



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ランジュバン方程式の複素スケール変換と狭心症
Author(s)	小山, 順二
Citation	北海道大学地球物理学研究報告, 77, 31-43
Issue Date	2014-03-19
DOI	https://doi.org/10.14943/gbhu.77.31
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55266
Type	departmental bulletin paper
File Information	77_05_P31-43.pdf



ランジュバン方程式の複素スケール変換と狭心症

小山 順二

北海道大学大学院理学研究院自然史科学分野

(2013 年 1 月 11 日受理)

Langevin Equation Transformed by Complex Scaling and Pectoris

Junji KOYAMA

Department of Natural History Sciences, Graduate School of Science

Hokkaido University

(Received January 11, 2014)

複雑なランダムシステムの活性化をランダム現象の力学過程を複雑化することで考える．先ず，複雑なランダムシステムがランダムに変動するクラスター群の集まりであると考え，それぞれのクラスターはそれぞれのランジュバン方程式で記述され，クラスター毎の運動はブラウン運動のふるまいを示す．システム全体が持つランダムな複雑さをランジュバン方程式間に存在するスケール変換で特徴づける．このように考えた複雑なランダムシステムは一般化ブラウン運動の一つのモデルとなるものであり，一般化ブラウン運動を特徴づけるハースト定数 H とここで考えたスケール変換のフラクタル次元 D ($D > 0$) との間に，

$$1 - D = 2H - 2$$

の関係が導かれる．

$H = 1/2$ の古典的なブラウン運動は， $D = 2$ を示し，2次元空間を埋め尽くすような運動を示している． $0 < H < 1/2$ の範囲では，フラクタル次元が $1 < D < 2$ となるから，一般化ブラウン運動が一度通った点を再び通ることはなく，自己回避型の運動となる．さらに， $1/2 < H < 1$ では， $2 < D < 3$ となり，2次元空間の同じ点を繰り返し通過する運動になる．また， $0 < D < 1$ のフラクタル次元をもつ運動も定義される．それはもはや連続した運動を表現するものではなく，いたるところで途切れた運動となる．この場合， $1 < H < 3/2$ となり一般化ブラウン運動の定義域を超えているが，連続でないブラウン運動も次元の理解の自然な拡張として許すなら，ここで考えたスケール変換によるブラウン運動の表現は従来の制約をこえ，より一般的な表現になっている．

議論は、複素スケール変換を同様に考えた場合にも及び、そこでは複素ブラウン運動の不安定化など、そのふるまいを物理的に理解する一つのモデルを提示する。

1. は じ め に

フラクタルの考えは、海岸線の入り組んだ複雑な形状を具体的な例として、それを特徴づける考えとして紹介された (Mandelbrot, 1983). この考えは、複雑な自然現象を取り扱う地球物理現象にはなじみやすく、その後、多くの展開が地球物理学の諸分野でなされた (高安, 1986; Turcotte, 1992). その基本的な考えは、“自己相似”であって、地震断層を円形クラックのモデルで考えていたから、断層クラックの半径が2倍になれば、断層の最大くいちがい量が2倍になる、という考えに一致し、地震断層の相似則 (Similarity; Koyama, 1997) を考える上からも、理解しやすいものであった。

複雑な図形や複雑な自然現象は、ゆらぎ現象の分野でも研究されている。たとえば、ランダムな運動をブラウン運動の考えで定式化し、拡張した一般化ブラウン運動 (fractional Brownian Motion; fBm) の理論がある (例えば, Levy, 1953). これはガウス型ランダムノイズと古典的なブラウン運動との中間的な性質をもつ運動である。Mandelbrot and Van Ness (1968) は fBm の自己相似性やスペクトル構造を明らかにしている。しかし、この fBm は数学的な (形式的な) ブラウン運動の拡張であり、その背景にある物理モデルを直接理解することはできない。Koyama and Hara (1992, 1993) はランジュバン方程式から出発して、自己相似性で特徴づけられる方程式系からなる複雑なランダムシステムを考えた。その複雑なランダムシステムと fBm の形式的な関係を導き、fBm の物理的な理解を展開している。

ここでは Koyama and Hara (1992, 1993) に基づき、ランジュバン方程式に、ランダムシステムの自己相似な性質で決まるスケール変換を考える。それにより一般化ブラウン運動 (fBm) の表現式と物理的な理解を復習する。さらに複素スケール変換を考えることでランジュバン方程式系が示す複素ブラウン運動の一般的な性質の一例を概観しよう。最後に、フラクタルの図形的な表現やスケール変換の考え方ばかりではなく、力学方程式に自己相似な考えを導入することの重要性、実際の物理現象への広範な応用や数学的深化を簡単に議論しよう。

