)/2r}\|v(t,\cdot)\|_r < \infty$,
(4) $\limsup_{t\to+0} t^{(r-n)/2r}\|v(t,\cdot)\|_r \leq \lambda$.

Moreover, the above solution $v(t,\cdot)$ enjoys the estimate

$$\sup_{t>0} t^{(q-n)/2q}\|v(t,\cdot)\|_q < \infty$$

for every q such that $n < q \leq r$.

Existence and Non-existence Theorems for positive solutions to scalar field equations and their Asymptotics

Osaka Univ. Tadaaki TANIMOTO *

In this talk, we discuss the existence and non-existence of positive solutions satisfying

$$(*) \quad |x|^{\frac{n-1}{2}} \exp(|x|)u(x) \longrightarrow \beta \quad \text{as} \quad |x| \longrightarrow \infty \quad \text{for some } \beta > 0$$

of the following semilinear elliptic equation

$$\triangle u - u + Q(|x|)u^p = 0 \tag{E}$$

where $\triangle$ is n-dimensional Laplacian, $p > 1$, and $Q(x)$ is a given non-negative function.

If $u(x)$ satisfies equation(E) in the entire space R^n, (*), and

$$u(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \in R^n,$$

it is called *a ground state*. If $u(x)$ satisfies equation(E) in $R^n \setminus \{0\}$, (*),

$$u(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0, \quad \text{and} \quad u(x) \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad |x| \longrightarrow 0,$$

it is called *a singular ground state.*

When $Q(|x|) \equiv 1$, equation(E) becomes a scalar field equation. Gidas-Ni-Nirenberg have shown that both ground states and singular ground states are radial symmetric. For $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, the unique existence of ground states is well-known. When $p > \frac{n+2}{n-2}$, Ni-Serrin proved that scalar field equation has neither a ground state nor a singular ground state. The existence of singular ground states when $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ has been left open. However, recently Jonson-Pan-Yi gave the affirmative answer for it by using a dynamical system approach.

We can give a completely different proof of the unique existence of a ground state and the existence and non-existence of singular ground states. Moreover we can extend the results to general $Q(|x|)$ and show their asymptotics under the suitable conditions on $Q(|x|)$. For simplicity, we state our result in the case where $Q(|x|) \equiv |x|^m$ with $m \in R$.

Theorem 1 *Suppose that $n = 3$ and $Q(|x|) \equiv |x|^m$ for some $m \in R$.*

Case I : $m \leq -2$

If $p > 1$, then equation(E) does not have any positive solution.

Case II : $-2 < m \leq 0$

(i) If $1 < p < 2m + 5$, then equation(E) has a unique ground state and infinitely many singular ground states.

(ii) If $p \geq 2m + 5$, then equation(E) has neither a ground state nor a singular ground state.

Case III : $m > 0$

(i) If $1 < p \leq m + 1$, then equation(E) has no radial ground state and infinitely many radial singular ground states.

(ii) If $m+1 < p < 2m+5$, then equation(E) has a unique radial ground state and infinitely many radial singular ground states.

(iii) If $p \geq 2m+5$, then equation(E) has neither a radial ground state nor a radial singular ground state.

*Currently at Semiconductor & Integrated Circuits Div, Hitachi, Ltd.

ゲージ理論における正準交換関係の表現と Aharonov-Bohm 効果

Representation of Canonical Commutation Relations in a Gauge Theory and the Aharonov-Bohm Effect

新井 朝雄 (Asao Arai)
Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

Abstract

We consider a representation of canonical commutation relations (CCR) appearing in a (non-Abelian) gauge theory on a non-simply connected region in the two-dimensional Euclidean space. A necessary and sufficient condition for the representation to be equivalent to the Schrödinger representation of CCR is given in terms of Wilson loops. A representation inequivalent to the Schrödinger representation gives a mathematical expression for the (non-Abelian) Aharonov-Bohm effect. Some aspects of the Dirac-Weyl operator associated with the representation of CCR are discussed*.

AMS classification numbers (1991): 81S05, 81R05, 81Q05, 81Q10, 81Q60

References

1. A. Arai, *Momentum operators with gauge potentials, local quantization of magnetic flux, and representation of canonical commutation relations*, J.Math.Phys. **33** (1992), 3374–3378.
2. A. Arai, *Properties of the Dirac-Weyl operator with a strongly singular gauge potential*, J.Math.Phys. **34** (1993), 915–935.
3. A. Arai, *Gauge theory on a non-simply conneted domain and representations of canonical commutation relations*, J.Math.Phys. **36** (1995), 2569–2580.
4. A. Arai, *Representation of canonical commutation relations in a gauge theory, the Aharonov-Bohm effect, and the Dirac-Weyl operator*, Nonlinear Math.Phys. **2** (1995), 247–262.
5. A. Arai, *Canonical commutation relations, the Weierstrass Zeta-function, and infinite dimensional Hilbert space representations of the quantum group* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, to be published in J.Math.Phys.(1996).

*Recently a relation of the Aharonov-Bohm effect to infinite Hilbert space representations of the quantum group $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ has been discovered [5].

群とグラフ

鈴木通夫

グラフが与えられれば，その自己同形の全体として一つの群が定まる．逆に群が与えられた時適当なグラフをつくり，その自己同形のつくる群が与えられた群に近いようにするという問題がある．実際，群の概念が定まった頃 1878年に Cayley は与えられた群を colour group として表現することを考えた．これにより群を見易く表現すると同時に，それを使って群を調べようというのが Cayley の考えであった．これは今 Cayley グラフと呼ばれている，色と向きのついたグラフで，それが連結の時，色も方向も変えない自己同形の群がもとの群と同形になる．

1938年になって Frucht が色や方向を取り除くことに成功し，その後 1949年には valency 3 のグラフで表現出来ることを証明した．この講演の一つの目標は Frucht の定理の簡単な別証明を与えることである．

出来上ったグラフを見ると辺に色をつけて各頂点から，おのおのの色の辺がただ一つ出ている．このようなグラフを絵という．この別証明は 1990年の Behrendt の定理の別証明と半ばなっている．つまり任意の有限生成群は3色の絵で表現される．もっとうまくすれば自己同形の群が頂点上に可移に出来ないか，という問題がおこる．~~最近~~ 有限単純群に関する最近の結果をつかえば，一つの例外を除けば，有限単純群は3色の絵に可移に表現出来る．

最近 Marcelo-Ruiz-Shinoda は point-color-symmetric picture 表現（PPR）というものを考えている．群Gが3色の PPR 表

現をもつための条件は，位数3と位数2の元で生成される群Hがあって Gが Hの中の指数3の部分群と同形になることである．従って，例えば A_6 は3色の絵画可移に表現されるが3色のPPRはもっていない．

その他関連する話題を紹介したい．

2次元ランダムウォークのポテンシャル核の評価　(東工大理　深井康成)

1. 定義と記号

$X_k(k=1,2,\cdots)$ を Z^2に値をとる独立同分布とする。2次元ランダムウォーク (出発点 0)$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$は $S_0:=0$、$S_n:=\sum_{k=1}^{n}X_k$と定義し、さらに2次元ランダムウォークのポテンシャル核 $A(x)$ は $A(x):=\sum_{n=0}^{\infty}(P\{S_n=0\}-P\{S_n=-x\})$ と定義する。ここでは、$|x|$ が無限大でのポテンシャル核 $A(x)$ の挙動について調べる。結果を述べるために、いくつかの記号を導入する。

$$Q(\theta):=E\{(\theta\cdot X_1)^2\},\quad g(\theta):=-4E\{(\theta\cdot X_1)^3\}/3Q(\theta)^2$$

$$C(x/|x|):=\lim_{u\to\infty}\int_{-u}^{u}g(V(1,t))dt$$

ただし、$x=(x_1,x_2)$ に対して

$$V=\begin{pmatrix} x_1/|x| & -x_2/|x| \\ x_2/|x| & x_1/|x| \end{pmatrix}$$

2. 結果

定理 $(F-Uchiyama)$ 2次元ランダムウォークが次の条件を満たす。(1) 2次元ランダムウォーク $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$が非周期的である。すなわち、$\{x\in Z^2; P\{X_1=x\}>0\}$ を含む最小の加法群が Z^2に一致している。(2) ある$\delta>0$ が存在して $E\{|X_1|^{4+\delta}\}<\infty$ となる。

この時

$$(*)\qquad A(x)-(1/2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\pi)\log(Q(x_2,-x_1))-C_0$$

$$=(1/4\pi^2|x|)C(x/|x|)+O(|x|^{-2})\quad(|x|\to\infty)$$

ただし、σ_1,σ_2は X_1の共分散行列の固有値であり C_0はランダムウォークにのみ依存する定数である。x の方向にのみ依存する関数 $C(x/|x|)$ が x のすべての方向で 0 であることと X_1の 3 次のモーメントがすべて 0 であることとは同値である。この定理は [1] と [2] の命題 12.3 の結果を含むものとなっている。

参考文献

[1]A.Stöhr, Uber einige linearepartielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten ,Math. Nachr. 3 (1949-1950) 330-357.
[2]F.Spitzer, Principles of Random Walk (Springer-Verlag,2nd ed.,1976).

Colloquium Lecture

ON THE NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS OF DERIVATIVE TYPE

T. Ozawa*)

Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060, Japan

My talk is on the Cauchy problem both at finite and infinite times for a class of nonlinear Schrödinger equations with coupling of derivative type. Concerning the Cauchy problem at finite times, I give sufficient conditions for the global well-posedness in the energy space. Concerning the Cauchy problem at infinity, I construct modified wave operators on small and sufficiently regular asymptotic states. The proof uses gauge transformations which reduce the original equations to systems of equations without coupling of derivative type. Details will be published in the Indiana University Mathematics Journal.

*)Partially supported by the Sumitomo Foundation and by the Suhara Memorial Foundation.

Pattern Formation
in
a Nonlinear Diffusion Equation in Biology

Masayasu. Mimura

Department of Mathematical Sciences
University of Tokyo
1-3-8 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153 Japan

In my talk, I would like to consider a reaction-diffusion-advection system which has been proposed in order to describe aggregation of individuals in biology. The system is

$$\begin{aligned} \varepsilon u_t &= \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon\delta \nabla(u \cdot \nabla\chi(v)) + f(u) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t > 0,\ x \in \Omega. \\ \varepsilon v_t &= d\Delta v + u - \gamma v, \end{aligned} \tag{1}$$

Here u is the densitiy of biological individuals and v is the concentration of chemotactic substance. d_u and d_v are the diffusion coefficients of u and v, respectively. We assume $\chi(v) > 0$ and $\chi'(v) > 0$ for $v > 0$, for which each individual has the tendency of migration to higher gradient of chemotactic substance. As far as our knowledge, the functional form of $\chi(v)$ has not been specified clearly so far, though some plausible forms have been often used such as $\chi(v) = v$ or $\log v$ or $v/(s + v)$ with a constant $s > 0$. $f(u)$ is the growth term of u, which includes the effects of intraspecific competition and cooperation. For simplicity only, we specify it as $f(u) = (1 - u)(u - a)$ with a constant a satisfying $0 < a << 1$ which biologically indicates rich nutrient for individuals. γ is the degradation rate of v. If v is spatially constant, that is $\nabla v = 0$ (that is, no chemotaxis effect), the

first equation reduces to the scalar. bistable reaction-diffusion equation which is called the Allen-Cahn equation. If Ω is a bounded domain, the boundary conditions to (1) are

$$\partial/\partial\mu(u, v) = (0,0) \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega \tag{2}$$

with the outerword normal vector μ on $\partial\Omega$ or if it is an unbounded domain R^n, the boundary condition is

$$\lim_{|x|\to\infty} (u, v)(t,x) = (0,0). \tag{3}$$

In the absence of the growth term, (2) is called the Keller-Segel model which is proposed to describe slime mold aggregation[8] and has been investigated by many authors. One typical phenomenon is the localization of u due to chemotaxis effect, which implies the aggregation of individuals. Especially, if an initial function of u takes nearly the delta distribution at some point in R^n ($n \geq 2$), the solution u(t,x) tends to infinity at one point in finite time. This is called chemotactic collapse in biology.

For (1), (3), the existence and stability of radially symmetric equilibrium solutions are discussed. It is emphasized that the stability crucially depends upon the form of $\chi(v)$. In fact, for $\chi(v) = v^2$, such solutions are destabilized for suitable interval of δ and they evolved into spatio-temporal patterns exhibiting network like strucutre.

Our strategy to understand these patterns, we derive the limit free boundary problem which can be derived as $\varepsilon \to 0$ in the problem. It will be stated in the lecture.

References

M. Mimura and T. Tsujikawa: Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, to appear in Physica A

M. Mimura, T. Tsujikawa, R. Kobayashi and D. Ueyama: Dynamics of aggregation patterns ina chemotaxis-diffusion-growth model equation, Forma, 8 (1993) 179-195

非線形一階偏微分方程式の幾何学的解と弱解

泉屋周一 (北大理)

この講演では以下の空間一次元ハミルトンーヤコビ方程式のコーシー問題の解の特異点 (衝撃波) の生成、伝播、分岐及び衝突について述べる:

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + H(\dfrac{\partial y}{\partial x}) = 0 \quad t > 0 \\ y(0,x) = \phi(x) \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ただし H と ϕ は C^∞-関数とする。

ハミルトンーヤコビ方程式は様々な分野において重要な役割を担っていることが知られているが、ここではそのことは省略する。

さて、十分短い時間 t に対して (P) の解は古典的な特性曲線の方法によって決まる。ここで、(P) の幾何学的解 yとはそのような特性曲線の方法によって得られる多価もゆるす解でありルジャンドル解折の枠組みで記述されることが以前の研究で解っている。一般的に、この yは初期値に於いて滑らかであってもある時間がたつと特性曲線が交わりその後に幾何学的解は多価になる(即ち、特異点が現れる)。幾何学的解 y の特異点の分類は以前の我々の研究で完成されている。一方、粘性解の理論は (P) に対して正しい弱解の理論と言えるものでその業績に寄り、P.-L.Lions が昨年度のフィールズ賞を受賞している。その存在、一意性及び初期値に対する安定性などは Crandall と Lions によって確立されている。さて、粘性解は一価関数であり、最初の特異点が現れる時間までは幾何学的解と一致することが知られているが、特性曲線が交わったあとはその微分が不連続になる曲面(衝撃波) が派生する。

一方、幾何学的解(多価解) から正しい一価の分枝を選び出して弱解を構成する方法はハミルトンーヤコビ方程式の場合は辻幹雄氏によって導入された。さらには、中根静夫氏により一般次元の場合に最初の特異点が現れたあと準凹解を Hが凸の場合に構成された。さらに、Bogaevskii はバーガー系の消滅粘性法に寄って得られるポテンシャル解がある種の関数族の最小値によって得られることを示し $n = 1,2,3$ の場合にその特異点の分類をあたえた。それは、ハミルトニアンが $H(p_1,\dots p_n) = \frac{1}{2}p_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}p_n^2$ のときのハミルトンーヤコビ方程式の粘性解に対応している。かれの方法はハミルトニアンがより一般に凸または凹の場合にも有効である。しかし、一般の場合には状況は非常に複雑でありいまのところ単純な原理はなんら見いだせない。一般の場合、(P) に対して、最初の特異点が現れた時間の近くで、連続な一価解を選ぶ方法は辻、中根の方法で良いことが以前の研究で解っている。この場合、衝撃波曲線は幾何学的解の交わり(特性曲線の交わりの軌跡) となる。衝撃波曲線の発展を研究するにはその交わりの曲線の発展を追跡する必要があり、その後それぞれの場合に局所リーマン問題を解かなければならない。その時、どの分枝が正しい粘性解かを判定する条件が Crandall, Evans, Lions によって確立された粘性判定条件である。この条件は単独の保存則の方程式の場合の Oleinik のエントロピー条件に類似のものであり、この条件をみたす分枝を選べば解の一意性定理より

それが自動的に粘性解となるという優れ物である。最初の特異点が現れた時間の近くでは粘性判定条件がいつも満たされていることがわかり、以下の図のように幾何学的解と対応する粘性解のグラフが描ける。

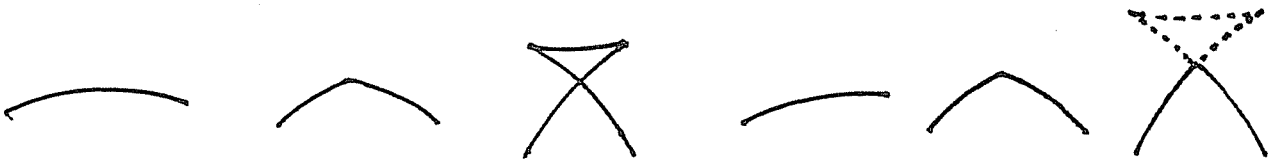


FIGURE 1

粘性判定条件が破れるまでは粘性解は幾何学的解の連続分枝である。この場合前述のように衝撃波曲線は特性曲線の交わりの軌跡でありそれらは互いに衝突することはあり得てもけっして分岐することはない。その衝突の様子は以下のように図示される。

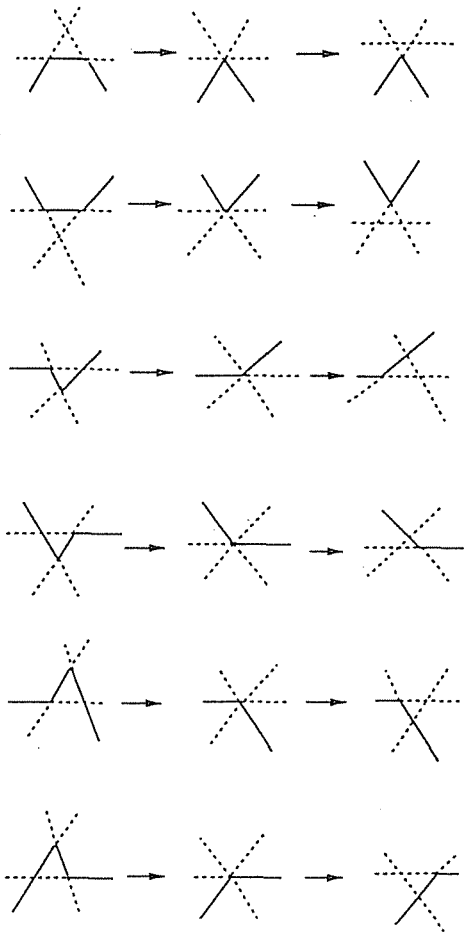


FIGURE 2

従って次の段階は、粘性解を粘性判定条件が最初に破れた点の周りで構成する事である。私の共同研究者 Kossioris 氏はこのハミルトニアンがたった一つの変曲点のみを持つ場合にこの構成を行った。もちろんこの仮定は大変強いものである。ここでの主要結果は、この構成をジェ

ネリックなハミルトニアンとジェネリックな初期条件について行った事である。我々の $H(p)$ に対する仮定は以下のものである(この仮定はジェネリックである)。

(1) $H(p)$ は三重接線を持たない.

