第 14 回　関数空間セミナー報告集

（北大 21 世紀ＣＯＥプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛）

2005 年 12 月 23 日㈮ ～ 12 月 26 日㈪

（会場：北海道大学理学部）

代表者：山　本　隆　範（北海学園大・工）
羽　鳥　　　理（新　潟　大・理）
林　　　実樹廣（北　　　大・理）
中　路　貴　彦（北　　　大・理）

Series #105. February, 2006

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
‘Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities’（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#79 H. Kubo and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 15 " Evolution Equations ", 31 pages. 2003.

#80 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第12回関数空間セミナー報告集, 122 pages. 2004.

#81 Y. Giga, S. Izumiya and K. Deguchi (Eds.), Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2003, 48 pages. 2004.

#82 I. Shimada and Y. Tonegawa (Eds.), 2003年度談話会・特別講演アブストラクト集, 52 pages. 2004.

#83 The 2nd HU and SNU Symposium on Mathematics Abstracts, 22 pages. 2004.

#84 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 29th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 2004.

#85 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations I, 147 pages. 2004.

#86 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations II, 47 pages. 2004.

#87 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), COE Symposium Nonlinear Dispersive Equations, 85 pages. 2004.

#88 T. Namiki, M. Hatakeyama, S. Tadokoro and H. Aoi (Eds.), 北海道大学数学教室におけるメタデータ交換プロトコル OAI-PMH に準拠した e-print サーバ構築, 14 pages. 2004.

#89 S. Izumiya (Ed.) M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano and K. Inui, 第1回数学総合若手研究集会　COE Conference for Young Researchers, 143 pages. 2005.

#90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^∞-calculus for the Stokes operator on L_q-spaces, 34 pages. 2005.

#91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第13回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.

#92 N. Umeda, 第4回ＣＯＥ研究員連続講演会　反応－拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.

#93 K. Arima, 第2回ＣＯＥ研究員連続講演会　極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.

#94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis " OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK " 43 pages. 2005.

#95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.

#96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.

#97 M. Watanabe, 第5回 COE 研究員連続講演会　『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series " From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back " 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

#104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第2回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.

第14回　関数空間セミナー報告集

（北大21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」協賛）

2005年12月23日（金）～12月26日（月）

（会場：北海道大学理学部）

代表者：山本　隆範（北海学園大・工）
羽鳥　　理　（新潟大・理）
林　実樹廣　（北　大・理）
中路　貴彦　（北　大・理）

Seminar on Function Spaces, 2005

CONTENTS

Weighted composition operators between Bergman spaces on the unit ball

Sei-ichiro Ueki*1

(joint work with L. Luo)

Abstract

We consider the weighted composition operator $uC_\varphi : f \to u\cdot(f\circ\varphi)$ between weighted Bergman spaces $A^p_\alpha(B)$ on the unit ball of $\mathbb{C}^N$. We characterize the boundedness and the compactness of uC_φ from $A^p_\alpha(B)$ into $A^q_\beta(B)$. In the case $1 < p \le q < \infty$, we also estimate the essential norm of uC_φ in terms of an asymptotic upper bound of a quantity involving the pull-back measure and some integration operator induced by symbols φ and ψ.

1 Introduction

B を $\mathbb{C}^N$ の単位球, $H(B)$ を B 上の解析関数の全体とする. $u \in H(B)$ と正則写像 $\varphi : B \to B$ に対して, uC_φ を次のように定義する:

$$(uC_\varphi)f(z) = u(z)\cdot(f\circ\varphi)(z) \qquad (f\in H(B),\ z\in B).$$

明らかに, $uC_\varphi : H(B) \to H(B)$ は線形作用素である. この作用素 uC_φ は**荷重合成作用素** (***weighted compostion operator***) と呼ばれ, 最近では Hardy 空間を中心に様々な解析関数空間上で, 多くの研究者によって活発に研究がなされている. それらの研究については, 例えば [1], [2], [4], [5], [10] などがある. **本研究の目的は, B 上で定義される荷重 Bergman 空間上の uC_φ の有界性およびコンパクト性を特徴付けることである**.

$0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ に対して, B 上の**荷重 Bergman 空間** (***weighted Bergman space***) $A^p_\alpha(B)$ は次のように定義される:

$$A^p_\alpha(B) = \left\{ f\in H(B) \ :\ \|f\|^p_{p,\alpha} = \int_B |f(z)|^p c_\alpha (1-|z|^2)^\alpha d\nu(z) < \infty \right\}.$$

ここで, $d\nu$ は B 上の正規化された Lebesgue 測度であり, 定数 c_α は $c_\alpha = \frac{\Gamma(N+1+\alpha)}{\Gamma(N+1)\Gamma(\alpha+1)}$ と定める. このとき, $\|1\|_{p,\alpha} = 1$ となる. 以降, 簡単のため $c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha d\nu(z)$ を $d\nu_\alpha$ と表す.

$A^p_\alpha(B)$ 上の荷重合成作用素の例

$A^p_\alpha(B)$ 上で定義される作用素 T が

$$\|Tf\|_{p,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha} \qquad (f\in A^p_\alpha(B))$$

を満たすとき, T を $A^p_\alpha(B)$ の等距離作用素 (linear isometry) という. 解析関数空間の等距離作用素については様々な研究がなされており, $A^p_\alpha(B)$ の等距離作用素は C.J. Kolaski の１９８２年の論文 (Canadian J.Math.vol.34) の中で, その形が解明されている:

*1 e-mail : sueki@camel.plala.or.jp

Theorem (C.J. Kolaski). $0 < p < \infty$, $p \neq 2$ とする. $A^p_\alpha(B)$ の全射な等距離作用素 T は次の形で決定される:

$$Tf(z) = \lambda \left[\frac{1 - |a|^2}{(1 - \langle z, a \rangle)^2} \right]^{\frac{N+1+\alpha}{p}} \cdot (f \circ \varphi)(z) \qquad (f \in A^p_\alpha(B),\ z \in B).$$

ここで, λ は $|\lambda| = 1$ である複素数, φ は B の automorphism であり, $a = \varphi(0)$ である.

この結果を眺めてみると, $f \circ \varphi$ の部分は B の automorphism φ による合成作用素 C_φ である. また, 荷重である $\lambda \left[\frac{1-|a|^2}{(1-\langle z,a \rangle)^2} \right]^{\frac{N+1+\alpha}{p}}$ の部分は $A^p_\alpha(B)$ の関数であることがわかる. したがって, $A^p_\alpha(B)$ の等距離作用素は何れも荷重合成作用素の例となっている. 荷重 Bergman 空間に限らず, よく知られている解析関数空間の等距離作用素は荷重合成作用素の形で表されることが知られている.

∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼

さて, 本研究では

$$uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$$

が有界作用素またはコンパクト作用素となるための必要十分条件を特徴付けることが目的である. もし, $\alpha = \beta$ であるならば, 荷重 Bergman 空間の包含関係:

$$\begin{aligned} A^q_\alpha(B) &\subset A^p_\alpha(B) \qquad p \leq q \text{ の場合}, \\ A^p_\alpha(B) &\subset A^q_\alpha(B) \qquad q < p \text{ の場合}, \end{aligned}$$

が成立する. したがって, $\alpha = \beta$ という条件の下では, uC_φ は $p \leq q$ の場合には, より小さな Bergman 空間への作用素となり, $q < p$ の場合には, より大きな Bergman 空間への作用素となる. ゆえに, uC_φ の特徴付けを与えるために, 2つの場合:

(i) $0 < p \leq q < \infty$ の場合

(ii) $0 < q < p < \infty$ の場合

を考えることとする.

2 The case of $0 < p \leq q < \infty$

特徴付けの結果を述べるために, 次の準備をしておく.
$u \in A^q_\beta(B)$ と正則写像 $\varphi : B \to B$ に対して, B 上の正値 Borel 測度 $\mu_{u,\varphi}$ を次のように定める:

$$\mu_{u,\varphi}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |u(z)|^q d\nu_\beta(z) \qquad (E \text{ は } B \text{ の Borel set}).$$

測度論における変数変換の公式により, B 上の正値 Borel 関数 F に対して,

$$\int_B F d\mu_{u,\varphi} = \int_B |u(z)|^q F(\varphi(z)) d\nu_\beta(z)$$

が成立する (see [7]).

この u と φ によって定められる Borel 測度 $\mu_{u,\varphi}$ とある種の積分作用素を用いることで, $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ の有界性およびコンパクト性の特徴付けを与えることができる.

Theorem 1 ([13]). 次の 3 条件は同値である:

(a) $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ は有界作用素である.

(b) $$\sup_{\delta>0,\ \zeta\in S} \frac{\mu_{u,\varphi}(B(\zeta,\delta))}{\delta^{\frac{q(N+1+\alpha)}{p}}} < \infty,$$
すなわち, $\mu_{u,\varphi}$ は $\frac{q(N+1+\alpha)}{p}$-Carleson 測度条件を満たす.
ここで, $B(\zeta,\delta) = \{z \in B : 1 - \langle z, \zeta\rangle < \delta\}$(Carleson 集合) である.

(c) $$\sup_{w\in B} \int_B |u(z)|^q \left\{ \frac{1-|w|^2}{|1-\langle \varphi(z), w\rangle|^2} \right\}^{\frac{q(N+1+\alpha)}{p}} d\nu_\beta(z) < \infty.$$

Theorem 2 ([13]). 次の 3 条件は同値である:

(a) $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ はコンパクト作用素である.

(b) $$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\zeta\in S} \frac{\mu_{u,\varphi}(B(\zeta,\delta))}{\delta^{\frac{q(N+1+\alpha)}{p}}} = 0,$$
すなわち, $\mu_{u,\varphi}$ は $\frac{q(N+1+\alpha)}{p}$-vanishing Carleson 測度条件を満たす.

(c) $$\lim_{|w|\to 1} \int_B |u(z)|^q \left\{ \frac{1-|w|^2}{|1-\langle \varphi(z), w\rangle|^2} \right\}^{\frac{q(N+1+\alpha)}{p}} d\nu_\beta(z) = 0.$$

次に, 線形作用素の本質ノルムについて述べる. 一般に, X と Y を Banach 空間とし, X から Y への有界作用素 T に対して,

$$\|T\|_{e,X\to Y} = \inf\{\|T-K\| : K \text{ は } X \text{ から } Y \text{ へのコンパクト作用素 }\}$$

と定める. この $\|T\|_{e,X\to Y}$ を T の**本質ノルム (essential norm)** という. 決め方からわかるように,

$$T : X \to Y \text{ がコンパクト作用素} \iff \|T\|_{e,X\to Y} = 0$$

である. したがって, 本質ノルムの評価を与えることはコンパクト作用素の特徴付けに関する問題と密接な関係がある. 最近では, 解析関数空間上の具体的な作用素の本質ノルムについての研究が活発に行われている. 例えば, 合成作用素 C_φ の本質ノルムについての研究は, [3], [6], [8], [11], [12] などがある.

先の結果:[13] の Theorem 2 においては, 本質ノルムの評価を与えることなしに, 直接コンパクト作用素であるための必要十分条件を導き出した. したがって, Theorem 2 の中に出てくる 2 つの条件と uC_φ の本質ノルム $\|uC_\varphi\|_{e,\ A^p_\alpha(B)\to A^q_\beta(B)}$ との関連が問題として残った. しかしながら, 最近になって $\boldsymbol{1 < p \leq q < \infty}$ の場合に限り, uC_φ の本質ノルムについて, 次のような評価を得た:

Theorem 3 ([14]). $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha,\ \beta > -1$ とする. $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ が有界な荷重合成作用素であるとき, 次が成立する:

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi\|^q_{e,\ A^p_\alpha(B)\to A^q_\beta(B)} &\sim \limsup_{\delta\to 0}\sup_{\zeta\in S}\frac{\mu_{u,\varphi}(B(\zeta,\delta))}{\delta^{\frac{q(N+1+\alpha)}{p}}}\\ &\sim \limsup_{|w|\to 1}\int_B |u(z)|^q\left\{\frac{1-|w|^2}{|1-\langle\varphi(z),w\rangle|^2}\right\}^{\frac{q(N+1+\alpha)}{p}} d\nu_\beta(z).\end{aligned}$$

3 The case of $0 < q < p < \infty$

$a \in B$, $0 < r < 1$ に対して, $E(a,r) = \varphi_a(rB)$ とおく. ここで, φ_a は次のように定義される B の automorphism である:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle} \qquad (z \in B),$$

$$s_a = \sqrt{1-|a|^2}, \quad P_a(z) = \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2}a, \quad Q_a(z) = z - P_a(z).$$

この集合 $E(a,r)$ については, 次の評価が成立することが知られている:

$$\{\nu(E(a,r))\}^{1+\frac{\alpha}{N+1}} \sim \nu_\alpha(E(a,r)) \sim (1-|a|^2)^{N+1+\alpha}.$$

この記号のもとで, 我々は $0 < q < p < \infty$ の場合の $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ について, 次の特徴付けを得た:

Theorem 4 ([9]). 次の 4 条件は同値である:

(a) $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ は有界作用素である.

(b) $uC_\varphi : A^p_\alpha(B) \to A^q_\beta(B)$ はコンパクト作用素である.

(c) $\dfrac{\mu_{u,\varphi}(E(a,r))}{\{\nu(E(a,r))\}^{1+\frac{\alpha}{N+1}}} \in L^s(B, d\nu_\alpha)$.

(d) $\displaystyle\int_B |u(z)|^q\left\{\frac{1-|a|^2}{|1-\langle\varphi(z),a\rangle|^2}\right\}^{N+1+\alpha} d\nu_\beta(z) \in L^s(B, d\nu_\alpha)$.

ここで, s は $\frac{1}{s} + \frac{q}{p} = 1$ を満たし, $L^s(B, d\nu_\alpha)$ は Lebesgue 空間を表す.

なお, Theorem 4 の条件 (c) と (d) は, それぞれ a を変数とする B 上の関数として考えていることに注意する.

付記: Theorem 3 と Theorem 4 の結果は University of Science and Technology of China の L.Luo 助教授との共同研究による結果である.

References

[1] M. D. Contreras and A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators on Hardy spaces*, J. Math. Anal. Appl., **263** (2001), 224–233.

[2] M. D. Contreras and A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators between different Hardy spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory, **46** (2003), 165–188.

[3] P. Poggi-Corradini, *The essential norm of composition operators revisited*, Contemporary Mathematics, **213** (1998), 167–173.

[4] Ž. Čučković and R. Zhao, *Weighted composition operators on the Bergman space*, J. London Math. Soc., **70** (2004), 499–511.

[5] Ž. Čučković and R. Zhao, *Weighted composition operators between different weighted Bergman spaces and different Hardy spaces*, preprint.

[6] P. Gorkin and B.D. MacCluer, *Essential norms of composition operators*, Integr. Equ. Oper. Theory, **48** (2004), 27–40.

[7] P.R. Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, New York, 1974.

[8] L. Luo, *The essential norm of a composition operator on the Bergman space of the unit ball*, Complex Variables, **49** (2004), 845–850.

[9] L. Luo and S. Ueki, *Weighted composition operators between weighted Bergman spaces and Hardy spaces on the unit ball of* C^n, preprint.

[10] G. Mirzakarimi and K. Seddighi, *Weighted composition operators on Bergman and Dirichlet spaces*, Georgian Math. J., **4** (1997), 373–383.

[11] A.Montes-Rodríguez, *The essential norm of a composition operator on Bloch spaces*, Pacific. J. Math., **188** (1999), 339–351.

[12] J. Shapiro, *The essential norm of a composition operator*, Ann. of Math., **125** (1987), 375–404.

[13] S. Ueki, *Weighted composition operators between weighted Bergman spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Nihonkai Math. J., **16** (2005), 31–48.

[14] S. Ueki and L. Luo, *The essential norm of a weighted composition operator between weighted Bergman spaces in the unit ball of* $\mathbb{C}^N$, preprint.

On a class $\mathfrak{M}$ on the upper half plane
(上半平面上の関数空間 $\mathfrak{M}$ について)

飯田　安保 (Yasuo IIDA)

岩手医科大学教養部
(yiida@iwate-med.ac.jp)

Abstract. In this paper, we shall consider the class $\mathfrak{M}$ of holomorphic functions on the upper half plane $D := \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ satisfying $\int_{\mathbf{R}} \log^+ Mf(x)\, dx < \infty$, where $Mf(x) = \sup_{y>0} |f(x+iy)| \ \ (x \in \mathbf{R})$. We shall show some properties on $\mathfrak{M}$.

1.　単位円板での関数空間 M について

単位円板 $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数 f が $\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta)\, d\theta < \infty$ をみたすとき、$f \in M$ とする。ここで $\log^+ x := max(\log x, 0)$, $Mf(\theta) = \sup_{0 \leqq r < 1} |f(re^{i\theta})|$ とする。

この関数空間 M は1986年に Kim によって導入された ([3])。M はプリヴァロフ空間 N^p $(p > 1)$ とスミルノフクラス N_* の間に属する。もっと詳しく述べると、

$$\bigcup_{0<q\leqq\infty} H^q \subset N^p \subset M \subset N_* \subset N \quad (p > 1) \tag{1}$$

が成り立つ。これらの空間の定義は以下のとおりである：

f を U 上の正則関数とする。

（ネヴァンリンナクラス）　$f \in N \Longleftrightarrow \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty.$

（スミルノフクラス）

$f \in N_* \Longleftrightarrow$ ある $\phi \in L^1(T)$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log^+ |f(z)| \leqq Q[\phi](z)$ $(z \in U)$ を満たす。ここで右辺は U 上の Poisson 積分を表す。

（プリヴァロフ空間）　$f \in N^p$ $(p > 1) \Longleftrightarrow \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left(\log^+ |f(re^{i\theta})|\right)^p d\theta < \infty.$

（ハーディ空間）　$f \in H^q$ $(0 < q < \infty) \Longleftrightarrow \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q\, d\theta < \infty.$

また、U 上の有界正則関数全体を H^∞ で表す。

なお、N とその部分空間を総称して**「ネヴァンリンナ型空間」**と呼ぶことがある。

一方、M について以下の結果が知られていることに注意されたい。

定理 1-1　f を U 上の正則関数とする。以下は同値である：

(1)　$f \in M.$

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} \log(1 + Mf(\theta))\, d\theta < \infty.$

2.　上半平面での関数空間 $M(D)$ について

Ganzhula は上半平面 $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ 上での関数空間 $M(D)$ を以下のように導入した ([1])：

定義 2-1　D 上の正則関数 f が $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \log(1 + Mf(x))\, dx < \infty$ をみたすとき、$f \in M(D)$ とする。ただし $Mf(x) = \sup_{y>0} |f(x+iy)|$ $(x \in \mathbf{R})$ とする。

この章では Ganzhula の結果を紹介する ([1])。

I. $M(D)$ と他のネヴァンリンナ型空間との間に成り立つ包含関係について

まず、D 上の他のネヴァンリンナ型空間の定義を与える：

f を D 上の正則関数とする。

・$f \in N(D) \iff \displaystyle\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log(1 + |f(x+iy)|)\, dx < \infty.$

・$f \in N_*(D) \iff$ ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})$, $\phi \geqq 0$ に対し $\log(1 + |f(z)|) \leqq P[\phi](z)$
$(z \in D)$ を満たす。ここで右辺は D 上の Poisson 積分を表す。

・$f \in H^q(D)$　$(0 < q < \infty) \iff \displaystyle\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+iy)|^q\, dx < \infty.$

　また、D 上の有界正則関数全体を $H^\infty(D)$ で表す。

命題 2-2（Ganzhula [1]）　以下の包含関係が成り立つ：

$$\bigcup_{0<q\leqq 1} H^q(D) \subset M(D) \subset N_*(D) \subset N(D) \tag{2}$$

（注意）　上半平面の場合は $H^q(D) \not\subset N(D)$　$(1 < q \leqq \infty)$ となることが知られている（Mochizuki [6]）。

II. $M(D)$ が F-algebra になることについて

$M(D)$ 上の距離を次のように定義する：

$$\rho(f\,,\,g) = \int_{\mathbf{R}} \log\left(1 + M(f-g)(x)\right) dx \quad (f\,,\,g \in M(D))$$

定理 2-3（Ganzhula [1]）　空間 $(M(D)\,,\,\rho)$ は F-algebra、つまり積に関して連続である完備な線形距離空間である。

なお、単位円板の場合に M が F-algebra になることは Kim によって示されている ([4])。

3.　上半平面での関数空間 $\mathfrak{M}$ について

この章では、Ganzhula によって導かれた $M(D)$ とは異なる空間を考える。

その前に、単位円板 U におけるネヴァンリンナ型空間に成り立つ、互いに同値である条件を上半平面 D 上に“そのまま”適用しても、それらが同値にならない場合があることに触れておく。

例えば、単位円板 U 上のネヴァンリンナクラスについて以下の結果が知られている。

定理 3-0　f を U 上の正則関数とする。以下は互いに同値である：

(1)　$\log^+|f(z)|$ が U 上 harmonic majorant を持つ.

(2)　$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty.$$

(3)　$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log(1+|f(re^{i\theta})|)\,d\theta < \infty.$$

一方、上半平面 D においては以下の (1)' ～ (3)' は互いに <u>同値ではない</u>：

f を D 上の正則関数とするとき

(1)'　$\log^+|f(z)|$ が D 上 harmonic majorant を持つ.

(2)'　$$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log^+|f(x+iy)|\,dx < \infty.$$

(3)'　$$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log(1+|f(x+iy)|)\,dx < \infty.$$

事実、(1)' ～ (3)' を満たす関数全体を順に $N_0(D)\,,\,\mathfrak{N}\,,\,N(D)$ とおくと、$N_0(D) \supset \mathfrak{N} \supset N(D)$ の包含関係が成り立つ。

ここでは、 Ganzhula が導入したクラス $M(D)$ より“大きな”クラスを導入して、その性質について考察する。

定義 3-1　D 上の正則関数 f が $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \log^+ Mf(x)\,dx < \infty$ をみたすとき、 $f \in \mathfrak{M}$ とする。

この新しいクラスについては、Krylov ([5]) によって導入されたネヴァンリンナ型空間に対して (1)、(2) と同様の包含関係が成り立つ。以下が Krylov の流儀による D 上のネヴァンリンナ型空間の定義である。

f を D 上の正則関数とする。

① $f \in \mathfrak{N} \Longleftrightarrow \displaystyle\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} \log^+ |f(x+iy)|\,dx < \infty.$

（注意）　$f \in \mathfrak{N}$ のとき $f^*(x) := \displaystyle\lim_{y \to +0} f(x+iy)$ が a.e. $x \in \mathbf{R}$ で存在する。

② $f \in \mathfrak{N}_* \Longleftrightarrow$ ある $\phi \in L^1(\mathbf{R})\,,\, \phi \geqq 0$ に対し $\log^+ |f(z)| \leqq P[\phi](z)$　$(z \in D)$
が成り立つ。ただし右辺は D 上の Poisson 積分を表す。

命題 3-2　次の包含関係が成り立つ。　$\displaystyle\bigcup_{0<q\leqq 1} H^q(D) \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}_* \subset \mathfrak{N}$

次に、$H^1(D)$ に属する関数の実部の全体を $Re\,H^1(D)$ とする。このクラスは以下で示すように $\mathfrak{M}$ を考察する上で大きな役割を果たす。

定理 3-3　$h \in L^1(\mathbf{R})$ を実数値関数とし、$f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \dfrac{1+tz}{t-z}\dfrac{1}{1+t^2}\,h(t)\,dt\right)$ とする。このとき $h^+ \in Re\,H^1(D)$ ならば $f \in \mathfrak{M}$ である。ここで $h^+ := max(h\,,\,0)$ である。

さて、次のような関数は上半平面 D での**外関数**と呼ばれる。

$$d(z) = \exp\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbf{R}} \frac{1+tz}{t-z}\frac{1}{1+t^2}\log h(t)\,dt\right),$$

ただし $h(t) \geqq 0\,,\, \log h \in L^1\left(\mathbf{R}\,,\, \dfrac{dt}{1+t^2}\right).$

次の定理は $\mathfrak{M}$ に属する関数の可逆性と外関数の関係を示している。

定理 3-4　f を D 上の正則関数とする。以下は互いに同値である。
(i)　f が $\mathfrak{M}$ で可逆である。
(ii)　f が外関数で、$\log|f^*(x)| \in Re\,H^1(D)$ を満たす。

参考文献

[1] L. M. Ganzhula, *On an F-algebra of holomorphic functions in the upper half-plane,* Math. Montisnigri **12** (2000), 33-45. (Russian)

[2] Y. Iida, *On an F-algebra of holomorphic functions on the upper half plane*, submitted.

[3] H. O. Kim, *On closed maximal ideals of* M, Proc. Japan. Academy **62A** (1986), 343-346.

[4] H. O. Kim, *On an F-algebra of holomorphic functions*, Can. J. Math. **40** (1988), 718-741.

[5] V. I. Krylov, *On functions regular in a half-plane*, Mat. Sb. **6** (48) (1939); Amer. Math. Soc. Transl. **32** (2) (1963), 37-81.

[6] N. Mochizuki, *Nevanlinna and Smirnov classes on the upper half plane*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 609-620.

EXTREME POINTS IN THE UNIT BALL OF THE ALGEBRA GENERATED BY COMPOSITION OPERATORS

TAKUYA HOSOKAWA

$\mathbb{D}$ を単位開円板とし，$H(\mathbb{D})$ を $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体とする．H^∞ を有界正則関数環，A を円板環とする．$\mathbb{D}$ の正則自己写像全体を $S(\mathbb{D})$，A の閉単位球を $S(\overline{\mathbb{D}})$ とする．$\varphi \in S(\mathbb{D})$ に対し，合成作用素 $C_\varphi : f \to f \circ \varphi$ は H^∞ からそれ自身への線形作用素であり，$\varphi \in S(\overline{\mathbb{D}})$ に対しては A からそれ自身への線形作用素である．いずれの場合も任意の φ に対して $\|C_\varphi\| = 1$ である．

Banach 空間 $X \subset H(\mathbb{D})$ に対し $\mathcal{C}(X)$ を X 上の合成作用素全体に X 上の作用素ノルムで位相を定めた位相空間とする．$\mathcal{C}(H^\infty)$ の位相構造については [3] や [4] で研究されている．

一般に $\mathcal{C}(X)$ は作用素の積について半群を成すが，定数倍や加法については閉じていない．$\langle \mathcal{C}(X) \rangle$ を X 上の有限個の合成作用素の一次結合全体とし，$\mathcal{LC}(X)$ をその作用素ノルムについての閉包とする．Gorkin-Mortini は次を示している．

Theorem (Gorkin-Mortini, [1]). (i) $\langle \mathcal{C}(H^\infty) \rangle \subsetneqq \mathcal{LC}(H^\infty)$.

(ii) 掛け算作用素 M_z と任意の $T \in \langle \mathcal{C}(H^\infty) \rangle$ について，$\|M_z - T\| \geq \dfrac{1}{4}$.

一般に $\mathbb{D}$ 上の任意の点評価作用素が零作用素でない Banach 空間 $X \subset H(\mathbb{D})$ 上では，合成作用素の有限個の一次結合については次が成り立つ．

Proposition 1. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ と相異なる $C_{\varphi_1}, \cdots, C_{\varphi_n} \in \mathcal{C}(X)$ について，$\lambda_1 C_{\varphi_1} + \cdots + \lambda_n C_{\varphi_n} = 0$ ならば，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

次に $\mathcal{LC}(H^\infty)$ の作用素の具体例を与える．$C_\varphi \sim C_\psi$ で C_φ と C_ψ が $\mathcal{C}(H^\infty)$ の同じ弧状連結成分に属することを表わす．$C_\varphi \sim C_\psi$ のとき，$\varphi_t = (1-t)\varphi + t\psi$ として $\{C_{\varphi_t}\}_{t \in [0,1]}$ は C_φ と C_ψ を結ぶ $\mathcal{C}(H^\infty)$ の連続曲線である．([4]) ここで，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} C_{\varphi_{\frac{k}{n}}}$$

とすると，$\|T_n\| = 1$ であるから一様有界性原理から次を得る．

Example 2. $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ とすると $T \in \mathcal{LC}(H^\infty)$ であり、

$$Tf(z) = \frac{F(\psi(z)) - F(\varphi(z))}{\psi(z) - \varphi(z)}$$

となる．ただし，$F(z)$ は $f(z)$ の不定積分である．

[3] と [4] では，C_φ が $\mathcal{C}(H^\infty)$ の孤立点であることと，φ が H^∞ の閉単位球面の端点であることが同値であることが示されているが，$\mathcal{C}(A)$ においても同様の主張が成り立つ．$\mathcal{LC}(A)$ の閉単位球面の端点について次が成り立つ．

Theorem 3. [2]　次の条件は同値である．

(i) C_φ が $\mathcal{LC}(A)$ の閉単位球面の端点である．

(ii) C_φ が $\mathcal{C}(A)$ の孤立点である．

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \log\left(1 - |\varphi(e^{i\theta})|\right) d\theta = -\infty.$

References

[1] P. Gorkin and R. Mortini, *Norms and essential norms of linear combinations of endomorphisms.* Trans. Amer. Math. Soc. electrically published, 2004.

[2] T. Hosokawa, *Extreme points in the unit ball of the composition algebra on the disc algebra*, preprint.

[3] T. Hosokawa, K. Izuchi, D. Zheng, *Isolated points and essential components of composition operators on H^∞*. Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2001), 1765–1773.

[4] B. MacCluer, S. Ohno, R. Zhao, *Topological structure of the space of composition operators on H^∞*. Integral Equation Operator Theory, **40** (2001), 481–494.

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology 2-12-1 Oh-Okayama, Meguro, Tokyo, 152-8551, Japan

E-mail address: `hosokawa@math.titech.ac.jp`

CYCLIC VECTORS IN FOCK-TYPE SPACES

KOU HEI IZUCHI (NIIGATA UNIVERSITY)

ABSTRACT. We characterize the cyclic vectors in the Fock-type spaces.

$\mathbb{C}$ を複素平面とし、$\mathcal{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の多項式環とする。$Hol(\Omega)$ を、$\mathbb{C}$ のある領域 Ω 上正則な関数全体とする。X を $Hol(\Omega)$ からなる completed semi-normed linear space とする。$f\mathcal{C} \subset X$ かつ $\overline{f\mathcal{C}} = X$ のとき、関数 f を X の cyclic vector という。

Fock 空間：

$$L_a^2(\mathbb{C}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA_1(z) < \infty \right\}$$

ここで、$dA_1(z)$ は $\mathbb{C}$ 上 Lebesgue 測度である。$\mathbb{C}$ 上 Fock 空間 $L_a^2(\mathbb{C})$（又は Segal-Bargmann 空間）の cyclic vector については、次のような結果が得られた：

定理 1 ([1]). $f \in L_a^2(\mathbb{C})$ とする。そのとき次は同値である:

(i) f は $\mathbb{C}$ 上零点を持たない。
(ii) $f = e^h$ where $h(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, $|\alpha| < \frac{1}{4}$.
(iii) f は $L_a^2(\mathbb{C})$ の cyclic vector である。

Fock 型空間と $\mathbb{C}^n$ 上 Fock 空間への、この定理の一般化をする。

1. FOCK 型空間

$0 < p < \infty$、$s > 0$ とする。

Fock 型空間：

$$L_{a,s}^p(\mathbb{C}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}) : \|f\|^p = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\frac{|z|^s}{2}} dA_1(z) < \infty \right\}$$

ここで、$dA_1(z)$ は $\mathbb{C}$ 上 Lebesgue 測度である。$p = s = 2$ のとき、$L_{a,s}^p(\mathbb{C})$ は Fock 空間である。

s が $s \geq 5$ の整数以外のとき、Fock 型空間の cyclic vector について次の結果が得られる。

定理 2. $f \in L_{a,s}^p(\mathbb{C})$ とする。

(A) $s = 1, 2, 3, 4$ のとき、次は同値である:

(i) f は $\mathbb{C}$ 上零点を持たない。
(ii) $f = e^h$ where $h(z) = \sum_{k=0}^s \alpha_k z^k$, $|\alpha_s| < \frac{1}{2p}$.
(iii) f は $L_{a,s}^p(\mathbb{C})$ の cyclic vector である。

(**B**) s が整数でないとき、(ii) が次のように置き換えられる。
(ii)' $f = e^h$ where $h(z) = \sum_{k=0}^{[s]} \alpha_k z^k$.
このとき、$\alpha_{[s]}$ には (ii) のような条件は付かない。

しかし、$s = 5, 6, 7, \cdots$ のとき、同じような結果は成立しない。例えば、$f = \exp(\frac{1}{2p} z^s) \in L^p_{a,s}(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上零点を持たず、なおかつ $f\mathcal{C}$ は $L^p_{a,s}(\mathbb{C})$ に含まれない。ただし、$f\mathcal{C} \subset L^p_{a,s}(\mathbb{C})$ となる関数 f についてのみ考えれば、上の定理 2 と同じ結果が成立する。

2. $\mathbb{C}^n$ 上 Fock 空間

$\mathbb{C}^n$ を n 次複素平面とし、$z = (z_1, \cdots, z_n)$、$|z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ とする。
$\mathbb{C}^n$ 上 Fock 空間：

$$L^2_a(\mathbb{C}^n) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{C}^n) : \|f\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA_n(z) < \infty \right\}$$

ここで、$dA_n(z)$ は $\mathbb{C}^n$ 上 Lebesgue 測度である。

この空間の cyclic vector は、M. Xian により次の結果が得られた。

定理 3 ([2])**.** $f \in L^2_a(\mathbb{C}^n)$ とする。そのとき次は同値である：
(i) f は $\mathbb{C}^n$ 上零点を持たない。
(ii) $f = e^h$ where $h(z) = \sum_{k=0}^{2} h_k(z)$, $\max_{|z|=1} |h_2(z)| < \frac{1}{4}$. ここで、$h_k$ は k 次の同次多項式。
(iii) f は $L^2_a(\mathbb{C}^n)$ の cyclic vector である。

References

1. K.H. Izuchi, *Cyclic vectors in the Fock space over the complex plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 3687-3690.
2. M. Xian, *Cyclic vectors in the Fock space over the complex n-space*, preprint.

Holomorphic families of unbounded operators and the q-metric

Go Hirasawa

abstract A linear operator s in a Hilbert space H is said to be semiclosed if its graph is semiclosed in a product Hilbert space $H \times H$. In this note, holomorphic families of semiclosed operators $s(\kappa)$, (κ: complex number), are argued.

1 準備

まず, 記号や定義の準備をします.
$(H, \|\cdot\|)$: Hilbert space
$\mathcal{B}(H)$: H 上の bounded operators の集合
$\mathcal{C}(H)$: closed operators の集合
$\mathcal{S}(H)$: semiclosed operators の集合
このとき, 次の包含関係があります.

$$\mathcal{B}(H) \subset \mathcal{C}(H) \subset \mathcal{S}(H).$$

ここで, closed operator, semiclosed operator とは次のことです.

線形作用素 t が closed とはグラフ

$$\{(u, tu) \in H \times H : u \in \mathrm{dom}(t)\}$$

が closed in $H \times H$ で定義する. つまり, $\mathrm{dom}(t) \ni u_n \to u$, $tu_n \to v$ ならば $u \in \mathrm{dom}(t)$, $tu = v$ が成り立つこと.

線形作用素 s が semiclosed とはグラフ

$$\{(u, su) \in H \times H : u \in \mathrm{dom}(s)\}$$

が semiclosed in $H \times H$ で定義する. つまり, $H \times H$ の中に, 連続的に埋め込みを与えるようなヒルベルトノルムが存在することである. もちろん, closed subspace は semiclosed subspace になっている.

semiclosed operator の特徴付けとして次が知られている.

Theorem 1.1 (W.Kaufman) 次は同値である.

$s \in \mathcal{S}(H)$

(i) 定義域 dom(s) が *semiclosed subspace* かつ

$$s : (\mathrm{dom}(s), \|\cdot\|_s) \longrightarrow H, \quad (\textit{bounded})$$

ここで, $\|\cdot\|_s$ は定義域 dom(s) を *Hilbert* 空間にするノルムの 1 つである.

(ii) s は作用素商である. すなわち, ある有界作用素 $A, B \in \mathcal{B}(H)$ が存在して, $\mathrm{dom}(s) = AH$, $\mathrm{ran}(s) = BH$,

$$s = B/A : Au \to Bu, \quad u \in H$$

となる.

Remark 1.1
(ii) と (iii) に関して, (ii) で現れるノルム $\|\cdot\|_s$ と (iii) で現れる分母の $A \geq 0$ (A は正値に選ぶことができる) は 1 対 1 の対応が付く.

$$\|\cdot\|_s \longleftrightarrow A \geq 0.$$

2 Holomorphic 性について

以下に述べる定義は加藤敏夫先生の Perturbation Theory of Linear Operators に書かれているものである.

Definition 2.1 ある領域 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 上で定義された $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ が *holomorphic families* であるとは, あるヒルベルト空間 Z と $U(\kappa)$, $V(\kappa) \in \mathcal{B}(Z, H)$ が存在して, 次を満たすことをいう.