2. 非整数次のブラウン運動 (fractional Brownian Motion)

ここではブラウン運動の拡張を数学的に厳密に追求するのではなく、一般化ブラウン運動の物理的な理解を得ることを目的としている。したがって、それに必要な定式化や考え方をまず述べることにする。Levy (1953) や Maccone (1981) は非整数次のブラウン運動 (fBm), $B_H(t)$ を

$$(2.1) \quad B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} G(s) ds \quad (0 < H < 1)$$

と定義した．ここで Γ はガンマ関数， $t \geq 0$ ， H はハースト定数 (Hurst Index) と呼ばれる定数である． $G(s)$ はガウス型ランダムノイズであり，平均が 0，分散が σ^2 で，自己相関関数；

$$(2.2) \quad R_{GG}(\tau) = \langle G(t+\tau)G(t) \rangle = \sigma^2 \delta(\tau)$$

をもつ．ここで，上の $\langle \rangle$ は時間平均を表すオペレータで， δ はディラックの δ 関数である．

(2.1) はガウスノイズを入力として，それに時間の重みを付けた応答の重ね合わせをシステム全体の出力として見ていることになる． $H = 1/2$ ならガウスノイズで励起される古典的なブラウン運動である．その時間微分は明らかにガウスノイズである．一般化ブラウン運動は (2.1) のようにパラメータ H を用いて発見的に導入された運動であるが，一般化ガウスノイズの応答と考えることもできる．そのような一般化ガウスノイズについて，Mandelbrot and Van Ness (1968) 以下のような例を考えた；

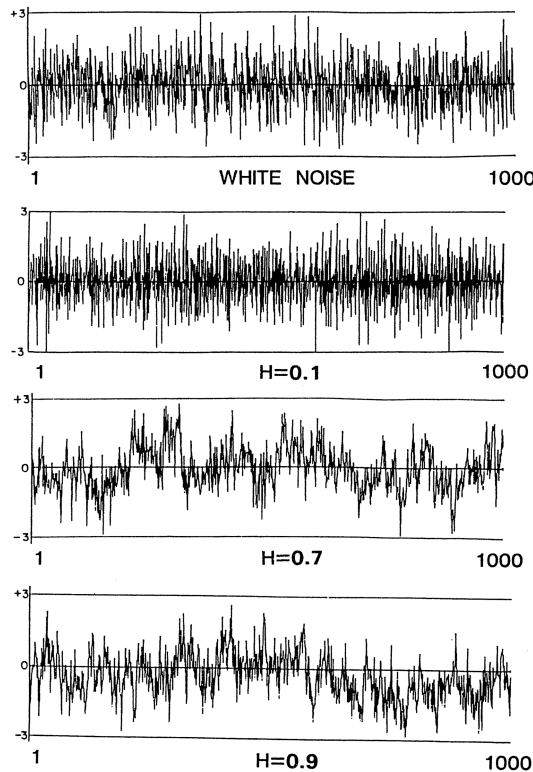


図 1：ガウス型ランダムノイズ (White noise) とハースト定数 H で特徴づけられる一般化ガウスノイズ (Levy, 1953)．縦軸はノイズの分散によって決まる，横軸は離散時間ステップ (0 ～ 1000)．

$$(2.3) \quad G_H(t) = \left(H - \frac{1}{2}\right) \sum_{s=t-M}^{t-1} (t-s)^{H-\frac{3}{2}} G(s) + Q_H G(t),$$

ここで M は振幅が十分に小さくなる時間ステップ数, また,

$$(2.4) \quad Q_H = \begin{cases} 0 & \text{if } 1/2 < H < 1, \\ \left(\frac{1}{2} - H\right) \sum_{s=1}^{\infty} s^{H-3/2} & \text{if } 0 < H < 1/2. \end{cases}$$

(2.3) の自己相関関数は

$$(2.5) \quad R_{G_H G_H}(t_1 - t_2) \cong V_H |t_1 - t_2|^{2H-2}$$

で近似される. ここで, V_H は H に依存する定数である. 図 1 に G_H の例を示す. $0 < H < 1/2$ なら, G_H はガウスノイズに比べて短周期成分が卓越し, $1/2 < H < 1$ なら長周期成分が卓越することが見て取れる.