(2) $H(p)$ の変曲点は孤立している。

(3) $H(p)$ の危点は孤立している。

以上の仮定の下で、ジェネッリクな初期条件ϕに対して最初に粘性判定条件が破れる時間の周りにおける幾何学的解と対応する粘性解のグラフのずは以下のように描かれる。

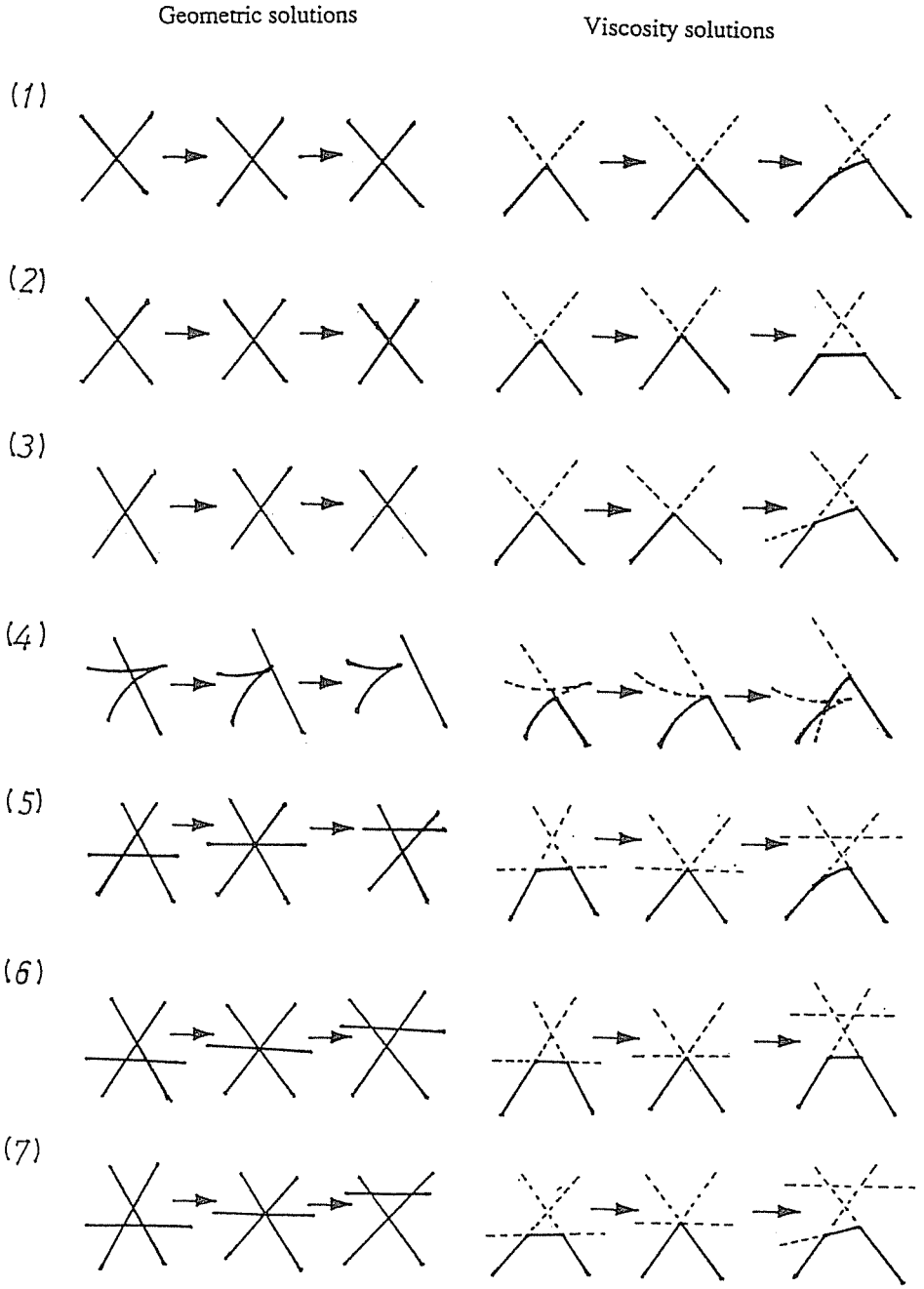


FIGURE 3

さらに、我々は上記の時間の近くに於ける、衝撃波曲線のジェネリックな分岐の図を以下のように描くことが出来る。

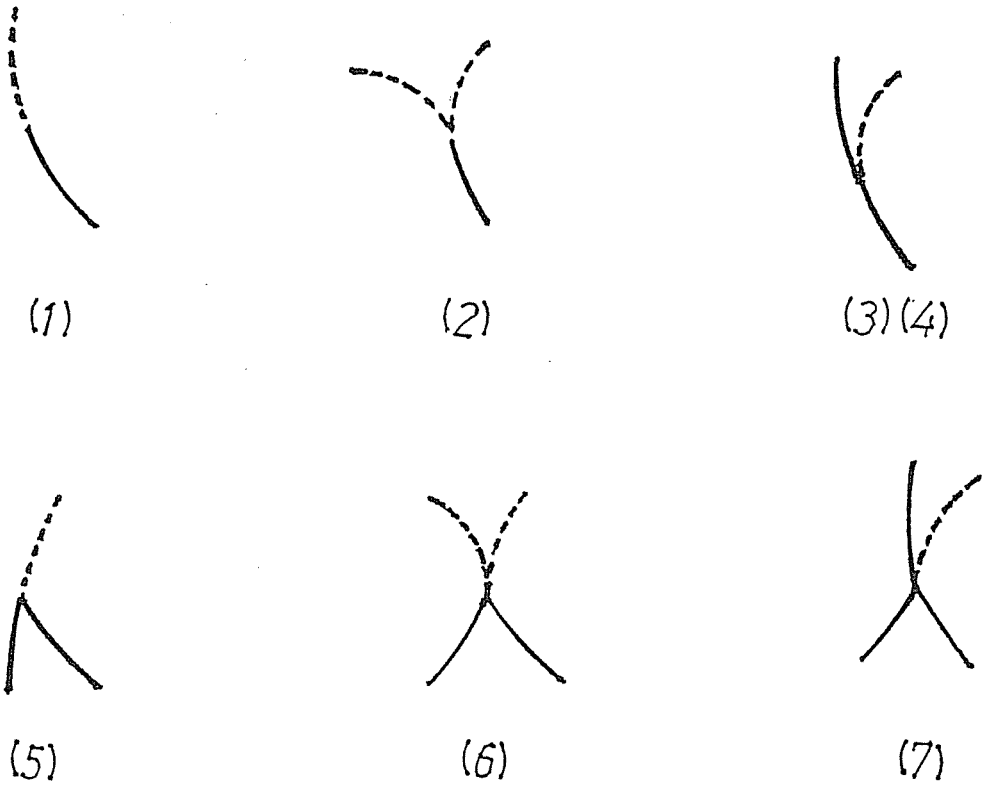


FIGURE 4

注.　この研究はギリシャ、クレタ大学の G. Kossioris 氏との共同研究である。

Patricio Avilés, Jobey 3 1995

Abstract, On the regularity of quasi-regular mappings.

In the theory of quasi-regular mappings, i.e. Let $f: D_1 \to D_2$ $D_1, D_2 \subseteq R^n$ bounded domains, f is k-quasi regular if $\frac{1}{k} J_f(x) \leq |f'(x)|^n \leq k J_f(x)$ where $k \geq 1$. And $J_f(x)$ denotes the Jacobian of f at x and $J_f(x) \in L^1_{loc}(D_2)$; $|f'(x)|$ is the norm of the differential of the mapping at x.-

F. Gehring [1] proved the L_p-integrability of the derivatives of quasi-regular mapping for some $p > n$. The Sobolev embbeding theorem implies the interior Hölder continuity. With regard to the boundary regularity, many articles have been written; The behavior at the boundary is quite complicated and it depends on a-priori assumptions, as a reference we can refer to Martio, O and Richman S. [2]. Applications of quasi-regular mappings there are many, and we can refer to work of F. John, J. Gevitz, J. Ball, S. Donaldson and D. Sullivan etc.. In this talk I'm reporting work by myself (and S. Kim and A. Weitsman) about a new proof of F Gehring results and its extension to compact manifolds i.e. "Let $f: M \to N$ be a quasi-regular mapping where M and N are compact manifolds of dimension n, then f is locally Hölder continuous."

we also have studied the boundary regularity we showed Hölder continuity and a $C^{1,\alpha}$ continuity at the boundary depending on assumptions about the data. Here we have used an important theorem of myself, E. Di Benedetto and J. Manfredi. [3].

[1] Gehring F; The L_p-integrability of the partial derivatives of quasi-conformal mappings; Acta. Math. 13 (1973) 265-277

[2]. Martio O. and Rickman; Boundary behavior of quasiregular mappings; Annales Academiae Scientiarum Fennicae # 507, 1972

[3] Ayle's Patricio, Di Bennedetto E. and Manfredi Juan, the $C^{1,\alpha}$ boundary regularity of the p-Laplacian System, preprit March 1994, Oxford-Illinois-Pittsburgh, 1994.

A preliminary report of the talk was written the speaker in Madrid, June 1994.

北海道大学 理学部数学教室談話会
1995年7月5日

4次元多様体とリーマン面 （要旨）

松本幸夫

Morse 理論は多様体のトポロジーを研究する有力な手法ですが，Morse 理論の「複素化」として Lefschetz Fibration があります．

閉曲面 R 上に，一般ファイバーが種数 g の Riemann 面 Σ_g であるような L.F. を考えますと，その C^∞ 同型類は，モノドロミー表現

$$\pi_1(R - \{p_1, \cdots, p_s\}) \to \mathfrak{m}_g$$

の共役類と bijective に対応します．ただし $\{p_1, \cdots, p_s\}$ は L.F. $f : M \to R$ の臨界値で，$\mathfrak{m}_g$ は Σ_g の写像類群です．

従って，L.F. を許容する4次元多様体の微分同相類を，上の事実に依拠して研究することが考えられますが，この方向で得られた結果を

紹介します.

ファイバーの種数 $g=1$ の場合は 成功して居ります

Kas (1977), Moishen (1977), 松本 (1986) によって L.F の分類が完成し 上正明氏 (1986) が 多重ファイバーを許す場合にも拡張しました. ただし「多重ファイバーの数が 1本又は 2本で 底空間が 2次元球面」の場合, 飯高-ドルガチェフ曲面 (1969), 小平ホモトピー K3曲面 (1981), (1977) のような難しい現象がおこり これについては 最近のゲージ理論 を使った Morgan et al. の仕事により 選択肢をみました.

ファイバーの種数 $g=2$ については, 特異ファイバーが 工型 $\left(=\left(\begin{smallmatrix}\circ\\ \circ\end{smallmatrix}\right)\right)$ のみで 底空間が S^2 の場合に 2系列の互いに同型でない, 楕円形に帰着するであろう, という予想を述べました.

$g\geq 3$ については 阿原一志氏のコンピュータ実験や 松本による Example の計算などありますが, 時間の関係で省略しました.

Families of modular forms and supersingular motives

A.A.Panchishkin

The purpose of this colloquium talk is to describe a general notion of a p–adic family of formal Dirichlet series $L_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_k(n)n^{-s} \in A$, where $A = \mathbf{Z}_p[[l^{-s}]]_{l\ primes}$ is the ring of all formal Dirichlet series with coefficients in $\mathbf{Z}_p$ (or $A = K[[l^{-s}]]_{l\ primes}$, where K is a closed subfield of the Tate field $\mathbf{C}_p$, the completion of an algebraic closure of $\mathbf{Q}_p$). Here k is a parameter which is an integer in simpliest examples; e.g. for the Riemann zeta–function $\zeta(s)$ we have the following p–adic family

$$L_k(s) = (1 - p^{k-s})\zeta(s-k) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} n^k n^{-s}.$$

which depend p–adic analytically on k. Such families naturally arise in the theory of modular forms, and more generally, in the theory of motives over $\mathbf{Q}$. Main examples of these families come from the theory of H.Hida [HiGal] of p–ordinary forms, from the theory of Mazur [Maz] of deformations of Galois representations, and from a recent work of R.Coleman [CoPBa] related to study of p–adic properties of the trace formula of Hecke operators [Miy]. In the famous work of A.Wiles [Wi] on Fermat's Last theorem and on the Shimura–Taniyama conjecture the existence of such families plays a crucial role.

It turns out that the specialization of $L_k(s)$ to certain critical points s can be often interpolated over k to a $\mathbf{C}_p$–analytic function depending on a p–adic parameter k. For example, $k \mapsto (1-p^k)\zeta(-k)$ $(k \geq 0)$ interpolates to the p–adic zeta–function of Kubota and Leopoldt. Further known examples of p–adic families come from the theory of Siegel modular forms [PLNM], [PAdm], [Ti–Ur], and more generaly, from automorphic forms on reductive algebraic groups.

L–functions (of complex variable) can be attached as certain Euler products to various objects such as diophantine equations, representations of Galois groups, modular forms etc., and they play a crucial role in modern number theory. Deep interrelations between these objects discovered in last decades are based on identities for the corresponding L–functions which presumably all fit into a general concept of the Langlands of L-functions associated with automorphic representations of a reductive group G over a number field F. From this point of view the study of arithmetic properties of these zeta function is becoming especially important.

The major sources of such L–functions are:

1) *Galois representations* of $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ for algebraic number fields F, $r : G_F \to \mathrm{GL}(V)$, V a finite dimensional vector space, and one can attach to r an Euler product due to Artin.

2) *Algebraic varieties* X defned over an algebraic number field F. In this case one can attach to X/F its Hasse–Weil zeta function.

3) *Automorphic forms and automorphic representations.* In the classical case one associates to a modular form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\exp(2\pi i n z)$ its Mellin transform $L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$.

Conjecturally, all the three types of L–functions are related to each other using the general theory of motives over $\mathbf{Q}$ with coefficiens in a number field $T \subset \mathbf{C}$. This field

coincides with the field $\mathbf{Q}(\{a(n)\}_{n\geq 1})$ generated by the coefficients of the corresponding L–function $L(M,s)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$. The definition of a motive implies that for each finite place λ of T there is a Galois representation

$$r_{M,\lambda}=r_\lambda : G_{\mathbf{Q}} \to GL(M_\lambda).$$

where M_λ is a vector space of dimention d over T_λ, the completion of T at λ. The number d is called the rank of M ([PaIF]).

The L–function $L(M,s)$ of M is defined as the following Euler product:

$$L(M,s)=\prod_p L_p(M,p^{-s}),$$

extended over all primes p and where

$$\begin{aligned} &L_p(M,X)^{-1}=\det\left(1-X\cdot r_\lambda(Fr_p^{-1}) \mid M_\lambda^{I_p}\right)= \\ &(1-\alpha^{(1)}(p)X)\cdot(1-\alpha^{(2)}(p)X)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{(d)}(p)X)= \\ &1+A_1(p)X+\ldots+A_d(p)X^d; \end{aligned}$$

here $Fr_p\in G_{\mathbf{Q}}$ is the Frobenius element at p, defined modulo conjugation and modulo the inertia subgroup $I_p\subset G_p\subset G_{\mathbf{Q}}$ of the decomposition group G_p (of any extension of p to $\overline{\mathbf{Q}}$). Under a standard hypothesis the coefficients of $L_p(M,X)^{-1}$ belong to T, and they are independent of λ (coprime to p). Therefore we can regard this polynomial both over $\mathbf{C}$ and over $\mathbf{C}_p$.

We describe a general conjecture on the existence of a p–adic family M_P of motives, parametrized by some dense subset of algebraic characters P of a p-adic commutative algebraic group (which we call *the group of Hida*). This group can be regarded as a maximal torus of the p–adic part $G_{M,p}$ of the motivic Galois group G_M of M (the Tannakian group for the tensor category generated by M). The important condition of motives M_P of the above family is that they have the same fixed p–invariant $h=h_P$, which is defined as the difference between the Newton polygon and the Hodge polygon of a motive at certain point d^+ (the dimension of the subspace M^+ of the Betti realization M_B of M). We call a motive M *supersingular* if h_p is positive. For the motive of an elliptic curve E over $\mathbf{Q}$ this notion coinsides with the notion of a supersingular elliptic curve. The corresponding p–adic L–functions of this family can be unbounded (of Amice–Vélu type [Am-Ve]) but they form a family which is conjectually bounded in the "weight direction", that is for P parametrized by algebraic characters of $G_{M,p}$.

More precisely, the values of the function $P\mapsto L(M_P,0)$ satisfy generalized Kummer congruences in the following sense: for any finite linear combination $\sum_P b_P\cdot P$ with $b_P\in\mathbf{C}_p$ which has the property $\sum_P b_P\cdot P\equiv 0(\bmod p^N)$ and M_P is critical in the sense of Deligne we have that for some constant $C\neq 0$ the corresponding linear combination of the normalized L-values satisfies the following congruence

$$C\sum_P b_P c_p(M_P)\cdot\frac{L_{(p,\infty)}(M_P,0)}{c_\infty(M_P)}\equiv 0(\bmod p^N).$$

Here $c_p(M_P)$ and $c_\infty(M_P)$ denote the p–adic and the complex period of M_P so that the ratio "$\dfrac{c_p(M_P)}{c_\infty(M_P)}$" is uniquely defined, and $L_{(p,\infty)}(M_P, s)$ denotes the above L–function $L(M_P, s)$ normalized by multiplying by a certain canonicaly defined Deligne's p–factor corresponding to a choice of inverse roots $\alpha^{(1)}(p)$, ..., $\alpha^{(d^+)}(p) \in \mathbf{C}_p$ of the p–local polynomial of M such that

$$\mathrm{ord}_p(\alpha^{(1)}(p)) \leq \mathrm{ord}_p(\alpha^{(2)}(p)) \leq \ldots \mathrm{ord}_p(\alpha^{(d)}(p)),$$

where d is the common rank of the family M_P.

Recent examples of such families related to modular forms were constructed by R.Coleman [CoPBa] and they are related to p–adic properties of the trace formula of Hecke operators [Miy]. J.Tilouine and E.Urban [Ti–Ur] constructed (in the ordinary case) p–adic families of Siegel modular forms parameterized by a three-variable parameter (see also [PaSE] for examples related to Siegel–Eisenstein series).

References

[Am-V] *Amice Y., Velu J.*: Distributions p–adiques associées aux séries de Hecke, Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf. Univ. Bordeaux, 1974), Astérisque no. 24/25, Soc. Math. France, Paris 1975, 119–131

[CoPBa] *Coleman R.*: P–adic Banach Spaces and Families of Modular forms. Manuscript of January 7, 1995

[HiGal] *Hida H.*: Galois representations into $GL_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. Math. 85 (1986) 545–613

[Maz] *Mazur B.*: Deforming Galois representations // Galois Groups over $\mathbf{Q}$. Ed. Y.Ihara, K.Ribet, J.–P. Serre, 1989, Springer–Verlag

[Miy] *Miyake T.*: Modular forms. Springer–Verlag, 1989, 335 p.

[PaLNM] *Panchishkin A.A.*: Non–Archimedean L–functions of Siegel and Hilbert modular forms, Lecture Notes in Math., 1471, Springer–Verlag, 1991, 166p.

[PaAdm] *Panchishkin A.A.*: Admissible Non–Archimedean standard zeta functions of Siegel modular forms, Proceedings AMS Symp.Pure Math. 55 (1994), Part 2, 251 – 292

[PaIF] *Panchishkin A.A.*: Motives over totally real fields and p–adic L–functions, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, 44, N4 (1994)

[PaSE] *Panchishkin A.A.*: On the Siegel–Eisenstein measure. Manuscript, Hokkaido University, September 1994.

[Ti–Ur] *Tilouine J., Urban E.*: Familles p–adiques à trois variables de formes de Siegel et de représentation galoisiennes, Manuscript of March 25, 1995

[Wi] *Wiles A.*: Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, Ann. of Math. 142 (1995), 443—551

Hokkaido University
Department of Mathematics
Sapporo 060 JAPAN

and

Institut Fourier
B.P.74, 38402 St.–Martin d'Hères
FRANCE

On Selmer Groups

Haruzo HIDA

We first define the Selmer group as an analogue of the first cohomology group of Riemann surfaces. We take a continuous representation $\varphi : G_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to GL_n(A)$ for a compact $\mathbf{Z}_p$-algebra A acting on $V(\varphi) = A^n$. Here p is a prime. For each A-direct summand W of $V(\varphi)$ stable under the decomposition subgroup $G_{\mathbf{Q}_p}$, we define $W^* = W \otimes_A A^*$ for the Pontryagin dual A-module A^* of A and the Selmer group $\mathrm{Sel}(\varphi;W)$ of (φ,W) by

$$\mathrm{Sel}(\varphi;W) = \mathrm{Ker}(H^1(G_{\mathbf{Q}},V(\varphi)^*) \to H^1(I_p,V(\varphi)^*/W^*)\times\prod_{q\neq p}H^1(I_q,V(\varphi)^*)),$$

where I_q is the inertia group at a prime q. Replacing $\mathbf{Q}$ by the function field of a Riemann surface X and q by points of X in the above definition and taking φ to be the trivial representation id with values in $GL_1(\mathbf{Z}_p)$ and $W = \{0\}$, we recover the first cohomology group of X with coefficients in $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. In the talk, I discussed many number theoretic invariants of a number field F which can be described by $\mathrm{Sel}(\varphi;W)$ for a suitable choice of W. For example, $\mathrm{Sel}(\mathrm{Ind}_{G_F}^{G_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{id});\{0\})$ gives the class group of F, and in general, under a suitable assumptions, the characteristic ideal of $\mathrm{Sel}(\varphi;W)$ is expected to be spanned by a p-adic L-function of φ regarded as an element of A. As typical examples of this phenomenon, I described the following two examples. The first is the Selmer group of the universal formal deformation unramified outside p with $W = V(\varphi)$, which gives the Iwasawa module of the trivial character whose characteristic ideal is one of the Kubota-Leopoldt p-adic L-functions. The second example comes from modular p-ordinary Galois representations φ attached to an elliptic modular form f of level 1. We let $G_{\mathbf{Q}}$ act by conjugation on the space $V(\mathrm{Ad}(\varphi))$ of 2×2 matrices of zero trace, getting a 3-dimensional representation $\mathrm{Ad}(\varphi)$. In this case, there is a canonical choice of W of rank 1 in $V(\mathrm{Ad}(\varphi))$. Suppose $p \geq 5$ and that $L(s,\varphi) = L(s,\lambda)$ for a character λ of the p-adic Hecke algebra H of the space of cusp forms containing f. Writing K for the field generated over $\mathbf{Q}_p$ by the values of λ, we can decompose $H\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p = K\times B$ as an algebra product so that λ gives the projection onto K, and we put $P = H\cap(K\times\{0\}) \subset \mathrm{Im}(\lambda)$. Then the following results are known by the efforts of many mathematicians:

(i) $|\mathrm{Im}(\lambda)/P| = |L(1,\mathrm{Ad}(\varphi))/\text{the period determinant of } f|_p^{-1}$ (Hida, 1982; see [H]);

(ii) $\mathrm{Sel}(\mathrm{Ad}(\varphi);W) \cong \mathrm{Ker}(\lambda)/\mathrm{Ker}(\lambda)^2$ (Mazur-Tilouine, 1990; see [MT]);

(iii) $|\mathrm{Im}(\lambda)/P| = |\mathrm{Ker}(\lambda)/\mathrm{Ker}(\lambda)^2|$ (R. Taylor and Wiles, 1995; see [W] and [TW]).

These three facts combined yield a non-abelian generalization of the class number formula of Kummer-Dirichlet. Then after stating a conjecture of Greenberg [G] asserting the co-torsionness of $\mathrm{Sel}(\varphi;W)$ for a general φ over A with suitable assumptions, I stated a recent result of mine concerning the proof of this conjecture for $\mathrm{Sel}(\mathrm{Ad}(\Phi);W)$ with W of rank 1, where Φ is a 2-dimensional modular Galois representation realized on the big nearly ordinary Hecke algebra.

References.

[G] R. Greenberg, Iwasawa theory and p-adic deformation of motives, Proc. Symp. Pure Math. 55 Part 2 (1994), 193-223

[H] H. Hida, Theory of p-adic Hecke algebras and Galois representations, Sugaku Expositions 2 (1989), 75-102

[MT] B. Mazur and J. Tilouine, Représentations Galoisiennes, différentielles de Kähler et «conjectures principales», Publ. IHES 71 (1990), 65-103

[TW] R. Taylor and A. Wiles, Ring theoretic properties of certain Hecke algebras, Ann. of Math. 142 (1995), 553-572

[W] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. 142 (1995), 443-551

The theory of R. Nevanlinna describing the numbers of a-points of meromorphic functions and the theory of locations of the a-points.

Barseqian, Grigor A., Inst. of Math. Acad.of Sci.,Yerevan, Armenia.

One of the most studied objects in complex analysis is the quantity of a-points of meromorphic functions in the plane (see classical theories of R.Nevanlinna and L.Ahlfors). Most likely, the present stage of the quantitative study will be replaced by a stage of investigation of location of a-points.

In our report will be presented a theory of location of a-points of meromorphic functions, which involves the main conclusions of theories of R.Nevanlinna and L.Ahlfors concerning the quantities of a-points. The locations are described by a new characteristic (they can not be described by the known characteristics).

One of main conclusions of the theory of locations can be stated as follows: we can describe the locations of a-points of meromorphic functions for the most of values $a \in C$, if we know the locations for one "good" value a.

