



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	ÜBER DIE BIVEKTORÜBERTRAGUNG
Author(s)	Hokari, Shisanji
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 2(1-2), 103-117
Issue Date	1934
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/55900
Type	departmental bulletin paper
File Information	JFSHIU_02_N1-2_103-117.pdf



ÜBER DIE BIVEKTORÜBERTRAGUNG

Von

Shisanji HOKARI

Führen wir in (einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit) X_n durch die n Gleichungen

$$(1) \quad \bar{x}^\nu = \bar{x}^\nu(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

n neue Variablen ein, so ist die Transformation (1) in jedem Punkte, wo die Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\lambda} \right|$ nicht verschwindet, umkehrbar.

Im allgemeinen erklären wir als *Parallelübertragung* des kontravarianten Vektors v^ν im Punkte x^ν von x^ν nach dem unendlich benachbarten Punkte $x^\nu + dx^\nu$ den Übergang vom Vektor v^ν im Punkte x^ν zum Vektor $v^\nu + dv^\nu$ im Punkte $x^\nu + dx^\nu$, wenn dv^ν die Bestimmungszahlen hat:

$$dv^\nu = -\Gamma_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda dx^\mu,$$

wobei $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ die *Parameter* der Parallelübertragung und vom Orte x^ν in X_n abhängig sind. Der Begriff „Parallelübertragung“ in der Mannigfaltigkeit X_n hat sich in letzter Zeit bei vielen Gelehrten verallgemeinert⁽¹⁾. Insbesondere hielt Professor A. KAWAGUCHI am 3. April 1933 in der Jahresversammlung der „Physico-Mathematical Society of Japan“ an der kaiserlichen Universität zu Sendai einen Vortrag, der die gegenwärtigen Parallelübertragungstheorien in sich begreift.

(1) Siehe z.B. A. KAWAGUCHI, Theory of Connections in the Generalized Finsler Manifold, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 7, 1931, S. 211-214; Theory of Connections in the Generalized Finsler Manifold II, Proceedings of the Imperial Academy, Bd. 8, 1932, S. 340-343; Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 56, 1932, S. 245-276.

Wir nennen jetzt den Inbegriff jedes Systems von $\binom{n}{2}$ Funktionen $v^{\lambda\mu} = -v^{\mu\lambda}$, die sich bei den Transformationen (1) in folgender Weise transformieren:

$$\bar{v}^{\lambda\mu} = v^{\nu\omega} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\omega},$$

einen kontravarianten Bivektor. Z.B. $u^{\lambda\mu} = v^\lambda w^\mu - v^\mu w^\lambda$ ist ein Bivektor, wenn v^λ und w^λ zwei lineare unabhängige kontravariante Vektoren sind. Wir betrachten nun ein kontravariantes bzw. kovariantes Bivektorfeld $v^{\lambda\mu}$ bzw. $w_{\lambda\mu}$ in X_n , d.h. einen kontravarianten bzw. kovarianten Bivektor, dessen Bestimmungszahlen als Funktionen des Ortes gegeben sind. In der folgenden Arbeit möchten wir eine Parallelübertragungstheorie dieses Bivektorfeldes⁽²⁾ begründen.

Bemerkung. Die in dieser Arbeit behandelte Parallelübertragung lässt sich ohne Schwierigkeit zu der des p -Vektorfeldes erweitern. Auf ähnliche Weise können wir in X_n eine Parallelübertragung eines symmetrischen Tensorfeldes p -ter Stufe konstruieren.

1. *Die lineare Übertragung des Bivektorfeldes.* Wir definieren, ebenso wie in dem Fall der gewöhnlichen Vektorübertragung, als Parallelübertragung des kontravarianten bzw. kovarianten Bivektors $v^{\lambda\mu}$ bzw. $w_{\lambda\mu}$ im Punkte x^ν von x^ν nach dem unendlich benachbarten Punkte $x^\nu + dx^\nu$ den Übergang vom Bivektor $v^{\lambda\mu}$ bzw. $w_{\lambda\mu}$ im Punkte x^ν zum Bivektor $v^{\lambda\mu} + dv^{\lambda\mu}$ bzw. $w_{\lambda\mu} + dw_{\lambda\mu}$ im Punkte $x^\nu + dx^\nu$, wenn $dv^{\lambda\mu}$ bzw. $dw_{\lambda\mu}$ folgende Bestimmungszahlen hat:

$$(2) \quad dv^{\lambda\mu} = -\Gamma_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu} v^{\alpha\beta} dx^\nu$$

bzw.

$$(3) \quad dw_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} dx^\nu,$$

wobei $\Gamma_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu}$ bzw. $\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta}$ die Parameter der Parallelübertragung und vom Orte x^ν abhängig sind. Das zugehörige Differential wird dann folgendermassen ausgedrückt:

(2) Ein kontravarianter bzw. kovarianter Vektor allein ist eine bedeutungslose Quantität in unserer Theorie. Wir nennen also sie *idealen Vektor* und behandeln sie wie gewöhnlich.

$$(4) \quad \delta v^{\lambda\mu} = \nabla_\nu v^{\lambda\mu} dx^\nu = dv^{\lambda\mu} + \Gamma_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu} v^{\alpha\beta} dx^\nu$$

bzw.

$$(5) \quad \delta w_{\lambda\mu} = \nabla_\nu w_{\lambda\mu} dx^\nu = dw_{\lambda\mu} - \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} dx^\nu,$$

wobei

$$(6) \quad \nabla_\nu v^{\lambda\mu} = \frac{\partial v^{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu} v^{\alpha\beta}$$

bzw.

$$(7) \quad \nabla_\nu w_{\lambda\mu} = \frac{\partial w_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}.$$

$\nabla_\nu v^{\lambda\mu}$ bzw. $\nabla_\nu w_{\lambda\mu}$ nennen wir die *ersten kovarianten Ableitungen* des Bivektors $v^{\lambda\mu}$ bzw. $w_{\lambda\mu}$, und $\nabla_\nu v^{\lambda\mu}$ bzw. $\nabla_\nu w_{\lambda\mu}$ sind die Bestimmungszahlen eines Affinors 3-ter Stufe.