(i) $U(\kappa)$ は Ω 上で定義された *bounded-holomorphic* で,

$$\textit{one to one}, \quad \mathrm{ran}U(\kappa) = \mathrm{dom}s(\kappa)$$

(ii) $V(\kappa)$ は Ω 上で定義された *bounded-holomorphic* で,

$$V(\kappa) = s(\kappa)U(\kappa).$$

ここで,bounded-holomorphic とは有界作用素値関数とみたときの正則性のことである.

Definition 2.2 ある領域 Ω 上で定義された $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ が *holomorphic families of type* (A) であるとは, 次を満たすことをいう.

(i) *constant domain* $(\mathrm{dom}s(\kappa) = \mathcal{D})$ である.

(ii) $s(\kappa)d,\ d \in \mathcal{D}$ が (*vector valued*) *holomorphic in* H.

最初の定義は一般の正則性の定義で, 次の定義は constant domain のときの正則性の定義であるわけだが, この両者の関係などいくつかの疑問を挙げることで, 正則性の問題の理解を深めていってみたい.

3　いくつかの疑問

Q1. $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ が $s(\kappa) \in \mathcal{B}(H)$ のとき, Def.2.1 の定義は bounded-holomorphic の定義に一致するか？

Q2. $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ が type (A) ならば holomorphic families か？

Q3. (cf. p.376, Perturbation Theory for linear operators) $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ が holomorphic families with constant domain ならば type (A) か？

Q4. $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ が holomorphic families のとき,

$$\kappa \to \kappa_0 \quad \text{ならば} \quad s(\kappa) \to s(\kappa_0)$$

となる $\mathcal{S}(H)$ での位相は何か？

Q1. に対する考察.

Yes である. $s(\kappa) \in \mathcal{B}(H)$ とする. Holomorphic 性の定義より,

$$V(\kappa) = s(\kappa)U(\kappa),\ U(\kappa) \in \mathcal{B}(Z, H),\ \text{one to one}.$$

$\mathrm{ran}U(\kappa) = \mathrm{dom}s(\kappa) = H$ より, $U(\kappa)^{-1} \in \mathcal{B}(H, Z)$.
よって,

$$s(\kappa) = V(\kappa)U(\kappa)^{-1}.$$

従って, $s(\kappa)$ は bounded-holomorphic である.

Q2. に対する考察.

Yes である. $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$, $\mathcal{D} := \mathrm{dom}s(\kappa)$ とおく. $\mathcal{D}$ は semiclosed subspace なので

$$(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}}) \overset{U}{\hookrightarrow} H$$

となるノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ が存在する. すると,

$$U \in \mathcal{B}(Z, H), \quad Z := (\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}}),$$

bounded-holomorphic, $\mathrm{ran}U = \mathcal{D}$, one to one を満たす. また,

$$\tilde{V}(\kappa) := s(\kappa)U$$

とおくと, $\tilde{V}(\kappa) \in \mathcal{B}(Z, H)$ である. ここで, 仮定 (type(A)) から, $\forall d \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\begin{aligned} s(\kappa)d &= s(\kappa)Uz, \quad z \in Z \\ &= \tilde{V}(\kappa)z \end{aligned}$$

が holomorphic である. すなわち, $\tilde{V}(\kappa)$ は bounded-holomorphic である. 以上より $s(\kappa)$ は holomorphic である.

Q3. に対する考察

まず, 次の補題を考える.

Lemma 3.1 $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$ を *constant domain* と仮定する. $\mathcal{D} := \mathrm{dom}s(\kappa)$, $Z := (\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ とおく. このとき, 次は同値である.

(1) $s(\kappa) \in \mathcal{B}(Z, H)$ とみなしたとき ($\tilde{V}(\kappa)$ のこと), *bounded-holomorphic* である.

(2) $s(\kappa)$ は *type* (A) である.

この補題より, type (A) を示す代わりに

$$\tilde{V}(\kappa) := s(\kappa)U, \qquad \tilde{V}(\kappa) : Z \to H$$

が bounded-holomorphic を示せばよいことがわかる.

さて, 仮定 (holomorphic) より, あるヒルベルト空間 K が存在して, $U(\kappa)$, $V(\kappa) \in \mathcal{B}(K, H)$ なるものが次を満たす.

(i) $U(\kappa)$ は bounded-holomorphic で, one to one, $\mathrm{ran}U(\kappa) = \mathcal{D}$.

(ii) $V(\kappa)$ は bounded-holomorphic で, $V(\kappa) = s(\kappa)U(\kappa)$.

$$K \xrightarrow{U(\kappa)} H \xleftarrow{U} Z, \quad \text{with} \quad \mathrm{ran}U(\kappa) = \mathrm{ran}U = \mathcal{D}.$$

よって, K と Z は $U^{-1}U(\kappa) \in \mathcal{B}(K, Z)$ により同型である.

もし $U^{-1}U(\kappa)$ が bounded-holomorphic ならば,

$$\begin{aligned} V(\kappa) &= s(\kappa)U(\kappa) \\ &= s(\kappa)UU^{-1}U(\kappa) \\ &= \widetilde{V}(\kappa)U^{-1}U(\kappa), \end{aligned}$$

となって,

$$\widetilde{V}(\kappa) = V(\kappa)\{U^{-1}U(\kappa)\}^{-1}$$

が bounded-holomorphic であることがわかる. 今はまだこの十分条件ぐらいしかわかってない.

Q4. に対する考察.

semiclosed operator の集合 $\mathcal{S}(H)$ に距離を入れてみる. そこで, semiclosed operator の定義域になり得る部分空間 (semiclosed subspace のこと) にあらかじめノルムを1つづつ与えておくこととする. この与え方を α と書くこととする. 以上のもとで, q-metric を導入しよう. 任意に1つ α を与え, 固定しておく.

$\forall s, t \in \mathcal{S}(H)$ に対して,

$$s \overset{\alpha}{=} B/A, \quad t \overset{\alpha}{=} D/C.$$

このとき,

$$q(s,t) := \|A - C\| + \|B - D\|$$

と定義する. このとき, この距離に関して以下の性質が成り立つことが示される.

Theorem 3.2

$(\mathcal{S}(H), q)$ において $\mathcal{C}(H)$ は *open* である.

Theorem 3.3 $\mathcal{C}(H)$ において，

$$q(s, s_n) \to 0\ (n \to \infty)\ \text{ならば}\ \textit{gap metric}\ \text{で}\ s_n \to s\ \text{となる}.$$

Theorem 3.4 $s, t \in \mathcal{S}(H)$, $\mathrm{dom}(s) \subset \mathrm{dom}(t)$. このとき，

$$q(s, s + \kappa t) = \|\kappa t|_{\mathrm{dom(s)}}\|, \quad \kappa \in \mathbf{C}.$$

Corollary 3.5 もし $s \in \mathcal{C}(H)$, $|\kappa|$: 十分小ならば，

$$s + \kappa t\ \text{は}\ \textit{closed}\ \text{である}.$$

以上のような性質を備えた q-metric なのだが，この q-metric に関して type (A) 型に関しては次の結果を得ることができる．

Proposition 3.6 $s(\kappa) \in \mathcal{S}(H)$, $(\kappa \in \Omega)$ を *type* (A) とする．任意の $\kappa_0 \in \Omega$ に対して，

$$\kappa \to \kappa_0 \quad \text{ならば} \quad q(s(\kappa_0), s(\kappa)) \to 0.$$

Proof.

$\mathcal{D} := \mathrm{dom}s(\kappa) \overset{\alpha}{=} AH$ for some $A \geq 0$ と表される．よって，$s(\kappa) \overset{\alpha}{=} B(\kappa)/A$ となる．

$$\begin{aligned}
& s(\kappa) \text{ is holomorphic families of type (A).} \\
\Longleftrightarrow\ & s(\kappa)d,\ d \in \mathcal{D}\ \text{は holomorphic.} \\
\Longleftrightarrow\ & \{B(\kappa)/A\} \cdot Au,\ u \in H\ \text{は holomorphic.} \\
\Longleftrightarrow\ & B(\kappa)u,\ u \in H\ \text{は holomorphic.} \\
\Longleftrightarrow\ & B(\kappa)\ \text{は bounded-holomorphic}
\end{aligned}$$

よって，

$$\kappa \to \kappa_0 \quad \text{ならば} \quad q(s(\kappa_0), s(\kappa)) = \|B(\kappa_0) - B(\kappa)\| \to 0.$$

On the Shilov boundary of a Riemann surface

Mikihiro HAYASHI
Hokkaido University

Seminers on Function Spaces and Function Algebras
Dec. 23–26, 2005, at Hokkaido University

1 Notations and a problem

Let R be a Riemann surface and let $H^\infty(R)$ be the algebra of all bounded analytic functions on R with sup-norm $\|f\|_\infty = \|f\|_R = \sup_{p\in R}|f(p)|$.

The **maximal ideal space** $\mathscr{M}(R)$ of $H^\infty(R)$ is the set of all nonzero continuous homomrphisms of $H^\infty(R)$ to the complex field $\mathbf{C}$. The **Gelfand transform** $\hat{f}$ of $f \in H^\infty(R)$ is a function on $\mathscr{M}(R)$ defined by $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$ for $\phi \in \mathscr{M}(R)$. The maximal ideal space $\mathscr{M}(R)$ is a compact Hausdorff space with respect to the **Gelfand toplogy**, the weakest topology among toplogies such that every Gelfand transform $\hat{f}$ is to be continuous on $\mathscr{M}(R)$.

A subset E of $\mathscr{M}(R)$ is called a **boundary** for $H^\infty(R)$ if it statisfies $\|\hat{f}\|_E = \sup_{p\in E}|\hat{f}(p)| = \|f\|_R$ for all $f \in H^\infty(R)$. The smallest closed boundary for $H^\infty(R)$, denoted by $\text{Ш}(R)$, exists and is called the **Shilov boundary** of $H^\infty(R)$.

Theorem A (Gamelin[1]) *If D is a domain in the complex plane, then the Shilov boundary $\text{Ш}(D)$ of $H^\infty(D)$ is extremely disconnected.*

In this note, we ask wheter the following theorem remains true or not for a Riemann surface. Namely,

Problem *For a Riemann surface R, is the Shilov boundary $\text{Ш}(R)$ extremely disconnected?*

At present we have only a partial answer.

In order to avoid a triviality, we assume that Riemann surface R (or plane domain D) admits a nonconstant bounded analytic function.

A point evaluation homomorphism ϕ_p at $p \in R$, defined by $\phi_p(f) = f(p)$ for $f \in H^\infty(R)$, is an element of $\mathscr{M}(R)$. This induces a natural continuous map from R into $\mathscr{M}(R)$. While this natural map may not be injective in general, we often identify R with its image in $\mathscr{M}(R)$ and regard R as a subset of $\mathscr{M}(R)$. With this convention, Gelfand transform $\hat{f}$ can be regarded as a continuous extension of f.

The proof of Theorem A is based on the following simple fact; function $1/(z-p)$ of z has simple pole at p and bounded off any neighborhood of the point p. From this fact it follows that D is homeomorphically imbedded as an open subset in $\mathscr{M}(D)$.

Let $\mathscr{P}_s(R)$ be the set of points $p \in R$ such that there exist a meromorphic function g_p on R with the following properties: (i) g_p has a simple pole at p, and (ii) g_p is bounded on $R \setminus U_p$ for any neighborhood U_p of p.

Theorem B (H.[2]) *Let R be a Riemann surface such that $H^\infty(R)$ contains a nonconstant function. Then, a point p in R belongs to the set $\mathscr{P}_s(R)$ if and only if p has a neighborhood U_p which is homeomorphically imbedded as an open subset in $\mathscr{M}(R)$.*

The 'only if' part is easy to see. From this easy part of the theorem one can extend Theorem A to those Riemann surfaces R under the condition $\mathscr{P}_s(R) = R$. The proof goes in a similar way.

In this note we consider the case that $\mathscr{P}_s(R)$ is a proper subset of R.

2 A preliminary observatrion

In this section we introduce an example of a Riemann surface. First we recall one of the examples constructed in [2]; Let $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ be the open unit disc, and set

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \Delta \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\
J_k &= [a_k, b_k], \quad 0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots, \quad a_k \uparrow 1 \\
I_k &= \cup_{j=1}^{n_k} [a_{kj}, b_{kj}], \quad a_1 = a_{k1} < b_{k1} < \cdots < a_{kn_k} < b_{kn_k} = b_k \\
&\quad (n_k \text{ are sufficiently large}) \\
D_0 &= \Delta_0, \quad D_k = \Delta_k \setminus \cup_{\ell=1}^{k-1} J_\ell \quad (k \geq 1)
\end{aligned}$$

Let W be the Reimann surface obtained by connecting two sides of intervals I_k in the sheet $D_k \setminus I_k$ $(k \geq 1)$ with the corresponding two sides in the bottom sheet $D_0 \setminus I_k$ crosswisely. If we choose integers n_k sufficiently large, then the sheets D_k converges to the bottom sheet D_0 in the maximal ideal space $\mathscr{M}(W)$ as $k \to \infty$, and we have

$$\mathscr{P}_s(W) = \cup_{k=1}^{\infty} (D_k \setminus I_k)$$

Let us consider the following subdomain W' of W:

$$\begin{aligned} \Delta'_k =& \Delta' = \{z : |z + \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}\} \quad (k \geq 1) \\ D'_k =& D_k \setminus \Delta'_k \quad (k \geq 0) \\ W' =& W \setminus \cup_{k=1}^{\infty} \Delta'_k \end{aligned}$$

We may assume that the sheets D'_k converges to $D_0 \setminus \Delta'_0$ in the maximal ideal space $\mathscr{M}(W')$ as $k \to \infty$. We then have

$$\mathscr{P}_s(W') = \Delta'_0 \cup (\cup_{k=1}^{\infty}(D'_k \setminus I_k))$$

The restrinction $\tau(f) = f|W'$ is an algebra homomorphism of $H^{\infty}(W)$ to $H^{\infty}(W')$, which induces a natural continuous map $\hat{\tau} : \mathscr{M}(W') \to H^{\infty}(W)$. For $k \geq 1$ set

$$\Gamma_k = \hat{\tau}^{-1}(\partial \Delta'_k),$$

which is homeomorphic to $\mathscr{M}(\Delta) \setminus \Delta$.

Since the sheets D'_k converges to the subdomain D'_0 of the bottom sheet D_0, one might expect that Γ_k converges to a compact subset, $\partial\Delta'_0$, of the bottom sheet. If this would be true, then the circle $\partial\Delta'_0$ should be a part of the Shilov boundary $\text{Ш}(W')$ and we would have a counter example to the Problem.

This expectation is false. Namely,

2.1 Theorem *The closure of* $\cup_{k\geq 1}\Gamma_k$ *in* $\mathscr{M}(W')$ *is disjoint from the bottom sheet* D_0.

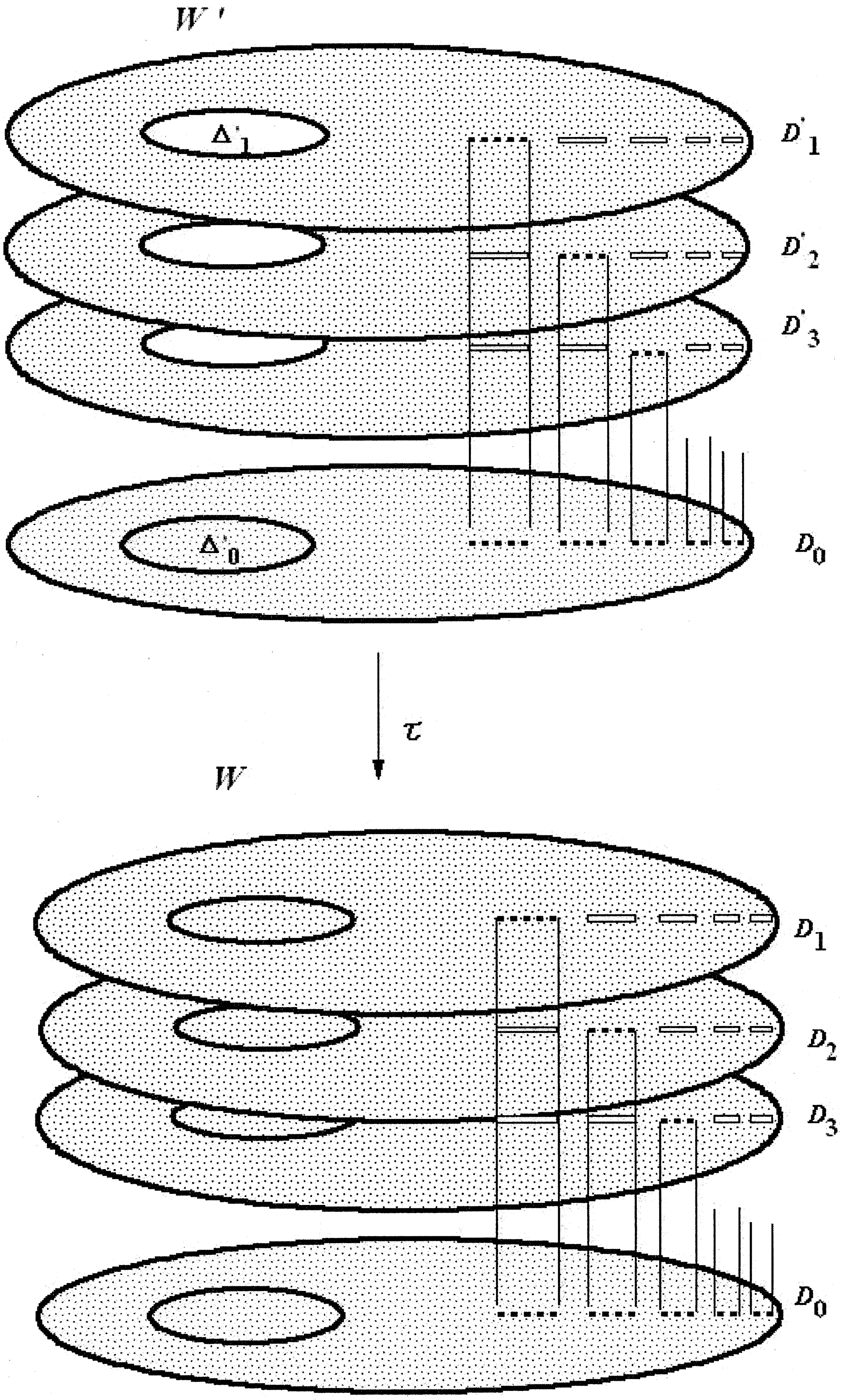
Proof: Let $0 < \delta < \delta' << 1$ and $\varepsilon_k > 0$ with $\sum \varepsilon_k << 1$. Let $f_k(z) = \left(\frac{4}{z+\frac{1}{2}}\right)^{m_k}$ on D'_k. Using Cauchy differential

$$\omega(z,\zeta)d\zeta = \left\{\frac{1}{\zeta - z} + (\text{bounded analytic part})\right\} d\zeta$$

on $\mathscr{P}_s(W') \times W'$, write

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\zeta+\frac{1}{2}|=\frac{1}{4}+\delta'} - \int_{|\zeta+\frac{1}{2}|=\frac{1}{4}+\delta}\right) f_k(\zeta)\omega(z,\zeta)d\zeta = h_k(z) - g_k(z).$$

We choose m_k so large that (a) g_k is analytic on W' and $|g_k| \leq \varepsilon_k$ on $W' \setminus \{z \in D'_k : |z + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4} + \delta'\}$; (b) h_k is analytic on $\{z \in D'_k : |z + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4} + \delta\}$ and $|h_k| < \varepsilon_k$ on $\partial\Delta'_k$. Set $G = \sum_{k\geq 1} g_k$. Since $g_k = h_k - f_k$, it follows that $1 - \sum_{k\geq 1}\varepsilon_k \leq |G| \leq 1 + \sum_{k\geq 1}\varepsilon_k$ on each $\partial\Delta'_\ell$. Hence, $G \in H^{\infty}(W')$, and $|G| < \sum_{k\geq 1}\varepsilon_k$ on the bottom sheet D_0. This proves the theorem.



W'
Δ'1
D'1
D'2
D'3
Δ'0
D0
τ
W
D1
D2
D3
D0

3 Main theorem

Furthemore, the Shilov boundaries $\text{Ш}(W)$ and $\text{Ш}(W')$ are both extremely disconnected. This follows from the following theorem.

3.1 Theorem *Let R be a Riemann surface. Suppose that $\mathscr{P}_s(R)$ is dense in R with respect to the norm topology of $\mathscr{M}(R)$ and that*

> *(*) each connected componet U_k of $\mathscr{P}_s(R)$ contains a point q_k such that $\sup_k |f(q_k)| < \|f\|_R$ for every $f \in H^\infty(R)$.*

Then, $\text{Ш}(R)$ is extremely disconnected.

In order to prove the theorem, we can use the same method as Gamelin ([1]); In fact, we can prove the following sequence of lemmas.

3.1 Lemma *Let E is a closed subset of $\mathscr{M}(R)$. and $\hat{E} = \{\phi \in \mathscr{M}(R) : |\hat{f}(\phi)| \le \|\hat{f}\|_E, f \in H^\infty(R)\}$ (the H^∞-convex hull of E). Then, each connected component U of $\mathscr{P}_s(R) \setminus E$ satisfies either $U \subset \hat{E}$ or $U \cap \hat{E} = \emptyset$.*

3.2 Lemma *Linear functional $\Lambda(f) = \sum_k f(q_k)/2^{-k}$ is bounded on $H^\infty(R)$.*

3.3 Lemma *Any measure μ on $\text{Ш}(R)$ representing Λ has the full support $\text{Ш}(R)$.*

3.4 Lemma *If $w \in C_{\mathbf{R}}(\text{Ш}(R))$, then there exists $f \in H^\infty(R)$ with $|f| = e^w$ on $\text{Ш}(R)$.*

3.5 Lemma *There exists a sequence $S = \{a_n\}$ in $\mathscr{P}_s(R)$ such that S has no cluster points in $\mathscr{P}_s(R)$, and $\|f\|_S = \|f\|_R$ for $f \in H^\infty(R)$.*

3.6 Lemma *If T is a subset of S, then $\overline{T} \cap \text{Ш}(R)$ is open in $\text{Ш}(R)$.*

We note that those lemmas are modified from Gamelin's orginal ones in the case of plain domains, . A main differencecomes come from the fact that the pole set $\mathscr{P}_s(R)$ may not be connected. It may even have infinitely many connected compoments. If it is connected, then the proof gose almost in the same way as Gamelin's. We also note that the assumption (*) is superfluous when $\mathscr{P}_s(R)$ has only a finite number of connected compoments. In general, we do not know where this assuption is necessary or not.

Spectrum-preserving maps between two commutative Banach algebras, I

2つの可換Banach環の間のスペクトル保存写像, I

Hiroyuki Takagi[1] 高木 啓行 (信州大・理)
Osamu Hatori[2] 羽鳥 理 (新潟大・理)
Takeshi Miura[3] 三浦 毅 (山形大・工)

Abstract. Let T be a surjective map from a function algebra A onto another function algebra B such that $T1 = 1$. Suppose that the range of the product fg of any $f, g \in A$ coincides with the range of the product $Tf\,Tg$ of their images. Then T is an isometric isomorphism from A onto B.

§1. Molnár の定理

この共同研究を始める きっかけは, Molnár [3] による 次の定理であった:

Molnár の定理 ([3]). X を 第1可算公理をみたすコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体の Banach 環とする. $C(X)$ から $C(X)$ への (線形性も乗法性も仮定しない) 全射 T は, 2条件

(1) $\sigma(Tf\,Tg) = \sigma(fg) \quad (f, g \in C(X))$

(2) $T1 = 1$

をみたすとき, $C(X)$ から $C(X)$ の上への等長同形写像になる.

定理に関連した用語や記号について, あとの話の展開を 見据えて, 説明しておこう.

単位的 (= 単位元をもつ) 可換Banach環 A の元 f に対して, f のスペクトルを $\sigma(f)$ とかく. A の極大イデアル空間を M_A と表し, f の Gelfand 変換を $\widehat{f}$ とかくと, $\sigma(f) = \widehat{f}(M_A)$ である. とくに $A = C(X)$ の場合は, $M_{C(X)} = X$ と考えられ, $\sigma(f) = f(X)$ がいえる.

つぎに, A, B を 単位的可換Banach環とし, T を A から B への写像とする. T は, 和とスカラー積と積を保存し しかも 全単射のとき, A から B の上への**同形写像** (isomorphism) であるという. さらに, ノルムを保存するときは, **等長** (isometric) という. 関数環から関数環の上への同形写像は つねに等長になることが知られている. さて, T が 2条件

(1) $\sigma(Tf\,Tg) = \sigma(fg) \quad (f, g \in A)$

(2) $T1 = 1$ ——1 は A, B の単位元を表す

1. Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University, Matsumoto 390–8621, Japan. *E-mail*: `takagi@math.shinshu-u.ac.jp` / 2. Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University, Niigata 950–2181, Japan. *E-mail*: `hatori@math.sc.niigata-u.ac.jp` / 3. Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University, Yonezawa 992–8510, Japan. *E-mail*: `miura@yz.yamagata-u.ac.jp`

をみたすとき,

(3) $\sigma(Tf)=\sigma(f) \quad (f\in A)$

となるので, T は スペクトル保存写像といえる. また, (1) をみたす写像 T は, 乗法的スペクトル保存 (multiplicatively spectrum-preserving) 写像と呼ばれることがある. Molnár の定理においては, $A=B=C(X)$ だから, (1) と (3) は それぞれ

(1)′ $(Tf\,Tg)(X)=(fg)(X) \quad (f,g\in C(X))$

(3)′ $(Tf)(X)=f(X) \quad (f\in C(X))$

とかける. だから, T は 乗法的値域保存写像 あるいは 値域保存写像ともいえる.

§2. 問題提起と結果

Banach 環の有名な問題のひとつに, 次の保存問題がある:

保存問題 (preserver problem) : 2 つの Banach 環の間の写像は, どのような構造を保存するとき, 他の構造を保存するか?

Molnár の定理は,

$C(X)$ から $C(X)$ への全射が,

積のスペクトルと 単位元を 保存するとき, 和とスカラー積と積を 保存する

といっているから, 保存問題のひとつの解答といえる. このような定理の背景は, あとの講演 II で 考察することにし, ここでは, 定理から直に感じる次の疑問について 考えたい:

疑問: Molnár の定理の $C(X)$ を 他の関数環におきかえたら, どうなるか?

実際, Molnár の証明では, $C(X)$ に属する実数値関数全体 $C_{\mathbb{R}}(X)$ について, 次の 2 つの事実を 有効 かつ 頻繁に用いている:

- ∘ $T(C_{\mathbb{R}}(X))\subset C_{\mathbb{R}}(X)$ であること ((3)′ より明らか).
- ∘ $C_{\mathbb{R}}(X)$ の順序構造 (大小関係 $f\leq g$).

したがって, Molnár の証明を, そのまま 一般の関数環の場合に拡張することはできない. われわれは, $C_{\mathbb{R}}(X)$ の代わりに, 関数環の峰関数の集合を考えることにより, Molnár の定理を, 一般の関数環の場合に拡張することができた.

主定理 ([1]). X, Y を コンパクト Hausdorff 空間とし, A, B を それぞれ X, Y 上の関数環とする. A から B への全射 T は, 2 条件

(1)′ $(Tf\,Tg)(Y)=(fg)(X) \quad (f,g\in A)$

(2) $T1=1$

をみたすとき, A から B の上への等長同形写像になる.

主定理で, $A=B=C(X)$ とすると, Molnár の定理になる. 主定理においては, X や Y が第 1 可算公理をみたす必要がないことも, 付記しておこう.

§3. 主定理の証明

主定理の証明のあらすじを述べよう．詳しくは, [1] を参照されたい．

証明のあらすじ 写像 $T: A \to B$ が同形写像になることを示すために, 次の方針をとる：

[方針] B の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(B)$ から A の Choquet 境界 $\mathrm{Ch}(A)$ への全単射 φ が存在して, 次の等式が成り立つ：

$$(Tf)(y) = f(\varphi(y)) \qquad (y \in \mathrm{Ch}(B),\ f \in A). \tag{4}$$

このことが示されれば, Choquet 境界の性質から, $T: A \to B$ は同形写像になる (等長になることは自明)．この方針は, Banach-Stone の定理 (や Novinger [4] によるその拡張) の証明などでけっこう知られていて, Molnár の証明もこの方針に沿っている．われわれもこの方針に沿うが, それを遂行するために, Molnár とは異なった道具を用いる．その道具は, 峰関数 (peak function) である．

[道具] $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ $(r > 0)$ とかき, $x \in \mathrm{Ch}(A)$ と $y \in \mathrm{Ch}(B)$ に対して,

$$P_x = \left\{ u \in A : u(X) \subset D_1 \cup \{1\},\ u(x) = 1 \right\}$$
$$Q_y = \left\{ v \in B : v(Y) \subset D_1 \cup \{1\},\ v(y) = 1 \right\}$$

とおく．また, A の峰関数の全体を $\mathcal{P}$ とかく．$\mathcal{P} = \bigcup_{x \in \mathrm{Ch}(A)} P_x$ である．

峰関数には, 次のような性質がある．仮定 $(1)'$, (2) より, $(Tf)(Y) = f(X)$ $(f \in A)$ だから,

$$u: A \text{ の峰関数} \iff Tu: B \text{ の峰関数} \tag{5}$$

がいえる．また, 次の補題で述べるように, 峰関数は関数値 $f(x)$ を浮き彫りにするはたらきをもつ：

[補題] $f \in A$ と $x \in \mathrm{Ch}(A)$ に対して, $f(x) \neq 0$ であるとき, うまく $u \in P_x$ を選べば, $(fu)(X) \subset D_{|f(x)|} \cup \{f(x)\}$ となる．

この補題は, (峰集合に関する)Bishop の定理の手法で, 証明できる．

方針の証明に入ろう．4 段階に分けて述べる．

[Step 1] **T が単射であることを示す**： $Tf = Tg$ $(f, g \in A)$ とすると, $(1)'$ より,

$$(fu)(X) = (Tf\,Tu)(Y) = (Tg\,Tu)(Y) = (gu)(X) \quad \text{for all } u \in \mathcal{P}$$

だから, 同値性

$$f = g \iff (fu)(X) = (gu)(X) \text{ for all } u \in \mathcal{P}.$$

に注意すると, $f = g$ を得る．上の同値性は, 補題を用いれば, 比較的容易に証明できる．

[Step 2] **方針の写像 φ をつくる**： 任意に $y \in \mathrm{Ch}(B)$ をとる．各 $u \in T^{-1}(Q_y)$ に対して, (5) より, $u \in \mathcal{P}$ である．そこで,

$$K = \bigcap \left\{ u^{-1}(\{1\}) : u \in T^{-1}(Q_y) \right\}$$

とおくと, K が $\mathrm{Ch}(A)$ の 1 点 x からなることが示せる (関数環の道具が若干必要である)．そこで, $\varphi(y) = x$ と定める．

[Step 3] **$\varphi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ が全単射であることを示す**： Step 1 より, $T: A \to B$ は全単射だから, $T^{-1}: B \to A$ に対しても, Step 2 と同様の議論ができる．このことから, φ が全単射であることがいえ, 同時に, $T(P_{\varphi(y)}) = Q_y$ $(y \in \mathrm{Ch}(B))$ も得る．

[Step 4] **等式 (4) を示す**： $y \in \mathrm{Ch}(B)$ とする．$T(P_{\varphi(y)}) = Q_y$ だから, $u \in P_{\varphi(y)}$ に対して,

$$(Tu)(y) = 1 = u(\varphi(x))$$

が成り立つ．このことと補題を用いると, 任意の $f \in A$ に対して, (4) が成り立つことが示せる． □

§4. 関 連 結 果

Molnár の定理や主定理において, 仮定 $T1=1$ は あまり本質的ではない. というのは, この仮定を省いても, T の形が決定できるからである. 実際, 定理 1 から, 次の系が 容易にみちびける:

系 1 ([1]). X, Y を コンパクト Hausdorff 空間とし, A, B を それぞれ X, Y 上の関数環とする. A から B への全射 T は,

(1)′ $$(Tf\,Tg)(Y)=(fg)(X) \qquad (f,g\in A)$$

をみたすとき, M_B から M_A の上への同相写像 φ と, $\widehat{\tau}(M_B)\subset\{-1,1\}$ である $\tau\in B$ を用いて,

$$\widehat{Tf}(y)=\widehat{\tau}(y)\,\widehat{f}(\varphi(y)) \qquad (y\in M_B,\ f\in A)$$

と表される.

$X=Y$ が 第 1 可算公理をみたし, $A=B=C(X)$ の場合が, [3] の Theorem 5 である.

つぎに, 系 1 の仮定 (1)′ を,

$$(\overline{Tf}\,Tg)(Y)=(\overline{f}g)(X) \qquad (f,g\in A)$$

に おきかえてみよう. この仮定をおくには, 関数環 A, B が 自己共役でなければならない. Stone-Weierstrass の定理より, X 上の 自己共役な関数環は $C(X)$ だけだから, その設定で仮定のおきかえを試みると, 次の系が得られる:

系 2 ([1]). X, Y を コンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$, $C(Y)$ を それぞれ X, Y 上の複素数値連続関数全体の関数環とする. $C(X)$ から $C(Y)$ への全射 T は,

$$(\overline{Tf}\,Tg)(Y)=(\overline{f}g)(X) \qquad (f,g\in C(X))$$

をみたすとき, Y から X の上への同相写像 φ と, $\widehat{\tau}(Y)\subset\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ である $\tau\in C(Y)$ を用いて,

$$Tf(y)=\tau(y)\,f(\varphi(y)) \qquad (y\in Y,\ f\in A)$$

と表される.

$X=Y$ が 第 1 可算公理をみたす場合が, [3] の Theorem 6 にあたる.

われわれの研究とは独立に (われわれより僅差で早く), Rao と Roy は 次の定理を示していた:

Rao-Roy の定理 ([5]). X を コンパクト Hausdorff 空間とし, A を X 上の関数環とする. A から A への全射 T は, 2 条件

(1) $\sigma(Tf\,Tg)=\sigma(fg) \quad (f,g\in A)$

(2) $T1=1$

をみたすとき, A から A の上への等長同形写像になる.

主定理において, $A=B$ かつ $M_A=X$ の場合が, Rao-Roy の定理になる.

主定理の証明では, φ を構成する Step 2 が要になる. そこでは, 峰関数 u の峰集合 $u^{-1}(\{1\})$ を利用した. だから, T が保存するのは, 値域全体ではなく, 最大絶対値をとる値域の部分だけで よさそうである. このような部分は, 最大値域 (peripheral range) と呼ばれ, 関数 $f \in C(X)$ に対して,

$$\mathrm{Ran}_\pi(f) = \left\{ f(x) : |f(x)| = \|f\|, \, x \in X \right\}$$

と定義される. 最近, Luttman と Tonev は, 次の定理を証明したそうである:

> **Luttman-Tonev の定理** ([2]). X, Y を コンパクト Hausdorff 空間とし, A, B を それぞれ X, Y 上の関数環とする. A から B への全射 T は, 2条件
>
> (1)″ $\mathrm{Ran}_\pi(Tf\,Tg) = \mathrm{Ran}_\pi(fg) \quad (f, g \in A)$
>
> (2) $T1 = 1$
>
> をみたすとき, A から B の上への等長同形写像になる.

この定理は, 主定理の拡張になっている.

最後に: この講演 I では, Molnár の定理を拡張することを中心に述べてきたが, 各定理の内容の吟味も 必要であろう. 一見したところ, 仮定 "T が全射" や 仮定

(1) $\sigma(Tf\,Tg) = \sigma(fg)$

は, 奇異にうつるかもしれない. しかし, 次のような意味で, これらの仮定は正当なのである. 仮定 "T が全射" をはずしたり, 仮定 (1) を "$\sigma(Tf) = \sigma(f)$" や "$\sigma(Tf\,Tg) \subset \sigma(fg)$" にゆるめると, 定理は 成り立たなくなる. そのような反例は, あとの講演 II で与える. また, 講演 II では, 保存問題に関する背景を踏まえ, 主定理の "関数環" を, "可換 Banach 環" に拡張することも 試みる.

参 考 文 献

[1] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via non-linear range-preserving properties*, *to appear in* Proc. Amer. Math. Soc.

[2] A. Luttman and T. Tonev, *Algebra isomorphisms and* Ran_π*-multiplicativity*, *preprint*.

[3] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2002), 111–120.

[4] W. P. Novinger, *Linear isometries of subspaces of spaces of continuous functions*, Studia Math., **53** (1975), 273–276.

[5] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicatively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133** (2005), 1135–1142.

SPECTRUM PRESERVING MAPS BETWEEN TWO COMMUTATIVE BANACH ALGEBRAS. II
(2つの可換BANACH環の間のスペクトル保存写像，II)

OSAMU HATORI (NIIGATA UNIVERSITY) (羽鳥　理（新潟大学理学部）)
TAKESHI MIURA (YAMAGATA UNIVERSITY) (三浦　毅（山形大学工学部）)
HIROYUKI TAKAGI (SHINSYU UNIVERSITY) (高木　啓行（信州大学理学部）)

Abstract. Let T be a surjective map from a unital semi-simple commutative Banach algebra A onto a unital commutative Banach algebra B which preserves the unit element. Suppose that the spectrum $\sigma(fg)$ of the product of any two elements f and g in A coincides with the spectrum $\sigma(TfTg)$. Then B is semi-simple and T is an isomorphism. The condition that T is surjective is essential. An example of a surjective unital map from a commutative C*-algebra onto itself which is not linear nor multiplicative such that $\sigma(TfTg) \subset \sigma(fg)$ holds for every f, g is given.