On the Trotter Product Formula in Operator Norm for Schrödinger Operators

一瀬　孝

金沢大学　理学部

Trotter の積公式は，大変簡単で，大変役に立つ公式である．それとその variant は次のようなものである：A, B は，共に下に有界な 自己共役作用素で，$A+B$ が本質的自己共役とし，C を $A+B$ の unique な自己共役拡張とすると，

$$\lim_{n\to\infty}(e^{-tB/n}e^{-tA/n})^n = e^{-tC}, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(e^{-tA/2n}e^{-tB/n}e^{-tA/2n})^n = e^{-tC}, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

が成立する．この公式は，実際，Schrödinger 作用素論，統計力学などで色々の応用がある．特に，虚数時間 Schrödinger 方程式，即ち熱方程式の解を表示する Feynman-Kac 公式は，Trotter 積公式を用いて，確率論の素人にも分かる証明を与えることができる．ただここで，A, B が有界作用素でないときには，(1), (2) の収束は strong operator topology に関する収束である．

最近，B. Helffer (ENS, France) は，A が minus Laplacian $-\Delta$ で，B が potential $V(x)$ で，$V(x) \geq 1$, $|\partial^\alpha V(x)| \leq C_\alpha(1+x^2)^{(2-|\alpha|)_+/2}$ を満たす C^∞ 関数のときに，次のような operator norm での estimate

$$||e^{-tV/2}e^{-t(-\Delta)}e^{-tV/2} - e^{-t(-\Delta+V)}||_{\mathcal{L}(L^2)} = O(t^2), \quad t \downarrow 0, \tag{3}$$

を証明した．ただし，このとき $-\Delta+V$ は，Kato の定理によって本質的自己共役なので，その unique な自己共役拡張も $-\Delta+V$ で表した．

これを用いると，telescope により容易に Trotter の積公式の variant (2)

$$||(e^{-tV/2n}e^{-t(-\Delta)/n}e^{-tV/2n})^n - e^{-t(-\Delta+V)}||_{\mathcal{L}(L^2)} = n^{-1}O(t^2), \quad n \to \infty, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

が従う．

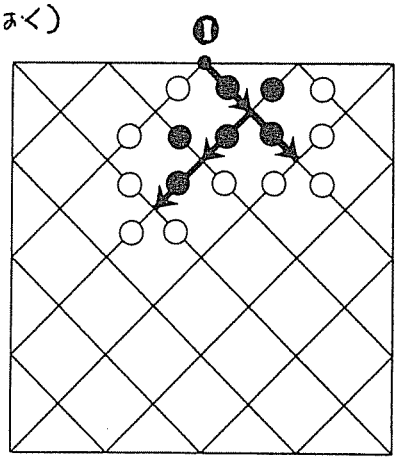
ついでに，Helffer は，この estimate (3) を (4) を証明することばかりではなく，Schrödinger 作用素 $-\Delta+V$ のスペクトル（固有値）の性質を，統計力学の Kac model に関する問題に登場する transfer matrix に対応する Kac operator $e^{-tV/2}e^{-t(-\Delta)}e^{-tV/2}$ のそれと比較して求めるのに用いた．(parameter t は，t が小なら weak range interaction を意味し，また t は，$\hbar^2$ として semi-classical parameter にもなる．)

本講演では，この Helffer の結果を一般の potential $V(x)$ の場合への拡張とそして operator norm での Trotter の積公式の variant (2) を与えたい．Helffer は 擬微分作用素論を用いたのに対し，我々は Feynman-Kac 公式に基づく確率論的方法を用いる． 特徴は，potential $V(x)$ の特異性があってもよいことと， L^2 operator norm ばかりではなく L^p operator norm でも成立することである． 結果は，$-\Delta$ を magnetic Schrödinger 作用素 $(-i\partial - A(x))^2$ に置き換えても成立する．

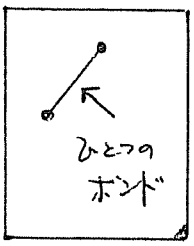
無限粒子系の相転移現象

今野 紀雄（室蘭工大・数理科学 → 横浜国大・工・生産工学）

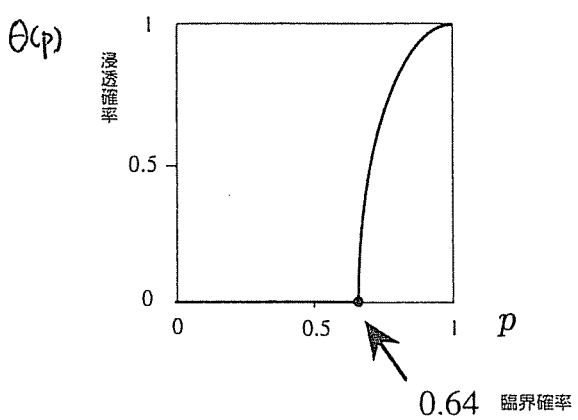
本講演では，無限粒子系といわれる多数の粒子がそれぞれ相互作用して時間発展していくプロセスの相転移現象について解説を行なった。具体的には伝染病の広がりをモデル化したコンタクト・プロセスを中心に，パーコレーション，方向性のあるパーコレーション，インヴェージョン・パーコレーションのモデルなどについても触れた。この要旨では，コンタクト・プロセスの離散時間版とも考えられる，方向性のあるパーコレーションモデルについて簡単に述べる。（日本語の参考文献として拙著：「確率モデルって何だろう」今野紀雄著，ダイヤモンド社（1995）1400円を挙げておく）



方向性のあるパーコレーションは Oriented Percolation あるいは Directed Percolation と呼ばれるモデルのことで，ここでは簡単のために2次元正方格子（$\mathbb{Z}^2$）上の場合について考える。右図のように $\mathbb{Z}^2$ 平面を45°回転させ，ある点Oから下向きに例えば水が浸透していくような場合を扱う。正確には「点とその最近接に存在する点とを結ぶ線分」（"ボンド"と呼ばれる）に，



確率 p で水が流れるように，確率 $1-p$ で水が流れないようにする。この際，各ボンド独立に与える。上図はこのような手順で，16個のボンドに水が流れる（この場合は●）か，あるいは水が流れない（この場合は○）かの，ありふれた様子をあらわしたものである。そして，下向き方向に水が流れるとして，点Oから水が浸透していく状況を矢印を付けて示している。このようなモデルは正確には"2次元の方向性のあるボンドパーコレーション"と呼ばれるが，本要旨では簡単に以下方向性のあるパーコレーションと呼ぶ。このモデルを考えるにおいて，興味のある量は点Oから水が無限遠方に流れる確率である。この量は浸透確率と呼ばれ，最初に与えた確率 p の関数なのでここでは $\theta(p)$ と書くことにする。$\theta(p)$ のグラフは，シミュレーションや近似計算などにより，左図のように予想されているが，厳密に（数学的に）知られている面白い結果は少ない。例えば，左図より明らかなように $\theta(p)$ のグラフはある点を境としてゼロの値から正の値に変化している。この値



は，相転移現象を考える上で非常に重要な量で，臨界確率と呼ばれ，通常 p_c と書かれる。ここで添字の"c"は臨界をあらわす"critical"の"c"である。それはさておき，この p_c の値は図には 0.64 と書いてあるが，これは $p_c=0.64$ ということではなく約 0.64 という意味である。この値は重要であるにもかかわらず，残念なことに厳密な値は現在のところ知られていない。近似計算を用いた最近の結果によると，$p_c = 0.6447006 \pm 0.0000010$ (Jensen-Guttmann 1995) である。一方，厳密な上限，下限については以下が知られている。

$$0.6298 \leq p_c \leq \frac{2}{3} = 0.666\cdots$$

Dhar (1982)　　Zuggetto (1995)

このように，p_c ひとつとってもまだまだ数学的には道具が足りないようである。さらに，詳しくは述べないが，この $\beta(p)$ に関する臨界指数については，ほとんど厳密には何も知られていない状況である。以上よくわからない，よく知られていないというフラストレーションのたまる話しであったが，最後に最近少しわかってきた，しかも組み合せ論との関係も深い話しをしたい。

まず，P_n というある点Oから出発して，$n-1$ 下に降りた段階で浸透している確率を考える。以下 $1-p$ を q とおく。P_1 は，ある点Oだけ考えればよいのでもちろん $P_1=1$ である。P_2 は左下図のように2つのボンドが開じて水が流れない場合を除いて水が浸透するので，$P_2=1-q^2$ となる。次の P_3 は少し面倒な計算の結果 $P_3=1-q^2-2q^3+q^4+2q^5-q^6$ となる。P_4 から先は手計算では苦しい。それはともかくとして，この $P_1, P_2, P_3, \cdots$ を見ても面白くないかもしれないが，P_1-P_2, P_2-P_3, P_3-P_4 という差をとると，興味深い関係が出現する。以下書いてみると，$P_1-P_2 \sim q^2$, $P_2-P_3 = 2q^3-q^4\cdots$, $P_3-P_4 \sim 5q^4-4q^5\cdots$, $P_4-P_5 \sim 14q^5-14q^6\cdots$, $P_5-P_6 \sim 42q^6\cdots$ (ここで…はもちろん有限で終わる)．ここで着目してもらいたいのはこの $\sim$ をつけた，最初にあらわれる数，1, 2, 5, 14, 42, … である。この数列は実は御存知の方も多いと思われるが，カタラン数 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ の最初の5項に一致する。この事実は，Baxter-Guttmann (1988) によって予想され(彼らは P_n を29まで計算した) Bousquet-Mélou (1995) により，組み合せ論的手法を用い任意の n に対して証明された．また，それとは独立に昨年 乾-香取によっても別の方法で証明された．最近はさらに高次の項がこのカタラン数のある種の線形和であることの予想と証明，あるいは他の方向性のあるパーコレーションモデル(サイトや正方格子などの場合)への応用など研究は飛躍的に進んでいる。紙面が足りず，ここで詳しく書けないのが残念であるが，それに関しあるいはその周辺の話題については，また次に談話会等で話す機会があれば，紹介したいと思う。

1996年5月1日 於横浜

The index of a vector field on a singular variety

J. Seade

Let M be a closed, oriented manifold, and let v be a vector field on M with a finite number of singularities. At each singular point of v one has its local Poincaré-Hopf index; the total index of v is defined as the sum of all the local indices, and the theorem of Poincaré-Hopf says that the total index of v equals the Euler-Poincaré characteristic of M, independently of v.

In this talk I will speak about generalizations of this theorem to higher dimensional foliations on complex analytic varieties with isolated singularities which are local complete intersections. This is contained in joint works of myself with X. Gomez Mont and A. Verjovsky (Math. Annalen 1991) and with T. Suwa (to appear in Math. Annalen).

The main point is defining the local index of a vector field on an isolated complete intersection singularity, and then give several ways for computing this index. For foliations of real dimension 2, all this can be generalized and one obtains a formula in the vein of Baum-Bott formuli for singular holomorphic foliations. The generalization to foliations of higher dimensions is now being done.

José Seade
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México.

Affine Picard - Lefschetz formula

(case of 2 variables)

by HA Huy Vui
Institute of Math.
Hanoi - Vietnam

We consider a polynomial $P: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. According to R. Thom, there exists a finite set $A \subset \mathbb{C}$, s.t. P induces a C^∞- locally trivial fibration $P: \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(A) \to \mathbb{C} \setminus A$. We denote by $A(P)$ the smallest of such set A. Thus we get a fibration $P: \mathbb{C}^n \setminus P^{-1}(A(P)) \to \mathbb{C} \setminus A(P)$. If we denote by $A_f(P)$ a set of all critical values of P, then $A_f(P) \subset A(P)$, but ing general, $A_f(P) \neq A(P)$. This fact can be explained by a "influence of a point at infinity" on the topology of polynomial, and a value from $A(P) \setminus A_f(P)$ can be considered as a "critical value, corresponding to the singularities at infinity" of P.

Definition: (i) A value $t_0 \in \mathbb{C}$ is called regular at infinity, if there exist a compact $K \subset \mathbb{C}^n$, a number $\delta > 0$, s.t. the map

$$P: P^{-1}(D_\delta) \setminus K \to D_\delta, \quad D_\delta = \{t \mid |t - t_0| < \delta\}$$

defines a trivial fibration

(ii) if t_0 is not regular at infinity, then it is called critical value, corresponding to the singularities at infinity of P.

We Denote by $A_\infty(P)$ a set of all critical values, corresponding to the singularities at infinity of P, we have $A(P) = A_f(P) \cup A_\infty(P)$.

We consider $t_0 \in A_\infty(P)$. Let $\omega(s) = (t_0 + \varepsilon)e^{2\pi i s}$, $0 \leq s \leq 1$. Then ω induces an isomorphism $h_* : H_*(P^{-1}(t_0 + \varepsilon)) \to H_*(P^{-1}(t_0 + \varepsilon))$ (monodromy).

The aim of this talk: Describe h_* in the case, when t_0 corresponds to the "simplest singularity" at infinity (say "Morse's singularity at ∞).

As we know, in the classical Lefschetz Theory, h_* is described by the

Picard - Lefschetz formula, in terms of vanishing (at a singular Morse's point) cycle. Thus, to get the analog of the Picard-Lefschetz formula for the case $t_0 \in A_\infty(P)$, (affine case??), at least, we have to define:

1) What's a vanishing at ∞ cycle?

2) What's a singularity of Morse's type at ∞?

I am able to do this only for the case of 2 variables. In this case, we can define the notions of "completelly vanishing at infinity cycle", "critical value, corresponding to the singularities of Morse's type at infinity", "index of ramification of a critical value, corresponding to the singularities of Morse's type at infinity". With these notions, the main results of the talk are following:

Thm 1: Suppose that $t_0 \notin A_f(P)$ and t_0 is a critical value, corresponding to the singularities of Morse's type at infinity. Then:

(i) If the index of ramification, $\mathrm{ind}(t_0) = 0$, then h_* is trivial

(ii) If $\mathrm{ind}(t_0) = 1$, then there exists a completelly vanishing at infinity cycle δ, such that

$$h_*(\gamma) = \gamma + \langle \gamma, \delta \rangle \delta \quad \text{for any } \gamma \in H_1(P^{-1}(t_1))$$

Thm 2: With the assumption of Thm 1, then h_* is not trivial if and only if two following conditions are satisfied:

(i) $\mathrm{Ind}(t_0) = 1$

(ii) Number of connected components of $P^{-1}(t_0)$ is equal to the number of connected components of $P^{-1}(t)$ (t is generique).

談話会　　日合　文雄　（茨城大理）

講演題目　Quantum mechanics in AF C^*-systems

要旨

Motivated from the chemical potential theory, we study quantum statistical thermodynamics in AF C^*-systems generalizing ususal one-dimensional quantum lattice systems. Our systems are C^*-algebras $\mathcal{A}$ which have a localization $\{\mathcal{A}_{[i,j]}\}$ of finite-dimensional subalgebras indexed by finite intervals of $\mathbf{Z}$ and an automorphism γ acting as a right shift on the localization. Model examples are supplied from derived towers (string algebras) for type II_1 factor-subfactor pairs. Given a (γ-invariant) interaction and a specific tracial state, we formulate the Gibbs conditions and the variational principle for (γ-invariant) states on $\mathcal{A}$, and investigate the relationship among these conditions and the KMS condition for the time evolution generated by the interaction. Special attention is turned to C^*-systems of gauge invariance (typical model in the chemical potential theory) and to C^*-systems considered as quantum random walks on discrete groups. The CNT-dynamical entropy for the shift automorphism γ is also discussed.

Hardy 族の除去可能特異点について

茨城大学理学部　荷見　守助

1. H^p の定義

Ω をリーマン球面 $\mathbf{S}$ 上の領域とする．正数 p に対し Hardy 族 $H^p(\Omega)$ とは次の 2 条件を満たす f の全体を云ふ：

(a)　$f(z)$ は Ω 上で正則，

(b)　$|f(z)|^p \leq u(z)$ $(z \in \Omega)$ を満たす調和函数 u が存在する．

$p = \infty$ のとき，$H^\infty(\Omega)$ で Ω 上の有界な正則函数の全体を表す．更に，Nevanlinna 族 $N(\Omega)$ を次で定義する：

(a)　$f(z)$ は Ω 上で正則，

(b)　$\log^+ |f(z)| \leq u(z)$ $(z \in \Omega)$ を満たす調和函数 u が存在する．

2. $\mathcal{N}_p$ と $\mathcal{O}_p$

定義 1　$0 < p \leq \infty$ のとき，$\mathbf{S}$ 内の部分集合 K が Hardy 族 H^p の除去可能な特異点 (記号：$K \in \mathcal{N}_p$) であるとは，次が成り立つことを云ふ：

(a)　K はコンパクトである．

(b)　$\mathbf{S} \setminus K$ は空でない連結集合である．

(c)　K を含む任意の領域 Ω に対し，集合として $H^p(\Omega \setminus K) = H^p(\Omega)$ が成り立つ．

一方，領域の族 $\mathcal{O}_p$, $\mathcal{O}_N$ を次の様に定義する：

$$\mathcal{O}_p = \{\Omega \subseteq \mathbf{S} \mid \Omega \text{ は領域で } H^p(\Omega) \text{ は定数函数のみ}\},$$

$$\mathcal{O}_N = \{\Omega \subseteq \mathbf{S} \mid \Omega \text{ は領域で } N(\Omega) \text{ は定数函数のみ}\}.$$

定理 1 (D. Hejhal)　$K \in \mathcal{N}_p$ と $\mathbf{S} \setminus K \in \mathcal{O}_p$ は同値である．

定理 2 (W. Rudin)　コンパクト集合 $K \subset \mathbf{S}$ に対し $\mathbf{S} \setminus K \in \mathcal{O}_N$ と $\mathrm{cap}(K) = 0$ は同値である．但し，$\mathrm{cap}(\cdot)$ は対数容量を表す．

先づ，次の問題を考へる：

問題 1　$0 < p \leq \infty$ に対し，$\mathcal{N}_p$ の元を特徴付けよ．また，(同値なものとして) $\mathcal{O}_p$ を特徴付けよ．

これは難しく，殆ど何も分かってゐない．

3. ハウスドルフ次元との関係

そこで，方向を少し変へる．先づ，定義から

$$\mathcal{O}_N \subset \mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}_q \subset \mathcal{O}_\infty \qquad (0 < p < q < \infty)$$

が分かるが，実際これらの包含関係は strict であることが知られてゐる (Hasumi)．その証明を分析すると，次のことが分かる：

定理 3 (A. Björn の注意)　コンパクト集合 $K \subset \mathbf{S}$ で，$\dim K = 0$ 且つ $K \notin \mathcal{N}_p$ $(\forall p > 0)$ を満たすものが存在する．但し，dim はハウスドルフ次元である．

この集合 K は任意に細いバンドに入れられるが，直線上に置くことは出来ない．

4. 曲線上の場合

直線の場合には次の結果がある：

定理 4 (M. Heins)　$K \subset \mathbf{R}$ について，$\Lambda_1(K) = 0$ ならば $\mathbf{S} \setminus K \in \mathcal{O}_1$．但し，$\Lambda_1(\cdot)$ は 1 次元のハウスドルフ測度である．

そこで，曲線上の K については何が言へるかは問題になる．Heins の結果の延長上にあるものとしては，

定理 5 (A. Björn)　ある種の *chord-arc* 曲線 Γ 上のコンパクト集合 K について $\Lambda_1(K) = 0$ ならば，$K \in \mathcal{N}_p$ となる $p > 1$ が存在する．

問題 2　上の定理の形で $\mathcal{N}_p$ $(p < 1)$ の場合が議論できるか？

劣微分の収束概念と均質理論への応用: 要旨

海津　聰
電気通信大学情報工学科

October 21, 1995

有界領域 Ωに直径 r^ϵの同一形状の小さな穴 $r^\epsilon T$ が周期 ϵの分布で開いている多孔領域を Ω^ϵとおく. このΩ^ϵ上で Dirichlet 問題

$$-\Delta u^\epsilon = f \quad \text{in } \Omega^\epsilon,$$

$$u^\epsilon = 0 \quad \text{on } \partial T^\epsilon \cup \partial\Omega.$$

を考え,

$$\epsilon \to 0, \quad \epsilon \to 0$$

の過程, 均質化の過程を考える (均質化問題). このとき

$$0 < \lim \frac{r^{\epsilon N-2}}{\epsilon^N} < \infty$$

であれば, $\tilde{u}^\epsilon \to u$ weakly in $H_0^1(\Omega)$,

$$-\Delta u + Cu = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

となることがわかっている.　ここで$\tilde{u}^\epsilon$は u^ϵの零拡張である. この結果はまた ヒルベルト空間 $H = L^2(\Omega)$ 上の下半連続凸関数$\phi^\epsilon : H \to [0, \infty]$ の劣微分を用いて

$$\partial\phi^\epsilon(u^\epsilon) \ni f \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

と書くことができて, その収束の議論を下半連続凸関数の Mosco の意味の収束の議論に完全にのせることができる. すなわち,

$$\phi^\epsilon \to \phi^0 \text{ in the sense of Mosco},$$

$$\partial\phi^0(u) \ni f \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

それでは以上の議論を Neumann 問題上で考察した場合にどうなるか.

$$-\Delta u^\epsilon = f \quad \text{in } \Omega^\epsilon,$$

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial T^\epsilon,$$

$$u^\epsilon = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

この場合

$$0 < \lim \frac{r^\epsilon}{\epsilon} < \infty$$

一様拡張作用素の族, $E^\epsilon : H^1(\Omega^\epsilon) \ni v \to \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ に対して, $\tilde{u}^\epsilon \to u$ weakly in $H_0^1(\Omega)$,

$$\mathcal{H}u = \eta f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

となることを示せる. ここで, $\eta > 0$ は, Tにより定まる正定数で, $\mathcal{H}$は$-\Delta$の均質化作用素である. この場合残念なことに劣微分作用素は無力である ([1]).

ここで劣微分作用素列の収束の概念を少しく拡張して下半連続凸関数列の収束の概念がの場合にも可能である事を示したい. またこの拡張は非線形作用素 の境界値問題の均質化問題のみならず固有値問題の均質化にも有効である ([2], [3], [4]).

References

[1] H. Attouche, Variational convergence for functions and operators, Academic Press, New York, 1975.

[2] Kaizu, S., The Poisson equation with semilinear boundary conditions in domain with many tiny holes, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. Math. 36, pp. 43-86, 1989.

[3] KAIZU S., A. NISHIYAMA and J. WATANABE, Convergence of solutions of nonlinear eigenvalue problems, Advances in Mathematical Science and Applications, Gakkotosho, Tokyo, Vol. 3(1933/94), pp. 353-366.