3. ランジュバン方程式のスケール変換

ここでは, ハースト定数 H の物理的な意味を考えたために, Koyama and Hara (1992, 1993) にあるランジュバン方程式のスケール変換を考える. ここで考える複雑なランダムシステムは基本的な構成要素がランダムに励起される系である. 要素の中には同じ性質の応答を示す要素群があり, それらをまとめて一つのクラスターとする. 数多くのクラスターが全体として複雑なランダムシステムを構成していると考え, それぞれのクラスターはそれぞれのランジュバン方程式で記述される応答で表現される. 複雑なランダムシステムを構成する複数のランジュバン方程式の間には簡単なスケール変換が存在するものとする. 図 2 にその例を示す. クラスター間のスケール則は, ランダムパルスが a 倍の頻度で, b 倍の応答で励起されるようなランダムパルス列を作り出すスケール則である. したがって, この複雑なランダムシステムの応答は構成するクラスター群のランダムパルス列の各々の応答を総和したもので表されるものとする. 基本となるランジュバン方程式は

$$(3.1) \quad \frac{dX_0}{dt} + \gamma X_0(t) = G_0(t)$$

である. ただし, γ は注目する基本クラスター内のパルスの応答を特徴づけるパラメータで, $G_0(t)$ はガウス型ランダムノイズである. 上に述べたクラスター間のスケール変換はランダムパルスの応答関数同士のスケール則;

$$(3.2) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} X_{i-1}(bt) \rightarrow X_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$(3.3) \quad \sqrt{ab} G_{i-1}(bt) \rightarrow G_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

であらわされる．ここで， a ， b は正の実数とする．これによりそれぞれのクラスターを表現するランジュバン方程式自身がスケール変換され，

$$(3.4) \quad \frac{dX_i(t)}{dt} + \gamma b^i X_i(t) = G_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

となる．考えているランダムシステムを構成するクラスターのランダムパルス列はガウス型ランダムノイズで励起され，その自己相関は以下のようにスケール変換される；

$$(3.5) \quad \langle G_i(t+s) G_i(t) \rangle = a \langle G_{i-1}(t+s) G_{i-1}(t) \rangle \quad (i = 1, 2, \dots).$$

このスケール変換はフラクタル次元 D ；

$$(3.6) \quad D = \ln a / \ln b$$

で特徴づけられることがわかる．

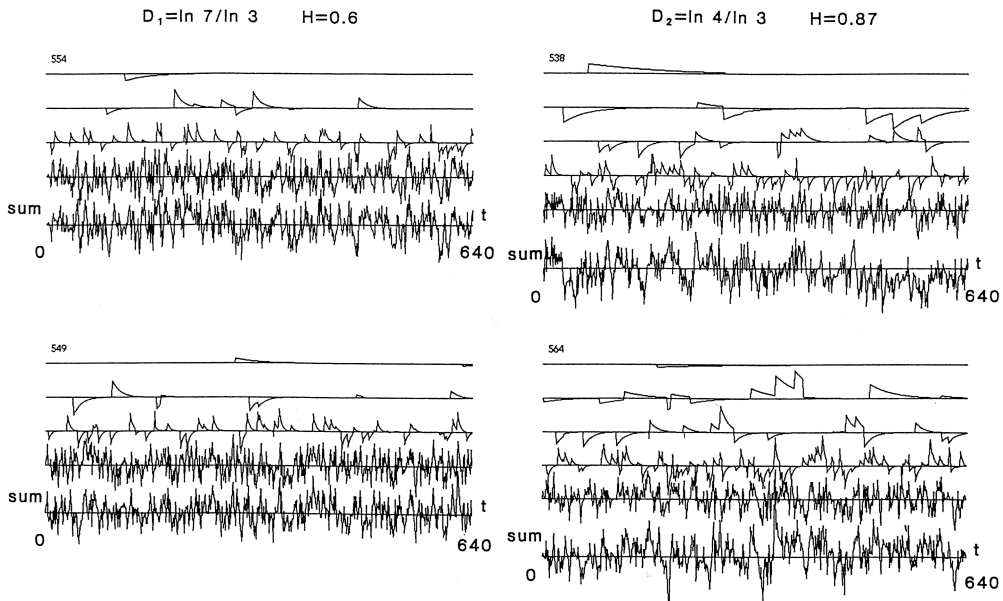


図2：スケール変換されたランジュバン方程式で表現した一般化ブラウン運動による複雑なランダムシステムの運動．スケール則のフラクタル次元 D はハースト係数 H と， $D = 3 - 2H$ の関係にある．フラクタル次元 $D_1 = \ln 7 / \ln 3$ と $D_2 = \ln 4 / \ln 3$ について，それぞれ2つの計算例を示す．図には，最初の4ないし5つのクラスターのランダムパルス応答を示す．複雑なランダムシステム全体の応答はすべてのクラスターの応答の総和 (Sum) であらわされる．

各クラスター内の個々のランダムパルスはインパルス応答関数；

$$(3.7) \quad h_i(t) = \exp(-b^i \gamma t) H(t) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