Von den Funktionen $\Gamma_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu}$ bzw. $\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta}$ setzen wir voraus, dass sie für alle Wertsysteme von x^ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) analytisch regulär sind, und den folgenden Bedingungen genügen:

$$(8) \quad \Gamma_{\alpha\beta\nu}^{(\lambda\mu)} = 0, \quad \Gamma_{(\lambda\mu)\nu}^{\alpha\beta} = 0$$

und

$$(9) \quad \Gamma_{(\alpha\beta)\nu}^{\lambda\mu} = 0, \quad \Gamma'^{(\alpha\beta)}_{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

Beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem verändert sich $\Gamma_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu}$ bzw. $\Gamma'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau}$ und wird folgendermassen transformiert:

$$(10) \quad \Gamma_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^{[\lambda}}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^{\mu]} }{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^{[\lambda}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^{\mu]} }{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \bar{\Gamma}_{ijk}^{mn} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^n}$$

bzw.

$$(11) \quad \Gamma'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^{[\lambda}}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^{\mu]} }{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^{[\lambda}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^{\mu]} }{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \bar{\Gamma}'^{mn}_{ijk} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^n}.$$

Die $\Gamma_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu}$ bzw. $\Gamma'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau}$ sind nicht die Bestimmungszahlen des Affinors 5-ter Stufe, doch die Differenzen

$$(12) \quad \Lambda_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu} = \Gamma_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu} - \Gamma'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau}$$

(3) Es sei bemerkt, dass die Bedingungen (8) aus $v^{(\lambda\mu)} = 0$ bzw. $w_{(\lambda\mu)} = 0$ notwendig sind, aber (9) nicht. Diese geben uns viele interessante Resultate.

transformieren sich bei Änderung des Koordinatensystems wie die Bestimmungszahlen einer Grösse 5-ter Stufe; sie genügen nach (8) und (9) den folgenden Gleichungen:

$$A^{(\lambda\mu)}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{und} \quad A^{\lambda\mu}_{(\alpha\beta)\gamma} = 0.$$

Wenn alle $A^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden, so ist

$$\Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Bilden wir aus (10) bzw. (11) folgende Grösse:

$$(13) \quad S^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}(\Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma^{\lambda\mu}_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma^{\lambda\mu}_{\gamma\alpha\beta})$$

bzw.

$$(14) \quad S'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}(\Gamma'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma'^{\lambda\mu}_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma'^{\lambda\mu}_{\gamma\alpha\beta}),$$

so sind $S^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ bzw. $S'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ die Bestimmungszahlen 5-ter Stufe und sie genügen nach (8) bzw. (9) folgenden Relationen:

$$S^{(\lambda\mu)}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{bzw.} \quad S'^{(\lambda\mu)}_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

2. *Der Fundamentaltensor.* Wir führen in jedem Punkte x^ν einen Fundamentaltensor $g^{\lambda\mu}$ ein, in dem die Funktionaldeterminante $|g^{\lambda\mu}|$ nicht verschwindet, und der Tensor $g^{\lambda\mu}$ stetig und hinreichend oft differenzierbar ist. Da der Rang n ist, ergibt sich ein einziger kovarianter Tensor $g_{\lambda\mu}$, so dass:

$$g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\nu.$$

Wir definieren die Parallelübertragung des kontravarianten bzw. kovarianten Fundamentaltensors $g^{\lambda\mu}$ bzw. $g_{\lambda\mu}$ in folgender Weise:

$$(15) \quad dg^{\lambda\mu} = -\varphi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu} g^{\alpha\beta} dx^\nu$$

bzw.

$$(16) \quad dg_{\lambda\mu} = \varphi'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu} g_{\alpha\beta} dx^\nu,$$

wobei $\varphi_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu}$ bzw. $\varphi_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta}$ die Parameter der Parallelübertragung von $g^{\lambda\mu}$ bzw. $g_{\lambda\mu}$ und vom Orte x^ν abhängig sind. Wir nennen $\varphi_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu}$ und $\varphi_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta}$ die *unterstützenden Parameter* und dagegen $\Gamma_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu}$ und $\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta}$ die *Grundparameter*. Das zugehörige Differential wird demnach durch

$$(17) \quad \delta g^{\lambda\mu} = dg^{\lambda\mu} + \varphi_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta} dx^\nu$$

bzw.

$$(18) \quad \delta g_{\lambda\mu} = dg_{\lambda\mu} - \varphi_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} dx^\nu$$

ausgedrückt. Somit sind die zugehörige kovariante Ableitungen von $g^{\lambda\mu}$ bzw. $g_{\lambda\mu}$ durch

$$(19) \quad \nabla_\nu g^{\lambda\mu} = \frac{\partial g^{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \varphi_{\alpha\beta\nu}^{\lambda\mu} g^{\alpha\beta}$$

bzw.

$$(20) \quad \nabla_\nu g_{\lambda\mu} = \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \varphi_{\lambda\mu\nu}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$$

gegeben.

Wir setzen voraus:

$$(21) \quad \begin{cases} \varphi_{\alpha\beta\nu}^{[\lambda\mu]} = 0, & \varphi_{[\alpha\beta]\nu}^{\lambda\mu} = 0, \\ \varphi_{[\lambda\mu]\nu}^{\alpha\beta} = 0, & \varphi_{\lambda\mu\nu}^{[\alpha\beta]} = 0, \end{cases}$$

und dass die Funktionen $\varphi_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu}$ und $\varphi_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu}$ bei der Transformation (1) sich folgendermassen verändern:

$$(22) \quad \varphi_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^{(\lambda}}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^{\mu)}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^{(\lambda}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^{\mu)}}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \bar{\varphi}_{ijk}^{mn} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^n}$$

und

$$(23) \quad \varphi_{\alpha\beta\tau}^{\lambda\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^{(\lambda}}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^{\mu)}}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^{(\lambda}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^{\mu)}}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = \bar{\varphi}_{ijk}^{\prime mn} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^n}.$$

Aus (22) und (23) folgt, dass die Differenzen

$$(24) \quad \Phi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} - \varphi'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma}$$

sich bei Änderung des Koordinatensystems wie die Bestimmungszahlen einer Grösse 5-ter Stufe transformieren und nach (21) den folgenden Gleichungen genügen :

$$\Phi^{[\lambda\mu]}_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{und} \quad \Phi^{\lambda\mu}_{[\alpha\beta]\gamma} = 0.$$

Der Unterschied zwischen kontravarianten, kovarianten und gemischten Grössen verschwindet durch Einführung des Fundamental-tensors, es bleibt nur der Unterschied zwischen kontravarianten, kovarianten und gemischten Bestimmungszahlen, die durch Überschiebung mit $g^{\lambda\mu}$ und $g_{\lambda\mu}$ auseinander hervorgehen, z.B. $v^\lambda_{\cdot\mu} = v^{\lambda\nu} g_{\nu\mu} = v_{\nu\mu} g^{\nu\lambda}$.