[4] KAIZU S. , Homogenization of eigenvalue problems for the Laplace operator with nonlinear terms in domains in many tiny holes, to appear in Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications, Pergamon Press.

Abstract

Derivations on Algebraic system

Niu Fengwen Jilin Univ.

We know a very important result about Lie algebra, it is as following

Theorem If $\mathcal{L}$ is f.d Lie algebra over a field with non-degn Killing form, then every derivation D on $\mathcal{L}$ must be inner, i.e there exists a element $a \in \mathcal{L}$, $dx = ad_a x = [a, x]$.

1978, Jordan gave a interesting property for the set of all derivations on an associative ring R, it says,

If R be prime and 2-torsion free, then the set of all derivations on, denote by $Der\, R$, must be a Lie prime ring.

We consider a bialgebra H over a field K, and $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ are multiplication map, unit map, comultiplication map and counit map. Let

$$Der(H) = \{\sigma \in End(H),\ \sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y)\}$$

$$Der(H, \varepsilon) = \{\sigma \in End(H),\ \sigma\mu = \sigma\otimes\varepsilon + \varepsilon\otimes\sigma \text{ and } \sigma = \eta\varepsilon\sigma\}$$

$$Der(H^*, \varepsilon) = \{f \in H^*,\ f\mu = f\otimes\varepsilon + \varepsilon\otimes f\}$$

where $(End\, H, \#)$ and $(H^*, *)$ via

$$\sigma \# \tau = \mu(\sigma\otimes\tau)\Delta$$

$$f * g = (f\otimes g)\Delta$$

be the algebra of all endomorphism of K-module H and the algebra of all linear functors.

one can prove, there exists a Lie isomorphism map from $D(H, \varepsilon)$ to $Der(H^*, \varepsilon)$.

Global Dimension of Graded Local Rings

By Li Huishi.

Abstract.

Let $A=\oplus_{n\geq 0}A_n$ be a positively graded Noetherian ring. It is proved that if $A_0/J(A_0)$ is semisimple, where $J(A_0)$ is the Jacobson radical of A_0, then $gl.dim A = p.dim_A(A_0/J(A_0))$ if A_0 is a (not necessarily commutative) local ring with maximal ideal ω, then $gl.dim A = p.dim_A(A_0/\omega) = inj.dim_A(A_0/\omega)$.

Vortex Method for the initial-boundary value problems of the Navier-Stokes equations.

Long-an Ying (应隆安)

Peking University and Kyoto University

(abstract)

In the vortex method, the motion of vortex blobs are evaluated to simulate incompressible viscous flow. We study the convergence problems of the vortex method, especially we consider the treatment of boundary conditions. For two dimensional inviscid flow we prove the consistency, stability and convergence for initial-boundary value problems. For three dimensional inviscid flow we indicate that the usual approach to treat the boundary condition is wrong. We give some new approaches and also prove the convergence. For viscous flow the vortex method is a fractional step method. Within each time step the convection flow and the viscous flow are evaluated separately by a splitting approach. The boundary conditions for them are different, which creates singularities. This is the main difficulty of our convergence study. We prove convergence results for some schemes and indicate that for some other schemes the approximate solutions do not converge. Numerical results are given.

実代数群の標準表現の associated variety と巾零軌道の誘導

太田琢也　　東京電機大学（工）

G を連結な複素簡約代数群、$\underline{g}$ をそのリー環、G(**R**) を G の複素共役 τ が定める実型、$\theta: G \to G$ を τ と可換な（複素化された）カルタン対合、$K:=\{g \in G;\ \theta(g)=g\}$, $\underline{g}=\underline{k}+\underline{s}$ を $\underline{g}$ のカルタン分解とする。$\underline{s}$ (resp. $\underline{g}(\mathbf{R})$) の巾零元の全体を $N(\underline{s})$ (resp. $N(\underline{g}(\mathbf{R}))$) で表し、その K (resp. G(**R**))-軌道の集合を $N(\underline{s})/K$ (resp. $N(\underline{g}(\mathbf{R}))/G(\mathbf{R})$) で表す。

τ, θ で stable な Levi part をもつ $\underline{g}$ の θ-stable (resp. τ-stable)な放物型部分環 $\underline{q} = \underline{l}+\underline{u}$ (resp. $\underline{p} = \underline{m}+\underline{n}$) に対して、complex case の巾零軌道の誘導の一般化として、$\mathrm{Ind}^{\theta}((\underline{l},\underline{q})\uparrow\underline{g})$: $2^{N(\underline{l}\cap\underline{s})/L\cap K} \to 2^{N(\underline{s})/K}$ (resp. $\mathrm{Ind}^{\mathbf{R}}((\underline{m},\underline{p})\uparrow\underline{g})$: $2^{N(\underline{m}(\mathbf{R}))/M(\mathbf{R})} \to 2^{N(\underline{g}(\mathbf{R}))/G(\mathbf{R})}$) が定まる。関口対応 $N(\underline{s})/K \tilde{=} N(\underline{g}(\mathbf{R}))/G(\mathbf{R})$ を通じて $\mathrm{Ind}^{\mathbf{R}}$は $\mathrm{Ind}^{\mathbf{R}}((\underline{m},\underline{p})\uparrow\underline{g})$: $2^{N(\underline{m}\cap\underline{s})/M\cap K} \to 2^{N(\underline{s})/K}$ と見ておく。

さて、G(**R**) の set of θ-stable data $(\underline{q}, H(\mathbf{R}), \delta, \nu)$（$\underline{q} = \underline{l}+\underline{u}$ は θ-stable な放物型部分環、H(**R**) は L(**R**) のカルタン部分群、[V] 参照）及び、L(**R**) の 極小放物型部分群 $P_L(\mathbf{R})$ に対して、標準表現 $X = X_{G(\mathbf{R})}(\underline{q}, H(\mathbf{R}), \delta, \nu) = (R^{\underline{g}}_{\underline{q}})^{\dim\underline{u}\cap\underline{k}}(\mathrm{Ind}_{P_L(\mathbf{R})}^{L(\mathbf{R})}(\delta\otimes\nu))$ ([V]参照)が定まる。このとき、山下氏の結果[Y,Th3.1] 及び Adams, Vogan の結果[AV,Th.A.10] は誘導の言葉を用いて、以下のように述べることができる。

Th1(山下) G(**R**) が連結、H(**R**) がコンパクト(従って、L=H, $\underline{q}$ は $\underline{g}$ のボレル,このとき X は discrete series) であるとき、$X = (R^{\underline{g}}_{\underline{q}})^{\dim\underline{u}\cap\underline{k}}(\delta)$ であるが、X の associated varity Ass(X) は $\mathrm{Ass}(X)=\overline{\mathrm{Ind}^{\theta}((\underline{h},\underline{q}^{-})\uparrow\underline{g})(\{0\})}$ で与えられる。ここに、$\underline{q}^{-}$は $\underline{q}$ の opposite paraboric である。

Σ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する虚ルートで $\mathfrak{u}$ に含まれるものの全体とすれば、Σ は虚ルート系の正系を成す。 $x\in N(\mathfrak{s})$ は $Ad(G)x$ が $\mathfrak{g}$ の G-軌道の内で最大次元をもつとき $\mathfrak{g}$-principalであるという。$N(\mathfrak{s})$ の $\mathfrak{g}$-principal な元の全体を $N(\mathfrak{s})^{pr}$と書く。

Th2(Adams,Vogan [AV]) $\mathfrak{g}(\mathbf{R})$ は quasisplit であるとする。

(i) Σ が large type (即ち,Σの単純ルートはすべて non-compact)のとき、

$$[Ass(X)]^{pr} := \{ O \in N(\mathfrak{s})^{pr}/K \ ; \ O \subset Ass(X)\}$$

$$= [Ind^{\theta}((\mathfrak{l},\mathfrak{q}^{-})\uparrow\mathfrak{g})\cdot Ind^{\mathbf{R}}((\mathfrak{h},\mathfrak{p}_{L})\uparrow\mathfrak{l})(\{0\})] \cap [N(\mathfrak{s})^{pr}/K]$$

(ii) Σ が large type でないとき、$[Ass(X)]^{pr} = \phi$

又、Th2,(i) の設定で誘導された軌道を計算する事により、次を得る。

Th3 Σ が large type のとき、$[Ass(X)]^{pr} \neq \phi$ である。

更に、有限群 F_L, F_L^G を $F_L := \{a\in exp(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{s}\cap[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]);\ Ad(a^2)|_{\mathfrak{l}} = id_{\mathfrak{l}}\}$, $F_L^G := \{a\in F_L;\ Ad(a^2) = id\}$ により定める。F_Lの部分群 $F_L' \supset F_L^G$ が定まり、次が成り立つ。

Th4 Σ は large type とするとき、F_L' は推移的に $[Ass(X)]^{pr}$に作用する(但し、この作用は $F_L' \neq F_L^G$ のとき、随伴作用には一致しない)。又、θ が inner type のとき、$F_L' = F_L^G$ であって、F_L^G は随伴作用によって、$[Ass(X)]^{pr}$に推移的に作用する。

文献

[AV] J.Adams and D.Vogan, Amer. J. Math.,113(1991),45-138.

[V] D.Vogan, Representation of real reductive groups, Birkhauser.

[Y] H.Yamashita, 数理解析研究所講究録826

種数 2 の写像類群の JONES 表現について

笠原 泰 (学振／東工大・理)

1987年頃, Jones は 3-球面内の絡み目の 多項式不変量を構成しました (Jones 多項式) . そこでの構成は, n-string の 組ひも群 B_nの Hecke環表現を経由しています. (B_nの Hecke環表現の既約成分は n-箱 Young 図形と 1 対 1 に対応します). Jones はまた, 表現のうち (2g+2)-箱の長方形 Young 図形に対応するものを変形して, 種数 g の 超楕円的写像類群の線形表現を得ました. ここで, 超楕円的写像類群とは有向閉曲面の写像類群 [1]の部分群で, 固定された 超楕円的対合と可換な写像類全体から成ります.

特に, 種数 $g = 2$ のとき,

- 超楕円的写像類群は 写像類群全体 $\mathcal{M}_2$と一致し,
- 得られる表現は, 本質的に 3×2 Young 図形  の場合で尽きます.

これを 種数2の Jones表現と呼びます. これは 整係数 Laurent 多項式上の 5×5 行列に値をとり, ここでは$\rho\colon \mathcal{M}_2 \to GL(5, \mathbb{Z}[t, 1/t])$ と書くことにします. Jones はまた, ρが Torelli 群[2]上自明でないこと, 従ってρは古典的な symplectic 表現 $\mathcal{M}_2 \to Sp(4, \mathbb{Z})$ を経由しないことを指摘しています.

元来, Jones 表現は Heegaard 分解を通じて 3 次元多様体の位相不変量を作るという試みの産物でした. 絡み目の Jones 多項式については Witten の有名な仕事以来 3 次元多様体の様々な量子不変量と関係付けられています. しかし, Jones 表現については, 現在も発展を続けている 3 次元多様体の不変量の中で, 占めるべき位置ははっきりしていないようです. ここでは, 1 の巾根における量子群の表現を用いた Reshetikhin-Turaev による 3 次元多様体の不変量を念頭におきながら, Jones 表現に特殊値 $t = i$ を代入して得られる表現 ρ_iによる, 通常の Heegaard 分解の議論で ホモロジー 3-球面に対応する Torelli 群の像と その可換化を決定しました.

---

[1]向きを保つ微分同相写像全体の isotopy 類の成す群

[2]整係数ホモロジーに自明に作用する元全体から成る写像類群の正規部分群

さて, $d_0\colon \mathcal{I}_2 \to \mathbb{Z}$ で 森田の準同型を表わします. これは任意の本質的単純閉曲線に沿った right-handed Dehn twist の値が 1 という事実で特徴づけられます.

定理. *Jones* 表現 ρに特殊値 $t = i$ を代入して得られる表現を$\rho_i\colon \mathcal{M}_2 \to GL(5, \mathbb{Z}[i])$ と書く. また, ρ_iによる *Torelli*群 $\mathcal{I}_2$の像を I と書く.

1. d_0の *mod 2 reduction* は, ρ_iを 経由する. すなわち, $\exists p\colon I \to \mathbb{Z}_2$ *such that* $p \circ \rho_i = d_0 \mod 2$ *on* $\mathcal{I}_2$.
2. $A = Ker p$ は *rank 8* の 自由 *abel*群. 更に, 次の完全系列は 分裂する:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

   よって, $I \cong A \rtimes \mathbb{Z}_2$. 対応する Aの $\mathbb{Z}_2$-作用は$v \in A$に対して, $v \mapsto -v$.
3. Iの 可換化 I^{ab}は *rank 9* の 自由 $\mathbb{Z}_2$-加群と 同型.

また, I の $Sp(4, \mathbb{Z})$-構造を検討して, 次を得ました.

系. $\rho_i|_{\mathcal{I}_2}$ と, 射影 $I \to I^{ab}$ の 合成πは 2 番目の *Johnson*準同型を経由する.

Remark. (1) 2 番目の Johnson 準同型は ホモロジー 3-球面の Rochlin 不変量の情報のうち, 1 つを除いた 9 つを含んでいます (Johnson). 一方, πの 含む Rochlin 不変量の情報は 5 つです. したがって, πは Rochlin 不変量で記述することはできません. また, Rochlin 不変量も πでは記述することはできません.

(2) 1 の 4 乗根における Reshetikhin-Turaev の 不変量の定める Torelli 群の 「表現」は 本質的に, Rochlin 不変量の情報全体と 一致することが知られています (Wright).

References

[1] Y. Kasahara, *Jones' representation of the mapping class group of genus 2 surface at the 4-th root of unity on the Torelli group*, preprint

Current address: 〒 153 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院 数理科学研究科
E-mail address: kasahara@ms.u-tokyo.ac.jp

$b_2^+ = 1$ の 4次元 symplectic 多様体について

お茶大・理　小野　薫

以下の話は名古屋大学の太田啓史氏との共同研究です。

閉シンプレクティック多様体の例として、まず思い浮かぶのは閉 Kähler 多様体でしょう。多様体として他のものが現れるかというのは基本的な問で、Kähler でない例が色々知られています。特に数年前の Gompf による構成（構成法自体は Gromov が前に書いている）で面白い展開がありました。一方で Kähler に似ている面もあるので、然るべき条件の下では Kähler 多様体になってしまうのではないかと思われます。

2次元の場合は、皆 Riemann 面の構造が入るので Kähler 構造を許容します。次に4次元ではと考えると、Kähler でない例もあります。Gromov は pseude-holomorphic curve という道具を導入し、色々と面白い事を示しましたがそのうちの1つその McDuff による拡張として次の thm があります。

Theorem（Gromov McDuff）　M^4 閉シンプレクティック多様体，4次元 M が シンプレクティックに埋め込まれた2次元球面 C で自己交差数が非負のものを含めば、M は $\mathbb{CP}^2$ または閉曲面上の $\mathbb{CP}^1$ 束の blow-up と diffeomorphic.
特に M は Kähler 構造を許容する

注）シンプレクティック微分同相となるかという問題は、M が minimal と仮定すれば OK である

（$\mathbb{CP}^2$ -- Gromov, $\mathbb{CP}^1$ 上の $\mathbb{CP}^1$ 束 -- McDuff, minimal -- Lalonde-McDuff）

そこで問題は如何にこのような C をみつけるかとなります.

関連した方向では、昨年 Donaldson が発表した結果があり、少し動きが見えていたが、Seiberg-Witten 理論が現れ、これを4次元シンプレクティック多様体上で扱うことで Taubes は次の結果を発表している.

Theorem (Taubes) "Seiberg-Witten invariant = Gromov invariant"
(正確には $b_2^+ > 1$ の仮定が要る. $b_2^+ = 1$ のときは左辺が修正を要する.)

この結果はシンプレクティック部分多様体(2次元)を主張するものなので、所望の C を立てるべき仮定の下みつけられる可能性がでてきました. 実際我々は次の結果を得ました.

Theorem 1 (M, ω) 閉4次元シンプレクティック多様体
M がスカラー曲率正のリーマン計量を持つとすれば
M は, $\mathbb{CP}^2$ または曲面上の $\mathbb{CP}^1$ 束 (in blow up) と diffeomorphic.

Theorem 2 (M, ω) 閉4次元シンプレクティック多様体
(M, ω) の1st Chern 類 $c_1(M)$ と $[\omega]$ とが
$c_1(M) = \lambda [\omega]$ $(\exists \lambda > 0)$ を満たすならば
M は del Pezzo surface と diffeomorphic.

Kähler のときは. Th 1 は Friedman-Morgan の "Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants" で示されている. (Th 2 は古典的)
また Th 1 で M minimal としたときには. Li-Liu も同様の結果を得ていると聞いています.

ある双曲－楕円型方程式系の大域的弱解について

伊藤一男（北大理）

次の初期値問題を考える：

$$(0)\quad \begin{cases} u_t + uu_x + q_x = 0, \\ -q_{xx} + q + u_x = 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \qquad (t \geq 0,\ x \in \mathbb{R})$$

(0)は，放射波のモデル方程式であり（Hamer 1971），$u(t,x)$は流速，$q(t,x)$は熱流に対応している．

(0)は，次の方程式に単純化される：

$$(1)\quad \begin{cases} u_t + uu_x + u - Ku = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

ここに，$(Ku)(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} u(t,y)\,dy$ である．

(1)に対し，ここでは主に時間大域的な解の存在と一意性を考える．非局所項 Ku が，従来の Burgers 型方程式にない，この方程式特有の性質を生み出している．すなわち，(1)の解は初期値の形状により質的に異なる性質を示す：

① 初期値 u_0 が H^2 の意味で“小さい”ならば，解は放物型方程式である Burgers 方程式の解と同様な挙動を示す（Kawashima and Tanaka '95）．

② $\exists \alpha < 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}$; $u_0'(x_0) < \alpha$ が成り立つという意味で初期値の導関数が“大きい”ならば，u_0 がどんなになめらかでも解 u は有限時間のうちに blow up する（Kawashima '95）．すなわち，(1)は，双曲型方程式である非粘性 Burgers 方程式に類似した性質をもつ．

②により，“大きな”導関数をもつ初期値に対しては，我々はなめらかな解を期待できない．このようにして，我々は弱解の概念を導入することとなる．

定義 $u(t,x)$ が (1) の弱解

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $u \in \bigcap_{T>0} BV([0,T)\times\mathbb{R}) \cap C^0([0,\infty); L^1(\mathbb{R}))$
$\cap L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$,

(ii) $0 \le \iint_{(0,\infty)\times\mathbb{R}} \{ |u-k|\varphi_t + \frac{1}{2}|u-k|(u+k)\varphi_x$
$- \operatorname{sign}(u-k)(u-Ku)\varphi \} \, dt\,dx$

が $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in C_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$ に対し成り立つ．

(iii) $u(0,x) = u_0(x)$.

この定義の下に，次が成り立つ．

定理 (i) (一意性) u, v がそれぞれ初期条件 $u(0,x) = u_0(x)$, $v(0,x) = v_0(x)$ を満たす (1) の弱解
$\Rightarrow \quad \|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$, $\forall t \ge 0$.

(ii) (存在) $\forall u_0 \in BV(\mathbb{R})$ に対し，(1) の弱解 u が存在する．

単純 Lie 環の幾何的構成

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
向井 茂 (Shigeru MUKAI)

$\mathfrak{g}$ は複素数体上の有限次元単純 Lie 環とする。これらは通常カルタン部分代数による固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

でもって、ルート系という有限離散幾何の問題に帰着して分類される。また、ルート系の基底に対応する 3ℓ 個の元 e_i, f_i, h_i で生成され、当然の関係と $(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j = (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0$ $(i \neq j)$ を基本関係にする Lie 環として、$\mathfrak{g}$ は純代数的に構成できる。ここでは、これと違った視点から $\mathfrak{g}$ の構成と分類を考えよう。

先ず、有限個変数の多項式環

$$L = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, z]$$

は Legendre 括弧 $\{\ ,\ \}$ で Lie 環になることに注意する。接触形式としては、偏微分方程式の解法に定められる標準型

$$\alpha = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

を使おう。 2つの関数 $f=f(x,p,z)$ と $g=g(x,p,z)$ の Legendre 括弧は

$$\{f,g\} = (f,g) + f_z(g - E_p(g)) - g_z(f - E_p(f))$$

である。 但し, (f,g) は $d\alpha$ に関する Poisson 括弧で, E は変数 p_i に関する Euler 作用素 $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ である。

次に, $\mathfrak{g}$ の最大ルートと A, そのルートによる固有空間分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

とする。 $\mathfrak{g}_2$ はルートベクトル E_A で生成される1次元空間である。 また, $\mathfrak{g}_{-1}$ は

$$\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (X,Y) \longmapsto \kappa([X,Y], E_A)$$

を歪内積とする偶数次元ベクトル空間で, さらに, その上の有次4次式

$$F_{\mathfrak{g}}(X) := \kappa([[[[E_A, X]X]X]X], E_A)$$

が定まる。

定理 $\mathfrak{g}_{-1}$ のシンプレクティック座標を $(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ とする。 このとき, $\mathfrak{g}$ は多項式 Lie 環 L 内で $\tilde{z}^2 - F_{\mathfrak{g}}(x,p)$ と $x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n, \tilde{z}$ で生成される部分 Lie 代数と同型である。 但し, $\tilde{z} = z + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

注意 $\deg x_i = \deg p_i = 1$, $\deg z = 2$ としたとき, L は $\deg f - 2$ を次数として, 次数付 Lie 環になる。上の同型は, 次数付 Lie 環としての同型である。

有次4次式 $F = F(x,p)$ に対して, $\tilde{z}^2 - F(x,p)$ と $x_i, p_i, \tilde{z}$ で生成される L の部分 Lie 代数を $L(F)$ で表そう。定理より, $L(F)$ が5次以上の多項式を含まないのはいつかが問題となる。

例 1) $F(x,p) \equiv 0$ のとき, $L(F)$ は5次以上の多項式を含まない。$L(F)$ は $\mathfrak{sp}(2n+2)$ と同型である。

2) $F(x,p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$ のときもそうである。Lie 環 $L(F)$ は $\mathfrak{sl}(n+2)$ と同型である。

定理 等質対称 Legendre 射影多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ の判別式 $F(x,p)$ は4次式で $L(F)$ は5次以上の多項式を含まない。また, $L(F)$ は上の 1) 2) 以外の全ての有限次元単純 Lie 環を尽くす。

等質対称 Legendre 射影多様体の典型例は射影直線の3次 Veronese 射

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3, \quad t \longmapsto (x:y:p:q) = (1:-t:t^3:3t^2)$$

の像 $C \subset \mathbb{P}^3$ である。2形式 $dx \wedge dp + dy \wedge dq$ は null-correlation

点 $v = (a:b:c:e) \longmapsto$ v を通る超平面 $H_v : cx + ey - ap - bq = 0$

を定めるが、$v \in C$ のときの C の v での接ベクトル $(0 : -1 : 3t^2 : 6t)$ は常に H_v に含まれる。これが Legendre 性である。$C \subset \mathbb{P}^3$ の判別式 $F(x, y, p, q)$ は、X を未知数とする3次方程式

$$\alpha X^3 - 3\beta X^2 + \gamma X + \delta = 0$$

の判別式で、得られる Lie 環 $L(F)$ は G_2 型である。その基底多項式は α のとり方と Veronese 射で少し違うが、Cartan [2] に書かれている。

一般に、等質対称 Legendre 射影多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ は3次のノルム $N_n : V \longrightarrow \mathbb{C}$ をもつ $\mathbb{C}$ 上の半単純 Jordan 代数 V と1対1に対応する。後者の分類は最終的に $\mathbb{C}$ 上の交代代数の分類になり、Hurwitz の定理に帰着される。(例えば [4] の付録。)

参考文献

[1] 浅野 洋：Symplectic Triple System と単純 Lie 環，数研講究録 308「Triple system について」pp. 41–59, 1977.