で励起される．ただし， $H(t)$ は単位階段関数である．各クラスターの応答は，したがって，

$$(3.8) \quad X_i(t) = \int_0^t G_i(s) h_i(t-s) ds$$

である．クラスター群の総和で表されるシステム全体の応答は

$$(3.9) \quad X(t) = \sum_{i=0} X_i(t).$$

スケール変換されたガウス型ランダムノイズの性質から，システム全体の自己相関関数は，

$$(3.10) \quad R_{XX}(s) = \left\langle \sum_i X_i(t+s) \sum_j X_j(t) \right\rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma} \sum_{i=0} \left(\frac{a}{b} \right)^i \exp(-b^i \gamma |s|)$$

とあらわされる．

ブラウン運動やその一般化の (2.1) で表される fBm はブラウン運動の軌跡 (変位) 成分 (Wiener 過程) であり，(3.9) の応答 $X(t)$ はブラウン運動の速度 (Ornstein-Uhlenbeck 過程) を示している．したがって，(3.4) の応答 $X_i(t)$ は fBm に対応するのではなく，fBm の時間の一階微分 $G_i(t)$ に形式的には対応している．Koyama and Hara (1992) は (3.10) の漸近形を積分近似で導いている．しかし，ここでは (3.10) で $s \rightarrow bs$ のスケール変換を考えることで， $|s| \gg 1$ の時，自己相関関数のスケール変換

$$(3.11) \quad R_{XX}(s) \cong \frac{a}{b} R_{XX}(bs)$$

が導かれることを用い，(3.10) の漸近形

$$(3.12) \quad R_{XX}(s) = a_D |s|^{1-D} \quad (D > 0)$$

を得る．これは Koyama and Hara (1992) の結果と同じである．ただし， a_D は D によって決まる定数である．(3.12) と (2.5) より，ブラウン運動の一般化に必要であったパラメータ H は，スケール変換のフラクタル次元 D との間に

$$(3.13) \quad 1-D = 2H-2$$

の関係が導かれる．一般化ブラウン運動を特徴づけるハースト定数 H は，この式から複雑なランダムシステムのフラクタル次元 D で物理的に理解されることがわかる．

(3.13) から， $H = 1/2$ の古典的なブラウン運動は， $D = 2$ を意味する．これは，古典的なブラウン運動が 2 次元平面を埋め尽くす運動であることを示している．また， $1/2 < H < 1$ の

範囲では、フラクタル次元が $1 < D < 2$ となるから、fBm は一度通った点の近傍を再び通ることとはなく、自己回避型運動となることを示す。さらに、 $0 < H < 1/2$ の範囲では、 $2 < D < 3$ となり、同じ点を繰り返し通過する運動を示していることになる。

ここで考えた一般化したブラウン運動の表現では、 $0 < D < 1$ のフラクタル次元を持つ運動も定義される。これはもはや連続した運動を表現するものではなく、いたる所で途切れた運動となる。この場合、 $1 < H < 3/2$ となり、(2.5) の定義域を越えているが、連続でないブラウン運動も次元の理解の自然な拡張として許すなら、ここで述べたスケール変換によるブラウン運動の表現が従来の一般化ブラウン運動の制約をこえ、より一般的な表現になっていることがわかる。

4. ランジュバン方程式の複素スケール変換

ここでは基本的なランジュバン方程式に、ランダムシステムの自己相似な性質で決まる複素パラメータのスケール変換を考える。ここも § 3 と同様に、複素ブラウン運動の物理的理解を深めることが主な目的であるから、複素ブラウン運動の数学的定式化は § 3 の文献や Hida (1980), Manderbrot (1983) に譲り、複素ブラウン運動の形式的な表現を物理的に考えることにする。(3.1) の実過程の解 $X_0(t)$ をクラスターの基本応答関数 $Z_0(t)$ と考え、ランダムノイズ $G_0(t)$ を $Q_0(t)$ と複素領域で定義しなおす。§ 3 で考えたクラスター間のスケール則を拡張して、複素領域でのスケール変換を

$$(4.1) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} Z_{j-1}(\tilde{b}t) \rightarrow Z_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

と表す。ランダムノイズのスケール変換は

$$(4.2) \quad \sqrt{ab} Q_{j-1}(\tilde{b}t) \rightarrow Q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

である。 a は正の実定数、 $\tilde{b}$ は複素定数である。このスケール変換で、各クラスターのインパルス応答は $\tilde{b}$ 倍の周波数特性に、そしてクラスター内のランダムノイズは a 倍の頻度でより数多く活性化することになる。この変換により、各クラスターのランジュバン方程式はそれぞれスケール変換され、複素ランジュバン方程式となる：

$$(4.3) \quad \frac{dZ_j(t)}{dt} + \tilde{b}^j \gamma Z_j(t) = Q_j(t) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