3. *Die Übertragung der gemischten und der allgemeinen Grössen.* Wir betrachten zunächst die gemischte Grösse $v^\lambda_{\cdot\mu}$ ⁽⁴⁾. Für diese Grösse können wir im allgemeinen das kovariante Differential ganz beliebig definieren, im Ausdruck,

$$(25) \quad \delta v^\lambda_{\cdot\mu} = dv^\lambda_{\cdot\mu} + \Gamma''^{\lambda\beta}_{\alpha\mu\nu} v^\alpha_{\cdot\beta} dx^\nu,$$

aber wir betrachten hier einfachheitshalber zwei spezielle Fälle :

$$(26) \quad \Gamma''^{\lambda\beta}_{\alpha\mu\nu} = \Gamma^{\lambda\sigma}_{\alpha\rho\nu} g_{\sigma\mu} g^{\rho\beta} - \varphi'^{\sigma\rho}_{\omega\mu\nu} g_{\sigma\rho} g^{\beta\omega} \delta^\lambda_\alpha$$

und

$$(27) \quad \Gamma''^{\lambda\beta}_{\alpha\mu\nu} = -\Gamma'^{\sigma\beta}_{\omega\mu\nu} g^{\omega\lambda} g_{\sigma\alpha} + \varphi^{\omega\lambda}_{\sigma\rho\nu} g^{\sigma\rho} g_{\omega\alpha} \delta^\beta_\mu.$$

Als die Differentialkoeffizienten von $v^\lambda_{\cdot\mu}$ folgen aus (26) bzw. (27)

$$(28) \quad \overset{*}{D}_\nu v^\lambda_{\cdot\mu} = \frac{\partial v^\lambda_{\cdot\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^{\lambda\alpha}_{\sigma\rho\nu} v^{\sigma\rho} g_{\alpha\mu} - \varphi'^{\sigma\rho}_{\alpha\mu\nu} v^{\lambda\alpha} g_{\sigma\rho}$$

bzw.

(4) Wir setzen voraus, dass $v^\lambda_{\cdot\mu} = -v_{\mu}^{\lambda}$

$$(29) \quad \nabla_{*v} v^\lambda{}_\mu = \frac{\partial v^\lambda{}_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma'^{\sigma\rho}_{\alpha\mu\nu} v_{\sigma\rho} g^{\alpha\lambda} + \varphi^{\alpha\lambda}_{\sigma\rho\nu} v_{\alpha\mu} g^{\sigma\rho}. \quad (5)$$

Es ist bemerkenswert, dass im allgemeinen $\nabla_{*v} v^\lambda{}_\mu$ und $\nabla_v v^\lambda{}_\mu$ ungleich sind. Wenn als spezieller Fall $\Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu}$, $\Gamma'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu}$, $\varphi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu}$ und $\varphi'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu}$ den folgenden Gleichungen genügen:

$$(30) \quad \begin{aligned} \Gamma^{\lambda\sigma}_{\alpha\rho\nu} g_{\sigma\mu} g^{\rho\beta} + \Gamma'^{\sigma\beta}_{\rho\mu\nu} g^{\rho\lambda} g_{\sigma\alpha} \\ = \varphi^{\omega\lambda}_{\sigma\rho\nu} g^{\sigma\rho} g_{\omega\alpha} \delta^\beta_\mu + \varphi'^{\sigma\rho}_{\omega\mu\nu} g_{\sigma\rho} g^{\beta\omega} \delta^\lambda_\alpha, \end{aligned}$$

so folgt

$$(31) \quad \nabla_{*v} v^\lambda{}_\mu = \nabla_v v^\lambda{}_\mu.$$

Wenn $\Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu}$, $\Gamma'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu}$, $\varphi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu}$ und $\varphi'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu}$ den Gleichungen (30) genügen, so nennen wir $\Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu}$ und $\Gamma'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu}$ die *beschränkten Parameter* und $\varphi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\nu}$ und $\varphi'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu}$ die *beschränkten unterstützenden Parameter*.

Wenn alle $\Lambda^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau}$ verschwinden, erhalten wir aus (12) und (30)

$$(32) \quad \Gamma^{\lambda\sigma}_{\alpha\rho\nu} g_{\sigma\mu} g^{\rho\beta} + \Gamma'^{\sigma\beta}_{\rho\mu\nu} g^{\rho\lambda} g_{\sigma\alpha} = \varphi^{\omega\lambda}_{\sigma\rho\nu} g^{\sigma\rho} g_{\omega\alpha} \delta^\beta_\mu + \varphi'^{\sigma\rho}_{\omega\mu\nu} g_{\sigma\rho} g^{\beta\omega} \delta^\lambda_\alpha,$$

wenn ferner $\Phi^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau} = 0$ gesetzt wird, so folgt aus (24)

$$(33) \quad \Gamma^{\lambda\sigma}_{\alpha\rho\nu} g_{\sigma\mu} g^{\rho\beta} + \Gamma'^{\sigma\beta}_{\rho\mu\nu} g^{\rho\lambda} g_{\sigma\alpha} = \varphi^{\omega\lambda}_{\sigma\rho\nu} g^{\sigma\rho} g_{\omega\alpha} \delta^\beta_\mu + \varphi'^{\sigma\rho}_{\omega\mu\nu} g_{\sigma\rho} g^{\beta\omega} \delta^\lambda_\alpha.$$

Eine Überschiebung von (33) nach $\beta\mu$ gibt uns die folgenden Gleichungen:

$$(34) \quad \Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\mu\nu} + \Gamma'^{\sigma\mu}_{\rho\mu\nu} g^{\rho\lambda} g_{\sigma\alpha} = n\varphi^{\omega\lambda}_{\sigma\rho\nu} g^{\sigma\rho} g_{\omega\alpha} + \varphi'^{\sigma\rho}_{\omega\mu\nu} g_{\sigma\rho} g^{\mu\omega} \delta^\lambda_\alpha.$$

Überschieben wir ferner in (34) nach $\alpha\lambda$, dann erhalten wir

$$(35) \quad \Gamma^{\lambda\mu}_{\lambda\mu\nu} = n\varphi^{\alpha\beta}_{\sigma\rho\nu} g_{\alpha\beta} g^{\sigma\rho}.$$

Aus (10), (11), (22) und (23) folgt ebenso, dass $\nabla_{*v} v^\lambda{}_\mu$ und $\nabla_v v^\lambda{}_\mu$ die Bestimmungszahlen einer Grösse 3-ter Stufe sind.