[2] Cartan, E.: Sur la structure des groupes simples finis et continu, C.R. Acad. Paris, 116 (1893), 784–786.

[3] Meyberg, K.: Einer Theorie der Freudenthalschen Triple-systeme I, II, Indag. Math. 30 (1968), 162–174, 175–190.

[4] 佐武一郎：リー環の話，日本評論社，1987年.

あとがき

4次斉次式 $F(x,p)$ から得られる Lie 環 $L(F)$ が5次以上の多項式を含まない条件を書き出すと，それは [1] で定義されている symplectic 3重系 や [3] で分類されている Freudenthal 3重系の公理と同等になる。それらから単純 Lie 環が全て得られることは [1] で，また，$sp(2n+2)$ と $sl(n+2)$ に対応するもの以外は全て3次の Jordan 代数と対応することが [3] で証明されている。よって，ここで述べたことは，証明を別にすれば，これらの結果を接触変換と Legendre 射影多様体という概念で幾何学化したことになる。また，それでもって，Cartan による G_2 型 Lie 環の多項式表示を一般化したとまとめられよう。Lie 環は代数的に取扱えるのが大きな長所であるが，その出自が幾何なのだから，このような話にも意味があるかと述べた次第である。何らかの発展や関連話題があれば，教えていただけると有難い。

1996年5月20日

名古屋にて

無限次元ラプラシアン

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
尾畑伸明

近年, 確率解析や場の量子論などへの応用と相まって, 無限次元空間上の関数解析への関心が高まっている. 有限次元の場合と同様に, 無限次元空間上の関数やそれに作用する作用素 (特に微分作用素) の研究には超関数のアイデアが有効である. この講演では, ホワイトノイズ解析と呼ばれているガウス空間上の超関数論を用いて, 典型的な無限次元ラプラシアンである“グロス・ラプラシアン”と“ベルトラミ・ラプラシアン”についてその調和解析的側面を紹介したい.

1. ガウス空間 まず, T を位相空間, ν をその上の σ-有限測度として固定する. あまり一般的な情況で議論する必要もないので, $T=\mathbb{R}^n$ や $T=\mathbb{Z}^n$ などを念頭に置けばよい. 実ヒルベルト空間 $H=L^2(T,\nu)$ とその上の自己共役作用素 A で $\inf \mathrm{Spec}(A)>1$ かつ A^{-1} がヒルベルト・シュミット型になっているものが与えられているとして, 標準的にゲルファントの三つ組 $E\subset H\subset E^*$ を構成することができる. 古典的なボホナー・ミンロスの定理から,

$$e^{-|\xi|^2/2}=\int_{E^*} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(dx), \qquad \xi\in E,$$

をみたす E^* 上の確率測度 μ が一意的に存在する. これを E^* 上のガウス測度という. 解析学の見地からは, 微分だけではなく積分が重要であるが, 無限次元ベクトル空間上には, ルベーグ測度のような平行移動不変性で特徴づけられる測度は存在しないことが知られている. それに代わるものとして, ガウス測度が確率論や回転に関する不変性・エルゴード性などによって基本的であると認識されている. ある意味では, ヒルベルト空間こそがユークリッド空間の直接的な拡張であるともいえようが, 位相的性質や測度論的観点からは E^* の方が自然である. こうして, 我々の興味はガウス空間 (E^*,μ) 上の関数・超関数に移る.

2. ホワイトノイズ超関数 複素ヒルベルト空間 $L^2(E^*,\mu)$ と A の第二量子化作用素 $\Gamma(A)$ をもとに, 標準的な方法でゲルファントの三つ組 $(E)\subset L^2(E^*,\mu)\subset (E)^*$ が構成される. $H_{\mathbb{C}}$ 上のフォック空間 $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ は, 標準的に $L^2(E^*,\mu)$ と同型である (ウィナー・伊藤・シーガル同型). ϕ と $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ が対応するとすれば, (E) の元は各々の f_n がなめらかで n に関して適当な減少度を持つものとして, $(E)^*$ の元は各々の f_n が超関数で n に関して適当な増大度を許すものとして得られる.

3. ラプラシアン H の正規直交基底で $\{e_j\}\subset E$ となるものを一つ固定して, E^* の座標軸とみなそう.

$$D_j\phi(x)=\lim_{\theta\to 0}\frac{\phi(x+\theta e_j)-\phi(x)}{\theta}, \qquad x\in E^*, \quad \phi\in(E),$$

とおくと, $D_j\in\mathcal{L}((E),(E))$ が示される. これは, フォック空間の言葉では, (e_j で smear した) 消滅作用素と呼ばれる. その共役 D_j^* が生成作用素である. 定義から, $D_j^*\in\mathcal{L}((E)^*,(E)^*)$

であるが, $D_j^* \in \mathcal{L}((E),(E))$ が証明される. さらに,

$$\Delta_G = \sum_{j=1}^{\infty} D_j^2, \qquad N = \sum_{j=1}^{\infty} D_j^* D_j,$$

はともに $\mathcal{L}((E),(E))$ の有界収束位相で収束する. 前者をグロス・ラプラシアン, 後者をベルトラミ・ラプラシアンまたは個数作用素と呼ぶ.

3. 回転不変性 ゲルファントの三つ組 $E \subset H \subset E^*$ の自己同型群を $O(E;H)$ とすると, $(\Gamma, L^2(E^*,\mu))$ は $O(E;H)$ のユニタリー表現であり, (E) を不変に保つ. 一般に $\Xi \in \mathcal{L}((E),(E))$ が $\Gamma(g)\Xi = \Xi\Gamma(g)$, $g \in O(E;H)$, をみたすとき回転不変であるという. Δ_G, N が回転不変であることは見やすいが, 実は, 任意の回転不変作用素はこの 2 つのラプラシアンで生成される. 収束性も込めた詳しい議論も可能である.

4. フーリェ変換と伸縮変換の無限小生成作用素 ガウス空間上の座標関数 $\langle x, e_j\rangle$ によるかけ算作用素を $Q_j \in \mathcal{L}((E),(E))$ とする. Q_j は連続的に拡張されて $(E)^*$ 上の連続作用素になる. さて, $(E)^*$ 上の連続作用素 $\mathcal{F}$ で (i) $\mathcal{F}D_j = Q_j\mathcal{F}$; (ii) $\mathcal{F}Q_j = -D_j\mathcal{F}$; (iii) $\mathcal{F}1 = \delta_0$, をみたすものが唯一存在する. これをクオ・フーリエ変換という. $\mathcal{F}^*$ は $GL((E))$ の 1 径数部分群に埋め込まれ, その無限小生成作用素は $iN + (i/2)\Delta_G$ で与えられる. また, $x \mapsto e^{\theta}x$, $\theta \in \mathbb{R}$, は E^* 上の等方的な伸縮であるが, (E) 上の自己同型群を誘導する. その無限小生成作用素は $N + \Delta_G$ で与えられる. 特に, $N + \Delta_G$ は 1 階微分作用素となる. なお, $[N, \Delta_G] = -2\Delta_G$ は注目に値する.

5. 1 径数変換群の構成と荷重つきラプラシアン 一般にフレシェ空間 $\mathfrak{X}$ 上の連続作用素 Ξ で $\{\Xi^n/n!\,;\, n = 0,1,2,\cdots\}$ が同程度連続になるものを equicontinuous generator と呼ぼう. 対応する 1 径数変換群は無限級数で構成される. N や Δ_G は equicontinuous generator であり, その交換関係から $aN + b\Delta_G$ もそうである. さらに, 荷重つきの $N(f)$, $\Delta_G(g)$ が導入され, 交換関係 $[N(f), \Delta_G(g)] = -2\Delta_G(fg)$ が示される. $N(f) + \Delta_G(g)$ が equicontinuous generator になるための十分条件が知られている. 応用として, そのようなラプラシアンに対応する熱方程式 (あるいは, シュレーディンガー方程式) の解が級数で得られる.

文 献

1. N. Obata: "White Noise Calculus and Fock Space," Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer–Verlag, 1994. [§1–4 の詳細についてはこれを参照のこと]
2. N. Obata: *Constructing one-parameter transformations on white noise functions in terms of equicontinuous generators*, preprint, 1995.
3. D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Generalized Laplacians on white noise space and associated Cauchy problems*, preprint, 1995. [§5 はこれらで得られた結果の触りの部分である]

The singular limit of the Cahn-Hilliard equation with a non-local term

Georg Weiss
(joint work with Y. Nishiura)

Let us first consider the Landau-Ginzburg energy functional E_ε with an additional non-local term N_δ $(\delta > 0)$

$$F_\varepsilon(u) := \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u)\right) + \delta \int_\Omega \left(-\Delta_N^{-1}\left(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\right)\right)\left(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\right),$$

where $W(z) := (z^2-1)^2$ is the usual double-well potential and Δ_N^{-1} is the inverse of the Laplace operator with respect to homogeneous Neumann boundary data. When minimizing F_ε on $\{v \in H^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega v = M\}$, the Landau-Ginzburg part wants the minimum to take values in $\{-1, 1\}$ while minimizing the interface area, however the non-local term wants the minimum to oscillate, which leads to microstructures varying with the parameter M. The gradient flow for F_ε with respect to H^{-1}

has been used to model phase separation of diblock copolymers (Ōta-Kawasaki, Nishiura-Ōnishi). Since $0 < \varepsilon << \delta << 1$ is a realistic setting, we are among other questions interested in the singular limit as $\varepsilon \to 0$ while δ is fixed. In the stationary case of absolute minimizers of F_ε, the singular limit can be computed using the notion of Γ-convergence. In the non-stationary case using the approach of Luckhaus, we can prove the corresponding statement in situations where no loss in the total energy occurs in the limit as $\varepsilon \to 0$: suppose $n \le 3$, $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $u^{0\varepsilon} \to u^0$ in $L^1(\Omega)$ as $\varepsilon \to 0$ and $\sup_{\varepsilon > 0} E_\varepsilon(u^{0\varepsilon}) < \infty$; then the solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ of

$$\partial_t u_\varepsilon + u_\varepsilon - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\varepsilon = \Delta v_\varepsilon \quad \text{in }]0,T[\times \Omega,$$

$$v_\varepsilon = -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} W'(u_\varepsilon) \quad \text{in }]0,T[\times \Omega,$$

$$\nabla u_\varepsilon \cdot \nu = \nabla v_\varepsilon \cdot \nu = 0 \quad \text{on }]0,T[\times \partial\Omega,$$

$$\int_\Omega v_\varepsilon(t,x)\,dx = 0 \quad \text{and} \quad u_\varepsilon(0,x) = u^{0\varepsilon}(x) \quad \text{in } \Omega$$

satisfy the following: as a subsequence $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u$ strongly in $L^2(\Omega_T)$, $u \in L^\infty(]0,T[; BV(\Omega))$, $u \in \{-1, 1\}$, $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ weakly in $L^2(]0,T[; H^1(\Omega))$, and <u>if</u> $\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_0^T E_\varepsilon(u_\varepsilon(t))\,dt \le \int_0^T E_0(u(t))\,dt$

(where E_0 is the Γ-limit of E_ε) then (u,v) is a solution in the following sense:

$$0 = \int_{\Omega_T} -\partial_t \eta\,(u-u^0) + \eta\left(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\right) + \nabla v \cdot \nabla \eta$$

$$\forall \eta \in L^2(]0,T[;\, H^{1,2}(\Omega)) \quad \text{s.t.} \quad \eta(T) = 0$$

and $$\frac{1}{\mu}\int_\Omega u(t)\,\operatorname{div}(v(t)\xi) = \int_\Omega \left(D\xi(\nu)(\nu) - \operatorname{div}\xi\right) d|\nabla u|$$

for any $\xi \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ s.t. $\xi \cdot \nu_{\partial\Omega} = 0$ on $\partial\Omega$ and a.e. $t \in]0,T[$.

Here ν is the Radon-Nikodym derivative $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ and $\mu := \sqrt{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{W(s)}\,ds$.

Questions arising next are, whether the pattern morphology (the formation of different microstructures as M varies) can be characterized in some way, for example, is it true that the microstructures formed by absolute minimizers of F_ε are periodic?

談話会講演要旨　（神田雄高）

題：Legendrian 結び目について.

$\mathbb{R}^3$ において 1-form $dz+xdy$ によって定義される標準的な接解構造 ξ_0 について考える。

$\mathcal{L} := \left\{ f : S^1 \underset{\text{smooth}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f^*(dz+xdy) \equiv 0 \right\}$ とおく。

2つの写像

$Th : \pi_0(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}$

$r : \pi_0(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}$　　94.

を次のようにして定める。

$A \in \pi_0(\mathcal{L})$ に対して　$f \in \mathcal{L}$ であって $[f] \in A$ であるものをとる。

$Th(A) = lk(f(S^1), L)$ とおく。

ここで L は $f(S^1)$ を ξ_0 に対して横断的な方向に少しずらしてできる結び目，$lk(\ ,\ )$ は linking 数のことである。

$r(A) = \deg\left(\frac{df}{dt}\right)$ とおく。つまり $f(S^1)$ の方向ベクトルが平面場 $\xi = \ker(dz+xdy)$ に入っている自明化に対して何回回転しているかを見た数である。

任意の結び目型 K に対して

$\mathcal{L}_K := \{ f \in \mathcal{L} \mid [f(S^1)] \in K \}$ とおく。

このとき 次の不等式が成立する。

$A \in \mathcal{L}_K$ のとき $tl(A) + |\gamma(A)| \leq 2 \cdot (K\text{の種数}) - 1$ … ※

そこで 結び目型 K に対して

$\overline{tl}(K) := \max_{A \in \mathcal{L}_K} [tl(A) + |\gamma(A)|]$ を求めることが

目標である。

まず ※ より, $2 \cdot (K\text{の種数}) - 1 - \overline{tl}(K) \geq 0$ である。

K = 自明のとき 左辺 $= 0$

$K =$  のとき $= 0$ である。

(結果) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\exists K_n$ があり.

K_nの種数 $= 1$

$\overline{tl}(K) \leq -6n - 5$

手法: 接触幾何と 幾何的 Topology の組み合わせである。

コメント: 現在では K の Homfly 多項式による $\overline{tl}(K)$ の上からの評価が知られていて同様の結果が得られる。

値分布論の代数幾何的構成

小林亮一

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

Vojta は、Roth の定理：

定理. α を任意の代数的数とする。このとき、有限個の有理数を除いて

$$\log^+ \frac{1}{|\alpha - \frac{p}{q}|} \leq (2+\varepsilon)\log^+ \max\{p,q\}$$

が成り立つ。

と Nevanlinna の第二主要定理：

定理. α をリーマン球面の任意の点、$f = f_1/f_0$ （被約表現）を任意の有理型関数、$\|f,\alpha\|$ を f と α の弦距離とする。このとき、長さ有限の例外的区間の外のすべての $r > 0$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{\|f(re^{i\theta}),\alpha\|}\frac{d\theta}{2\pi} \leq (2+\varepsilon)\int_0^{2\pi} \log^+ \max\{|f_0|,|f_1|\}(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

が成り立つ。

の間の素朴な類似性を押し進めて、値分布論の定理や予想をディオファントス近似の予想に翻訳する辞書を提案した。Vojta の主要予想は、値分布論では

予想. X を射影代数多様体、D を X の単純正規交差因子、E を X 上の *big* な直線束、ε を任意の正の数とする。このとき、次の性質を満たす X の真代数的部分集合 $Z = Z(X,D,E,\varepsilon)$ が存在する：$f(\mathbf{C}) \not\subset Z$ となるすべての正則曲線 $f : \mathbf{C} \to X$ に対して

$$m_{f,D}(r) + T_{f,K_X}(r) \leq \varepsilon T_{f,E}(r)$$

が長さ有限の例外的区間の外のすべての r に対して成立する。

であり、ディオファントス近似では

予想. k を数体、X を k 上定義された射影代数多様体、D を X の単純正規交差因子、E を X 上の *big* な直線束、ε を任意の正の数とする。このとき、次の性質を満たす X の真代数的部分集合 $Z = Z(X,D,E,\varepsilon)$ が存在する：$P \notin Z$ となる k-有理点 P に対しては、有限個の例外を除いて

$$m_D(P) + h_K(P) \leq \varepsilon h_E(P)$$

が成立する。

である。ここで、$m_{f,D}(r)$、$m_D(P)$ は f や P の D に関する接近関数、$T_{f,K}(r)$、$h_K(P)$ などは f や P の K に関する高さ関数などとよばれ、それぞれ、有理点や正則曲線の因子への "接近"、K で測った有理点や正則曲線の "複雑さ" を記述する量である。講義では、上のふたつの予想を統一的に説明する幾何学を構成するための最初の段階として、値分布論における主要予想の背景に潜む代数幾何的構造について論じる。内容は、

(1) Nevanlinna の第二主要定理
(2) Radon 変換と積分幾何："特殊集合" および "微分の定義方程式"
(3) ジェット微分の住む空間とその幾何学および値分布論的性質
(4) 値分布論の主要予想の解決にむけて

特殊集合というのは、たとえば一般型代数多様体に含まれる有理曲線、Calabi-Yau 多様体などをすべて寄せ集めて Zariski-closure をとったようなものである。(2) では特に特殊集合をとらえる方法を記述する。4 つの話題は、いずれも高度に non-trivial であるが、証明はすべて初等的であり、Griffiths-Harris の最初の 2 章以上の予備知識は仮定しない。

Twisted Riemann's period relation と合流超幾何関数の2次関係式

熊本大学 教養部　河内喜重

青本, Gel'fand らは, 超幾何関数は Euler 積分表示であると認識し, (n, m) 型超幾何関数の概念に達した。

(1) $$\varphi(z;\alpha) = \int_{\Delta} \prod_j \ell_j(t;z)^{\alpha_j}\, dt$$

ℓ_j : t の1次式, その係数 (z_{ij}), $\alpha_j \in \mathbb{C}$

$t = (t_1, \cdots, t_{n-1})$

因みに, Gauss 超幾何関数の Euler 積分表示は

(2) $$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\, dt$$

(1) という定式化は多くの実りをもたらした。非常に対称性の高い形になっているため, 従来知られていた公式等の意味がはっきりしたり, 新しい公式が続々と見つかったりする。

特に, (1) は twisted homology と twisted cohomology の pairing である, と見る見方から, 喜多-吉田による twisted homology の交点理論, 趙-松本による twisted cohomology の交点理論, そしてその組み合わせにより twisted Riemann's period relation が得られたのは大きな成果である。その産物として, 超幾何関数の2次関係式がどんどん得られる。

一方 (1) において, 被積分関数を考えるのに

$$\prod_j \ell_j^{\alpha_j}$$

という $(\tilde{\mathbb{C}}^\times)^n$ の character であるという見方は, 別な方向に大きな展開をもたらした。即ち, $(\mathbb{C}^\times)^n$ を GL_n の maximal abelian

subgroup と思うと、他の maximal abelian subgroup の character から作られる積分を考えることに思い至る。こうして積分核に $e^{(t$の有理式$)}$ というのも含む様な関数が定義される。これらは実は古典的に知られる合流超幾何関数の族をすべて含む大きなヒエラルキーとなることが分かった。

このヒエラルキーには、背景に線形 abel 群があることもあって豊かな構造が入る。そのうちの一つに合流操作というのがある。これはあるパラメーター ε を導入して、$\varepsilon \to 0$ という極限をとることで、合流度の低い関数から合流度の高い関数を構成する方法であり、非常に強力な武器である。

そこでこの合流操作を使って twisted Riemann period relation を、合流超幾何関数に対して見つけていこう。そのため homology や cohomology の、合流と相性の良い基底をえらんだり cycle (homology) の合流に際して少し技術を用いる。

結果として、合流超幾何関数の2次関係式が次々と得られていく。例えばよく知られた公式

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

などは、この観点から解釈することができる。

ある非線形拡散方程式の数値解とそのサポートの挙動について

友枝 謙二　（大阪工業大学）
中木 達幸　（広島大学 理学部）

非線形拡散方程式で表される現象は数多くある。本講演では，その中でも多孔質媒体流に関するものを扱うことにする。ここでいう多孔質媒体 (porous medium) とは，スポンジ，地中，コンクリートのように，小さな穴が数多く空いている媒体である。その中を流れる流体の解析は，流域の形状が非常に複雑なため，通常，空間的に平均化した物理量を用いて定式化される。このことが，他の流体の問題とこの問題との扱いが異なるところである。多孔質媒体流の問題のうち，多くの研究がなされているものには，

(a) 1 種類の少量の流体が単に流れる場合

(b) 蒸発をしながら流れる場合

(c) 外力の影響を受けながら流れる場合

(d) 1 種類の多量の流体が単に流れる場合

(e) 2 種類の互いに混じりあう流体が流れる場合

(f) 混じりあわない流体が流れる場合

などがあり，それぞれに興味深い問題がある。これらの中から，本講演では，(b) を扱うことにする。

1 次元空間 $\boldsymbol{R}^1$ における初期値問題

$$v_t = (v^m)_{xx} - cv^p, \qquad t > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}^1, \tag{1}$$

$$v(0,x) = v^0(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}^1 \tag{2}$$