1. スペクトル保存線形写像

スペクトル保存写像の研究は，Banach環上の線形汎関数が乗法的であるための十分条件をスペクトルに関する条件で与えたGleason-Kahane-Żelazkoの定理 ([8, 13, 26]) 以降大変活発に研究されているが，その歴史はFrobenius [7] の行列環上の線形写像で行列式を保存するものの研究まで遡ることができるようである。Gleason-Kahane-Żelazkoの研究を享けてKaplanskyは [14] の中で単位的Banach環 A から B への単位元と逆元を保存する線形写像はJordan射であるか？という問題に言及している。Gleason-Kahane-Żelazkoの定理を用いると，単位的Banach環から単位的半単純可換Banach環への線形写像が単位元と可逆元を保存するならば，この写像は乗法的であることが簡単に示される。これは半単純可換Banach環には乗法的線形汎関数が豊富に存在することが証明のポイントで非可換の場合にはそのままでは適用できないと思われる。実際，次の予想はまだ未解決であると思われる。: 単位的Banach環から単位的半単純（非可換）Banach環の上への線形写像が単位元と可逆元を保存するならば，この写像はJordan射であろう。関連する結果は [1, 2, 12, 19, 24] またはその参考文献などを参照のこと。

2. Kowalski-Słodkowskiの定理とひとつの帰結

線形でも乗法的でもなくスペクトルを保存あるいは可逆元を保存する写像はほとんど任意に作ることができる。一方，Kowalski-Słodkowski [15] はBanach環で定義された汎関数に関して，線形性よりはるかに弱い仮定（弱加法性）の下でGleason-Kahane-Żelazkoの定理が成立することを示した。

Kowalski-Słodkowskiの定理 . f を *Banach* 環 A 上で定義される複素数値関数とする。さらに，

$$f(0) = 0,$$

$$f(a) - f(b) \in \sigma(a - b) \qquad a, b \in A$$

が成り立つとする。このとき，f は線形かつ乗法的である。

証明は，Lipschitz関数のGateaux微分可能性に関するMankiewicz [17] の結果（Rdemacherの定理の拡張）とWeylの補題を用いて汎関数の正則性を導き，そこから線形性を示して，最後にGleason-Kahane-Żelazkoの定理を用いて乗法性を示すことにより与えられている。この定理から次は簡単に導かれる。

定理 2.1. T を単位的 *Banach* 環から単位的半単純可換 *Banach* 環への写像とする。さらに，$T(0)=0$ で

$$\sigma(T(a)-T(b)) \subset \sigma(a-b) \qquad a,b \in A$$

をみたすとする。このとき，T は線形かつ乗法的である。

3. 弱乗法的スペクトル保存写像

Kowalski-Słodkowski [15] 以降の線形性を仮定しないスペクトル保存写像の線形性の研究としては Kowalski-Słodkowski の定理の拡張を与えた Badea [3] の研究を初めとしていくつかあったが，最近になり特に活発になってきたようである（cf. Baribeau-Ransford [4]）。弱加法性に近い仮定のもとでの Frobenius 型の定理の研究もみられる（cf. [6, 23, 25]。また，Molnár [18] は弱乗法的スペクトル保存写像について研究を行い次の結果を得た。

定理 3.1 (Molnár [18]). X を第一加算公理をみたすコンパクト *Hausdorff* 空間とし，$C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体からなる *Banach* 環とする。T を $C(X)$ から $C(X)$ の上への写像で $T(1)=1$ かつ

$$(TfTg)(X) = fg(X) \qquad f,g \in C(X)$$

をみたすとする。このとき T は同形写像である。

Molnár は同じ論文で無限次元 Hilbert 空間上の有界線形作用素全体からなる Banach 環上の写像についても同様の結論を得ているが，本講演ではこれ以上は言及しない。

Kowalski-Słodkowski の定理の条件を形式的に書き換えた命題「Banach 環上の弱乗法的スペクトル不変汎関数は，線形かつ乗法的である」が成り立つならば，これを用いて Molnár の定理とその Banach 環への拡張が，定理から定理 2.1 を導いたのと同様な方法により，示される。しかしながら実際はこのようにはいかない。つまり弱乗法的スペクトル不変汎関数で乗法的であるが線形ではないものが任意の半単純可換 Banach 環上に簡単に構成できるし，さらに線形でも乗法的でもないものも Cantor 集合 K 上の複素数値連続関数全体の可換 Banach 環上に存在することがわかる。

例 3.1. $\mathbf{C}$ を *Cantor* の 3 進集合とし，$\mathbf{C}_1=\mathbf{C}\cap[0,\frac{1}{3}]$, $\mathbf{C}_2=\mathbf{C}\cap[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$, $\mathbf{C}_3=\mathbf{C}\cap[\frac{8}{9},1]$ とする。各 $j=1,2,3$ に対して，π_j を $\mathbf{C}_j$ から $\mathbf{C}$ の上への同相写像とする。A_1, A_2, A_3 を $C(\mathbf{C})$ の互いに素な部分集合で，各 $j=1,2,3$ に対して $t^j \in A_j$ で，

$$\cup_{j=1}^{3} A_j = \{C(\mathbf{C}) : 0 \in \sigma(f)\}$$

とする。また，

$$A_4 = \{f \in C(\mathbf{C}) : 0 \notin \sigma(f)\}$$

とする。$C(\mathbf{C})$ からそれ自身への写像 T を次のように定める：もし $f \in A_4$ ならば，

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f\circ\pi_1(x), & x \in \mathbf{C}_1 \\ f\circ\pi_2(x), & x \in \mathbf{C}_2 \\ f\circ\pi_3(x), & x \in \mathbf{C}_3; \end{cases}$$

もし $f \in A_1$ ならば，

$$(Tf)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{C}_1 \\ f\circ\pi_2(x), & x \in \mathbf{C}_2 \\ f\circ\pi_3(x), & x \in \mathbf{C}_3; \end{cases}$$

もし $f \in A_2$ ならば，

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f\circ\pi_1(x), & x \in \mathbf{C}_1 \\ 0, & x \in \mathbf{C}_2 \\ f\circ\pi_3(x), & x \in \mathbf{C}_3; \end{cases}$$

もし $f \in A_3$ ならば，

$$(Tf)(x) = \begin{cases} f \circ \pi_1(x), & x \in \mathbf{C}_1 \\ f \circ \pi_2(x), & x \in \mathbf{C}_2 \\ 0, & x \in \mathbf{C}_3 \end{cases}$$

と定める。すると簡単な計算により

$$T1 = 1$$

かつ

$$\sigma(TfTg) = \sigma(fg) \qquad f, g \in C(\mathbf{C})$$

が成り立つことが分かる。一方，T は線形でも乗法的でもない。

また，$x \in \mathbf{C}_1$ とする。すると $\phi(f) = (T(f))(x)$ $(f \in C(\mathbf{C}))$ により定義された $C(\mathbf{C})$ 上の汎関数 ϕ は *on*

$$\phi(f)\phi(g) \in \sigma(fg) \qquad f, g \in C(\mathbf{C})$$

であるが，線形でも乗法的でもない。

そこで，どのような Banach 環に対して Molnár 型の定理が成立するのか興味がもたれる。

定理 3.2. A と B を単位的可換 *Banach* 環で，さらに A は半単純であるとする。T を A から B の上への写像で $T(1) = 1$ であり，さらに

$$\sigma(TfTg) = \sigma(fg) \qquad f, g \in A$$

であるとする。このとき，T は同形写像であり B は半単純である。

上の定理において仮定
・T が上への写像であること
・スペクトルに関する条件が $\subset$ ではなく $=$ であること
は本質的である。実際，例 3.1 の T は上への写像ではないが，定理 3.2 の他の条件はみたす。また，次の例からスペクトルに関する条件では，$=$ の成立は本質的であることもわかる。

例 3.2. $\bar{I}$ を整数全体からなる離散空間の一点コンパクト化とする。整数 n に対して，

$$A_n = \{f \in C(\bar{I}) : m \leq n \text{ ならば } f(m) = 0,\ n < k \text{ ならば } f(k) \neq 0\}$$

と定める。$C(\bar{I})$ 上の写像 T を

$$Tf = f \qquad \textit{for } f \in C(\bar{I}) \setminus \cup_{n \in I} A_n,$$

また，$f \in A_n$ なら

$$(T(f))(l) = \begin{cases} 0 & \textit{if } l = n+1 \\ f(l) & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

により定める。すると T は $C(\bar{I})$ からそれ自身の**上への**写像となり，

$$T(f)T(g)(\bar{I}) \subset fg(\bar{I}) \qquad (f, g \in C(\bar{I})).$$

をみたす。定義から T は線形でもなく乗法的でもない。

4. 定理 3.2 の証明の要点

一般に関数環には弱峰点や峰関数が豊富にあり，峰関数のノルムも 1 である。A，B が関数環の場合はこのようなことを用いて証明がなされた（[9]）。一方，関数環でない場合はこの証明は直接は適用できない。極大イデアル空間が距離空間であるような単位的半単純可換 Banach 環においては Dale [5] により，Choquet 境界がŠilov 境界で稠密であることが示されている（cf. [11]）が，峰関数のノルムが一様有界であることはまったく期待できない。関数環の場合に与えた証明は，可換 Banach 環の場合には，極大イデアル空間が距離空間であっても，そのままの形では有効ではない。一方，A，B ともに半単純であれば T は A の Gelfant 変換から B の Gelfand 変換への写像とみなしてよい。そのように考えた上で，さらに T を A の Gelfand 変換の $C(M_A)$ での一様ノルムによる閉包 $\mathrm{cl}(A)$ から B の Gelfand 変換の $C(M_B)$ での一様ノルムによる閉包 $\mathrm{cl}(B)$ の上への写像に自然に拡張できれば，関数環の場合の結果に帰着できる。このような拡張は，定理 3.2 が証明された後には，可能であることは分かる。ところが，定理 3.2 を用いず示すことは現時点ではできていない。これができれば，Banach 環に単位元の存在を仮定しない場合の定理 3.2 に相当する命題の証明の目処がたつと思われる。

しかしながら，我々は関数環の弱峰点と峰関数の理論を用いて単位的可換 Banach 環に対する結果の証明を得ることができた。要点は次である。以下では A と B はともに半単純でさらに Gelfand 変換したものと同一視する。

補題 4.1. A の列 $\{f_n\}$ と $f \in \mathrm{cl}(A)$ を考える。ただし， $0 \notin f(M_A)$ とする。今，f_n が f に一様収束したとする。すると，$\{\widetilde{T} f_n\}$ は一様ノルムに関する *Cauchy* 列である。

A の極大イデアルと $\mathrm{cl}(A)$ の極大イデアル空間は同じなので，上の補題から T は $A \cup (\mathrm{cl}(A))^{-1}$ から $B \cup (\mathrm{cl}(B))^{-1}$ への写像に拡張できる。しかも，拡張した写像 $\bar{T}$ についても，

・単射かつ全射であり;

・任意の $f, g \in A \cup \mathrm{cl}(A)$ に対して $\sigma(\bar{T} f \bar{T} g) = \sigma(fg)$ が成り立つ

ことが証明できる。つまり，$\bar{T}$ は M_A 上の関数環 $\mathrm{cl}(A)$ の一部までは重要な条件を保ったまま拡張できることが分かる。そこで，$\mathrm{cl}(A)$ の弱峰集合と峰関数を考慮し，A と B が関数環である場合の議論を修正し適用すると定理 3.2 は証明できる。

補題 4.1 の証明を行う。$\{f_n\}$ が可逆関数 f に収束する収束列であるから，$\frac{1}{f_n}$ が定義でき，$\{\frac{1}{f_n}\}$ は一様有界であるとしてよい。従って $n, m \to \infty$ とすると，

$$\left\|\frac{f_n}{f_m} - 1\right\| \leq \left\|\frac{1}{f_m}\right\| \|f_n - f_m\| \to 0 \tag{1}$$

である。また，

$$\sigma(\bar{T} f_m \bar{T}(\frac{1}{f_m})) = \sigma(f_m \cdot \frac{1}{f_m}) = \{1\}$$

であるから，

$$\bar{T}(\frac{1}{f_m}) = \frac{1}{\bar{T}(f_m)}$$

が成り立つ。よってスペクトルに関する条件から

$$\sigma(\frac{\bar{T} f_n}{\bar{T} f_m}) = \sigma(f_n f_m)$$

が成り立つので

$$\left\|\frac{\bar{T} f_n}{\bar{T} f_m} - 1\right\| = \left\|\frac{f_n}{f_m} - 1\right\|$$

が成り立ち，また $\bar{T}(1) = 1$ なので

$$\sigma(\bar{T} f_n) = \sigma(f_n)$$

となるから，

$$\|\bar{T}f_n\| = \|f_n\|$$

である。以上から

$$\|\bar{T}f_n - \bar{T}f_m\| \leq \|\bar{T}f_m\|\|\|\frac{\bar{T}f_n}{\bar{T}f_m} - 1\| = \|f_n\|\|\frac{f_n}{f_m} - 1\|$$

となり，従って $\{\bar{T}f_n\}$ は Cauchy 列である。 □

定理 3.2 の証明では単位元の存在を用いているため，単位元の存在しない Banach 環に対しては同様の議論を適用することはできない。しかし，我々は次を予想している。

予想. A と B を半単純可換 Banach 環とする。T は A から B の上への写像であり

$$\sigma(TfTg) = \sigma(fg) \qquad f, g \in A$$

であるとする。このとき，T は同形写像 $\times$signum function である。

A と B の Gelfand 変換が一様ノルムに関して閉集合である場合については [21] で実質的な証明が与えられている。

5. 対称 $*$-可換 Banach 環の場合

A を $*$-可換 Banach 環とする。任意の $f \in A$ について，f^* の Gelfand 変換と f の Gelfand 変換の複素共役が一致するとき A を対称 $*$-可換 Banach 環という。この章では対称 $*$-可換 Banach 環上の弱乗法的スペクトル保存写像について述べる。Molnár [18] は，第一加算公理をみたすコンパクト Hausdorff 空間 K 上の複素数値連続関数全体からなる Banach 環 $C(K)$ からそれ自身の上への写像 T について，$T(1) = 1$ であり

$$\overline{Tf}Tg(K) = \overline{f}g(K) \qquad f, g \in C(K)$$

であるならば，T は同形写像であることを証明した。次は，その拡張である。

定理 5.1. A と B を単位的対称 $*$-可換 *Banach* 環で，さらに A は半単純であるとする。T は A から B の上への写像で $T(1) = 1$ をみたすものとする。また，

$$\sigma((T(f)^*T(g)) = \sigma(f^*g) \qquad f, g \in A$$

をみたすとする。このとき，T は $*$-同形写像である。

証明は Stone-Weierstrass の定理を用いて，スペクトルの条件から，定理 3.2 のスペクトルの条件を導くことによる。

6. 関連する最近の結果

この章を通して X 上の関数環 A から Y 上の関数環 B の上への写像 T で $T(1) = 1$ をみたすものを考える。さらに，以下の条件を考える。

(RR) $\sigma(TfTg) = \sigma(fg) \qquad (f, g \in A);$
(HMT) $(TfTg)(Y) = fg(X) \qquad (f, g \in A);$
(LT) $\pi((TfTg)(Y)) = \pi(fg(X)) \qquad (f, g \in A).$

T が条件 (RR) をみたすと T は同形写像であることは Rao-Roy [20] が実質的に証明している。また，(HMT) をみたす T が同形写像であることは [9] で示された。複素平面のコンパクト集合 S に対して

$$\pi(S) = \{z \in S : |z| = \sup_{w \in S} |w|\}$$

とする。$f \in A$ に対して，$\pi(f(X))$ を peripheral range という。(LT) は peripheral range を保存することを意味する。Luttman-Tonev [16] は，(LT) をみたす T は同形写像であることを証明した。Luttman-Tonev の結果は Rao-Roy の結果の，また，HMT の結果の拡張である。最後に関連する問題をひとつ挙げる。

問題. 単位的半単純可換 Banach 環から単位的半単純可換 Banach 環の上への写像で，単位元と"peripheral spectrum"を保存する写像は同形写像か？

f の peripheral spectrum は $\pi(\sigma(f))$ により定義される。Rao-Tonev-Toneva [22] は peripheral spectrum を保存する関数環上の写像について研究している。

References

[1] B. Aupetit, *Spectrum-preserving linear mapping between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, Jour. London Math. Soc., **62**(2000)917–924

[2] B. Aupetit and H. du T. Mouton, *Spectrum preserving linear mapping in Banach algebras*, Studia Math., **109**(1994)91–100

[3] C. Badea, *The Gleason-Kahane-Zelazko theorem and Ransford's generalised spectra*, C. R. Acad. Sci. Paris, I **313**(1991)679–683

[4] L. Baribeau and T. Ransford, *Non-linear spetrum-preserving maps*, Bull. London Math. Soc., **32**(2000)8–14

[5] H. G. Dales, *Boundaries and peak points of Banach function algberas*, Proc. London Math. Soc., **21**(1971)121–136

[6] G. Dolinar and P. Šemrl, *Determinant preserving maps on matrix algebras*, Linear Algebra Appl., **348**(2002)189–192

[7] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzurngsber. Deutsch. Akad. Wiss., Berlin, (1897)994–1015

[8] A. M. Gleason, *A characterization of masimal ideals*, J. Analyse Math., **19**(1967)171–172

[9] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Characterizations of isometric isomorphisms between uniform algebras via non-linear range-preserving properties*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear

[10] O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative*, preprint

[11] T. G. Honary, *The density of peak points in the shilov boundary of a Banach function algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **103**(1986)480–482

[12] A. A. Jafarian and A. R. Sourour, *Spectrum-preserving linear maps*, Jour. Funct. Anal., **66**(1987)255-261

[13] J.-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **29**(1968)339–343

[14] I. Kaplansky, "Algebraic and Analytic operator algebras", 1970

[15] S. Kowalski and Z. Słodkowski, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math., **67**(1980)215–223

[16] A. Luttman and T. Tonev, *Algebra isomorphisms and* RAN_π*-multiplicativity*, preprint 2005

[17] P. Mankiewicz, *On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréche spaces*, Studia Math., **45**(1973)15–29

[18] L. Molnár, *Some characterizations of the automorphisms of $B(H)$ and $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **130**(2002), 111-120

[19] M. Neal, *Spectrum preseving linear maps on JBW*-triples* Arch. Math., **79**(2002), 258–267

[20] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicavively spectrum-preserving maps of function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **133**(2005), 1135–1142

[21] N. V. Rao and A. K. Roy, *Multiplicavively spectrum-preserving maps of function algebras*.II, Proc. Edin. Math. Soc., **48**(2005)219–229

[22] N. V. Rao, T. V. Tonev and E. T. Toneva, *Algebra isomorphisms and σ_π-additivity*, preprint 2005

[23] P. Šemrl, *Hua's fundamental theorems of the geometry of matrices and related results*, Linear Algebra Appl., **361**(2003)161–179

[24] A. R. Sourour, *Invertibility preserving linear maps on $\mathcal{L}(X)$*, Trans. Amer. Math. Soc., **348**(1996)13–30

[25] V. Tan and F. Wang, *On determinant preserver problems*, Linear Algebra Appl., **369**(2003)311–317

[26] W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia Math., **30**(1968)83–85

Surjection on $C^+(X)$ which preserve $\delta_{\max}$

Kiyotaka Kobayashi

Abstract. In this paper, notions of metricoid spaces are introduced and we show a theorem of Mazur and Ulam for strongly reflective metricoid spaces and super reflective metricoid groups. Let $C^+(X)$ be the set of all positive-real-valued continuous functions on a compact Hausdorff space X. For each $f \in C^+(X)$, we put $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ and put $\delta_{\max}(f,g) = \max\{\|\frac{g}{f}-1\|, \|\frac{f}{g}-1\|\}(f,g \in C^+(X))$. Let T be a surjection from $C^+(X)$ onto $C^+(Y)$ such that $\delta_{\max}(T(f),T(g)) = \delta_{\max}(f,g)$ holds for every $f,g \in C^+(X)$. Then we show that T is of the form $T(f) = (wf \circ \Phi)^h$ for a weight function $w \in C^+(Y)$, a homeomorphism $\Phi : Y \to X$ and signum function h on X.

この講演では高橋先生（山形大）, 三浦先生（山形大）, 羽鳥先生（新潟大）との共同研究で得られた結果について述べる．よく知られている Mazur-Ulam の定理 [1] はノルム空間の間の等距離全単射写像は affine であるということを述べた定理である．最近 [3] によりその簡単な証明が与えられた．それはノルム空間が鏡映的であるということを本質的に利用したものであって，A.Vogt[4] の方法を改良したものである．このとき, ノルム空間で考えている Mazur-Ulam の定理を一般化できないか？という考えが生じる．Takahasi-Miura[2] はノルム空間が鏡映的である点に着目して，超鏡映的亜距離群を定義し，超鏡映的亜距離群の間の等亜距離全単射写像が affine であるという結果を得た．ここでは超鏡映的亜距離群の例を与えるとともに，亜距離を保存する surjection T の形を決定する．

定義 1 G を集合とする．G の積空間 $G \times G$ の非負値関数 δ が次の条件 (1) を満たすとする．

$$\delta(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g \tag{1}$$

ここで G から G への写像 T に対して $\delta(T(f),T(g)) = \delta(f,g) \quad (f,g \in G)$ が成り立つとき，T を δ-isometry という．このとき，δ が次の条件を満たすとき δ を亜距離と呼ぶ:

$\forall f,g \in G$ に対して，

$$\exists K(f,g) \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } \delta(T(f),f) \le K(f,g) \ (\forall T: \text{ bijective}, \delta\text{-isometry s.t. } \ T(g) = g) \tag{2}$$

このとき (G,δ) を亜距離空間と呼ぶ.

注意 1 簡単な考察から, 距離空間は亜距離空間であることが分かる. しかしながら次の例が示すように一般に逆は成り立たない.

A を単位的半単純可換 *Banach* 環とし，A の正則元全体を A^{-1}で表す. r_Aを A のスペクトル半径とするとき,

$$\delta(f,g) = r_A(\frac{f}{g} - 1), \quad f,g \in A^{-1}$$

で定義される関数 δ を考えると，(A^{-1},δ) は亜距離空間となるが，距離空間ではない.

定義 2 (G,δ) を亜距離空間とし, $h\in G$ とする. このとき G 上の自己写像 ρ が点 $h\in G$ における鏡映であるとは次の条件を満たすときをいう:

$$\rho(h)=h \tag{3}$$

$$\rho^2=id \tag{4}$$

$$\rho \text{ is } \delta\text{-isometric} \tag{5}$$

$$\exists L(h)>1 \text{ s.t. } \delta(\rho(f),f)\geq L(h)\delta(f,h)\ (f\in G) \tag{6}$$

この場合, ρ が全単射で δ-isometry であり, また 点 h が唯一の不動点であることが分かる. ここで点 $h\in G$ における G の鏡映全体の集合を $R(G;h)$ と表わす.

定義 3 (G,δ) を亜距離空間とする. 任意の $f,g\in G$ に対して,

$$\frac{f\circ g}{2}=\Big\{h\in G:\exists\rho\in R(G;h) \text{ with } \rho(f)=g\Big\}$$

としたとき, これを f,g の平均という. また, (G_1,δ_1), (G_2,δ_2) を亜距離空間とし, T を G_1 から G_2 への写像とする. T が次の条件

$$T\Big(\frac{f\circ g}{2}\Big)=\frac{T(f)\circ T(g)}{2}\quad (f,g\in G_1)$$

を満たすとき, T を affine であるという.

定義 4 亜距離空間 (G,δ) は条件 $R(G;f)\neq\emptyset\ (f\in G)$ を満たすとき, 鏡映的であるという. また亜距離空間 (G,δ) は条件 $\frac{f\circ g}{2}\neq\emptyset\ (f,g\in G)$ を満たすとき, 強鏡映的であるという.

このとき次の結果を得る.

定理 1 強鏡映的亜距離空間の間の等亜距離全単射写像は affine である.

注意 2 N をノルム空間とし, $f,g\in N$ に対して $a=\frac{f+g}{2}$ とする. また$\rho(u)=2a-u\ (u\in N)$ とする. このとき簡単な考察から, $\rho\in R(N;a)$ with $g=\rho(f)$ であり, また N が強鏡映的であることがわかる.

したがって定理 1 から, 次の Mazur-Ulam の定理が導かれる.

系 2 (Mazur-Ulam の定理)([1]) ノルム空間の間の等距離全単射写像は affine である.

次に (G,δ) を 亜距離空間とし, G を群とする. このとき, 次の条件 (7),(8),(9) をみたす亜距離空間 (G,δ) を考える:

$$\delta(hf^{-1}h,hg^{-1}h)=\delta(f,g)\quad (h,f,g\in G) \tag{7}$$

$$\forall h\in G \text{ に対して}, \exists L(h)>1 \text{ s.t. }\ \delta(hf^{-1}h,f)\geq L(h)\delta(f,h)\quad (f\in G) \tag{8}$$

$\forall f,g\in G$ に対して,

$$M(f,g)=\{h\in G:hf^{-1}h=g\} \text{ としたとき}, M(f,g)\neq\emptyset\quad (f,g\in G) \tag{9}$$

このとき,(G,δ) が強鏡映的であることがわかる.

定義 5 (G,δ) を亜距離空間とし，G を群とする. このとき, 上の条件 (7),(8),(9) を満たす亜距離空間 (G,δ) を超鏡映的亜距離群と呼ぶ.

次の結果は定理 1 の直接の結果であり, それはまた Mazur-Ulam の定理の一般化になっている.

定理 3 超鏡映的亜距離群の間の等亜距離全単射写像は affine である.

X をコンパクトハウスドルフ空間とし, $C^+(X)$ を X 上の正の実数値連続関数全体とする. また $f\in C^+(X)$ に対して, $\|f\|=\sup\{|f(x)|:x\in X\}$ と表わす. $C^+(X)$ は通常の演算では線形空間ではないが, 積については群になっている. ここで $\delta_{\max}(f,g)=\max\{||\frac{g}{f}-1||,||\frac{f}{g}-1||\}$ $(f,g\in C^+(X))$ と定めたとき, 次の結果を得る.

定理 4 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_{\max}(T(f),T(g))=\delta_{\max}(f,g)\quad(f,g\in C^+(X))$$

を満たすものとする. このとき, $T(f)=(wf\circ\Phi)^h$ $(f\in C^+(X))$ となる $w\in C^+(Y)$, $h:X\to\{-1,1\}\in C^+(X)$, $\Phi:Y\to X$: *homeomorphism* が存在する.

証明 $\widetilde{T}=\frac{T}{T(1)}$ とおく. すると $\widetilde{T}$ はbijection になることがわかる. ここで, X 上の実数値連続関数全体を $C_{\mathbb{R}}(X)$ で表すものとする. このとき, $S:C_{\mathbb{R}}(X)\to C_{\mathbb{R}}(Y)$ を

$$S(f)=\log\widetilde{T}(\exp f)\quad(f\in C_{\mathbb{R}}(X))$$

と定めると, S は bijection になる. また,

$$||S(u)-S(v)||=||u-v||\quad(u,v\in C_{\mathbb{R}}(X))$$

となることも分かるので, Mazur-Ulam の定理から

$$S(\frac{u+v}{2})=\frac{S(u)+S(v)}{2}\quad(u,v\in C_{\mathbb{R}}(X))$$

を得る. ここで $S(0)=0$ とから, S は real-linear になる. 次に, $S_{\mathbb{C}}:C(X)\to C(Y)$ を

$$S_{\mathbb{C}}(u+iv)=S(u)+iS(v)\quad(u,v\in C_{\mathbb{R}}(X))$$

と定めると, $S_{\mathbb{C}}$ は bijective で complex-linear でありまた, isometry であることがわかる. このとき, Banach-Stone の定理から, $\exists h\in C(Y)$ with $|h|=1$ on Y, $\exists\Phi:Y\to X$:homeomorphism s.t. $S_{\mathbb{C}}(f)=hf\circ\Phi$ $(f\in C^+(X))$ となる. これより,

$$T(f)=T(1)(f\circ\Phi)^h\quad(f\in C^+(X))$$

を得る. ここで, $w=T(1)^h$ とすると, $T(f)=(wf\circ\Phi)^h$ $(f\in C^+(X))$ を得る. □

定理 4 は Mazur-Ulam の定理を書き換えたものになっている. また, $\delta_0(f,g)=||\frac{f}{g}-1||$ $(f,g\in C^+(X))$ と定めたとき, 定理 4 の系として次の系 5 を得る.

系 5 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_0(f,g)=\delta_0(T(f),T(g)) \quad (f,g\in C^+(X))$$

を満たすものとする．このとき，$T(f)=wf\circ\Phi$ $(f\in C^+(X))$ を満たす $w\in C^+(Y)$, $\Phi:Y\to X$: *homeomorphism* が存在する．

次に $\delta_\times(f,g)=||\frac{f}{g}-1||||\frac{g}{f}-1||$ $(f,g\in C^+(X))$ と定める．このとき $(C^+(X),\delta_\times)$ は超鏡映的亜距離群になり，次の結果を得る．

定理 6 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_\times(T(f),T(g))=\delta_\times(f,g) \quad (f,g\in C^+(X))$$

を満たすものとする．このとき，$T(f)=wf\circ\Phi$ $(f\in C^+(X))$ または $T(f)=\frac{1}{wf\circ\Phi}$ $(f\in C^+(X))$ となる $w\in C^+(Y),\Phi:Y\to X$: *homeomorphism* が存在する．

注意 3 定理 6 の証明には以下の $FACT1$〜$FACT4$ を用いる．

$FACT1$: T は定理 6 の仮定を満たすものとする．このとき，次が成り立つ．

$$T(f^pg^{1-p})=T(f)^pT(g)^{1-p} \quad (p\in\mathbb{R},\ f,g\in C^+(X))$$

$FACT2$: T は定理 6 の仮定を満たすものとし，さらに $T(1)=1$, $T(fg)=T(f)T(g)$ $(f,g\in C^+(X))$ が成り立つものとする．このとき，$T(3)=3$ または $T(3)=\frac{1}{3}$ となる．

$FACT3$: T は定理 6 の仮定を満たすものとし，さらに $T(3)=3$, $T(f^p)=T(f)^p$ $(p\in\mathbb{R},\ f\in C^+(X))$ が成り立つものとする．このとき，$T(\alpha)=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R}^+)$ となる．

$FACT4$: T は定理 6 の仮定を満たすものとし，さらに $T(1)=1$, $T(\alpha)=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R}^+)$, $T(fg)=T(f)T(g)$ $(f,g\in C^+(X))$ が成り立つものとする．このとき，次が成り立つ．

$$||\frac{f}{g}-1||=||\frac{T(f)}{T(g)}-1|| \quad (f,g\in C^+(X))$$

定理 6 の証明 $\widetilde{T}=\frac{T}{T(1)}$ とおく．すると $\widetilde{T}$ はbijection になることがわかる．また,

$$\delta_\times(f,g)=\delta_\times(\widetilde{T}(f),\widetilde{T}(g)) \quad (f,g\in C^+(X))$$

も成り立つことが分かる．ここで，$FACT1$ および $\widetilde{T}(1)=1$ とから

$$\widetilde{T}(fg)=\widetilde{T}(f)\widetilde{T}(g) \quad (f,g\in C^+(X))$$

を得る．これと $FACT2$〜$FACT4$ および，系 5 から題意は示される． □

同様に $\delta_+(f,g)=||\frac{f}{g}-1||+||\frac{g}{f}-1||$ $(f,g\in C^+(X))$ と定めたとき, $(C^+(X),\delta_+)$ は超鏡映的亜距離群になり，次の結果を得る．

定理 7 T を $C^+(X)$ から $C^+(Y)$ への surjection とし,

$$\delta_+(T(f),T(g))=\delta_+(f,g) \quad (f,g\in C^+(X))$$

を満たすものとする．このとき，$T(f)=wf\circ\Phi$ $(f\in C^+(X))$ または $T(f)=\frac{1}{wf\circ\Phi}$ $(f\in C^+(X))$ となる $w\in C^+(Y),\Phi:Y\to X$: *homeomorphism* が存在する．

参考文献

[1] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformationes isometrique d'espaces vectoriels norms,* C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946-948.

[2] S.-E. Takahasi, and T. Miura, *Reflections and Mazur-Ulam's theorem on metricpoid spaces*, preprint, (2004).

[3] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem,* Amer. Math. Monthly, **110-7**(2003), 633-635.

[4] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math, **45** (1973), 43-48.

On Putnam's inequality and Berger-Shaw's inequality

Atsushi Uchiyama (Sendai National College of Technology)

abstract In this paper, we show (1) $\mathrm{tr}\left((|T|^{2p}-|T^*|^{2p})^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{n}{\pi}m(\sigma(T))$ for every n-multicyclic p-hyponormal operator T, where $\sigma(T)$ is the spectrum of T and $m(\cdot)$ is the planar Lebesgue measure, and (2) $\||T|^{2p}-|T^*|^{2p}\| \leq (m(\sigma(T)))^p$ for every p-hyponormal operator T. These inequalities are extensions of Putnam's inequality and Berger-Shaw's inequality for hyponormal operators.

We also show Putnam's inequality and Berger-Shaw's inequality for p-quasihyponormal operators.

1. Introduction ヒルベルト空間上の有界線形作用素 T は, $[T^*,T] = T^*T - TT^* = 0$ のとき正規作用素, $T^*T - TT^* \geq 0$ のとき hyponormal, $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ のとき p-hyponormal, $T^*\{(T^*T)^p - (TT^*)^p\}T \geq 0$ のとき, p-quasihyponormal operator であるという. 正規作用以外の作用素, つまり非正規作用素 T については, その自己交換子 $[T^*,T] = T^*T - TT^*$ (もっと一般に $(T^*T)^r - (TT^*)^r$) のノルムの値は, T の非正規性を表していると考えることが出来る.

正規作用素を含む作用素のクラス hyponormal においては, 自己交換子のノルムを評価する不等式として、次のような興味深い不等式が知られている.

Theorem A. (パットナム不等式) For a hyponormal operator $T \in B(\mathcal{H})$,

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \frac{1}{\pi}m(\sigma(T)).$$

作用素 T は, ある n 個のベクトル $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{H}$ に対して $\vee\{g(T)x_i; i = 1, 2, \cdots, n \quad g \in \mathcal{R}(\sigma(T))\} = \mathcal{H}$ を満たすとき, n-multicyclic であるという, ここで $\mathcal{R}(\sigma(T))$ は $\sigma(T)$ の近傍で正則な有理関数全体を表す. n-multicyclic という, ある種の巡回性を持つ hyponormal 作用素に対しては, 次のトレースノルムに関する評価式が知られている.

Theorem B. (バーガー・ショウ不等式) For an n-multicyclic hyponormal operator $T \in B(\mathcal{H})$, the self-commutator $[T^*,T] = T^*T - TT^*$ belongs to the trace class $\mathcal{C}_1$ and

$$\mathrm{tr}\big(T^*T - TT^*\big) \leq \frac{n}{\pi}m(\sigma(T)).$$

この論文では, パットナム不等式とバーガー・ショウ不等式の p-hyponormal, p-quasihyponormal 作用素への拡張について報告する.

2. Preliminaries

p-hyponomal 作用素は定義から p-quasihyponormal 作用素であるが, 逆は一般に成り立たない. また, p-hyponomal 作用素ならば q-hyponomal 作用素 $(0 < q < p)$ であることが次の有名なレーヴナー・ハインツ不等式から導かれる. しかし, p-quasihyponomal ならば q-quasihyponomal $(0 < q < p)$ は一般に成立しない. このように, 作用素の構造として p-quasihyponormal の方が p-hyponormal より複雑になっている.

補題 1.(レーヴナー・ハインツ不等式) If $0 \leq A \leq B$ and $p \in (0,1]$, then $A^p \leq B^p$.

補題 1 は $f(t) = t^p$ が $[0,\infty)$ で operator monotone であることを示しているが, operator monotone function に関する不等式として補題 2 のハンセンの不等式がよく知られている. さらに, 補題 1 の大幅な拡張として補題 3 の古田の不等式が有名である.

補題 2.(ハンセンの不等式)

Let f be an operator monotone function on the half interval $[0,\infty)$, i.e., $0 \leq A \leq B$ implies $f(A) \leq f(B)$. Then, for any $A \geq 0$ and contraction B(i.e., $\|B\| \leq 1$), $B^*f(A)B \leq f(B^*AB)$.

補題 3.(古田不等式) If $B \geq A \geq O$, then for each $r \geq 0$,

$$(i) \quad (A^rB^pA^r)^{\frac{1}{q}} \geq A^{\frac{p+2r}{q}} \quad \text{and} \quad (ii) \quad B^{\frac{p+2r}{q}} \geq (B^rA^pB^r)^{\frac{1}{q}}$$

hold for p and q such that $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$.