また、複素領域でのランダムノイズ Q_j は

$$(4.4) \quad \langle Q_{j+1}(t+\tau) Q_{j+1}^*(t) \rangle = a \langle Q_j(t+\tau) Q_j^*(t) \rangle \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

を満足する． $Q_j(t)$ は一般的に複素関数で， $Q_j^*(t)$ はその複素共役である．(4.2) のスケール変換と Poisson 積分の公式（河田，1975）を用いれば，(4.4) は実の相関関数となることが示せる．

ここで考えている複素ランジュバン方程式はその特殊な一例にすぎない．(4.3) ではスケリング定数 $\tilde{b}$ で方程式の実数部と虚数部が結び付けられている．この実数部と虚数部のカップリングが，従来の複素ブラウン運動の理論（飛田，1975）とここで考えている複素ブラウン運動とが異なる点である．

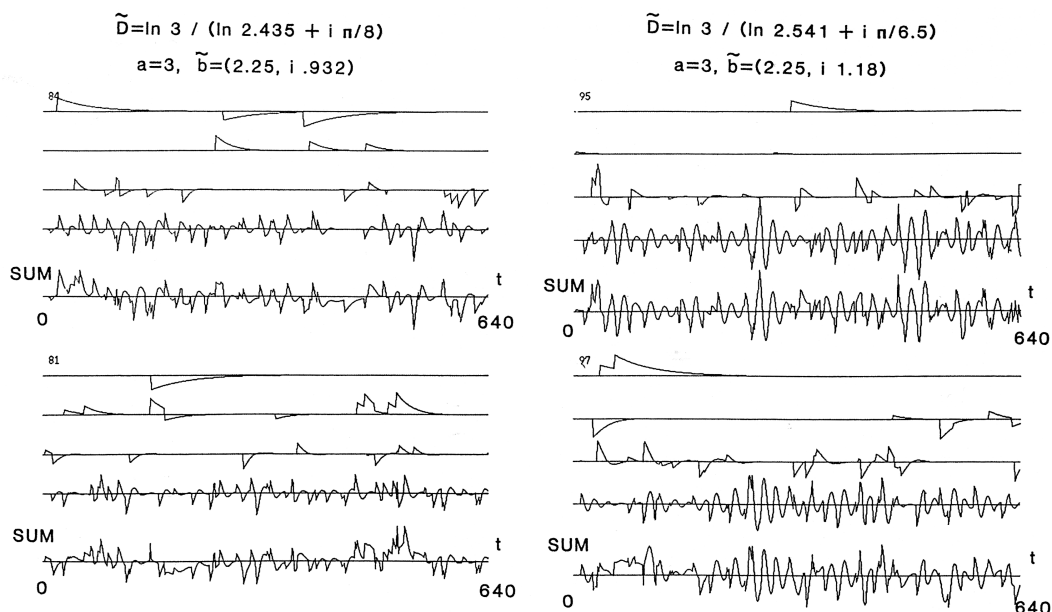


図3：複素スケール変換によるランジュバン方程式で表現した複素ブラウン運動．スケリングパラメーターと複素フラクタル次元を示した．それぞれ2つの計算例を示す．最初の4つのクラスターのランダムパルスの応答を示す．全体の複素ランダムシステムの応答はすべてのクラスターの応答の総和であらわされる．スケール変換が進むとランダムパルスに振動成分が増えることがここで考えた複素スケール変換の特徴である．

5. 複素ランジュバン方程式の解

§ 3 と同様にして，各クラスター内のインパルス応答

$$(5.1) \quad \eta_j(t) = \exp(-\tilde{b}^j \gamma t) H(t) \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

複素ランジュバン方程式 (4.3) の解

$$(5.2) \quad Z_j(t) = \int_0^t Q_j(s) \eta_j(t-s) ds$$

j 番目と k 番目のクラスターの応答関数の相互相関関数

$$(5.3) \quad \begin{aligned} C_{Z_j Z_k}(t_1 - t_2) &= \langle Z_j(t_1) Z_k^*(t_2) \rangle \\ &= \int_0^{t_1} du \int_0^{t_2} ds \langle Q_j(u) Q_k^*(s) \rangle \eta_j(t_1 - u) \eta_k^*(t_2 - s) \end{aligned}$$

が導かれる。ランダムノイズ $Q_j(u)$ と $Q_k(s)$ の直行関係

$$(5.4) \quad \langle Q_j(u) Q_k^*(s) \rangle = \begin{cases} a^j \sigma^2 \delta(u-s) & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