を考察する。ここで，$m(>1), c(\geqq 0), p(>0)$ は定数で，初期関数 $v^0(x)$ は非負とする。物理的には，$v(t,x)$ は時刻 t, 場所 x における空間的に平均化された意味での流体の密度（正確にいえば，流体の平均化された密度と流体が穴の中に占める割合をかけたものである）を表し，(1) の右辺の第 1 項は多孔質媒体中での流体の拡散，第 2 項目は流体の蒸発を記述している。拡散項は $(v^m)_{xx} = (mv^{m-1}v_x)_x$ と書け，mv^{m-1} が拡散係数を表す。この拡散係数は $v=0$ のところで退化するため，(1),(2) の解 v は，サポートの有限伝搬性と呼ばれる性質，すなわち，

$$\text{supp } v(0,\cdot) \text{ が有界ならば，すべての } t>0 \text{ に対して } \text{supp } v(t,\cdot) \text{ も有界である} \tag{3}$$

を持つことが知られている。多孔質媒体流の観点からいえば，サポートは流体が存在する範囲を表している。このサポートの挙動に関して次のことが知られている。

Case 1. $c=0$ または $c>0$, $p \geqq m$ のとき。$\text{supp } v(t,\cdot)$ は単調に広がり，$t \to \infty$ のとき $\text{supp } v(t,\cdot) \to \boldsymbol{R}^1$

Case 2. $c>0, 1 \leqq p < m$ のとき。$\text{supp } v(t,\cdot)$ は単調に広がるが，t に関して一様に有界である。

Case 3. $c>0, 0<p<1$ のとき。$^{\exists}T^* > 0$ such that $\text{supp } v(t,\cdot) = \phi$ for $t > T^*$

ここでは，Case 3 について議論する。解（弱解）の存在と一意性は Kalashnikov (Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. 14 (1974), 891–905) により証明されている。$m+p=2$ のとき，Kersner (Vestn. Mosk. un-ta. matem. 33 (1978), 44–51) は特殊解を構成した。また，Rosenau and Kamin (Physica 8D (1983), 273–283) はサポートが有限時間経過後に分離することを示唆する数値実験を行なった。しかし，彼らはその理論的な研究を行なっていない。我々の目的は，解 v とそのサポート $\mathrm{supp}\, v(t,\cdot)$ を追跡するための差分法を提案し，その安定性，収束性とともに，その差分解の性質を使って，サポートが分離するための十分条件と界面方程式 (interface equation) と呼ばれる関係式を与えることである。ただ，残念なことに，$0<p<1$ のすべての場合について，我々は結果を得ることが出来なかった。Kersner や Rosenau and Kamin らと同様に，$m+p=2$ の場合に話しを限定することとする。

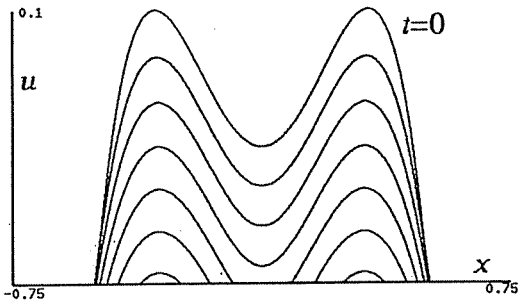


図 1　サポートが分離する数値実験例
$(m=1.5,\ p=0.5,\ c=6)$

我々の差分法の概略は以下のとおりである。$u=v^{m-1}$ とおくと，(1) は

$$u_t = Hu + Pu + Du \tag{4}$$

と書き換えられることが出来る。ここで，

$$Hu = \frac{m}{m-1}(u_x)^2, \quad Pu = muu_{xx}, \quad Du = -c(m-1) \tag{5}$$

である。我々は，operator split method を用い，微分作用素 H, P, D の各々を，差分近似することとした。方程式 $u_t = Du$ は簡単な常微分方程式であるので，その解を使って差分作用素 D_h を構成した。$u_t = Hu$ は $w = u_x$ とおくことにより，

$$w_t = \frac{m}{m-1}(w^2)_x \tag{6}$$

という Burgers 方程式に書き換えられる。u の差分近似解は区分的に線形な関数として構成するため，w のそれは区分的に定数関数である。そのため，(6) は，Burgers 方程式に対する Riemann 問題を解くことにより，厳密に解ける。この厳密解を使って，微分作用素 H の差分作用素 H_h を構成した。P の差分近似は，通常良く使われる中心差分を使って行なった。

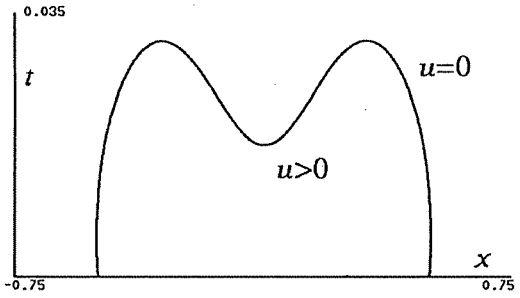


図 2　図 1 の解に現れるサポート

サポートの近似という側面から見てみると，サポートを変化させる作用素 H, D の近似には厳密解を使った。作用素 P は中心差分を使って近似したが，その作用素はサポートを変化させない。このことが，我々の差分法において，サポートの近似が良い理由の 1 つであると思われる。

紙面の関係上，安定性と収束性に関する結果は，このアブストラクトでは省略する。サポートの分離と界面方程式に関して，我々は次の結果を得た。ここで，界面とは，$v>0$ と $v=0$ の境界，すなわち，サポートの境界を意味する。以下では，記号の簡略化のため，

$$\ell(t) = \sup\{\xi;\ v(t,x)=0 \quad \text{for} \quad x\in(-\infty,\xi)\} \tag{7}$$

で定義される界面 (left interface と呼ぶ) について考察する。

Condition A. $u^0(\equiv (v^0)^{m-1}) \in C^0(\boldsymbol{R}^1) \cap BV(\boldsymbol{R}^1)$ is a nonnegative function with compact support, $u_x^0 \in L^\infty(\boldsymbol{R}^1) \cap BV(\boldsymbol{R}^1)$ is absolutely continuous and ess.inf $u_{xx}^0 > -\infty$.

Condition B. There exist positive constants M and ε such that

$$u_x^0(x) \geqq M \quad \text{for} \quad x \in [\ell(u^0), \ell(u^0) + \varepsilon]. \tag{8}$$

Theorem. *Under Condition A, assume that*

$$\frac{u^0(\beta_j)}{c(m-1) + mC_0C_2} > \frac{\|u^0\|_{L^1[\gamma_1,\gamma_2]}}{c(m-1)(\gamma_2-\gamma_1) - (m + m/(m-1))C_0TV(u_x^0)} > 0, \quad j = 1,2 \tag{9}$$

holds for some $\beta_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta_2$, *where* $C_0 = \|u^0\|_{L^\infty(R^1)}$ *and* $C_2 = -ess.inf\, u_{xx}^0$. *Then there exist* $t^* > 0$ *and* $x^* \in [\gamma_1, \gamma_2]$ *such that*

$$u(t^*, x^*) = 0 \quad and \quad u(t^*, \beta_j) > 0. \tag{10}$$

Theorem. *Under Conditions A and B, there exists* $T > 0$ *such that*

$$(v^{m-1})_x(t, \ell(t) + 0) > 0 \quad for \quad 0 \leqq t \leqq T \tag{11}$$

and the left interface $\ell(t)$ *satisfies*

$$\frac{d}{dt}\ell(t) = -\frac{m}{m-1}(v^{m-1})_x(t, \ell(t) + 0) + \frac{c(m-1)}{(v^{m-1})_x(t, \ell(t) + 0)} \tag{12}$$

for $0 < t < T$.

これらの定理の証明は，差分解のいくつかの評価式，収束定理と比較定理を使って行なった。

本講演では，サポートの分離問題（2次元問題を含む）などについての数値実験の結果も示す予定である。なお，2次元問題に対する差分法は，1次元問題の我々の差分法と同様の考え方で構成したが，現在のところ，収束性などの結果は得られていない。

また，サポートの分離問題に関して，いくつかの初期関数について，我々が得た十分条件(9)と数値実験の対比も行なう。なお，前ページの数値実験の例は，(9) を満足する場合であることに注意する。従って，定理より，サポートは分離することが分かる。

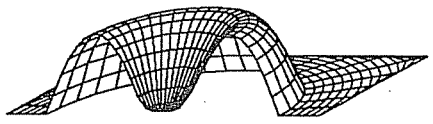


図3　2次元問題の数値実験例
中心部を見易くするため，$y \geqq 0$ 上での解を表示した。サポートに穴が空いていることが観測される。

Non-trivial linear systems on smooth plane curves
–Menelaos の定理の拡張とその応用

山口大理　加藤崇雄

C を degree d の非特異平面代数曲線とする．このとき，$n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ に対し，C 上に linear system $g_n^{l(n)}$ は存在するが，$g_n^{l(n)}$ は存在しないような $l(n) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ をもとめ，$g_n^{l(n)}$ を特徴付けよという問題がある．これに対し Max Noether は１８８３年に解を与えた，しかし，彼の証明にはギャップがあった（近年，Ciliberto によって正しい証明が与えられた）．このとき，$g_n^{l(n)}$ は以下の定義の意味で very special でない場合，very special であっても trivial な場合がある．

定義．C 上の linear system g_n^r が ***very special*** であるとは $r \geq 1$, $\dim |K_C - g_n^r| \geq 1$ が成り立つこと．不動点をもたない complete very special linear system g_n^r が ***trivial*** であるとは，$g_n^r = |mg_d^2 - E|$, $r = \frac{m^2+3m}{2} - (md-n)$ をみたす非負整数 m と degree $md-n$ の正因子 E が存在すること．

我々は $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ に対し non-trivial linear system $g_n^{r(n)}$ on C は存在するが $g_n^{r(n)+1}$ は存在しないような $r(n)$ を求めることを考える．結果は

定理．g_n^r を C 上の不動点をもたない non-trivial linear system とし，$r = \frac{(x+1)(x+2)}{2} - \beta$ $(x \geq 1, 0 \leq \beta \leq x)$ とあらわす．このとき，$n \geq n(r) := (d-3)(x+3) - \beta$ が成りたつ．

定理の証明は generalized linear systems を用いた Hartshorne による M. Noether の定理の拡張及びその証明法を modify することによってできる．
さらに，この定理の評価が最良であることが分かれば，$r(n)$ が求められる．それを示すためには C 上に不動点をもたない non-trivial linear system $g_{n(r)}^r$ が存在することをいえばよい．そのために，以下に述べる初等幾何で有名な Menelaos の定理の拡張が有効に働く．

定理. L_1, L_2, L_3 は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の直線で共通点をもたないものとする．$D_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} m_{ij}P_{ij}$, $(\sum_{j=1}^{\ell_i} m_{ij} = m, i = 1,2,3)$ を L_i 上の正因子で $D_{i_1} \cap L_{i_2} = \emptyset$ $(i_1 \neq i_2)$ とする．$(x:y:z)$ を L_1, L_2, L_3 が各々 座標軸 $x=0, y=0, z=0$ に対応するような $\mathbb{P}^2$ の座標系とし，P_{ij} の座標が $(x_{ij}:y_{ij}:z_{ij})$ であるとする．このとき，L_i, $(i=1,2,3)$ を成分としてもたない degree m の曲線 Γ で $(\Gamma.L_i) = D_i$ $(i=1,2,3)$ となるものが存在するための必要充分条件は

$$\prod_{j=1}^{\ell_1}\left(\frac{y_{1j}}{z_{1j}}\right)^{m_{1j}} \prod_{j=1}^{\ell_2}\left(\frac{z_{2j}}{x_{2j}}\right)^{m_{2j}} \prod_{j=1}^{\ell_3}\left(\frac{x_{3j}}{y_{3j}}\right)^{m_{3j}} = (-1)^m.$$

である．

いくつかのPorous media方程式(系)の解の存在と挙動

大阪大学理学部　川中子正

Porous media型方程式の解の存在と挙動について考察する。主にL^p-L^∞評価を用いて解析する。

まず次のFast diffusion方程式を考える。

$$(F)\quad \begin{cases} u_t = \Delta(|u|^{m-1}u)+|u|^{p-1}u & \text{in } \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0)=u_0(x)\geq 0 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで、$\max(0, 1-\frac{2}{N}) < m < 1$, $p > m+\frac{2}{N}$, $u_0 \in L^1 \cap L^\infty$ を仮定する。$p_0 := \frac{N(p-m)}{2} > 1$とおく。

命題1　ある定数 $\delta_0 = \delta_0(N,m,p) \in \mathbb{R}^+$ が存在して、$\|u_0\|_{p_0} \leq \delta_0$ なるとき、(F)の解 $u(t;u_0)$ は大域解となり、次を満たす。

$$(1)\quad \|u(t)\|_\infty = O(t^{-N/[2-N(1-m)]}) \text{ as } t\to\infty.$$

[M]には、u_0がある小さな比較関数より小さいとき(1)と同様なことが従うことが示されている。

注意　(1)より $u(t;u_0)$ は $t\to\infty$ のとき Barenblatt解に漸近することが導かれる。

命題1の証明は非退化方程式のL^p-L^∞評価およびエネルギー法を主に用いる。

次に、方程式系の大域解の存在については、半線形方程式系についての[R]の方法を準線形の場合に適用することができることを具体例で示す。

次の例を考える. (これは [R] に $m=n=1$ のときの例がある)

$$(S)\begin{cases} u_t = \Delta(u^m) - uv + w \\ v_t = \Delta(v^n) - uv + w \\ w_t = \Delta(w^l) + uv - w \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+.$$

ここで、$m, n, l \geq 1$ および $u(0), v(0), w(0) \in (L^1 \cap L^\infty)_+$ を仮定する。いま、u に L^p-L^∞ 評価([K])を適用すると、$\forall \lambda, t > 0$ に関して

$$(2)\quad \|u(t)\|_\infty \leq 2\lambda + A(k(\lambda)t)^{-\frac{N}{2\beta}} \|u_0\|_\beta$$
$$A\int_0^t [k(\lambda)(t-s)]^{-\frac{N}{2\gamma}} \|u(s)^p\|_\gamma \, ds$$

が成立する。ここで、$k(\lambda) = m\lambda^{m-1}$, $A = A(N, \beta, \gamma) > 0$.

$U(t) = \max_{\tau \in [0,t]} \|u(\tau)\|_\infty$ などと定義すると、$N \neq 1$ のとき

(2) に $\lambda = \frac{\|u(t)\|_\infty}{4}$, $\beta = \gamma = \frac{N}{2(1-\varepsilon)}$ を代入して

$$(3)\quad U(t)^{1+(m-1)(1-\varepsilon)} \leq C\left[1 + tW(t)^{1-\frac{2(1-\varepsilon)}{N}}\right]$$

を得る。ここで

$$\|w(t)\|_{\frac{N}{2(1-\varepsilon)}} \leq \|w(t)\|_1^{\frac{2(1-\varepsilon)}{N}} \|w(t)\|_\infty^{1-\frac{2(1-\varepsilon)}{N}} \leq C\, W(T)^{1-\frac{2(1-\varepsilon)}{N}}$$

を用いた。$V(t), W(t)$ についても同様な式を得て、結局、

$$W(t)^{1+(l-1)(1-\varepsilon)} \leq C\left[1 + t^a W(t)^b\right]$$

なる不等式を得る。大域解となるための十分条件は

$$1 + (l-1)(1-\varepsilon) > b$$

を満たすような ε がとれることである。

命題2 $l > \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

のもとで、(S) は大域解をもつ.」

文献 [M] K. Mochizuki, Asymptotic behavior of small global solutions to quasi-linear parabolic equations, Preprint

[K] T. Kawanago, C.R. Acad. Sci. Paris 317('93) 821.

[R] Rothe, Lecture Note in Math. 1072('84), Springer.

GL_n の数論的有限部分群について

北岡 良之
名古屋大学多元数理科学研究科

1996 年 1 月 30 日

最初に次の問題を考える。

R を可換環とし、 R 上の n 次対称行列 A、B に対し $A \cong_R B$ を $GL_n(R)$ の適当な元 T によって $A = {}^tTBT$ となることと定義する。これは A、B によって定まる二次形式が変数変換で互いに移り得ると言うことである。問題は

K を代数体、 O_K をその整数環とし、 A、B を対称な有理整数行列とする。このとき $A \cong_{O_K} B$ が成り立つとすると A、B の間にどんな関係があるか?

例を挙げよう。今 S_n として n 次の有理整数対称行列で正定値、行列式の値 $= 1$、且つ対角成分は偶数となるもの全体を考える。このとき $S_n \neq \phi$ と n が 8 の倍数であることは同値であり $\sharp\{S_8/\cong_{\mathbf{Z}}\} = 1, \sharp\{S_{16}/\cong_{\mathbf{Z}}\} = 2, \sharp\{S_{24}/\cong_{\mathbf{Z}}\} = 24, \sharp\{S_{32}/\cong_{\mathbf{Z}}\} > 10^6$ となる。 K を虚二次体とすると全ての n に対し $\sharp\{S_n/\cong_{O_K}\} = 1$ となる。即ち、O_K 上では全て互いに変数変換で移りあう。一方 K を実二次体とすると全ての n に対し $\sharp\{S_n/\cong_{O_K}\} = \sharp\{S_n/\cong_{\mathbf{Z}}\}$ となる、即ち O_K 上で変数変換で互いに移り得るなら元々 $\mathbf{Z}$ 上で移り得る。このような事実をもっと一般に扱いたいというのが問題であるが色々とやってみると次のように問題を書き直すのがよいと思われる。

問題。K を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の有限次ガロア体とし Γ をそのガロア群とする。G を $GL_n(O_K)$ の有限部分群で Γ の作用で閉じているものとする。このとき $L = \mathbf{Z}[e_1, \cdots, e_n]$ を階数が n の格子とし $O_K L$ に G の元 $g = (g_{ij})$ を $g(e_i) = \sum_{j=1}^n g_{ij} e_j$ で作用させる。このとき L の直和分解 $L = \oplus_{i=1}^k L_i$ で全ての $g \in G$ に対し 1 の巾根 $\epsilon_i(g)(1 \leq i \leq k)$ と置換 $s(g)$ で $\epsilon_i(g) g L_i = L_{s(g)(i)}$ を満たすものが存在するか？

今までに次のようなことがわかっている.

定理。Γ が巾零群、または $n = 2$ なら問題の答えは肯定的である。

証明にはかなり数論的な事実を使わなければならないし、$n = 3$ の時も完全にはわかっていない。又基礎体を $\mathbf{Q}$ から一般の代数体に持ち上げたときには問題自身をどのように捉えるべきかすらわかっていない。

保型形式に伴うp進L関数の微分の値について

都立大・理　栗原将人

保型形式に伴うp進L関数はAmice, Vélu, Visik, Mazur Tate, Teitelbaumによって構成された。特にMazur Tate Teitelbaumは楕円曲線の複素L関数のBirch Swinnerton-Dyer予想の一般化のp進類似を考えた。$f=\sum a_n q^n$ をlevel N, weight k のnewform, Hecke operatorに関するeigenformとする。kを偶数として, p進L関数 $L_p(f,s)$ の $s=\frac{k}{2}$ での様子を考える。普通は $L_p(f,s)$ の $s=\frac{k}{2}$ でのorderは複素L関数 $L(f,s)$ の $s=\frac{k}{2}$ でのorderに等しいと考えられるが, 例外的場合には前者は後者より1大きいと考えねばならないことをMazur Tate Teitelbaumは発見した。これはp進L関数のinterpolation propertyが

(p進L) = (Euler積もどき) × (複素L)

の型をしており, このEuler積もどきが消える可能性があるからである。このEuler積もどきが消えるとき exceptional caseであると言う。たとえば土の状況ではpがNを丁度一回割り, $a_p=p^{(k-2)/2}$ のとき exceptional caseである。Mazur, Tate, Teitelbaum, Fontaineはこのexceptional caseに

$$L_p'(f,\tfrac{k}{2})=\mathcal{L}\cdot\frac{L(f,\tfrac{k}{2})}{\Omega_f}$$

なる型の公式を予想した。ここに Ω_f はperiod, $\mathcal{L}$ はFontaineにより定義された $\mathcal{L}$-invariantとよばれるものである。ここではこの予想の肯定的解決について述べる。これは加藤和也氏, 辻雄氏との共同研究である。

なお $k=2$ のときはこれはGreenberg, Stevensによって既に証明されている。$k>2$ のときは f に伴うGalois表現がpでordinaryでないため状況はまったく異なっている。(これがMazur Tate Teitelbaumが $\mathcal{L}$-invariantを定義できなかった主原因であり, その後Fontaineにより p進Hodge理論を使った定義がなされたのである。) 我々はGreenberg Stevensとはまったく異なる方法で証明を行う。Greenberg Stevensの方法が一言で言って尖田理論的であるのに対し, 我々の方法はp進Hodge理論的である。

簡単のため f の係数 a_n はすべて有理数であると仮定する。f に付随するp進Galois表現 V を考える。ここに V は $V\times V\to\mathbb{Q}_p(1)$ なる

pairing が おおように normalize しておく。 $D = D_{st}(V)$ を Fontaine の monodromy module とする。 D は次元 $\mathbb{Q}_p$-vector space で Frobenius operator φ, monodromy operator N を持つ。 $\varphi(e) = \frac{1}{p} e$ $\varphi(e') = e'$ $N(e) = 0$ $N(e') = e$ なる base e, e' を持つとする。 また D は filtration $\mathrm{Fil}^{-\frac{k}{2}} =$ 全体, Fil^{i} は次元 $(-\frac{k}{2} < j < \frac{k}{2})$ $\mathrm{Fil}^{k/2} = 0$ を持つ。 Fil^{0} が $e' - \mathcal{L} e$ で生成されるとする。 $(\mathcal{L} \in \mathbb{Q}_p)$ この $\mathcal{L}$ が Fontaine による $\mathcal{L}$-invariant の定義である。

