



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Geometric study of Lauricella's hypergeometric function ${}_4F_3$ [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	後藤, 良彰
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第11364号
Issue Date	2014-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55302
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	doctoral thesis
File Information	Yoshiaki_Goto_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏名 後 藤 良 彰

学 位 論 文 題 名

Geometric study of Lauricella's hypergeometric function F_C

(Lauricella の超幾何関数 F_C に関する幾何学的研究)

超幾何関数は、その積分表示に着目することで、ねじれ (コ) ホモロジー群が定義され幾何学的に研究することができる。Gauss の超幾何関数の多変数化として、Lauricella の超幾何関数 F_A, F_B, F_C, F_D という 4 種類が古くから考えられている。このうち、 F_A, F_B, F_D の 3 種類については幾何学的な研究がすでになされていたが、 F_C に関しては、2 変数の場合 (Appell の F_4 と呼ばれる) を除いてはこの視点からの研究結果がほとんどなかった。

ねじれ (コ) ホモロジー群を用いた多変数超幾何関数の研究は主に 1 次式のべき関数から定まる多価関数の積分表示に対して行われてきた。この多価関数に対応するねじれ (コ) ホモロジー群は超平面配置の補集合の上で定義される。ところが、 m 変数の Lauricella's F_C は m 次式のべき関数を含む多価関数の積分表示を持つため、既存の結果を直接適用することは難しい。例えば、一般の位置にある超平面配置に対応する積分表示に関するねじれホモロジー群であれば、有界な部屋の定めるねじれサイクルがその基底を与えることが知られている。一方で、 m 変数の Lauricella's F_C の場合、ホモロジー群の次元が 2^m であるのに対して、有界な部屋がほとんどないため、ねじれサイクルによる系統的な基底は存在していなかった。

まず初めに研究したことは、ねじれホモロジー群の 2^m 個の基底を構成することである。正則化と呼ばれる操作を拡張した手法と変数変換を合わせることで、 2^m 個のねじれサイクルを組合せ論的な構造が見える形で明示的に構成することができた。このねじれサイクルは、 F_C が満たす微分方程式系 E_C の、 F_C 級数で表示される局所解空間の基底 (2^m 個あり、級数解と呼ばれる) と対応していることも判明した。

また、構成方法に着目することで、これらのサイクルの交点数を計算した。この結果と、ねじれコホモロジー群の交点数の計算により、ねじれ周期関係式と呼ばれる、パラメータを変化させた F_C の間の 2 次の関係式を導出することにも成功した。

次に、微分方程式系 E_C のモノドロミー表現に関して研究した。2 変数の場合は、金子、高野により独立に表現が決定されたが、変数の個数が一般となった場合は未解決であった。モノドロミー表現を調べる際には、微分方程式系の解空間とねじれホモロジー群 (積分領域) を同一視した上で、表現空間をねじれホモロジー群とすることを基本とする。まず、特異点集合の補集合の基本群の構造を解明した。基本群が $m + 1$ 個のループで生成される

ことを示し, さらに, それらの生成元が満たす関係式をいくつか与えた. この結果により, モノドロミー表現を調べることは, これらのループから定まる $m + 1$ 個の線形写像を調べることに帰着された. そのうちの m 個は座標超平面の周りを回るループに対応しているため, 上で構成した級数解に対応するねじれサイクルを用いることで, 容易に決定できる. しかし, これらのねじれサイクルのループに沿った変化の追跡によって, 残りの 1 個 ($\mathcal{M}_0$ とする) を計算することは困難である. そこで, $\mathcal{M}_0$ の固有値と固有空間の構造に注目した. $\mathcal{M}_0$ の固有値は 2 個であることと, これらの固有空間が交点形式に関して直交するという性質を示した. この性質を用いて, 線形写像 $\mathcal{M}_0$ の交点形式による表示を与え, E_C のモノドロミー表現を完全に決定した. この証明にも, 上で構成した級数解に対応するねじれサイクルが重要な役割を果たす.

本論文で導入したねじれサイクルの構成法は, Lauricella's F_A や一般超幾何関数 ${}_{m+1}F_m$ の研究においても有効である.