(5) $\begin{aligned} \nabla_v v^\lambda{}_\mu &= \nabla_v (v^{\lambda\tau} g_{\tau\mu}) = g_{\tau\mu} \nabla_v v^{\lambda\tau} + v^{\lambda\tau} \nabla_v g_{\tau\mu}, \\ \nabla_{*v} v^\lambda{}_\mu &= \nabla_v (v_{\tau\mu} g^{\tau\lambda}) = g^{\tau\lambda} \nabla_v v_{\tau\mu} + v_{\tau\mu} \nabla_v g^{\tau\lambda}. \end{aligned}$

Im allgemeinen können wir die Übertragung der allgemeinen Grössen folgendermassen definieren :

$$\begin{aligned}
 \nabla_\nu v^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]} &= \frac{\partial v^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{m-1} \sum_{k < l} \Gamma_{\alpha \beta \nu}^{\lambda_k \lambda_l} v^{[\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \alpha \lambda_{k+1} \dots \lambda_{l-1} \beta \lambda_{l+1} \dots \lambda_m]}, \\
 \nabla_\nu w_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m]} &= \frac{\partial w_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m]}}{\partial x^\nu} \\
 &\quad - \frac{1}{m-1} \sum_{k < l} \Gamma'^{\alpha \beta}_{\mu_k \mu_l \nu} w_{[\mu_1 \dots \mu_{k-1} \alpha \mu_{k+1} \dots \mu_{l-1} \beta \mu_{l+1} \dots \mu_m]}, \\
 \nabla_\nu^* v^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p}_{\mu_{p+1} \mu_{p+2} \dots \mu_m} &= \nabla_\nu \left(v^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \lambda_{p+1} \dots \lambda_m]} g_{\lambda_{p+1} \mu_{p+1}} \dots g_{\lambda_m \mu_m} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(v^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]} g_{\lambda_{p+1} \mu_{p+1}} g_{\lambda_{p+2} \mu_{p+2}} \dots g_{\lambda_m \mu_m} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{m-1} \sum_{k < l} \Gamma_{\alpha \beta \nu}^{\lambda_k \lambda_l} v^{[\lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \alpha \lambda_{k+1} \dots \lambda_{l-1} \beta \lambda_{l+1} \dots \lambda_m]} g_{\lambda_{p+1} \mu_{p+1}} \dots g_{\lambda_m \mu_m} \\
 &\quad - v^{[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m]} \sum_{i=p+1}^m \varphi'^{\alpha \beta}_{\lambda_i \mu_i \nu} g_{\lambda_{p+1} \mu_{p+1}} \dots g_{\lambda_{i-1} \mu_{i-1}} g_{\alpha \beta} g_{\lambda_{i+1} \mu_{i+1}} \dots g_{\lambda_m \mu_m}, \\
 \nabla_\nu^* v^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p}_{\mu_{p+1} \mu_{p+2} \dots \mu_m} &= \nabla_\nu \left(v_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_m]} g^{\mu_{p+1} \lambda_{p+1}} \dots g^{\mu_m \lambda_m} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(v_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m]} g^{\mu_{p+1} \lambda_{p+1}} g^{\mu_{p+2} \lambda_{p+2}} \dots g^{\mu_m \lambda_m} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{m-1} \sum_{k < l} \Gamma'^{\alpha \beta}_{\mu_k \mu_l \nu} v_{[\mu_1 \dots \mu_{k-1} \alpha \mu_{k+1} \dots \mu_{l-1} \beta \mu_{l+1} \dots \mu_m]} g^{\mu_{p+1} \lambda_{p+1}} \dots g^{\mu_m \lambda_m} \\
 &\quad + v_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m]} \sum_{i=p+1}^m \varphi^{\mu_i \lambda_i}_{\alpha \beta \nu} g^{\mu_{p+1} \lambda_{p+1}} \dots g^{\mu_{i-1} \lambda_{i-1}} g^{\alpha \beta} g^{\mu_{i+1} \lambda_{i+1}} \dots g^{\mu_m \lambda_m}.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Die $\tilde{V}_\nu v^{(p)}_{(m-p)}$ und $\tilde{V}_\nu v^{(p)}_{(m-p)}$ sind die in (p) kontravarianten, in $(m-p)$ und ν kovarianten Bestimmungszahlen eines Affinors $(m+1)$ -ter Stufe, den wir die *erste kovariante Ableitung* des Affinors mit den Bestimmungszahlen $v^{(p)}_{(m-p)}$ nennen.