定義 1. $T = U|T|$ を作用素の極分解とするとき, 作用素 $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}}$ を T の Aluthge 変換という. $s,t > 0$ に対して $T(s,t) = |T|^sU|T|^t$ を (generalized) Aluthge 変換という.

次の p-hyponormal に関する重要な性質は Aluthge によって初めて示されたが (U がユニタリーという条件つきで), Xia, 古田, 吉野その他多数の研究者によって (一般に $T(s,t)$ について同様の結果が) 条件を付けなくても成立することが示されている. (古田不等式を用いて証明)

Theorem C. Let $T = U|T|$ be a p-hyponormal operator. Then $\widetilde{T}$ is hyponormal if $\dfrac{1}{2} \leq p \leq 1$ and $(p + \dfrac{1}{2})$-hyponormal if $0 < p \leq \dfrac{1}{2}$.

定義 2. $T = U|T|$ が p-hyponormal ($\frac{1}{2^{m+1}} \leq p \leq \frac{1}{2^m}, m$ は非負整数) のとき,

$$\widehat{T} = |T|^{\frac{1}{2^m}-p}U|T|^{1-\frac{1}{2^m}+p}$$

と定義する.

補題 4. Let T, $\widehat{T}$ be as above. Then, $(\widehat{T}\widehat{T}^*)^{\frac{1}{2^m}} \leq |T|^{\frac{1}{2^m}-p}|T^*|^{2p}|T|^{\frac{1}{2^m}-p} \leq |T|^{\frac{1}{2^{m-1}}} \leq (\widehat{T}^*\widehat{T})^{\frac{1}{2^m}}$, In particular, $\widehat{T}$ is $\frac{1}{2^m}$-hyponormal.

補題 5. If T is an n-multicyclic p-hyponormal for $(0 < p \leq 1)$, then $\widehat{T}$ is also n-multicyclic and $\sigma(\widehat{T}) = \sigma(T)$.

3. Putnam and Berger-Shaw inequality for p-hyponormal operators

補題 6. If T is an n-multicyclic p-hyponormal for $(0 < p \leq 1)$, then

$$\mathrm{tr}\Big(|T|^{1-p}(|T|^{2p} - |T^*|^{2p})|T|^{1-p}\Big) \leq \frac{n}{\pi}m(\sigma(T)).$$

$A = |T|^{2p}, B = |T|^{2p} - |T^*|^{2p}$ とおくと, 補題6の不等式の左辺は, $\mathrm{tr}(B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1-p}{p}}B^{\frac{1}{2}})$ に等しい.
$p \geq \dfrac{1}{2}$ ならば, レーヴナー・ハインツ不等式から $B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1-p}{p}}B^{\frac{1}{2}} \geq B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1-p}{p}}B^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{p}}$.
$0 < p \leq \dfrac{1}{2}$ ならば, 古田不等式から $\Big(B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1-p}{p}}B^{\frac{1}{2}}\Big)^{2p} \geq \Big(B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1-p}{p}}B^{\frac{1}{2}}\Big)^{2p} = B^2$,
$(p' = \dfrac{1-p}{p}, q' = \dfrac{1}{2q}, r' = \dfrac{1}{2}$ とすると $(1+2r')q' = p' + 2r' = \frac{1}{p})$.
したがって, $0 < p \leq 1$ のとき, $\mathrm{tr}(B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1-p}{p}}B^{\frac{1}{2}}) \geq \mathrm{tr}(B^{\frac{1}{p}})$ となるので次の定理1を得る.

定理 1. If T is an n-multicyclic p-hyponormal for $(0 < p \leq 1)$, then $|T|^{2p} - |T^*|^{2p}$ belongs to the Schatten $\frac{1}{p}$-class $\mathcal{C}_{\frac{1}{p}}$ and $\mathrm{tr}\Big((|T|^{2p} - |T^*|^{2p})^{\frac{1}{p}}\Big) \leq \dfrac{n}{\pi}m(\sigma(T))$.

補題 7. Let T be a p-hyponormal operator for $(0 < p \leq 1)$, and $\mathcal{M}$ be an invariant subspace of T. Then the restriction T' of T to $\mathcal{M}$ satisfies $\{T'T'^*\}^p \leq P(TT^*)^pP \leq P(T^*T)^pP \leq \{T'^*T'\}^p$, and hence T' is also p-hyponormal, where P denotes the projection onto $\mathcal{M}$.

$x \in \mathcal{H}$ を任意の単位ベクトル, $\mathcal{M} = \vee\{g(T)x; g \in \mathcal{R}(\sigma(T))\}$, $T' = T|_{\mathcal{M}}$ とすると, T が p-hyponormal ならば, T' は 1-multicyclic p-hyponormal かつ $\sigma(T') \subset \sigma(T)$. したがって,

$$\langle((T^*T)^p - (TT^*)^p)x, x\rangle \leq \langle((T'^*T')^p - (T'T'^*)^p)x, x\rangle \leq \left\{\frac{1}{\pi}m(\sigma(T))\right\}^p \quad \forall\, x\ s.t.\ \|x\| = 1.$$

このことからただちに p-hyponormal に関するパットナムの不等式が得られる.

系 1. If T is p-hyponormal operator for $(0 < p \leq 1)$, then

$$\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leq \left\{\frac{1}{\pi}m(\sigma(T))\right\}^p.$$

4. Putnam and Berger-Shaw inequality for p-quasihyponormal operators

$T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H} = [T\mathcal{H}] \oplus \ker T^*$ を p-quasihyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H} = [T\mathcal{H}] \oplus \ker T^*$ を $[T\mathcal{H}]$ への直交射影とする. T が p-quasihyponormal であることと, ハンセンの不等式より, $(PT^*TP)^p \geq P(T^*T)^pP \geq P(TT^*)^pP$. ゆえに, $(A^*A)^p \geq (AA^* + SS^*)^p \geq (AA^*)^p$ が成り立つ. このことから次が従う.

補題 8. For p-quasihyponormal T where $0 < p \leq 1$, the restriction A of T to $[T\mathcal{H}]$ is p-hyponormal and $\sigma(A) \subset \sigma(T) \subset \sigma(A) \bigcup \{0\}$.

補題 9. For positive operators A, B and C such that $A = B + C$ and for an $s \geq 1$,

$$\|A^s - B^s\| \leq \varphi(s)\|A\|^{s-1}\|C\|.$$

If C belongs to the Schatten α-class $\mathcal{C}_\alpha$,

$$\|A^s - B^s\|_\alpha \leq \varphi(s)\|A\|^{s-1}\|C\|_\alpha$$

here $\varphi(s) = \begin{cases} s, & \text{if } s \in \mathbb{N} \\ s+2, & \text{otherwise} \end{cases}$ and $\|C\|_\alpha = \mathrm{tr}(|\,C\,|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$T = \begin{pmatrix} A & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H} = [T\mathcal{H}] \oplus \ker T^*$ を n-multicyclic p-quasihyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$ とすると, A も n-multicyclic になる.

補題 10. If T is an n-multicyclic p-quasihyponormal operator, then the restriction A of T to $[T\mathcal{H}]$ is also n-multicyclic.

このとき, 補題 8 より A は p-hyponormal なので, 定理 1, 系 1 を用いると
$tr\left((|A|^{2p} - |A^*|^{2p})^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{n}{\pi}m(\sigma(T))$, $\||A|^{2p} - |A^*|^{2p}\| \leq \left\{\frac{1}{\pi}m(\sigma(T))\right\}^p$

T が quasihyponormal(1-quasihyponormal) のとき,

$$\begin{aligned}
\|T^*T - TT^*\| &= \left\| \begin{pmatrix} A^*A - AA^* - SS^* & A^*S \\ S^*A & S^*S \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} A^*A - AA^* - SS^* & 0 \\ 0 & S^*S \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & A^*S \\ S^*A & 0 \end{pmatrix} \right\| \\
&\leq \|AA^* - AA^*\| + \|A\|\|S\| \leq 2\|T\|\|AA^* - AA^*\|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$(T^*T - TT^*)^2 = \begin{pmatrix} (A^*A - AA^* - SS^*)^2 + A^*SS^*A & X \\ X^* & S^*(AA^* + SS^*)A \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left((T^*T - TT^*)^2\right) &= \mathrm{tr}\left((A^*A - AA^* - SS^*)^2\right) + \mathrm{tr}\left(A^*SS^*A + S^*(AA^* + SS^*)S\right) \\ &\le \|A^*A - AA^* - SS^*\| \mathrm{tr}\left(A^*A - AA^* - SS^*\right) + 3\|T\|^2 \mathrm{tr}(S^*S) \\ &\le 4\|T\|^2 \mathrm{tr}\left(A^*A - AA^*\right). \end{aligned}$$

以上から次の定理 2, 3 が得られる.

定理 2. For a quasihyponormal operator T,

$$\|T^*T - TT^*\| \le 2\|T\| \{\frac{1}{\pi} m(\sigma(T))\}^{\frac{1}{2}}.$$

Thus, $m(\sigma(T)) = 0$ implies the normality of T.

定理 3. For an n-multicyclic quasihyponormal operator T,

$$\mathrm{tr}\Big((T^*T - TT^*)^2\Big) \le 4\|T\|^2 \frac{n}{\pi} m(\sigma(T)).$$

T が p-quasihyponormal 作用素のとき, $K_q = (A^*A)^q - (AA^* + SS^*)^q$, $(AA^* + SS^*)^q - (AA^*)^q$, $q \in (0, p]$ とおくと, 補題 8 から $\|K_q\|, \|L_q\| \le \|(A^*A)^q - (AA^*)^q\| \le \left\{\frac{1}{\pi} m(\sigma(T))\right\}^q$.

T が n-multicyclic ならば, A も n-multicyclic なので,

$\|K_q\|_{\frac{1}{q}}, \|L_q\|_{\frac{1}{q}} \le \|(A^*A)^q - (AA^*)^q\|_{\frac{1}{q}} \le \left\{\frac{n}{\pi} m(\sigma(T))\right\}^q$.

これらの評価式に補題 9 を用いると p-quasihyponormal に関するパットナム不等式とバーガー・ショウ不等式が得られる.

定理 4. For a p-quasihyponormal operator T and $q \in (0, p]$,

$$\|T^*T - TT^*\| \le 2\|T\|^{2-q} \{\varphi(1/q) \left(\frac{1}{\pi} m(\sigma(T))\right)^q\}^{\frac{1}{2}}.$$

Thus, $m(\sigma(T)) = 0$ implies the normality of T.

定理 5. If T is an n-multicyclic p-quasihyponormal operator and $q \in (0, p]$, then $(T^*T - TT^*)^2 \in \mathcal{C}_{\frac{1}{q}}$ and

$$\|(T^*T - TT^*)^2\|_{\frac{1}{q}} \le 6\varphi(1/q) \|T\|^{2(2-q)} \left(\frac{n}{\pi} m(\sigma(T))\right)^q.$$

References

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations and Operator Theory., 13 (1990), 307-315.

[2] A. Aluthge, *Some generalized theorem on p-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory., 24 (1996), 497-501.

[3] T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta Sci. Math. (Szeged), 33 (1972), 169-178.

[4] S. C. Arora and P. Arora, *On p-quasihyponormal operators for* $0 < p < 1$, Yokohama Math. J., 41 (1993), 25-29.

[5] C. A. Berger and B. I. Shaw, *Selfcommutators of multicyclic hyponormal operators are always trace class*, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 1193-1199.

[6] M. Cho and M. Itoh, *Putnam inequality for p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 2435-2440.

[7] T. Furuta, $A \geq B \geq O$ *assures* $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{(p+2r)/q}$ *for* $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ *with* $(1+2r)p \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101 (1987), 85-88.

[8] T. Furuta, *Generalized Aluthge transformation on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 3071-3075.

[9] F. Hansen , *An Operator Inequality*, Math. Ann., 246 (1980), 249-250.

[10] E. Heinz , *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., 123 (1951), 415-438.

[11] T. Huruya, *A note on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 3617-3624.

[12] C. R. Putnam, *An inequality for the area of hyponormal spectra*, Math. Z., 116 (1970), 323-330.

[13] R. Schatten *Norm Ideals of Completely continuous Operators* , Springer-Verlag, Berlin., 1970.

[14] A. Uchiyama, *Berger-Shaw's theorem for p-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory 33 (1999), 221-230.

[15] A. Uchiyama, *Inequalities of Putnam and Berger-Shaw for p-quasihyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory 34 (1999), 91-106.

[16] D. Xia, *On the non-normal operators–semihyponormal operators*, Sci. Sinica., 23 (1980), 700-713.

[17] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel., 1983.

[18] T. Yoshino, *The p-hyponormality of the Aluthge transform*, Interdiscip. Inform. Sci., 3 (1997), 91-93.

Putnam Inequality And Alexander Inequality

Takahiko Nakazi (Hokkaido University)

This is a joint work with M.Chō (Kanagawa University).

For a hyponormal operator, it is known that $dist(T^*, \mathcal{A}) \leq \{Area(\sigma(T))/\pi\}^{1/2}$ where $\mathcal{A}$ is the strong closure of $\{f(T)\ ;\ f \in rat(\sigma(T))\}$ and $rat(\sigma(T))$ is the set of all rational functions on $\sigma(T)$. This is called Alexander inequality for a hyponormal operator. This have been used to estimate $\|T^*K - KT^*\|$ when $TK = KT$. Then, $\|T^*K - KT^*\| \leq 2\{Area(\sigma(T))/\pi\}^{1/2}\|K\|$. In this lecture, we give a better estimate for a subnormal operator. Moreover, we give an area estimate for a p-hyponormal operator.

この講演は神奈川大学工学部の長宗雄氏との共同研究 [2] である。

H を Hilbert 空間、$\mathcal{B}(H)$ は H 上の有界線形作用素の全体とする。$T \in \mathcal{B}(H)$ に対して $\sigma(T)$ は T のスペクトルを示す。$rat(T)$ は $\sigma(T)$ 上の有理関数の全体を示す。$T \in \mathcal{B}(H)$ が hyponormal 作用素とは、$T^*T - TT^* \geq 0$ であるときをいう。

<u>Putnam の不等式</u> (1970)　T が hyponormal ならば

$$\|T^*T - TT^*\| \leq Area(\sigma(T))/\pi\ 。$$

<u>Alexander の不等式</u> (1973, 1987)　T が hyponormal ならば、

$$dist(T^*, \mathcal{A}) \leq \{Area(\sigma(T))/\pi\}^{1/2}\ 。$$

ここで $\mathcal{A}$ は $\{f(T)\ ;\ f \in rat(\sigma(T))\}$ の強閉包である。

Putnam の不等式は [4] で示されている。関数環に対する Alexander の不等式は [1] で、上の hyponormal 作用素に対するものは [3] で示されている。[3] では、Alexander の不等式を用いて、T が hyponormal かつ $KT = TK$ ならば

$$\|T^*K - KT^*\| \leq 2\{Area(\sigma(T))/\pi\}^{1/2}\|K\| \qquad (*)$$

であることが示されている。

$\boxed{\text{問題}}$

(1) 不等式 $(*)$ で、定数 2 は hyponormal 作用素に対して最良か？
(2) 不等式 $(*)$ は、もっと一般の作用素に対して成立するか？

(3) T が hyponormal 作用素かつ $TK = KT$ ならば $\|T^*K - KT^*\| \leq \|T\|\|K\|$ は正しいか？

問題の (1) に対して、subnormal 作用素のときに 2〜3 の解答を与える。$T \in \mathcal{B}(H)$ が subnormal 作用素とは、H を含むある Hilbert 空間 K とその上の normal 作用素 N が存在して、$NH \subset H$ かつ $T = N \mid H$ となることである。

定理 1 $T \in \mathcal{B}(H)$ が subnormal 作用素かつ $f \in rat(\sigma(T))$ ならば

$$\|T^*f(T) - f(T)T^*\| \leq \{Area(\sigma(T))/\pi\}^{1/2}\{Area(\sigma(f(T))/\pi\}^{1/2}。$$

定理 1 を $f(T)$ の代りに $TK = KT$ となる $K \in \mathcal{B}(H)$ に対して証明したかったが、できなかった。ただし T が cyclic ベクトルをもつならば、吉野氏の定理 [6] より、$TK = KT$ のときに問題 (1) が定理 1 の形で肯定的に解ける。また $T = T_f$ が一変数 Hardy 空間 H^2 上の analytic Toeplitz 作用素であり、$K = T_g$ も analytic Toeplitz 作用素のとき、定理 1 が成立する。しかし $T = T_{z^2}$ のとき、$T_{z^2}K = KT_{z^2}$ ならば K はベクトル値 analytic 関数を symbol とする Toeplitz 作用素となるので、上の方法は用いることができない。

問題の (2) にたいして、p-hyponormal 作用素の場合に一つの解答を与える。$T \in \mathcal{B}(H)$ が、$0 < p \leq 1$ に対して p-hyponormal 作用素とは、$(T^*T)^p - (TT^*)^p \geq 0$ となることである。1-hyponormal とは hyponormal のことである。

$$\phi(t) = \begin{cases} t & t \in N \\ t+2 & t \in (0,\infty) \setminus N \end{cases}$$

とするとき、A.Uchiyama [5] は次の不等式を示した。T が p-hyponormal ならば

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \phi\left(\frac{1}{p}\right)\|T\|^{2(1-p)}\{Area(\sigma(T))/\pi\}^{1/p}。$$

この不等式は、$p = 1$ のとき Putnam の不等式を示している。上の不等式と W.Arveson [1, Lemma 2] を用いて、次の補題を示すことができる。しかし、残念ながら $p = 1$ のとき $\sqrt{2\phi\left(\frac{1}{p}\right)} = \sqrt{2}$ だから Alexander の不等式を示していない。

補題 $T \in \mathcal{B}(H)$ が p-hyponormal ならば

$$dist(T^*, \mathcal{A}) \leq \sqrt{2\phi\left(\frac{1}{p}\right)}\|T\|^{1-p}\{Area(\sigma(T))/\pi\}^{p/2}。$$

ここで $\mathcal{A} = \{f(T)\ ;\ f \in rat(\sigma(T))\}$ の強閉包である。

$\boxed{\text{定理 } 2}$ $T \in \mathcal{B}(H)$ が p-hyponormal かつ $KT = TK$ ならば

$$\|T^*K - KT^*\| \leq 2\sqrt{2\phi\left(\frac{1}{p}\right)}\|T\|^{1-p}\{Area(\sigma(T))/\pi\}^{p/2}\|K\|_{\text{。}}$$

定理 2 の証明には、hyponormal 作用素の commutator の不等式 $(*)$ を示すときに、Alexander の不等式が使われた様に、その拡張である補題を用いる。しかし $p = 1$ のとき、$(*)$ を与えていない。さらに、問題 (2) は p-quasinyponormal 作用素に対して、一つの答えを与えることができる。

問題 の (3) に対して、定理 1 の系として、もし T が subnormal 作用素ならば、

$$\|T^*f(T) - f(T)T^*\| \leq \|T\|\|f(T)\|$$

が成立する。一般の $T \in \mathcal{B}(H)$ について上の不等式を示すことができるならばすばらしいが、それは無理と思う。次の定理 3 は Sz.-Nagy の dilation を用いて示すことができるが、一つの解答である。$\sup_{z\in D} | f(z) |$ が $\|f(T)\|$ でおきかえることできなかった。

$\boxed{\text{定理 } 3}$ $T \in \mathcal{B}(H)$ は contraction かつ $D = \{z\ ;\ | z |< 1\}$ とする。f が $\bar{D}$ 上で正則ならば、$\|T^*f(T) - f(T)T^*\| \leq \sup_{z\in D} | f(z) |$ である。

$\boxed{\text{系}}$ $T \in \mathcal{B}(H)$ かつ $n \geq 1$ ならば、$\|T^*T^n - T^nT^*\| \leq \|T\|^{n+1}$ が成立する。

参考文献

1. H. Alexander, Projections of polynomial hulls, J. Funct. Anal. 13(1973), 13-19.
2. W. Arveson, Interpolation problems in nest algebras, J. Funct. Amal. 20(1975), 208-233.
3. T. Nakazi, Complete spectral area estimates and self-commutators, Michigan Math. J. 35(1988), 435-441.
4. C. R. Putnam, An inequality for the area of hyponormal spectra, Math. Z. 116(1970), 323-330.
5. A. Uchiyama, Berger-Shaw's theorem for p-hyponormal operators, Integr. Equ. Oper. Theory 33(1999), 221-230.
6. T. Yoshino, Subnormal operators with a cyclic vector, Tohoku Math. 21(1969), 47-55.

Closed Range Operators

Rikio Yoneda

Otaru University of Commerce

Let D be the open unit disk in complex plane C. For $z, w \in D$, $0 < r < 1$, let $\varphi_z(w) = \dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}$ and let $\rho(z,w) = \left|\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|$ and $D(w,r) = \{z \in D, \rho(w,z) < r\}$. Let $H(D)$ be the class of all analytic functions on D.

The space $\mathcal{B}_\alpha$ of D is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\| f \|_{\beta_\alpha} = |f(0)| + \| f \|_{\mathcal{B}_\alpha} < +\infty \ ,$$

where $\| f \|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha \left|f'(z)\right|$. Note that $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ is the Bloch space .

The space $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ of D is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$(1-|z|^2)^\alpha \left|f'(z)\right| \to 0 \qquad (|z| \to 1^-).$$

Note that $\mathcal{B}_{1,0} = \mathcal{B}_0$ is the little Bloch space .

The space $\mathcal{B}^\alpha$ of D is defined to be the space of analytic functions f on D such that $\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha \left|f(z)\right| < +\infty$.

Let $dA(z)$ be the area measure on D normalized so that the area of D is 1.

For $\alpha > -1$, the weighted Dirichret space D_p^α is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|^p (\alpha+1)dA(z) < +\infty.$$

In the case of $\alpha = 1$ and $p = 2$, then $D_2^1 = H^2$ is the Hardy space. In the case of $\alpha = 2$ and $p = 2$, then $D_2^2 = L_a^2$ is the Bergman space.

For $\alpha > -1$, the weighted Bergman space $D_\alpha^p = L_a^p\left((1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right)$ is defined to be the space of analytic functions f on D such that

$$\int_D (1-|z|^2)^\alpha |f(z)|^p (\alpha+1)dA(z) < +\infty.$$

In the case of $\alpha = 0$ and $p = 2$, then $D_0^2 = L_a^2$ is the Bergman space.

Let X be Banach spaces and let T be a linear operator from X into X. Then T is called to be bounded below on X if $\| Tf \| \geq C \| f \|$ for all $f \in X$ and positive constants $C > 0$.

For g analytic on D, the operators I_g, J_g, M_g are defined by the following:

$$I_g(f)(z) = \int_0^z g(\zeta)f'(\zeta)d\zeta \ , \ J_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta)d\zeta \ , \ M_g(f)(z) = g(z)f(z).$$

If $g(z) = z$, then J_g is the integration operator. If $g(z) = \log \frac{1}{1-z}$, then J_g is the Cesáro operator.

In [8], Ch.Pommerenke proved the following result with respect to the operator J_g :

Theorem 0.1. *For g analytic on D, the operator J_g is bounded on the Hardy space H^2 if and only if $g \in BMOA$.*

In [2], A.Aleman and A.G.Siskakis proved the following result with respect to the operator J_g :

Theorem 0.2. *For g analytic on D, for $p \geq 1$, the operator J_g is bounded on the Hardy space H^p if and only if $g \in BMOA$. And the operator J_g is compact on the Hardy space H^p if and only if $g \in VMOA$.*

In [3], A.Aleman and A.G.Siskakis proved the following result with respect to the operator J_g (See [3] with respect to the definition of the weighted Bergman spaces $L^p_{a,\omega}(D)$) :

Theorem 0.3. *Let $p \geq 1$. Then for g analytic on D, the operator J_g is bounded on the weighted Bergman space $L^p_{a,\omega}(D)$ if and only if $g \in \mathcal{B}$. And the operator J_g is compact on $L^p_{a,\omega}(D)$ if and only if $\lim_{|z| \to 1^-} (1-|z|^2)|g'(z)| = 0$.*

In [11], we also proved the following result :

Theorem 0.4. *Let $\beta \geq 1$. Then the operator $J_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded if and only if*

$$\sup_{z \in D} (1-|z|^2)^\beta \left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right) |g'(z)| < +\infty,$$

and the operator $J_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_\beta$ is compact if and only if

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1-|z|^2)^\beta \left(\log \frac{1}{1-|z|^2}\right) |g'(z)| = 0.$$

And let $\alpha > 1$. Then the operator $J_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded if and only if

$$\sup_{z \in D} (1-|z|^2)^{\beta-\alpha+1} |g'(z)| < +\infty.$$

And the operator $J_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is compact if and only if

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1-|z|^2)^{\beta-\alpha+1} |g'(z)| = 0.$$

And let $0 < \alpha < 1$, and $\alpha \leq \beta$. Then the operator $J_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded if and only if $g \in \mathcal{B}_\beta$.
And the operator $J_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is compact if and only if

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1-|z|^2)^\beta |g'(z)| = 0, \qquad \textit{i.e.} \quad g \in \mathcal{B}_{\beta,0}.$$

In [12], we also proved the following result :

Theorem 0.5. *Let $\beta \geq \alpha > 0$. Then the operator $I_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded if and only if*

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha}|g(z)| < +\infty.$$

And the operator $I_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is compact if and only if

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha}|g(z)| = 0\ .$$

In [6], D.Luecking proved the following result with respect to the reverse Carleson measure:

Theorem 0.6.(D.Luecking) *Let τ be a bounded nonnegative measurable function in D. Then there is a constant $k > 0$ such that*

$$\int_D |f'(z)|^2\tau(z)\log\frac{1}{|z|^2}dA(z) \geq k\int_D |f'(z)|^2\log\frac{1}{|z|^2}dA(z)$$

for all $f \in H^2$ if and only if there exists a constant $c > 0$ such that the set $G_c = \{z \in D : \tau(z) > c\}$ satisfies the condition:

$(*)$ *There exists a constant $\delta > 0$ such that*

$$dA(G_c \cap D(\zeta, r)) > \delta dA(D \cap D(\zeta, r))$$

for all $\zeta \in \partial D$ and $r > 0$, where $D(\zeta, r)$ is a disc with a center ζ and a radius r.

In [7], D.Luecking proved the following result:

Theorem 0.7.(D.Luecking) *Let $\alpha > -1$, and let μ be a finite positive Borel measure on D. In order that there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\left(\int_D |f'(z)|^2 d\mu(z)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_D |f(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right)^{\frac{1}{2}}$$

for all analytic functions f if and only if there exists a constant $C' > 0$ such that

$$\mu\left(\{z \in D, \rho(z,a) < \frac{1}{2}\}\right) \leq C'(1-|z|^2)^{4+\alpha}.$$

In [4],P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska determined the composition operators on the Bloch space that have a closed range using sampling set for $\mathcal{B}$. So we also study when the operators I_g, J_g and M_g and the composition operators are bounded below on the Bergman spaces and the (weighted) Bloch space using sampling set for weighted Bloch spaces.

Definition 1.1. *Let $\alpha > 0$. A set Γ of the open unit disk D is called a sampling set for $\mathcal{B}^\alpha$ if there exists a positive constant $C > 0$ such that*

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha|f(z)| \leq C\sup_{z\in\Gamma}(1-|z|^2)^\alpha|f(z)|,$$

for all $f \in \mathcal{B}^\alpha$.

Definition 1.2. *Let $\alpha > 0$. A set Γ of the open unit disk D is called a sampling set for $\mathcal{B}_\alpha$ if there exists a positive constant $C > 0$ such that*

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)| \leq C\sup_{z\in\Gamma}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)|,$$

for all $f \in \mathcal{B}_\alpha$.

By using a sampling set for $\mathcal{B}_\alpha$, we can prove the following result with respect to the operator I_g:

Theorem 1.3. *Let $\beta \geq \alpha > 0$ and $g \in H(D)$. The operator $I_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded. Then the operator $I_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded below if and only if there exists a positive constant $(1 >)\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, (1-|z|^2)^{\beta-\alpha}|g(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}_\alpha$.*

By using a sampling set for $\mathcal{B}^\alpha$, we can prove the following result with respect to the operator J_g:

Theorem 1.4. *Let $\beta \geq \alpha > 1$ and $g \in H(D)$. The operator $J_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded. Then the operator $J_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded below if and only if there exists a positive constant $\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, (1-|z|^2)^{\beta-\alpha+1}|g'(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}^{\alpha-1}$.*

By using a sampling set for $\mathcal{B}^\alpha$, we can prove the following result with respect to the multiplication operator M_g:

Theorem 1.5. *Let $\beta \geq \alpha > 1$ and $g \in H(D)$. The operator $M_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded. Then the operator $M_g : \mathcal{B}_\alpha \to \mathcal{B}_\beta$ is bounded below if and only if there exists a positive constant $\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, (1-|z|^2)^{\beta-\alpha}|g(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}^{\alpha-1}$.*

Definition 2.1. *The space $BMOA$ is defined to be the space of analytic functions f on D such that $\sup_{a\in D}\int_D(1-|\varphi_a(z)|^2)|f'(z)|^2dA(z) < +\infty$.*
In the case of $0 < \alpha < 1$, The space Q_α is defined to be the space of analytic functions f on D such that $\sup_{a\in D}\int_D(1-|\varphi_a(z)|^2)^\alpha|f'(z)|^2dA(z) < +\infty$.

Proposition 2.2. *Let $g \in H^\infty$. If the operator $I_g : H^2 \to H^2$ is bounded below, then $I_g : BMOA \to BMOA$ is bounded below. If the operator $I_g : L^2_a \to L^2_a$ is bounded below, then $I_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ is bounded below. For $0 < p < 1$, if the operator $I_g : D^\alpha_2 \to D^\alpha_2$ is bounded below, then $I_g : Q_\alpha \to Q_\alpha$ is bounded below.*

We determined the integration operators I_g on the Bergman spaces that have a closed range using sampling set for $\mathcal{B}$. And the following theorem corresponds to Theorem 0.6:

Theorem 2.3. *Suppose that $g \in H^\infty$. Then there is a constant $k > 0$ such that*

$$\int_D |f'(z)|^2 |g(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z) \geq k \int_D |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z)$$

for all $f \in L^2_a$ if and only if there exists a positive constant $\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, |g(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}$.

Remark 2.4. Carefully examining the proof of the above theorem, we see the following are also the equivalent conditions respectively:

(2.4.1) $\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|g(z)\varphi'_w(z)| \geq C$ for all $w \in D$.

(2.4.2) For any $\epsilon < C$, $\rho(\Gamma, w) \leq R < 1$ for all $w \in D$, R depending only on ϵ, where $\Gamma = \{z \in D, |g(z)| \geq \epsilon\}$.

Proposition 2.5. *Let $g \in \mathcal{B}$. If $J_g : L^2_a\left((1-|z|^2)^2 dA(z)\right) \to L^2_a\left((1-|z|^2)^2 dA(z)\right)$ is bounded below, then $J_g : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$ is bounded below.*

We determined the integration operators J_g on the weighted Bergman spaces that have a closed range using sampling set for $\mathcal{B}^1$. And the following theorem corresponds to Theorem 0.7:

Theorem 2.6. *Suppose that $g \in \mathcal{B}$. Then there is a constant $k > 0$ such that*

$$\int_D |f(z)|^2 |g'(z)|^2 (1-|z|^2)^4 dA(z) \geq k \int_D |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^4 dA(z)$$

for all $f \in L^2_a\left((1-|z|^2)^2 dA(z)\right)$ if and only if there exists a positive constant $\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, (1-|z|^2)|g'(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}^1$.

Remark 2.7. Carefully examining the proof of the above theorem, we see the following are also the equivalent conditions respectively:

(2.7.1) $\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2|g'(z)\varphi'_w(z)| \geq C$ for all $w \in D$.

(2.7.2) For any $\epsilon < C$, $\rho(\Gamma, w) \leq R < 1$ for all $w \in D$, R depending only on ϵ, where $\Gamma = \{z \in D, (1-|z|^2)|g'(z)| \geq \epsilon\}$.

With respect to the multiplication operators, we can prove the following:

Proposition 2.8. *Let $g \in H^\infty$. If $M_g : L^2_a\left((1-|z|^2)^2 dA(z)\right) \to L^2_a\left((1-|z|^2)^2 dA(z)\right)$ is bounded below, then $M_g : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$ is bounded below.*

We determined the multiplication operators M_g on the weighted Bergman spaces that have a closed range using sampling set for $\mathcal{B}^1$.

Theorem 2.9. *Suppose that $g \in H^\infty$. Then there is a constant $k > 0$ such that*

$$\int_D |f(z)|^2 |g(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z) \geq k \int_D |f(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z)$$

for all $f \in L_a^2\left((1-|z|^2)^2 dA(z)\right)$ if and only if there exists a positive constant $\epsilon > 0$ such that $\{z \in D, |g(z)| \geq \epsilon\}$ is a sampling set for $\mathcal{B}^1$.

Remark 2.10 Carefully examining the proof of the above theorem, we see the following are also the equivalent conditions respectively:
(2.10.1) $\quad \sup_{z\in D}(1-|z|^2)^2 |g(z)\varphi_w'(z)| \geq C$ for all $w \in D$.
(2.10.2) $\quad$ For any $\epsilon < C$, $\rho(\Gamma, w) \leq R < 1$ for all $w \in D$, R depending only on ϵ, where $\Gamma = \{z \in D, |g(z)| \geq \epsilon\}$.

References

[1] A.Aleman and J.Cima, An integral operator on H^p and Hardy's inequality, J.Anal.Math.85 (2001)157-176.

[2] A.Aleman and A.G.Siskakis, An integral operator on H^p, Complex Variables, 28(1995),149-158.

[3] A.Aleman and A.G.Siskakis, Integration operators on Bergman spaces, Indiana Univ. Math.J.46(1997),337-356.

[4] P.Ghatage and D.Zheng and Nina Zorboska, Sampling sets and closed range composition operators on the Bloch space, Proceedings of The Amer.Math.Soc.133,5(2004), 1371-1377.

[5] H.Hedenmalm and B.Korenblum and K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York.

[6] D.Leucking, Inequalities on Bergman spaces, Illinois J.Math.25(1981), 1-11.

[7] D.Leucking, Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives, Amer.J.Math.107(1985), 85-111.

[8] J.E.Littlewood and R.E.A.C.Paley, Theorems on Fourier series and power series(II), Proc. London Math.Soc. 2nd Series, 42(1937),52-89.

[9] G.McDonald and C.Sundberg, Toeplitz operators on the disc, indiana Univ.Math.J.28(1979) ,595-611.

[10] Ch.Pommerenke, Schlichte Funktionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation, Comment.Math.Helv.52(1977),591-602.

[11] R.Yoneda, Integration Operators On Weighted Bloch Spaces, Nipponkai Math.Journal (2001)Vol.12,No.2, 1-11.

[12] R.Yoneda, Multiplication Operators, Integration Operators And Companion Operators On Weighted Bloch Spaces, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.

[13] R.Yoneda, Pointwise multipliers from $BMOA^\alpha$ to the α-Bloch space, Complex Variables Vol.49,No.14, pp1045-1061.