により、クラスターの複素応答関数 $Z_j(t_1)$ と $Z_k^*(t_2)$ は互いに直行していることがわかる。したがって、複素ランダムシステム全体の自己相関関数は各クラスターの自己相関関数の総和であらわされる：

$$(5.5) \quad C_{ZZ}(\tau) = \sum_j \langle Z_j(t+\tau) Z_j^*(t) \rangle$$

図 3 に複素スケール変換によるランジュバン方程式の解が描く複素ブラウン運動の例を示す。基本応答関数 $Z_0(t)$ はランダムパルスからなる時系列となる。そのパルス幅は γ で決まり、パルスの発生頻度 a で特徴づけられる。スケール変換された応答関数 $Z_1(t)$ は特徴的な周波数 $\tilde{b}\gamma$ と a 倍のパルス発生頻度で励起されるランダムパルスで構成される。以下スケール変換が進むにつれて、このインパルス応答に振動する成分が増えてくることが見て取れる。この振動成分がここで考えている複素ブラウン運動の特徴である。

さらにスケールリングを繰り返すと、スケール変換の係数の実部が $\Re\{\tilde{b}^j\} > 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$), $\Re\{\tilde{b}^N\} = 0$ となる場合が発生する。 N 番目のクラスターの自己相関関数は次のようになる：

$$(5.6) \quad \langle Z_N(t_1) Z_N^*(t_2) \rangle = t_1 \wedge t_2 \exp(-ib_I^N \gamma \tau),$$

ただし、 $\tau = t_1 - t_2$, $b_I^N = \Im\{\tilde{b}^N\}$; スケール係数の虚数部分で、また

$$(5.7) \quad t_1 \wedge t_2 = \begin{cases} t_1 & (t_1 < t_2) \\ t_2 & (t_1 > t_2) \end{cases}$$

である。(5.6) の自己相関関数は時間差だけでは決まらない。したがって、この場合はランダムシステムの応答が非定常になっている。またさらにスケール変換を繰り返すと、いつかは、 $\Re\{\tilde{b}^N\} < 0$ となる。この場合はランダムシステムが線形安定性を失うことを示している。Montroll and Shlesinger (1984) は、複素ブラウン運動では、虚数部の運動がバックグラウンド

に対して、フィードバック効果をもたらしている、としている．ここで考えているランダムシステムの不安定化は実過程とそのようなバックグラウンドとのカップリングにより生じているものと考えられる．

ここで考えた複雑なランダムシステムはクラスター間のスケール則，それも複素係数によるスケール則で特徴づけられている．§ 3 と同様にして，複素フラクタル次元

$$(5.8) \quad \tilde{D} = \ln a / \ln \tilde{b}$$

が定義される．図 4 にここで考えた不安定化する複素ブラウン運動のシミュレーション例を示す．システム全体の運動は不安定化する手前の周波数で大きく長く振動し，全体の振動がそのクラスターの応答に支配されていることが見て取れる．

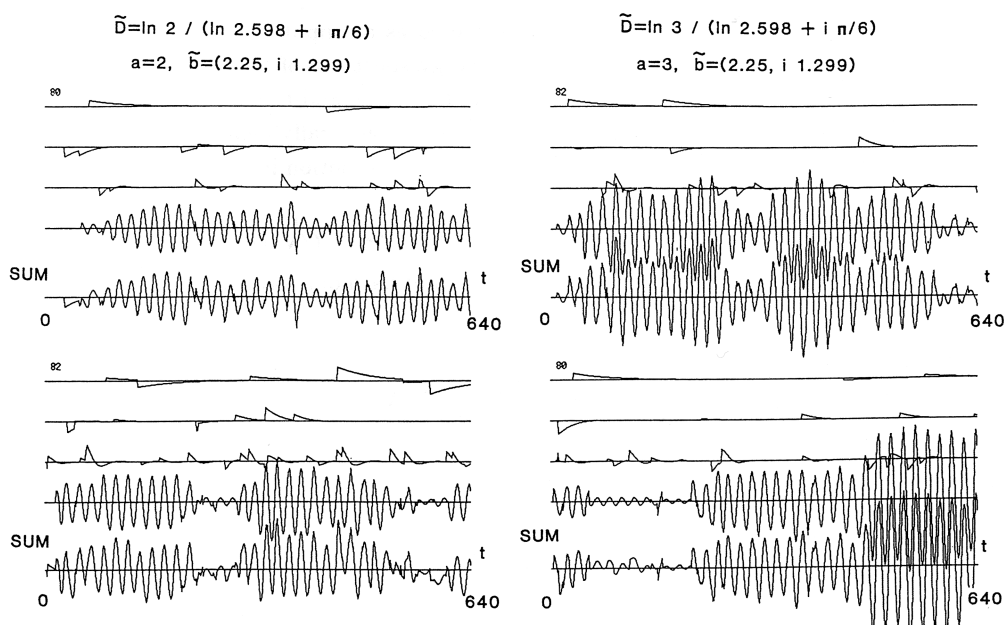


図 4：複素スケール変換によるランジュバン方程式であらわした不安定化する複素ブラウン運動．スケーリングパラメータと複素フラクタル次元を示した．他は図 3 に同じ．