4. *Die Krümmungsgrößen.* Durch den Prozess der parallelen Herumführung eines willkürlichen Bivektors $v^{\lambda\mu}$ im Punkte x^ν um ein infinitesimales Parallelogramm gelangen wir zur Krümmungsgrösse unserer Übertragung. Wir erhalten aus (4)

$$(37) \quad \delta_1 \delta_2 v^{\lambda\mu} - \delta_2 \delta_1 v^{\lambda\mu} = v^{\alpha\beta} K^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau\delta} d_1 x^\tau d_2 x^\delta,$$

wobei

$$(38) \quad K^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\delta}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau}}{\partial x^\delta} + \Gamma^{\lambda\mu}_{\sigma\rho\tau} \Gamma^{\sigma\rho}_{\alpha\beta\delta} - \Gamma^{\lambda\mu}_{\sigma\rho\delta} \Gamma^{\sigma\rho}_{\alpha\beta\tau}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir aus (5)

$$(39) \quad \delta_1 \delta_2 w_{\lambda\mu} - \delta_2 \delta_1 w_{\lambda\mu} = -w_{\alpha\beta} K'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\tau\delta} d_1 x^\tau d_2 x^\delta,$$

wobei

$$(40) \quad K'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\tau\delta} = \frac{\partial \Gamma'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\delta}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial \Gamma'^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\tau}}{\partial x^\delta} + \Gamma'^{\alpha\beta}_{\sigma\rho\tau} \Gamma'^{\sigma\rho}_{\lambda\mu\delta} - \Gamma'^{\alpha\beta}_{\sigma\rho\delta} \Gamma'^{\sigma\rho}_{\lambda\mu\tau}.$$

Bei (8), (9), (38) und (40) sehen wir, dass die Krümmungsgrößen den folgenden Relationen genügen:

$$(41) \quad \begin{cases} K^{(\lambda\mu)}_{\alpha\beta\tau\delta} = 0, & K^{\lambda\mu}_{(\alpha\beta)\tau\delta} = 0, & K^{\lambda\mu}_{\alpha\beta(\tau\delta)} = 0, \\ K'^{(\lambda\mu)}_{\alpha\beta\tau\delta} = 0, & K'^{\lambda\mu}_{(\alpha\beta)\tau\delta} = 0, & K'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta(\tau\delta)} = 0. \end{cases}$$

Sind $K^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau\delta}$ und $K'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\tau\delta}$ Null, so nennen wir diese Übertragung *integrabel* zu sein.

Wenn wir insbesondere anstatt eines beliebigen Vektors $v^{\lambda\mu}$ die Fundamentalgrösse $g^{\lambda\mu}$ des Punktes x^ν um ein infinitesimales Parallelogramm mit sich selbst parallel herumführen, so erhalten wir eine andere Grösse, die wir die *unterstützende Krümmungsgrösse* der Übertragung nennen. Wir erhalten aus (17) bzw. (18)

$$(52) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\nu v_{\lambda\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \frac{\partial v_{[\lambda\mu]}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\omega} (S^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu} v_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\omega} \nabla_{[\nu} v_{\alpha\beta]} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\omega} \frac{\partial v_{[\lambda\alpha]}}{\partial x^\beta} + \Gamma^{\alpha\beta}_{\nu\lambda\omega} \frac{\partial v_{[\beta\mu]}}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\sigma\rho}_{\mu\nu\omega} S^{\alpha\beta}_{\lambda\sigma\rho} + \Gamma^{\sigma\rho}_{\nu\lambda\omega} S^{\alpha\beta}_{\rho\mu\sigma} \right) v_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$(53) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\nu v_{\lambda}^{\mu\tau} &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \frac{\partial v_{[\lambda\mu]} g^{\mu\tau}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\omega} (S^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\nu} v_{\alpha\beta} g^{\mu\tau}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\omega} (\varphi^{\mu\tau}_{\alpha\beta[\nu} v_{\lambda\mu]} g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\omega} \nabla_{[\nu} (v_{\alpha\pi]} g^{\pi\tau}) g_{\tau\beta} g^{\mu\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\omega} g^{\mu\tau} \left(g_{\tau\alpha} \frac{\partial v_{[\lambda\pi]} g^{\pi\tau}}{\partial x^\beta} - S^{\sigma\rho}_{\lambda\alpha\beta} v_{\sigma\rho} + \varphi^{\pi\tau}_{\sigma\rho[\beta} v_{\lambda\pi]} g^{\sigma\rho} g_{\tau\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\nu\lambda\omega} \left(\frac{\partial v_{[\beta\pi]} g^{\pi\tau}}{\partial x^\alpha} - S^{\sigma\rho}_{\beta\pi\alpha} v_{\sigma\rho} g^{\pi\tau} + \varphi^{\pi\tau}_{\sigma\rho[\alpha} v_{\beta\pi]} g^{\sigma\rho} \right) \\ &\quad + \varphi^{\mu\tau}_{\alpha\beta\omega} \nabla_{[\nu} (v_{\lambda\pi]} g^{\pi\tau}) g_{\tau\mu} g^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$(54) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\nu v^{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (v_{\lambda\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^\omega} (S^{\sigma\rho}_{\lambda\mu\nu} v_{\sigma\rho} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left\{ g^{\sigma\rho} (\varphi^{\lambda\alpha}_{\sigma\rho[\nu} v_{\lambda\mu]} g^{\mu\beta} + \varphi^{\mu\beta}_{\sigma\rho[\nu} v_{\lambda\mu]} g^{\lambda\alpha}) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\tau\delta}_{\lambda\mu\omega} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} g_{\tau\pi} g_{\delta\epsilon} \nabla_{[\nu} (v_{\sigma\rho]} g^{\sigma\pi} g^{\rho\epsilon}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\tau\delta}_{\mu\nu\omega} g^{\mu\beta} \left\{ g_{\tau\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^{[\delta}} (v_{\sigma\rho]} g^{\sigma\pi} g^{\rho\epsilon}) - S^{\kappa\pi}_{\sigma\tau\delta} v_{\kappa\pi} g^{\sigma\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \varphi^{\alpha\sigma}_{\kappa\pi[\delta} v_{\sigma\tau]} g^{\kappa\pi} + \varphi^{\epsilon\rho}_{\kappa\pi[\delta} v_{\sigma\rho]} g^{\kappa\pi} g^{\sigma\alpha} g_{\tau\epsilon} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\tau\delta}_{\nu\lambda\omega} g^{\lambda\alpha} \left\{ g_{\pi\delta} \frac{\partial}{\partial x^{[\tau}} (v_{\sigma\rho]} g^{\sigma\pi} g^{\rho\beta}) - S^{\kappa\epsilon}_{\delta\rho\tau} v_{\kappa\epsilon} g^{\rho\beta} \right. \\ &\quad \left. + \varphi^{\sigma\pi}_{\kappa\epsilon[\tau} v_{\sigma\rho]} g^{\kappa\epsilon} g^{\rho\beta} g_{\pi\delta} + \varphi^{\rho\beta}_{\kappa\epsilon[\tau} v_{\sigma\rho]} g^{\kappa\epsilon} \right\} \\ &\quad + g^{\tau\delta} \left\{ \varphi^{\lambda\alpha}_{\tau\delta\omega} g_{\pi\lambda} \nabla_{[\nu} (v_{\sigma\rho]} g^{\sigma\pi} g^{\rho\beta}) + \varphi^{\mu\beta}_{\tau\delta\omega} g_{\epsilon\mu} \nabla_{[\nu} (v_{\sigma\rho]} g^{\sigma\alpha} g^{\rho\epsilon}) \right\}. \end{aligned}$$