Department of Mathematics
Otaru University of Commerce
3-5-21, Midori, Otaru, 047-8501 ,Japan
ryoneda@res.otaru-uc.ac.jp

(p,k)-quasihyponormal 作用素に関する Fuglede-Putnam theorem

棚橋浩太郎　　東北薬科大学
S.M. Patel, Sardar Patel University
内山　敦　　仙台電波高等専門学校

T はヒルベルト空間上の有界線形作用素とする。Fuglede-Putnam 定理は作用素の可換性に関する定理であるが、ここでは (p,k)-quasihyponormal 作用素に関する拡張を行う。

[Fuglede(1950)] [3]
S は normal, i.e., $SS^* = S^*S$ とする。もし $SX = XS$ なら $S^*X = XS^*$ が成り立つ。

つまり X が S と可換ならば S^* とも可換になる。この結果は Putnam [12] によって次のように拡張された。その後 Berberian trick [1] と呼ばれる簡単な証明が知られている。

[Putnam(1951)][12]
$S \in B(\mathcal{H}), T \in B(\mathcal{K})$ は normal とする。もし $SX = XT$ for some $X \in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ ならば $S^*X = XT^*$ が成り立つ。

[定義] S,T が FP-property をもつとは次を満たすことをいう

$$SX = XT \Longrightarrow S^*X = XT^*$$

すると Fuglede-Putnam 定理は「 S,T が normal ならば S,T は FP-property をもつ」ということである。そこで FP-property をもつ作用素のクラスを normal より広く拡張していこう。まず hyponormal 作用素 S ($SS^* \le S^*S$) を考える。

[問題 1] S,T が hyponormal なら S,T は FP-property をもつか。
[答] No. l^2 上の unilateral shift $Se_n = e_{n+1}$ は hyponormal である。もし、S,S が FP-property をもてば $SS = SS$ から $S^*S = SS^*$ となるが S は normal ではない。

従ってこの方向では拡張できないが、北大の高橋さんが次のような面白い結果を示した。

[命題 1. K. Takahashi(1981)] [15]
(1) S,T^* が hyponormal ならば S,T は FP-property をもつ。
(2) 「S,T が FP-property をもつ」 $\Longleftrightarrow$ 「もし $SX = XT$ ならば $[\mathrm{ran}\, X]$ は S を reduce, $(\ker X)^\perp$ は T を reduce, $S|_{[\mathrm{ran}\ X]}, T|_{(\ker X)^\perp}$ は normal である」

[注意] (2) のとき $X_1 : (\ker X)^\perp \ni x \to Xx \in [\mathrm{ran}\ X]$ は quasiaffinity (つまり X_1 は injective で dense range) で $A|_{[\mathrm{ran}\ X]}X_1 = X_1B|_{(\ker X)^\perp}$ を満たしている。よって [13] の定理 1.6.4 とその証明から $A|_{[\mathrm{ran}\ X]}, B|_{(\ker X)^\perp}$ は unitarily equivalent である。

よって S,T^* が hyponormal なら S,T は FP-property をもつが、S,T が hyponormal ではもたない。この方向での拡張には次のように多くの結果がある。

(1) **Furuta(1979)**[4] : S,T^* subnormal, i.e., normal extension をもつ
(2) **Takahashi(1981)**[15] : S,T^* hyponormal

(3) **Moore, Rogers and Trent(1981)** [10] : S, T^* M-hyponormal,

i.e., $(S-z)(S-z)^* \leq M^2(S-z)^*(S-z)$

(4) **Yoshino(1985)**[19] : S dominant, T^* M-hyponormal,

i.e., $(S-z)(S-z)^* \leq M_z^2(S-z)^*(S-z)$

(5) **Duggal(1986)**[2] : S, T^* p-hyponormal $(0 < p \leq 1)$, i.e., $(SS^*)^p \leq (S^*S)^p$

(6) **S.M. Patel(1996)** [11], **A. Uchiyama, Tanahashi(2001)** [18]:

S, T^* p-hyponormal or log-hyponormal, i.e., S 可逆 $\log SS^* \leq \log S^*S$

ここでは (p,k)-quasihyponormal operator を考える。この作用素は I.H. Kim [8] によって最近導入されたものである。

[定義 I.H. Kim(2004)] [8] T が (p,k)-quasihyponormal とは

$$0 \leq S^{*k}((S^*S)^p - (SS^*)^p)S^k$$

を満たすときをいう。ただし $0 < p \leq 1$ で k は正の整数である。

次は (p,k)-quasihyponormal operator の特徴付けである。

[命題 2 (Kim)] [8] $S \in B(\mathcal{H})$ は (p,k)-quasihyponormal で S^k の range は dense でないとすると

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\text{ran } S^k] \oplus \ker S^{*k}$$

と表すことができ、S_1 は p-hyponormal, $S_3^k = 0$, $\sigma(S) = \sigma(S_1) \cup \{0\}$ となる。但し $[\text{ran } S^k]$ は S^k の range の閉包である。

[問題 2] S, T^* が (p,k)-quasihyponormal ならば S, T は FP-property をもつか。

[答] No. $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $S^2 = 0$ であるから S は $(p,2)$-quasihyponormal である。

ここで $T^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X = S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $SX = 0 = XT$ であるが

$$S^*X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 = XT^*$$

となる。

よって無条件では成立しないので、成立する条件を探すことになる。この論文の目的は次を示すことである。

[主定理] S, T^* は (p,k)-quasihyponormal とする。

(1) S と T^* のいずれかが injective ならば S, T は FP-property をもつ。

(2) S と T^* の kernel が reducing, つまり $\ker S \subset \ker S^*$, $\ker T^* \subset \ker T$ ならば S, T は FP-property をもつ。

以下、証明の準備を行う。

[補題 1] S は (p,k)-quasihyponormal で $\mathcal{M}$ は S の不変部分空間とする。
(1) ([15]) $S|_{\mathcal{M}}$ は (p,k)-quasihyponormal である。
(2) $S|_{\mathcal{M}}$ が normal で injective ならば $\mathcal{M}$ は S を reduce する。
(3) $S|_{[\mathrm{ran}\ S^k]}$ が normal ならば $[\mathrm{ran}\ S^k]$ は S を reduce する。

[証明] (2) を示す。S を

$$S = \begin{pmatrix} T & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$$

と分解し、$T = S|_{\mathcal{M}}$ は normal とする。E を $\mathcal{M}$ への直交射影とする。このとき $S^k = \begin{pmatrix} T^k & * \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ で $\ker T = \ker T^* = \{0\}$ なので

$$\mathcal{M} = [\mathrm{ran}\ T] = [\mathrm{ran}\ T^k] \subset [\mathrm{ran}\ S^k]$$

となる。S は (p,k)-quasihyponormal なので

$$E\left((S^*S)^p - (SS^*)^p\right)E \geq 0$$

である。よって Hansen [5] の不等式と Löwner-Heinz [6] [9] の不等式から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (TT^*)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= E(SES^*)^pE \leq E(SS^*)^pE \\ &\leq E(S^*S)^pE \leq (ES^*SE)^p = \begin{pmatrix} (T^*T)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。T は normal なので

$$E(SS^*)^pE = (TT^*)^p \oplus \{0\}$$

と表される。さて $0 < q \leq p$ とする。このとき Hansen [5] の不等式から

$$\begin{aligned} (TT^*)^q \oplus \{0\} &= (E(SS^*)^pE)^{q/p} \\ &\geq E(SS^*)^qE \geq E(SES^*)^qE = (TT^*)^q \oplus \{0\} \end{aligned}$$

となる。よって $E(SS^*)^qE = (TT^*)^q \oplus \{0\}$ であるから

$$(SS^*)^q = \begin{pmatrix} (TT^*)^q & X_q \\ X_q^* & Y_q \end{pmatrix}$$

と表される。 $q = p/2$ とする。このとき

$$\begin{aligned} (TT^*)^p \oplus \{0\} &= E(SS^*)^pE = E(SS^*)^q(SS^*)^qE \\ &= \left((TT^*)^{2q} + X_qX_q^*\right) \oplus \{0\} \end{aligned}$$

であるから $X_q = 0$, よって

$$SS^* = \begin{pmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & Y_q^{p/q} \end{pmatrix}$$

となる。一方

$$SS^* = \begin{pmatrix} T & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^* & 0 \\ A^* & B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TT^* + AA^* & AB^* \\ BA^* & BB^* \end{pmatrix}$$

であるから $A = 0$ となる。

(3) S を

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\text{ran } S^k] \oplus \ker S^{*k}$$

と分解する。P を $[\text{ran } S^k]$ への直交射影とする。 Hansen [5] の不等式と Löwner-Heinz [6], [9] の不等式から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (S_1^* S_1)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\geq P(S^*S)^p P \geq P(SS^*)^p P \\ &\geq P(SPS^*)^p P \geq \begin{pmatrix} (S_1 S_1^*)^p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。$S_1 = S|_{[\text{ran } S^k]}$ が normal なので

$$(SS^*)^p = \begin{pmatrix} (S_1^* S_1)^p & A \\ A^* & B \end{pmatrix}$$

と表して良い。$(SS^*)^{p/2} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P(SS^*)^{p/2} P \geq P(SPS^*)^{p/2} P = \begin{pmatrix} (S_1^* S_1)^{p/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって $X \geq (S_1^* S_1)^{p/2}$ である。一方

$$(SS^*)^p = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} X^2 + YY^* & XY + YZ \\ Y^*X + ZY^* & Y^*Y + Z^2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$(S_1^* S_1)^p = X^2 + YY^* \geq X^2$$

となる。従って $Y = 0$ で

$$(SS^*)^{p/2} = \begin{pmatrix} (S_1^* S_1)^{p/2} & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$SS^* = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^* & 0 \\ S_2^* & S_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 S_1^* + S_2 S_2^* & S_2 S_3^* \\ S_3 S_2^* & S_3 S_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^* S_1 & 0 \\ 0 & Z^{2/p} \end{pmatrix}$$

である。従って $S_2 S_2^* = 0$ であるから $S_2 = 0$ となる。

[注意] (2) で injective はおとせない。
$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $S^2 = 0, S(\mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ である。よって $S|_{S(\mathbb{C}^2)} = 0$ は normal であるが $S^* \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \notin S(\mathbb{C}^2)$ となる。

[補題 2] S は (p,k)-quasihyponormal, N は normal とする。もし $SX = XN$ で X が dense range ならば S は normal である。

[証明] S, N を

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\text{ran } S^k] \oplus \ker S^{*k}$$
$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{K} = [\text{ran } N] \oplus \ker N^*$$

と分解する。$S^k X = XN^k, X$ が dense range, N が normal なので

$$[X([\text{ran } N^k])] = [\text{ran } S^k]$$

となる。ここで N は normal だから $[\text{ran } N^k] = [\text{ran } N]$ に注意する。

$$X_1 : [\text{ran } N] \ni x \to Xx \in [\text{ran } S^k]$$

と定めると X_1 は dense range で

$$X_1 N_1 x = XNx = SXx = S_1 X_1 x \quad \text{for } x \in [\text{ran } N]$$

となる。よって

$$S_1 X_1 = X_1 N_1$$

である。S_1 は p-hyponormal なので Aluthge transform を用いて適当な quasiaffinity (injective and dense range) Y, hyponormal operator $\tilde{S}_1$ で

$$\tilde{S}_1 Y = Y S_1$$

(see [7] page 310) を満たすものが存在する。よって

$$\tilde{S}_1 Y X_1 = Y S_1 X_1 = Y X_1 N_1$$

となる。ここで YX_1 は dense range をもつので [2] から $\tilde{S}_1$ は normal となる。よって $S_1 = S|_{[\text{ran } S^k]}$ も [11] から normal となる。よって $[\text{ran } S^k]$ は S を reduce するので補題 1 から $S_2 = 0$ となる。また $X[\text{ran } N] \subset [\text{ran } S^k]$ なので

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} : [\text{ran } N] \oplus \ker N^* \to [\text{ran } S^k] \oplus \ker S^{*k}$$

と表すことができる。$SX = XN$ より

$$\begin{pmatrix} S_1 X_1 & S_1 X_2 \\ 0 & S_3 X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 N_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。X は dense range なので X_3 も dense range である。よって $S_3 X_3 = 0$ から $S_3 = 0$ が得られる。よって $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は normal である。

[補題 3] S は p-hyponormal, T^* は (p,k)-quasihyponormal とする。もし $SX = XT$ で X が injective ならば $S^*X = XT^*$ である。

[証明] $[\mathrm{ran}\ T^{*k}] = \mathcal{K}$ なら T^* は p-hyponormal なので [2] によって示されている。よって $[\mathrm{ran}\ T^{*k}] \neq \mathcal{K}$ としてよい。X, T を

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}: \quad [\mathrm{ran}\ T^{*k}] \oplus \ker T^k \to \mathcal{H},$$
$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{K} = [\mathrm{ran}\ T^{*k}] \oplus \ker T^k$$

と分解する。$SX = XT$ から

$$\begin{pmatrix} SX_1 & SX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1T_1 + X_2T_2 & X_2T_3 \end{pmatrix}$$

となる。命題 2 より $T_3^{*k} = 0$ であるから $SX_2 = X_2T_3, S^kX_2 = X_2T_3^k = 0$ となる。S は p-hyponormal なので $\ker S \subset \ker S^*$ である。よって $\ker S^2 = \ker S$ である。従って $SX_2 = 0, X_2T_3 = 0$ となる。X は injective なので X_2 も injective である。従って $T_3 = 0$ となる。ここで $\ker T^k = \ker T$ に注意する。なぜなら $x \in \ker T^k$ とすると

$$Tx = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = 0$$

となるからである。よって $[\mathrm{ran}\ T^{*k}] = [\mathrm{ran}\ T^*]$ になるので T^* は p-quasihyponormal である。よって [17] から T_1^* は p-hyponormal になる。ここで

$$S(SX_1) = S(X_1T_1 + X_2T_2) = (SX_1)T_1,$$

S は p-hyponormal であるから [2] より

$$S^*(SX_1) = (SX_1)T_1^*$$

で, $(\ker SX_1)^\perp$ は T_1 を reduce し $T_1|_{(\ker SX_1)^\perp}$ は normal である。

次に $\ker SX_1 = \ker T_1$ を示す。$\ker S \subset \ker S^*$ であるから $S(SX_1 - X_1T_1) = 0$ より $S^*(SX_1 - X_1T_1) = 0$ となる。もし $T_1x = 0$ とすると $S^*SX_1x = S^*X_1T_1x = 0$ となる。従って $SX_1x = 0$ である。よって $\ker T_1 \subset \ker SX_1$ である。逆に $SX_1x = 0$ となる $x \in [\mathrm{ran}\ T^{*k}] = [\mathrm{ran}\ T^*]$ をとる。すると

$$0 = SX_1 = X_1T_1x + X_2T_2x = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1x \\ T_2x \end{pmatrix}$$

となる。ここで $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}$ は injective なので $T_1x = 0, T_2x = 0$ となる。従って $\ker SX_1 = \ker T_1$ である。よって $(\ker T_1)^\perp$ は T_1 を reduce し $T_1|_{(\ker T_1)^\perp}$ は normal である。よって

$$T_1 = T_1|_{(\ker T_1)^\perp} \oplus T_1|_{\ker T_1} = T_1|_{(\ker T_1)^\perp} \oplus 0$$

は normal となる。従って補題 1 より $T_2 = 0$ となる。よって $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は normal である。残りは [2] によって示されている。

[補題 4] S は p-hyponormal, T^* は injective (p,k)-quasihyponormal とする。もし、$SX = XT$ ならば $S^*X = XT^*$ である。

[証明] S, T, X を

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\text{ran } X] \oplus \ker X^*$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{K} = (\ker X)^\perp \oplus \ker X$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : (\ker X)^\perp \oplus \ker X \to [\text{ran } X] \oplus \ker X^*$$

と分解する。 $SX = XT$ より $S_1X_1 = X_1T_1$ である。また [16] より S_1 は p-hyponormal であることに注意する。 T_1^* は補題 1 より injective (p,k)-quasihyponormal operator である。X_1 は quasiaffinity であるから補題 3 より $S_1^*X_1 = X_1T_1^*$ で S_1, T_1 はユニタリ同値な normal operator になる。T_1^* は injective normal operator であるから $S_1 = S|_{[\text{ran } X]}$ も injective normal operator である。従って補題 1 から $[\text{ran } X]$ は S を, $(\ker X)^\perp$ は T^* を reduce する。よって $S_2 = 0, T_2 = 0$ となって

$$S^*X = \begin{pmatrix} S_1^*X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1T_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = XT^*$$

が得られる。残りは [14] によって示されている。

[補題 5] S, T^* は (p,k)-quasihyponormal とする。X は quasiaffinity (injective, dense range) で $SX = XT$ とする。もし S または T^* が injective ならば $S^*X = XT^*$ で S, T は unitarily equivalent normal operators である。

[証明] T^* が injective とすると T, T^k は dense range をもつ。すると $S^kX = XT^k$ より S^k も dense range をもつ。よって S は p-hyponormal である。よって補題 4 より結論が得られる。S が injective のときは両辺の adjoint をとればよい。

[主定理の証明] (1)
S, T, X を

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = [\text{ran } X] \oplus \ker X^*,$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix} \quad \text{on} \quad \mathcal{K} = (\ker X)^\perp \oplus \ker X,$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : (\ker X)^\perp \oplus \ker X \to [\text{ran } X] \oplus \ker X^*$$

と分解する。 $SX = XT$ より

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix}$$

となるので $S_1X_1 = X_1T_1$ である。また、補題 1 から $S_1 = S|_{[\text{ran } X]}, T_1^* = T^*|_{(\ker X)^\perp}$ は (p,k)-quasihyponormal, S_1 または T_1^* は injective である。ここで

$$X_1 : (\ker X)^\perp \ni x \to Xx \in [\text{ran } X]$$

は quasiaffinity で $S_1X_1 = X_1T_1$ であるから、補題 5 より $S_1^*X_1 = X_1T_1^*$ となり S_1, T_1 は unitarily equivalent normal operator で injective である。従って補題 1 より $[\text{ran}\, X]$ は S を, $(\ker X)^{\perp}$ は T^* を reduce するので $S_2 = 0, \quad T_2 = 0$ となる。よって

$$S^*X = \begin{pmatrix} S_1^*X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1T_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = XT^*$$

である。

(2) S, T^* は (p,k)-quasihyponormal で $\ker S \subset \ker S^*, \ker T^* \subset \ker T$ とする。S, T を normal part と pure part に分けて

$$S = S_n \oplus S_p \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_p$$
$$T^* = T_n^* \oplus T_p^* \qquad \mathcal{K} = \mathcal{K}_n \oplus \mathcal{K}_p$$

と表す。ここで S_n, T_n^* は normal, S_p, T_p^* は reducing subspace で制限しても normal にならない。よって仮定から S_p, T_p^* は injective (p,k)-quasihyponormal である。ここで $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ とおくと $SX = XT$ より

$$\begin{pmatrix} S_nX_1 & S_nX_2 \\ S_pX_3 & S_pX_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1T_n & X_2T_p \\ X_3T_n & X_4T_p \end{pmatrix}$$

となる。ここで $S_pX_3 = X_3T_n$ から (1) より $S_p^*X_3 = X_3T_n^*$ で $[\text{ran}\ X_3]$ は S_p を reduce し, $S_p|_{[\text{ran}\ X_3]}$ は normal となる。S_p は pure なので $X_3 = 0$ である。

同様に $X_2 = 0, X_4 = 0, S_n^*X_1 = X_1T_n^*$ が得られるので

$$S^*X = \begin{pmatrix} S_n^* & 0 \\ 0 & S_p^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_n^* & 0 \\ 0 & T_p^* \end{pmatrix} = XT^*$$

となる。

参考文献

[1] S.K. Berberian, *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. Amer. Math. Soc., **10**(1959), 175–182.

[2] B.P. Duggal, *Quasi-similar p-hyponormal operators*, Integr. Equat. Oper. Th., **26**(1996), 338-345.

[3] B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**(1950), 35–40.

[4] T. Furuta, *Normality can be relaxed in the asymptotic Fuglede-Putnam theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **79**(1980), 593–596.

[5] F. Hansen, *An inequality*, Math. Ann., **246**(1980), 249–250.

[6] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann., **123**(1951), 415–438.

[7] I.H. Jeon, J.I. Lee and A. Uchiyama, *On p-quasihyponormal operators and qusisimilarity*, Math. Inequalities and Applications, **6**(2003), 309–315.

[8] In Hyoun Kim, *On (p,k)-quasihyponormal operators,* Math. Inequal. and Appl., **7**(2004), 629–638.

[9] K. Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z., **38**(1934), 177–216.

[10] R.L. Moore, D.D. Rogers and T.T. Trent, *A note on intertwining M-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **83**(1981), 514–516.

[11] S.M. Patel, *On Intertwining p-hyponormal operators*, Indian J. Math., **38**(1996), 287–290.

[12] C.R. Putnam, *On normal operators in Hilbert space*, Amer. J. Math., **73**(1951), 357–362.

[13] C.R. Putnam, *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*, Ergeb. Math. 36, Springer (Berlin-Heidelberg-New York, 1967).

[14] K. Takahashi, *On the converse of Fuglede-Putnam theorem*, Acta Sci. Math. (Szeged), **43**(1981), 123–125.

[15] K. Tanahashi, A. Uchiyama and M. Chō, *Isolated point of spectrum of (p,k)-quasihyponormal operators*, Linear Algebra and its Applications, **382**(2004), 221–229.

[16] A. Uchiyama, *Berger-Shaw's theorem for p-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, **33**(1999), 221-230.

[17] A. Uchiyama, *Inequalities of Putnam and Berger-Shaw for p-quasihyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, **34**(1999), 91–106.

[18] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *Fuglede-Putnam's theorem for p-hyponormal or log-hyponormal operators*, Glasgow math. J., **44**(2002), 397–410.

[19] T. Yoshino, *Remark on the generalized Putnam-Fuglede theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., **95**(1985), 571–572.

ITERATIVE METHODS FOR IMAGE RECOVERY PROBLEMS IN BANACH SPACES

高阪 史明 (KOHSAKA, FUMIAKI)

ABSTRACT. In this paper, we study the problem of finding a common point of a given family of closed convex subsets of a Banach space. Using the convex combination based on Bregman distances due to Censor and Reich, we introduce two modifications of the block iterative projection algorithm. Then we discuss weak and strong convergence of these algorithms.

1. 序

H を (実) Hilbert 空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^m$ を H の閉凸集合族で, $C=\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする. Image recovery problem とは, H から各 C_i 上への距離射影 P_i を用いて, $\bigcap_{i=1}^m C_i$ の点を求める問題のことをいう. ここで,

$$P_i(x)=\arg\min_{y\in C_i}\|y-x\|\left(=\left\{z\in C_i:\|z-x\|=\min_{y\in C_i}\|y-x\|\right\}\right)\quad(x\in H)$$

である. また, $F(P_i)$ を P_i の不動点集合とすれば $\bigcap_{i=1}^m C_i=\bigcap_{i=1}^m F(P_i)$ となる. さらに, P_i は firmly nonexpansive である. すなわち,

$$\|P_ix-P_iy\|^2+\|x-P_ix-(y-P_iy)\|^2\le\|x-y\|^2\quad(x,y\in H)\tag{1}$$

が成り立つ. この性質は P_i が H の閉部分空間上への直交射影の場合に成り立つ等式

$$\|P_ix\|^2+\|x-P_ix\|^2=\|x\|^2\quad(x\in H)$$

の非線形版である. よって, Hilbert 空間における image recovery problem は nonexpansive 写像族に対する共通不動点問題となる.

Image recovery problem の近似解法の一つに, von Neumann [24] による alternating projection algorithm がある. これは, C_1, C_2 が H の閉部分空間の場合に, $x_0=x\in H$,

$$x_{n+1}=P_{(n\bmod 2)+1}x_n\quad(n=0,1,\dots)$$

により点列 $\{x_n\}$ を定義する方法である. この点列 $\{x_n\}$ は $P_{C_1\cap C_2}(x)$ に強収束することが知られている. ここで, P_{C_1}, P_{C_2}, $P_{C_1\cap C_2}$ は直交射影である. Halperin [16] はこの定理を有限個の閉部分空間に対する定理として拡張した (Deutsch [11] も参照せよ). Bregman [6] は Halperin の定理 [16] を非線形射影に対して研究した. そこでは, 有限個の閉凸集合族 $\{C_i\}_{i=1}^m$ と各 C_i 上への距離射影 P_i を用いて, $x_0=x\in H$,

$$x_{n+1}=P_{(n\bmod m)+1}x_n\quad(n=0,1,\dots)\tag{2}$$

で点列が定義された. さらに, 共通部分 $C=\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でない場合, $\{x_n\}$ が C の点に弱収束することが証明された (中條-下地-高橋 [22] による, より一般的な収束定

2000 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47J25.

Key words and phrases. Convex minimization problem, convex feasibility problem, generalized projection, image recovery problem, uniformly convex Banach space.

理も参照せよ). これらの結果と関連する研究として, [2, 3, 7, 8, 13, 26] 及びそれらの参考文献を参照せよ.

一方, 上記の手法とは別に block iterative projection algorithm (以下 (BIPA)) とよばれる方法がある [1, 4, 9, 10, 14]. これは, 初期点 $x_1 = x \in H$ から点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} w_n(i)(\alpha_{n,i}x_n + (1-\alpha_{n,i})P_i x_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3}$$

により定義する方法である. ここで, $\{w_n(i)\} \subset [0,1]$, $\sum_{i=1}^{m} w_n(i) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $\{\alpha_{n,i}\} \subset [-1,1]$ である. 特に, $w_n(i) \equiv 1/m$, $\alpha_{n,i} \equiv 0$ の場合, (3) は

$$x_{n+1} = \frac{P_1x_n + P_2x_n + \cdots + P_mx_n}{m} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{4}$$

となる. (2) で射影を巡回的に用いて点列が定義されているのに対し, (3) では射影の平均をとる形で点列が定義されている. 点列 (3) は, 幾つかの仮定の下で $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$ の点に弱収束することが知られている.

Hilbert 空間だけでなく, 狭義凸な回帰的 Banach 空間においても距離射影は定義される. しかし, Hilbert 空間の場合と異なり, Banach 空間では (1) が一般に成立するとは限らない. このため, 距離射影とは別の射影が Banach 空間において導入されている. その中に

$$\mathit{\Pi}_i(x) = \arg\min_{y \in C_i} \phi(y,x) \left(= \left\{ z \in C_i : \phi(z,x) = \min_{y \in C_i} \phi(y,x) \right\}\right) \quad (x \in E) \tag{5}$$

により定義される E から C_i 上への generalized projection $\mathit{\Pi}_i$ がある [2, 18]. ここで,

$$\phi(y,x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx\rangle + \|x\|^2 \quad (y, x \in E) \tag{6}$$

であり, J は滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間 E から E^* への双対写像である. この射影 $\mathit{\Pi}_i$ に関して, 次の不等式が成り立つことが知られている [2, 18].

$$\phi(x, \mathit{\Pi}_i y) + \phi(\mathit{\Pi}_i y, y) \le \phi(x,y) \quad (x \in C_i,\ y \in E) \tag{7}$$

E が Hilbert 空間の場合, $\phi(y,x) = \|y-x\|^2$ $(y, x \in E)$ となり, $\mathit{\Pi}_i$ は距離射影 P_i と一致する. また, (7) は (1) で $x \in C_i$ とした場合に得られる不等式と一致する.

本稿では, generalized projection $\mathit{\Pi}_i$ と双対写像 J を用いて, Banach 空間における (BIPA) を改良し, image recovery problem に対する収束定理を得る. ここで述べる結果は, [21] において得られたものである. まず, Censor-Reich [8] による Bregman 距離に適した凸結合及び [17, 19] における近接点法に動機づけられ, (BIPA) を次の様に変形する.

$$x_{n+1} = J^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m} w_n(i)(\alpha_{n,i}Jx_n + (1-\alpha_{n,i})J\mathit{\Pi}_i x_n)\Big) \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{8}$$

とする. ここで, $\{w_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le m\}$ 及び $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le m\}$ は $[0,1]$ の数列で, $\sum_{i=1}^{m} w_n(i) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすものとする. このように定義した点列 $\{x_n\}$ の $C = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ の点への弱収束性を示す (定理 3.2). 次に, 数理計画における hybrid 法を用いて, 次の近似法を導入する.

$$\begin{cases} y_n = J^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m} w_n(i)(\alpha_{n,i}Jx_n + (1-\alpha_{n,i})J\mathit{\Pi}_i x_n)\Big); \\ H_n = \{z \in E : \phi(z, y_n) \le \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in E : \langle z - x_n, Jx_1 - Jx_n\rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = \mathit{\Pi}_{H_n \cap W_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \tag{9}$$

ここで, H_n と W_n は解集合 $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$ を含む閉半空間であることが示される. それらの共通部分に初期点を射影することで次の点 x_{n+1} を定義する. (8) と比べると (9) の構成方法は複雑である. しかし, (8) は弱収束列であるが (9) は強収束列となる. さらに, その極限は初期点を解集合 C に射影した点となる (定理 3.3). 各ステップ毎に, 閉半平面を構成し, それらの共通部分への射影を用いて点列を構成する手法は, 極大単調作用素に対する近接点法の研究 [18, 25, 27] や, Hilbert 空間における nonexpansive 写像に対する不動点近似法の研究 [23] において用いられている.

2. 準備

実数全体の集合と自然数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{N}$ で表す. E を (実)Banach 空間とし, E^* をその双対空間とする. E から E^* への双対写像 J は,

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (x \in E)$$

で定義される集合値写像である. ここで, $\langle x, x^* \rangle$ は $x^*(x)$ を表す. $S(E)$ で E の単位球面 $\{z \in E : \|z\| = 1\}$ を表す. Banach 空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon \in (0, 2]$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $x, y \in S(E)$ かつ $\|x-y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x+y)/2\| \leq 1-\delta$ が成り立つことをいう. また, E が滑らかであるとは, 任意の $x, y \in S(E)$ に対し

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{10}$$

が存在することをいう. また, E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは, 任意の $y \in S(E)$ に対して, (10) が $x \in S(E)$ について一様収束することをいう. さらに, E が一様に滑らかであるとは, (10) が $x, y \in S(E)$ について一様収束することをいう. 例えば, ℓ^p や L^p $(1 < p < \infty)$ は一様に滑らかで一様凸な Banach 空間である. 一様凸な Banach 空間は回帰的であることも知られている. また, E が滑らかで一様凸ならば, 双対写像 $J : E \to E^*$ は一価の全単射写像となる. E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能なら, J は E の任意の有界集合上で一様連続である (E はノルム位相で, E^* は汎弱位相である). また, E が一様に滑らかならば, J は E の任意の有界集合上でノルムの意味で一様連続となる. E を滑らかな Banach 空間とするとき, E から E^* への双対写像 J が点列的に弱連続であるとは, 任意の E の弱収束点列 $\{z_n\}$ とその弱収束極限 z に対し, $\{Jz_n\}$ が Jz に汎弱収束することをいう. Banach 空間の幾何学に関しては Diestel [12] 及び高橋 [32] を参照せよ.

上村-高橋 [18] により得られた次の補題は重要である.

補題 2.1 ([18]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし, $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を (6) で定義する. このとき, $\{x_n\}$ 又は $\{y_n\}$ が有界で, $\lim_n \phi(x_n, y_n) = 0$ を満たすならば, $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ となる.

E が Hilbert 空間の場合は, $\phi(y, x) = \|y - x\|^2$ $(y, x \in E)$ となるので, 上記補題は明らかに成り立つ. 一般の場合は, 次の Xu [33] による不等式を用いて証明がなされた.

補題 2.2 ([33]). E を一様凸な Banach 空間とし, $r > 0$ とする. このとき, 狭義単調増加な凸関数 $h : [0, 2r] \to \mathbb{R}$ で, $h(0) = 0$ を満たすものが存在し,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)h(\|x - y\|)$$

がすべての $\alpha \in [0, 1]$, $x, y \in rS(E)$ に対して成立する.

3. 収束定理

まず, 補題 2.2 を用いて次の補題を証明することができる.

補題 3.1 ([21]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の閉凸集合族で, $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し, Π_i を E から C_i 上への generalized projection とする. $x_1 = x \in E$ とし, $\{x_n\}$ を (8) により定義する. ここで, $\{w_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m\}$ 及び $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m\}$ は $[0, 1]$ の数列で, $\sum_{i=1}^m w_n(i) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすものとする. このとき, $\{\Pi_C(x_n)\}$ は C の中で強収束する.

次に, 補題 2.1, 3.1 を用いると, 次の弱収束定理を証明することができる. ただし, 以下では, $\{w_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m\}$ 及び $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m\}$ は $[0, 1]$ の数列で,

$$\sum_{i=1}^m w_n(i) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \liminf_{n\to\infty} w_n(i) > 0, \limsup_{n\to\infty} \alpha_{n,i} < 1 \quad (i \in \{1, 2, \ldots m\})$$

を満たすとものする.

定理 3.2 ([21]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の閉凸集合族で, $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し, Π_i を E から C_i 上への generalized projection とする. $x_1 = x \in E$ とし, $\{x_n\}$ を (8) により定義する. このとき, 次が成立する.

(a) $\{x_n\}$ は有界点列であり, $\{x_n\}$ の弱収束部分列の極限は C の点である;
(b) J が点列的に弱連続ならば, $\{x_n\}$ は $\{\Pi_C(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する.

証明の概略. (a) $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ とおく. まず, 任意の $u \in C$ に対して

$$\phi(u, x_{n+1}) \leq \phi(u, x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

が得られる. これより, $\lim_n \phi(u, x_n)$ が存在する. 不等式

$$(\|u\| - \|x_n\|) \leq \phi(u, x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

により, $\{x_n\}$ が有界であることが分かる.

次に, $\lim_n \phi(u, x_n)$ の存在性及び $\{\Pi_i\}_{i \in I}$ の性質 (7) を用いて

$$\sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^\infty w_n(i)(1 - \alpha_{n,i})\phi(\Pi_i x_n, x_n) < \infty$$

を示すことができる. よって,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(i)(1 - \alpha_{n,i})\phi(\Pi_i x_n, x_n) = 0$$

である. 各 $i \in I$ に対して, $\liminf_n w_n(i) > 0$, $\limsup_n \alpha_{n,i} < 1$ より,

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\Pi_i x_n, x_n) = 0$$

を得る. ここで, 補題 2.1 を用いると $\lim_{n\to\infty} \|\Pi_i x_n - x_n\| = 0$ が得られる. これより, $x_{n_k} \rightharpoonup z$ ならば $z \in C$ となることが分かる.

(b) 補題 3.1 より, $\{\Pi_C x_n\}$ は C の点 z' に強収束する. 最後に, Π_C の性質及び J の点列的弱連続性を用いて, $z = z'$ を証明することができる. □

点列の構成方法を次のように変形すれば, 双対写像 J の点列的弱連続性を仮定せずに, 強収束定理を得ることができる.

定理 3.3 ([21]). E を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸な Banach 空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の閉凸集合族で, $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする. 各 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対し, Π_i を E から C_i 上への generalized projection とする. $x_1 = x \in E$ とし, $\{x_n\}$ を (9) により定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_C(x)$ に強収束する.

4. 系

定理 3.2 と 3.3 より, Hilbert 空間における次の収束定理を得る. この場合, J は E 上の恒等写像となる.

系 4.1 ([21]). E を Hilbert 空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の閉凸集合族で, $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする. 各 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対し, P_i を E から C_i への距離射影とする. $x_1 = x \in E$ とし,

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^m w_n(i)(\alpha_{n,i}x_n + (1 - \alpha_{n,i})P_i x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $\{P_C(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する.

系 4.2 ([21]). E を Hilbert 空間とし, $\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の閉凸集合族で, $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする. 各 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対し, P_i を E から C_i 上への距離射影とする. $x_1 = x \in E$ とし,

$$\begin{cases} y_n = \sum_{i=1}^m w_n(i)(\alpha_{n,i}x_n + (1 - \alpha_{n,i})P_i x_n); \\ H_n = \{z \in E : \|z - y_n\| \le \|z - x_n\|\}; \\ W_n = \{z \in E : \langle z - x_n, x_1 - x_n \rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_C(x)$ に強収束する.

References

[1] R. Aharoni and Y. Censor, *Block-iterative projection methods for parallel computation of solutions to convex feasibility problems*, Linear Algebra Appl. **120** (1989), 165–175.

[2] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[3] I. Amemiya and T. Andô, *Convergence of random products of contractions in Hilbert space*, Acta Sci. Math. (Szeged) **26** (1965), 239–244.

[4] H. H. Bauschke and J. M. Borwein, *On projection algorithms for solving convex feasibility problems*, SIAM Rev. **38** (1996), 367–426.

[5] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Construction of best Bregman approximations in reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3757–3766.

[6] L. M. Bregman, *The method of successive projection for finding a common point of convex sets*, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 688–692.

[7] L. M. Bregman, *The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming*, USSR Comput. Math. and Math. Phys. **7** (1967), 200–217.

[8] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[9] N. Cohen and T. Kutscher, *On spherical convergence, convexity, and block iterative projection algorithms in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **226** (1998), 271–291.

[10] G. Crombez, *Image recovery by convex combinations of projections*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 413–419.

[11] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 7, Springer-Verlag, New York (2001).

[12] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces -Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics, 485. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).

[13] J. M. Dye and S. Reich, *On the unrestricted iteration of projections in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), 101–119.

[14] S. D. Flåm, and J. Zowe, *Relaxed outer projections, weighted averages and convex feasibility*, BIT **30** (1990), 289–300.

[15] J. P. Gossez and E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **40** (1972), 565–573.

[16] I. Halperin, *The product of projection operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **23** (1962), 96–99.

[17] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[18] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[19] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239–249.

[20] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Iterative scheme for finding a common point of infinitely many convex sets in a Banach space*, J. Nonlinear Convex Anal. **5** (2004), 407–414.

[21] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence to common points of families of convex sets in Banach spaces*, submitted.

[22] K. Nakajo, K. Shimoji and W. Takahashi, *A weak convergence theorem by products of mappings in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2004, pp. 381–390.

[23] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[24] J. von Neumann, *On rings of operators. Reduction theory*, Ann. Math. **50** (1949), 401–485.

[25] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.

[26] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distance*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[27] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[28] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1283–1293.

[29] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[30] W. Takahashi, *Fixed point theorems and proximal point algorithms*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2003, pp. 471–481.

[31] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000) (Japanese).

[32] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

[33] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.

[34] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.

[35] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge NJ, (2002).