以下 証明の重要なポイントを2つ述べる。まず p進L関数を Perrin-Riou による写像の像として代数的にとらえることである。 $p \neq 2$ とする。 $K_0 = \mathbb{Q}_p$ $K_n = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ (ζ_{p^n}: 1の原始 p^n 乗根), $K_\infty = \bigcup K_n$, $G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty / K_0)$ とおく。 $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ を $\mathbb{Z}_p[\Delta][[T]]$ $(\Delta = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p))$ と同一視する。 M を V の Galois stable lattice, $\mathcal{H}_r$ を $\mathbb{Q}_p[\Delta][[T]]$ の元で $o((\log(1+T))^r)$ なる全体, $\mathcal{H}_\infty = \bigcup \mathcal{H}_r$ とおく。 このとき Perrin-Riou の写像

$$\mathcal{H}_\infty \otimes \varprojlim H^1(K_n, M) \longrightarrow \mathcal{H}_\infty \otimes D/ND$$

なる $\mathcal{H}_\infty$-準同型が定義できるが、 Kato の構成した zeta elements $(z_n) \in \varprojlim H^1(K_n, M)$ のこの写像による像が本質的に p進L関数になることを示すことができる。

次に問題となるのは p進L関数の微分の値をどうとらえるかであるが、これは $\exp(e')$ と z_0 の cup積 $(\exp(e'), z_0)$ としてとらえることができることを示す。 ここに cup積とは

$$H^1(K_0, V) \times H^1(K_0, V) \longrightarrow H^2(K_0, \mathbb{Q}_p(1)) \simeq \mathbb{Q}_p$$

であり $\exp : D \to H^1(K_0, V)$ は Bloch Kato の exponential である。 これの cup積は $\mathcal{L}$-invariant を使っても理解することができ、望む公式が得られるのである。

結晶成長におけるステップのパターン

上羽牧夫　(名古屋大学理学部物理学教室)

低温の結晶の表面にはファセットと呼ばれる原子レヴェルで見て平らな面があり，そこにできたステップと呼ばれる1原子層の段差が運動することで結晶成長が起こる．ステップは2次元空間での界面である．このステップの成長パターンがどのようにして決まるかについていくつかの例[1,2]を議論する．

ステップの性質を特徴づけるのは，その方位θに依存した単位長さあたりの自由エネルギー$\beta(\theta)$である．ステップのループに囲まれた結晶原子層は，平衡状態では，面積一定でループの自由エネルギー$\int \beta ds$を最小にする形をとる．この条件は，$\tilde{\beta}(\theta)\kappa = const.$ ($\tilde{\beta}(\theta) \equiv \beta(\theta) + \beta''(\theta)$, $\kappa \equiv d\theta/ds$) である．

ステップのループで囲まれた結晶原子は，結晶表面を拡散しながら運動している表面吸着原子に比べて$\Delta\mu$だけ自由エネルギーが低く，これが結晶成長の駆動力となる．ステップの前進速度は$\Delta\mu/\Omega - \tilde{\beta}\kappa$ (Ωは1分子の面積) に比例するが，その比例係数ηはステップの方位によって異なる．ループが十分大きくなれば，時間に比例して大きくなる定常成長形は，角の部分を除いて，$\eta(\theta)$のみによって平衡形と同じように決められる[3]．

上の二つの例では，形はステップの局所的な条件で決められ，単純で変化しない．しかし成長が起こるためには一般に原子が拡散によって運ばれてくることが必要である．この場合には，ステップの局所的な条件だけでは形は決まらず，また形が時間とともに複雑に変化することが起こりうる．

表面拡散場の中で成長する直線状のステップは，成長速度が速いと不安定になって特徴的な波長を持つ揺らぎが急速に成長する．不安定点の近くでは，このステップは蔵本Sivashinsky方程式$\partial_t y + \partial_{xx} y + \partial_{xxxx} y + (\partial_x y)^2 = 0$ で記述され，カオス的振舞いをする．このカオスを押さえるには強い異方性が必要である．また直線ステップが1次元的に並んだ系 (微斜面) でも同じような不安定化が見られるが，この場合には反転対称性を破る強い分散項の存在が，カオスを押さえて周期性を持った定常パターンを作る[4]．

参考文献

1) 上羽牧夫，斎藤幸夫: 日本物理学会誌 第49巻 第8号 (1994年) 636.

2) 上羽牧夫: 日本結晶成長学会誌 第21巻 第5号 (1994年) S9.

3) M. Uwaha, J. Cryst. Growth **80** (1987) 84.

4) M. Sato and M. Uwaha, Phys. Rev. B **51** (1995) 11172; Europhys. Lett. **32** (1995) 639.

調和次元と調和率

大同工大　　瀬川重男

Rを O_G(Green 関数が存在しない開 Riemann 面の class) に属する Riemann 面, R_0を R の正則部分領域 (i.e. R_0は相対 compact で, ∂R_0は有限個の解析閉曲線からなり, $R-\overline{R}_0$ は連結) とし, $V=R-\overline{R}_0$とおく. $\mathcal{P}(V)$ を V上の非負値調和関数で∂Vで境界値 0 を持つもの全体とする. 線型空間 $\{h_1-h_2 : h_1, h_2 \in \mathcal{P}(V)\}$ の次元を $\dim \mathcal{P}(V)$ と表し Vの**調和次元**と呼ぶ. $\dim \mathcal{P}(V)$ は R_0の取り方に依らない: R_1, R_2を Rの正則部分領域とするとき, $\dim \mathcal{P}(R-\overline{R}_1)=\dim \mathcal{P}(R-\overline{R}_2)$.

次に, O_Gに属する開 Riemann 面 Rでその正則部分領域 R_0に対して $\dim \mathcal{P}(R-\overline{R}_0)=1$ となるものの class を $\mathcal{M}$ とする. Martin compact 化の言葉を借りれば, $R\in\mathcal{M}$ は $R\in O_G$ かつ Rの Martin 境界が唯 1 点から成ることと同値である. これに関して, 次の Heins の結果は興味深い.

定理. Rを開 Riemann 面, $\{R_n\}$ を Rの近似列で $R_{2n}-\overline{R}_{2n-1}(:=A_n)$ が 2 重連結領域になるものとする. A_nの調和率を $\operatorname{mod} A_n$とおく. このとき

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mod} A_n = \infty$$

ならば, $R\in\mathcal{M}$ である.

上の定理の条件をみたす近似列 $\{R_n\}$ が存在するような開 Riemann 面の class を O_S''と表すとき, 上の定理は $O_S''\subset\mathcal{M}$ を意味する. 本講演では, 上記定理の逆が成立しないこと, 即ち $O_S''<\mathcal{M}$(strict inclusion) であること及び上記定理において条件 (*) を

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{mod} A_n)^{\alpha} = \infty$$

$(0<\alpha<1)$ に置き換えられるどうかについて論ずる.

Jordan-Brouwer の定理の逆とその関連話題

１９９６年2月7日
佐伯　修（広島大学理学部）

以下の仕事（の大部分）は、ブラジルの Carlos Biasi 氏との共同研究である。
まず次の Jordan-Brouwer の定理を思い出そう。

Jordan-Brouwer の定理 $f : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ を位相的埋め込みとすると、$\mathbf{R}^{n+1} - f(S^n)$ はちょうど２つの連結成分からなる。

ここでは、上の定理の逆が成り立つかどうかを考えよう。具体的には、$f : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ を連続写像で、$\beta_0(\mathbf{R}^{n+1} - f(S^n)) = 2$ （以後、β_0 で連結成分の個数を表す）なるものとすると、f は埋め込みか、という問題を考えてみる（この問題に最初に取り組んだのは [3] であると思われる）。これは容易にわかるように、f を始めから C^∞ 級のはめこみとしても正しくない。そこで、考える写像にある程度ジェネリックな条件をつけてみることを考えよう。

M, N をそれぞれ C^∞ 級多様体で、$\dim M < \dim N$ なるものとする。C^∞ 級写像 $f : M \to N$ に対して、その 1-jet extension $j^1 f : M \to J^1(M, N)$ を考える（ここで、$J^1(M, N) = \{(x, y, \alpha) | x \in M, y \in N, \alpha : T_x M \to T_y N \text{ は linear}\}$, $j^1 f(x) = (x, f(x), df_x), x \in M$, である）。今、$J^1(M, N)$ の部分多様体 $\Sigma^i = \{(x, y, \alpha) | \dim \ker \alpha = i\}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して、$j^1 f$ がすべての Σ^i に横断的に交わり、かつ、任意の $y \in N$ に対して $df_{x_1}(T_{x_1} M), \cdots, df_{x_l}(T_{x_l} M)$ $(f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_l\})$ が $T_y N$ において一般の位置にあるとき、f を **generic** と呼ぶことにする（[7] 参照）。たとえば、正規交叉のはめこみは generic である。また、generic な写像全体は、写像空間 $C^\infty(M, N)$ の中で（Whitney の C^∞ 位相の意味で）dense であることに注意する。

上のクラスの写像に対しては、次のように、Jordan-Brouwer の定理の逆が成立する。

定理（[6]） M, N が向き付け可能、連結で、M がコンパクトであるとする。また、$n = \dim M = \dim N - 1$ とする。さらに、$H_1(N; \mathbf{Z})$ の各元の位数が有限であるか、または、$f_*[M] \in H_n(N; \mathbf{Z})$ の位数が有限であると仮定する（ここで、$[M] \in H_n(M; \mathbf{Z})$ は M の基本類）。このとき generic な写像 $f : M \to N$ に対して、$\beta_0(N - f(M)) = 2$ となることと f が C^∞ 級埋め込みとなることは同値である。

系 Generic な写像 $f : S^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ に対して、$\beta_0(\mathbf{R}^{n+1} - f(S^n)) = 2$ となることと f が C^∞ 級埋め込みとなることは同値である。

定理の証明は以下の二つの補題を用いてなされる。

補題1 ([7]) $f : M \to N$ を generic とすると、$\overline{M(f)} = \overline{M_2(f)} = M(f) \cup \Sigma(f)$ が成り立つ。ここで、$\Sigma(f) = \{x \in M | \text{rank} df_x < n\}, M(f) = \{x \in M | f^{-1}(f(x)) \neq \{x\}\}, M_2(f) = \{x \in M | f^{-1}(f(x)) = \{x, y\}, x \neq y, df_x$ と df_y は injective$\}$ である。

定義 C^∞ 級写像 $f : M \to N$ に対して、$y \in N$ が **normal crossing point of multiplicity** m であるとは、$f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_m\}$ $(x_i \neq x_j, i \neq j)$ でかつ、df_{x_i} が injective であって、$df_{x_1}(T_{x_1}M), \cdots, df_{x_m}(T_{x_m}M)$ が T_yN で一般の位置にあるときを言う。

補題2 ([8]) $f : M \to N$ を、定理の (homological な) 仮定を満たす C^∞ 級写像とする。もし normal crossing point of multiplicity m が存在すれば、$\beta_0(N - f(M)) \geq m + 1$ である。

補題2は、交叉の理論を使って証明することができる。

では、定理の証明の概略を述べよう。まず、f が C^∞ 級埋め込みのとき $\beta_0(N - f(M)) = 2$ となることは、homology theory を使って容易に示すことができる (Jordan-Brouwer の定理と、本質的には同じである)。逆に $\beta_0(N - f(M)) = 2$ で f が C^∞ 級埋め込みでないとしよう。すると、$M(f) \neq \emptyset$ または $\Sigma(f) \neq \emptyset$ なので、補題1より $M_2(f) \neq \emptyset$ がわかる。よって補題2より、$\beta_0(N - f(M)) \geq 3$ となるが、これは矛盾である。したがって、f は C^∞ 級埋め込みでなければならない。

なお、類似の結果が様々な状況で得られている ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9] 参照)。また上の結果は、別の方法 (Čech homology, topological dimension 等) を使うことによって、codimension が1でない場合にも拡張できることにも注意しておく (この場合、像の補空間のベッチ数で、もとの写像が埋め込みかどうかがわかる。[4, 5, 6] 参照)。

参考文献

[1] C. Biasi, W. Motta and O. Saeki, *A note on separation properties of codimension-1 immersions with normal crossings*, Topology Appl. **52** (1993), 81–87.

[2] C. Biasi, W. Motta and O. Saeki, *A remark on the separation by immersions in codimension-1*, Topology Appl. **61** (1995), 179–186.

[3] C. Biasi and M. C. Romero Fuster, *A converse of the Jordan-Brouwer theorem*, Illinois J. Math. **36** (1992), 500–504.

[4] C. Biasi and O. Saeki, *On the Betti number of the image of a codimension-k immersion with normal crossings*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3549–3554.

[5] C. Biasi and O. Saeki, *On the self-intersection set and the image of a generic map*, preprint, 1995.

[6] C. Biasi and O. Saeki, *On the Betti number of the image of a generic map*, preprint, 1995.

[7] F. Ronga, *'La classe duale aux points doubles' d'une application*, Compositio Math. **27** (1973), 223–232.

[8] O. Saeki, *Separation by a codimension-1 map with a normal crossing point*, Geom. Dedicata **57** (1995), 235–247.

[9] O. Saeki, *A converse of the Jordan-Brouwer theorem for quasi-regular immersions*, to appear in Illinois J. Math..

THE SPACE OF HARMONIC MAPS FROM 2-SPHERES TO THE UNIT N-SPHERE

MOTOKO KOTANI

Recently there has been much advance in the study of the space of all harmonic maps from a compact Riemann surface M into a Riemann manifold N as well as in study on individual harmonic maps. The space $Harm_d(S^2, S^N)$ of harmonic maps from S^2 to S^N with fixed degree d is shown to be path-connected if $N \geq 3$ ([V],[L] for $N = 4$, [K] for general $N \geq 3$) and its fundamental group is computed in [FGKO]. Similar results have been obtained for harmonic maps from S^2 to many other target manifolds [Cr] [GO],[GMO]. Nevertheless, it seems that the structure of the space $Harm_d(S^2, S^N)$, which is a fundamental object, still is not sufficiantly well understood. The present paper is intended to be a step toward a better understanding of the space.

It is easy to observe that the proofs of the above-mentioned known results concerning the spaces of harmonic maps share the following common technique: For an arbitrary harmonic map as above, there exists a smooth deformation given as the gradient flow of a Morse-Bott function over the corresponding twister space. The deformation reduces the codimension in the target space while it respects the degree and the energy. By using the deformation, important information,like the connectedness or the fundamental group, of the spaceis obtained out of the information of the spaces of harmonic maps of lower codimension. In this way, an induction on codimension proceeds and we get the results mentioned above. We, however, need more detailed information on each step of deformation in order to understand the space better. In other words, we should know exactly which elements come from the above deformation and explicitly describe the subset of which consists of those deformed maps. In this talk we study such subsets in the case of $Harm_d(S^2, S^N)$.

Let $L_r = \{x$ admits a smooth deformation $x_t : S^2 \longrightarrow S^{n+2r}$ of harmonic maps of degree d, $\lim_{t\to\infty} x_t = x\} \subset Harm_d(S^2, S^n)$. We will characterize L_r in terms of the eigenfunction of the Laplacian Δ and show the space L_r is equal to the space P_r of harmonic maps which have exactly r pairs of extra eigenfunctions. This is conjectured by Ejiri and proved in the case of $r = 1$ [E1],[E2]. The space P_r was studied in [EK1],[EK2] through the study of the Gauss maps of the complete totally isotropic minimal surfaces in $\mathbf{R}^{2n+1}$ with only planar ends. It was shown, among others, that $P = \cup_r P_r$ has an algebraic structure and that it has codimension greater than one. In this paper, we will reconstruct the space $Harm_d(S^2, S^{n+2r})$ by $L_r = P_r$ and the deformations.

Theorem 1.

Suppose $x : S^2 \longrightarrow S^{2m}$ has r pairs of extra eigenfunctions. We can construct a smooth deformation (explicitely)of full harmonic map $x(t) : S^2 \longrightarrow S^{2(r+m)}(1)$ preserving degree d and converging to x as t goes ∞.

Theorem 2.

The space $P_r = \{x : S^2 \longrightarrow S^{2m}$ *admits* r *pairs of extra eigenfunctions* $\}$ *is equal to the space of all* $x : S^2 \longrightarrow S^{2m}$ *which admit the smooth deformations as in TheremA.*

Corollary.

A harmonic map $x : S^2 \longrightarrow S^{2m}$ *of degree* d *has at most* $\frac{\sqrt{8d+1}-2m-1}{2}$ *extra eigenfunctions. Especially,* x *has no extra eigen function when* $d = \frac{m(m+1)}{2}$.

Corollary.

$$\dim Harm_d(S^2, S^{2(m+r)}) = \dim Harm_d(S^2, S^{2m}) + (r - \mathrm{codim} L_r) + (r+m)^2 - m^2,$$

$\mathrm{codim}\ L_r - r$ *does not depends on* r.

Remark. If we prove $\mathrm{codim} L_r = r$ for some r, then we prove $\dim Harm_d(S^2, S^{2N}) = 2d + N^2$, which is a conjecture in [V].

Proof.

If x_0 has r extraeigenfunctions, then we construct a harmonic map x_t into $S^{2(m+r)}$ by using G_i and $A_i \in \mathbf{C}^{2m+1}$ for $i = 1, \cdots, r$, which converges to $x_0 \in S^{2m}$. Thus we obtain

$$\begin{aligned}
&\dim Harm_d(S^2, S^{2(m+r)}) \\
&= \dim \cup_{x_0 \in L_r} \{x_t : S^2 \longrightarrow S^{2(m+r)}, \lim_{t\to\infty} = x_0\} \\
&= \dim L_r + dim\{x_t : S^2 \longrightarrow S^{2(m+r)}, \lim_{t\to\infty} = x_0 \text{ for a fixed } x_0\} \\
&= \dim Harm_d(S^2, S^{2m}) - \mathrm{codim} L_r + r(2m+1+r) \\
&= \dim Harm_d(S^2, S^{2m}) + (r - \mathrm{codim} L_r) + (r+m)^2 - m^2.
\end{aligned}$$

References

[B] J.L.M.Barbosa, *On minimal immersions of* S^2 *into* $S^{2m}(1)$, Trans.Amer.Math.Soc. 210 (1975), 75-105.

[Ca] E. Calabi, *Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres*, J. Diff. Geom. 1 (1976), 111-125.

[Cr] T.A.Crawford. *The space of harmonic maps from the 2-spheres to complex projective space*, preprint, McGill University. (1993).

[E1] N.Ejiri. *Minimal deformation of a nonfull minimal surface in* $S^4(1)$, Compositio.Math. 90 (1994), 183-209.

[E2] N.Ejiri, *The boundary of the space of full harmonic maps of* S^2 *into* $S^{2m}(1)$ *and extra eigenfunctions*, preparation.

[EK1] N.Ejiri and M.Kotani, *Index and flat ends of minimal surfaces*, Tokyo J. Math. 16 (1993), 37-48.

[EK2] N.Ejiri and M.Kotani, *Minimal surfaces in* $S^{2m}(1)$*with extra eigenfunctions*, Quart. J. Math. 43 (1992), 421-440.

[GMO] M.A.Guest, M.Mukai and Y.Ohnita, *On the topology of spaces of harmonic 2-spheres in symmetric spaces*, preparation.

[GO] M.A.Guest and Y.Ohnita, *Group actions and deformation for harmonic maps*, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), 671-704.

[L] B.Loo, *The space of harmonic maps of* S^2 *into* S^4, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989).

[K] M.Kotani, *Connectedness of the space of minimal 2-spheres in* $S^{2m}(1)$, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 803-810.

[FGKO] M.Furuta, M.A.Guest , M.Kotani and Y.Ohnita, *On the fundamental group of the space of harmonic 2-spheres in the n-sphere*, Math. Z. 215 (1994), 503-518.

Toho University

E-mail address: kotani@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp

Riemann面のある初等的構成法と第2種基本Abel微分
（大場清氏との共同研究）

講演要旨

No.