Bei Vertauschung der Zeiger in den zweiten Ableitungen erhalten wir die folgenden Formeln :

$$\begin{aligned}
 (55) \quad 2F_{[\omega}F_{\nu]}v_{\lambda\mu} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 v_{\mu\nu}}{\partial x^\omega\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 v_{\nu\lambda}}{\partial x^\omega\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 v_{\mu\omega}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v_{\omega\lambda}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right) \\
 &- 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\nu]\lambda\mu}v_{\alpha\beta}) - F^{\alpha\beta}_{\lambda\mu[\omega}F_{\nu]}v_{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta}_{\mu[\nu\omega]} \frac{\partial v_{[\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta]}} + F^{\alpha\beta}_{\lambda[\nu\omega]} \frac{\partial v_{[\beta\mu}}{\partial x^{\alpha]}} \\
 &+ (F^{\sigma\rho}_{\mu[\nu\omega]}S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\sigma\rho} - F^{\sigma\rho}_{\lambda[\nu\omega]}S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\rho\mu\sigma})v_{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (56) \quad 2F_{[\omega}F_{\nu]}v_{\lambda}^{\cdot\tau} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 v_{\cdot\tau}^{\cdot\nu}}{\partial x^\omega\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v_{\cdot\tau}^{\cdot\omega}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 v_{\nu\lambda}g^{\mu\tau}}{\partial x^\omega\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 v_{\omega\lambda}g^{\mu\tau}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right) \\
 &- 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\nu]\lambda\mu}v_{\alpha\beta}g^{\mu\tau}) + 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(\varphi^{\mu\tau}_{[\alpha\beta][\nu]}v_{\lambda\mu]}g^{\alpha\beta}) \\
 &- F^{\alpha\beta}_{\lambda\mu[\omega}F_{\nu]}(v_{\alpha\pi]}g^{\pi\tau})g_{\tau\beta}g^{\mu\tau} - F^{\alpha\beta}_{\mu[\nu\omega]}g^{\mu\tau}\left\{g_{\tau\alpha}\frac{\partial v_{[\lambda\pi}g^{\pi\tau}}{\partial x^{\beta]}} - S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\lambda\alpha\beta}v_{\sigma\rho}\right. \\
 &+ \left.\varphi^{\pi\tau}_{\sigma\rho[\beta}v_{\lambda\pi]}g^{\sigma\rho}g_{\tau\alpha}\right\} + F^{\alpha\beta}_{\lambda[\nu\omega]}\left\{\frac{\partial v_{[\beta\pi}g^{\pi\tau}}{\partial x^{\alpha]}} - S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\beta\pi\alpha}v_{\sigma\rho}g^{\pi\tau} + \varphi^{\pi\tau}_{\sigma\rho[\alpha}v_{\beta\pi]}g^{\sigma\rho}\right\} \\
 &+ 2\varphi^{\mu\tau}_{\alpha\beta[\omega}F_{\nu]}(v_{\lambda\pi]}g^{\pi\tau})g_{\tau\mu}g^{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (57) \quad 2F_{[\omega}F_{\nu]}v^{\alpha\beta} &= \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\beta\nu}g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\omega\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}}{\partial x^\omega\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\beta\omega}g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\alpha\omega}g^{\mu\beta}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right\} \\
 &- 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\nu]\lambda\mu}v_{\sigma\rho}g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}) + 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}\left\{g^{\sigma\rho}(\varphi^{\lambda\alpha}_{[\sigma\rho][\nu]}v_{\lambda\mu]}g^{\mu\beta}\right. \\
 &+ \left.\varphi^{\mu\beta}_{[\sigma\rho][\nu]}v_{\lambda\mu]}v^{\lambda\alpha})\right\} - g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}g_{\tau\pi}g_{\delta\epsilon}F^{\tau\delta}_{\lambda\mu[\omega}F_{\nu]}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\rho\epsilon}) \\
 &- F^{\tau\delta}_{\mu[\nu\omega]}g^{\mu\beta}g_{\epsilon\tau}F_{[\delta}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\epsilon\rho}) + F^{\tau\delta}_{\lambda[\nu\omega]}g^{\lambda\alpha}g_{\pi\delta}F_{[\tau}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\rho\beta}) \\
 &+ 2g^{\tau\delta}\left\{\varphi^{\lambda\alpha}_{\tau\delta[\omega}F_{\nu]}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\rho\beta})g_{\pi\lambda} + \varphi^{\mu\beta}_{\tau\delta[\omega}F_{\nu]}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\alpha}g^{\rho\epsilon})g_{\epsilon\mu}\right\}.
 \end{aligned}$$

5. *Die Integrabilitätsbedingungen.* Wenn wir die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (10) untersuchen, indem wir die (10) wiederholt benützen, so erhalten wir