6. 不安定化するブラウン運動と狭心症

素人の自分が専門外の議論をさらに展開することをお許しいただくことにしよう．誤った理解をしているといけないので，敢えてここでは引用文献をあげることはしない．フラクタルやランダム振動を勉強しているとき，狭心症を病む心臓の心拍は特定の周波数に鋭いピークを持ち，

その心拍のスペクトル幅は普通の心拍のそれに比べて狭い（心拍数の変動の分散が小さい）ものであり、さらに、平常時の心拍変動でも同じ傾向を示すということを学んだ。自分が見た父の心電図波形はアナログ記録紙の右端から左端に振り切れ、上に述べた一般的な狭心症の心拍変動の理解とも一致していた。

図4に示した不安定化するブラウン運動は、特定の周波数で振動が長時間継続し、その振幅は他のクラスターの振動より特に大きく、したがって、全体の振動は大きな振幅の不安定化する振動に支配される。当然、そのスペクトル幅は狭くなる。このように、特定の周波数の振動に収斂するような変動を”引き込み”現象と言って、力学系のモデルで詳しく考えられている（Jackson, 1994）。不安定化するブラウン運動が狭心症の心拍変動を説明する一つのモデルになるのではないかと考えていた。

下の表を見てほしい。これは自分の心拍数の時間変化を心電図計の表示から読み取ったものである。自らの記憶にたよるもので正確ではないので、実際の記録を担当医に求めたが、心電図計は毎日使うもので、計測記録は一日しか保存しないとのことであった。朝から心拍数がどんどん変化して、実際感じていた気分も14時頃が一番悪かった。日曜日の担当医が昼から不在であったため、看護師が途中で鎮痛剤の注射で応急治療するというが、それは待ってもらった。時間経過とともに平均心拍数がスケール変換されていると考え、これが不安定化までしたらたいへんなことになると心配したがどうなるものでもなかった。心拍数がスケール変換されているものとしても、最大最小の心拍数のゆらぎ幅の絶対値はあまり変わらなかった。しかし、もう少し考えると、平均心拍数に対するゆらぎ幅の比は減少していることがわかる。これは心拍変動のスペクトル幅が相対的に狭くなっていることを示していた。

自分の病症がどうあれ、この状況が先に述べた狭心症の発作と違う点は、脈拍が弱く、心拍記録が振り切れるほど大きな振幅ではなかったことである。つまり、不安定化するブラウン運動は特定の周波数の振動が特に大振幅であるため、振動のスペクトル幅が見かけ上狭い振動になったと考えたのであるが、表1の心拍変化は、心拍振動のゆらぎ自体が幅の狭いものに変化するものを示していた。これは心拍振動のゆらぎが複素ブラウン運動でモデル化できるとしても、図4で

表1：2013年10月15日の心拍変動

時刻	最少心拍数	平均心拍数	最大心拍数	内容
10:30 頃	65 (回/分)	90	115	心拍計がアラーム
11:00 過	85	110	135	心拍計がアラーム
12:00 頃	90	120	150	3度目のアラーム 心拍計の誤作動と誤認する
13:00 頃	100	130	160	心拍の異常に自ら気付く
14:00	100	130	160	気分悪い
14:30	90	110	130	
15:00	85	100	115	気分回復

考えた不安定化する振動ではなく、振動のゆらぎ幅が順次狭くなるようなスケール変換である。あるいは、元々ゆらぎのスペクトル幅が小さな心拍振動が、数少ないスケール変換で、心拍ノイズの少ない振動に不安定化したものかもしれない。この点昔の論文に考え落としがあったので、ここにあって一節を記した。

7. まとめと議論

ランダムシステムの複雑な振る舞いをランダムノイズが励起するシステム構成要素の応答で考えた。システムの複雑さをスケール変換で定式化し、基本となる微分方程式系（スケール変換されたランジュバン方程式系）に取り込んだ。ランジュバン方程式に実定数のスケール変換を考えれば、古典的なブラウン運動を一般的に拡張した非整数次のブラウン運動に対応する表現が得られた。スケール変換のパラメータで決まるフラクタル次元 D が定義され、非整数次のブラウン運動を特徴づけるハースト定数 H と $D = 3 - 2H$ の関係が導かれた。この関係により、数学的に導入された一般化ブラウン運動の意味とそのハースト定数 H の物理的な意味がより一般的に理解された。