DATE '96/2.13/水

橋本義武（大阪市大理）

Gauss平面$\mathbb{C}$上に，2個ずつ対になっている線分をg対描いてみる．ただし，対になっている線分どうしは，互いに平行で長さが等しいとする．

$\mathbb{C}$をこれらの線分に沿って切り開き，対になっているスリットどうしを平行移動で貼り合せ，さらに無限遠に1点をつけ加えると，種数gのコンパクトRiemann面ができあがる．

この構成のパラメータの数を勘定してみよう．

線分の1対ごとに3個の複素数があり，一方全体に定数をかける・または足すことで，できる1点つきRiemann面の複素構造は変わらない．したがってパラメータは$3g-2$個ある．

ところがこれは，1点つきRiemann面のモジュライの次元に一致する．そこでわれわれ（大場・橋本）は，この構成がRiemann面のモジュライの研究に有効なのではないかと考え，線分の対のつくる平行四辺形が変形する様を「井」の字を崩してゆくのにたとえて，これを「井桁崩し」と名づけた．

No.
DATE / /

この講演では，「井桁崩し」の与えるRiemann面の族に対する小平・Spencer写像が全射であることを示す。これは小平-Spencerの完備性の定理により，「井桁崩し」の与える族が十分広いことを意味する．また逆に，一般のRiemann面から出発して「井桁崩し」がどこまで再現できるか，について現在わかっている事実を紹介する。そして，任意の1点つきRiemann面が，「井桁崩し」の一般化によってGauss平面の切り貼りから構成されるのではないかという予想について述べる．

変数次数の強楕円型擬微分作用素を生成作用素する Markov 過程の構成とその性質について[1]

菊地光嗣　（静岡大工）

1993 年の N.Jacob, H.Leopold の論文 [1] には、$0 < \sigma(x) \leq 2$ を満たし、Schwarz's class の関数と定数との和で表わされる関数 σ に対して、$<\xi>^{\sigma(x)} = (\sqrt{1+|\xi|^2})^{\sigma(x)}$ を symbol とする擬微分作用素 P が取り扱われていて、この擬微分作用素 P を生成作用素にもつ Feller semi-groups の存在が示されている。方法は、その symbol $<\xi>^{\sigma(x)}$ が ξ の関数としては negative definite な関数であるので、Courrège の結果より、作用素 $-P$ は $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ から Schwarz's class $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ への positive maximum principle を満たす線形作用素であることから、Yosida-Hille-Ray の定理に持ち込むものである。この定理を適用するにあたって、ある $\lambda \geq 0$ に対し、$C_\infty(\boldsymbol{R}^d)$ の dense な部分空間が存在$-P_\lambda = -P + \lambda$ が $-P$ の定義域 $\mathcal{D}(P)$ からその部分空間の上への写像となっていることを示す必要があるが、彼らは適当な Sobolev 空間を定義し、$-P_\lambda$ がこの Sobolev 空間における作用素であることを用いて証明している。

ここでは、Sobolev 空間の定義を少し変え、あるクラスの擬微分作用素が Markov 過程の生成作用素となることを報告する。更に、この Markov 過程 は transition density を持つことも報告したい。

まず最初に、ここで取り扱う変数次数の擬微分作用素のクラスを定義する。

定義 1 実数値をとる $\sigma \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ と $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ をみたす定数 ρ、δ があたえられている。
(1) $p(x,\xi) \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^d)$ が任意の multi-indices α, β に対して、定数 $C_{\alpha,\beta} > 0$ が存在して、全ての点 $(x,\xi) \in \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^d$ で $|\partial_\xi^\alpha(-i\partial_x)^\beta p(x,\xi)| < C_{\alpha,\beta} <\xi>^{\sigma(x)-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$ を満たしているとき $p(x,\xi)$ は $S^\sigma_{\rho,\delta}$ に属するという。
(2) $u \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$, $p \in S^\sigma_{\rho,\delta}$ に対し, $Pu(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\boldsymbol{R}^d} e^{ix\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \in \mathcal{S}(\boldsymbol{R}^d)$ と定義される P を クラス$\mathfrak{P}^\sigma_{\rho,\delta}$ の擬微分作用素と呼び、$P = p(X, D_x)$ とあらわす。

このクラスに関する楕円型及び強楕円型擬微分作用素を定義する。

定義 2 (1) $P \in \mathfrak{P}^\sigma_{\rho,\delta}$ に対して、ある $C_0 > 0$, $R > 0$ が存在し、
$|p(x,\xi)| \geq C_0 <\xi>^{\sigma(x)}$, $(|\xi| > R)$ をみたすとき、P を楕円型であるという。
(2) ある $C_1 > 0$, $M > 0$ が存在して、$\mathrm{Re}\, p(x,\xi) \geq C_1|\xi|^{\sigma(x)}$, $(|\xi| > M)$ を満たすとき、P を強楕円型と呼ぶ。

$\sigma(x)$ を定義 1と同じ条件を満たす関数とし、σ 次の Sobolev 空間をつぎのように定義する。

$$H^{\sigma(\cdot)}(\boldsymbol{R}^d) = \{u \in H^{-\infty}(\boldsymbol{R}^d);\ <D_x>^{\sigma(X)} u \in L^2(\boldsymbol{R}^d)\}$$

[1]根来　氏（静岡大工）との共同研究

ここに使われている $< D_x >^{\sigma(X)}$ は $< \xi >^{\sigma(x)}$ を symbol とする擬微分作用素であるが、これが楕円型作用素であることを使うと、各 $x \in \boldsymbol{R}^d$ において $\sigma_2(x) \leq \sigma_1(x)$ となる 2 つの実数値関数 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ に対して $H^{\sigma_1(\cdot)}(\boldsymbol{R}^d) \subset H^{\sigma_2(\cdot)}(\boldsymbol{R}^d)$ が得られる。とくに $H^{\sigma(\cdot)}(\boldsymbol{R}^d) \subset H^{\underline{\sigma}}(\boldsymbol{R}^d)$ (ただし、$\underline{\sigma} = \inf \sigma(x)$) であることに注意をして、内積を

$$(u,v)_\sigma = \int_{\boldsymbol{R}^d} (< D_x >^{\sigma(X)} u)(x)\overline{(< D_x >^{\sigma(X)} v)(x)}dx + \int_{\boldsymbol{R}^d} (< D_x >^{\underline{\sigma}} u)(x)\overline{(< D_x >^{\underline{\sigma}} v)(x)}dx$$

と定義すると、$H^{\sigma(\cdot)}(\boldsymbol{R}^d)$ は Hilbert 空間となり、$\mathcal{S}$ はその空間で dense な部分集合になている。更に、$P \in \mathit{\Psi}^\sigma_{\rho,\delta}$ が楕円型であるならば

$$H^{\sigma(\cdot)}(\boldsymbol{R}^d) = \{u \in H^{-\infty}(\boldsymbol{R}^d); Pu \in L^2(\boldsymbol{R}^d)\}$$

もいえる。この Sobolev 空間とこれらの性質を用いれば以下の定理が示される。

定理 1 $\sigma \in \mathcal{B}^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ かつ $0 < \inf \sigma \leq \sigma \leq \sup \sigma \leq 2$ をみたしている。いま、$P \in \mathit{\Psi}^\sigma_{\rho,\delta}$ が強楕円型擬微分作用素で、その symbol p が ξ の関数として negative definite な関数であるとき、この作用素 P を生成作用素とする Markov 過程が存在する。

定理 2 $e(t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \{\partial_t + P\}u = f & \text{in } (0,T) \\ \lim_{t \to 0} u(t) = \phi & \text{in } L^2(\boldsymbol{R}^d) \end{cases}$$

の基本解の symbol としたとき

$$K(t,x,y) = (2\pi)^{-d} \int_{\boldsymbol{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} e(t,x,\xi)d\xi$$

$(t \in (0,\infty),\ x,y \in \boldsymbol{R}^d)$ は定理 1 の Markov 過程の transition density である。

定理 3 各 $x \in \boldsymbol{R}^d$ に対して
(1) $\sigma(x) < \gamma \leq 2$ のとき、$\boldsymbol{P}_x(\lim_{t \to 0} |X(t) - x|/t^{1/\gamma} = 0) = 1$
(2) $\sigma(x) > \gamma > 0$ のとき、$\boldsymbol{P}_x(\limsup_{t \to 0} |X(t) - x|/t^{1/\gamma} = \infty) = 1$

参考文献

[1] Jacob, N., Leopold, H. G.: Pseudo differential operators with variable order of differentiation generating Feller semigroups. Integral Equations and Operator Theory **17** (1993), 544-553

[2] Negoro, A.: Stable-like process : construction of the transition density and the behavior of sample paths near $t = 0$. Osaka J. Math. **31**(1994), 189-214

Kink of XXZ models

東京都立大学　松井　卓

格子上の量子系　Ferromagnetic XXZ model の非自進不変な（無限自由度）基底状態（Kinkとよぶ）についての結果を解説した。

無限自由度での基底状態の C*力学系としての定式化を説明した後に次の最近の結果をのべた。

$$H = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}^d \\ |i-j|=1}} \left\{ 1 - \sigma_z^{(i)}\sigma_z^{(j)} - \frac{1}{\Delta}\left(\sigma_x^{(i)}\sigma_x^{(j)} + \sigma_y^{(i)}\sigma_y^{(j)} \right) \right\}$$

で　$\Delta > 1$　の時

1. 基底状態の分類

(i)　$d=1$　では　4つのユニタリー同値類にわかれる。

(ii)　$d\geq 2$　で　kink は次ぎ積状態となる。

2. スペクトルギャップ

(i)　$d=1$ で kink のスペクトルはギャップを基底状態とその他のスペクトルの間にもつ。

(ii)　$d\geq 2$ でこのギャップはとじる。

3　$d=1$ で　$SU_q(2)$ 対称性は　kink の GNS表現空間では　ユークリッドの運動群 E_2 に縮約（contraction）される。

Seminar on Feb.16,1996

Quantum cohomology ring of Calabi-Yau hypersurfaces and GKZ hypergeometric systems

富山大・理 細野 忍

要旨：

超弦理論のコンパクト化の問題から3次元 Calabi-Yau 多様体の量子コホモロジー環の存在が予言され、それの位相的場の論理論と Gromov-Witten 不変量に基づいた数学的定式化が関心を集めている。ここでは、射影空間内の超平面として与えられる Calabi-Yau 多様体の量子コホモロジー環の一般的構成を行う。その際、鍵となるのは正則3形式が作る Gauss-Manin 系の平坦座標 (flat coordinate) である。

重みつき射影空間内の Calabi-Yau 超平面は、どれほど存在するか？この問題は1次元の場合、楕円型特異点の分類に等しく3通りに分類され、また2次元では、K3特異点の分類になり Reid,Yonemura によって 96 通りに分類されている。3次元 Calabi-Yau 超平面では物理学者 Klemm-Schimmrigk によって 7555 通りであることが調べられている。

こうした、3次元 Calabi-Yau 超平面の分類の過程でしだいに発見された重要な対称性の一つが mirror 対称性である。それは、3次元 Calabi-Yau 多様体が、対 (M,W) を作って現れる現象で、M と W はそれらの Hodge 数について

$$h^{1,1}(M) = h^{2,1}(W) \ , \ h^{2,1}(M) = h^{1,1}(W) \tag{1}$$

の関係を持つ。その後、Batyrev は toric geometry に基づいて mirror 対 (M,W) を組み合わせ論的な (reflexive) 凸多面体の双対性 (Δ, Δ^*) によって書き表している。

さて、mirror 対称性は Hodge のコホモロジーのベクトル空間としての同型

$$\oplus_{i=0}^{3} H^{i,i}(M, \mathbf{C}) \cong \oplus_{i=0}^{3} H^{3-i,i}(W, \mathbf{C}) \tag{2}$$

を意味する。右辺は複素構造の変形 (variation of Hodge structure) のもとで直和 (正確には、filtration) 分解の様子が変化し、この意味で位相不変ではない。ところが左辺の分解は位相不変であることが分かる。そこで、mirror 対称性は変形理論まで含むものとして理解すると、左辺に非古典的変形理論が推論されるが、これが量子コホモロジーに他ならない。Calabi-Yau 超曲面の場合 (2) 右辺は超曲面のヤコビ環に同型となり、複素構造の変形は超曲面の多項式変形を通じてヤコビ環の変形として表される。(1) 左辺は外積によって既に環となっており、ヤコビ環の変形が左辺の外積の量子変形を定義すると考えられる。1991 年に Candelas et al は、4次元射影空間の中の5次式で与えられる Calabi-Yau 超局面についてヤコビ環の変形理論 (Gauss-Mainin 系) に基づいて量子コホモロジー環を具体的に構成することに成功した。そこで行われた議論は、Gauss-Mainin 系の平坦座標を構成することと解釈される。

Gauss-Mainin 系の解析は、一般に複雑であり従って量子コホモロジー環の決定は大変困難な問題である。しかし、Batyrev による mirror 対称性の組み合わせ論的記述に基づいて解析を行なうと、Gauss-Mainin 系は組み合わせ論的に定義される Gel'fand-Zelevinski-Kapranov (GKZ) 超幾何微分方程式系の解析に置き換えることが出来、この微分方程式系の解の解析を通じて量子コホモロジー環が決定されることが示される。また、ここに現れる GKZ 方程式系は、一般に可約な系であり、この面からも興味深い。

Asymptotic Properties of Generalized Feynman-Kac Functionals

Masayoshi TAKEDA*

Let $(\frac{1}{2}\mathbf{D}, H^1(R^d))$ be the classical Dirichlet form on R^d and denote by $\mathrm{M} = (\Omega, X_t, P_x)$ the Brownian motion on R^d. Let V be a continuous function on R^d such that $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$. M. Kac proved that

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x \left(\exp\left(-\int_0^t V(X_s) ds \right) \right) = - \inf_{\substack{u\in H^1(R^d) \\ \|u\|_2=1}} \left(\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u) + \int_X V(x)u^2(x)dx \right) \text{ for all } x \in X. \quad (1)$$

Nawadays, the above formula is a corollary of Donsker-Varadhan's large deviation theory.

On the other hand, many authors have been extensively investigated generalized Schrödinger operators or generalized Feynman-Kac functioals. A positive Radon μ is said to be in *Kato class* $\mathcal{S}_K$ if

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \sup_{x\in R^d} \int_{|x-y|<\alpha} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-2}} = 0, \quad d \geq 3$$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \sup_{x\in R^d} \int_{|x-y|<\alpha} (\log |x-y|^{-1}) \mu(dy) = 0, \quad d = 2$$

$$\sup_{x\in R^d} \int_{|x-y|\leq 1} \mu(dy) < \infty, \quad d = 1.$$

A positive Radon measure μ is said to be locally in $\mathcal{S}_K$(in notation $\mu \in \mathcal{S}_{K,loc}$) if $\chi_U \cdot \mu \in \mathcal{S}_K$ for any relatively compact open set U. For a signed Radon measure $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{S}_{K,loc} - \mathcal{S}_K$, the generalzed Schrödinger operator is defined as the self-adjoint operator corresponding to the closed symmetric bilinear form $(\mathcal{E}^\mu, \mathcal{F}^\mu)$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^\mu(u,v) = \frac{1}{2}\mathbf{D}(u,v) + \int_X \widetilde{u}\widetilde{v} d\mu \\ \mathcal{F}^\mu = \{u \in H^1(R^d) : \widetilde{u} \in L^2(R^d; \mu^+)\}, \end{cases}$$

and the generalized Feynman-Kac functional is defined by $\exp(-A_t^\mu)$. Here A^μ is the continuous additive functional of the Brownian motion corresponding to the measure μ. As an extension of the formula (1), we proved that for $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{S}_{K,loc} - \mathcal{S}_K$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x \left(\exp(-A_t^\mu) \right) = - \inf_{\substack{u\in\mathcal{F}^\mu \\ \|u\|_2=1}} \mathcal{E}^\mu(u,u) \text{ for all } x \in X. \quad (2)$$

We emphasis that the formula above is not derived from Donsker-Varadhan theory immediately because the additive functional A^μ is not a function of the occupation distribution $L_t(\omega)$,

$$L_t(\omega)(A) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_A(X_s(\omega)) ds, \quad A \in \mathcal{B}(R^d).$$

*Department of Mathematical Science, Faculty of Engineering Science, Osaka University

Hence, we extend Donsker-Varadhan's theorem as follows: let $\mathcal{M}_1(R^d)$ be the set of probability measures on R^d with the weak topology and define the function $I_{\mathcal{E}^\mu}$ on $\mathcal{M}_1(R^d)$ by

$$I_{\mathcal{E}^\mu}(\nu) = \begin{cases} \mathcal{E}^\mu(\sqrt{f}, \sqrt{f}) & \text{if } \nu = f \cdot dx,\ \sqrt{f} \in \mathcal{F}^\mu \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We then obtain

Theorem 0.1 (i) *Let $\mu \in \dot{\mathcal{S}}_{K,loc} - \mathcal{S}_K$. Then, if G is any open set of $\mathcal{M}_1(R^d)$*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x(e^{-A_t^\mu}; L_t \in G) \geq - \inf_{\nu\in G} I_{\mathcal{E}^\mu}(\nu) \quad \textit{for all } x \in R^d.$$

(ii) *Let $\mu \in \mathcal{S}_K - \mathcal{S}_K$. Then, if K is any compact set of $\mathcal{M}_1(R^d)$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x(e^{-A_t^\mu}; L_t \in K) \leq - \inf_{\nu\in K} I_{\mathcal{E}^\mu}(\nu) \quad \textit{for all } x \in R^d.$$

If $\mu = 0$, Theorem 1.1 is nothing but Donsker-Varadhan's theorem for the Brownian motion.

The formula (2) enables us to evaluate asymptotics of generalized Feynman-Kac functionals.

Example 1 Let $d = 1$ and $\mu = \alpha\delta_a$. Here δ_a denotes the Dirac measure at a point a. Then, μ belongs to the Kato class $\mathcal{S}_K$ and the corresponding additive functional is $\alpha\ell(a)$, where $\ell(a)$ is the local time at a. Thus, by using above theorem, we obtain

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x\left(e^{-\alpha\ell_t(a)}\right) = - \inf_{\substack{u\in H^1(R^1) \\ \|u\|_2=1}} \left(\mathcal{E}(u,u) + \alpha\widetilde{u}(a)^2\right)$$

The right hand side is equal to $\frac{\alpha^2}{2}$ if $\alpha < 0$ and 0 if $\alpha \geq 0$.

Example 2 Let $d = 1$ and $\mu = \delta_{-a} + \delta_a (a \geq 0)$. Then,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x\left(e^{\ell_t(-a)+\ell_t(a)}\right) &= - \inf_{\substack{u\in H^1(R^1) \\ \|u\|_2=1}} \left(\mathcal{E}(u,u) - \widetilde{u}(-a)^2 - \widetilde{u}(a)^2\right) \\ &= \lambda(a), \end{aligned} \tag{3}$$

where $\lambda(a)$ is a unique root of the equation:

$$\sqrt{2\lambda} = 1 + e^{-2a\sqrt{2\lambda}}.$$

Example 3 Let $d = 1$ and $\mu = \alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na} (a > 0)$. Then, $\mu \in \mathcal{S}_K$ because

$$\sup_{x\in X} \int_{|x-y|\leq 1} d\mu(y) \leq \alpha\left(\left[\frac{2}{a}\right] + 1\right) < \infty.$$

Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x\left(\exp\left(-\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell_t(na)\right)\right) &= - \inf_{\substack{u\in H^1(R^1) \\ \|u\|_2=1}} \left(\mathcal{E}(u,u) + \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{u}(na)^2\right) \\ &= \lambda(\alpha, a), \end{aligned} \tag{4}$$

where $\lambda(\alpha, a)$ is a unique root of the equation:

$$\begin{cases} \cot\left(\frac{\sqrt{2\lambda}a}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\alpha} & \text{for } \alpha > 0 \\ \coth\left(\frac{\sqrt{2\lambda}a}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{|\alpha|} & \text{for } \alpha < 0 \end{cases}$$

Example 4 Let $d = 3$ and $\mu = \delta(|x| = R)$, the surface measure of the sphere. Then, it is known in [6] that $\mu \in \mathcal{S}_K$. If we denote by $\ell_R(t)$ the continuous additive functional corresponding to μ, we get

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E_x\left(e^{\ell_R(t)}\right) = -\inf_{\substack{u\in H^1(R^3) \\ \|u\|_2=1}} \left(\mathcal{E}(u,u) - \int_{|x|=R} \widetilde{u}(x)^2 d\mu\right).$$

The right hand side is equal to 0 if $R \leq 1$ and to λ_0 if $R > 1$, where λ_0 is a unique root of the equation:

$$\frac{2\sqrt{2\lambda}e^{\sqrt{2\lambda}R}}{e^{\sqrt{2\lambda}R} - e^{-\sqrt{2\lambda}R}} = 1$$

Bifurcations of shock waves.

Ilia A. Bogaevski

The asymptotics of solutions of a Hamilton - Jacobi equation regularized by the vanishing viscosity

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, t, x\right) = \varepsilon \Delta S$$

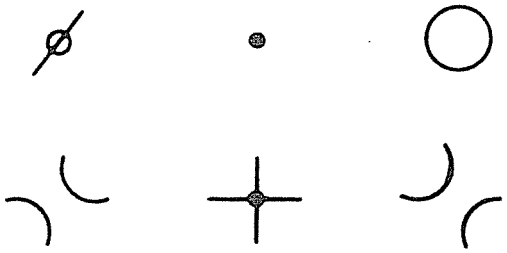
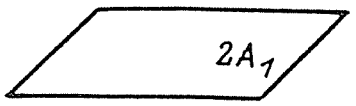
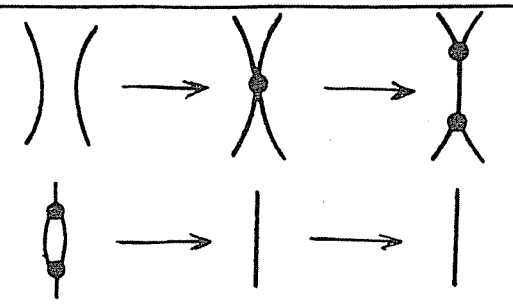
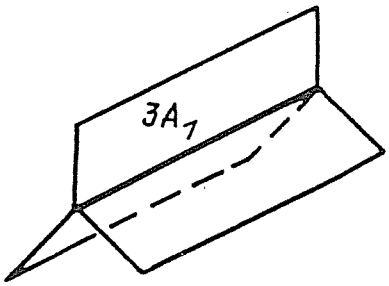
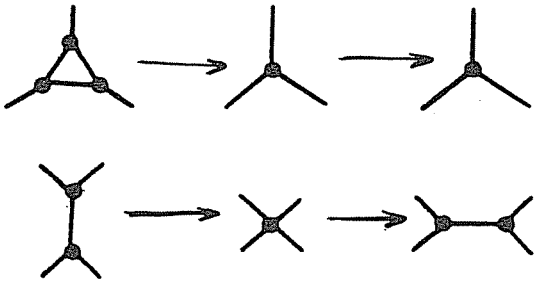
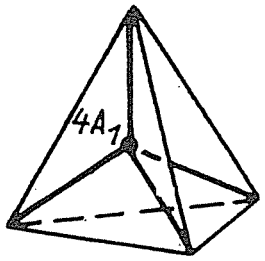
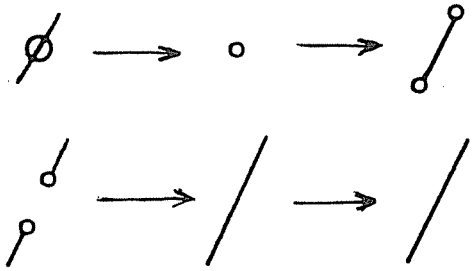
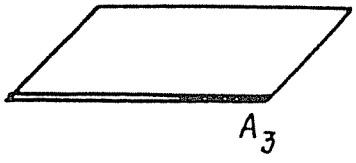
can be expressed in the form

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S = \min_{y} F(y, t, x)$$

if the Hamiltonian is convex. Besides, the smooth initial condition and Hamiltonian are assumed to satisfy some conditions at infinity. Although the family F is smooth, the asymptotics can have singularities. At each time t these singularities form a shock wave in x-space. As t varies the shock wave experiences bifurcations. We describe all of them providing the initial condition is generic and $\dim x = 2$.

If the family F is generic, the set of non-smoothness of the function $\min_y F(y,t,x)$

contains points of only 5 types: $2A_1$, $3A_1$, $4A_1$, A_3, A_1+A_3 (with respect to diffeomorphisms). All of them are shown in the figure on right. Their intersections with isochrones $t=\text{const}$ experience bifurcations, only some of which can be realized by shock waves. It turns out that the following topological restriction is true: the local shock wave after a bifurcation must be contractible. The arrows show the admissible time directions in the figure.

$2A_1$		
$3A_1$		
$4A_1$		
A_3		
A_1+A_3