$$(52) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\nu v_{\lambda\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \frac{\partial v_{[\lambda\mu]}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left(S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu\nu} v_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\omega} \nabla_\nu v_{\alpha\beta} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\omega} \frac{\partial v_{[\lambda\alpha]}}{\partial x^\beta} + \Gamma^{\alpha\beta}_{\nu\lambda\omega} \frac{\partial v_{[\beta\mu]}}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\Gamma^{\sigma\rho}_{\mu\nu\omega} S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\sigma\rho} + \Gamma^{\sigma\rho}_{\nu\lambda\omega} S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\rho\mu\sigma} \right) v_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$(53) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\nu v_{\lambda}^{\mu\tau} &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \frac{\partial v_{[\lambda\mu]} g^{\mu\tau}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left(S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu\nu} v_{\alpha\beta} g^{\mu\tau} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left(\varphi_{\alpha\beta[\nu}^{\mu\tau} v_{\lambda\mu]} g^{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\lambda\mu\omega} \nabla_\nu \left(v_{\alpha\pi} g^{\pi\tau} \right) g_{\tau\beta} g^{\mu\tau} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\omega} g^{\mu\tau} \left(g_{\tau\alpha} \frac{\partial v_{[\lambda\pi]} g^{\pi\tau}}{\partial x^\beta} - S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\lambda\alpha\beta} v_{\sigma\rho} + \varphi_{\sigma\rho[\beta}^{\pi\tau} v_{\lambda\pi]} g^{\sigma\rho} g_{\tau\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\alpha\beta}_{\nu\lambda\omega} \left(\frac{\partial v_{[\beta\pi]} g^{\pi\tau}}{\partial x^\alpha} - S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\beta\pi\alpha} v_{\sigma\rho} g^{\pi\tau} + \varphi_{\sigma\rho[\alpha}^{\pi\tau} v_{\beta\pi]} g^{\sigma\rho} \right) \\ &\quad + \varphi_{\alpha\beta\omega}^{\mu\tau} \nabla_\nu \left(v_{\lambda\pi} g^{\pi\tau} \right) g_{\tau\mu} g^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$(54) \quad \begin{aligned} \nabla_\omega \nabla_\nu v^{\alpha\beta} &= \frac{\partial}{\partial x^\omega} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (v_{\lambda\mu} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}) - \frac{\partial}{\partial x^\omega} (S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\lambda\mu\nu} v_{\sigma\rho} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\omega} \left\{ g^{\sigma\rho} (\varphi_{\sigma\rho[\nu}^{\lambda\alpha} v_{\lambda\mu]} g^{\mu\beta} + \varphi_{\sigma\rho[\nu}^{\mu\beta} v_{\lambda\mu]} g^{\lambda\alpha}) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\tau\delta}_{\lambda\mu\omega} g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} g_{\tau\pi} g_{\delta\varepsilon} \nabla_\nu (v_{\sigma\rho} g^{\sigma\pi} g^{\rho\varepsilon}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\tau\delta}_{\mu\nu\omega} g^{\mu\beta} \left\{ g_{\varepsilon\tau} \frac{\partial}{\partial x^\delta} (v_{\sigma\rho} g^{\sigma\pi} g^{\rho\varepsilon}) - S^{\kappa\pi}_{\cdot\cdot\sigma\tau\delta} v_{\kappa\pi} g^{\sigma\pi} \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{\kappa\pi[\delta}^{\alpha\sigma} v_{\sigma\tau]} g^{\kappa\pi} + \varphi_{\kappa\pi[\delta}^{\varepsilon\rho} v_{\sigma\rho]} g^{\kappa\pi} g^{\sigma\pi} g_{\tau\varepsilon} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma^{\tau\delta}_{\nu\lambda\omega} g^{\lambda\alpha} \left\{ g_{\pi\delta} \frac{\partial}{\partial x^\tau} (v_{\sigma\rho} g^{\sigma\pi} g^{\rho\beta}) - S^{\kappa\varepsilon}_{\cdot\cdot\delta\rho\tau} v_{\kappa\varepsilon} g^{\rho\beta} \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{\kappa\varepsilon[\tau}^{\sigma\pi} v_{\sigma\rho]} g^{\kappa\varepsilon} g^{\rho\beta} g_{\pi\delta} + \varphi_{\kappa\varepsilon[\tau}^{\rho\beta} v_{\sigma\rho]} g^{\kappa\varepsilon} \right\} \\ &\quad + g^{\tau\delta} \left\{ \varphi_{\tau\delta\omega}^{\lambda\alpha} g_{\pi\lambda} \nabla_\nu (v_{\sigma\rho} g^{\sigma\pi} g^{\rho\beta}) + \varphi_{\tau\delta\omega}^{\mu\beta} g_{\varepsilon\mu} \nabla_\nu (v_{\sigma\rho} g^{\sigma\pi} g^{\rho\varepsilon}) \right\}. \end{aligned}$$

Bei Vertauschung der Zeiger in den zweiten Ableitungen erhalten wir die folgenden Formeln :

$$(55) \quad 2F_{[\omega}F_{\nu]}v_{\lambda\mu} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 v_{\mu\nu}}{\partial x^\omega\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 v_{\nu\lambda}}{\partial x^\omega\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 v_{\mu\omega}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v_{\omega\lambda}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right) \\ - 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\nu]\lambda\mu}v_{\alpha\beta}) - F^{\alpha\beta}_{\lambda\mu[\omega}F_{\nu]}v_{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta}_{\mu[\nu\omega]} \frac{\partial v_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta]}} + F^{\alpha\beta}_{\lambda[\nu\omega]} \frac{\partial v_{[\beta\mu}}{\partial x^{\alpha]}} \\ + (F^{\sigma\rho}_{\mu[\nu\omega]}S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\sigma\rho} - F^{\sigma\rho}_{\lambda[\nu\omega]}S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\rho\mu\sigma})v_{\alpha\beta},$$

$$(56) \quad 2F_{[\omega}F_{\nu]}v_{\lambda}^{\cdot\tau} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 v_{\cdot\tau}^{\cdot\nu}}{\partial x^\omega\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v_{\cdot\tau}^{\cdot\omega}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 v_{\nu\lambda}g^{\mu\tau}}{\partial x^\omega\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 v_{\omega\lambda}g^{\mu\tau}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right) \\ - 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(S^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\nu]\lambda\mu}v_{\alpha\beta}g^{\mu\tau}) + 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(\varphi^{\mu\tau}_{[\alpha\beta][\nu]}v_{\lambda\mu}g^{\alpha\beta}) \\ - F^{\alpha\beta}_{\lambda\mu[\omega}F_{\nu]}(v_{\alpha\pi}g^{\pi\tau})g_{\tau\beta}g^{\mu\tau} - F^{\alpha\beta}_{\mu[\nu\omega]}g^{\mu\tau}\left\{g_{\tau\alpha}\frac{\partial v_{[\lambda\pi}g^{\pi\tau}}{\partial x^{\beta]}} - S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\lambda\alpha\beta}v_{\sigma\rho} \right. \\ \left. + \varphi^{\pi\tau}_{\sigma\rho[\beta}v_{\lambda\pi]}g^{\sigma\rho}g_{\tau\alpha}\right\} + F^{\alpha\beta}_{\lambda[\nu\omega]}\left\{\frac{\partial v_{[\beta\pi}g^{\pi\tau}}{\partial x^{\alpha]}} - S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\beta\pi\alpha}v_{\sigma\rho}g^{\pi\tau} + \varphi^{\pi\tau}_{\sigma\rho[\alpha}v_{\beta\pi]}g^{\sigma\rho}\right\} \\ + 2\varphi^{\mu\tau}_{\sigma\beta[\omega}F_{\nu]}(v_{\lambda\pi]}g^{\pi\tau})g_{\tau\mu}g^{\alpha\beta},$$