(Fumiaki Kohsaka) Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552, Japan

E-mail address: `kohsaka9@is.titech.ac.jp`

再生核の理論のTikhonov正則化法への応用 (Applications of the theory of reproducing kernels to the Tikhonov regularization)

Saburou Saitoh

Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Gunma University, Kiryu 376-8515 Japan

ssaitoh@math.sci.gunma-u.ac.jp

熱伝導における逆問題は典型的な不適切問題で、難問とされている常識に対して、Tikhonov の正則化法、再生核の理論、そして解析関数の族である Paley-Wiener 空間を用いることによって、 難問題は計算機画面上で解決できたことを、一般理論と数値実験を与えることによって示す。 例えば、図では、$t = 1$ 後の温度分布を直方体にしたいとき、 我々の公式による初期温度分布関数とその $t = 1$ 後の温度分布関数。 近似の度合いを示すパラメータを小さくとっていき計算機画面上で、1.5 時間くらいで、完全な直方体の形を再現できた。 すなわち、 熱伝導の逆問題は最も難しい状況の下で計算機を用いることによって解けたといっても良い。 そこで、 可能にした数学の背景や他の具体的な応用例を示しながら今後の展望などについて報告した。

講演要旨は

1） 著書 [11] の基礎になる 入力、法則、出力の間の関係についてヒルベルト空間の枠組みで線形変換における基本的な結果を再生核の理論を用いる一般論の立場から紹介した。 そこで、不適性問題は本質的には克服されること、さらに、いまだ確立されていないとされる第１種積分方程式のヒルベルト空間の枠組みでの一般論が展開できることが述べられた。

2） 上記の中で、直角三角形において斜辺に他の２辺を対応させる線形射影作用素において成り立つピタゴラスの定理の一般理論が展開でき、特に [10] で最初に得られた熱方程式における等長関係と林仲夫氏の熱方程式における等長関係の考察から解析接続の結果に発展した経緯が述べられた。

3） ２) からヒルベルト空間上の有界線形作用素方程式や最良近似の考えに発展し、結局 Moore-Penrose 一般逆の再生核の理論を用いる一般論に至った経緯と基本結果が述べられた。

4） しかし、誤差や雑音を含むデータから一般逆を求めるには Tikhonov の正則化法の考えが極めて重要であることが述べられた。 しかしながら、Tikhonov の正則化法における極値関数の表現において、 現在までコンパクト作用素の場合に固有値と固有関数を用いた表現しかなく (表現はそれゆえに抽象的とも言える)、 一般の有界線形作用素の場合に再生核の理論を用いて具体的な表現を得る新しい方法が報告された。 この際、具体的には近似関数空間の有する元になる与えられた再生核から十分に良い第２種積分方程式の解として定まる再生核が求められれば、その再生核を用いて解を表現できること、およびその構成方法として２つの離散化法が紹介された。 これらの表現における誤差評価も得られ、再生核の理論を用いる Tikhonov の正則化法の一般理論は一応の完成に達した事を [16,17] の経緯を踏まえて報告した:

Tikhonov 正則化法に再生核ヒルベルト空間を用いたときにおける基本的な定理は次の２つであった ([1,3,5,6,7,8,9,13,14,15]).

Theorem 1 *Let H_K be a Hilbert space admitting the reproducing kernel $K(p,q)$ on a set E. Let $L : H_K \to \mathcal{H}$ be a bounded linear operator on H_K into a Hilbert space $\mathcal{H}$. For $\lambda > 0$ introduce the inner product in H_K and call it H_{K_λ} as*

$$(f_1, f_2)_{H_{K_\lambda}} = \lambda(f_1, f_2)_{H_K} + (Lf_1, Lf_2)_{\mathcal{H}}, \tag{0.1}$$

then H_{K_λ} is the Hilbert space with the reproducing kernel $K_\lambda(p,q)$ on E and satisfying the equation

$$K(\cdot,q) = (\lambda I + L^*L)K_\lambda(\cdot,q), \tag{0.2}$$

where L^* is the adjoint of $L : H_K \to \mathcal{H}$.

Theorem 2 *Let H_K, L, $\mathcal{H}$, E and K_λ be as in* Theorem 1. *Then, for any $\lambda > 0$ and for any $g \in \mathcal{H}$, the extremal function in*

$$\inf_{f\in H_K}\left(\lambda\|f\|^2_{H_K} + \|Lf-g\|^2_{\mathcal{H}}\right) \tag{0.3}$$

exists uniquely and the extremal function is represented by

$$f^*_{\lambda,g}(p) = (g, LK_\lambda(.,p))_{\mathcal{H}} \tag{0.4}$$

which is the member of H_K attaining the infimum in (0.3).

定理２において、一般的に次の形の誤差評価が得られたので、報告した：

Theorem 3 *We obtain the estimate*

$$|f^*_{\lambda,g}(p)| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{K(p,p)}\|g\|_{\mathcal{H}}.$$

(0.3)-(0.4) における極値関数は λ がゼロに収束するとき、　作用素方程式

$$Lf = g$$

の Moore-Penrose 一般逆が存在するときには、良い意味でそれに収束すること、さらにその収束の様子についても報告した。

次に定理１における再生核を離散化の方法で求める２つの一般的なアルゴリズムを紹介し、それらについても定理３に対応する誤差評価が得られることを示した：

We take a family of complete orthonormal system $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ of the Hilbert space $\mathcal{H}$.

For fixed $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty(\lambda_j > 0)$, we consider the general extremal problem

$$\inf_{f\in H_K}\left\{\alpha\|f\|^2_{H_K} + \sum_{j=1}^\infty \lambda_j|(\mathbf{d}-Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2\right\}.$$

That is,

$$\|\mathbf{d}-Lf\|^2_{\mathcal{H}}$$

is replaced by

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j|(\mathbf{d},e_j)_{\mathcal{H}} - (Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2.$$

Then, we shall give an algorithm constructing the reproducing kernel $K_{\alpha,\lambda_j}(p,q)$ of the Hilbert space $H_{K_{\alpha,\lambda_j}}$ with the norm square

$$\alpha\|f\|^2_{H_K} + \sum_{j=1}^\infty \lambda_j|(Lf,e_j)_{\mathcal{H}}|^2.$$

Here, of course, we assume that it converges for $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty(\lambda_j > 0)$. However, in a practical application, of course, we consider only finite terms in this and by finite terms we can give a good approximation of it.

We shall start with the first step. The reproducing kernel $K^{(1)}(p,q)$ of the Hilbert space with the norm square

$$\alpha\|f\|^2_{H_K} + \sum_{j=1}^{1} \lambda_j |(Lf, e_j)_{\mathcal{H}}|^2$$

is given by

$$K^{(1)}(p,q) = K^{(0)}(p,q) - \frac{\lambda_1(e_1, LK_p^{(0)})_{\mathcal{H}}(LK_q^{(0)}, e_1)_{\mathcal{H}}}{1 + \lambda_1(L(e_1, LK_q^{(0)})_{\mathcal{H}}, e_1)_{\mathcal{H}}},$$

for

$$K^{(0)}(p,q) = \frac{1}{\alpha}K(p,q).$$

For the second step, the reproducing kernel $K^{(2)}(p,q)$ of the Hilbert space with the norm square

$$\alpha\|f\|^2_{H_K} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j |(Lf, e_j)_{\mathcal{H}}|^2$$

is given by

$$K^{(2)}(p,q) = K^{(1)}(p,q) - \frac{\lambda_2(e_2, LK_p^{(1)})_{\mathcal{H}}(LK_q^{(1)}, e_2)_{\mathcal{H}}}{1 + \lambda_2(L(e_2, LK_q^{(1)})_{\mathcal{H}}, e_2)_{\mathcal{H}}},$$

by using the reproducing kernel $K^{(1)}(p,q)$. In this way, we can obtain the desired representation of $K_{\alpha,\lambda_j}(p,q) = K^{(\infty)}(p,q)$. Then, we obtain

Theorem 4 *For any* $\mathbf{d} \in \mathcal{H}$, *the extremal function* $f_{\alpha,\lambda}$ *in the extremal problem is given by*

$$f_{\alpha,\lambda}(p) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\mathbf{d}, e_j)_{\mathcal{H}} (e_j, LK_{\alpha,\lambda_j(\cdot,p)})_{\mathcal{H}},$$

where we assume that it converges on E.

さらに、点列を取って構成するより一般的なアルゴリズムにおいても、同様な誤差評価を得ることができることを報告した。

5) 我々の方法による　任意の行列に対する Moore-Penrose 一般逆の５行で述べられる簡単な構成方法と数値実験例：

A Construction of a Natural Inverse of Any Matrix by Using the Theory of Reproducing Kernels by K. Iwamura, T. Matsuura and S. Saitoh (PAJMS Vol. 1 no: 2 (December 2005))

が紹介された。

以下熱伝導の逆問題について、

Analytical and numerical inversion formulas in the Gaussian convolution by using the Paley-Wiener spaces by T. MATSUURA and S. SAITOH

に基づいて簡単に述べる：

We shall give surprisingly simple approximate real inversion formulas for the Gaussian convolution (the Weierstrass transform)

$$u_F(x,t) = (L_tF)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} F(\xi) \exp\left\{-\frac{|\xi - x|^2}{4t}\right\} d\xi \tag{0.5}$$

for the functions of $L_2(\mathbf{R}^n)$. This integral transform which represents the solution $u(x,t)$ of the heat equation

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{on} \quad \mathbf{R}^n \times \{t > 0\}$$

satisfying the initial condition

$$u(x,0) = F(x) \quad \text{on} \quad \mathbf{R}^n,$$

is very fundamental and has many applications to mathematical sciences. See the recent article [19] and its references for its many significants and applications to medical science and physics.

Over twenty years ago, in the one dimensional case $n = 1$, the second author [10] gave a surprise characterization of the image $u_F(x,t)$ of (0.5) for $L_2(\mathbf{R}) = L_2(\mathbf{R}, dx)$ functions in terms of an analytic function and established a very simple complex inversion formula. The paper created a new method and many applications to general integral transforms in the framework of Hilbert spaces and analytic extension formulas. See, for example [11] and [13], and their many references. However, in particular, its real inversion formulas are very involved, for example, recall that:

For a bounded and continuous function $F(x)$ and for $t = 1$,

$$e^{-D^2}[(L_1 F)(x)] = F(x) \quad \text{pointwisely} \quad \text{on} \quad \mathbf{R}$$

([2], p. 182). So, one might think that its real inversion formulas will be essentially involved for catching "analyticity" in terms of the data on the real line as in the real inversion formulas of the Laplace transform. See also [4] for a recent related article.

Indeed, this inverse problem is very famous as a typical ill-posed problem that is very difficult.

In those papers [14,8], however we were able to obtain simple and practical approximate real inversion formulas by using the theory of reproducing kernels from the ideas of best approximations and generalized inverses. Furthermore, we illustrated their numerical experiments by using computers and we can realize that we were able to obtain practical real inversion formulas. Incidentally, their ideas were naturally combined with the idea and the method of the Tikhonov regularization by using the theory of reproducing kernels.

In [9], we applied the Paley-Wiener spaces as the reproducing kernel Hilbert spaces in the above theory and we got a surprisingly impoved version in the sense of numerical. Here, we shall examine the corresponding problems in multidimensional spaces. We can obtain similar formulas and so, we are, in particular, interested in their numerical experiments by using computers, because the numerical calculations are much more complicated and, in particular, the two dimensional case has many practical applications in mathematical science. Further, we shall establish error estimates for our inversion formulas, because practical data contain errors and noises. Furthermore, we shall examine convergence rates of approximate solutions to the initial heat functions depending on parameters.

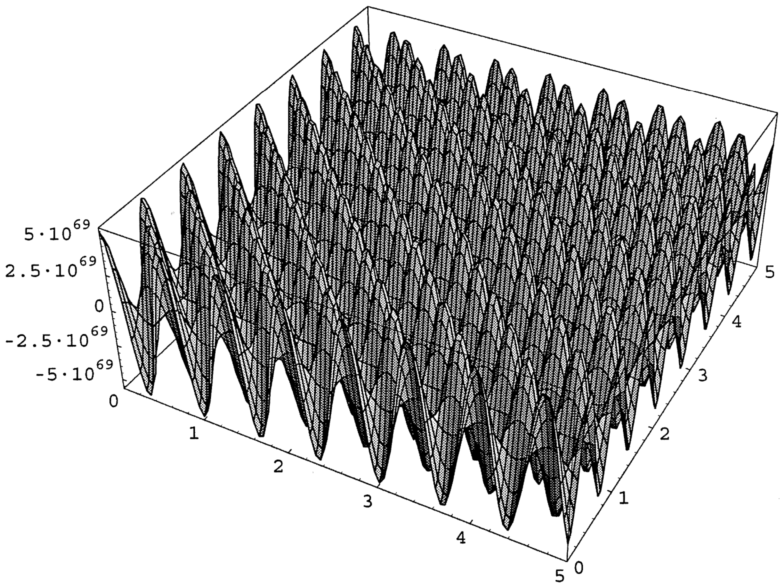
References

[1] M. Asaduzzaman, T. Matsuura, and S. Saitoh, *Constructions of approximate solutions for linear differential equations by reproducing kernels and inverse problems*, Advances in Analysis, Proceedings of the 4th International ISAAC Congress, World Scientific (2005), **30**, 335–344.

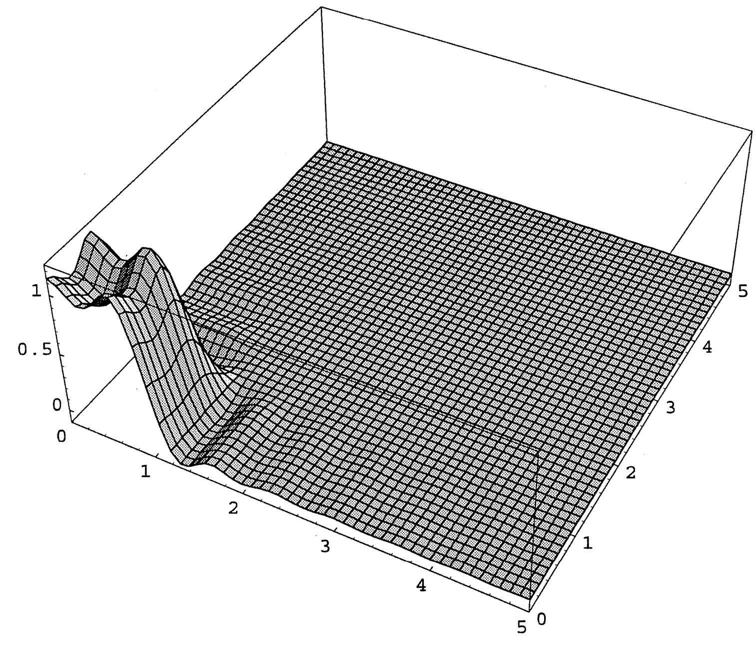
[2] I.I. Hirschman and D.V. Widder, *The Convolution Transform*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1955).

[3] H. Itou and S. Saitoh, *Analytical and numerical solutions of linear singular integral equations*, Proceedings of the 5th ISAAC Catania Congress (to appear).

[4] V.V. Kryzhniy, *Regularized inversion of integral transformations of Mellin convolution type*, Inverse Problems, **19**(2003), 573-583.



5·10^69
2.5·10^69
0
-2.5·10^69
-5·10^69
0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5



1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5

[5] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, *Numerical solutions of the Poisson equation*, Applicable Analysis, **83**(2004), 1037-1051.

[6] T. Matsuura and S. Saitoh, *Analytical and numerical solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients*, Journal Analysis and Applications, **3**(2005), 1-17.

[7] T. Matsuura and S. Saitoh, *Numerical inversion formulas in the wave equation*, Journal of Computational Mathematics and Optimization, **1**(2005), 1-19.

[8] T. Matsuura, S. Saitoh and D.D. Trong, *Approximate and analytical inversion formulas in heat conduction on multidimensional spaces*, J. of Inverse and Ill-posed Problems, **13**(2005), 1-15.

[9] T. Matsuura and S. Saitoh, *Sampling theory, reproducing kernels and the Tikhonov regularization*, Sampling Theory and Image Processing (to appear).

[10] S. Saitoh, *The Weierstrass transform and an isometry in the heat equation*, Applicable Analysis, **16**(1983), 1-6.

[11] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Pitman Res. Notes in Math. Series **369**, Addison Wesley Longman Ltd (1997), UK. 「再生核の理論入門」（牧野書店）（2002 年出版）。

[12] S. Saitoh, *Weighted L_p-norm inequalities in convolutions*, Survey on Classical Inequalities (T. M. Rassias, ed.), Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 225-234.

[13] S. Saitoh, N. Hayashi, and M. Yamamoto (eds.), *Analytic Extension Formulas and their Applications*, (2001), Kluwer Academic Publishers.

[14] S. Saitoh, *Approximate real inversion formulas of the Gaussian convolution*, Applicable Analysis, **83**(2004), 727-733.

[15] S. Saitoh, *Applications of reproducing kernels to best approximations, Tikhonov regularizations and inverse problems*, Advances in Analysis, Proceedings of the 4th International ISAAC Congress, World Scientific (2005), **39**, 439–446.

[16] S. Saitoh, *Best approximation, Tikhonov regularization and reproducing kernels*, Kodai. Math. J., **28**(2005), 359-367.

[17] S. Saitoh, *Tikhonov regularization and the theory of reproducing kernels*, Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (Proceedings of the 12th ICFIDCAA), Kyushu University Press (2005).

[18] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer Series in Computational Mathematics, 20, 1993.

[19] W. Ulmer and W. Kaissl, *The inverse problem of a Gaussian convolution and its application to the finite size of measurement chambers/detectors in photon and proton dosimetry*, Phys. Med. Biol., **48**(2003), 707-727.

平均考, II
(We consider means)

Sin-Ei Takahasi, Hiroyuki Takagi, Takeshi Miura,
Junichi Fujii and Masatoshi Fujii

Abstract. We discuss a new class of means for positive numbers including quasi-arithmetic means. In particular, we observe examples

$$M_t(a, b) = (b^{t+1} - a^{t+1})^{1/t}(t+1)^{-1/t}(b-a)^{-1/t}$$

and show that they are compositions of finitely many power means if t is an integer except 0 and -1.

本考は [1] の続きであるが、趣旨はただ美意識のみである。
更に言えば、
悪徳商人の正体が分からないままに書いたシェークスピアのベニスの商人を
４００年の歳月を経て明らかにした木下順二さんのように
そして
リーマン積分からルベーグ積分のように

１．平均の模索

「平均」と言うことをずっと考えている。母集団のある分布を知ろうとするとき、平均は欠かせない。実際、その分布の平均と分散が分かればある程度分布状態を思い描くことが出来るからである。これは分布全体の極大イデアル空間として２点集合｛平均、分散｝が適している事を示している。つまりGelfand 変換したときのラジカルが小さいのである。しかしこのような方向から平均を模索することは難しい。それは高い思考と概念を必要とするからである。ここでは古典的に知られた平均から模索してみよう。

２．リーマン型平均

先ず平均と言えば、正数 a, b が与えられたとき、相加平均 $\frac{a+b}{2}$, 相乗平均 $\sqrt{ab}$, 調和平均 $\frac{2ab}{a+b}$ であろう。これらに共通することは、$\boldsymbol{R}^+ = (0, \infty)$ 上のある実数値単調関数 F に対して、

$$(\#) \qquad M(a, b) = F^{-1}\left(\frac{F(a)+F(b)}{2}\right)$$

となっている事である。実際、相加平均、相乗平均、調和平均はそれぞれ $F(t) = t$, $F(t) = \log t$, $F(t) = \frac{1}{t}$ が対応している。実は (#) を平均とする考え方は古くからあり、これは擬算術平均と呼ばれている。これを幾何学的に考察してみよう。今 f を $\boldsymbol{R}^+$ 上の正値連続関数とし、

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx \quad (t > 0)$$

と定義すると、F は $\boldsymbol{R}^+$ 上の正値単調増加関数となり、(#) は方程式

$$\int_a^t f(x)dx = \int_t^b f(x)dx \quad (t > 0)$$

の解が $t = M(a, b)$ であることを示している。つまり擬算術平均 $M(a, b)$ とは、縦の面積 $\int_a^b f(x)dx$ を2等分する点の事を指している。我々はこれをリーマン型平均と呼びたい。

所で、2等分点を内分点に変えれば、(#) のカッコ内も同じ内分に変わるだけである事に注意する。

3．ルベーグ型平均

前節の考え方は縦の考え方であるがこれを横の考え方に変えてみよう。関数 f が連続であれば、積分の平均値の定理から、$f(t)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ なる $a \le t \le b$ が存在する。これは横の面積を2等分する考え方である。もし f が単調ならば、上式を t に関する方程式とみると、その解は一意的で、

$$t = M(a, b) := f^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$$

で与えられる。我々はこれをルベーグ型平均と呼びたい。

4．ルベーグ型平均の考察

前節のルベーグ型平均をもっと一般的に考えて見よう。$\boldsymbol{R}^+$ 上の確率測度の全体を $\mathrm{Prob}(\boldsymbol{R}^+)$ で表し、D を $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+$ 上の対角線集合とする。このとき、写像：$P : \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \setminus D \to \mathrm{Prob}(\boldsymbol{R}^+)$ 及び $\boldsymbol{R}^+$ 上の1対1両連続実数値関数 f を考え,

$$M(a, b) = f^{-1}\left(\int_0^\infty f(x)dP_{a,b}(x)\right) \quad (a, b > 0, a \ne b),$$

$$M(a, a) = a \quad (a > 0)$$

と定義する。勿論 M は P と f にも依存するので、必要があれば

$$M(a, b) = M(a, b; P, f)$$

と書く事にする。次の例で見られるように、$M(a, b; P, f)$ は P と f を上手に与えると既存の平均を良く表している事が分かる。

いま $P_{a,b}$ を正規化された Lebsgue 測度 $\dfrac{\chi_{[a,b]}(x)}{b-a}dx$ にとる。但し $\chi_{[a,b]}$ は閉区間 $[a, b]$ 上の特性関数で、$a > b$ の場合はマイナスを付ける。このとき、

$$M(a, b; P, x) = \frac{a+b}{2} \quad \text{(arithmetic mean)}$$

$$M(a, b; P, x^{-1}) = \frac{b-a}{\log b - \log a} \quad \text{(logarithmic mean)}$$

$$\lim_{t \to 0} M(a, b; P, x^t) = \frac{b^{b/(b-a)} - a^{a/(a-b)}}{e} \quad \text{(identric mean)}$$

$$\lim_{t \to \infty} M(a, b; P, x^t) = \max(a, b)$$

$$\lim_{t \to -\infty} M(a, b; P, x^t) = \min(a, b)$$

が成り立つ。また $w_1, w_2 \ge 0, w_1 + w_2 = 1$ とするとき、加重付き擬算術平均：

$$M(a, b; w_1, w_2, F) = F^{-1}\left(w_1 F(a) + w_2 F(b)\right)$$

もまた単に擬算術平均と呼ばれるが、２節の最後の注意で述べたように、これもまたリーマン型平均である。しかしこれは離散測度を考えるとルベーグ型平均と見ることが出来る。実際 δ_a, δ_b をそれぞれ a, b におけるディラック測度とし、$P_{a,b} = w_1\delta_a + w_2\delta_b$ とおく。このとき

$$M(a, b; w_1, w_2, F) = M(a, b; P, F)$$

となるからである。

さて非離散測度に関するルベーグ型平均の最も自然なものは、上で考察した正規化された Lebsgue 測度 $\dfrac{\chi_{[a,b]}(x)}{b-a}dx$ に関するもので、

$$M(a, b) = f^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \quad (a, b > 0, a \neq b),$$
$$M(a, a) = a > 0$$

で与えられる。特に t を $0, -1$ 以外の実数とし $f(x) = x^t$ の場合を考えると、$M(a, b)$ は簡単な計算により、

(##)
$$M_t(a, b) = \left(\frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(t+1)(b-a)}\right)^{1/t} \quad (a, b > 0, a \neq b),$$
$$M(a, a) = a > 0$$

で与えられる。我々はこれが所謂平均と呼ぶにふさわしいかを考える。そのバロメーターとなるものとして、べき平均と呼ばれる次の平均を取ることに依存はないであろう：

$$P_{r,w}(a, b) = \left((1-w)a^r + wb^r\right)^{1/r},\ P_{0,w}(a, b) = a^{1-w}b^w \quad (a, b > 0, r \neq 0, 0 < w < 1).$$

容易な計算で

$$M_{-2}(a, b) = \sqrt{ab} = P_{0,1/2}(a, b)$$
$$M_1(a, b) = \frac{a+b}{2} = P_{1,1/2}(a, b)$$
$$M_2(a, b) = \left(\frac{2\left(\left(\frac{b^2+a^2}{2}\right)^{1/2}\right)^2 + \left(\sqrt{ab}\right)^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = P_{2,1/3}\left(P_{2,1/2}(a, b), P_{0,1/2}(a, b)\right)$$
$$M_3(a, b) = \left(\left(\frac{b^2+a^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{b+a}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = P_{0,1/3}\left(P_{2,1/2}(a, b), P_{1,1/2}(a, b)\right)$$

がわかる。つまり M_{-2} と M_1 はべき平均そのものであり、M_2 と M_3 は３個のべき平均関数の（合成関数としての）混合平均として表される。

５．結果と予想

前節の最後の事実は次の定理が示すようにもっと一般の場合に拡張される。

定理１．(I) 自然数 n に対して、平均関数 M_n は高々$2n-1$ 個のべき平均関数の（合成関数としての）混合平均として表される。

(II) -2 以下の整数 n に対して、平均関数 M_n は高々$-2n-3$ 個のべき平均関数の（合成関数としての）混合平均として表される。

上の定理から M_n は「平均」と呼んで差し支えないだろう。証明に関しては厄介な計算と２段構えの複雑な帰納法を用いてなされるのでここでは割愛したい。

予想１． $0, -1$ 以外の有理数 t について平均関数 M_t は高々有限個のべき平均関数の（合成関数としての）混合平均として表される。

実は

$$M_{1/2}(a, b) = P_{1, 8/9}(P_{-1/2, 1/2}(a, b), P_{1. 1/2}(a, b))$$

となり、$n = 1/2$ の場合は予想は正しい。しかし $n = 1/3$ の場合は途端に分からなくなる。しかし予想は多分正しいと思われるが、これを証明することは至難のようである。

さて $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+$ 上の正値関数 M が所謂平均と呼んでいるものは大抵対角線集合 D 上で偏微分可能で

(*) $$\frac{\partial M}{\partial x}(a, a) = \frac{\partial M}{\partial y}(a, a) = \frac{1}{2} \quad (\forall a > 0)$$

が成り立っている。我々はある種の非離散測度に関するルベーグ型平均について上のことを考察する。

いま φ を $\boldsymbol{R}^+$ 上の非負値連続関数でその原始関数の一つを $\Phi(x)$ とし, Φ は狭義単調増加とする。このとき

$$dP_{\varphi}(a, b)(x) = \frac{\varphi(x)\ \chi_{[a, b]}(x)}{\Phi(b) - \Phi(a)} dx$$

と定義すると、$P_{\varphi} : \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^+ \setminus D \to \mathrm{Prob}(\boldsymbol{R}^+)$ となっている。そこで $\boldsymbol{R}^+$ 上の 1 対 1 両連続実数値関数 f に対して、

(**) $$M(a, b) = M(a, b; P_{\varphi}, f) \quad (a, b > 0)$$

とおくと、次の結果を得る。

定理 2 . Let $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ and $a \in \boldsymbol{R}^+$. Suppose that both f and φ are C^{n+2}-functions on $\boldsymbol{R}^+$ with $f'(a) \neq 0$ and $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(a) = 0, \varphi^{(n)}(a) \neq 0$. Then $\frac{\partial M}{\partial x}(a, a) = \frac{\partial M}{\partial y}(a, a) = \frac{n+1}{n+2}$.

上の定理の証明は長く複雑であるのでここでは割愛する。上の定理に関して我々は次の予想を立てたい。

予想 2 。Let f and φ be C^{∞}-functions on $\boldsymbol{R}^+$ with $f'(a) \neq 0$ and $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n)}(a) = \cdots = 0$. Then $\frac{\partial M}{\partial x}(a, a) = \frac{\partial M}{\partial y}(a, a) = 1$.

上の予想を証明しようとするとき、定理 2 を証明した手法が全く使えない。何か新しい方法を開発しなければならないようである。

系 3 . Suppose that both f and φ are C^2-functions on $\boldsymbol{R}^+$ such that $f'(a) \neq 0$ and $\varphi(a) \neq 0$ for all $a \in \boldsymbol{R}^+$. Then a Lebesgue type mean function $M(a, b; P_{\varphi}, f)$ satisfies the condition (*).

ルベーグ型平均関数 (##) は、$\varphi(x) = 1, f(x) = x^t$ に対する $M(a, b; P_{\varphi}, f)$ であるから、上の系より条件 (*) を満たし、特に t が $0, -1$ 以外の整数ならば、定理 1 からべき平均の混合となっているので、益々平均らしいと言える。しかしながらルベーグ型平均関数 (**) は、φ がどこかで n 位の零点を持てば条件 (*) を満たさない。それ故今後の研究余地を残す。

6 . 最後に

これまでの考察は 2 変数関数についてであるが、一般の n 変数関数については更に興味が益す。実は 2 と 3 の間には無限のギャップがあり、これを埋める新しい発想が待たれる。例えば 3 個の相乗平均 $\sqrt[3]{abc}$ を表す非離散的ルベーグ型平均は存在するか等であるが、これは難問である。

参考文献

[1] 藤井淳一＆高橋眞映、平均考、数理解析研究所講究録 1452(2005), 78-85.

[2] J.I. Fujii, M. Nakamura and S.-E. Takahasi, Cooper's approach to chaotic operator measns, Preprint.

Sin-Ei Takahasi, Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University Yonezawa 992-8510, Japan, E-mail: sin-ei@emperor.yz.yamagata-u.ac.jp

Hiroyuki Takagi, Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University, Matsumoto 390-8621, Japan, E-mail: takagi@math.shinshu-u.ac.jp

Takeshi Miura, Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University Yonezawa 992-8510, Japan, E-mail: miura@yz.yamagata-u.ac.jp

Jun Ichi Fujii, Department of Arts and Sciences (Information Science), Osaka Kyoiku University, Asahigaoka, Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan, E-mail: fujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

Masatoshi Fujii, Department of Mathematics, Osaka Kyoiku Uiversity, Asahigaoka, Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan, E-mail: mfujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

Banach-Mazur distance and super-reflexive Banach spaces

Yasuji Takahashi and Mikio Kato

Abstract. It is well-known that a Banach space X is super-reflexive if and only if it is J_n-convex for some $n \geq 2$. It is also known that super-reflexivity is an isomorphic invariant, but J_n-convexity is not so. In this short note, we are concerned with the stability of J_n-convexity under norm perturvations. It is shown that if X is J_n-convex, then there exists $\lambda > 1$ such that all Banach spaces Y satisfying $d(X, Y) < \lambda$ are J_n-convex, where $d(X, Y)$ denotes the *Banach-Mazur distance* between X and Y. Since the spaces l_p, $1 < p < \infty$, are J_2-convex (equivalenlty uniformly non-square), there exists $\lambda > 1$ such that all Banach spaces X satisfying $d(l_p, X) < \lambda$ are uniformly non-square. In this case we can determine the best value of λ, that is, all Banach spaces X satisfying $d(l_p, X) < 2^{1/r}$ are uniformly non-square, where r =max$\{p, p/(p-1)\}$, whereas there exists a Banach space Y with $d(l_p, Y) = 2^{1/r}$ which is not uniformly non-square.

同型なバナッハ空間 X, Y に対し，Banach-Mazur distance $d(X, Y)$ は X と Y の近さを表すと考えられる．X, Y が *isometric* であれば X のもつ幾何学的性質 (狭義凸性，一様凸性等) はすべて Y に遺伝する．X, Y が *isometric* のとき $d(X, Y) = 1$ であるが，一般にその逆は成立しない．$d(X, Y) = 1$ のとき，狭義凸性は遺伝するとは限らないが，一様凸性等の超性質はすべて遺伝する．バナッハ空間論では局所的性質，とりわけ超性質 (super property) の研究が重要である．一様凸性，一様平滑性，uniform non-squareness, type p, cotype q, B_n-convexity, J_n-convexity, 超回帰性などバナッハ空間の重要な性質の多くは超性質である．無限次元バナッハ空間に関する自明でない任意の超性質を P とするとき，無限次元ヒルベルト空間と isometric な空間は性質 P を有し，また，性質 P を有する任意の空間は有限の cotype をもつ．つまり，ヒルベルト空間と isometric であることは最強の超性質であり，有限の cotype をもつことは最弱の超性質である．ここで素朴な疑問が生ずる : X, Y が近い ($d(X, Y)$ が小さい) とき，X の超性質は Y に遺伝するであろうか? 超回帰性のような位相的性質は，当然遺伝する．X が一様凸のとき，X に近い空間 Y は一様凸とは限らないが，uniformly non-square であることが示される．任意の $\epsilon > 0$ に対し，$d(l_2, Y) < 1 + \epsilon$ となる Y で

一様凸でないものが存在する．しかしながら，$\epsilon > 0$が十分小のとき，このようなYはuniformly non-squareである．($\epsilon > 0$がある程度小さければ，このようなYは不動点性(fixed point property)をもつことが知られている(cf.[6],[7]).)　Xが一様凸あるいはより一般にuniformly non-squareであれば，それは超回帰的(super-reflexive)であり，逆に，任意の超回帰的な空間はある一様凸空間と同型である(Enflo [1])．Xが超回帰的であるための必要十分条件はある$n \geq 2$に対しJ_n-convexであることが知られている(James [3])．(J_2-convexityはuniform non-squarenessと同値である.）本講演では，uniform non-squarenessあるいはより一般のJ_n-convexityについて，その性質の遺伝性をBanach-Mazur距離との関係で考察する．(B_n-convexityについても同様な結果が得られるがここでは省略する.)

1. Definitions (i) For isomorphic Banach spaces X and Y, the *Banach-Mazur distance* between X and Y, denoted by $d(X, Y)$, is defined to be the infimum of $\|T\|\|T^{-1}\|$ taken over all bicontinuous linear operators T of X onto Y.

(ii) A Banach space Y is called *finitely representable* (*f.r.*) in a Banach space X if for any finite dimensional subspace F of Y and for any $\epsilon > 0$ there exists a finite dimensional subspace E of X with dim $E =$ dim F such that $d(E, F) < 1 + \epsilon$.

(iii) Let P be a property for Banach spaces. We say X has *super* P if any Banach space Y *f.r.* in X has P. P is called *super property* if $P =$ *super* P.

(iv) A Banach space X is called super-reflexive if any Banach space Y f.r. in X is reflexive.

2. Definitions (i) X is called *uniformly non-square* (James, 1964) if there exists $\delta > 0$ such that

$$\min(\|x+y\|, \|x-y\|) \leq 2(1-\delta) \quad \text{if} \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

(ii) The James constant of X is defined by

$$J(X) = \sup\{\min(\|x+y\|, \|x-y\|) : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

It is obvious that X is uniformly non-square if and only if $J(X) < 2$.

(iii) The Jordan-von Neumann constant of X is defined by

$$C_{NJ}(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : \ x, y \in X, \text{ not both zero}\right\}.$$

It is known (cf.[5],[8]) that X is uniformly non-square if and only if $C_{NJ}(X) < 2$, and X is super-reflexive if and only if $\tilde{C}_{NJ}(X) < 2$, where $\tilde{C}_{NJ}(X)$ denotes the infimum of all von Neumann-Jordan constants for equivalent norms of X.

3. Theorem (Kato-Maligranda-Takahashi [4]) Let X and Y be isomorphic Banach spaces. Then:

$$J(X)/d(X,Y) \leq J(Y) \leq J(X)d(X,Y) \tag{1}$$

$$C_{NJ}(X)/d(X,Y)^2 \leq C_{NJ}(Y) \leq C_{NJ}(X)d(X,Y)^2 \tag{2}$$

4. Remark There exist uniformly non-square Banach spaces X and Y such that

$$J(Y) = J(X)d(X,Y) \text{ and } C_{NJ}(Y) = C_{NJ}(X)d(X,Y)^2.$$

5. Proposition For any uniformly non-square Banach space X, there exists $\epsilon > 0$ such that all Banach spaces Y satisfying $d(X,Y) < 1+\epsilon$ are uniformly non-square.

6. Remark Let H be a separable Hilbert space with dim $H \geq 2$. Then for any $\epsilon > 0$ there is a Banach space X with $d(X,H) < 1+\epsilon$ which is not uniformly convex.

7. Theorem Let X be a Banach space with dim $X = 2$. Let $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ and $r = \max\{p, p'\}$. If $d(l_p^2, X) < 2^{1/r}$, then X is uniformly non-square. In the case that X is of infinite dimension, if $d(l_p, X) < 2^{1/r}$, then X is uniformly non-square.

8. Remark There exists a Banach space X with $d(l_p^2, X) = 2^{1/r}$ which is not uniformly non-square, where p and r are as in Theorem 7.

Let X be a Banach space with dim $X \geq 2$ and $1 < p < \infty$. Define the constant $d_p(X)$ by

$$d_p(X) = \sup\{d(l_p^2, E) : E \subset X, \ \dim E = 2\}.$$

9. Theorem Let X be a Banach space with dim $X \geq 2$. Let $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ and $r = \max\{p, p'\}$. If $d_p(X) < 2^{1/r}$, then X is uniformly non-square. Hence, if $\tilde{d}_p(X) < 2^{1/r}$, then X is super-reflexive. Here $\tilde{d}_p(X)$ denotes the infimum of all $d_p(X, \|\ \|_\lambda)$ for equivalent norms of X.