このような自己相似なランダムノイズに応答するシステムは微分方程式系の階層構造の性質を描き出している。スケール変換されたランジュバン方程式の解は、ガウス型ランダムノイズから出発しているものであるから、直交関数系をなしている。この直交関係により系全体の自己相関関数やパワースペクトルの表現が簡単に求められる。さらに、複雑なランダムシステムが独立な微分方程式の重ね合わせで表現されているから、システムのエネルギーが厳密に評価され、ここで考えた一般化ブラウン運動には、3つの安定なモードが存在することが示された (Koyama and Hara, 1992)。これらの安定なモードは、ランダムシステムに普遍的に知られている $1/f$ スペクトルなど、そのそれぞれがいろいろな分野で特徴的に見出されているランダム現象の普遍的・特徴的な振る舞いを説明している。

また、複素定数でスケール変換を考えると複素ブラウン運動の一般的表現が得られる。この複素ブラウン運動の特徴は、観測可能な運動と観測されないバックグラウンドの影響がカップリングしていることである。その結果、実のブラウン運動には見られない性質として、運動が振動成分を持つこと、スケール変換によりブラウン運動が不安定化することなどが明らかにされている。

ここで述べたブラウン運動の一般化は、そのパワースペクトルが周波数のべき乗となるようなランダムシステムに応用されるばかりではなく、非整数次のブラウン運動でも複素ブラウン運動でも、それが直交関数系をなしていることから、微細構造をもつランダムな確率過程の振る舞いを一般的に表現できると考える。これが、従来のブラウン運動の考えよりより広い範囲の物理現象に応用できるだろうと考える理由である。ブラウン運動のリミットサイクルの振る舞いや、不安定化の振る舞いはこれからますます具体的な研究が進むだろう。

さらに、微分方程式をスケール変換する考え方は基本的なものであり、実数・複素定数のスケール

ル変換はいろいろな方程式系に適用できる. Hara et al. (1997) は, 基本となる方程式の解だけからは知ることのできないより複雑な力学系の振る舞いが明らかに特徴づけられることを示している.

謝辞: ブラウン運動に関する一連の論文は北大に赴任する前, 東北大学原啓明先生と共同研究したものです. 先生は先走りする自分といつも冷静に真摯に議論をつづけ, 正しい方向に理論を導きました. 今日少しでも新しい研究ができたとしたら, 原先生に負うところが多く, ここに深く感謝するものです. この解説を書くきっかけは, § 6 に記述したことが始まりでした. だれも顧みることもなく埋もれてしまっていた力学方程式をスケール変換するという荒削りな考えを今一度考え直す機会を可能にさせていただいた札幌恵佑会病院の医師, 看護師の皆様に深く感謝いたします.

文 献

- Hara, H., S.S. Lee, J. Koyama and S. Fujita, 1997. Scaled Langevin equation for complex systems: New linear scaling relation for weight factor, *Chaos, Soliton & Fractals*, **8**, 1685-1691.
- Hida, T., 1980. *Brownian motion*, Springer, New York.
- Jackson, E.A., 1994. 非線形力学の展望 I カオスとゆらぎ, 田中茂・丹羽敏雄・水谷正大・森真訳, 共立出版, 東京.
- 河田龍夫, 1975. Fouier 解析, 産業図書, 東京.
- Koyama, J., 1997. *The Complex Faulting Process of Earthquakes*, Kluwer Academic Pub., Amsterdam.
- Koyama, J. and H. Hara, 1992. Scaled Langevin equation to describe the $1/f^\alpha$ spectrum, *Phys. Rev. A*, **46**, 1844-1849.
- Koyama, J. and H. Hara, 1993. Fractional Brownian motions described by scaled Langevin equation, *Chaos, Soliton & Fractals*, **3**, 467-480.
- Levy, P., 1953. Random functions: General theory with special reference to Laplace random functions, *University of California Publications in Statistics*, **1**, 331-390.
- Maccone, C., 1981. Eigenfunction expansion for fractional Brownian motions, *IL Nuovo Cimento*, **61B**, 229-248.
- Mandelbrot, B.B., 1983. *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco.
- Mandelbrot, B.B. and J.W. Van Ness, 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.*, **10**, 422-437.
- Montroll, B.B. and M.F. Shlesinger, 1984. On the wonderful world of random walks, *Nonequilibrium Phenomena II from Stochastics to Hydrodynamics*, eds. J.L. Lebowitz and E.W. Montroll, Elsevier, Amsterdam, 1-121.
- 高安秀樹, 1986. フラクタル, 朝倉書店, 東京.
- Turcotte, D.L., 1992. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