$$(57) \quad 2F_{[\omega}F_{\nu]}v^{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\beta\nu}g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\omega\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}}{\partial x^\omega\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\beta\omega}g^{\lambda\alpha}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 v_{\cdot}^{\alpha\omega}g^{\mu\beta}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right\} \\ - 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}(S^{\sigma\rho}_{\cdot\cdot\nu]\lambda\mu}v_{\sigma\rho}g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}) + 2\frac{\partial}{\partial x^{[\omega}}\left\{g^{\sigma\rho}(\varphi^{\lambda\alpha}_{[\sigma\rho][\nu]}v_{\lambda\mu})g^{\mu\beta} \right. \\ \left. + \varphi^{\mu\beta}_{[\sigma\rho][\nu]}v_{\lambda\mu})v^{\lambda\alpha}\right\} - g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}g_{\tau\pi}g_{\delta\epsilon}F^{\gamma\delta}_{\lambda\mu[\omega}F_{\nu]}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\rho\epsilon}) \\ - F^{\gamma\delta}_{\mu[\nu\omega]}g^{\mu\beta}g_{\epsilon\tau}F_{[\delta}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\epsilon\rho}) + F^{\gamma\delta}_{\lambda[\nu\omega]}g^{\lambda\alpha}g_{\pi\delta}F_{[\tau}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\rho\beta}) \\ + 2g^{\tau\delta}\left\{\varphi^{\lambda\alpha}_{\tau\delta[\omega}F_{\nu]}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\pi}g^{\rho\beta})g_{\pi\lambda} + \varphi^{\mu\beta}_{\tau\delta[\omega}F_{\nu]}(v_{\sigma\rho]}g^{\sigma\alpha}g^{\rho\epsilon})g_{\epsilon\mu}\right\}.$$

5. *Die Integrabilitätsbedingungen.* Wenn wir die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (10) untersuchen, indem wir die (10) wiederholt benutzen, so erhalten wir

$$(58) \quad K^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^l} = K^{mn}_{ijkl} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^n}.$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir ähnliche Relationen als Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (11), (22) und (23). Aus diesen Tatsachen sehen wir, dass $K^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $K'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $R^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $R'^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die Bestimmungszahlen von Affinoren 6-ter Stufe sind.

6. *Die Richtungsübertragungen.* $N-1$ Gleichungen im Koordinatensystem bestimmen eine *Kurve*, die in X_n enthalten ist. Eine Kurve kann auch durch ein System von n Gleichungen gegeben werden, welches einen Parameter enthält. Demnach wird die Kurve in folgender Form dargestellt:

$$(59) \quad x^\nu = x^\nu(t), \quad (7)$$

wobei t ein Parameter ist. Mit t_0 bezeichnen wir den dem Punkte x_0^ν entsprechenden Wert von t . Mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir eine beliebige Kurve und führen ein System von Differentialgleichungen längs der Kurve $\mathfrak{K}$

$$(60) \quad \frac{dv^{\lambda\mu}}{dt} + \Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma} v^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

wobei alle x^ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) in $v^{\lambda\mu}$ und $\Gamma^{\lambda\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ durch die Funktionen von t substituiert werden. Eine Lösung von (60), welche ein System von Funktionen $v^{\lambda\mu}$ ist, wird durch beliebige Werte von $v^{\lambda\mu}$ für einen gegebenen Wert von t bestimmt; und diese Lösung gibt die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Bivektors für jeden Wert von t . Diese Bivektoren heißen miteinander parallel in bezug auf eine gegebene Kurve und jeder der Bivektoren lässt sich durch eine *Parallelübertragung längs der gegebenen Kurve* aus einem anderen erhalten.

(7) Wir setzen voraus, dass alle Funktionen $x^\nu(t)$ für alle Werte von t in einer t_0 enthaltenden Umgebung analytisch regulär sind und die Werte von $\frac{dx^\nu}{dt}$ für $t = t_0$ nicht alle verschwinden.

Die Bivektoren $v^{\lambda\mu}$ und

$$(61) \quad \bar{v}^{\lambda\mu} = \varphi(t) v^{\lambda\mu}$$

haben dieselbe Richtung in bezug auf die gegebene Kurve $\mathfrak{K}$, wenn ein System von Funktionen $v^{\lambda\mu}$ den Gleichungen (60) genügt, wobei $\varphi(t)$ eine beliebige Funktion von t ist. Aus (60) und (61) erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(62) \quad \frac{d\bar{v}^{\lambda\mu}}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda\mu} \bar{v}^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{dt} = f(t) \bar{v}^{\lambda\mu},$$

wobei

$$(63) \quad f(t) = \frac{d \log \varphi(t)}{dt}.$$

Umgekehrt, wenn wir ein beliebiges System von Funktionen $\bar{v}^{\lambda\mu}(t)$ haben, welche (61) genügen, sind sie die Bestimmungszahlen von einer Familie der kontravarianten, in bezug auf $\mathfrak{K}$ parallelen Bivektoren. Wenn wir die Funktion $\varphi(t)$ in (62) eliminieren, so erhalten wir als die Bedingungen des Parallelismus

$$(64) \quad v^{\omega\pi} \left(\frac{dv^{\lambda\mu}}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda\mu} v^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{dt} \right) - v^{\lambda\mu} \left(\frac{dv^{\omega\pi}}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\omega\pi} v^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{dt} \right) = 0.$$

10. Oktober 1933.

Mathematisches Seminar, Universität zu Sapporo.