10. B-convexity and B_n-convexity X is said to be *uniformly non-ℓ_1^n* (or *B_n-convex*) provided there exists ε $(0 < \varepsilon < 1)$ such that for all $x_1, ..., x_n \in B_X$ there exist ε_j $(\varepsilon_j = \pm 1)$ satisfying

$$\|\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_n x_n\| \leq n(1 - \varepsilon),$$

where B_X denotes the closed unit ball of X. X is called *B-convex* if X is B_n-convex for some n. It is well-known that X is *B-convex* if and only if it is of *type p* for some $p > 1$.

11. ***J*-convexity, J_n-convexity and super-reflexivity** X is called J_n-*convex* provided there exists ε $(0 < \varepsilon < 1)$ such that for all $x_1, ..., x_n \in B_X$ there exists k $(1 \leq k \leq n)$ satisfying

$$\|(x_1 + ... + x_k) - (x_{k+1} + ... + x_n)\| \leq n(1 - \varepsilon)$$

X is called J-*convex* if X is J_n-*convex* for some n. It is clear that X is *uniformly non-squre* if and only if it is J_2-*convex* (B_2-*convex*). It is known that X is J-*convex* if and only if it is *super-reflexive* (James [3]). It is also known that X is *super-reflexive* if and only if X is *uniformly convexifiable*, that is, it admits an equivalent uniformly convex norm (Enflo [1]).

12. Theorem Let A_n be an $n \times n$ admissible matrix and $1 < p < \infty$. For a Banach space X the following are equivalent:

(i) X is J_n-convex.

(ii) $\|A_n : \ell_p^n(X) \to \ell_p^n(X)\| < n$.

(iii) For any (resp. some) r and s with $1 < r \leq \infty,\ 1 \leq s < \infty$

$$\|A_n : \ell_r^n(X) \to \ell_s^n(X)\| < n^{1/s+1/r'}.$$

Here A_n is defined by

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Theorem Let $1 < r \leq \infty,\ 1 \leq s < \infty$. Then for isomorphic Banach spaces X and Y

$$\|A_n : \ell_r^n(Y) \to \ell_s^n(Y)\| \leq \|A_n : \ell_r^n(X) \to \ell_s^n(X)\| d(X, Y)$$

14. Theorem For any J_n-convex Banach space X, there exists $\epsilon > 0$ such that all Banach spaces Y satisfying $d(X, Y) < 1 + \epsilon$ are J_n-convex.

参考文献

[1] P. Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, Israel J. Math. **13** (1972), 281-288.

[2] R. C. James, Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math. **80** (1964), 542-550.
[3] R. C. James, Super-reflexive Banach spaces, Canad. J. Math. **24** (1972), 896-904.
[4] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, On James, Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficients of Banach spaces, Studia Math. **144** (2001), 275-295.
[5] M. Kato and Y. Takahashi, On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1055-1062.
[6] P. K. Lin. Stability of the fixed point property of Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 3573-3581.
[7] E. M. Mazcuñán-Navarro, Stability of the fixed point property in Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 129-138.
[8] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, Nihonkai Math. J. **9** (1998), 155-169.
[9] N. Tomczak-Jaegermann, Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals, Longman Sci. & Tech. and Wiley, New York, 1989.

Yasuji Takahashi
Department of System Engineering,
Okayama Prefectural University,
Soja 719-1197, Japan
e-mail: takahasi@cse.oka-pu.ac.jp

Mikio Kato
Department of Mathematics,
Kyushu Institute of Technology,
Kitakyushu 804-8550, Japan
e-mail: katom@tobata.isc.kyutech.ac.jp

Reducing subspaces of weighted Hardy spaces on polydisks

Shuhei Kuwahara(Sapporo Seishu High School)

概要

Let $z_1, z_2, \cdots, z_n$ be coordinate functions and $N_1, N_2, \cdots, N_n > 1$.Stessin and Zhu determined reducing subspaces of a multiplication operator $M_{z_1}^{N_1}$ in weighted Hardy space on unit disk[1].We consider reducing subspaces of multiplication operators $M_{z_i}^{N_i} (i = 1, 2, \cdots, N)$ in weighted Hardy spaces on polydisks.

1 導入

H を Hilbert 空間とし、T を H 上の有界線形作用素とする。
X を H の部分空間としたとき、X が $T-$invariant subspace とは、$TX \subset X$ が成り立つ事をいう。
X が $T-$reducing subspace とは、X が $T-$invariant かつ T^*-invariant であることをいう。

2 1変数重みつき Hardy 空間における結果

$\omega = \{\omega_n\}$ を正の数の列とする。1変数重みつき Hardy 空間とは、以下のような関数空間である。

$$H_\omega^2(\mathbb{D}) := \{f(z) = \sum a_n z^n \mid \sum \mid a_n \mid^2 \omega_n < \infty\}$$

この空間の具体例は、通常の Hardy 空間、Bergman 空間、Dirichlet 空間などがある。

Stessin,Zhu は、2以上の整数 N に対して、$S = M_{z^N}$ の reducing subspace を決定した

定理 1(Stessin,Zhu[1])
$H_\omega^2(\mathbb{D})$ の $S-$reducing subspace は N 個を超えない minimal reducing subspace の直和でかける。

ω,N を1つ固定する。$I = \{0, 1, 2, \cdots, N-1\}$ とするとき、$m, n \in I$ に対して、$m \sim n$ を

$$\frac{\omega_{m+kN}}{\omega_m} = \frac{\omega_{n+kN}}{\omega_n} \quad for\ all\ k$$

で定義する。これは同値関係である。
N 次未満の多項式 $p(z) = \sum a_n z^n$ が $transparent$ であるとは、0 でない係数 a_m, a_n に対して、$m \sim n$ が成り立つことをいう。
$\mathbb{S}$ を S と S^* の有限積からなるベクトル空間とする。0 でない $H_\omega^2(\mathbb{D})$ の元 f に対して、$\{Tf; T \in \mathbb{S}\}$ の閉包を X_f とかくと、これは $S-$reducing である。これを f で生成される reducing subspace という。

f が transparent ならば、$X_f = Span\{fz^{kN}; k = 0, 1, \cdots\}$ である

$H^2_\omega(\mathbb{D})$ の部分空間 X に対して、集合 X の零点の位数 m を

$$\exists f \in X \ such\ that\ f^{(m)}(0) \neq 0$$
$$\forall g \in X, 0 \leq k < m,\ g^{(k)}(0) = 0$$

で定義する。

X を $H^2_\omega(\mathbb{D})$ の $\{0\}$ でない $S-$reducing subspace とする。
m を X の零点の位数とすると、極値問題

$$\sup\{\mathrm{Re} f^{(m)}(0); f \in X, \| f \| \leq 1\}$$

は一意解 G をもち、G は N 次未満の多項式である。

I を同値関係 $\sim$ により分割したとき、それらを $I_1, \cdots, I_K$ とすると、多項式

$$q_k(z) = \sum\{a_n z^n; n \in I_k\}$$

は *transparent* である。$q_1, \cdots, q_K$ を零点の位数が大きくなるように並べ替え、それらを $p_1, \cdots, p_K$ としたとき、

$$p = p_1 + \cdots + p_K$$

を p の *canonical decompsition* という。

X を $S-$reducing subspace とする。
$p = p_1 + \cdots + p_K$ を p の canonical decompsition とすると、
$p \in X$ ならば、$p_i \in X$ である。

上の結果から、次のことが分かる。

$S-$reducing subspace の極値関数は、transparent である。

$S-$reducing subspace$X$ が *minimal* であるとは、X に含まれる $S-$reducing subspace は X と $\{0\}$ に限る事をいう。（上のこととは別に）次のような事が分かる。

多項式 p が transparent であるならば、X_p は *minimal* である。

（略証）
X を $S-$reducing とする。X の極値関数を G_1 とすると、G_1 は transparent であり、X_{G_1} は minimal。
$X \ominus X_{G_1}$ は、$S-$reducing であり、その極値関数を G_2 とすると、$X \ominus X_{G_1} \ominus X_{G_2}$ は $S-$reducing。この操作は、極値関数が N 次未満である事から、N 回を超えない。$\square$

3　多変数重みつき Hardy 空間における考察

ここでは、２変数の場合を紹介する。（多変数の場合も同様に考える事が出来る。）
作用素としては、$S_1 = M_{z^{N_1}}$、$S_2 = M_{w^{N_2}}(N_1 > 1, N_2 > 1)$ を考え、これらの reducing subspace を考える。
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ を多重指数とする。多重指数の集合に、辞書式で順序を入れる。
$\omega = \{\omega_n\}$ を正の数の集合とする。２変数重みつき Hardy 空間とは、以下のような関数空間である。

$$H^2_\omega(\mathbb{D}^2) := \{f(z,w) = \sum a_\alpha z^{\alpha_1} w^{\alpha_2} = \sum a_\alpha (z,w)^\alpha \mid \sum \mid a_\alpha \mid^2 \omega_\alpha < \infty\}$$

$\boxed{\text{定理 2}}$
$H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ の S_1, S_2-reducing subspace は $N_1 N_2$ 個を超えない minimal reducing subspace の直和でかける。

ω,$N_1 > 1, N_2 > 1$ を１つ固定する。$I = \{m = (m_1, m_2); 0 < m_i \le N_i - 1\}$ を多重指数の部分集合とするとき、$m = (m_1, m_2), n = (n_1, n_2) \in I$ に対して、$m \sim n$ を

$$\frac{\omega_{m_1+k_1N_1, m_2+k_2N_2}}{\omega_{m_1,m_2}} = \frac{\omega_{n_1+k_1N_1, n_2+k_2N_2}}{\omega_{n_1,n_2}} \quad for\ all\ k_1, k_2$$

で定義する。これは同値関係である。
(N_1, N_2) 次未満で、w について N_2 次以下の多項式 $p(z,w) = \sum a_\alpha (z,w)^\alpha$ が *transparent* であるとは、0 でない係数 a_m, a_n に対して、$m \sim n$ が成り立つことをいう。
$\mathbb{S}_2$ を S_1,S_1^*,S_2,S_2^* の有限積からなるベクトル空間とする。0 でない $H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ の元 f に対して、$\{Tf; T \in \mathbb{S}_2\}$ の閉包を X_f とかくと、これは $S-$reducing である。これを f で生成される reducing subspace という。

$$\boxed{f \text{ が transparent ならば、} X_f = Span\{f z^{k_1 N_1} w^{k_2 N_2}; k_i = 0, 1, \cdots\} \text{ である}}$$

$H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ の部分空間 X に対して、集合 X の零点の位数 $m = (m_1, m_2)$ を

$$\exists f \in X\ such\ that\ f^{(m_1,m_2)}(0,0) \ne 0$$
$$\forall g \in X, 0 \le k < m,\ g^{(k_1,k_2)}(0,0) = 0$$

で定義する。

X を $H^2_\omega(\mathbb{D}^2)$ の $\{0\}$ でない S_1, S_2-reducing subspace とする。 m を X の零点の位数とすると、極値問題 $\sup\{\mathrm{Re} f^{(m_1,m_2)}(0,0); f \in X, \parallel f \parallel \le 1\}$ は解 G をもち、G は (N_1, N_2) 次未満の多項式である。

I を同値関係 $\sim$ により分割したとき、それらを $I_1, \cdots, I_K$ とすると、多項式

$$q_k(z,w) = \sum \{a_n (z,w)^n; n \in I_k\}$$

は *transparent* である。$q_1, \cdots, q_K$ を零点の位数が大きくなるように並べ替え、それらを $p_1, \cdots, p_K$ としたとき、

$$p = p_1 + \cdots + p_K$$

を p の *canonical decompsition* という。

X を S_1, S_2-reducing subspace とする。
$p = p_1 + \cdots + p_K$ を p の canonical decompsition とすると、
$p \in X$ ならば、$p_i \in X$ である。

上の結果から、次のことが分かる。

S_1, S_2-reducing subspace の極値関数は、transparent である。

S_1, S_2-reducing subspace$X$ が *minimal* であるとは、X に含まれる S_1, S_2-reducing subspace は X と $\{0\}$ に限る事をいう。(上のこととは別に) 次のような事が分かる。

多項式 p が transparent であるならば、X_p は *minimal* である。

(略証)
X を S_1, S_2-reducing とする。X の極値関数を G_1 とすると、G_1 は transparent であり、X_{G_1} は minimal。$X \ominus X_{G_1}$ は、$S-$reducing であり、その極値関数を G_2 とすると、$X \ominus X_{G_1} \ominus X_{G_2}$ は $S-$reducing。この操作は、極値関数の項は $N_1 N_2$ 個未満である事から、$N_1 N_2$ 回を超えない。□

参考文献

[1] M.Stessin,K.Zhu:Reducing subspaces of weighted shift operators,*Proc.Amer.Math.soc.*130(2002),2631-2639

Three dimensional Commutative Operator Algebras and Q-Algebras

Takanori Yamamoto (Hokkai-Gakuen University)

Abstract This is a joint work with Prof. Takahiko Nakazi. A Q-algebra can be represented as an operator algebra on an infinite dimensional Hilbert space. However we don't know whether a finite n-dimensional Q-algebra can be represented on a Hilbert space of dimension n except $n = 1, 2$. It is known that a two dimensional Q-algebra is just a two dimensional commutative operator algebra on a two dimensional Hilbert space. In this talk, we study a three dimensional Q-algebra on a three dimensional Hilbert space. In particular we describe a three dimensional Q-algebra of the disc algebra on a three dimensional Hilbert space. Our studies are related to the Pick interpolation problem for a uniform algebra.

この講演は中路貴彦教授との共同研究である。
A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。A の閉イデアル I に対し、商環 A/I と等距離同型な Banach 環 $\mathcal{A}$ を Q-環という。$B(H)$ をヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素の全体からなる作用素環とする。環準同型 $S : A/I \to B(H)$ が、$S(1+I) = I_H$, $\|S(f+I)\| = \|f+I\|$, $(f \in A)$ を満たすとき、S を H 上の A/I の等距離表現という。

$\boxed{\text{問題 1}}$ 有限 n 次元 Q-環 A/I に対して、H 上の A/I の等距離表現 S が存在するような n 次元 Hilbert 空間 H は存在するか。

Nakazi-Takahashi [8] は、$\dim A/I = 2$ のとき解決した。すなわち、X 上の確率測度 μ が存在して、

$$S^\mu : A/I \to B(H), \quad H = H^2(\mu) \cap I^\perp, \quad \|S^\mu(f+I)\| = \|S^\mu_f\| = \|f+I\|, \ (f \in A)$$

となることを証明した。ただし、S^μ_f は、直交射影 $P_0 : H^2(\mu) \to H^2(\mu) \cap I^\perp$ により、
$S^\mu_f \phi = P_0(f\phi)$, $(\phi \in H^2(\mu) \cap I^\perp)$ と定義される。ここで、$H^2(\mu)$ は A の $L^2(\mu)$ ノルム閉包を表し、

$$H^2(\mu) \cap I^\perp = \left\{ f \in H^2(\mu) \ ; \ \int_X f\bar{g}\,d\mu = 0, \ (g \in I) \right\}$$

とする。$\dim A/I \geq 3$ のとき、$\|S^\mu(f+I)\| = \|S^\mu_f\| \leq \|f+I\|$, $(f \in A)$ は成り立つが、S^μ が等距離表現になるような μ が存在するか否かは知られていないと思われる。

A/I は半単純であり、$\dim A/I = 3$ とする。$i, j = 1, 2, 3$ について、$f_j \in A$ が存在し $\tau_i(f_j) = \delta_{ij}$ を満たす。このとき、$f_j + I$ は A/I の冪等元であり、$A/I = \mathrm{span}\{f_1+I, f_2+I, f_3+I\}$, $f_1+f_2+f_3 \in 1+I$ である。このとき、極大イデアル空間 $M(A)$ の中に相異なる τ_1, τ_2, τ_3 が存在して $I = \cap_{j=1}^3 \ker \tau_j = \{g \in A \ ; \ \tau_1(g) = \tau_2(g) = \tau_3(g) = 0\}$ が成り立つ。S^μ が 1 対 1 写像のとき、$j = 1, 2, 3$ について、τ_j は $H^2(\mu)$ 上への有界な拡張をもつ (cf. [2], p.100)。このとき、$k_j \in H^2(\mu)$ が存在し

$$\tau_j(f) = \langle f, k_j \rangle_\mu = \int_X f\overline{k_j}\,d\mu, \quad (f \in A) \quad \text{が成り立ち、} \quad k_1, k_2, k_3 \text{ は } H^2(\mu) \cap I^\perp \text{ の基底である。}$$

$\boxed{\text{定理 1.1}}$ (1) $\|S^\mu_{f_j}\| = \|k_j\|_\mu \|f_j + I\|_\mu$ for $j = 1, 2, 3$.
(2) もし S^μ が A/I の等距離表現ならば、$\|k_j\|_\mu = \|f_j + I\| / \|f_j + I\|_\mu$ for $j = 1, 2, 3$.

証明: (1) $\mathrm{rank}(S^\mu_{f_j})^* = 1$ であるから、$x_j \in H^2(\mu) \cap I^\perp$ が存在して $(S^\mu_{f_j})^*\phi = \langle \phi, x_j \rangle k_j = (k_j \otimes x_j)\phi$ がすべての $\phi \in H^2(\mu) \cap I^\perp$ について成り立つ。よって、$\|S^\mu_{f_j}\| = \|(S^\mu_{f_j})^*\| = \|k_j \otimes x_j\| = \|k_j\|_\mu \|x_j\|_\mu$. このとき、$P_0$ は $H^2(\mu)$ から $H^2(\mu) \cap I^\perp$ への直交射影であるから、$\langle P_0 f_j, \phi \rangle = \langle S^\mu_{f_j} 1, \phi \rangle = \langle 1, (S^\mu_{f_j})^* \phi \rangle = \langle x_j, \phi \rangle \langle 1, k_j \rangle = \langle x_j, \phi \rangle$ がすべての $\phi \in H^2(\mu) \cap I^\perp$ について成り立つ。よって $P_0 f_j = x_j$. よって、

$\|f_j + I\|_\mu = \|P_0 f_j\|_\mu = \|x_j\|_\mu$.
(2) $\|S^\mu_{f_j}\| = \|f_j + I\|$ が成り立つから、(1) に帰着する。証明終

Nakazi [7] により、A/I が 2 次元のときは、(2) の逆も成り立つ。3 次元のときは分からない。

$\boxed{\text{Cole の定理)}}$ (1969, cf. [1], p.272)) Q-環 A/I に対し、Hilbert 空間 H が存在し、A/I は $B(H)$ の部分環と等距離同型である。

$\tau_1, \tau_2 \in M(A)$ に対し、$\sigma(\tau_1, \tau_2) = \sup\{|\tau_2(f)|\ ;\ f \in A,\ \tau_1(f) = 0,\ \|f\|_\infty \le 1\}$ と定める。σ は $M(A)$ の距離である。$\sigma(\tau_1, \tau_2) < 1$ のとき、τ_1, τ_2 は同じ Gleason 部分に属するという。

$\boxed{\text{定理 NT1}}$ (Nakazi-Takahashi [8]) 環準同型 $\Phi\ :\ A \to B(H)$ が存在して、$\Phi(1) = I_H, \dim(A/\ker\Phi) = 2$ を満たすとする。このとき、$f_1, f_2 \in A$ が存在して $\tau_j(f_k) = \delta_{jk}$ を満たす。このとき、$\Phi(f_1), \Phi(f_2)$ は $\Phi(f_1) + \Phi(f_2) = I_H$ を満たす冪等作用素であるから、

$$\Phi(f_1) = \begin{pmatrix} I_{H_1} & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & -C \\ 0 & I_{H_2} \end{pmatrix} \text{ on } H = H_1 \oplus H_2$$

を満たす $C\ :\ H_2 \to H_1$ が存在する。ただし、$H_1 = \mathrm{ran}\Phi(f_1),\ H_2 = H_1^\perp$ である。このとき、次の (1), (2) は同値である。

(1) $$\|\Phi(g)\| = \|g + I\|, \text{ (for all } g \in A).$$

(2) $$\|C\| = \sqrt{\frac{1}{\sigma(\tau_1, \tau_2)^2} - 1}.$$

$\boxed{\text{定理 NT2}}$ (Nakazi-Takahashi [8]) 2 次元 Q-環 A/I に対して、H 上の A/I の等距離表現が存在するような 2 次元 Hilbert 空間 H が存在する。

定理NT1 $\Rightarrow$ 定理NT2 の証明: $M(A)$ の相異なる 2 点 τ_1, τ_2 について $I = \{f \in A\,;\, \tau_1(f) = \tau_2(f) = 0\}$ とする。このとき、 $f_1 \in A$ が存在して $\tau_1(f_1) = 1, \tau_2(f_1) = 1$ を満たす。Cole の定理より、確率測度 μ_{f_1} が存在して、

$$\|S^{\mu_{f_1}}_{f_1}\| = \|f_1 + I\| = \frac{1}{\sigma(\tau_1, \tau_2)}$$

が成り立つ。$\dim H^2(\mu_{f_1}) \cap I^\perp = 2$ であり、$S^{\mu_{f_1}}_{f_1}$ は $H^2(\mu) \cap I^\perp$ 上の冪等作用素であるから、複素数 c が存在して、

$$S^{\mu_{f_1}}_{f_1} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。$\|S^{\mu_{f_1}}_{f_1}\| = \sqrt{1 + |c|^2}$ であるから、$\sqrt{1 + |c|^2} = \dfrac{1}{\sigma(\tau_1, \tau_2)}$. よって、$|c|^2 = \dfrac{1}{\sigma(\tau_1, \tau_2)^2} - 1$.

定理NT1 より、$\|S^{\mu_{f_1}}_g\| = \|g + I\|,\ (g \in A)$. 証明終

$\boxed{\text{定理 1.2}}$ (1) もし τ_1, τ_2, τ_3 が相異なる Gleason 部分に属するならば、H 上の A/I の等距離表現が存在するような 3 次元 Hilbert 空間 H が存在する。このとき、

$$\|S^\mu(f + I)\| = \|S^\mu_f\| = \|f + I\| = \max(|\tau_1(f)|,\ |\tau_2(f)|,\ |\tau_3(f)|).$$

(2) もし τ_1, τ_2 が同じ Gleason 部分に属し、τ_3 は異なる Gleason 部分に属するならば、H 上の A/I の等距離表現が存在するような 3 次元 Hilbert 空間 H が存在する。このとき、

$$\|S^\mu(f+I)\| = \|S_f^\mu\| = \|f+I\| = \max(\|f+I_{12}\|,\ |\tau_3(f)|) \geq \max(|\tau_1(f)|,\ |\tau_2(f)|,\ |\tau_3(f)|)$$

が成り立つ。ただし、$I_{12} = \cap_{j=1}^2 \ker \tau_j = \{f \in A\ ;\ \tau_1(f) = \tau_2(f) = 0\}$ と定める。Nakazi [7] により、$\|f+I_{12}\|$ は $\sigma = \sigma(\tau_1, \tau_2)$ を用いて正確に求められている。

$$\begin{aligned}\|f+I_{12}\| &= \sqrt{\left|\frac{\tau_1(f)-\tau_2(f)}{2}\right|^2\left(\frac{1}{\sigma^2}-1\right)+\left(\frac{|\tau_1(f)|+|\tau_2(f)|}{2}\right)^2} \\ &+ \sqrt{\left|\frac{\tau_1(f)-\tau_2(f)}{2}\right|^2\left(\frac{1}{\sigma^2}-1\right)+\left(\frac{|\tau_1(f)|-|\tau_2(f)|}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

証明：(1):　$\tau_j(f) = \langle f, k_j\rangle_\mu$ より、

$$\text{確率測度 } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ が存在して、} \mu = \frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{3}, \quad \mu_i \perp \mu_j, \quad \mu_j << m_j,$$

$$H^2(\mu) \cap I^\perp = \sum_{j=1}^3 \oplus H^2(\mu_j) \cap I^\perp = \sum_{j=1}^3 \oplus H^2(\mu_j) \cap (\ker \tau_j)^\perp, \quad S_f^\mu = \sum_{j=1}^3 \oplus S_f^{\mu_j}.$$

$(S_f^{\mu_j})^* k_j = \overline{\tau_j(f)} k_j$ かつ $(S_f^{\mu_j})^*$ は $H^2(\mu_j) \cap (\ker \tau_j)^\perp = \text{span}\ \{k_j\}$ 上の階数 1 の作用素であるから、$\|S_f^{\mu_j}\| = \|(S_f^{\mu_j})^*\| = |\tau_j(f)|$ が成り立つ。よって、

$$\|S_f^\mu\| = \max(\|S_f^{\mu_1}\|, \|S_f^{\mu_2}\|, \|S_f^{\mu_3}\|) = \max(|\tau_1(f)|, |\tau_2(f)|, |\tau_3(f)|) = \sup_{\nu \in (A/I)^*, \|\nu\| \leq 1} \left|\int_X f d\nu\right| = \|f+I\|$$

が成り立つ。

(2):　$\dim A/I_{12} = 2$. ただし $I_{12} = \ker \tau_1 \cap \ker \tau_2$. 定理 NT2 より、$A/I_{12}$ の等距離表現が存在する。確率測度 μ_{12}, μ_3 が存在して、

$$\mu = (\mu_{12}+\mu_3)/2, \quad \mu_{12} \perp \mu_3,$$

$$H^2(\mu) \cap I^\perp = (H^2(\mu_{12}) \cap I^\perp) \oplus (H^2(\mu_3) \cap I^\perp) = (H^2(\mu_{12}) \cap I_{12}^\perp) \oplus (H^2(\mu_3) \cap (\ker \tau_3)^\perp),$$

$$S_f^\mu = S_f^{\mu_{12}} \oplus S_f^{\mu_3}.$$

$(S_f^{\mu_{12}})^* k_j = \overline{\tau_j(f)} k_j$, $(j = 1, 2)$ かつ $(S_f^{\mu_3})^* k_3 = \overline{\tau_3(f)} k_3$. よって、

$$\|S_f^\mu\| = \max(\|S_f^{\mu_{12}}\|, \|S_f^{\mu_3}\|) = \max(\|f+I_{12}\|, |\tau_3(f)|) = \sup_{\nu \in (A/I)^*, \|\nu\| \leq 1} \left|\int_X f d\nu\right| = \|f+I\|$$

が成り立つ。証明終

相異なる $\tau_1, ..., \tau_n \in M(A)$ と、複素数 $w_1, ..., w_n$ について、次の (1) から (2) が導かれるとき、位数 n の Pick の条件が成り立つという。
(1)　$[(1 - w_i \bar{w}_j) k_{ji}]_{i,j=1}^n \geq 0$. ただし、$k_{ij} = \langle k_i, k_j\rangle_\mu$ とする。
(2)　$\tau_j(f) = w_j$, $(j = 1, ..., n)$, $\|f+I\| \leq 1$ を満たす $f \in A$ が存在する。

定理 1.3　A/I は n 次元の半単純環とする。このとき、$S^\mu\ :\ A/I \to B(H^2(\mu) \cap I^\perp)$ が 等距離表現であることと、位数 n の Pick の条件が成り立つことは同値である。

証明： S^μ が等距離表現とする。$w_1,...,w_n \in \mathbf{C}$ に対し、$\tau_j(f)=w_j$, $(j=1,...,n)$ を満たす f が存在する。$[(1-w_i\bar{w}_j)k_{ji}]_{i,j=1}^n \geq 0$ とする。このとき、複素数 $\alpha_1,...,\alpha_n$ について、

$$k=\sum_{j=1}^n \alpha_j k_j, \qquad \|k\|_\mu^2=\sum_{i,j=1}^n \alpha_i\overline{\alpha_j}k_{ij}.$$

$(S_f^\mu)^*k_j=\overline{\tau_j(f)}k_j$ であるから、$(S_f^\mu)^*k=\sum_{j=1}^n \alpha_j\overline{\tau_j(f)}k_j$. よって、

$$\begin{aligned}\|k\|_\mu^2-\|(S_f^\mu)^*k\|_\mu^2 &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\overline{\alpha_j}(1-\overline{\tau_i(f)}\tau_j(f))k_{ij}=\sum_{i,j=1}^n \alpha_i\overline{\alpha_j}(1-\overline{w_i}w_j)k_{ij}\\ &= \sum_{i,j=1}^n \overline{\alpha_i}\alpha_j(1-w_i\overline{w_j})k_{ji}\geq 0.\end{aligned}$$

よって、$\|(S_f^\mu)^*\|\leq 1$. よって、$\|S_f^\mu\|\leq 1$. $\|S_f^\mu\|=\|f+I\|$ であるから、$\|f+I\|\leq 1$. よって、Pick の条件が成り立つ。逆に、Pick の条件が成り立つとき、$\|S_f^\mu\|=\|f+I\|$ を示す。$\|S_f^\mu\|\geq\|f+I\|$ を示せばよい。もし $\|S_f^\mu\|\leq 1$ ならば、$\|(S_f^\mu)^*\|\leq 1$. よって、$[(1-\overline{\tau_i(f)}\tau_j(f))k_{ij}]_{i,j=1}^n\geq 0$. よって、$[(1-\tau_i(f)\overline{\tau_j(f)})k_{ji}]_{i,j=1}^n\geq 0$. Pick の条件より、$g\in A$ が存在して、$\|g+I\|\leq 1$ かつ $\tau_j(g)=\tau_j(f),(j=1,...,n)$ を満たす。よって、$\|f+I\|=\|g+I\|\leq 1$. よって $\|S_f^\mu\|\geq\|f+I\|$. 証明終

$\boxed{\text{問題 2}}$ 有限 n 次元 Q-環 A/I と等距離同型でない単位元をもつ n 次元可換作用素環 $\mathcal{B}\subset B(H)$ は存在するか。ただし、$\dim H=n$ とする。

$n=2$ のときは、Drury [4] により A が半単純の場合が解決され、Nakazi [7] により A が半単純でない場合も含めて解決された。すなわち、2 次元 Hilbert 空間上の単位元をもつ 2 次元可換作用素環は、2 次元 Q 環に等距離同型であること、すなわち、題意を満たす $\mathcal{B}$ は存在しないことが証明された。Kaijser と Varopoulos は、von Neumann の不等式

$$\|p(T_1,T_2,T_3)\|\leq\|p\|_\infty$$

が成り立たないような、$H=\mathbf{C}^5$ 上の可換な縮小作用素の組 T_1,T_2,T_3 と 3 変数多項式 p を求めた (cf. Lotto-Steger [6])。単位元をもつ可換 Banach 環 $\mathcal{A}$ の元の任意の組 $x_1,...,x_n$, $\|x_j\|\leq 1$ $(j=1,...,n)$ と任意の n 変数多項式 p に対して von Neumann の不等式

$$\|p(x_1,...,x_n)\|\leq\|p\|_\infty$$

が成り立つとき、位数 n の von Neumann の不等式が $\mathcal{A}$ に対して成り立つという。Kaijser と Varopoulos は、位数 3 の von Neumann の不等式が、$\mathcal{A}=\mathrm{span}\{I_H,T_1,T_2,T_3,T_4\}$ に対して成り立たないような H 上の可換な作用素の組 I_H,T_1,T_2,T_3,T_4 を求めたことになる。

$\boxed{\text{Kaijser-Varopoulos の定理}}$ (1974, cf. [6]) $H=\mathbf{C}^5$ のとき、

$$T_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{3}&0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{3}&0\end{pmatrix},$$

$$T_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{3}&0\end{pmatrix},\quad T_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad I_H=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

と定め、$\mathcal{B} = \mathrm{span}\{I_H, T_1, T_2, T_3, T_4\}$ と定めると、$\mathcal{B}$ は単位元をもつ 5 次元可換作用素環となる。更に、

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$$

と定めると、$\|p(T_1, T_2, T_3)\| = 3\sqrt{3} > 5 = \|p\|_\infty$
となる。したがって、位数 3 の von Neumann の不等式は $\mathcal{B}$ に対して成り立たない。

Craw の定理 (1970, cf. [1], p.271)　単位元をもつ可換 Banach 環 $\mathcal{B}$ について、次の (1), (2) は同値である。
(1) $\mathcal{B}$ は Q-環である。
(2) 任意の n について、$x_j \in \mathcal{B}$, $\|x_j\| \le 1$ $(j = 1, ..., n) \Rightarrow \|P(x_1, ..., x_n)\| \le 1$
が成り立つ。ただし、P は $|P(z_1, ..., z_n)| \le 1$, $(|z_j| \le 1,\ j = 1, ..., n)$ を満たす任意の多項式である。

このような事実により、5 次元 Q-環 $\mathcal{A}$ に対して、これと等距離同型でない単位元をもつ 5 次元可換作用素環 $\mathcal{B} \subset B(H)$ が存在すること、すなわち、$n = 5$ のときは、題意を満たす $\mathcal{B} \subset B(H)$ が存在することが証明された。$n \ge 5$ のときも、題意を満たす $\mathcal{B} \subset B(H)$ が存在することがわかる。残されたのは、$n = 3, 4$ の場合である。

単位元をもつ 3 次元半単純可換 Banach 環 $\mathcal{B}$ は、P_1, P_2, P_3 で張られることが知られている。ただし、P_1, P_2, P_3 は可換な冪等元で $P_1 + P_2 + P_3 = I_{\mathcal{B}}$ を満たす。特に、$\mathcal{B} \subset B(H)$, $\dim H = 3$ のときは、

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -x & -xz \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz - y \\ 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形をしている。もし $y = z = 0$ ならば、$\mathcal{B}$ は Q-環 である。

証明：　$y = z = 0$ より、　$P_1 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},, \quad P_2 = \begin{pmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ただし、　$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

と書ける。$j = 1, 2, 3$ について、$T_j = a_jP_1 + b_jP_2 + c_jP_3$,　$S_j = a_jQ_1 + b_jQ_2$ と定める。このとき、n 変数多項式

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{k_1, ..., k_n} \gamma_{k_1, ..., k_n} z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}$$

について、$\|f(T_1, ..., T_n)\| \le \|f(z_1, ..., z_n)\| = \|f\|_\infty$ が成り立つ。よって、任意の n について位数 n の von Neumann の不等式が成り立つ。Craw の定理より、$\mathcal{B} = \mathrm{span}\{P_1, P_2, P_3\}$ は Q-環である。証明終

しかし、$\mathcal{B}$ が Q-環 であるために $y = z = 0$ が必要なわけではない。

定理 2.1　$H = \mathrm{span}\{k_1, k_2, k_3\}$ を 3 次元 Hilbert 空間とする。H の正規直交基底を

$$\psi_1 = \frac{k_1}{\|k_1\|}, \quad \psi_2 = \frac{k_2 - \langle k_2, \psi_1 \rangle \psi_1}{\|k_2 - \langle k_2, \psi_1 \rangle \psi_1\|}, \quad \psi_3 = \frac{k_3 - \langle k_3, \psi_1 \rangle \psi_1 - \langle k_3, \psi_2 \rangle \psi_2}{\|k_3 - \langle k_3, \psi_1 \rangle \psi_1 - \langle k_3, \psi_2 \rangle \psi_2\|}$$

と定める。P_1, P_2, P_3 は H 上の冪等作用素で $P_ik_j = \delta_{ij}k_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を満たすとする。$m = 1, 2, 3$ について $a_{ij}^{(m)} = \langle P_m\psi_j, \psi_i \rangle$ と定める。このとき、

$$P_1 = (a_{ij}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = (a_{ij}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & -x & -xz \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = (a_{ij}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz - y \\ 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ただし、

$$x=\frac{-\langle k_2,k_1\rangle}{\sqrt{\|k_1\|^2\|k_2\|^2-|\langle k_1,k_2\rangle|^2}},\quad y=\frac{-\langle k_3,\psi_1\rangle-\langle k_3,\psi_2\rangle x}{\|k_3-\langle k_3,\psi_1\rangle\psi_1-\langle k_3,\psi_2\rangle\psi_2\|},\quad z=\frac{-\langle k_3,\psi_2\rangle}{\|k_3-\langle k_3,\psi_1\rangle\psi_1-\langle k_3,\psi_2\rangle\psi_2\|}.$$

開単位円板内の相異なる 3 点 a,b,c について、$\mathcal{B}=A(\mathbf{T})/I_0,\quad I_0=\{g\in A(\mathbf{T})\ ;\ g(a)=g(b)=g(c)=0\}$ と定める。ただし、$A(\mathbf{T})$ は円板環とする。このとき、$S_f^{d\theta/2\pi}\in B(H^2(\frac{d\theta}{2\pi})\cap I_0^\perp)$, (for all $f\in A$).

$$k_1(z)=\frac{1}{1-\bar{a}z},\ k_2(z)=\frac{1}{1-\bar{b}z},\ k_3(z)=\frac{1}{1-\bar{c}z},$$

と定めると、k_1,k_2,k_3 は $H^2\cap I_0$ の基底である。Sarason の定理 (cf. [9]) より、

$$\|S^{d\theta/2\pi}(f+I)\|=\|S_f^{d\theta/2\pi}\|=\|f+I_0\|,\ (f\in A).$$

よって、 P_1,P_2,P_3 で張られる 3 次元の可換作用素環 $\mathcal{B}$ は Q 環 $A(\mathbf{T})/I_0$ と等距離同型である。このとき、

$$1+|x|^2=\left|\frac{1-\bar{b}a}{a-b}\right|^2,\quad 1+|z|^2=\left|\frac{1-\bar{c}b}{b-c}\right|^2,\quad 1+|y|^2\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|^2=\left|\frac{1-\bar{a}c}{c-a}\right|^2$$

が成り立つ。もし $(a,b,c)=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, $(x,y,z)=(-\sqrt{3},-4\sqrt{2},-2\sqrt{6})$ ならば、$\mathcal{B}$ は Q-環 である。このとき、$\mathcal{B}$ は $A(\mathbf{T})/I_0$ と等距離同型である。

References

[1] F.Bonsall, J.Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, Berlin, 1973.

[2] B.Cole, J.Wermer, Pick interpolation, von Neumann inequalities, and hyperconvex sets, Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 89-129, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439, Kluwer Acad.Publ., Dordrecht, 1994.

[3] B.Cole, J.Wermer, Isometries of certain operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3047-3053.

[4] S.W.Drury, Remarks on von Neumann's inequality, Lecture Notes in Mathematics, Vol.995, Springer, Berlin, 1983, pp.14-32.

[5] I.Feldman, N.Krupnik, A.Markus, On the norm of two adjoint projections, Integr. Eq. Oper. Theory 14 (1991), 69-90.

[6] B.Lotto, T.Steger, Von Neumann's inequality for commuting diagonalizable contractions. II, Proc. Amer. Math. Soc., 120 (1995), 897-901.

[7] T.Nakazi, Two-dimensional Q-algebras, Linear Algebra Appl. 315 (2000), 197-205.

[8] T.Nakazi, K.Takahashi, Two-dimensional representations of uniform algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 2777-2784.

[9] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 179-203.

q-numerical range of a reducible 3×3 matrix
可約 3×3 行列の q-数域

Hiroshi Nakazato Hirosaki University
中里 博 弘前大学

Abstract Let A be an $n \times n$ complex matrix and $0 \leq q \leq 1$. The q-numerical range of A is defined and denoted by $W_q(A) = \{\eta^* A\xi : \xi, \eta \in \mathbf{C}^n, \xi^*\xi = \eta^*\eta = 1, \eta^*\xi = q\}$. The method to compute the boundary of $W_q(A)$ is provided for a reducible 3×3 matrix A.

1．数域とその一般化、数域のひとつの一般化としての q-数域

1918 年および 1919 年にそれぞれ Toeplitz と Haudorff によって Hilbert 空間の有界線形作用素 T の数域 $W(T)$ の境界が卵形であること及び数域それ自体が凸であることが証明された。スペクトルの局所化や、作用素半群の生成問題などの観点から数域が研究されてきた。T を Descartes 分解して、$T = \Re(T) + i\Im(T)$ とし、$\Re(T)$,$\Im(T)$ のスペクトルの最小値、最大値を $m \leq M$, $\tilde{m} \leq \tilde{M}$ とすれば、

$$\sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset \{x + iy : m \leq x \leq M, \tilde{m} \leq y \leq \tilde{M}\}$$

が成り立つ。この結果は Bendixson の定理 (1902 年) として知られている。T の代わりに $\exp(-i\theta)T$ を Descartes 分解してこれに伴う閉長方形で $W(T)$ を優評価し、$0 \leq \theta \leq \pi$ と変化させれば、このような長方形の共通部分は $W(T)$ の閉包と一致する。特に、T が行列であってそれが具体的に与えられれば、このような方法で容易にコンパクト凸集合 $W(T)$ を決定できる。この方法に基づき、行列 $W(T)$ を近似的に作図するプログラムが、C.K.Li (香港 → 米国) Tsassomeros（ギリシア → カナダ → 米国）などのホームページで公開されている。

さて、同時スペクトルの研究など、スペクトルの一般化とならんで数域も Halmos の k-数域の提唱などをきっかけとして一般化されるようになった。数域

$$W(T) = \{\langle T\xi, \xi\rangle : \xi \in H, ||\xi|| = 1\}, \tag{1.1}$$

を次のように一般化したのが、Halmos の k-数域である。

$$W_k(T) = \{\sum_{j=1}^{k} \langle T\xi_j, \xi_j\rangle : \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\} \text{ is an orthonormal system in } H\}. \tag{1.2}$$

この集合も凸となることを、C. A. Berger が学位論文 で 1963 年に証明した。

これをさらに一般化して実数列 $c = \{c_1 \geq c_2 \geq \cdots \quad \geq c_k\}$ に対して 、

$$W_c(T) = \{\sum_{j=1}^{k} c_j \langle T\xi, \xi \rangle : \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\} \text{ is an orthonormal system in } H\}. \tag{1.3}$$

と定義しこれを c-数域と呼ぶ。これが凸になることを Westwick が 1975 年に証明した。T が行列であるとき、$W_c(T)$ は次のように作図できる。$\Re(\exp(-i\theta)T)$ の固有値を大きい順に $\lambda_1(\theta) \geq \lambda_2(\theta) \geq \cdots \geq \lambda_n(\theta)$ と並べ、$\Im(\exp(-i\theta)T)$ の固有値を大きい順に $\mu_1(\theta) \geq \mu_2(\theta) \geq \cdots \geq \mu_n(\theta)$ と並べる。このとき、$0 \leq \theta \leq \pi$ に対して長方形 $R(\theta)$ を

$$\{(x+iy)\exp(i\theta) : \sum_{k=1}^{n} c_{n+1-k}\lambda_k(\theta) \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} c_k\lambda_k(\theta), \sum_{k=1}^{n} c_{n+1-k}\mu_k(\theta) \leq y \leq \sum_{k=1}^{n} c_k\mu_k(\theta)\}$$

で定めるとき、

$$W_c(T) = \bigcap_{0 \leq \theta \leq \pi} R(\theta)$$

が成り立つ。この方式または別方法での $W_c(T)$ の作図プログラムが、M. T. Chien（台湾）のホームページなどで公開されている。

実数列を複素数列で置き換えると $W_c(T)$ が凸でなくなる例を N.K.Tsing が構成した。そのような例で最も簡単そうなものをここで与えよう。$c = (1, (-1+\sqrt{3}i)/2, (-1-\sqrt{3}i)/2)$ とし、$T = \mathrm{diag}(1, (-1+\sqrt{3}i)/2, (-1-\sqrt{3}i)/2)$ とするとき、$W_c(T)$ は次の曲線デルトイド（三星形）で囲まれた閉領域となる。

$$\Gamma = \{2\exp(i\theta) + \exp(-2i\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Westwick や Tsing の結果と関連して Goldberg, Strauss (イスラエル) によって有限階の線形作用素 C と有界線形作用素 T に対して

$$W_C(T) = \{\mathrm{tr}(CUTU^{-1}) : U \text{ is unitary}\}, \tag{1.4}$$

により、T の C-数域 $W_C(T)$ が導入された。T が行列のとき、この領域が星状領域 star-shaped になることが、N. K. Tsing, W.S. Cheung (香港) によって 1996 年に証明された。このような C-数域がいつ凸になるかは基本的な問題の一つである。Westwick の定理は、$C = C^*$ のとき、$W_C(T)$ が凸になるという結果として解釈できる。1984 年に N. K. Tsing によって C が階数 1 ならば、$W_C(T)$ が凸になるという定理が得られた。C が階数 1 の作用素で、ヒルベルト空間 H からそれ自身への線形作用素として

$$||C|| = \sup\{||C\xi|| : \xi \in \mathbf{C}^n, ||\xi|| = 1\} = 1$$

のとき、値域 $C(H)$ に属するノルム 1 のベクトル ζ をとるとき、

$$q = \langle C\zeta, \zeta \rangle$$

に対して $|q| \leq 1$ が成り立つ。C の代わりに適当な $0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対する $\exp(-i\theta)C$ を考えることにより、$0 \leq q \leq 1$ と仮定することもできる。このことに対応して　$0 \leq q \leq 1$ に対して

$$W_q(T) = \{\langle T\xi, \eta\rangle : \xi, \eta \in H, ||\xi|| = ||\eta|| = 1, \langle \xi, \eta\rangle = q\} \tag{1.5}$$

により T の q-数域　$W_q(T)$ を定める。この領域は凸となる。

Westwick の定理あるいは Tsing　の q-数域の結果以降２０年以上にわたって C-数域の凸性についてはその後進展が見られない。特に次のような疑問は未解決である。(i)C, T ともに行列とする。C の固有値がすべて実数のとき、$W_C(T)$ は凸か？　(ii)C, T ともに行列とする。C がべき零行列のとき、$W_C(T)$ は凸か？

2. 数域および q-数域の性質

Hilbert 空間の有界線形作用素 T をユニタリー作用素 U で相似変換した UTU^* に対して

$$W(T) = W(UTU^*), \quad W_q(T) = W_q(UTU^*), \tag{2.1}$$

が成り立つ。また、T の随伴作用素 T^* に対して

$$W(T^*) = \{\overline{z} : z \in W(T)\}, \quad W_q(T^*) = \{\overline{z} : z \in W_q(T)\}, \tag{2.2}$$

が成り立つ。H に複素共役構造 conjugation J が定義されていて、これにより、T の転値 transposed $T^t = JT^*J$ が定義されるとき、$W(T^t) = W(T)$, $W_q(T^t) = W_q(T)$ も成り立つ。数域の研究の発端ともなっている T のスペクトル $\sigma(T)$ との関係

$$\sigma(T) \subset \overline{W(T)}, \quad q\,\sigma(T) \subset \overline{W_q(T)}, \tag{2.3}$$

も基本的な性質の一つである。行列 T の固有値の集合 $\sigma(T)$ や数域 $W(T)$ はさまざまに使われるがここでは、最高次係数 1 の複素係数多項式

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

のコンパニオン行列 C_p

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

に対して

$$\det(\lambda I_n - C_p) = p(\lambda), \tag{2.5}$$

が成り立つことに注目する。A を $n \times n$ 行列、B を $m \times m$ 行列とするとき、

$$\sigma(A \otimes I_m + I_n \otimes B) = \sigma(A) + \sigma(B), \tag{2.6}$$

$$W(A \otimes I_m + I_n \otimes B) = W(A) + W(B), \tag{2.7}$$

$$\sigma(A \otimes B) = \{\lambda\mu : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}, \tag{2.8}$$

が成り立つ。(2.6),(2.8) は、体の拡大の理論で重要な役割を果たす。(既約な) 有理数係数の多項式 $p(z)$, $q(z)$ の根であるような $\alpha, \beta \in \mathbf{c}$ に対して $\alpha+\beta$ や $\alpha\beta$ を根にもつような有理数係数の多項式をどうつくればよいかという疑問に、(2.5),(2.6),(2.8) は回答を与える。また、[5] において、等式 (2.7) が、「梁や床面、壁面などで結びついた複数の鉄筋コンクリート柱の個々の強度 (安全領域) が与えられたとき、組合わせによってどういう強度 (安全領域) が得られるか」という建築工学の問題と結びついていることが述べられている。経験法則として 1 個のコンクリート柱の水平方向の抗力に対する安全領域は、$x-y$ 平面上の中心 0 の楕円板によって与えられることがわかっている。組み合わせるコンクリート柱に方向性がなく、安全領域が円板ならば、組み合わせても安全領域は円板となる。 複素数平面において $W(A_1), W(A_2), \ldots, W(A_k)$ が 0 を中心とする楕円板とし、そのどれも線分に退化しないと仮定する。ミンコフスキー和

$$\Sigma = W(A_1) + W(A_2) + \cdots + W(A_k)$$

は、0 を内点に持つ凸集合であって、$z \in \Sigma \Rightarrow -z \in \Sigma$ を満たす。Σ を単位閉球とするような $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ のノルムを考えこのをともなったノルム空間 $(\mathbf{R}^2, ||\cdot||)$ の双対空間の単位閉球の境界を C とするとき、C が 2^k 次の代数曲線であることはわかる。Σ の境界は、$k=1,2,3$ のとき、それぞれ 2 次、8 次、24 次の代数曲線になるので、一般に $k \times 2^k$ 次の代数曲線になることが予想されているが証明はされてはいない。

さて、T を行列とする。領域 $W_q(T)$ を表示するための原理でもあり、この領域が凸になることを示す方法ともなる公式を Tsing は次のように与えた (1984 年)

$$W_q(T) = \{q\,z + \sqrt{1-q^2}\,w\,\sqrt{h(z)-|z|^2} : z \in W(T), w \in \mathbf{C}, |w| \le 1\},$$

$$h(z) = \max\{\langle T^*T\xi, \xi\rangle : \xi \in H, ||\xi|| = 1, \langle T\xi, \xi\rangle = z\},$$

for $z \in W(T)$　　ここで q-数域　$W_q(T)$ は上記の $W(T)$ 上の凹関数 h を通じて Davis-Wielandt 包と呼ばれる同時数域

$$W(T, T^*T) = \{(\langle T\xi, \xi\rangle, \langle T^*T\xi, \xi\rangle) : \xi \in H, ||\xi|| = 1\}$$

深く関係している。T の作用する空間 $\mathbf{C}^n$ の次元　$n \ge 3$ のときは、$W(T, T^*T)$ は凸となる (Bohnenblust による結果；Au-Yeung, Tsing も 1983 年もっと拡張した形で証明している)。Tsing の公式により、q-数域の境界の方程式を求めることは、原理的には可能ではあるが、次のような 3×3 の行列の場合でさえ解決していない。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ただし、上記のうち、後者の行列の q-数域が 0 を中心とする円板であることはわかる。さて、次の行列 A の q-数域を決定しようという研究を筆者は Chien, Psarrakos との共同研究で開始した。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1+c & 0 \\ 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+ib \end{pmatrix}.$$

問題は、$\tilde{A}$ の場合に帰着される。ただし、a, b, c は実数で、$0 < c$ である。$c = 1$ の場合を [**2**] で解決した。

3. 可約 3×3 行列の q-数域の境界の計算方法

点 $a + ib$ の絶対値が次のような意味で相対的に小さい場合 $a^2 + b^2 < (c+1)^2$ のとき、$0 < q < 1$ が相対的に小さく $0 < q \leq R_1(c : a + ib)^{1/2}$ を満たすとき、$\tilde{A}$ の q-数域は、楕円板

$$W_q(\begin{pmatrix} 0 & 1+c \\ 1-c & 0 \end{pmatrix})$$
$$= \{x + iy : (x, y) \in \mathbf{R}^2, \frac{x^2}{(1 + c(1-q^2)^{1/2})^2} + \frac{y^2}{(c + (1-q^2)^{1/2})^2} \leq 1\}, \tag{3.1}$$

と一致する。ここで

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1(c : a + i\,b) \\ &= \Big\{(a^2+b^2)^4 - 4(a^2+b^2)^2\, b^2\, c^2 + (-2a^4 + 4a^2\, b^2 + 6b^4)\, c^4 \\ &\quad -4b^2\, c^6 + c^8 - 4(a^2+b^2)^2\, a^2 + 20a^2\, c^4 + 6a^4 + 4a^2\, b^2 - 2b^4 + 20b^2\, c^2 \\ &\quad -2c^4 - 4a^2 + 1 - 8c(a^2 + b^2 - (c^2+1))(b^2 + a^2c^2)^{1/2} \\ &\quad ((a^2-1)^2 + 2a^2b^2 + (b^2-c^2)^2 + 2(a^2c^2 + b^2 - c^2))^{1/2}\Big\} \\ &\quad /\Big((a^2-1)^2 + 2a^2b^2 + (b^2-c^2)^2 + 2(a^2\,c^2 + b^2 + c^2)\Big)^2. \end{aligned}$$

また、$a^2 + b^2 > (c+1)^2$ であって、$0 < q \leq R_1(c : a + ib)^{1/2}$ の場合は、$W_q(\tilde{A})$ の境界はこれから述べる **8** 次曲線となる。また、$R_1(c : a + ib)^{1/2} < q < 1$ の場合は、$W_q(\tilde{A})$ は後述の 8 次曲線と (3.1) の境界をつないだ曲線となる。さて 8 次曲線の計算方法を述べる。離心率が $0 < q < 1$ で、焦点が (qx_1, qy_1), (qx_2, qy_2) にある $x - y$ 平面上の楕円の方程式は、$G(x, y : x_1, y_1; x_2, y_2; q) = 0$ で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} &G(x, y : x_1, y_1; x_2, y_2; q) \\ &= -4((1-q^2)(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2)\, x^2 \\ &\quad -4((x_1-x_2)^2 + (1-q^2)\,(y_1-y_2)^2)\, V^2 + 8q^2\,(x_1-x_2)\,(y_1-y_2)\, x\, y \\ &\quad +4q\,((1-q^2)(x_1^3 - x_1^2\, x_2 - x_1\, x_2^2 + x_2^3 + x_1\, y_1^2 + x_2\, y_2^2) \\ &\quad +(1+q^2)\,(x_1\, y_2^2 + x_2\, y_1^2) - 2(x_1+x_2)\, y_1\, y_2)\, x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4q\,((1-q^2)(y_1^3 - y_1^2\,y_2 - y_1\,y_2^2 + y_2^3 + x_1^2\,y_1 + x_2^2\,y_2)\\
&+(1+q^2)\,(x_1^2\,y_2 + x_2^2\,y_1 - 2x_1\,x_2\,(y_1+y_2))\,y\\
&+(1-q^2)^2\,(x_1^4 + x_2^4 + y_1^4 + y_2^4) - 4(1-q^2)\,(x_1^3\,x_2 + x_1\,x_2^3 + y_1^3\,y_2 + y_1\,y_2^3)\\
&+(-2q^4 - 4q^2 + 6)\,(x_1^2\,x_2^2 + y_1^2\,y_2^2) + (-2q^4 - 4q^2 + 2)(x_1^2\,y_2^2 + x_2^2\,y_1^2)\\
&+(2q^4 - 4q^2 + 2)(x_1^2\,y_1^2 + x_2^2\,y_2^2) + (4q^2 - 4)(x_1\,x_2\,y_1^2 + x_1\,x_2\,y_2^2\\
&+x_1^2\,y_1\,y_2 + x_2^2\,y_1\,y_2) + 8x_1\,x_2\,y_1\,y_2
\end{aligned}
$$

ここで、１つの焦点 (x_2, y_2) は、点 (a, b) に固定し、もう一方の焦点 (x_1, y_1) は次のような４次曲線 $B(x, y) = 0$ 上の動点とする。このとき生成される楕円の１経数族の包絡線として、問題の８次曲線は得られる。ただし、点 $(a, b, a^2 + b^2)$ を頂点とする楕円錐 E でこの点と楕円面

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{c^2} + \frac{(z - 1 - c^2)^2}{4c^2} = 1\}$$

から生成されるものを考え、この楕円錐の表面と方物面 $z = x^2 + y^2$ の共通部分として定義される空間曲線を、$x - y$ 平面に投影してできる４次曲線を $B(x, y) = 0$ とする。

計算の基礎方法として無限次元空間の正規作用素を構成する。このような正規作用素の q-数域は [1] で扱った。[3],[4] で一般の $\tilde{A}$ の q-数域の境界の一般方程式を得た。方程式を表す多項式は、6 変数 x, y, a, b, c, q に関する項数がちょうど 18000 の整数係数多項式によって与えられる。多項式をおさめた Mathematica のファイルの容量は、記述の仕方で違ってくるが、400KB から 500KB ほどである。具体的な式に興味のある方は著者まで連絡されたい。電子メールまたは郵送にて、Mathematica のファイルまたは、印刷したものをお送りします。

References

[1] M. T. Chien and H. Nakazato, The q-numerical ranges of normal operators, Linear and Multilinear Algebra, **53**(2005), 393-416.

[2]M. T. Chien, H. Nakazato and P. Psarrakos, The q-numerical range and the Davis-Wielandt shell of reducible 3 -by-3 matrices, Linear and Multilinear Algebra, **54**(2006), no.2(March 1st), 79-112.

[3] M. T. Chien and H. Nakazato, The q-numerical range of a reducible matrix via a normal operator, preprint.

[4] M. T. Chien and H. Nakazato, General polynomial representing the boundary of the q-numerical range of a reducible 3×3 matrix, 2005, CD-rom.

[5] H.Nakazato: "k-数域と建築物の構造特性について", 京大数理解析研究所講究録 no.1427 (2005 年 4 月), pp.84-97.

Segal algebras in the context of commutative Banach algebras

Jyunji Inoue(Hokkaido University)

Abstract Segal algebras are dense ideals of group algebras of locally compact groups, which constitute Banach algebras with respect to some norm and have some homogeneous structures. Since H. Reiter introdued this notion in 1965, many interesting and important results on Segal algebras have been accumulated. It is interesting that some properties of group algebras are hereditary in Segal algebras, but other's are not. Segal algebras may be regarded as generalizations of group algebras.

In this note we fix a commutative semisimple Banach algebra A, and define Segal algebras of A, which are generalizaitions of the classical Segal algebras. Then we define a new class of Segal algebras of A, and study some properties of them.

§1 Introduction In this note G stands for a non-discrete locally compact abelian group (LCA group) with character group $\hat{G}$. We denote by A a commutative semisimple Banach algebra which satisfies the following properties;

(α) A has bounded approximate identities,

(β) $(\hat{A}, \| \ \|_{\hat{A}})$ forms a Wiener algebra,

where $(\hat{A}, \ \| \ \|_{\hat{A}})$ denotes the Banach function algebra on Φ_A(the maximal ideal space of A) of Gelfand transforms of A with the norm ; $\|\hat{x}\|_{\hat{A}} = \|x\|_A (x \in A)$. For the definition of Wiener algebras, we refer to [6, chapter 2].

As examples of A, we quote those algebras; group algebras $L^1(G)$ of LCA groups G, the Lipschtz algebra $Lip_0^1(R)$(cf. [3]), C^*-algebras $C_0(X)$ of non-compact locally compact Hausdorff spaces X, and some of thier ideals and quotient algebras.

§2 Classical Segal algebras.

In this section, we state definitions and results concerning the theory of Segal algebras of $L^1(G)$, which are nessesary to state our results later.

Remark 1. Segal algebras are defined for the group algebras of locally compact groups([5]). But in this note, we restrict ourselves to the commutative case. By "classical Segal algebras", we refer to Segal algebras of $L^1(G)$.

[0]This note is based on joint works with Sin-Ei Takahasi(Yamagata University)
author; e-mail: inoue$_{-jf}$@ybb.ne.jp

Definition 1 (cf. [5]). A subalgebra $\mathcal{S}$ of $L^1(G)$ is said to be a Segal algebra if it satisfies the following conditions.

(S$_0$) $\mathcal{S}$ is dense in $L^1(G)$.

(S$_1$) $\mathcal{S}$ is a Banach space under some norm $\|\cdot\|_S$, and

$$\|f\|_S \geq \|f\|_1 \quad (f \in \mathcal{S}).$$

(S$_2$) $\mathcal{S}$ is translation invariant ;

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow f_y \in \mathcal{S} \quad (y \in G)$$

and for each $f \in \mathcal{S}$ the mapping $y \rightarrow f_y$ of G into $\mathcal{S}$ is continuous

Here we review typical examples of Segal algebras from [6, Chapter 6].

Example 1. Let $\mathcal{S} := \{f \in C(R) : M(f) < \infty\}$, where $M(f) := \sum_{n \in Z} \sup_{0 \leq x \leq 1} | f(x+n) |$. Then $\mathcal{S}$ is an ideal of $L^1(R)$ and $M(\cdot)$ is a complete algebra norm on $\mathcal{S}$, but not translation invariant. So, if we renorm $M(\cdot)$ by $\|\cdot\|_S$, where $\|f\|_S := \sup\{M(f_y) : y \in R\}$, then $\|\ \|_S$ is a translation invariant norm on $\mathcal{S}$ which is equivalent to $M(\cdot)$, and $(\mathcal{S}, \|\ \|_S)$ becomes a Segal algebra of $L^1(R)$.

Example 2. $S_p(G)$. For each $p (1 < p < \infty)$, put

$$S_p(G) := \{f \in L^1(G); \|f\|_p < \infty\}, \ \|f\|_{S_p} := \|f\|_1 + \|f\|_p$$

then $(S_p(G), \|\ \|_{S^p})$ is a Segal algebra of $L^1(G)$.

Example 3. $A_{\mu,p}(G), A_p(G)$. Let μ be an unbounded positive Radon measure on $\hat{G}$. For each $p (1 \leq p < \infty)$, put

$$A_{\mu,p}(G) := \{f \in L^1(G) : \hat{f} \in L^p(\mu)\}, \quad \|f\|_{\mu,p} := \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_{L^p(\mu)},$$

then $(A_{\mu,p}(G), \|\ \|_{\mu,p})$ is a Segal algebra on $L^1(G)$. Especially, in case μ is a Haar measure $m_{\hat{G}}$ of $\hat{G}$, we use, for this Segal algebra, an expression $(A_p(G), \|\ \|_{A_p})$, instead of the expression $(A_{m_{\hat{G}},p}(G), \|\ \|_{m_{\hat{G}},p})$.

J. Ciglar [2] intoroduced the notion of normed ideals of $L^1(G)$, which is a generalization of the notion of Segal algebras, and gave a necessary and sufficient condition for a normed ideal to be a Segal algebra. Also, M. Riemersma [6] gave another nesessary and sufficient conditions for a normed ideal to be a Segal algebra.

Definition 2 (cf. [2]) Let $\mathcal{N}$ be a linear subspace of $L^1(G)$. $\mathcal{N}$ is called a normed ideal of $L^1(G)$ if $\mathcal{N}$ satisfies the following condtions:
(a) $\mathcal{N}$ is a dense ideal of A,

(b) $\mathcal{N}$ is a Banach space for some norm $\| \ \|_{\mathcal{N}}$ such that

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\leq \|f\|_{\mathcal{N}} \quad (f \in \mathcal{N}) \\ \|fg\|_{\mathcal{N}} &\leq \|f\|_1 \|g\|_{\mathcal{N}} \quad (f \in L^1(G), g \in \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Next we state remarkable properties of Segal algebras or normed ideals.

Theorem A *If $\mathcal{N}$ is a normed ideal of $L^1(G)$, we have;*

(i) *If U is a neighbourhood of $\gamma_0 \in \hat{G}$, there is an $f \in \mathcal{N}$ such that supp $\hat{f} \subset U$ and $\hat{f}(\gamma) = 1$ on some neighbourhood of γ_0.*

(ii) *If $K, U \subset \hat{G}$ such that K is compact and U is open satisfying $K \subset U$, then there exists $e \in \mathcal{N}$ such that $\hat{e}(\gamma) = 1 \ (\gamma \in K)$ and* supp $\hat{e} \subset U$.

(iii) *$L^1_c(G)$ is contained in $\mathcal{N}$, where $L^1_c(G) := \{f \in L^1(G) : \text{supp } \hat{f} \text{ is compact}\}$.*

Theorem B *([2], [6]) For a normed ideal $\mathcal{N}$, the following* (a), (b), and (c) *are equivalent each other.*

(a) *$\mathcal{N}$ is a Segal algebra.*

(b) *$\mathcal{N}$ has approximate units, that is;*

$$\forall f \in \mathcal{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists e \in \mathcal{N}; \quad \text{s. t. } \|f - f * e\| < \varepsilon.$$

(c) *$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$, where $\mathcal{N}_0$ is the norm closure of $L^1_c(G)$ in $\mathcal{N}$.*

Theorem C. *(H. Reiter) Let $\mathcal{S}$ be a Segal algebra of $L^1(G)$.*

(i) The ideal theory of $\mathcal{S}$ is the same as that of $L^1(G)$. More precisely, if $\mathcal{I}$ is a closed ideal of $L^1(G)$ then $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}$ is a closed ideal of $\mathcal{S}$, and conversely each closed ideal of $\mathcal{S}$ is of this form for a unique closed ideal $\mathcal{I}$ of $L^1(G)$.

(ii) The maximal ideal spaces of $\mathcal{S}$ and $L^1(G)$ are homeomorphic. We can naturally identify $\Phi_{\mathcal{S}}$ with $\hat{G}$, that is, the Gelfand transform of $\mathcal{S}$ is equal the Fourier transform restricted to $\mathcal{S}$.

Theorem D (i) *Let $\mathcal{S}$ be a Segal algebra, and let $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ be a bounded approximate identity of $L^1(G)$ composed of elements in $L^1_c(G)$. Then $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ is a bounded approximate identity of $\mathcal{S}$ which is bounded with respect to the multiplication oeprator norm;*

$$\|T_f\|_{op} := \sup\{\|fg\|_{\mathcal{S}} : g \in \mathcal{S}, \|g\|_{\mathcal{S}} \leq 1\} \quad (f \in \mathcal{S})$$

(ii) *If a Segal algebra $\mathcal{S}$ has a bounded approximate identity, then we have $\mathcal{S} = L^1(G)$.*

Theorem E *If $(\mathcal{S}_1, \| \ \|_{\mathcal{S}_1})$ and $(\mathcal{S}_2, \| \ \|_{\mathcal{S}_2})$ are Segal algebras, then $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ becomes a Segal algebra with respect to the norm $\| \ \|_{\mathcal{S}} = \| \ \|_{\mathcal{S}_1} + \| \ \|_{\mathcal{S}_2}$.*

It is known that Segal algebras are normed ideals ([2]), and by the virtue of Theorem B, we can define Segal algebras of A, which are generalizations of classical Segal algebras

In the next section, we will give precise definitons of normed ideals and Segal algebras of A.

§3. Definitions and fundamental propreties of normed ideals and Segal algebras of A.

Recall that A stands for a semisimple commutative Banach algebras which has bounded approximate identities; we fix here one, say, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, with $\sup_{\lambda\in\Lambda}\|e_\lambda\|_A = M < \infty$.

Φ_A denotes the maximal ideal space of A. For $x \in A$, $\hat{x}$ is the Gelfand transform of x. A_c is the set of all $x \in A$ such that supp $\hat{x}$(the support of $\hat{x}$) is compact.

Since A_c is dense in A by (β), we can suppose without loss of generality that $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ is contained in A_c.

In [1] Burnham defined abstract Segal algebras (ASA), which is a generalization of the Cigler's normed ideals [2] to general Banach algebras.

In this section, we will define 'Segal algebra of A', which is a generalization of classical Segal algebras.

Definition 3 (cf. [2]) An ideal $\mathcal{N}$ of A is called a normed ideal of A if $\mathcal{N}$ satisfies the following condtions;

(a) $\mathcal{N}$ is dense in A,

(b) $\mathcal{N}$ is a Banach space for some norm $\|\ \|_{\mathcal{N}}$ such that

$$\begin{aligned} \|a\|_A &\leq \|a\|_{\mathcal{N}} \quad (a \in \mathcal{N}) \\ \|ax\|_{\mathcal{N}} &\leq \|a\|_A\|x\|_{\mathcal{N}} \quad (a \in A, x \in \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Definition 4 (cf. [6]) A normed ideal $(\mathcal{N}, \|\ \|_{\mathcal{N}})$ of A is called a Segal algebra of A if $\mathcal{N}$ has approximate units, that is, $\mathcal{N}$ satisfies;

$$\forall x \in \mathcal{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists e \in \mathcal{N} \text{ such that } \|x - xe\|_{\mathcal{N}} < \varepsilon$$

Under the above definitions of normed ideals and Segal algebras of A, all the therems(Theorem A, B, C, D and E of the previous section) are also valid, the proofs of which are contained in [4].

§4. Segal algebras induced by local multipliers of A

Definition 5 Let τ be a complex continuous function on Φ_A. We call τ a local multiplier of A if $\hat{x}\tau \in \hat{A}$ $(x \in A_c)$ hold. The set of local multipliers of A is denoted by $\hat{\mathcal{M}}_{loc}(A)$.

Definition 6 If $\tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(A)$, we put $A_\tau := \{x \in A : \hat{x}\tau \in \hat{A}\}$. Obviously, A_τ is a linear subspace of A which contains A_c. For each $x \in A_\tau$, there is a unique $a_x \in A$ such that $\hat{a_x} = \hat{x}\tau$, and set

$$\|x\|_\tau := \|x\|_A + \|a_x\|_A \quad (x \in A_\tau).$$

It turns out that $\| \ \|_\tau$ is a complete algebra norm on A_τ as the next proposition shows.

Proposition 1 *For each $\tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(A)$, $(\hat{A}, \| \ \|_\tau)$ is a Segal algebra of A. Moreover, if* $\sup\{| \tau(\varphi) | : \varphi \in \Phi_A\} = \infty$, *we have $A \neq A_\tau$.*

Definition 7 For $\tau \in \hat{M}_{loc}(A)$, we call $(A_\tau, \| \ \|_\tau)$ a Segal algebra induced by τ.

Proposition 2 *If $x \in A$ such that* supp $\hat{x}$ *is σ-compact but not compact, the we have $x \notin \{\cap A_\tau : \tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(A)\}$.*

Corollary 3 *Suppose that Φ_A is σ-compact, or discrete. Then we have $\cap\{A_\tau : \tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(A))\} = A_c$.*

Corollary 4 *Let G be a non-discrete locally compact abelian group. Then we have $\cap\{L^1(G)_\tau : \tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(L^1(G))\} = L^1(G)_c$.*

Proposition 5 *If $\mathcal{S}$ is a Segal algebra of A and if T is a linear operator of $\mathcal{S}$ into A, the following* (a) *and* (b) *are equivalent each other.*

(a) $T \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, A)$.

(b) *There exists a unique continuous function τ on Φ_A such that $\widehat{Tx} = \hat{x}\tau \ \ (x \in \mathcal{S})$.*

Definition 8 If $\mathcal{S}$ is a Segal algebra of A, and if $T \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, there is by Proposition 5, a unique $\tau \in C(\Phi_A)$ such that $(Tx)^\wedge = \hat{x}\tau$. We denote this τ by $\hat{T}$, and call the Gelfand trasnsform of T, and denote $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{S}, A) := \{\hat{T} : T \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, A)\}$.

Remark 2. (1) If τ is a local multiplier of A, we have, by Propositin 5, that $\tau \in \hat{\mathcal{M}}(A_\tau, A)$.

(2) If $\mathcal{S}$ is a Segal algebra of A, and if $T \in \mathcal{M}(\mathcal{S}, A)$, it is easy to see that $\hat{T}$ is a local multiplier of A. which satisfy $\mathcal{S} \subset A_{\hat{T}}$.

(3) If $\tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(L^1(G))$, such that $\tau = \hat{\mu}$ for some $\mu \in M(G)$, we have $L^1(G)_\tau = L^1(G)$ and $\| \ \|_\tau$ is equivalent to $\| \ \|_1$.

Proposition 6 *Let G be a non discrete locally compact abelian group. If $1 < p < \infty$ and if $\tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(L^1(G))$ such that $\mathcal{S}_p(G) \subseteq L^1(G)_\tau$, then we have $\tau = \hat{\mu}$ for some $\mu \in M(G)$.*

Lemma 7 *For each* $p(1 \le p < \infty)$ *we have* $\hat{\mathcal{M}}(A_p(G), L^1(G)) = \{\mu :\in M(G)\}$.

Proposition 8 *Let* G *be a non discrete locally compact abelian group. If* $1 \le p < \infty$, *and if* τ *is a local multiplier of* $L^1(G)$ *such that* $A_p(G) \subseteq L^1(G)_\tau$, *then we have* $\tau = \hat{\mu}$ *for some* $\mu \in M(G)$.

Remark 3. Proposition 8 shows that there are no proper Segal algebras of the type $L^1(G)_\tau, \tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(L^1(G))$ between $A_p(G)$ and $L^1(G)$. But next proposition shows that that is not the case for the Segal algebras of type $\mathcal{A}_{\nu,1}(G)$ of an infinite compact abelian group G.

Proposition 9 *Let* G *be an infinite compact abelian group. Suppose that* $\tau \in \hat{\mathcal{M}}_{loc}(L^1(G))$ *satisfies* $0 < \tau$ *and* $\sup_{\gamma \in \hat{G}} \tau(\gamma) = \infty$, *and define an unbounded Radon measure* ν *on* $\hat{G}$ *by* $\nu := \tau m_{\hat{G}}$, *where* $m_{\hat{G}}$ *is a Haar measure of* $\hat{G}$. *Then we have* $A_{\nu,1}(G) \subseteq L^1(G)_\tau \neq L^1(G)$.

Remark 4 If G is an infinite compact abelian group, any complex function on $\hat{G}$ belongs to $\hat{\mathcal{M}}_{loc}(L^1(G))$.

For the proofs of propositions stated in this section, see [4].

References

[1] J. T. Burnham, Closed ideals in subalgebras of Banach algebras, I, Proc. A.M.S., 32-2(1972) 551-555.

[2] J. Cigler, Normed ideals in $L^1(G)$, Indag. 31(1969) 273-282.

[3] J. Inoue and Sin-Ei Takahasi, On characterizations of the image of Gelfand trasform of commutative Banach algebras, to appear in Math. Nach.

[4] J. Inoue, On dense ideals of commutative Banach algebras, to appear in 数理解析研究所講究録, 2006.

[5] H. Reiter and J. D. Stegeman, Classical Harmonic Analysis and locally compact abelian groups, Oxford Science Publications, 2000.

[6] M. Riemersma, On some properties of normed ideal in $L^1(G)$, Indag. Math. 37(1975) 265-272.